1 LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU ($\mathrm{LDR}_{2.ř}$)

Lineární diferenciální rovnicí druhého řádu nazýváme rovnici tvaru

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{1}$$

kde p, q a f jsou funkce definované a spojité na jistém intervalu J.

Funkce p a q se nazývají koeficienty této DR.

Rovnice (1) se nazývá homogenní (s nulovou pravou stranou), je-li $f(x) \equiv 0$:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{2}$$

Budeme ji označovat $\mathrm{HLDR}_{2.ř}$.

V případě (1) hovoříme o nehomogenní rovnici (s nenulovou pravou stranou). Budeme ji označovat $\mathrm{NLDR}_{2.ř}$.

Příklad 1. *a)* $y'' = -y'$, $\quad y'' + y' = 0 \qquad$ *$HLDR_{2.ř}$*

b) $y'' + x^2y + 1 = 0$, $\quad y'' + x^2y = -1 \qquad$ *$NLDR_{2.ř}$*

Věta 1. *Nechť p, q a f jsou funkce spojité na intervalu J. Nechť $x_0 \in J$ a $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla. Pak rovnice (1) má právě jedno řešení splňující Cauchyovy počáteční podmínky*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.$$

Toto řešení je definováno (existuje) na celém intervalu J.

Geometrická interpretace:

Hledáme takové řešení dané rovnice, které v bodě x_0 nabývá hodnoty y_0 a jehož derivace v bodě x_0 nabývá hodnoty y_1.

Poznámka 1. *Chceme-li pomocí DR formulovat úlohu, která má právě jedno řešení, musíme předepsat tolik počátečních podmínek, jaký je řád rovnice.*

Je-li podmínek méně, má úloha nekonečně mnoho řešení, je-li jich více, nemusí mít žádné.

1.1 Vlastnosti homogenních rovnic ($\mathrm{HLDR}_{2.ř}$)

Věta 2. *Buďte $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dvě řešení rovnice (2) na J. Pak funkce $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty z $\mathbb{R}$, je také řešením rovnice (2).*

Důkaz. Funkci $y(x)$ dosadíme do (2).

Při označení $L(y) := y'' + p(x)y' + q(x)y$ máme pro řešení (2) y_1 a y_2:

$$L(y_1) = 0, \quad L(y_2) = 0.$$

Pro jejich lineární kombinaci $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ (z linearity L) dostáváme

$$L(y) = L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) = C_10 + C_20 = 0.$$

□

Definice 1.1. *Řekneme, že funkce y_1, y_2, $\dots y_r$, $r \in \mathbb{N}$, jsou* lineárně závislé *na J, existují-li konstanty c_1, c_2, $\dots$, c_r, z nichž aspoň jedna je různá od nuly, tak, že*

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots c_ry_r(x) \equiv 0,$$

(tj. pro všechna $x \in J$).

V opačném případě jsou y_1, y_2, $\dots y_r$, $r \in \mathbb{N}$, na J lineárně nezávislé.

Vyšetřování lineární (ne)závislosti podle definice je obtížné. Naštěstí máme k dispozici praktičtější postup. Zda jsou či nejsou funkce lineárně závislé poznáme podle wronskiánu.

Definice 1.2. *Buďte y_1, y_2, $\dots y_r$, $r \in \mathbb{N}$, diferencovatelné funkce na J. Výraz*

$$W[y_1, y_2, \dots y_r] := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_r \\ y_1' & y_2' & \dots & y_r' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_r'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(r-1)} & y_2^{(r-1)} & \dots & y_r^{(r-1)} \end{vmatrix}$$

nazýváme wronskián *(determinant Wronského).*

Nyní si uvedeme speciální větu pro naše potřeby (dvojice lineárně nezávislých řešení naší úlohy + stačí vyšetřit v jediném bodě intervalu J):

Věta 3. *Buďte y_1 a y_2 dvě funkce diferencovatelné na J. Funkce y_1 a y_2 jsou lineárně nezávislé na J, právě když $W[y_1, y_2] \neq 0$ pro některé $x \in J$.*

Příklad 2. *Vyšetřete lineární (ne)závislost funkcí* e^{-x} *a* e^{-2x}.

Řešení. Jsou lineárně nezávislé, protože

$$W[\mathrm{e}^{-x}, \mathrm{e}^{-2x}] = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{-2x} \\ -\mathrm{e}^{-x} & -2\,\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-x}(-2)\,\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{-2x} = -\,\mathrm{e}^{-3x} \neq 0,$$

pro $x \in \mathbb{R}$. □

Příklad 3. *Vyšetřete lineární (ne)závislost funkcí* $\sin x$ *a* $\cos x$.

Řešení. Jsou lineárně nezávislé, protože

$$W[\sin x, \cos x] = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0,$$

pro $x \in \mathbb{R}$. □

Definice 1.3. *Každou dvojici lineárně nezávislých řešení* y_1 *a* y_2 *dané HLDR*$_{2.ř}$ *nazveme fundamentální systém řešení HLDR*$_{2.ř}$ *(též báze řešení HLDR*$_{2.ř}$*).*

Věta 4. *Buď* y_1 *a* y_2 *fundamentální systém řešení HLDR*$_{2.ř}$*. Pak každé řešení* y *této rovnice je tvaru*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

kde C_1 *a* C_2 *jsou vhodné reálné konstanty.*

Důsledky:

1. Je-li y_1 partikulární řešení (2), je i $C_1 y_1$ řešení této rovnice.
2. Jsou-li y_1 a y_2 partikulární řešení (2), pak i každá jejich libovolná lineární kombinace je řešením (2).
3. Jsou-li y_1 a y_2 lineárně nezávislá partikulární řešení (tj. y_1 a y_2 tvoří fundamentální systém), pak

   $$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

   je obecné řešení (2).
4. Fundamentální systém řešení každé HLDR$_{2.ř}$ je tvořen dvojicí lineárně nezávislých řešení.

Příklad 4. *Mějme HLDR*$_{2.ř}$

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Pro $x \neq 0$ *můžeme upravit na*

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0,$$

odkud $p(x) = -\frac{2}{x}$ *a* $q(x) = \frac{2}{x^2}$*. Bylo nám řečeno (ověřte), že* $y_1(x) = x$ *a* $y_2(x) = x^2$ *jsou dvě řešení. Pomocí wronskiánu,*

$$W[x, x^2] = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x - x^2 \not\equiv 0,$$

zjistíme, že jsou lineárně nezávislá, a tak tvoří fundamentální systém řešení naší rovnice. Obecné řešení tedy můžeme zapsat jako jejich lineární kombinaci $y = C_1 x + C_2 x^2$*,* $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

1.2 HLDR$_{2.ř}$ s konstantními koeficienty

Zde se zaměříme na zjednodušenou HLDR$_{2.ř}$, která bude mít konstantní koeficienty $p(x) \equiv a$, $q(x) \equiv b$:

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

kterou budeme nazývat HLDR$_{2.ř}$ s konstantními koeficienty.

Řešení této rovnice budeme hledat ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Hodnotu λ (Existuje? Je jediná?) se pokusíme se nalézt dosazením y do (3):

$$L = y''+ay'+by = (\mathrm{e}^{\lambda x})''+a(\mathrm{e}^{\lambda x})'+b(\mathrm{e}^{\lambda x}) = \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda x} + a\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x} + b\,\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^2+a\lambda+b).$$

Dostali jsme se k rovnici

$$\mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0.$$

Jelikož $\mathrm{e}^{\lambda x}$ je vždy kladné, všechna řešení jsou skryta v rovnici

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{4}$$

Tu budeme nazývat *charakteristická*.

Věta 5. *Mějme HLDR$_{2.ř}$ s konstantními koeficienty (3). Označme λ_1 a λ_2 kořeny charakteristické rovnice (4).*

1. *Jsou-li λ_1 a λ_2 dvě různá reálná čísla, pak fundamentální systém řešení (3) je tvořen funkcemi $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ a $y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$; tedy obecné řešení můžeme zapsat $y = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$.*

2. *Jsou-li λ_1 a λ_2 dvě stejná reálná čísla (dvojnásobný kořen), pak fundamentální systém řešení (3) je tvořen funkcemi $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ a $y_2 = x\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$; tedy obecné řešení (3) můžeme zapsat $y = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x)$.*

3. *Jsou-li $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ a $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $(\beta \neq 0)$, dvě komplexně sdružená čísla, pak fundamentální systém řešení (3) je tvořen funkcemi $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ a $y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$; tedy obecné řešení (3) můžeme zapsat $y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.*

Postup při řešení HLDRII s konstantními koeficienty:

1. Sestavíme charakteristickou rovnici.

2. Řešíme charakteristickou rovnici (tj. kvadratickou rovnici).

3. Podle věty najdeme fundamentální systém a obecné řešení.

Domácí cvičení

Úloha 1. *Nalezněte obecná řešení následujících diferenciálních rovnic:*

1) $y'' + 4y = 0$,

2) $y'' - y' = 0$,

3) $y'' - y = 0$,

4) $y'' + y' - 2y = 0$,

5) $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Nepovinný dodatek pro $n > 2$

Obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice řádu vyššího než dva, například

$$y''' - 2y'' = 0,$$

se hledá velmi obdobně.

Řešíme příslušnou charakteristickou rovnici:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 0\lambda + 0 = 0 \iff \lambda^2(\lambda - 2) = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2.$$

Všechny tři charakteristické kořeny jsou dety reálné (jeden dvojnásobný).

Fundamentální systém řešení:

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{0x} = 1, \quad y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{0x} = x, \quad y_3(x) = \mathrm{e}^{2x}\,.$$

Obecné řešení:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) = C_1 + C_2 x + C_3\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Nakonec si ukažme, že FSŘ je opravdu tvořen lineárně nezávislými funkcemi:

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} 1 & x & \mathrm{e}^{2x} \\ 0 & 1 & 2\,\mathrm{e}^{2x} \\ 0 & 0 & 4\,\mathrm{e}^{2x} \end{vmatrix} = 4\,\mathrm{e}^{2x} \neq 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

2 Nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Připomeňme si základní tvar nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu:

$$y'' + p(x)y' + q(x) = f(x), \tag{5}$$

což při označení
$$L(y) := y'' + p(x)y' + q(x)$$
(L odkazuje na slova „levá“ a „lineární“) můžeme zapsat i zkráceně:
$$L(y) = f(x). \tag*{$L(5)$}$$
Příslušnou homogenní úlohu (HÚ) podobně zapisujeme:
$$L(y) = 0. \tag{6}$$

Věta 6. *Je-li Y partikulární řešení NLDR$_{2.ř.}$ a $\overline{y}$ obecné řešení HLDR$_{2.ř.}$, pak*
$$y = \overline{y} + Y$$
je obecné řešení NLDR$_{2.ř.}$. (Obecné řešení NLDR$_{2.ř.}$ je rovno součtu partikulárního řešení NLDR$_{2.ř.}$ a obecného řešení HLDR$_{2.ř.}$.)

Věta dává návod, jak najít obecné řešení NLDR (obecně i vyššího řádu než druhého).

Postup:

1. K dané NLDR vytvoříme příslušnou HLDR.
2. Najdeme obecné řešení HLDR, tj. $\overline{y}$, jako lineární kombinaci partikulárních řešení y1 a y2, která tvoří fundamentální systém řešení HLDR.
3. Najdeme nějaké partikulární řešení Y NLDR.
4. Obecné řešení NLDR je $y = \overline{y} + Y$.

Vlastnosti řešení NLDR

$$\left.\begin{array}{l} y_1 \text{ je řešením DR } L(y) = f_1(x) \\ y_2 \text{ je řešením DR } L(y) = f_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} L(y_1) = f_1(x) \\ L(y_2) = f_2(x) \end{array}.$$

Co z toho vyplývá pro lineární kombinaci těchto dvou funkcí?
$$L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x),$$
a tedy
$$y = \alpha y_1 + \beta y_2 \quad \text{je řešením DR} \quad L(y) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x).$$

Jak hledáme partikulární řešení NLDR?

Existují dva způsoby nalezení partikulárního řešení Y NLDR:

1. Metoda variace konstant
   Je to univerzální metoda, která je platná pro DR s konstantními i nekonstantními koeficienty. Předpokládá však, že známe fundamentální systém příslušné HLDR, který ale u rovnice s nekonstantními koeficienty neumíme najít.

   Tento postup je zdlouhavý, proto, pokud je to možné, dáváme přednost následující metodě, která je jednodušší a rychlejší.

2. Metoda neurčitých koeficientů (též metoda odhadu)
   Dá se použít pouze v případě rovnice s konstantními koeficienty a navíc se speciální pravou stranou. Některé funkce totiž často vystupují jako pravé strany lineárních DR a podle tvaru pravé strany rovnice lze u některých speciálních případů odhadnout tvar partikulárního řešení Y dané rovnice až na koeficienty, které vypočítáme.

Metoda variace konstant

Podobně jako u lineárních DR prvního řádu, vyjdeme z obecného řešení HLDR

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Řešení y NLDR hledáme v podobném tvaru, jen konstanty C_1 a C_2 nahradíme funkcemi (odtud název metody „variace konstant“):

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2.$$

Neznámé funkce $C_1(x)$ a $C_2(x)$ hledáme tak, že y dosadíme řešené NLDR. K tomu budeme potřebovat i první a druhou derivaci y.

Nejprve vypočteme y':

$$y' = (C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2)' = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2'.$$

Situaci si zjednodušíme tím, že součet členů, ve kterých se vyskytují derivace neznámých funkcí $C_1(x)$ a $C_2(x)$, položíme roven nule:

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0.$$

Tím zajistíme, že ve výsledných rovnicích pro neznámé $C_1(x)$ a $C_2(x)$ se nebudou vyskytovat druhé derivace těchto funkcí, neboť nyní máme:

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'.$$

Můžeme přejít k výpočtu druhé derivace:

$$y'' = (C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2')' = C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2''.$$

Dosadíme do NLDR $(y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x))$ a upravíme:

$$\begin{aligned} \Big[C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2''\Big] &+ \\ +p(x)\Big[C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'\Big] + q(x)\Big[C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2\Big] &= f(x), \\ C_1(x)\Big[\overbrace{y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1}^{=0}\Big] + C_2(x)\Big[\overbrace{y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2}^{=0}\Big] &+ \\ +C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= f(x). \end{aligned}$$

Výsledkem je tedy rovnice $C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$. Společně s podmínkou $C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$ máme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých funkcích $C_1'(x)$ a $C_2'(x)$:

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 &= 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= f(x). \end{aligned} \tag{7}$$

Takovou soustavu můžeme řešit různými způsoby, ale pro nás bude výhodné použít tzv. Cramerovo pravidlo. Základním předpokladem je nenulovost determinantu matice soustavy

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že tento determinant je současně wronskiánem pro dvě lineárně nezávislá řešení y_1 a y_2, a tak tedy je nenulový.

Podle Cramerova pravidla tak máme zajištěnu existenci právě jednoho řešení soustavy, které lze vyjádřit následovně:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-f(x)y_2}{y_1y_2' - y_1'y_2},$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{f(x)y_1}{y_1y_2' - y_1'y_2}.$$

Věta 7. *Buď $\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ obecné řešení HLDR$_{2.ř.}$. Potom obecné řešení NLDR$_{2.ř.}$ je tvaru*

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2,$$

přičemž funkce $C_1(x)$ a $C_2(x)$ splňují soustavu

$$\begin{aligned} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 &= 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' &= f(x). \end{aligned}$$

Poznámka 2. *Jak v tomto tvaru řešení najdeme avizovaný rozklad na $y = \overline{y} + Y$? Neznámé funkce $C_1(x)$ a $C_2(x)$ získáme integrací, takže je můžeme vyjádřit následovně (C_1 a C_2 jsou integrační konstanty):*

$$C_1(x) = K_1(x) + C_1, \quad C_2(x) = K_2(x) + C_2.$$

Po dosazení do předchozí věty:

$$\begin{aligned} y &= C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 = (K_1(x) + C_1) y_1 + (K_2(x) + C_2) y_2 \\ &= K_1(x) y_1 + C_1 y_1 + K_2(x) y_2 + C_2 y_2 \\ &= \big(C_1 y_1 + C_2 y_2\big) + \big(K_1(x) y_1 + K_2(x) y_2\big) \\ &= \overline{y} + Y. \end{aligned}$$

Úloha 2. *Metodou variace konstant nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' - y = \sin x.$$

Řešení. Nejprve řešíme příslušnou homogenní úlohu

$$y'' - y = 0.$$

Jde o rovnici s konstantními koeficienty. Sestavíme a vyřešíme charakteristickou rovnici:

$$\text{(ChR) } \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad \text{(FSŘ) } y_1 = \mathrm{e}^x,\ y_2 = \mathrm{e}^{-x}.$$

Obecné řešení HÚ:

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-x}.$$

Nyní přejdeme k řešení nehomogenní úlohy metodou variace konstant. Řešení tedy hledáme ve tvaru

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 = C_1(x) \mathrm{e}^x + C_2(x) \mathrm{e}^{-x},$$

kde $C_1(x)$ a $C_2(x)$ splňují soustavu

$$\begin{array}{rcl} C_1'(x)\,\mathrm{e}^x + C_2'(x)\,\mathrm{e}^{-x} & = & 0, \\ C_1'(x)\,\mathrm{e}^x + C_2'(x)(-\,\mathrm{e}^{-x}) & = & \sin x. \\ \hline \end{array}$$

Řešíme:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-x} \\ \sin x & -\,\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x & -\,\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{-\sin x\,\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x(-\,\mathrm{e}^{-x}) - \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\sin x,$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & 0 \\ \mathrm{e}^x & \sin x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x & -\,\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{\sin x\,\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^x(-\,\mathrm{e}^{-x}) - \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x}} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}\sin x.$$

Nyní nás čeká integrace.

$$C_1(x) = \int C_1'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x,$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x}\sin x\,\mathrm{d}x.$$

Výpočty necháme pod čarou[1]

a nakonec dostáváme

$$C_1(x) = -\frac{1}{4}(\sin x + \cos x)\,\mathrm{e}^{-x} + C_1,$$

$$C_2(x) = \frac{1}{4}(\cos x - \sin x)\,\mathrm{e}^{x} + C_2,$$

---

[1] $\int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{ll} u = \mathrm{e}^{-x} & v' = \sin x \\ u' = -\,\mathrm{e}^{-x} & v = -\cos x \end{array}\right] = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x) - \int \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{ll} u = \mathrm{e}^{-x} & v' = \cos x \\ u' = -\,\mathrm{e}^{-x} & v = \sin x \end{array}\right] = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x) - \left(\mathrm{e}^{-x}\sin x + \int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x\right) = -\,\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x) - \int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$. (Na obou stranách stejný integrál, ale s opačnými znaménky.)

$2\int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x) \implies \boxed{\int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)\,\mathrm{e}^{-x}}$.

Obdobně $\boxed{\int \mathrm{e}^{x}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)\,\mathrm{e}^{x}}$.

a tedy obecné řešení nehomogenní úlohy

$$\begin{aligned}
y &= C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \\
&= \left(-\frac{1}{4}(\sin x + \cos x)\,\mathrm{e}^{-x} + C_1\right)\mathrm{e}^{x} + \left(\frac{1}{4}(\cos x - \sin x)\,\mathrm{e}^{x} + C_2\right)\mathrm{e}^{-x} \\
&= -\frac{1}{4}(\sin x + \cos x) + C_1\,\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{4}(\cos x - \sin x) + C_2\,\mathrm{e}^{-x} \\
&= \frac{1}{4}(-\sin x - \cos x + \cos x - \sin x) + C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} \\
&= \frac{1}{4}(-2\sin x) + C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} = -\frac{1}{2}\sin x + C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}\,.
\end{aligned}$$

Závěr: Diferenciální rovnice $y'' - y = \sin x$ má obecné řešení $y = -\frac{1}{2}\sin x + C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}$. □

Úloha 3. *Metodou variace konstant nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}.$$

Řešení. Nejprve řešíme příslušnou homogenní úlohu

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Jde o rovnici s konstantními koeficienty. Sestavíme a vyřešíme charakteristickou rovnici:

$$\text{(ChR)}\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad\Longrightarrow\quad \text{(FSŘ)}\ y_1 = \mathrm{e}^{x},\ y_2 = x\,\mathrm{e}^{x}\,.$$

Obecné řešení HÚ:

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{x}\,.$$

Nyní přejdeme k řešení nehomogenní úlohy metodou variace konstant. Řešení tedy hledáme ve tvaru

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = C_1(x)\,\mathrm{e}^{x} + C_2(x)x\,\mathrm{e}^{x},$$

kde $C_1(x)$ a $C_2(x)$ splňují soustavu

$$\begin{aligned}
C_1'(x)\,\mathrm{e}^{x} + C_2'(x)x\,\mathrm{e}^{x} &= 0, \\
C_1'(x)\,\mathrm{e}^{x} + C_2'(x)[\mathrm{e}^{x} + x\,\mathrm{e}^{x}] &= \tfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}.
\end{aligned}$$

Tuto soustavu na ukázku nebudeme řešit pomocí Cramerova pravidla, ale pro její jednoduchost nejprve od druhé rovnice odečteme první a dostaneme

$$C_2'(x)\,\mathrm{e}^{x} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} \;\Rightarrow\; C_2'(x) = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; C_2(x) = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní $C_2'(x) = \frac{1}{x}$ dosadíme zpět do první rovnice a dostaneme:

$$C_1'(x)\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{x} x\,\mathrm{e}^x = 0, \quad C_1'(x) = -1 \;\Rightarrow\; C_1(x) = \int -1\,\mathrm{d}x = -x + C_1,\; C_1 \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení nehomogenní úlohy

$$\begin{aligned} y &= C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \\ &= (-x + C_1)\,\mathrm{e}^x + (\ln|x| + C_2)x\,\mathrm{e}^x \\ &= \underbrace{C_1\,\mathrm{e}^x + C_2x\,\mathrm{e}^x}_{=\overline{y}} \underbrace{-x\,\mathrm{e}^x + \ln|x|x\,\mathrm{e}^x}_{=Y},\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Závěr: Diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$ má obecné řešení

$$y = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2x\,\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x + \ln|x|x\,\mathrm{e}^x\,.$$

□

Metoda neurčitých koeficientů

Jde o metodu kvalifikovaného odhadu tvaru partikulárního řešení nehomogenní úlohy, kde pro jisté typy pravých stran víme, jak má příslušné partikulární řešení vypadat, až na nějaké konstanty, které musíme dopočítat dosazením tohoto částečně neurčitého řešení do rovnice.

Úvodní příklady

Příklad 5. *Pro pravou stranu $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ volíme $Y = A\,\mathrm{e}^{3x}$, kde $A \in \mathbb{R}$ je neznámá konstanta (neurčitý koeficient), který musíme ještě dopočítat (dosazením do řešené rovnice).*

Konkrétně například $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{3x}$:

Zde máme obecné řešení HÚ $\overline{y} = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^x$, neboť $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Jako partikulární řešení zvolme $Y = A\,\mathrm{e}^{3x}$. Pro dosazení potřebujeme dopočítat $Y' = 3A\,\mathrm{e}^{3x}$ a $Y'' = 9A\,\mathrm{e}^{3x}$. Po dosazení dostaneme $Y'' - 2Y' + Y = \mathrm{e}^{3x}$, $(9A\,\mathrm{e}^{3x}) - 2(3A\,\mathrm{e}^{3x})' + (A\,\mathrm{e}^{3x}) = \mathrm{e}^{3x}$, $4A\,\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}$, $4A = 1$, $A = \frac{1}{4}$, a tak dostáváme $Y = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{3x}$.

Dohromady $y = \overline{y} + Y = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Drobný problém může nastat, když tato volená funkce je již obsažena v obecném řešení homogenní úlohy. V takovém případě by se Y „rozplynulo“ v $\overline{y}$ a funkce $y = \overline{y} + Y$ by byla stále jenom řešením homogenní úlohy.

Příklad 6. *Předvedeme si to na rovnici $y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{3x}$:*

Zde máme obecné řešení homogenní úlohy $\overline{y} = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}$, neboť $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -1$.

Když pro pravou stranu $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ zvolíme $Y = A\,\mathrm{e}^{3x}$, kde $A \in \mathbb{R}$ je neznámá konstanta (neurčitý koeficient), dostaneme funkci, která je již obsažena v $\overline{y}$, a tak pro libovolné $A \in \mathbb{R}$ nedostaneme nic navíc: $y = \overline{y} + Y = (C_1 + A)\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}$ je jen jiným tvarem $\overline{y}$, a tak stále jenom řešením homogenní úlohy.

Jde o jistou formu násobnosti (stejně jako u charakteristických kořenů), a tak to vyřešíme obdobně, volené (neurčité řešení) násobíme x, tedy $Y = Ax\,\mathrm{e}^{3x}$, případně x^2, $Y = Ax^2\,\mathrm{e}^{3x}$, pokud je v $\overline{y}$ i funkce $x\,\mathrm{e}^{3x}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 3)$.

Příklad 6 (—dokončení)**.** *Pro pravou stranu $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ a obecné řešení HÚ $\overline{y} = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}$ tedy volíme $Y = Ax\,\mathrm{e}^{3x}$, kde $A \in \mathbb{R}$ je neznámá konstanta (neurčitý koeficient). Takto se vyhneme funkci, která je již obsažena v $\overline{y}$.*

Dopočítáme: $Y' = A\,\mathrm{e}^{3x} + 3Ax\,\mathrm{e}^{3x} = (A + 3Ax)\,\mathrm{e}^{3x}$ a
$Y'' = 3A\,\mathrm{e}^{3x} + 3A\,\mathrm{e}^{3x} + 9Ax\,\mathrm{e}^{3x} = (6A + 9Ax)\,\mathrm{e}^{3x}$.

Dosadíme do $Y'' - 2Y' - 3Y = \mathrm{e}^{3x}$:
$(6A + 9Ax)\,\mathrm{e}^{3x} - 2(A + 3Ax)\,\mathrm{e}^{3x} - 3Ax\,\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}$, $4A = 1$, $A = \frac{1}{4}$, a tak dostáváme $Y = \frac{1}{4}x\,\mathrm{e}^{3x}$.

Dohromady: $y = \overline{y} + Y = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{4}x\,\mathrm{e}^{3x} = (C_1 + \frac{1}{4}x\,\mathrm{e}^{3x}) + C_2\,\mathrm{e}^{-x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Příklad 7 (Vyšší násobnost)**.** *Jak už jsme uvedli dříve, v případě výskytu funkce $x\,\mathrm{e}^{3x}$ v obecném řešení HÚ, je třeba $A\,\mathrm{e}^{3x}$ vynásobit x^2. Ukážeme si to na rovnici s dvojnásobným reálným charakteristickým kořenem $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$: $y'' + 6y' + 9y = \mathrm{e}^{3x}$:*

Pro pravou stranu $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ a obecné řešení HÚ $\overline{y} = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{3x}$ tedy volíme $Y = Ax^2\,\mathrm{e}^{3x}$, kde $A \in \mathbb{R}$ je neznámá konstanta (neurčitý koeficient). Takto se vyhneme funkcím, které jsou již obsaženy v $\overline{y}$.

Dopočítáme: $Y' = 2Ax\,\mathrm{e}^{3x} + 3Ax^2\,\mathrm{e}^{3x} = (2Ax + 3Ax^2)\,\mathrm{e}^{3x}$ a
$Y'' = 2A\,\mathrm{e}^{3x} + 6Ax\,\mathrm{e}^{3x} + 6Ax\,\mathrm{e}^{3x} + 9Ax^2\,\mathrm{e}^{3x} = (2A + 12Ax + 9Ax^2)\,\mathrm{e}^{3x}$.

Dosadíme do $Y'' - 6Y' + 9Y = \mathrm{e}^{3x}$:
$(2A + 12Ax + 9Ax^2)\,\mathrm{e}^{3x} - 6(2Ax + 3Ax^2)\,\mathrm{e}^{3x} + 9Ax^2\,\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}$, $2A = 1$, $A = \frac{1}{2}$, a tak dostáváme $Y = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{3x}$.

Dohromady: $y = \overline{y} + Y = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{3x} = (C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2)\,\mathrm{e}^{3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Metoda

Tato metoda může vést k cíli rychleji a jednodušeji než variace konstant, ALE její použití se omezuje jen na rovnice s konstantními koeficienty a pravá strana musí být speciálního typu. Jedná se o lineární kombinaci funkcí tvaru

$$f_1(x) = p_1(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \qquad f_2(x) = p_2(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad f_3(x) = p_3(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,$$

kde p_1, p_2, p_3 jsou polynomy a $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (pro $\lambda = 0$ dostáváme „čistý“ polynom $p_1(x)$).

Již jsme si ukazovali, že pokud budeme znát řešení pro každou pravou stranu zvlášť, pak výsledné celkové řešení bude lineární kombinací dílčích řešení, se stejnými koeficienty jako jsou použity u pravých stran:

$$\Big(L(y_1) = f_1(x),\ L(y_2) = f_2(x),\ L(y_3) = f_3(x)\Big) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad L(ay_1 + by_2 + cy_3) = af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x).$$

Jistě jste si všimli, že (až na násobení polynomem) „povolenými“ pravými stranami jsou funkce, které se objevují jako řešení homogenní úlohy s konstantními koeficienty:

- $\mathrm{e}^{\lambda x}$ pro reálný charakteristický kořen λ,
- $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ a $\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ pro komplexní char. kořen $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$.

V úvodních příkladech jsme si ukázali, že takto může dojít ke konfliktu při volbě (neurčitého tvaru) partikulárního řešení Y. V příkladech jsme tomu zamezili případným vynásobením mocninou x. Abychom mohli tento postup formalizovat, označíme si exponent x písmenem N (N jako násobnost).

Bude nás zajímat vztah mezi λ z pravé strany a charakteristickými kořeny příslušné homogenní úlohy. Tento vztah zaznamenáme pomocí veličiny N, která v našem případě může nabývat hodnoty

- 0, pokud λ není char. kořenem,
- 1, pokud λ je jednoduchým char. kořenem,
- 2, pokud λ je dvojnásobným char. kořenem[2].

Při tomto nastavení můžeme vyslovit následující větu o volbě partikulárního řešení.

Věta 8. *Nechť p je polynom stupně $s \geq 0$, nechť*

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{$*$}$$

je rovnice s konstantními koeficienty a nechť N je výše definovaná veličina vztažená k naší rovnici (*).

Pak platí:

a) Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ a $f(x) = p(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, existuje polynom q stupně nejvýše s tak, že funkce $Y(x) := x^N q(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ je partikulárním řešením rovnice (*).

[2] Obecně, u rovnic n-tého řádu, může být $N = k$, $k \leq n$, když je λ k-násobným char. kořenem.

b) Je-li $\lambda = \alpha + i\beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, a je-li $f(x)$ rovno $p(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ nebo $p(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$, existují polynomy q a r stupně nejvýše s tak, že funkce $Y(x) := x^N\,\mathrm{e}^{\alpha x}(q(x)\cos\beta x + r(x)\sin\beta x)$ je partikulárním řešením rovnice (*).

Ukázky volby Y

a) $y'' - y = (x^2+2x+1)\,e^x$

HÚ: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$

NHÚ $f(x) = (x^2+2x+1)\cdot e^x = p(x)\cdot e^{\lambda x}$, $p(x) = x^2+2x+1$, st $p = 2$

$\lambda = 1 = \lambda_1 \Rightarrow N = 1$

$$Y = x^N\cdot q(x)\cdot e^{\lambda x} = x^1\cdot(Ax^2+Bx+C)\cdot e^x =$$
$$= (Ax^3+Bx^2+Cx)\cdot e^x$$

b) $y'' - y = (2x+5)\,e^{2x}$

HÚ: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$

NHÚ: $f(x) = (2x+5)\,e^{2x} = p(x)\cdot e^{\lambda x}$ st $p = 1$

$\lambda = 2$ není char. k.

$\Rightarrow N = 0$

$$Y = x^N\cdot q(x)\cdot e^{\lambda x} = x^0\,(Ax+B)\cdot e^{2x} =$$
$$= (Ax+B)\cdot e^{2x}$$

c) $y'' - 2y' + y = 2\cdot e^x$

HÚ: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

NHÚ: $f(x) = 2\cdot e^x = p(x)\cdot e^{\lambda x}$, st $p = 0$

$\lambda = 1 = \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$ dvojnásobný $\Rightarrow$

$\Rightarrow N = 2$

$$Y = x^N\cdot q(x)\cdot e^{\lambda x} = x^2\,(A)\cdot e^x = Ax^2 e^x$$

d) $y'' + 4y = \sin 2x$

HÚ: $\lambda_1 = 0 + 2i$ $\quad \alpha = 0,\ \beta = 2$
$\lambda_2 = 0 - 2i$

NHÚ: $f(x) = \sin 2x = e^{0x} \cdot \sin 2x$, $\alpha = 0,\ \beta = 2$, st p = 0
$\lambda = 0 + 2i = 2i$ je kořenem ChR $\Rightarrow N = 1$

$$Y = x^1 \cdot e^{0x}(A\cos 2x + B\sin 2x) = x(A\cos 2x + B\sin x)$$

e) $y'' + 4y = e^{3x}\cos 2x$

HÚ: $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$ $\quad \alpha = 0,\ \beta = 2$

NHÚ: $f(x) = e^{3x}\cos 2x = p(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$, $\lambda = 3 + 2i$ není koř. ChR $\Rightarrow N = 0$
st p = 0

$$Y = x^0 e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x) = e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

f) $y'' - 4y' + 5y = (x^2+1)e^{2x}\cos x$

HÚ: $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$, $\alpha = 2,\ \beta = 1$

NHÚ: $f(x) = (x^2+1)e^{2x}\cos x = p(x) \cdot e^{\alpha x}\cos \beta x$ $\quad$ st p = 2
$\lambda = 2 + i$ je koř. ChR $\Rightarrow N = 1$

$$Y = x^N e^{\alpha x}(q(x)\cos \beta x + r(x)\sin \beta x) =$$
$$= x^1 \cdot e^{2x}\left((Ax^2+Bx+C)\cdot\cos x + (Dx^2+Ex+F)\cdot\sin x\right) =$$
$$= e^{2x}\left[(Ax^3+Bx^2+Cx)\cos x + (Dx^3+Ex^2+Fx)\sin x\right]$$

Řešené příklady

Úloha 4. *Metodou neurčitých koeficientů nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' - y = \sin x.$$

Řešení. Nejprve řešíme příslušnou homogenní úlohu

$$y'' - y = 0.$$

Jde o rovnici s konstantními koeficienty. Sestavíme a vyřešíme charakteristickou rovnici:

$$\text{(ChR) } \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad \text{(FSŘ) } y_1 = \mathrm{e}^x,\ y_2 = \mathrm{e}^{-x}.$$

Obecné řešení HÚ:

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-x}.$$

Nyní přejdeme k řešení nehomogenní úlohy metodou neurčitých koeficientů. Rozklíčujeme pravou stranu:

$$f(x) = \sin x = \mathrm{e}^{0 \cdot x} \sin 1 \cdot x \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0 + i \cdot 1 = i \notin \{1, -1\} \quad \Longrightarrow \quad N = 0.$$

Partikulární řešení nehomogenní úlohy tedy budeme hledat ve tvaru

$$Y = x^0 \mathrm{e}^{0 \cdot x}(A \cos 1 \cdot x + B \sin 1 \cdot x) = A \cos x + B \sin x.$$

Ještě vypočteme první a druhou derivaci a dosadíme do nehomogenní úlohy:

$$Y' = -A \sin x + B \cos x, \qquad Y'' = -A \cos x - B \sin x,$$

$$\begin{aligned} Y'' - Y &= \sin x, \\ (-A \cos x - B \sin x) - (A \cos x + B \sin x)Y &= \sin x, \\ -2A \cos x - 2B \sin x &= \sin x, \\ -2A \cos x - (2B + 1) \sin x &= 0. \end{aligned}$$

Aby byla splněna rovnost (jde vlastně o lineární kombinaci lineárně nezávislých funkcí), musí se oba koeficienty rovnat nule:

$$(-2A = 0,\ -(2B + 1) = 0) \quad \Longrightarrow \quad (A = 0,\ B = -\frac{1}{2}),$$

a tedy $Y = 0 \cdot \cos x - \frac{1}{2} \sin x = -\frac{1}{2} \sin x$.
Závěr: Diferenciální rovnice $y'' - y = \sin x$ má obecné řešení $y = \overline{y} + Y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2} \sin x$. □

Úloha 5. *Metodou neurčitých koeficientů vyřešte počáteční úlohu*

$$y'' + 2y' + y = x^2 + \cos x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Řešení. Pravá strana je složena ze dvou částí:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^2 + \cos x.$$

K řešené rovnici zapíšeme dvě dílčí:

$$y'' + 2y' + y = x^2 \quad \text{a} \quad y'' + 2y' + y = \cos x.$$

Součet jejich řešení nám dá řešení původní rovnice:

$$\big(L(y_1) = f_1(x), \quad L(y_2) = f_2(x)\big) \quad \Longrightarrow \quad L(y_1 + y_2) = f_1(x) + f_2(x).$$

HÚ je stejná pro obě dílčí rovnice.

– Char. rovnice: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, $(\lambda + 1)^2 = 0$.

– Char. kořeny: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

– OŘHÚ: $\overline{y} = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

Nyní budeme hledat partikulární řešení dílčích rovnic.

1) Pro pravou stranu $f_1(x) = x^2 = x^2\,\mathrm{e}^{0x}$ máme

$$s = 2, \quad \lambda = 0 \neq \lambda_{1,2} \ \Rightarrow\ N = 0.$$

Partikulární řešení bude mít (neurčitý) tvar

$$Y_1(x) := x^N q(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x} = x^0(Ax^2 + Bx + C)\,\mathrm{e}^{0x} = Ax^2 + Bx + C.$$

Dopočteme derivace: $Y_1'(x) = 2Ax + B, \quad Y_1''(x) = 2A.$
Dosadíme do rovnice $Y_1'' + 2Y_1' + Y_1 = f_1(x)$:

$$2A + 2(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C) = x^2,$$

$$Ax^2 + (4A + B)x + (2A + 2B + C) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1,$$

a tedy (porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin x):

$$\begin{array}{rcl} A & = & 1 \\ 4A + B & = & 0 \\ 2A + 2B + C & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcr} A & = & 1 \\ B & = & -4 \\ C & = & 6 \end{array} \Longrightarrow Y_1(x) = x^2 - 4x + 6.$$

2) Pro pravou stranu $f_2(x) = \cos x = 1 \cdot \mathrm{e}^{0x} \cos 1 \cdot x$ máme

$$s = 0, \quad \lambda = 0 + i \cdot 1 \neq \lambda_{1,2} \;\Rightarrow\; N = 0.$$

Partikulární řešení bude mít (neurčitý) tvar

$$\begin{aligned} Y_2(x) &:= x^N \mathrm{e}^{\alpha x}(q(x)\cos\beta x + r(x)\sin\beta x) \\ &= x^0 \mathrm{e}^{0x}(A\cos 1\cdot x + B\sin 1\cdot x) = A\cos x + B\sin x). \end{aligned}$$

Dopočteme derivace: $Y_2'(x) = -A\sin x + B\cos x$, $\quad Y_2''(x) = -A\cos x - B\sin x$.
Dosadíme do rovnice $Y_2'' + 2Y_2' + Y_2 = f_2(x)$:

$$(-A\cos x - B\sin x) + 2(-A\sin x + B\cos x) + (A\cos x + B\sin x) = \cos x,$$

$$2B\cos x - 2A\sin x = 1\cdot\cos x + 0\cdot\sin x,$$

a tedy (porovnáme koeficienty u jednotlivých (lineárně nezávislých) funkcí $\cos x$ a $\sin x$):

$$\begin{array}{rcl} 2B &=& 1 \\ -2A &=& 0 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} A &=& 0 \\ B &=& \frac{1}{2} \end{array} \Longrightarrow Y_2(x) = \frac{1}{2}\sin x.$$

Nyní dílčí řešení Y_1 a Y_2 sečteme. Partikulární řešení naší rovnice je

$$Y = Y_1 + Y_2 = x^2 - 4x + 6 + \frac{1}{2}\sin x.$$

Obecné řešení rovnice:

$$y = \overline{y} + Y = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{-x} + x^2 - 4x + 6 + \frac{1}{2}\sin x.$$

Počáteční úloha $y(0) = y'(0) = 0$:

$$y'(x) = (-C_1 + C_2 - C_2 x)\,\mathrm{e}^{-x} + 2x - 4 + \frac{1}{2}\cos x,$$

$$\begin{aligned} (y(0) =)\ (C_1 + C_2\cdot 0)\,\mathrm{e}^{-0} + 0^2 - 4\cdot 0 + 6 + \frac{1}{2}\sin 0 &= 0, \\ (y'(0) =)\ (-C_1 + C_2 - C_2\cdot 0)\,\mathrm{e}^{-0} + 2\cdot 0 - 4 + \frac{1}{2}\cos 0 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} (y(0) =)\ C_1 + 6 \;=\; 0, (y'(0) =)\ -C_1 + C_2 - 4 + \frac{1}{2} = 0. \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} C_1 = -6, \\ C_2 = -\frac{5}{2}. \end{array}$$

Řešení počáteční úlohy:

$$y = (-6 - \frac{5}{2}x)\,\mathrm{e}^{-x} + x^2 - 4x + 6 + \frac{1}{2}\sin x.$$

□

Domácí cvičení

Úloha 6. *Nalezněte obecná řešení následujících diferenciálních rovnic:*

1) $y'' + 4y = \mathrm{e}^x \cos 2x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$

$$\left[y(x) = \frac{16}{17}\cos 2x - \frac{9}{34}\sin 2x + \frac{1}{17}\,\mathrm{e}^x \cos 2x + \frac{4}{17}\,\mathrm{e}^x \sin 2x\right].$$

2) $y'' - y' = x,$ $\qquad \left[y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}x^2 - x\right].$

3) $y'' - y = x,$ $\qquad \left[y(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-x} - x\right].$

4) $y'' + y' - 2y = 3x\,\mathrm{e}^x,$ $\qquad \left[y(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right)\right].$

5) $y'' + 3y' - 4y = \mathrm{e}^{-4x} + x\,\mathrm{e}^{-x},$

$$\left[y(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-4x} - \frac{x}{5}\,\mathrm{e}^{-4x} - \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right)\mathrm{e}^{-x}\right].$$