



**Πολυτεχνείο Κρήτης**

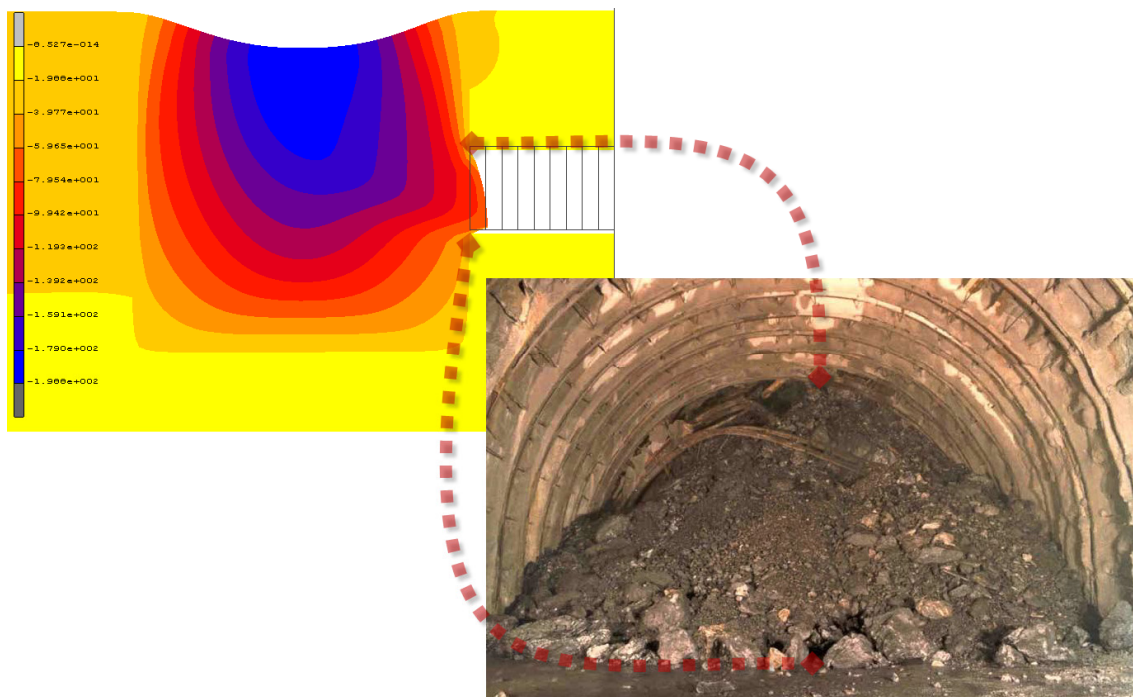
**Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων**

**Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών**

**“Γεωτεχνολογία και Περιβάλλον”**

**Μεταπτυχιακή Διατριβή**

***“Αριθμητική Διερεύνηση Ελαστοπλαστικών Κριτηρίων  
Αστοχίας με Εφαρμογή σε Σήραγγες”***



**Βιόπουλος Πολυχρόνης**  
**Διπλωματούχος Μηχανικός Ορυκτών Πόρων**

Εξεταστική Επιτροπή:

Καθηγητής Αγιουτάντης Ζαχαρίας (επιβλέπων)

Καθηγητής Εξαδάκτυλος Γεώργιος

Καθηγητής Προβιδάκης Κωνσταντίνος

Χανιά

Δεκέμβριος 2009

*Αφιερώνεται,  
στην οικογένειά μου και  
σε όσους είναι δίπλα μου*

## Περίληψη

Το φαινόμενο της ‘καμινάδας’, το οποίο εν γένει είναι μια μορφή αστοχίας των υπερκείμενων, μπορεί να εμφανιστεί σαν αποτέλεσμα υπόγειων εκσκαφών σε αστικές σήραγγες ή σε υπόγειες μεταλλευτικές δραστηριότητες. Η διάδοση μιας τέτοιας αστοχίας έχει ανεπιθύμητα αποτελέσματα τόσο στο υπόγειο έργο όσο και στην επιφάνεια του εδάφους.

Το φαινόμενο της ‘καμινάδας’, αποδίδεται σε διάφορους ξεχωριστούς μεταξύ τους μηχανισμούς ο καθένας από τους οποίους αντιστοιχεί σε διαφορετικά γεωλογικά περιβάλλοντα. Οι μηχανισμοί αυτοί συνδέονται συνήθως με μικρού πάχους υπερκείμενα, με αδυναμία στην στέψη του υπόγειου ανοίγματος, με ανεπαρκή προστασία από τον υδροφόρο ορίζοντα κτλ. Επιπλέον τέτοιοι μηχανισμοί μπορούν να συνδεθούν με κάθετες διαρρήξεις, ρηγματώσεις και ανθρώπινα έργα όπως γεωτρήσεις ή αποχετευτικά έργα. Σαν απόρροια αυτών των μηχανισμών, σε υπόγειο επίπεδο, μπορεί να παρατηρηθεί ένα εύρος φαινομένων όπως αστάθεια στις παρειές του υπόγειου ανοίγματος, κατάρρευση του μετώπου ή δυναμική αστοχία εδαφομάζας και βραχομάζας. Στην επιφάνεια του εδάφους, η διάδοση μιας τέτοιας αστοχίας, μπορεί να οδηγήσει σε αστοχία επιφανειακών κατασκευών.

Στην εργασία αυτή, προσομοιώθηκε ένας από τους μηχανισμούς που μπορεί να οδηγήσει σε αστοχία τύπου φαινομένου της ‘καμινάδας’ στο μέτωπο ‘ρηχών’ υπόγειων ανοιγμάτων, με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Η κατασκευή και η επίλυση των μοντέλων έγινε με το λογισμικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων MSC.Marc – Mentat 2005r3 που ειδικεύεται στη μη γραμμική ανάλυση. Οι επιλύσεις των μοντέλων ήταν ελαστοπλαστικές, με τη χρήση τριών διαφορετικών κριτηρίων αστοχίας. Τα κριτήρια αστοχίας που χρησιμοποιήθηκαν ήταν το γραμμικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb, το παραβολικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb και το κριτήριο αστοχίας von Mises με σκοπό εκτός από τον υπολογισμό των αναμενόμενων παραμορφώσεων και την σύγκριση των αποτελεσμάτων των τριών αυτών κριτηρίων.

## Πρόλογος

Η επιτυχής ολοκλήρωση της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής, οφείλεται κατά ένα σημαντικό μέρος στην υποστήριξη που είχα από ορισμένα πρόσωπα του τμήματος Μηχανικών Ορυκτών Πόρων του Πολυτεχνείου Κρήτης, τα οποία θα ήθελα στο σημείο αυτό να ευχαριστήσω.

Μεγάλες ευχαριστίες λοιπόν οφείλω καταρχήν στον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Αγιουτάντη Ζαχαρία για την ανάθεση αυτού του ενδιαφέροντος θέματος, για τις πολύτιμες συμβουλές που μου παρείχε, την αμεσότητά αλλά και την υπομονή του. Επίσης ένα μεγάλο ευχαριστώ για τις ευκαιρίες που μου έδωσε όλα αυτά τα χρόνια που είμαι φοιτητής του.

Πάρα πολλές ευχαριστίες οφείλω και στη συνάδελφο διπλωματούχο Μηχανικό Ορυκτών Πόρων, Χαρά Παπαντώνη για την ουσιαστική βοήθεια που μου προσέφερε αφιερώνοντας πάρα πολλές ώρες από το χρόνο της, για τις επισημάνσεις της, την στήριξή της και για την πραγματικά πολύ καλή συνεργασία που είχαμε.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες θέλω να δώσω και στον επιστημονικό συνεργάτη του Εργαστηρίου Μηχανικής Πετρωμάτων Μηχανικό Μεταλλείων, Στέλιο Μαυριγιαννάκη για τις συμβουλές του και την καλή του διάθεση αλλά και για τις όμορφες στιγμές στο γραφείο.

Ευχαριστώ πολύ επίσης τους κύριους καθηγητές Εξαδάκτυλο Γεώργιο και Προβιδάκη Κωνσταντίνο για τη συμμετοχή τους στην τριμελή εξεταστική επιτροπή και για το χρόνο που αφιέρωσαν για την αξιολόγηση της εργασίας.

Τέλος θέλω να ευχαριστήσω όλους όσους ήταν πραγματικά δίπλα μου όλα αυτά τα χρόνια στα Χανιά και συνεχίζουν να είναι ακόμα δίπλα μου και να με στηρίζουν.

# Περιεχόμενα

|   |           |
|---|-----------|
| Περίληψη .....  | i         |
| Πρόλογος .....  | ii        |
| Περιεχόμενα .....   | iii       |
| Κατάλογος Σχημάτων .....  | v         |
| Κατάλογος Πινάκων.....  | vii       |
| <b>Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή.....</b>   | <b>1</b>  |
| <b>Κεφάλαιο 2 Σήραγγες.....</b>   | <b>3</b>  |
| 2.1 Ιστορικά Στοιχεία .....   | 3         |
| 2.2 Η Πολυπλοκότητα της Κατασκευής Σηράγγων .....                                     | 6         |
| 2.3 Εντατικό Πεδίο γύρω από Υπόγεια Ανοίγματα .....                                   | 6         |
| 2.4 Στοιχεία Τεχνικής Γεωλογίας για Σήραγγες.....                                     | 12        |
| 2.4.1 Επίδραση της Στρωματογραφίας.....   | 12        |
| 2.4.2 Ρήγματα και Κατακλάσεις.....  | 15        |
| 2.4.3 Υπόγεια Νερά.....   | 15        |
| 2.4.4 Παλαιογεωγραφία.....  | 16        |
| 2.4.5 Σχέση Συμβατικής και Πραγματικής Διαμέτρου Διάνοιξης .....                      | 16        |
| 2.4.6 Διατρησιμότητα και Εξόρυξη.....   | 16        |
| 2.4.7 Πτώσεις Οροφής.....   | 17        |
| 2.4.8 Διόγκωση Παρειών και Εκτίναξη Λίθων .....                                       | 17        |
| 2.4.9 Υψηλές Θερμοκρασίες .....   | 17        |
| 2.4.10 Συστήματα Ταξινόμησης της Βραχώμαζας .....                                     | 17        |
| 2.5 Εκσκαφή Σηράγγων .....  | 18        |
| 2.5.1 Κοπή και Επίχωση.....   | 20        |
| 2.5.2 Διάτρηση – Ανατίναξη .....  | 21        |
| 2.5.3 Σημειακή Κοπή με Εκσκαπτικά Μηχανήματα Σημειακής κοπής.....                     | 23        |
| 2.5.4 Σημειακή Κοπή με Σφύρες.....  | 25        |
| 2.5.5 Ολομέτωπη κοπή με Μηχανές Ολομέτωπης Κοπής .....                                | 27        |
| 2.5.6 Ολομέτωπη Κοπή Pipe Jacking.....  | 32        |
| 2.5.7 Νέα Αυστριακή Μέθοδος.....  | 33        |
| 2.6 Υποστήριξη Σηράγγων.....  | 36        |
| 2.6.1 Μέθοδοι Ενίσχυσης Βραχώμαζας.....   | 36        |
| 2.6.2 Μέθοδοι Βελτίωσης Βραχώμαζας .....  | 38        |
| 2.6.3 Μέθοδοι Προσωρινής Υποστήριξης Σηράγγων .....                                   | 41        |
| <b>Κεφάλαιο 3 Κριτήρια Αστοχίας.....</b>  | <b>46</b> |
| 3.1 Τάση .....  | 46        |
| 3.1.1 Τάση σε Ένα Σημείο .....  | 47        |
| 3.1.2 Τανυστής Τάσης.....   | 50        |
| 3.1.3 Εξίσωση του Cauchy .....  | 51        |
| 3.1.4 Μετασχηματισμός του Τανυστή Τάσης.....  | 53        |
| 3.1.5 Κύριες Τάσεις και Αναλλοίωτες του Τανυστή Τάσης.....                            | 54        |
| 3.1.6 Αποκλίνων Τανυστής Τάσης και Αναλλοίωτες του<br>Αποκλίνοντα Τανυστή Τάσης ..... | 58        |
| 3.1.7 Οκταεδρικές Τάσεις .....  | 60        |
| 3.1.8 Φυσική Ερμηνεία των Αναλλοίωτων Τάσης $I_1$ και $J_2$ .....                     | 62        |
| 3.1.9 Ο Κύκλος του Mohr .....   | 64        |
| 3.1.10 Ο Χώρος Τάσεων Haigh – Westergaard .....                                       | 67        |

|   |  |            |
|---|--|------------|
| 3.2   | Κριτήρια Διαρροής Ανεξάρτητα της Υδροστατικής Πίεσης .....                     | 69         |
| 3.2.1   | Το Κριτήριο Διαρροής Tresca .....  | 71         |
| 3.2.2   | Το Κριτήριο Διαρροής von Mises .....   | 75         |
| 3.3   | Κριτήρια Αστοχίας Εξαρτημένα από την Υδροστατική Πίεση .....                   | 76         |
| 3.3.1   | Το Κριτήριο Αστοχίας Rankine .....   | 77         |
| 3.3.2   | Το Γραμμικό Κριτήριο Αστοχίας Mohr – Coulomb .....                             | 78         |
| 3.3.3   | Το Παραβολικό Κριτήριο Αστοχίας Mohr – Coulomb .....                           | 82         |
| 3.3.4   | Το Κριτήριο Αστοχίας Drucker – Prager .....                                    | 83         |
| 3.3.5   | Το Κριτήριο Αστοχίας Buyukozturk .....   | 84         |
| <b>Κεφάλαιο 4 Μοντελοποίηση Σηράγγων .....</b>  |  | <b>86</b>  |
| 4.1   | Θεμελιώδεις Έννοιες .....  | 87         |
| 4.1.1   | Τάσεις και ισορροπία .....   | 87         |
| 4.1.2   | Συνοριακές Συνθήκες .....  | 89         |
| 4.1.3   | Σχέσεις Τάσης – Παραμόρφωσης .....   | 90         |
| 4.1.4   | Επίπεδη Τάση .....   | 92         |
| 4.1.5   | Επίπεδη Παραμόρφωση .....  | 93         |
| 4.1.6   | Συσχετισμός Επίπεδης Τάσης – Επίπεδης Παραμόρφωσης .....                       | 93         |
| 4.1.7   | Δυναμική Ενέργεια και Ισορροπία – Αρχή της Ελάχιστης Δυναμικής Ενέργειας ..... | 94         |
| 4.1.8   | Η Μέθοδος Rayleigh – Ritz .....  | 96         |
| 4.1.9   | Η Μέθοδος Galerkin – Αρχή των Δυνατών Έργων .....                              | 96         |
| 4.2   | Βασικές Αρχές της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων .....                     | 98         |
| 4.3   | Μη Γραμμική Ανάλυση .....  | 102        |
| 4.3.1   | Ελαστοπλαστική Ανάλυση .....   | 103        |
| 4.3.2   | Ανάλυση Επαφής .....   | 105        |
| 4.4   | Γεωμετρία και Διακριτοποίηση Μοντέλων Σηράγγων .....                           | 106        |
| 4.4.1   | Το Τετράπλευρο Τετρακομβικό Στοιχείο .....                                     | 109        |
| 4.4.2   | Το Τετράπλευρο Οκτακομβικό Στοιχείο .....                                      | 110        |
| 4.4.3   | Το Γραμμικό Δικομβικό Στοιχείο Δοκού .....                                     | 110        |
| 4.4.4   | Το Εξαεδρικό Οκτακομβικό Στοιχείο .....  | 111        |
| 4.5   | Συνοριακές Συνθήκες και Φόρτιση Μοντέλων Σηράγγων .....                        | 112        |
| 4.6   | Ιδιότητες Υλικών στα Μοντέλα Σηράγγων .....                                    | 114        |
| <b>Κεφάλαιο 5 Μελέτη Περίπτωσης: Ελαστοπλαστική Προσομοίωση του Φαινομένου της ‘Καμινάδας’ σε Σήραγγα .....</b> |  | <b>116</b> |
| 5.1   | Εισαγωγή .....   | 116        |
| 5.2   | Περιγραφή Μοντέλων .....   | 118        |
| 5.2.1   | Γεωμετρία και Συνοριακές Συνθήκες .....  | 118        |
| 5.2.2   | ιδιότητες Υλικών και Είδη Στοιχείων .....                                      | 119        |
| 5.3   | Αποτελέσματα Επίλυσης με το Γραμμικό Κριτήριο Αστοχίας Mohr – Coulomb .....    | 123        |
| 5.4   | Αποτελέσματα Επίλυσης με το Παραβολικό Κριτήριο Αστοχίας Mohr – Coulomb .....  | 126        |
| 5.5   | Αποτελέσματα Επίλυσης με το Κριτήριο Αστοχίας von Mises .....                  | 130        |
| 5.6   | Συγκριτικά Αποτελέσματα Επίλυσης Κριτηρίων Αστοχίας .....                      | 133        |
| <b>Κεφάλαιο 6 Συμπεράσματα και Προτάσεις .....</b>  |  | <b>139</b> |
| <b>Βιβλιογραφία .....</b>   |  | <b>141</b> |

## Κατάλογος Σχημάτων

|            |   |    |
|------------|---|----|
| Σχήμα 2.1  | Το Ευπαλίνειο όρυγμα.....   | 4  |
| Σχήμα 2.2  | Ανακατανομή τάσεων σε οριζόντια σήραγγα .....   | 9  |
| Σχήμα 2.3  | Πρωτογενές και δευτερογενές τασικό πεδίο .....  | 9  |
| Σχήμα 2.4  | Σχηματική παράσταση κυκλικού ανοίγματος κάτω από<br>δισδιάστατο εντατικό πεδίο .....                                  | 11 |
| Σχήμα 2.5  | Κατανομή τάσεων γύρω από κυκλικό άνοιγμα.....   | 11 |
| Σχήμα 2.6  | Επίδραση προσανατολισμού στρωματογραφίας σε σχέση με τον<br>άξονα της σήραγγας στην ανάπτυξη διατμητικών τάσεων ..... | 13 |
| Σχήμα 2.7  | Επίδραση πτύχωσης γεωλογικών στρωμάτων σε σχέση με τον<br>άξονα της σήραγγας .....                                    | 13 |
| Σχήμα 2.8  | Επικρατούσες συνθήκες διάνοιξης σηράγγων δίπλα<br>σε απότομα πρανή .....  | 14 |
| Σχήμα 2.9  | Επικρατούσες συνθήκες διάνοιξης σηράγγων σε ρηξιγενείς ζώνες.....   | 15 |
| Σχήμα 2.10 | Επιλογή κατάλληλης μεθόδου εκσκαφής ανάλογα με τις<br>διαφορετικές συνθήκες πετρώματος/εδάφους.....                   | 19 |
| Σχήμα 2.11 | Εύρος των μεθόδων ανάλογα με την αντοχή σε μονοαξονική<br>θλίψη του πετρώματος/εδάφους.....                           | 19 |
| Σχήμα 2.12 | Κοπή και επίχωση .....  | 21 |
| Σχήμα 2.13 | Ο κύκλος της μεθόδου διάτρησης - ανατίναξης.....  | 23 |
| Σχήμα 2.14 | Κύρια δομικά μέρη τυπικού roadheader .....  | 24 |
| Σχήμα 2.15 | Roadheader με διαμήκη περιστροφική κεφαλή.....  | 24 |
| Σχήμα 2.16 | Roadheader με εγκάρσια περιστροφική κεφαλή.....   | 25 |
| Σχήμα 2.17 | Υδραυλική σφύρα.....  | 26 |
| Σχήμα 2.18 | Εκσκαφή σήραγγας σε δύο φάσεις με δύο σφύρες .....  | 27 |
| Σχήμα 2.19 | Μέρη TBM .....  | 28 |
| Σχήμα 2.20 | Τοποθέτηση αγκυρίων κατά τη διάνοιξη με TBM.....  | 30 |
| Σχήμα 2.21 | Earth Pressure Balance TBM .....  | 31 |
| Σχήμα 2.22 | Pipe jacking .....  | 33 |
| Σχήμα 2.23 | Διάνοιξη σήραγγας σε τρεις φάσεις καθ' ύψος<br>(top heading-bench-invert) .....                                       | 34 |
| Σχήμα 2.24 | Διάνοιξη σήραγγας με δύο πλευρικές στοές και κεντρικό πυλώνα .....  | 35 |
| Σχήμα 2.25 | Προεντεταμένος κοχλίας κατανεμημένης αγκύρωσης με ρητίνη .....  | 38 |
| Σχήμα 2.26 | Ενεμάτωση από την επιφάνεια .....   | 39 |
| Σχήμα 2.27 | Τεχνική τσιμεντοεδαφοπασσάλων (Jet grouting).....   | 40 |
| Σχήμα 2.28 | Σύστημα forepoling .....  | 42 |
| Σχήμα 2.29 | Μηχάνημα περιφερειακής πρότμησης .....  | 45 |
| Σχήμα 3.1  | Μέση τάση επιφάνειας σε μονοαξονική φόρτιση .....   | 47 |
| Σχήμα 3.2  | Τάση σε ένα σημείο.....   | 47 |
| Σχήμα 3.3  | Διανύσματα τάσης που δρουν σε τυχαίο επίπεδο n .....  | 49 |
| Σχήμα 3.4  | Συνιστώσες τάσης στις τρεις διαστάσεις.....   | 50 |
| Σχήμα 3.5  | Μετασχηματισμός του τανυστή τάσης .....   | 53 |
| Σχήμα 3.6  | Επίπεδα οκταεδρικής τάσης .....   | 61 |
| Σχήμα 3.7  | Ο κύκλος του Mohr στις τρεις διαστάσεις .....   | 65 |
| Σχήμα 3.8  | Πολικό σημείο του κύκλου του Mohr .....   | 67 |
| Σχήμα 3.9  | Χώρος τάσεων Haigh – Westergaard .....  | 68 |
| Σχήμα 3.10 | Γεωμετρικός τόπος διαρροής σε ένα σημείο δοκιμής.....   | 70 |
| Σχήμα 3.11 | Κριτήρια διαρροής σε εφελκυσμό.....   | 72 |
| Σχήμα 3.12 | Κριτήρια διαρροής σε εφελκυσμό στο αποκλίνον επίπεδο.....   | 73 |

|            |  |     |
|------------|--|-----|
| Σχήμα 3.13 | Επιφάνειες διαρροής σε εφελκυσμό σε χώρο κύριων τάσεων .....   | 74  |
| Σχήμα 3.14 | Τομή του επιπέδου $\sigma_x - \tau_{xy}$ με την επιφάνεια διαρροής.....  | 74  |
| Σχήμα 3.15 | Γενικά σχήματα της επιφάνειας αστοχίας ισότροπων υλικών .....  | 77  |
| Σχήμα 3.16 | Σχήματα της επιφάνειας αστοχίας του κριτηρίου Rankine .....  | 78  |
| Σχήμα 3.17 | Γραφική αναπαράσταση του κριτηρίου του Mohr .....  | 79  |
| Σχήμα 3.18 | Γραμμικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb σε $\tau - \sigma$ .....   | 80  |
| Σχήμα 3.19 | Σχήματα της επιφάνειας αστοχίας του γραμμικού κριτηρίου Mohr – Coulomb .....   | 81  |
| Σχήμα 3.20 | Παραβολικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb σε $\tau - \sigma$ .....   | 82  |
| Σχήμα 3.21 | Σχήματα της επιφάνειας αστοχίας του κριτηρίου Drucker – Prager.....  | 83  |
| Σχήμα 3.22 | Συνδυασμός κριτηρίων Drucker – Prager και Mohr – Coulomb .....   | 84  |
| Σχήμα 4.1  | Σώμα τριών διαστάσεων με επιβαλλόμενη δύναμη .....   | 87  |
| Σχήμα 4.2  | Ισοροπία στοιχειώδους όγκου .....  | 88  |
| Σχήμα 4.3  | Στοιχειώδης όγκος στην επιφάνεια .....   | 89  |
| Σχήμα 4.4  | Παραμορφωμένο στοιχείο επιφάνειας .....  | 90  |
| Σχήμα 4.5  | Επίπεδη τάση.....  | 92  |
| Σχήμα 4.6  | Επίπεδη παραμόρφωση .....  | 93  |
| Σχήμα 4.7  | Είδη στοιχείων (α) στις δυο διαστάσεις και (β) στη μία διάσταση.....   | 99  |
| Σχήμα 4.8  | Είδη στοιχείων στις τρεις διαστάσεις.....  | 99  |
| Σχήμα 4.9  | Διακριτοποίηση σώματος.....  | 100 |
| Σχήμα 4.10 | Τύποι ελαστικής συμπεριφοράς υλικού .....  | 103 |
| Σχήμα 4.11 | Ελαστοπλαστική συμπεριφορά υλικού .....  | 104 |
| Σχήμα 4.12 | Επαφή σε σημείο διεπιφάνειας σωμάτων διαφορετικών υλικών .....   | 106 |
| Σχήμα 4.13 | Τύποι διακριτοποίησης διατομής σήραγγας στις δυο διαστάσεις.....   | 108 |
| Σχήμα 4.14 | Τετράπλευρο τετρακομβικό στοιχείο (α) στο χώρο $x,y$ και (β) στο χώρο $\xi,\eta$ .....                               | 109 |
| Σχήμα 4.15 | Τετράπλευρο οκτακομβικό στοιχείο (α) στο χώρο $x,y$ και (β) στο χώρο $\xi,\eta$ .....                                | 110 |
| Σχήμα 4.16 | Γραμμικό δικομβικό στοιχείο δοκού και συναρτήσεις μορφής .....   | 111 |
| Σχήμα 4.17 | Εξαεδρικό οκτακομβικό στοιχείο (α) στο χώρο $x,y,z$ και (β) στο χώρο $\xi,\eta,\zeta$ .....                          | 112 |
| Σχήμα 5.1  | Τυπικοί μηχανισμοί σπηλαίωσης σε ρηχό κάλυμμα .....  | 116 |
| Σχήμα 5.2  | Γεωμετρία και συνοριακές συνθήκες του μοντέλου .....   | 119 |
| Σχήμα 5.3  | Διάφορες γεωμετρίες φακών .....  | 120 |
| Σχήμα 5.4  | Είδη υλικών μοντέλου .....   | 121 |
| Σχήμα 5.5  | Είδη στοιχείων μοντέλου.....   | 122 |
| Σχήμα 5.6  | Διάγραμμα κατακόρυφων μετατοπίσεων κατά μήκος της επιφάνειας για όλους τους φακούς (γραμμικό Mohr – Coulomb) .....   | 123 |
| Σχήμα 5.7  | Διάγραμμα κατακόρυφων μετατοπίσεων κατά μήκος του μετώπου για όλους τους φακούς (γραμμικό Mohr – Coulomb).....       | 124 |
| Σχήμα 5.8  | Συνολικές μετατοπίσεις για όλους τους φακούς (γραμμικό Mohr – Coulomb) .....   | 125 |
| Σχήμα 5.9  | Συνολικές μετατοπίσεις μοντέλου με φακό 4D (γραμμικό Mohr – Coulomb) .....   | 125 |
| Σχήμα 5.10 | Κάθετες τάσεις ( $\sigma_{22}$ ) για όλους τους φακούς (γραμμικό Mohr – Coulomb) .....                               | 126 |
| Σχήμα 5.11 | Διάγραμμα κατακόρυφων μετατοπίσεων κατά μήκος της επιφάνειας για όλους τους φακούς (παραβολικό Mohr – Coulomb) ..... | 127 |
| Σχήμα 5.12 | Διάγραμμα κατακόρυφων μετατοπίσεων κατά μήκος του μετώπου για όλους τους φακούς (παραβολικό Mohr – Coulomb).....     | 127 |



|            |   |     |
|------------|---|-----|
| Σχήμα 5.13 | Συνολικές μετατοπίσεις για όλους τους φακούς (παραβολικό Mohr – Coulomb) .....  | 128 |
| Σχήμα 5.14 | Συνολικές μετατοπίσεις μοντέλου με φακό 4D (παραβολικό Mohr – Coulomb) .....  | 129 |
| Σχήμα 5.15 | Κάθετες τάσεις ( $\sigma_{22}$ ) για όλους τους φακούς (παραβολικό Mohr – Coulomb) .....  | 129 |
| Σχήμα 5.16 | Διάγραμμα κατακόρυφων μετατοπίσεων κατά μήκος της επιφάνειας για όλους τους φακούς (von Mises).....   | 130 |
| Σχήμα 5.17 | Διάγραμμα κατακόρυφων μετατοπίσεων κατά μήκος του μετώπου για όλους τους φακούς (von Mises) .....   | 130 |
| Σχήμα 5.18 | Συνολικές μετατοπίσεις για όλους τους φακούς (von Mises) .....  | 131 |
| Σχήμα 5.19 | Συνολικές μετατοπίσεις μοντέλου με φακό 4D (von Mises) .....  | 132 |
| Σχήμα 5.20 | Κάθετες τάσεις ( $\sigma_{22}$ ) για όλους τους φακούς (von Mises) .....  | 133 |
| Σχήμα 5.21 | Συγκριτικό διάγραμμα κατακόρυφων μετατοπίσεων κατά μήκος της επιφάνειας για το μοντέλο 4D για τα τρία κριτήρια αστοχίας .....   | 134 |
| Σχήμα 5.22 | Συγκριτικό διάγραμμα κατακόρυφων μετατοπίσεων κατά μήκος του μετώπου για το μοντέλο 4D για τα τρία κριτήρια αστοχίας.....   | 134 |
| Σχήμα 5.23 | Συγκριτικό διάγραμμα μέγιστων κατακόρυφων μετατοπίσεων στην επιφάνεια για κάθε φακό και για τα τρία κριτήρια αστοχίας .....   | 135 |
| Σχήμα 5.24 | Συγκριτικό διάγραμμα μέγιστων κατακόρυφων μετατοπίσεων στο μέτωπο για κάθε φακό και για τα τρία κριτήρια αστοχίας .....   | 135 |
| Σχήμα 5.25 | Κόμβος ελέγχου.....   | 136 |
| Σχήμα 5.26 | Συγκριτικό διάγραμμα $\sqrt{J_2} - I_1$ για το μοντέλο 4D για τα τρία κριτήρια αστοχίας .....   | 137 |
| Σχήμα 5.27 | Συγκριτικό διάγραμμα κάθετης τάσης ( $\sigma_{22}$ ) – κατακόρυφης παραμόρφωσης ( $\epsilon_{22}$ ) για το μοντέλο 4D για τα τρία κριτήρια αστοχίας .....             | 137 |
| Σχήμα 5.28 | Συγκριτικό διάγραμμα ισοδύναμης τάσης ( $\sigma_{eq}$ ) – ισοδύναμης συνολικής παραμόρφωσης ( $\epsilon_{eq}$ ) για το μοντέλο 4D για τα τρία κριτήρια αστοχίας ..... | 138 |

## Κατάλογος Πινάκων

|             |  |     |
|-------------|--|-----|
| Πίνακας 2.1 | Συνημίτονα κατεύθυνσης $a_{ij}$ .....                      | 53  |
| Πίνακας 5.1 | Μηχανικές ιδιότητες υλικών μοντέλων.....                   | 121 |
| Πίνακας 5.2 | Αριθμός στοιχείων και κόμβων για όλα τα μοντέλα φακών..... | 122 |

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Όσο πιο μεγάλη είναι η αστικοποίηση σε μια πόλη, τόσο πιο πολύ προκύπτει η ανάγκη κατασκευής σηράγγων (ειδικά για λόγους μεταφοράς). Η κατασκευή όμως σηράγγων σε αστικά περιβάλλοντα τις περισσότερες φορές σχετίζεται με όρυξη σηράγγων σε ‘μαλακά’ εδαφικά υλικά αλλά και με μικρό ύψος υπερκειμένων. Η όρυξη σηράγγων σε τέτοιου είδους γεωυλικά, έχει ως αποτέλεσμα την εδαφική κίνηση προς το υπόγειο άνοιγμα, εξαιτίας της αποτόνωσης των τάσεων αλλά και την εμφάνιση επιφανειακών καθιζήσεων. Εάν οι εδαφικές αυτές μετακινήσεις συμβούν σε υπέρμετρο βαθμό, μπορούν να προκαλέσουν αστοχίες τόσο στο μέτωπο (αλλά και στις παρειές) της σήραγγας όσο και στις επιφανειακές εγκαταστάσεις (κτίρια, δρόμοι, υποδομές, κ.α.). Μια τέτοια μορφή αστοχίας είναι η αστοχία τύπου ‘καμινάδας’.

Αντικείμενο της παρούσας διατριβής, είναι να προσομοιωθεί με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ένας από τους μηχανισμούς που οδηγούν σε αστοχία τύπου ‘καμινάδας’ με την εφαρμογή διαφορετικών κριτηρίων αστοχίας.

Η διάρθρωση της παρούσας διατριβής έχει ως εξής;

Στο *Κεφάλαιο 2*, γίνεται μια εκτενής αναφορά γύρω από την κατασκευή των σηράγγων. Συγκεκριμένα παρατίθενται κάποια ιστορικά στοιχεία, αναφέρονται ορισμένες βασικές έννοιες όσον αφορά τα υπόγεια ανοίγματα αλλά και κάποια στοιχεία τεχνικής γεωλογίας και περιγράφονται οι βασικές μέθοδοι εκσκαφής και υποστήριξης των σηράγγων.

Στο *Κεφάλαιο 3*, αναλύονται οι βασικές έννοιες που περιγράφουν την τάση (όπως είναι ο τανυστής τάσης, ο αποκλίνων τανυστής τάσης και οι αναλλοίωτες των τανυστών τάσης) και αναλύονται τα βασικότερα κριτήρια αστοχίας κατηγοριοποιημένα σε σχέση με την εξάρτησή τους από την υδροστατική πίεση.

Στο *Κεφάλαιο 4*, γίνεται ανάλυση της διαδικασίας μοντελοποίησης των σηράγγων. Αρχικά επεξηγούνται κάποιες θεμελιώδεις έννοιες όπως η τάση και η ισορροπία, οι σχέσεις τάσης – παραμόρφωσης, η επίπεδη τάση, η επίπεδη παραμόρφωση κ.α. Έπειτα γίνεται μια αναφορά στις βασικές αρχές της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και της μη γραμμικής ανάλυσης (όπως η ελαστοπλαστική ανάλυση). Τέλος περιγράφεται η κατασκευή μοντέλων σηράγγων ξεκινώντας από την γεωμετρία και τη διακριτοποίησή τους, την επιβολή των συνοριακών συνθηκών και

των φορτίσεων και τον ορισμό των ιδιοτήτων των υλικών από τα οποία αποτελούνται τόσο τα γεωυλικά όσο και η υποστήριξη.

Στο *Κεφάλαιο 5*, αναλύονται τα μοντέλα που κατασκευάστηκαν για την προσομοίωση του φαινομένου της ‘καμινάδας’ και παρατίθενται τα αποτελέσματα από την αριθμητική επίλυση με τα διαφορετικά κριτήρια αστοχίας. Η αριθμητική επίλυση έγινε χρησιμοποιώντας το λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων MSC.Marc – Mentat 2005r3.

Τέλος στο *Κεφάλαιο 6*, παρατίθενται τα αποτελέσματα που εξήχθησαν από την εργασία όπως και κάποιες προτάσεις για βελτίωση αλλά και περαιτέρω διερεύνησή της.

## Κεφάλαιο 2

### Σήραγγες

Σήραγγα ονομάζεται το οριζόντιο ή κεκλιμένο υπόγειο έργο που χρησιμεύει για μεταφορές, για τη μετακίνηση υδάτων, για την τοποθέτηση υπόγειων επικοινωνιακών καλωδίων, σωλήνων κτλ. Ανάλογα με τη χρήση τους, οι σήραγγες διακρίνονται σε σιδηροδρομικές, οδικές, μετρό, διασταυρώσεων σε διάφορα σημεία της πόλης ή κεντρικών οδικών αρτηριών κτλ. Ανάλογα με τη θέση τους διαιρούνται σε ορεινές (όπου κατασκευάζονται σε ορεινές περιοχές και διαπερνούν οροσειρές και διάφορα υψώματα) υποβρύχιες, πεδινές ή αστικές.

#### 2.1 Ιστορικά Στοιχεία

Η πρώτη σήραγγα στην Ιστορία με μεγάλο τεχνικό ενδιαφέρον ήταν το Ευπαλίνειο Όρυγμα στη Σάμο. Το Ευπαλίνειο όρυγμα (Σχήμα 2.1) είναι μια σήραγγα μήκους 1036m κοντά στο Πυθαγόρειο της Σάμου, η οποία κατασκευάστηκε κατά τον 6<sup>ο</sup> αιώνα π.Χ. για να χρησιμεύσει ως υδραγωγείο. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του ήταν ότι ανοίχθηκε ταυτόχρονα και από τις δυο πλευρές του βουνού: το όρυγμα αυτό ήταν αμφίστομον όπως το χαρακτήρισε ο Ηρόδοτος, χάρις στον οποίον έγινε γνωστό. Οι δυο σήραγγες συναντήθηκαν περίπου στο μέσον με αξιοθαύμαστη ακρίβεια, κάτι που ήταν σημαντικό επίτευγμα για τα τεχνολογικά δεδομένα της εποχής. Λέγεται μάλιστα ότι ίσως να εφαρμόστηκαν για πρώτη φορά μαθηματικές μέθοδοι για την κατασκευή αυτή. Το Ευπαλίνειο όρυγμα διατηρήθηκε και βελτιώθηκε από τους Ρωμαίους και είναι μέχρι σήμερα επισκέψιμο (<http://el.wikipedia.org>).

Στην Παλαιστίνη υπάρχουν ακόμα υπολείμματα σηράγγων για ύδρευση των τελευταίων αιώνων π.Χ., τα οποία επίσης βελτίωσαν οι Ρωμαίοι. Σε ανασκαφές που έγιναν στην περιοχή του Dover της Αγγλίας προέκυψαν ενδείξεις ότι ήδη οι Ρωμαίοι είχαν κάνει προκαταρκτικούς σχεδιασμούς για την κατασκευή υποθαλάσσιας σήραγγας που θα ένωνε τη βρετανική νήσο με την ηπειρωτική Ευρώπη (<http://sfrang.com/historia/selida626.htm>).



**Σχήμα 2.1** Το Ευπαλίνειο όρυγμα (el.wikipedia.org/wiki)

Κατά το Μεσαίωνα σημαντικότερες υπόγειες σήραγγες αποτελούν τα ορύγματα για διαμονή ανθρώπων στην περιοχή της Καππαδοκίας. Βέβαια, ήδη από την Αρχαιότητα ήταν γνωστή η τεχνική δημιουργίας υπόγειων ορυγμάτων στα πορολιθικά πετρώματα αυτής της μικρασιατικής επαρχίας. Ο Ξενοφών αναφέρει ότι το 400 π.Χ. υπήρχαν στην Καππαδοκία τρωγλοδυτικές κατοικίες. Όμως, από τα μέσα του 7<sup>ου</sup> αιώνα μ.Χ. γενικεύτηκε και εντατικοποιήθηκε αυτή η τεχνική της λάξευσης ορυγμάτων, λόγω των συχνών εχθρικών επιδρομών στην περιοχή, οπότε οι κάτοικοι της παραμεθόριας πλέον Καππαδοκίας διέφευγαν στις υπόγειες σήραγγες, όπου δέχονταν επιθέσεις. Σε καίρια σημεία των στοών υπήρχαν επεξεργασμένοι ογκόλιθοι, με τους οποίους οι πολιορκούμενοι έφραζαν τα στόμια διελεύσεως. Το πλέγμα των υπόγειων στοών στην Καππαδοκία πήρε με το χρόνο μεγάλες διαστάσεις και μέχρι σήμερα διασώζεται ένα πολύπλοκο δίκτυο (<http://sfrang.com/historia/selida626.htm>).

Στη Δυτική Ευρώπη κατασκευάστηκαν συστηματικά υπόγειες σήραγγες κατά τον ύστερο Μεσαίωνα και την Αναγέννηση σε διάφορες πόλεις, κυρίως για συλλογή και έλεγχο των υδάτων προς ύδρευση. Σημαντικότερο από αυτά τα δίκτυα είναι αυτό της πόλης Σιένα στην Ιταλία, κάτω από τους δρόμους της οποίας υπάρχει διακλάδωση στοών με συνολικό μήκος περίπου 25 χιλιομέτρων. Σε διάφορες γερμανικές πόλεις προορίζονταν αυτά τα υπόγεια δίκτυα για την τροφοδοσία με νερό πυρόσβεσης στα πυκνά δομημένα κέντρα των πόλεων.

Κατά το 17<sup>ο</sup> και 18<sup>ο</sup> αιώνα κατασκευάστηκαν διάφορες σήραγγες, κυρίως για διευκόλυνση των μεταφορών, κυρίως σε χώρες με ορεινούς όγκους (Ελβετία, Αυστρία κ.ά.). Σήραγγες για διέλευση σιδηροδρόμων κάτω από βουνά κατασκευάστηκαν στο

διάστημα 1826-1830 μεταξύ Λίβερπουλ – Μάντσεστερ στην Αγγλία και στο διάστημα 1837-1839 μεταξύ Λειψίας και Δρέσδης στη Γερμανία. Είναι αυτονόητο ότι για την κατασκευή των σιδηροδρομικών και άλλων μεταγενέστερων σιδηρόδρομων σημαντικό ρόλο έπαιξε η τεχνογνωσία που είχε αποκτηθεί κατά τη διάνοιξη στοών σε ανθρακωρυχεία και αλατωρυχεία.

Το έτος 1865, ο μηχανικός Charles Burleigh κατασκεύασε ένα πολύ αξιόπιστο και ισχυρό γεωτρήπανο, το οποίο αξιοποιούσε την ατμοκίνηση και τον πεπιεσμένο αέρα. Η εφεύρεση αυτή αποτέλεσε πρότυπο για όλα τα γεωτρήπανα που ακολούθησαν. Το 1866 ανακαλύφθηκε η νιτρογλυκερίνη και ένα χρόνο αργότερα ο Alfred Nobel τελειοποίησε το δυναμίτη. Ο Alfred Nobel πειραματιζόταν επίσης με νιτρογλυκερίνη, αλλά το έτος 1864 προκάλεσε απρόβλεπτα έκρηξη στο εργαστήριό του, με αποτέλεσμα να σκοτωθούν πολλά άτομα, ανάμεσά τους και ο αδελφός του εφευρέτη, Emil Nobel. Με αυτά τα εκρηκτικά διευκολύνθηκε σημαντικά η διάνοιξη ορυγμάτων σε σκληρά πετρώματα.

Η πρώτη σήραγγα για κυκλοφοριακούς λόγους κάτω από ποταμό κατασκευάστηκε το έτος 1869 στο Σικάγο. Πρώτη αντίστοιχη κατασκευή στην Ευρώπη έγινε το 1911 κάτω από τον ποταμό Έλβα στο Αμβούργο. Στην κατασκευή σιδηρόδρομων στηρίχθηκε η δημιουργία μητροπολιτικών δικτύων σιδηροδρόμων (Μετρό) στις μεγάλες πόλεις των βιομηχανικών χωρών. Η σημαντικότερη, μέχρι σήμερα, σήραγγα από ιστορικής, πολιτικής και οικονομικής σκοπιάς είναι αυτή στη θάλασσα της Μάγχης που συνδέει τη Γαλλία (άρα και την Ηπειρωτική Ευρώπη) με την Αγγλία. Αυτό που καλείται σήραγγα της Μάγχης είναι στην πραγματικότητα τρεις σήραγγες παράλληλες μεταξύ τους. Το μήκος της κάθε σήραγγας είναι 50 km. Αυτό το έργο ολοκληρώθηκε το έτος 1994, μετά από πολλές προσπάθειες έναρξης κατά το 19<sup>ο</sup> και 20<sup>ο</sup> αιώνα και διάφορες αναβολές λόγω οικονομικών, τεχνικών ή πολιτικών προβλημάτων (<http://sfrang.com/historia/selida626.htm>).

Στην Ελλάδα κατασκευάστηκαν σήραγγες στα βουνά Καλλίδρομο, Όθρυς κ.ά., ήδη στα τέλη του 19<sup>ου</sup> αιώνα κατά τη δημιουργία της σιδηροδρομικής σύνδεσης Αθήνας-Θεσσαλονίκης. Σημαντική ήταν επίσης η σήραγγα του υπόγειου ηλεκτρικού σιδηροδρόμου στην Αθήνα, μεταξύ των σταθμών Μοναστηράκι και Αττική (<http://sfrang.com/historia/selida626.htm>).

## 2.2 Η Πολυπλοκότητα της Κατασκευής Σηράγγων

Οι σήραγγες είναι από τα δυσκολότερα κατασκευαστικά εγχειρήματα του ανθρώπου, για πολλούς λόγους. Το πέτρωμα (ή έδαφος) όπου πρόκειται να κατασκευαστεί η σήραγγα είναι μόνο μερικώς γνωστό ακόμα και με τις πληρέστερες γεωλογικές και γεωτεχνικές μελέτες. Ο μηχανικός πρέπει να είναι σε θέση να αντιμετωπίσει ένα εύρος πιθανών σεναρίων όσον αφορά την ποιότητα του εδάφους, την παρουσία νερού, την παρουσία ασυνεχειών, ρηγμάτων, εγκοίλων και γενικότερα ζωνών με φτωχά γεωμηχανικά χαρακτηριστικά. Η κατασκευή της σήραγγας θα πρέπει να προσαρμόζεται στις συνθήκες που απαντώνται με συνεχή παρακολούθηση της συμπεριφοράς της κατά τη διάνοιξη. Ακόμα, η εξασφάλιση ευσταθούς στομίου, ο συνδυασμός εδαφών χαμηλής αντοχής με υψηλή πίεση υπερκειμένων, η παρουσία χαλαρών ζωνών σε συνδυασμό με υψηλή υδροφορία, η συχνή και ξαφνική εναλλαγή ισχυρών και ασθενών ζωνών, κ.α. αποτελούν κάποιες από τις συνήθεις δυσκολίες στην διάνοιξη σηράγγων. Ειδικότερα στις σήραγγες σε αστικό περιβάλλον τίθεται και η απαίτηση περιορισμού των προκαλούμενων εδαφικών μετακινήσεων, πρόβλημα που γίνεται ιδιαίτερα δύσκολο σε συνδυασμό με το πολύ μικρό βάθος κατασκευής τους. Γενικά, η κατασκευή των σηράγγων είναι μια εξαιρετικά πολύπλοκη διαδικασία που εμπεριέχει αβεβαιότητες που δεν απαντώνται σε άλλα έργα μηχανικών.

## 2.3 Εντατικό Πεδίο γύρω από Υπόγεια Ανοίγματα

Σε αντίθεση με τις επίγειες δομικές κατασκευές, οι οποίες (εκτός από το ίδιο το βάρος τους) θα δεχθούν τα φορτία μετά την ολοκλήρωση της κατασκευής τους, η κατασκευή ενός υπόγειου έργου αποτελεί μια δραστική επέμβαση σε ένα υλικό το οποίο βρίσκεται ήδη υπό την επίδραση ενός πλήρους ανεπτυγμένου τασικού πεδίου. Το αρχικό – πριν από την κατασκευή του έργου – αυτό πεδίο, ο προσανατολισμός του (οι διευθύνσεις των κυρίων τάσεων) και η έντασή του, είναι τα μεγέθη τα οποία μαζί με τη γεωμετρία του έργου, τη φύση και τις παραμέτρους παραμορφωσιμότητας του γεωυλικού θα καθορίσουν τα προβλήματα που θα αντιμετωπιστούν κατά την κατασκευή του (Μαραγκός, 1999).

Ο προσδιορισμός του αρχικού τασικού πεδίου (*πρωτογενές τασικό πεδίο*) δεν είναι εύκολος. Οι αρχικές τάσεις διακρίνονται σε:

- Βαρυτικές τάσεις (gravitational stresses), που οφείλονται στη δράση του πεδίου βαρύτητας

- Τεκτονικές τάσεις (tectonic stresses), που οφείλονται σε τεκτονικές δυνάμεις
- Παραμένουσες τάσεις (residual stresses) που μπορεί να δημιουργηθούν λόγω φυσικών ή/και χημικών διεργασιών που λαμβάνουν χώρα σε περιορισμένους όγκους πετρωμάτων, όπως για παράδειγμα κατά την ανομοιόμορφη ψύξη μάγματος.

Οι τάσεις που οφείλονται στο πεδίο βαρύτητας μπορούν να υπολογιστούν εύκολα από την ισορροπία των δυνάμεων στον κατακόρυφο άξονα. Οι υπόλοιπες τάσεις που ενδεχόμενα ασκούνται σε ένα πέτρωμα είναι συνήθως δυνατόν να προσεγγισθούν από μετρήσεις επί τόπου (Αγιουτάντης, 2002).

Οι κατακόρυφες τάσεις που ασκούνται σε ένα στοιχειώδες τμήμα πετρώματος, που βρίσκεται σε ορισμένο βάθος ( $h$ ) από την επιφάνεια της γης, λόγω και μόνο της ύπαρξης της μάζας των υπερκείμενων, αποδεικνύεται ότι ισούται με το βάρος των υπερκείμενων. Ουσιαστικά πρόκειται για το βάρος μιας στήλης με διατομή ίση με τη διατομή του στοιχειώδους τμήματος και ύψος την απόσταση ( $h$ ) του τμήματος από την επιφάνεια. Επομένως οι κατακόρυφες τάσεις είναι δυνατόν να υπολογιστούν από τη σχέση:

$$\sigma_v = \gamma h \quad [2.1]$$

όπου  $\sigma_v$  η κατακόρυφη θλιπτική τάση,  $\gamma$  το μοναδιαίο βάρος του γεωυλικού και  $h$  η απόσταση από την επιφάνεια.

Όταν τα υπερκείμενα αποτελούνται από πολλά στρώματα με διαφορετικά ειδικά βάρη, τότε το βάρος των υπερκείμενων υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\sigma_v = \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i \quad [2.2]$$

όπου  $n$  ο αριθμός των διαφορετικών στρωμάτων,  $\gamma_i$  το μοναδιαίο βάρος κάθε στρώματος και  $h_i$  το πάχος κάθε στρώματος.

Οι οριζόντιες τάσεις που υφίσταται το στοιχειώδες αυτό τμήμα σε βάθος ( $h$ ) θεωρούνται συνάρτηση των κατακόρυφων τάσεων σύμφωνα με τη σχέση:

$$\sigma_h = k \sigma_v \quad [2.3]$$

όπου  $\sigma_h$  η οριζόντια θλιπτική τάση και  $k$  ο συντελεστής πλευρικών τάσεων ή συντελεστής πλευρικής ώθησης ή συντελεστής ουδέτερης ώθησης (earth pressure coefficient) που είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τον τύπο του εντατικού πεδίου.



Η σχέση που συνδέει τον συντελεστή πλευρικών τάσεων με το λόγο του Poisson ( $\nu$ ) για ελαστικό, ομογενές και ισότροπο σώμα είναι ο εξής:

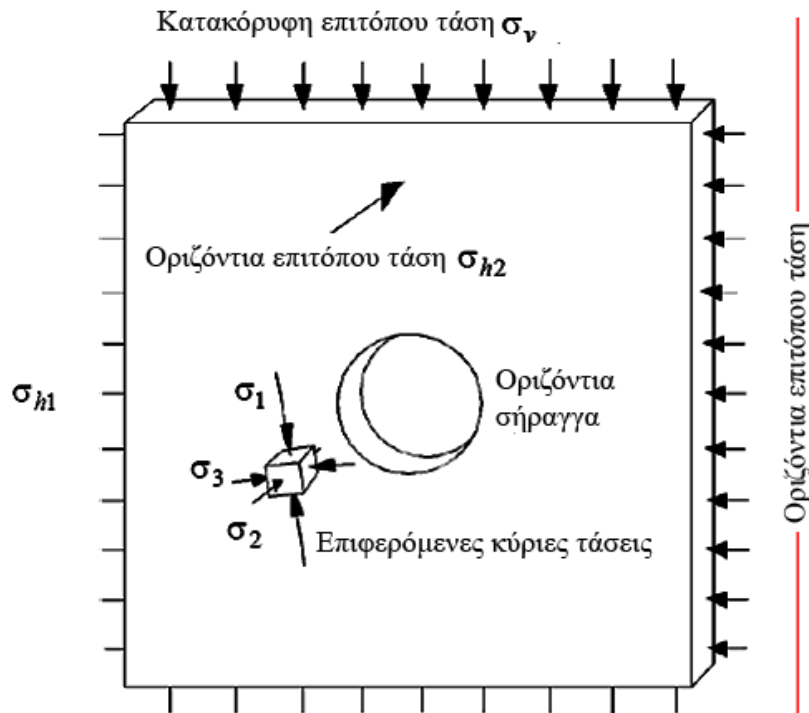
$$k = \frac{\nu}{1-\nu} \quad [2.4]$$

Γενικά η τιμή του  $k$  κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1 ( $0 \leq k \leq 1$ ). Η τιμή  $k = 0$  αντιπροσωπεύει συνήθως πετρώματα σε μικρά βάθη, ενώ η τιμή  $k = 1$  χρησιμοποιείται σε μεγάλα βάθη, όπου τα πετρώματα επιδεικνύουν πλαστική συμπεριφορά. Η πιο συνηθισμένη πάντως τιμή για ελαστικό, ομογενές και ισότροπο σώμα είναι  $k = \frac{1}{3}$  (για  $\nu = 0.25$ ) που αντιστοιχεί για πλευρικές πιέσεις σε διάφορα βάθη. Τέλος όταν εκτός από τις συνήθεις γεωστατικές πιέσεις υπάρχουν τεκτονικές ή παραμένουσες τάσεις, μπορεί να ισχύει ακόμα και  $k > 1$ .

Σε αρκετές πάντως περιπτώσεις, η αρχική εντατική κατάσταση της βραχόμαζας δεν είναι γεωστατική όπως κοντά στην επιφάνεια εδαφικών πρηνών, όπου οι κύριες τάσεις δεν είναι κατά τον κατακόρυφο και οριζόντιο άξονα λόγω των διατμητικών τάσεων που οφείλονται στην κλίση της επιφάνειας του εδάφους, σε μεγάλα βάθη, εφόσον το καθεστώς των τεκτονικών τάσεων δεν ακολουθεί την κατακόρυφη και οριζόντια διεύθυνση και σε έντονα ανισότροπους σχηματισμούς (π.χ. σχηματισμούς με έντονη στρωσιγένεια) εφόσον οι κύριες διευθύνσεις της ανισοτροπίας δεν συμπίπτουν με την κατακόρυφη ή την οριζόντια (Καββαδάς, 2005).

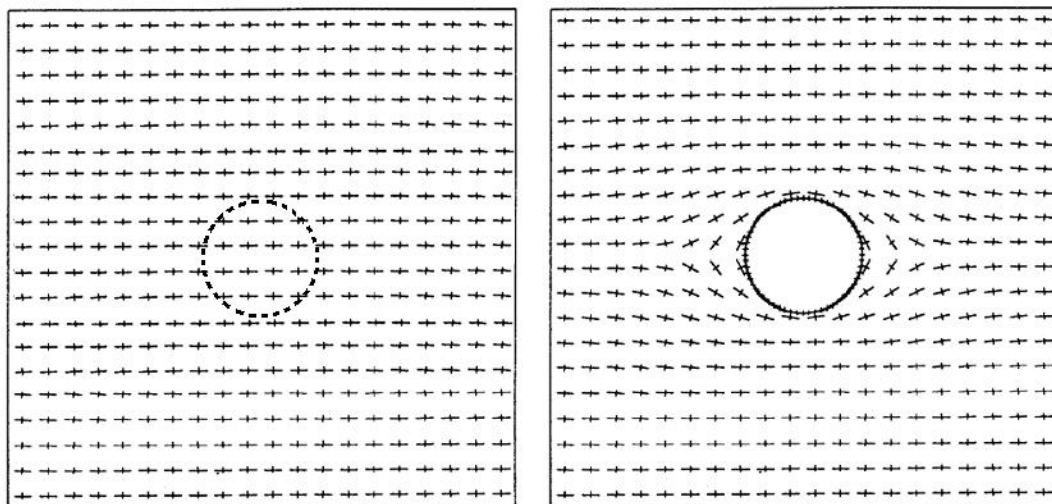
Η επέμβαση στο αρχικό, στο πρωτογενές τασικό πεδίο με τη διάνοιξη μιας υπόγειας εκσκαφής, προκαλεί μια έντονη ανακατανομή των τάσεων στην περιοχή που γειτνιάζει την εκσκαφή. Το νέο *δευτερογενές τασικό πεδίο* γίνεται δυσμενέστερο από αυτό στο οποίο θα οδηγούσε η εφαρμογή μεγάλων εξωτερικών φορτίων (Μαραγκός, 1999).

Από το Σχήμα 2.2, φαίνεται ότι πριν την εκσκαφή της σήραγγας οι επιτόπου τάσεις  $\sigma_v$  (κατακόρυφη τάση),  $\sigma_{h1}$  (οριζόντια επιτόπου τάση σε επίπεδο κάθετο στον άξονα της σήραγγας) και  $\sigma_{h2}$  (οριζόντια επιτόπου τάση σε επίπεδο παράλληλο με τον άξονα της σήραγγας) κατανέμονται ομοιόμορφα στο τμήμα του πετρώματος που έχει θεωρηθεί. Μετά την απομάκρυνση του πετρώματος για τη δημιουργία του ανοίγματος, οι τάσεις γύρω από τη σήραγγα αλλάζουν και προκύπτουν νέες τάσεις. Οι τρεις κύριες τάσεις είναι κάθετες μεταξύ τους, αλλά μπορεί να βρίσκονται υπό κλίση κατά τη διεύθυνση της εφαρμοζόμενης επιτόπου τάσης.



Σχήμα 2.2 Ανακατανομή τάσεων σε οριζόντια σήραγγα (Παπαντώνη, 2007)

Το Σχήμα 2.3 απεικονίζει αυτή την ανακατανομή των τάσεων, δείχνοντας τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων στο πέτρωμα που περιβάλλει μια οριζόντια σήραγγα που υπόκειται σε οριζόντια επιτόπου τάση  $\sigma_{h1}$  ίση με  $3\sigma_v$ , όπου  $\sigma_v$  η κατακόρυφη επιτόπου τάση. Οι μεγαλύτερες παύλες αναπαριστούν τις διευθύνσεις της μέγιστης κύριας τάσης, ενώ οι μικρότερες αναπαριστούν τις διευθύνσεις της ελάχιστης κύριας τάσης σε κάθε σημείο (Παπαντώνη, 2007).



Σχήμα 2.3 Πρωτογενές και δευτερογενές τασικό πεδίο (Hoek, 2007)

Ο Kirsch (1898) έχει υπολογίσει αναλυτικές λύσεις για την κατανομή των τάσεων σε μια ελαστική πλάκα υπό τάση που έχει μια κυκλική οπή και αυτές αποτέλεσαν τις βάσεις για πολλές μελέτες της βραχώδους συμπεριφοράς γύρω από σήραγγες και φρέατα (Hoek, 2007).

Οι σχέσεις που ανέπτυξε ο Kirsch (σε πολικές συντεταγμένες) δίνουν την εφαπτομενική τάση  $\sigma_\theta$ , την ακτινική  $\sigma_r$  και τη διατμητική  $\tau_{r\theta}$  (ή  $\sigma_{r\theta}$ ), μετά τη δημιουργία του ανοίγματος με ορισμένες παραδοχές, όπως α) ότι το πέτρωμα θεωρείται ελαστικό, ομογενές και ισότροπο, β) το άνοιγμα έχει γίνει σε αδιατάρακτο (άπειρο) μέσο, γ) το άνοιγμα έχει πολύ μεγαλύτερο μήκος από τις διαστάσεις της διατομής του, δ) το άνοιγμα βρίσκεται υπό την επίδραση ομοιόμορφου εντατικού πεδίου, ε) οι κατακόρυφες τάσεις είναι ίσες με το βάρος των υπερκειμένων  $\sigma_v = \gamma h$  (Σχήμα 2.4). Οι σχέσεις του Kirsch όπως αναφέρονται στους Mahtab and Grasso (1992) (Αγιουτάντης, 2002):

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma_v}{2} \left[ (1+k) \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} \right] - (1-k) \left[ 1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right] \cos 2\theta \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_v}{2} \left[ (1+k) \left[ 1 + \frac{a^2}{r^2} \right] + (1-k) \left[ 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right] \cos 2\theta \right] \\ \tau_{r\theta} &= \frac{\sigma_v}{2} (1-k) \left[ 1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right] \cos 2\theta\end{aligned}\quad [2.5]$$

όπου:

a η ακτίνα του κυκλικού ανοίγματος

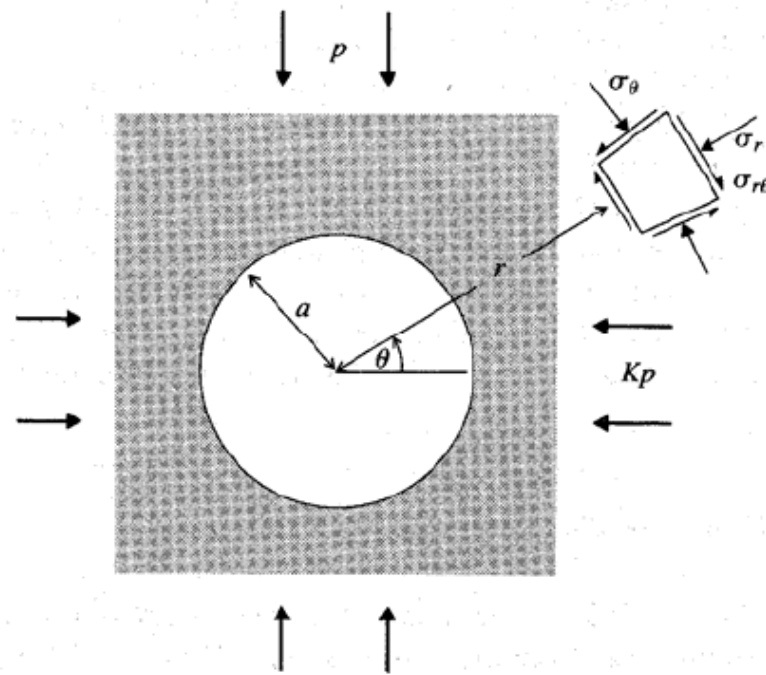
r η απόσταση από το κέντρο του ανοίγματος

$\theta$  η γωνία ως προς τον οριζόντιο άξονα

$\sigma_v$  (ή P) η κατακόρυφη τάση

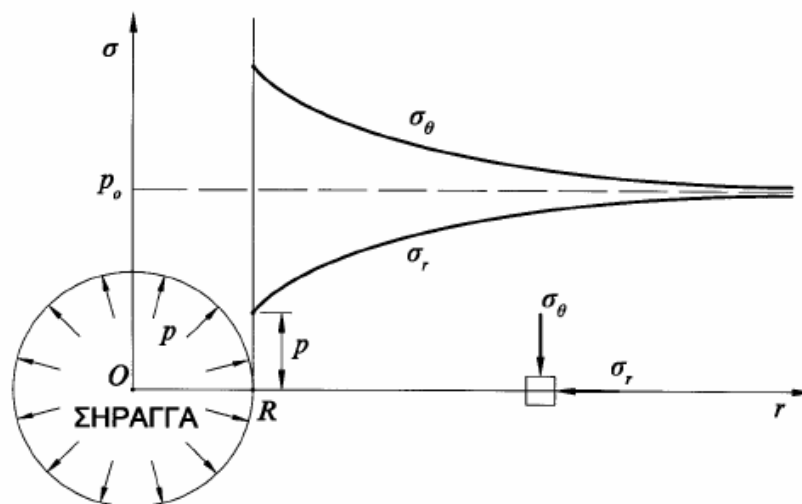
$\sigma_h$  (ή κP) η οριζόντια τάση και

k ο συντελεστής πλευρικών τάσεων



**Σχήμα 2.4** Σχηματική παράσταση κυκλικού ανοίγματος κάτω από δισδιάστατο εντατικό πεδίο (Brady and Bown, 1985)

Στο Σχήμα 2.5 δίνεται η κατανομή των εν λόγω τάσεων με την παραδοχή γραμμικώς ελαστικού γεωυλικού.



**Σχήμα 2.5** Κατανομή τάσεων γύρω από κυκλικό άνοιγμα (Καββαδάς, 2005)

## 2.4 Στοιχεία Τεχνικής Γεωλογίας για Σήραγγες

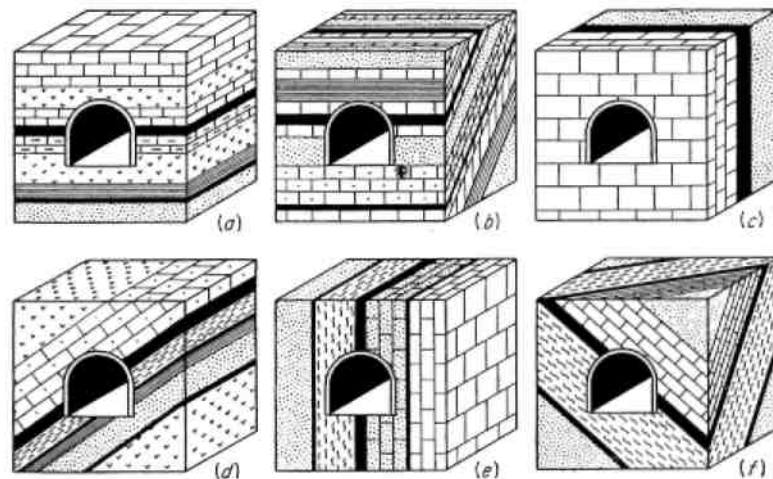
Η Τεχνική Γεωλογία όσον αφορά στην κατασκευή σηράγγων (και στοών) είναι ιδιαίτερα χρήσιμη διότι γνωστοποιεί τις επικρατούσες γεωλογικές συνθήκες κατά τη διάρκεια της διάνοιξης της σήραγγας, εκτιμάει τη συμπεριφορά του υλικού, απαντάει σε προβλήματα του τύπου αν χρειάζεται και τι είδους υποστήριξης, αν υπάρχουν υπόγεια νερά και πως αντιμετωπίζονται, κ.α. (Αντωνίου, 2005).

Οι παράμετροι της Τεχνικής Γεωλογίας που πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κατά τον σχεδιασμό και την κατασκευή μιας σήραγγας είναι η επίδραση της στρωματογραφίας, τα ρήγματα και οι κατακλάσεις, τα υπόγεια νερά, η παλαιογεωγραφία, η σχέση συμβατικής και πραγματικής διαμέτρου διάνοιξης, η διατρησιμότητα και η εξόρυξη, οι πτώσεις οροφής, η διόγκωση παρειών και η εκτίναξη λίθων και οι υψηλές θερμοκρασίες (Στειακάκης, 2005). Ακόμη πολύ σημαντικά στοιχεία που προκύπτουν από τη μελέτη των διαφόρων παραμέτρων που χαρακτηρίζουν την βραχώμαζα, είναι και τα συστήματα ταξινόμησης της βραχώμαζας.

### 2.4.1 Επίδραση της Στρωματογραφίας

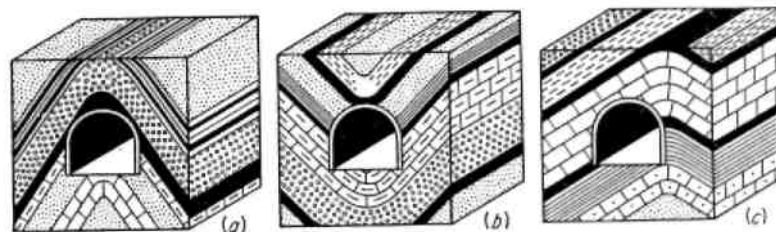
Κατά τη διάνοιξη της σήραγγας αναπτύσσονται συνήθως διατμητικές τάσεις γύρω από αυτή με τη μορφή ενός τόξου (φαινόμενα θόλου). Έτσι οι σήραγγες επενδύονται προκειμένου οι αναπτυσσόμενες διατμητικές τάσεις να παραλαμβάνονται από τη διατμητική αντοχή των πετρωμάτων αλλά και από την επένδυση.

Όταν το πέτρωμα είναι πυριγενές και μάλιστα άρρηκτο τότε η μεταβίβαση των τάσεων γίνεται μέσω φαινομένων θόλου ενώ η περίπτωση αυτή μπορεί να συναντηθεί και στις περιπτώσεις (a) και (c) του Σχήματος 2.6, όπου τα γεωλογικά στρώματα είτε παρουσιάζονται οριζόντια ή έχουν μικρή κλίση παράλληλα με τον άξονα της σήραγγας (περίπτωση a) ή είναι κάθετα προς τον άξονα της σήραγγας (περίπτωση c). Οι περιπτώσεις (d) και (f) του Σχήματος 2.6 παρουσιάζουν συγκέντρωση τάσεων στη μια πλευρά της σήραγγας, ενώ η περίπτωση (e) παρουσιάζει υψηλή συγκέντρωση τάσεων στην κορυφή της αψίδας (Αντωνίου, 2005).



**Σχήμα 2.6** Επίδραση προσανατολισμού στρωματογραφίας σε σχέση με τον άξονα της σήραγγας στην ανάπτυξη διαμητικών τάσεων (Αντωνίου, 2005 από Desio, 1951)

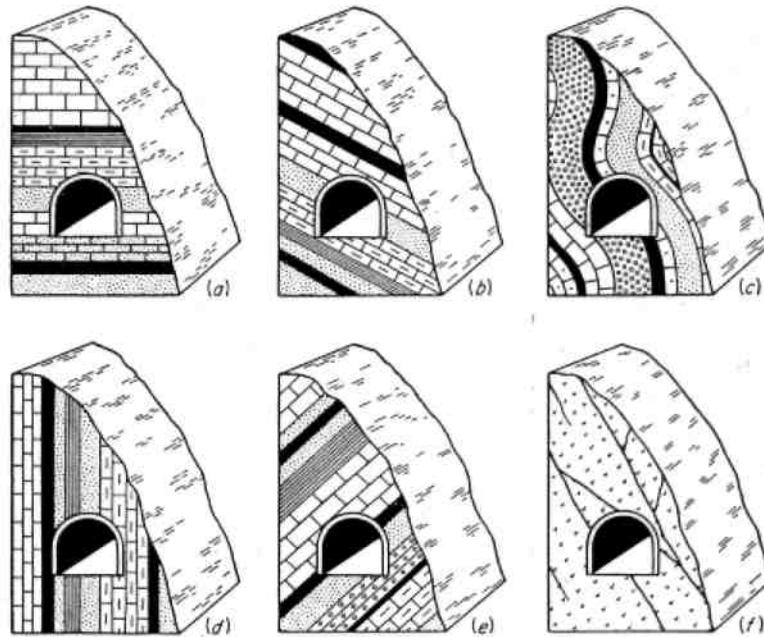
Στην περίπτωση κατασκευής σηράγγων σε πτυχωμένα στρώματα και συγκεκριμένα σε αντίκλινο η υποστήριξη της σήραγγας δέχεται μειωμένες κατακόρυφες τάσεις, ενώ αντίθετα στην περίπτωση σύγκλινου οι κατακόρυφες τάσεις είναι αυξημένες, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 2.7 (Αντωνίου, 2005).



**Σχήμα 2.7** Επίδραση πτύκωσης γεωλογικών στρωμάτων σε σχέση με τον άξονα της σήραγγας (Αντωνίου, 2005 από Desio, 1951)

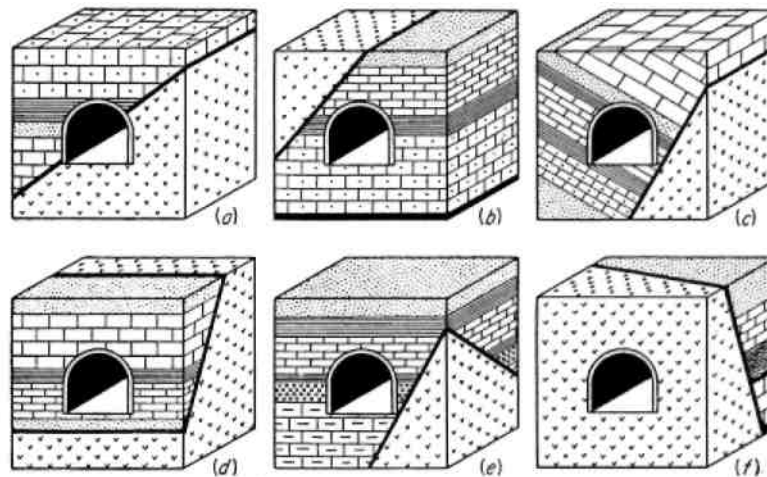
Επιπλέον στην περίπτωση του αντικλίνου τα υπόγεια νερά θα ρέουν μακριά από τη σήραγγα, ενώ στην περίπτωση του σύγκλινου τα νερά θα μαζεύονται προς αυτήν.

Στην περίπτωση κατασκευής σηράγγων δίπλα σε απότομα πρανή η στρωματογραφία παίζει σημαντικό ρόλο στη διάνοιξη των σηράγγων. Συνεπώς από το Σχήμα 2.8 που ακολουθεί, ευνοϊκή χαρακτηρίζεται η περίπτωση (a), (d) και (e), δυσμενής η περίπτωση (b) και (f) και τέλος ασαφής η περίπτωση (c) (Αντωνίου, 2005).



**Σχήμα 2.8** Επικρατούσες συνθήκες διάνοιξης σηράγγων δίπλα σε απότομα πρανή (Αντωνίου, 2005 από Desio, 1951)

Τέλος η διέλευση σήραγγας μέσα από ζώνες διάρρηξης (Σχήμα 2.9) απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή, αφού οι ζώνες αυτές χαρακτηρίζονται ως ζώνες μικρής αντοχής σε διάτμηση. Το γεγονός αυτό οδηγεί σε βαριάς μορφής υποστήριξη της διατομής της σήραγγας στις θέσεις αυτές, ενώ αν οι ζώνες παρουσιάζονται πληρωμένες με αργιλικά υλικά ενδεχομένως υπάρχουν πιθανά προβλήματα διογκώσεων. Ο γεωλόγος οφείλει να βρει στοιχεία που θα οδηγήσουν στο χαρακτηρισμό των ρηγμάτων αυτών ως «ενεργά» ή «μη ενεργά» γιατί και ο τρόπος υποστήριξης είναι διαφορετικός (εύκαμπτη ή δύσκαμπτη αντίστοιχα). Επιπλέον αν η ζώνη διάτμησης δεν έχει αργιλικό υλικό είναι ζώνη με έντονη κυκλοφορία υπόγειου νερού. Σε περιπτώσεις που συναντάται ρήγμα κατά τη χάραξη του άξονα της σήραγγας συνήθως γίνεται προσπάθεια να περάσει ο άξονας σχεδόν κάθετα το ρήγμα, γιατί μόνο τότε η επιρροή του στην επένδυση της σήραγγας είναι η ελάχιστη δυνατή (Αντωνίου, 2005).



**Σχήμα 2.9** Επικρατούσες συνθήκες διάνοιξης σηράγγων σε ρηξιγενείς ζώνες (Αντωνίου, 2005 από Desio, 1951)

#### 2.4.2 Ρήγματα και Κατακλάσεις

Τα ρήγματα και οι κατακλάσεις που υποβαθμίζουν κατά κανόνα τις μηχανικές ιδιότητες των πετρωμάτων και σε συνδυασμό με προνομιακές συγκεντρώσεις υπόγειων νερών είναι δυνατόν να καταλήξουν πολλές φορές σε ζώνες υψηλής επικινδυνότητας. Είναι απαραίτητη η γνώση εκ των προτέρων των θέσεων και της σημασίας των ρηγμάτων, τη θέση που θα συναντηθούν και το γενικό προσανατολισμό του συστήματος των κατακλάσεων. Σε τέτοιες περιπτώσεις η διέλευση της σήραγγας γίνεται κατά το δυνατόν εγκάρσια για την αποφυγή διαιώνισης των δυσμενών συνθηκών (Στειακάκης, 2005).

#### 2.4.3 Υπόγεια Νερά

Οι σήραγγες γενικά λειτουργούν ως αποδέκτες των υπόγειων νερών της περιοχής. Το υπόγειο νερό είτε ρέει μέσα στο εσωτερικό της σήραγγας σε μεγάλες ποσότητες και με μεγάλες ταχύτητες, ή στάζει από την οροφή ή τα πλαϊνά τοιχώματα της σήραγγας. Η ροή του νερού εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το πρωτογενές ή δευτερογενές πορώδες που παρουσιάζει το κάθε πέτρωμα. Επίσης οι σήραγγες οδηγούν και στην ταπείνωση της στάθμης του υπόγειου υδροφόρου ορίζοντα.

Επιπλέον στα ανθρακικά πετρώματα αν υπάρχει εκτεταμένο καρστικό σύστημα τα νερά θα διακινούνται μέσω αυτού και αν η σήραγγα βρίσκεται πάνω από τη στάθμη του υπόγειου υδροφόρου ορίζοντα, τότε οι εισροές των υδάτων θα είναι αιφνίδιες, ενώ τα νερά θα είναι κυρίως όμβρια. Η σήραγγα θεωρείται ότι βρίσκεται στη ζώνη μετάβασης αυτών. Αντιθέτως αν η σήραγγα βρίσκεται κάτω από τον υπόγειο



υδροφόρο ορίζοντα, τότε θα υπάρχει έντονη εισροή υδάτων και η σήραγγα θα βρίσκεται στη ζώνη κορεσμού. Στα πυριγενή πετρώματα δεν υπάρχει τόσο έντονα αναπτυγμένο υπόγειο δίκτυο και το νερό κινείται μόνο μέσα από τις διακλάσεις και τις ρωγμές (Αντωνίου, 2005).

#### **2.4.4 Παλαιογεωγραφία**

Είναι πολύ σημαντική η γνώση (για λόγους ασφάλειας, τεχνικούς και οικονομικούς) για το αν η σήραγγα θα συναντήσει προσχωματικούς σχηματισμούς, οι οποίοι οφείλονται σε παλαιότερη επιφανειακή τοπογραφία που επιχωματώθηκε τεχνητά ή φυσικά. Το πρόβλημα γίνεται ιδιαίτερα σοβαρό εάν οι χαλαρές προσχώσεις αποτελούνται από ρευστή άργιλο ή άμμο με σχετικά υψηλό βαθμό υδροφορίας (Στειακάκης, 2005).

#### **2.4.5 Σχέση Συμβατικής και Πραγματικής Διαμέτρου Διάνοιξης**

Σε υγιή πετρώματα ικανοποιητικής μηχανικής αντοχής η πραγματική διάμετρος της διάνοιξης θα είναι πολύ κοντά στην προγραμματιζόμενη. Αντίθετα σε περιπτώσεις χαλαρών σχηματισμών με προβλήματα σταθερότητας των παρειών της σήραγγας (λόγω ύπαρξης υπόγειων νερών, ζωνών κατακερματισμού και μυλωνιτοποίησης και ιδίως λόγω εμφάνισης ρευστής αργίλου ή άμμου), η πραγματική διάμετρος είναι πολύ μεγαλύτερη της σχεδιαζόμενης. Τέτοιες συνθήκες αυξάνουν το κόστος της εξόρυξης, κάνουν τα μέτρα ασφαλείας λιγότερο αποτελεσματικά και επιβαρύνουν σημαντικά το κόστος επένδυσης της στοάς (Στειακάκης, 2005).

#### **2.4.6 Διατρησιμότητα και Εξόρυξη**

Η ευχέρεια διάτρησης και εξόρυξης μιας σήραγγας αποτελεί και κριτήριο επιλογής της κατάλληλης μεθόδου και του μηχανολογικού εξοπλισμού εξόρυξης.

Γενικά τα πυριγενή, τα μεταμορφωμένα και τα παλιά ιζηματογενή πετρώματα είναι “σκληρότερα” σε σχέση με τους πρόσφατους ηφαιστειακούς και ιζηματογενείς σχηματισμούς. Τα υπερβασικά πετρώματα και τα συμπαγή πετρώματα με ελεύθερο πυρίτιο (χαλαζία) επιφέρουν σημαντικές φθορές στα μηχανήματα. Επίσης σημαντικό ρόλο παίζει η στρωσιγένεια του σχηματισμού και το σύστημα διακλάσεων – κατακλάσεων στη διατρησιμότητα και την εξόρυξη των σχηματισμών (Στειακάκης, 2005).

### 2.4.7 Πτώσεις Οροφής

Σε υπόγειες εκσκαφές που βρίσκονται σε μικρό βάθος και υπόκεινται χαλαρών ή αποσαθρωμένων πετρωμάτων, αλλά και σε περιπτώσεις που βρίσκονται σε μεγάλο βάθος με υψηλές λιθοστατικές πιέσεις, παρατηρούνται φαινόμενα πτώσης τμημάτων της οροφής. Το φαινόμενο αφορά στην ουσία μεταβολή της συμβατικής διαμέτρου και είναι ιδιαίτερα συχνό σε περιπτώσεις που η στρώση ή οι επιφάνειες ασυνέχειας του πετρώματος προσανατολίζονται οριζόντια προς τον άξονα της σήραγγας (Στειακάκης, 2005).

### 2.4.8 Διόγκωση Παρειών και Εκτίναξη Λίθων

Η διόγκωση των παρειών της σήραγγας είναι σύνηθες φαινόμενο σε σήραγγες σχετικά μεγάλου βάθους (μεγαλύτερο από 200m).

Όταν υπάρχουν αργιλικά χαλαρά πετρώματα παρουσιάζεται διόγκωση των παρειών που οφείλεται σε δυο κυρίως λόγους. Ο πρώτος λόγος είναι η ελαστική ή πλαστική παραμόρφωση λόγω αποτόνωσης των λιθοστατικών τάσεων με τη διάνοιξη της στοάς και ο δεύτερος λόγος είναι η απορρόφηση της υγρασίας με παράλληλη διόγκωση των αργιλικών ορυκτών.

Για συμπαγή πετρώματα, τα οποία έχουν την τάση θρυμματισμού, το φαινόμενο γίνεται αισθητό σαν εκτινάξεις λίθων (Στειακάκης, 2005).

### 2.4.9 Υψηλές Θερμοκρασίες

Σε περιοχές με ηφαιστειακή ή μαγματική δράση, συναντώνται συχνά νερά υψηλής θερμοκρασίας. Το πρόβλημα γίνεται ιδιαίτερα σοβαρό εφόσον τα νερά συνοδεύονται από διαβρωτικές ενώσεις (π.χ. θειούχες ή θειώδεις) οι οποίες συνήθως προέρχονται από έκλυση του περιβάλλοντος πετρώματος (π.χ. σιδηροπυρίτη, γύψο κ.τ.λ.). Οι ενώσεις αυτές προσβάλλουν τις μεταλλικές κατασκευές και το σκυρόδεμα. Στις ίδιες περιοχές δεν αποκλείεται και η ύπαρξη τοξικών αερίων (Στειακάκης, 2005).

### 2.4.10 Συστήματα Ταξινόμησης της Βραχώμαζας

Προκειμένου να γίνει η κατασκευή μιας σήραγγας δεν αρκεί μόνο λεπτομερής γεωλογική χαρτογράφηση και ερευνητικές γεωτρήσεις που θα οδηγήσουν στη σύνταξη της γεωλογικής τομής πρόβλεψης. Απαιτείται η εξέταση όλων εκείνων των παραμέτρων που επηρεάζουν την τεχνική συμπεριφορά της βραχώμαζας, όπως (βαθμός αποσάθρωσης, ποσοστό διακλάσεων και ρωγμών, πλήρωσή τους ή όχι με κάποιο υλικό

κλπ) που ενδεχομένως να τη μεταβάλλουν αρκετά. Απαιτείται συνεπώς μια ειδική ταξινόμηση της βραχώμαζας που να αντανακλά τη συμπεριφορά της κατά τη διάνοιξη μιας σήραγγας. Έτσι από διάφορους ερευνητές έχουν προταθεί συστήματα ταξινόμησης βραχώμαζας που τη συσχετίζουν με ποσοτικές εκφράσεις (Αντωνίου, 2005).

Επιγραμματικά τα κύρια συστήματα ταξινόμησης της βραχώμαζας είναι τα εξής (Αγιουτάντης, 2002):

- Η ταξινόμηση των φορτίων των πετρωμάτων κατά Terzaghi
- Η ταξινόμηση των Lauffer – Pacher
- Η ταξινόμηση με βάση το δείκτη RQD (Rock Quality Designation – Δείκτης Ποιότητας Πετρώματος)
- Η ταξινόμηση κατά Franklin
- Η ταξινόμηση RSR (Rock Structure Rating)
- Η Γεωμηχανική ταξινόμηση (RMR – Rock Mass Rating)
- Η ταξινόμηση NGI (Norwegian Geotechnical Institute) ή Σύστημα Q
- Το σύστημα GSI (Geological Strength Index) και
- Η ταξινόμηση με βάση το βαθμό αποσάθρωσης.

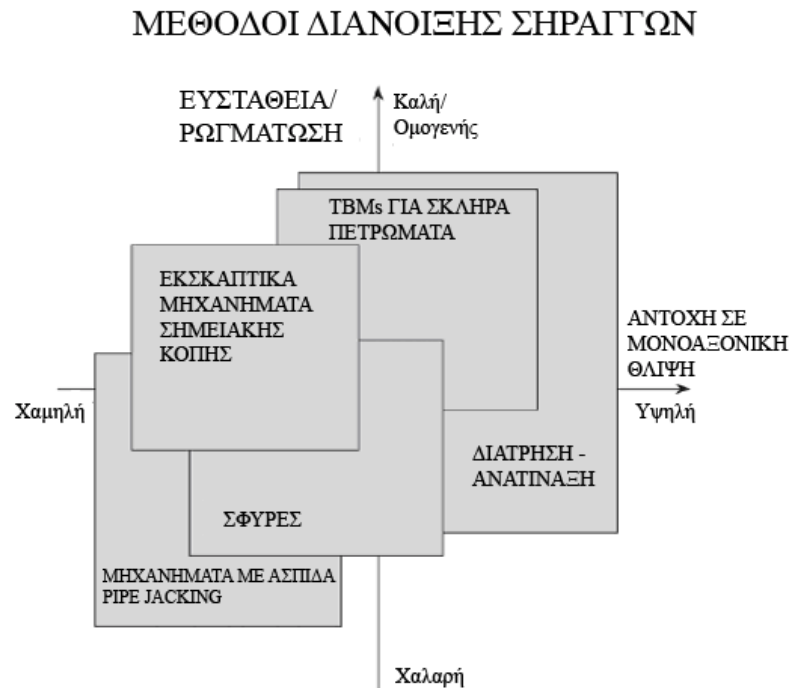
## 2.5 Εκσκαφή Σηράγγων

Στις σύγχρονες εκσκαφές σηράγγων υπάρχει μεγάλη ποικιλία για την επιλογή της αποδοτικότερης μεθόδου εκσκαφής. Οι παράγοντες που πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κατά την επιλογή της μεθόδου εκσκαφής μιας σήραγγας, είναι οι ακόλουθοι:

- Οι διαστάσεις των σηράγγων
- Η γεωμετρία των σηράγγων
- Το μήκος των σηράγγων και ο συνολικός όγκος εκσκαφής
- Γεωλογικές και μηχανικές ιδιότητες πετρώματος
- Επίπεδο υπόγειου υδροφόρου ορίζοντα και αναμενόμενη εισροή υδάτων
- Περιορισμοί δονήσεων
- Επιτρεπόμενες καθιζήσεις επιφανείας

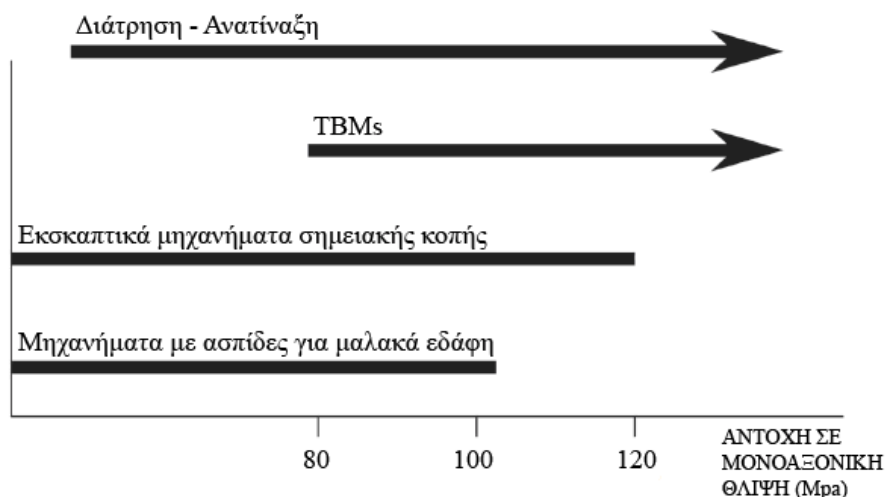
Οι μέθοδοι εκσκαφής μπορούν να χωριστούν σε διάτρηση – ανατίναξη και μηχανική εκσκαφή. Οι μηχανικές μέθοδοι μπορούν να χωριστούν περαιτέρω σε σημειακής κοπής (π.χ. roadheaders, σφύρες, εκσκαφείς) και ολομέτωπης κοπής

(Tunnel Boring Machine – TBM, ασπίδας, pipe-jacking, microtunneling) (Heiniö, 1999). Στο Σχήμα 2.10 φαίνεται η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου εκσκαφής ανάλογα με τις διαφορετικές συνθήκες που επικρατούν στη βραχώμαζα.



**Σχήμα 2.10** Επιλογή κατάλληλης μεθόδου εκσκαφής ανάλογα με τις διαφορετικές συνθήκες πετρώματος/εδάφους (Παπαντώνη, 2007 από Heiniö, 1999)

Στο Σχήμα 2.11 δίνεται το εύρος των μεθόδων ανάλογα με την αντοχή της βραχώμαζας σε μονοαξονική θλίψη.



**Σχήμα 2.11** Εύρος των μεθόδων ανάλογα με την αντοχή σε μονοαξονική θλίψη του πετρώματος/εδάφους (Παπαντώνη, 2007 από Heiniö, 1999)

Υπάρχουν δύο βασικοί τύποι κατασκευής υπογείων έργων. Αυτοί είναι ανοιχτού και κλειστού τύπου.

Η διάνοιξη σηράγγων κατά τον **ανοικτό τύπο** κατασκευής, αναφέρεται στην εκσκαφή, η οποία πραγματοποιείται από την επιφάνεια του εδάφους και η μέθοδος εκσκαφής είναι γνωστή ως μέθοδος κοπής και επίχωσης (cut and cover method).

Η διάνοιξη σηράγγων κατά τον **κλειστό τύπο** κατασκευής αφορά την υπόγεια εκσκαφή και οι μέθοδοι εκσκαφής για τις κατασκευές κλειστού τύπου χωρίζονται σε μεθόδους ανατίναξης και μηχανικής όρυξης, όπως περιγράφονται στη συνέχεια (Παπαντώνη, 2007):

1. Μέθοδοι Διάτρησης – Ανατίναξης (Drill and Blast)
2. Μέθοδοι Μηχανικής Όρυξης
  - Μέθοδοι Σημειακής Κοπής (Roadheaders, Hammers)
  - Μέθοδοι Ολομέτωπης Κοπής (TBMs, Pipe Jacking)
3. Νέα Αυστριακή Μέθοδος (New Austrian Tunneling Method – NATM)

Στις επόμενες υποενότητες, θα περιγραφεί συνοπτικά η κάθε μέθοδος εκσκαφής σήραγγας.

### 2.5.1 Κοπή και Επίχωση

Η μέθοδος κοπής και επίχωσης (cut and cover) εντάσσεται στις μεθόδους ανοικτού τύπου, όπου η εκσκαφή γίνεται από την επιφάνεια του εδάφους, θεωρείται συνήθως ως εκσκαφή τάφρων σε μαλακό έδαφος και αφορά έργα μικρού βάθους. Η μέθοδος αυτή περιλαμβάνει την εγκατάσταση προσωρινών τοίχων αντιστήριξης για υποστήριξη των παρειών της εκσκαφής, ένα σύστημα στήριξης, έλεγχο των υδάτων του εδάφους και υποστήριξη των γειτονικών κατασκευών όπου είναι απαραίτητο (Saglamer, 2005). Το Σχήμα 2.12, απεικονίζει την μέθοδο αυτή πριν και μετά την ολοκλήρωσή της.

Η μέθοδος κοπής και επίχωσης εφαρμόζεται με διαφορετικό τρόπο σε ακατοίκητες σε κατοικημένες περιοχές. Στις ακατοίκητες περιοχές, δεν συναντώνται ιδιαίτερα προβλήματα κατά την εκσκαφή, η οποία πραγματοποιείται σε όλο το εύρος της, από την επιφάνεια του εδάφους μέχρι και το βάθος στο οποίο θα εδρασθεί το έργο. Δεν κρίνεται απαραίτητη η αντιστήριξη των πρανών της εκσκαφής, διότι αυτές διαμορφώνονται σύμφωνα με την κλίση που επιτρέπουν οι εκάστοτε συνθήκες του εδάφους.

Δυσκολίες παρουσιάζονται σε κατοικημένες περιοχές όπου η κατασκευή δεν πρέπει να προκαλέσει προβλήματα στη κυκλοφορία και αφετέρου ζημιές στις γειτονικές κατασκευές όπως οικοδομές, υπόγειους αγωγούς, υπόγεια καλώδια κ.α. Ανάλογα με τα πολεοδομικά χαρακτηριστικά της περιοχής στην οποία θα γίνει το έργο εφαρμόζεται αντιστηριζόμενη εκσκαφή χωρίς κάλυψη ή διάνοιξη υπό την προστασία κάλυψης. Στην αντιστηριζόμενη εκσκαφή χωρίς κάλυψη κατασκευάζεται αρχικά η μισή διατομή ώστε να είναι δυνατή η κυκλοφορία στο άλλο ήμισυ της οδού. Η εκσκαφή αντιστηρίζεται (με διαφραγματικούς τοίχους ή πασσαλοσανίδες) ώστε να αποφευχθούν ζημιές στις γειτονικές κατασκευές. Προσοχή χρειάζεται στη σύνδεση των δυο τμημάτων της διατομής. Στην διάνοιξη υπό την προστασία κάλυψης, κατασκευάζεται αρχικά η αντιστήριξη (διαφραγματικοί τοίχοι, πασσαλοσανίδες, πασσαλοσυστοιχίες) πάνω στην οποία τοποθετείται προσωρινή κάλυψη ή μόνιμη πλάκα κάλυψης για τη γρήγορη αποκατάσταση της κυκλοφορίας. Η εκσκαφή γίνεται υπό την προστασία της κάλυψης. (Μαραγκός, 1999).



Σχήμα 2.12 Κοπή και επίχωση (Saglamer, 2005)

### 2.5.2 Διάτρηση – Ανατίναξη

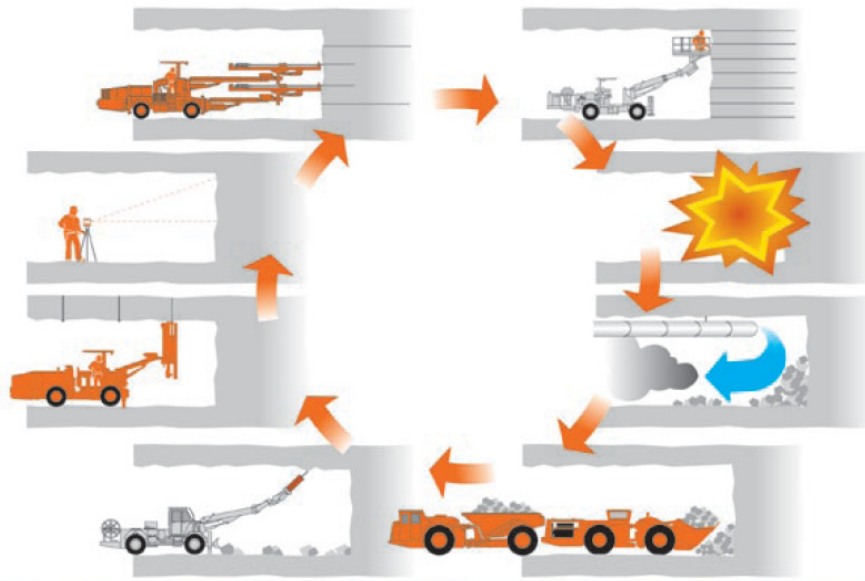
Η μέθοδος της διάτρησης-ανατίναξης (drill and blast) είναι ακόμα η πιο τυπική μέθοδος για συνθήκες μεσαίου έως σκληρού πετρώματος. Κάποια από τα χαρακτηριστικά της περιλαμβάνουν ευέλικτο εξοπλισμό, γρήγορη εκκίνηση και σχετικά χαμηλό κόστος επένδυσης σε εξοπλισμό. Από την άλλη πλευρά, η κυκλική

φύση της μεθόδου διάτρησης-ανατίναξης απαιτεί πολύ καλή οργάνωση στο πεδίο. Οι δονήσεις και ο θόρυβος των ανατινάξεων περιορίζει επίσης τη χρήση της μεθόδου αυτής σε αστικές περιοχές.

Ο τυπικός κύκλος εκσκαφής των τεχνικών ανατίναξης εκτελείται με τα ακόλουθα βήματα:

- Άνοιγμα διατρημάτων ανατίναξης και γόμωσή τους με εκρηκτικά
- Έναυση για εκτέλεση της έκρηξης, ακολουθούμενη από αερισμό για την απομάκρυνση των αερίων της έκρηξης
- Απομάκρυνση του εξορυσσόμενου πετρώματος (mucking)
- Απομάκρυνση χαλαρών τμημάτων πετρώματος από τη στέψη και τα τοιχώματα (scaling)
- Εγκατάσταση αρχικής υποστήριξης

Το Σχήμα 2.13 απεικονίζει τον κύκλο της μεθόδου διάτρησης – ανατίναξης. Οι περισσότερες σήραγγες ορύσσονται με τη μέθοδο ολομέτωπης εκσκαφής, όπου όλο το μέτωπο ανατινάσσεται με μια ανατίναξη. Ωστόσο, η ανατίναξη του μετώπου σε φάσεις είναι μερικές φορές πιο πρακτική ή μπορεί και να απαιτείται από τις συνθήκες του εδάφους ή από περιορισμούς του εξοπλισμού. Η πιο κοινή μέθοδος τμηματικής εκσκαφής είναι η «heading and bench», κατά την οποία το επάνω τμήμα του μετώπου (heading) ανατινάσσεται πρώτο, σε όλο του το πλάτος, και ακολουθεί μετά η ανατίναξη του κάτω μέρους (bench). Το κάτω τμήμα του μετώπου μπορεί να εκσκαφτεί με οριζόντια διατρήματα ή με κατακόρυφα διατρήματα (όμοια με των επιφανειακών ανατινάξεων). Υπάρχουν κι άλλες παραλλαγές της τμηματικής ανατίναξης, όπως ένα κεντρικό άνοιγμα στη στέψη (center crown drift), ακολουθούμενο από δύο πλευρικά ανοίγματα (crown side drifts) και στη συνέχεια από την όρυξη του κάτω τμήματος του μετώπου σε ένα, δύο ή τρία στάδια. Η τμηματική ανατίναξη προτιμάται στις εξής περιπτώσεις: α) όταν η διατομή είναι πολύ μεγάλη για ένα υπόγειο διατρητικό συγκρότημα (Jumbo), β) όταν το μέγεθος της έκρηξης σχετιζόμενο με το βάρος των εκρηκτικών πρέπει να είναι περιορισμένο για περιορισμό των δονήσεων και γ) όταν το έδαφος είναι τόσο φτωχό που το πλήρες πλάτος εκσκαφής ίσως δεν είναι σταθερό για αρκετό διάστημα που να επιτρέπει την εγκατάσταση της αρχικής υποστήριξης (Παπαντώνη, 2007 από USACE, 1997).



Σχήμα 2.13 Ο κύκλος της μεθόδου διάτρησης - ανατίναξης (Heiniö, 1999)

### 2.5.3 Σημειακή Κοπή με Εκσκαπτικά Μηχανήματα Σημειακής κοπής

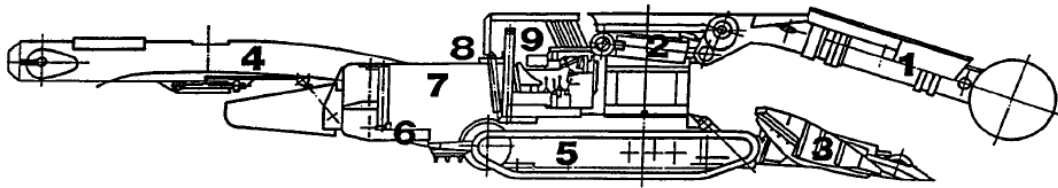
Το εκσκαπτικό μηχάνημα σημειακής κοπής (roadheader), μπορεί να χρησιμοποιηθεί για όρυξη σηράγγων σε αυτοϋποστηριζόμενη βραχώμαζα χαμηλής έως μέσης σκληρότητας. Μπορεί να συνδυάσει τη δυνατότητα της μεθόδου διάτρησης – ανατίναξης για παραγωγή σηράγγων διαφόρων γεωμετριών και τη συνέχεια της μηχανικής εκσκαφής του μετώπου αφού, σε αντίθεση με τη μέθοδο διάτρησης – ανατίναξης, δεν παράγει κραδασμούς κατά τη λειτουργία του, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις ευαίσθητες αστικές περιοχές. Σε συνθήκες σκληρότερης βραχώμαζας, η χρήση του εκσκαπτικού μηχανήματος σημειακής κοπής περιορίζεται, λόγω μικρότερου χρόνου ζωής των χρησιμοποιούμενων εργαλείων και αυξημένου κόστους των κοπτικών εργαλείων (Heiniö, 1999).

Τα εκσκαπτικά μηχανήματα σημειακής κοπής συναντώνται σε πολλά μεγέθη και σχήματα και είναι εξοπλισμένα για ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών. Χρησιμοποιούνται για εκσκαφή σηράγγων με τη μέθοδο της ολομέτωπης και σημειακής κοπής, καθώς και για την εκσκαφή υπόγειων θαλάμων. Επίσης, μπορούν να κάνουν την αρχική εκσκαφή του χώρου για την τοποθέτηση μηχανήματος ολομέτωπης εκσκαφής TBM (Tunnel Boring Machine) (το οποίο θα αναλυθεί σε επόμενη ενότητα), εκσκαφή βοηθητικών στοών και άλλων υπόγειων ανοιγμάτων οποιουδήποτε σχήματος και μεγέθους.

Τα μέρη από τα οποία αποτελείται ένα τυπικό εκσκαπτικό μηχάνημα σημειακής κοπής είναι τα ακόλουθα (Σχήμα 2.14):



- Περιστροφική κεφαλή με κοπτικά άκρα. Οι κύριες σχεδιαστικές αρχές των κεφαλών είναι δύο ειδών: διαμήκεις (Σχήμα 2.15), οι οποίες περιστρέφονται παράλληλα προς τον άξονα του βραχίονα και εγκάρσιες (Σχήμα 2.16), οι οποίες περιστρέφονται κάθετα προς τον άξονα του βραχίονα
- Υδραυλικός βραχίονας, ο οποίος κινείται κατακόρυφα, ώστε να τοποθετεί την κεφαλή στην επιθυμητή θέση
- Θωράκιο (turret), που επιτρέπει οριζόντια κίνηση στην κεφαλή
- Συσκευή φόρτωσης με βραχίονες περισυλλογής
- Ταινιόδρομο για τη μεταφορά του εξορυσσόμενου υλικού από τη συσκευή φόρτωσης στο πίσω τμήμα της μηχανής
- Πλαίσιο βάσης, συχνά με στηρικτικά άκρα, εφοδιασμένο με ηλεκτρικά και υδραυλικά χειριστήρια της συσκευής και καμπίνα χειριστή
- Ερπύστριες για προώθηση

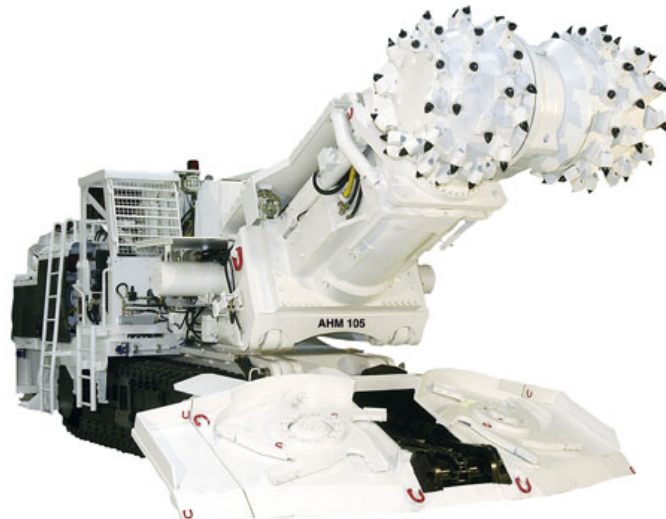


- |                       |                     |
|-----------------------|---------------------|
| 5. Κοπτικός βραχίονας | 1. Πλαίσιο βάσης    |
| 6. Θωράκιο            | 2. Ηλεκτρικά        |
| 7. Συσκευή φόρτωσης   | 3. Υδραυλικά        |
| 8. Ταινιόδρομος       | 4. Καμπίνα χειριστή |
| 9. Ερπύστριες         |                     |

**Σχήμα 2.14** Κύρια δομικά μέρη τυπικού roadheader (Παπαντώνη, 2007 από USACE, 1997)



**Σχήμα 2.15** Roadheader με διαμήκη περιστροφική κεφαλή ([www.mitsumiike.co.jp](http://www.mitsumiike.co.jp))



**Σχήμα 2.16** Roadheader με εγκάρσια περιστροφική κεφαλή ([www.sandviktamrock.fi](http://www.sandviktamrock.fi))

Η εκσκαφή με εκσκαπτικό μηχάνημα σημειακής κοπής Roadheader γίνεται με τα εξής βήματα: Αρχικά γίνεται εισχώρηση της περιστροφικής κεφαλής στο μέτωπο, η οποία προκαλείται είτε από την εμπρόσθια κίνηση ολόκληρου του μηχανήματος μέσω των ερπυστριών, είτε από κίνηση του βραχίονα (αν διαθέτει αυτή την ικανότητα). Η διαδικασία εισχώρησης απαιτεί την περισσότερη ισχύ στην ακολουθία της κοπής, ωστόσο το πάτωμα δεν επηρεάζεται σχεδόν καθόλου, καθώς οι ερπύστριες δεν εμπλέκονται σε αυτή. Η εκσκαφή του μετώπου συνεχίζεται με οριζόντια μετακίνηση της κεφαλής και με κάθετη μετατόπισή της όταν φτάνει στο εξωτερικό όριο της σήραγγας. Τέλος, εάν κρίνεται απαραίτητο, ένα επιπλέον βήμα εξομάλυνσης (profiling) ελαχιστοποιεί τις πτυχώσεις της σήραγγας και τη φέρνει πλησιέστερα στο θεωρητικό της σχήμα (Heiniö, 1999).

#### 2.5.4 Σημειακή Κοπή με Σφύρες

Η εκσκαφή σήραγγας με σημειακή κοπή (hammer tunneling) μέσω υδραυλικών σφυρών (hydraulic hammers ή hammers) (Σχήμα 2.17), αποτελούν ένα συνδυασμό συνεχούς μεθόδου με χαμηλό κόστος εξοπλισμού. Δεν θέτουν περιορισμούς στη γεωμετρία του μετώπου της σήραγγας και είναι αποδοτικές σε βραχύμαζα με χαμηλή έως μέση αντοχή σε θλίψη. Σε σκληρή βραχύμαζα η χρήση τους δεν συνίσταται, λόγω περιορισμένου ρυθμού παραγωγής (Heiniö, 1999).



Σχήμα 2.17 Υδραυλική σφύρα (www.komatsu.com)

Η μέθοδος εργασίας που εφαρμόζεται εξαρτάται από το μέγεθος της σήραγγας. Έτσι:

Σε σήραγγες με εμβαδό διατομής από  $30 - 70\text{m}^2$ , μπορεί να χωρέσει μόνο μια σφύρα, οπότε η διαδικασία εξόρυξης διενεργείται σε πέντε φάσεις:

- Εκσκαφή
- Μεταφορά του εξορυσσόμενου υλικού
- Απομάκρυνση των επισφαλών όγκων
- Μεταφορά του εξορυσσόμενου υλικού που προήλθε από τους επισφαλείς όγκους
- Ενίσχυση και υποστήριξη των τοιχωμάτων της σήραγγας

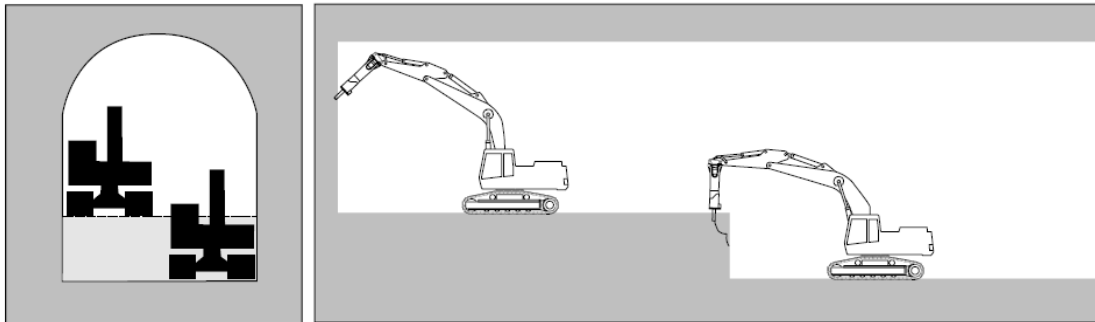
Σε σήραγγες με εμβαδό διατομής μεγαλύτερο από  $70\text{m}^2$ , η εξόρυξη και η μεταφορά του υλικού μπορεί να γίνεται ταυτόχρονα γιατί σε σήραγγες τέτοιου μεγέθους μπορούν να εργαστούν ταυτόχρονα μια σφύρα, ένας φορτωτής κι ένα φορτηγό. Έτσι η διαδικασία εξόρυξης διενεργείται σε δυο φάσεις:

- Εκσκαφή (και απομάκρυνση των επισφαλών όγκων) και μεταφορά του εξορυσσόμενου υλικού
- Ενίσχυση και υποστήριξη των τοιχωμάτων της σήραγγας

Σε σήραγγες με ύψος μεγαλύτερο από  $7\text{m}$ , είναι αδύνατο ένας εκσκαφέας να εξορύξει υλικό από τόσο ψηλά και η διαδικασία γίνεται σε δύο στάδια (Σχήμα 2.18):

- Εκσκαφή της σήραγγας από τον εκσκαφέα με τη σφύρα μέχρι ένα συγκεκριμένο ύψος (μικρότερο των  $7\text{m}$ )

- Ένας ακόμη συνδυασμός εκσκαφέα – σφύρας ξεκινά περίπου 150m πίσω από τον πρώτο εκσκαφέα και μεγαλώνει το βάθος της σήραγγας μέχρι αυτή να αποκτήσει το επιθυμητό ύψος.



Σχήμα 2.18 Εκσκαφή σήραγγας σε δύο φάσεις με δύο σφύρες (Heiniö, 1999)

### 2.5.5 Ολομέτωπη κοπή με Μηχανές Ολομέτωπης Κοπής

Τα μηχανήματα ολομέτωπης κοπής (Tunnel Boring Machines – TBMs) χρησιμοποιούνται για τη διάνοιξη σηράγγων μέσα σε διαφορετικούς γεωλογικούς σχηματισμούς. Μπορεί να χρησιμοποιηθούν το ίδιο αποτελεσματικά για τη διάνοιξη μέσα από σκληρά ή χαλαρά πετρώματα ή εδάφη. Οι διάμετροι διάνοιξης κυμαίνονται από 1 – 15m (με τάση να φθάσουν τα 19m) και οι ταχύτητες προχώρησης ανάλογα με τις γεωλογικές συνθήκες από μερικά cm/εβδομάδα ως και 130m/εβδομάδα (Εξαδάκτυλος και Σταυροπούλου, 2006).

Μια μηχανή ολομέτωπης κοπής αποτελείται από μηχανικά, υδραυλικά, και ηλεκτρικά μέρη που ενσωματώνονται σε μια πλήρη ενιαία μονάδα, η οποία παρέχει την ταυτόχρονη εκσκαφή και αφαίρεση στείρων από το μέτωπο. Η μηχανή αυτή αποτελεί μέρος ενός γενικού μηχανοποιημένου συστήματος εκσκαφής, που περιλαμβάνει τα υποσυστήματα που παρέχουν την ακρίβεια ευθυγράμμισης, τη μεταφορά των θραυσμάτων κοπής, την παροχή αερισμού, νερού και ισχύος στην εκμετάλλευση και την υποστήριξη εδάφους. Η συναρμολόγησή της διενεργείται στο μέτωπο των σηράγγων. Τα περισσότερα από τα «εφεδρικά» μέρη των υποσυστημάτων, τοποθετούνται σε πλατφόρμες, οι οποίες ρυμουλκούνται πίσω από τη μηχανή. Η απομάκρυνση των θραυσμάτων κοπής και η παροχή του εξοπλισμού, μεταφέρονται στη σήραγγα μέσω ενός φρέατος ή μιας πύλης εξόδου (Παπαντώνη, 2007 από Sinha, 1991).

Ένα TBM έχει τα εξής τρία ευδιάκριτα δομικά μέρη (Σχήμα 2.19):

- Την ουρά, η οποία περιέχει τους ανυψωτικούς μηχανισμούς για την εγκατάσταση της επένδυσης, την πλατφόρμα τσιμεντενέσεων (grouting

platform), τα υδραυλικά συστήματα αγκυρώσεων (shove jacks), το σύστημα μεταφορέων και άλλα βοηθητικά συστήματα

- Το σώμα, το οποίο περιέχει τις πλευρικές αγκυρώσεις, τις δαγκάνες σταθεροποίησης, την αίθουσα του χειριστή, τα υδραυλικά και ηλεκτρικά συστήματα, τις μηχανές, τις γεννήτριες, και την πλατφόρμα εργασίας και
- Την κεφαλή, η οποία είναι το περιστρεφόμενο μέρος του συστήματος, το οποίο περιέχει την κοπτική κεφαλή και, όταν κρίνεται απαραίτητο έναν μηχανισμό προστατευτικών καλυμμάτων (ασπίδα – shield) (Παπαντώνη, 2007 από Sinha, 1991). Πίσω από την κοπτική κεφαλή υπάρχει ένας θάλαμος στον οποίο ανάλογα με τον τύπο του κοπτικού, τα θραύσματα κοπής ανακατεύονται με πολφό ή μένουν ως έχουν και μεταφέρονται στην έξοδο της σήραγγας. Πίσω από το θάλαμο βρίσκονται μια σειρά από υδραυλικοί γρύλοι οι οποίοι χρησιμοποιούνται για την προώθηση του μηχανήματος. Οι γρύλοι τοποθετούνται στην επένδυση της σήραγγας που βρίσκεται πίσω από το μηχάνημα και εν συνεχεία το ωθούν προς την αντίθετη κατεύθυνση (Εξαδάκτυλος και Σταυροπούλου, 2006)



Σχήμα 2.19 Μέρη TBM (www.tunnelseis.com)

Οι βασικές σχεδιαστικές αρχές των μηχανών ολομέτωπης κοπής είναι δύο. Αυτές είναι οι μηχανές απλού gripper και οι μηχανές διπλού gripper.

Το gripper είναι σύστημα πλευρικής αντιστήριξης και προώθησης και είναι απαραίτητο για τη μετάδοση των δυνάμεων πρόωσης του TBM. Η διαφορά τους έγκειται στο ότι οι μηχανές απλού gripper υποστηρίζονται από ένα σύστημα πλευρικής

αντιστήριξης, ενώ οι διπλού από δύο τέτοια συστήματα. Τα συστήματα αυτά διενεργούν εξ ολοκλήρου τη λειτουργία καθοδήγησης της μηχανής (Heiniö, 1999).

Επιπλέον, οι μηχανές ολομέτωπης κοπής διακρίνονται, ανάλογα με την ύπαρξη ή όχι καλύμματος γύρω τους, στις ακόλουθες κατηγορίες (Καββαδάς, 2005):

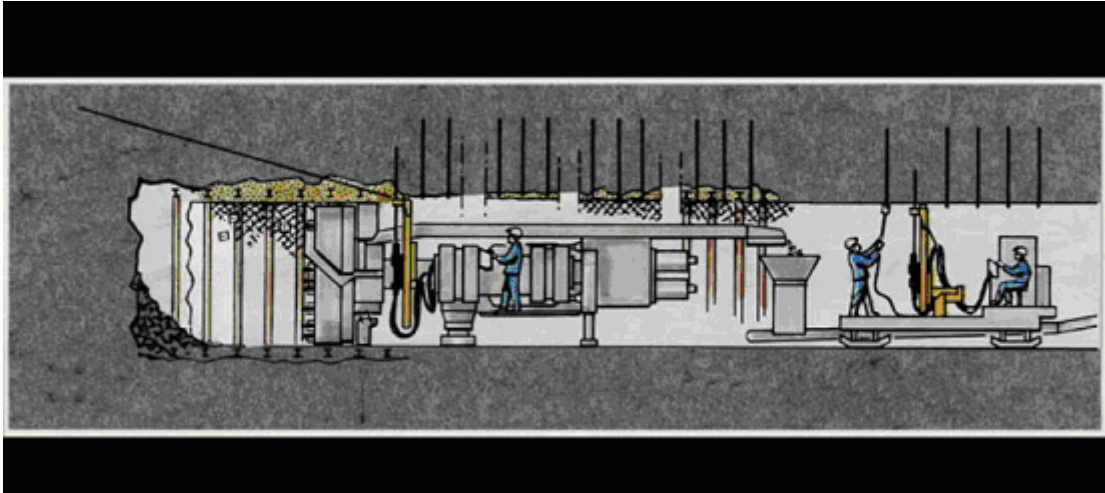
- Χωρίς ασπίδα ή ανοικτά (Open TBMs): Χρησιμοποιούνται σε καλής ποιότητας βραχώμαζα. Τα περισσότερα από αυτά έχουν τουλάχιστον μια μερική ασπίδα στην οροφή τους για τη προστασία των εργαζομένων έως ότου να εγκατασταθεί η υποστήριξη.
- Με μονή ασπίδα: Μια πλήρως προστατευμένη μηχανή ολομέτωπης κοπής έχει το σώμα και την ουρά, κάτω από μια ασπίδα. Συστήματα ολομέτωπης κοπής με ασπίδα χρησιμοποιούνται σε χαλαρά εδάφη και μικτό υπέδαφος και σε συνθήκες που αναμένεται υψηλή εισροή νερού.
- Με διπλή (τηλεσκοπική) ασπίδα: Σε καλής ποιότητας βραχώμαζα συμπεριφέρονται όπως τα ανοικτά TBMs και η προώθηση γίνεται με τα grippers, ενώ η τοποθέτηση της επένδυσης (προκατασκευασμένα στοιχεία) μπορεί να γίνεται ταυτοχρόνως με την εκσκαφή TBMs μονής ασπίδας χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές μη αυτοϋποστηριζόμενης βραχώμαζας, ενώ τα διπλής ασπίδας, ανάλογα με τον τύπο της βραχώμαζας, συμπεριφέρονται είτε σαν ανοικτά, είτε σαν μονής ασπίδας (Καββαδάς, 2005).

Ο τρόπος λειτουργίας των TBM, τις περισσότερες φορές, για να προχωρήσουν το μέτωπο εκσκαφής, είναι να εξορύξουν το βράχο με τη χρήση κρούσης και στρέψης. Εν συνεχεία, στο μέτωπο της εκσκαφής η απομάκρυνση των θραυσμάτων κοπής, πραγματοποιείται μέσω κάδων. Τα θραύσματα κοπής παραδίδονται μέσω μιας χοάνης στην κορυφή της κοπτικής κεφαλής της μηχανής. Μέσω ενός αγωγού υπό κλίση, το θρυμματισμένο υλικό από την εκσκαφή εκφορτώνεται επάνω σε έναν μεταφορέα, και αυτός στη συνέχεια μεταφέρει το υλικό στο πίσω μέρος. Έπειτα, οι μεταφορείς/ταινιόδρομοι φορτώνουν το υλικό αυτό σε μία δεύτερη μεταφορική ταινία, η οποία στηρίζεται σε ένα πλαίσιο, το οποίο ρυμουλκείται πίσω από τη μηχανή.

Ο αερισμός γίνεται μέσω αγωγών εξαερισμού και ανεμιστήρων, με μηχανικό ή φυσικό τρόπο, με στόχο τον καλύτερο αερισμό του χώρου, για το εργατικό προσωπικό. (Παπαντώνη, 2007 από Sinha, 1991).

Η υποστήριξη της εκσκαφής με τη χρήση ενός συστήματος μηχανής ολομέτωπης κοπής, πραγματοποιείται από το ίδιο το σύστημα. Στην ουρά του υπάρχει ολόκληρο σύστημα, το οποίο εφαρμόζει τα απαραίτητα μέτρα υποστήριξης, ανάλογα με την

περίπτωση. Δηλαδή, υπάρχει ενσωματωμένος εξοπλισμός για την εφαρμογή εκτοξευόμενου σκυροδέματος ή τοποθέτηση αγκυρίων (Σχήμα 2.20), όπου αυτό κρίνεται απαραίτητο. Συνολικά καθ' όλο το μήκος της, υπάρχουν πλευρικά αγκύρια και άλλα συστήματα για την πλευρική στήριξη της εκσκαφής.



**Σχήμα 2.20** Τοποθέτηση αγκυρίων κατά τη διάνοιξη με TBM (www.atlascorco.com)

Σε ασθενή εδάφη προτιμώνται τα TBMs με διπλά πλευρικά έμβολα στήριξης (grippers), εφόσον έχουν τη δυνατότητα καλύτερης κατανομής των δυνάμεων στα τοιχώματα της σήραγγας.

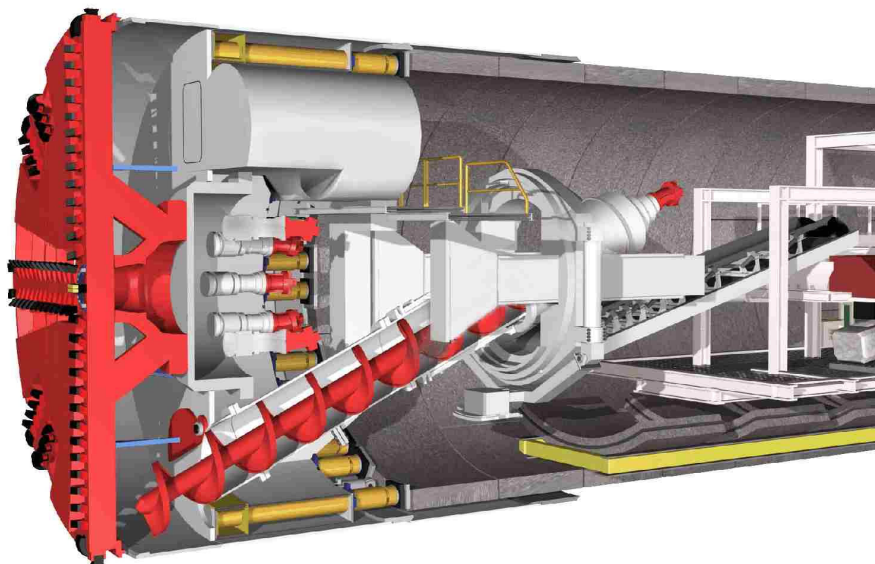
Συστήματα ολομέτωπης κοπής με ασπίδα χρησιμοποιούνται σε χαλαρά εδάφη και μικτό υπέδαφος και σε συνθήκες που αναμένεται υψηλή εισροή νερού. Τα TBMs με μονή ασπίδα προστατεύουν την κεφαλή από καταπτώσεις της οροφής και η προώθησή τους γίνεται με πίεση επί της τοποθετημένης επένδυσης. Όσον αφορά τα TBMs με διπλή (τηλεσκοπική) ασπίδα, η προώθηση γίνεται με πίεση επί της ήδη τοποθετημένης επένδυσης και συνεπώς συμπεριφέρεται σαν TBMs με μονή ασπίδα, όταν πρόκειται για χαλαρά εδάφη, ενώ συμπεριφέρονται ως συμβατικά TBMs, όταν χρησιμοποιούνται σε καλά πετρώματα.

Όταν πρέπει να αποφευχθεί η καθίζηση της επιφάνειας (για εκσκαφές σε κατοικημένες περιοχές ή κοντά στην επιφάνεια), χρησιμοποιούνται TBM που εφαρμόζουν αντισταθμιστική πίεση στο μέτωπο της εκσκαφής για να διατηρήσουν σταθερή την εδαφική πίεση στο βάθος της εκσκαφής.

Δύο τύποι TBM διακρίνονται που λειτουργούν με εφαρμογή αντισταθμιστικής πίεσης στο μέτωπο. Τα μηχανήματα ολομέτωπης κοπής με εφαρμογή εξισορρόπησης εδαφικής πίεσης στο μέτωπο (earth pressure balance EPB – TBMs) και τα μηχανήματα

ολομέτωπης κοπής με εφαρμογή πίεσης στο μέτωπο μέσω μίγματος μπετονίτη-εδάφους (slurry pressure balance SPB – TBMs or slurry-shield or mix-shield).

Τα **μηχανήματα ολομέτωπης κοπής με εφαρμογή εξισορρόπησης εδαφικής πίεσης** (Σχήμα 2.21) είναι μηχανήματα ειδικά σχεδιασμένα για λειτουργία σε μαλακά εδάφη που περιέχουν νερό υπό πίεση. Χαλαρές ιζηματογενείς αποθέσεις διαβρωμένες από νερό και αρκετά υπερυψωμένος υδροφόρος ορίζοντας θα ήταν προκλήσεις για τα συμβατικά TBMs. Η ασπίδα των EPB – TBMs αντέχει πιέσεις εισροής ύδατος έως και 10 bar και ελέγχουν την ευστάθεια του μετώπου της σήραγγας και την καθίζηση της επιφανείας παρακολουθώντας και ρυθμίζοντας την πίεση μέσα στο θάλαμο της κοπτικής κεφαλής, ώστε να έρθει σε ισορροπία με την πίεση που υπάρχει μπροστά από την κοπτική κεφαλή. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ισορροπία στο μέτωπο επιτυγχάνεται χωρίς τη χρήση πολφού (slurry) κι επιτρέπει την όρυξη σιράγγων σε μαλακά, υγρά ή ασταθή εδάφη με ταχύτητα και ασφάλεια, η οποία δεν ήταν πριν δυνατή (Παπαντώνη, 2007). Ο έλεγχος της διαδικασίας εκσκαφής και η απόδοση του EPB TBM εξαρτάται από τις ιδιότητες του εδάφους που εξορύσσεται. Ρύθμιση του εδάφους με εισπίεση αφρών, πολυμερών νερού, μπετονίτη, ή οποιοδήποτε συνδυασμού τους απαιτείται συνήθως για την τροποποίηση των ιδιοτήτων του εδάφους που εξορύσσεται για να σχηματιστεί μια μαλακή πλαστική πάστα. Αποδοτική εξυγίανση του εδάφους βελτιώνει σημαντικά την απόδοση του μηχανήματος και ελέγχει τη ροή του εδάφους στη μεταφορική ταινία (Παπαντώνη, 2007 από Lovat, 2007).



Σχήμα 2.21 Earth Pressure Balance TBM (www.tunnelseis.com)



Τα **Μηχανήματα ολομέτωπης κοπής με εφαρμογή πίεσης στο μέτωπο μέσω μίγματος μπετονίτη – εδάφους**, μοιάζουν σχεδιαστικά με τα EPBs, με κύρια διαφοροποίηση τη χρήση πολφού μπετονίτη – εδάφους για τον έλεγχο της ευστάθειας του μετώπου της σήραγγας και της καθίζησης της επιφανείας. Μηχανήματα αυτού του τύπου εφαρμόζονται αν το έδαφος που περιβάλλει την εκσκαφή και το μέτωπο πρέπει να υποστηρίζεται ή αν σε ένα πολύ υδατοπερατό έδαφος πρέπει να αποφευχθεί η εισροή ύδατος στην εκσκαφή.

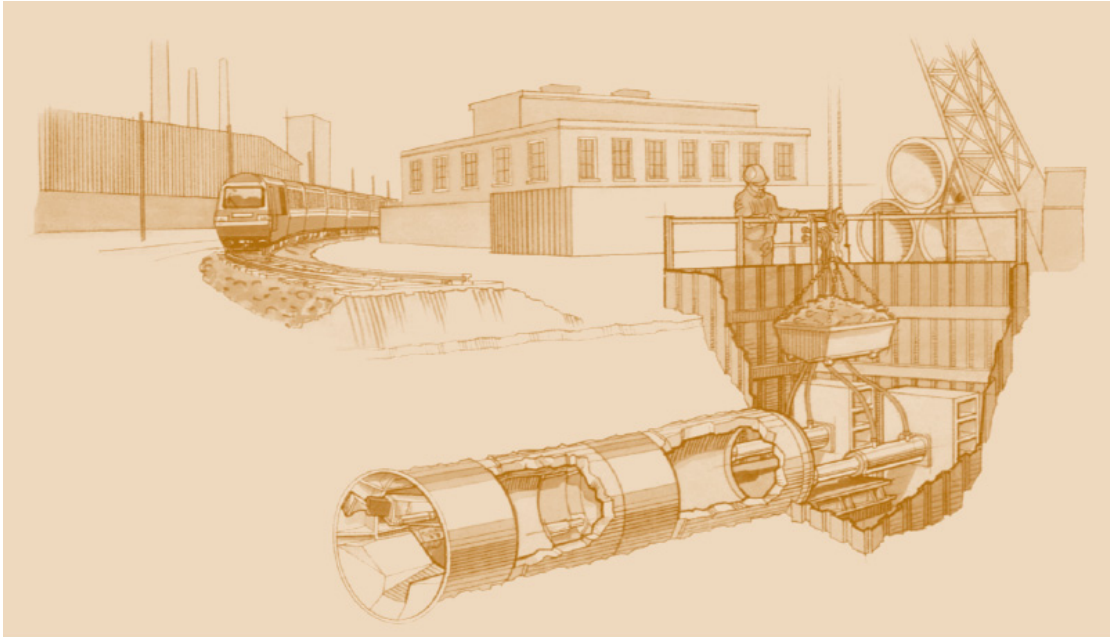
Ο θάλαμος εκσκαφής, που ονομάζεται επίσης και θάλαμος πίεσης, βρίσκεται πίσω από την κοπτική κεφαλή και σφραγίζεται από τη σήραγγα με ένα τοίχο πίεσης. Η πίεση υποστήριξης πρέπει να εξισορροπεί τουλάχιστον την πίεση του εδάφους και την πίεση του ύδατος. Ο πολφός μπετονίτη που έχει αναμιχθεί με έδαφος μεταφέρεται σε διαχωριστή εκτός της σήραγγας, όπου και διαχωρίζεται πριν εισέλθει και πάλι ως πολφός μπετονίτη (Εξαδάκτυλος και Σταυροπούλου, 2006).

Το κύριο πρόσθετο των SPBs είναι ο πολφός μπετονίτη, ωστόσο μπορεί να προστεθούν επιπλέον πολυμερή ή άλλα υλικά για να υποβοηθήσουν στο διαχωρισμό λεπτόκοκκων εδαφών, όπως η άργιλος από τον πολφό του μπετονίτη (Παπαντώνη, 2007 από Lovat, 2007).

### 2.5.6 Ολομέτωπη Κοπή Pipe Jacking

Η διάνοιξη μικροσηράγγων με ταυτόχρονη υδραυλική προώθηση σωλήνων (Pipe Jacking) (Σχήμα 2.22), είναι μια μέθοδος εγκατάστασης, επιδιόρθωσης ή αντικατάστασης υπόγειων αγωγών, οχετών κλπ. Ισχυροί υδραυλικοί προωθητές χρησιμοποιούνται για να ωθήσουν τις ειδικά κατασκευασμένες σωλήνες μέσα στο έδαφος πίσω από τον εκσκαφέα παράλληλα με την εκσκαφή. Με τη μέθοδο αυτή δημιουργείται ένας ευέλικτος, συμπαγής, υδατοστεγής και ολοκληρωμένος αγωγός καθώς αυτός διανοίγεται. Δεν υπάρχει κανένα όριο για το μήκος του αγωγού που θα κατασκευαστεί. Ακόμα πολλά συστήματα διάνοιξης είναι διαθέσιμα για τη μέθοδο αυτή. Αυτά είναι χειροκίνητα, μηχανοκίνητα και μέσω τηλεχειρισμού με τα τελευταία να είναι τα πιο δημοφιλή.

Οι μέθοδοι εκσκαφής είναι πανομοιότυποι με αυτές άλλων τρόπων διάνοιξης. Προκειμένου να εγκατασταθεί ένας αγωγός με αυτή τη μέθοδο απαιτούνται ένα φρέαρ προώθησης και ένα φρέαρ υποδοχής στο τέλος που θα ανασυρθεί ο εκσκαφέας.



**Σχήμα 2.22** Pipe jacking ([www.pipejacking.org](http://www.pipejacking.org))

Η μηχανοποιημένη εκσκαφή μπορεί να απαιτεί μεγαλύτερα φρεάτια προώθησης από ότι η χειροκίνητη εκσκαφή, ενώ το φρέαρ υποδοχής έχει σαφώς μικρότερες διαστάσεις προκειμένου να αντιμετωπιστούν πιθανές δυσκολίες τοποθέτησής του. Ένας τοίχος ώσης κατασκευάζεται ώστε μέσω της αντίδρασης που προκαλείται από τη δράση των εμβόλων, να προωθείται ο αγωγός (Εξαδάκτυλος και Σταυροπούλου, 2006).

Δύο είδη τεχνικών μικροσηράγγων χρησιμοποιούνται ευρέως. Το πρώτο είναι τα κοχλιωτά συστήματα διάτρησης (auger based systems), τα οποία χρησιμοποιούν μια κοπτική κεφαλή που τροφοδοτεί έναν κοχλιομεταφορέα με το προς απομάκρυνση υλικό, ενώ το δεύτερο είναι τα συστήματα πολφού (slurry systems), τα οποία χρησιμοποιούν μια κοπτική κεφαλή που εμποδίζει κάθε διείσδυση μέσω υγρών ή στερεών και απομακρύνουν το υλικό εκσκαφής από την κεφαλή με συστήματα άντλησης του πολφού (Παπαντώνη, 2007).

### **2.5.7 Νέα Αυστριακή Μέθοδος**

Η Νέα Αυστριακή Μέθοδος (New Austrian Tunneling Method – NATM) δεν αποτελεί μια μέθοδο αλλά περιλαμβάνει ένα σύνολο τεχνικών διάνοιξης και υποστήριξης σηράγγων.

Η συνήθης εφαρμογή της Νέας Αυστριακής Μεθόδου (New Austrian Tunneling Method – NATM) είναι η διάνοιξη της διατομής της σήραγγας σε μια ή περισσότερες φάσεις και η άμεση υποστήριξη του τοιχώματος με εκτοξευόμενο σκυρόδεμα και

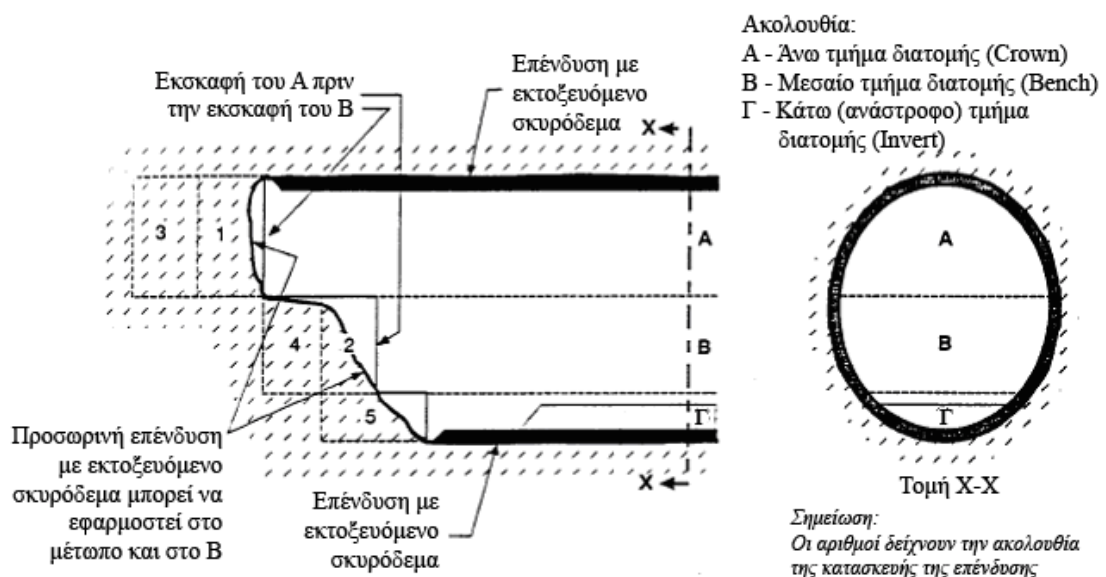
αγκύρια (παθητικά ή προεντεταμένα). Η υποστήριξη του τοιχώματος της σήραγγας μόνο με αγκύρια χωρίς εκτοξευόμενο σκυρόδεμα υπάγεται επίσης στην κατηγορία της μεθόδου NATM. Ακόμα, κατά τη μέθοδο NATM η άμεση υποστήριξη συνήθως ακολουθείται σε μεταγενέστερο χρόνο από την κατασκευή της τελικής επένδυσης της σήραγγας. Σε ορισμένες περιπτώσεις δεν κατασκευάζεται τελική επένδυση αλλά η άμεση υποστήριξη σχεδιάζεται ώστε να αναλάβει το σύνολο των φορτίων της περιβάλλουσας βραχώμαζας.

Η βασική αρχή της μεθόδου NATM είναι η ενεργοποίηση και διατήρηση της εγγενούς μηχανικής αντοχής της περιβάλλουσας βραχώμαζας, ώστε να αξιοποιηθεί κατά το μέγιστο δυνατό το δυναμικό αυτοστηρίξεώς της.

Η εκσκαφή σηράγγων με τη μέθοδο NATM συνήθως γίνεται σε περισσότερες της μιας φάσεις. Τα κυριότερα συστήματα εκσκαφής είναι τα εξής (Καββαδάς, 2005):

- Εκσκαφή μετώπου-βαθμίδας (top heading and bench):

Η εκσκαφή της σήραγγας γίνεται από πάνω προς τα κάτω. Η πρώτη φάση εκσκαφής (top heading) μπορεί να εκσκαφεί και σε περισσότερες υποφάσεις κατά το πλάτος της σήραγγας. Στην περίπτωση αυτή η πρώτη φάση ουσιαστικά αποτελεί σήραγγα – πλώτο που χρησιμεύει και για τη διερεύνηση των συνθηκών που αναμένεται να συναντηθούν κατά τη διάνοιξη της σήραγγας. Παραλλαγή της μεθόδου με τρεις φάσεις περιγράφεται στο Σχήμα 2.23.



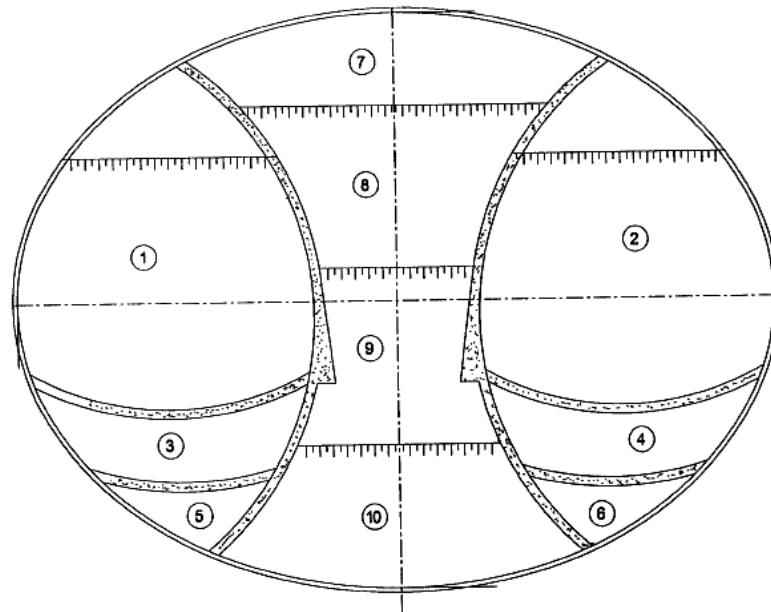
Σχήμα 2.23 Διάνοιξη σήραγγας σε τρεις φάσεις καθ' ύψος (top heading-bench-invert) (Καββαδάς, 2005)

- Εκσκαφή με πλευρικές στοές (side-wall drifts):

Η μέθοδος εφαρμόζεται σε σήραγγες μεγάλου εύρους σε βραχώμαζες με σχετικώς πτωχά χαρακτηριστικά ή στις περιπτώσεις όπου είναι κρίσιμος ο περιορισμός της σύγκλισης του τοιχώματος (π.χ. σε αστικές περιοχές). Περιλαμβάνει την υποδιαίρεση της διατομής κατά το πλάτος και διάνοιξη πρώτα της μιας πλευράς και στη συνέχεια της άλλης πλευράς. Σε ιδιαίτερες δύσκολες συνθήκες η μέθοδος μπορεί να περιλάβει δυο πλευρικές στοές και ενδιάμεσο πυλώνα (twin side-wall drifts with central pillar). Στην περίπτωση αυτή πρώτα διανοίγονται οι πλευρικές στοές και στο τέλος διανοίγεται ο κεντρικός πυλώνας (Σχήμα 2.24).

- Άλλες μέθοδοι:

Ανάλογα με το σχήμα της διατομής, τις ιδιότητες της βραχώμαζας και τα μέτρα υποστήριξης, προσαρμόζονται ο αριθμός και οι διαστάσεις των φάσεων εκσκαφής.



**Σχήμα 2.24** Διάνοιξη σήραγγας με δύο πλευρικές στοές και κεντρικό πυλώνα (Καββαδάς, 2005)

## 2.6 Υποστήριξη Σηράγγων

Ο κύριος σκοπός που εξυπηρετεί η αρχική υποστήριξη στις σήραγγες, είναι η σταθεροποίηση και η διατήρηση της σήραγγας μετά την εκσκαφή της και η συμβολή της στην ασφάλεια των εργαζόμενων και του εξοπλισμού.

Κατά την όρυξη μιας σήραγγας, η αρχική υποστήριξη, συνήθως τοποθετείται ταυτόχρονα με την εκσκαφή. Στις εκσκαφές που πραγματοποιούνται με τη μέθοδο της διάτρησης και ανατίναξης, η αρχική ενίσχυση, συνήθως εγκαθίσταται αφού ανατιναχθεί και απομακρυνθεί το προηγούμενο τμήμα του πετρώματος και πριν διατρηθεί, γομωθεί και ανατιναχθεί το επόμενο τμήμα του πετρώματος. Στις σήραγγες που εξορύσσονται με τη μέθοδο της ολομέτωπου κοπής, όπου η εκσκαφή είναι συνεχής, η υποστήριξη εγκαθίσταται καθώς το μηχάνημα ολομέτωπου κοπής προχωράει. Λόγω της κοντινής σχέσης μεταξύ των διεργασιών εκσκαφής και αρχικής υποστήριξης, θα πρέπει να υπάρχει εναρμονισμός μεταξύ τους και σωστός σχεδιασμός έτσι ώστε οι διεργασίες αυτές να είναι επαναλαμβανόμενες (να υπάρχει δηλαδή ένας συνεχής κύκλος εργασιών εκσκαφής και υποστήριξης) (Βιόπουλος, 2006 από USACE, 1997).

Η αρχική υποστήριξη στις σήραγγες, συνίσταται από *μεθόδους ενίσχυσης της βραχώμαζας* (rock reinforcement) όπως η κοχλίωση, η τοποθέτηση μεταλλικών πλαισίων και ατσάλινων πλεγμάτων, η τοποθέτηση μικροπασσάλων, από *μεθόδους βελτίωσης της βραχώμαζας* (rock improvement) όπως η ενεμάτωση υψηλής πίεσης, η ενεμάτωση χαμηλής πίεσης, η ψύξη εδάφους, η αποστράγγιση εδάφους και από *μεθόδους προσωρινής υποστήριξης σηράγγων* (pre-support) όπως η προπασσάλωση οροφής, η χρήση εκτοξευόμενου σκυροδέματος, η εγκατάσταση μεταλλικών πλαισίων, η περιφερειακή πρότμηση και η μέθοδος pretunnel.

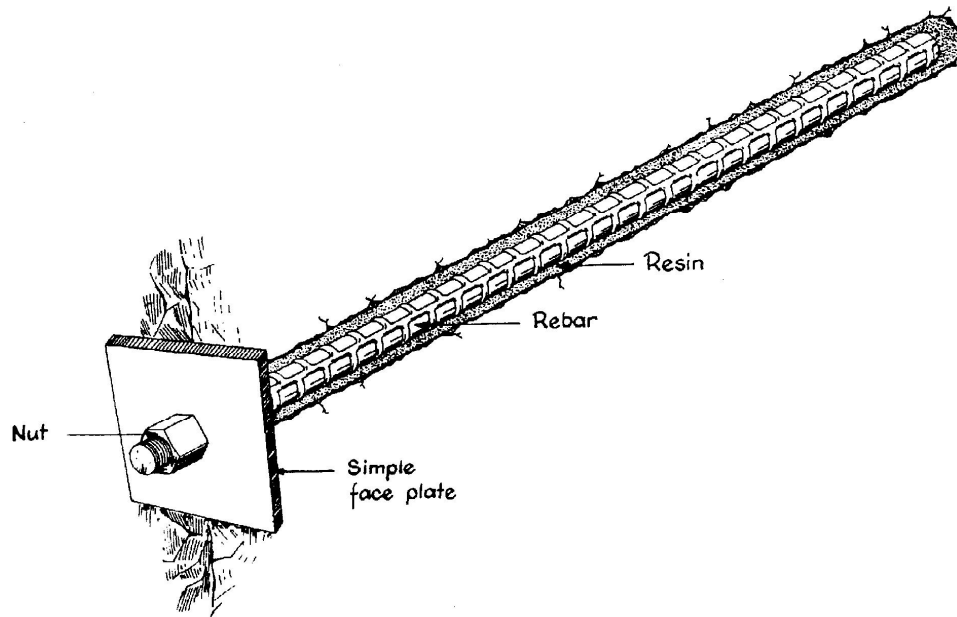
Όσο αυξάνεται η ποιότητα του πετρώματος, κατά την εκσκαφή, μειώνεται και η ανάγκη για αρχική υποστήριξη. Μετά την εγκατάσταση της αρχικής υποστήριξης, μπορεί να μην χρειαστεί επιπλέον υποστήριξη. Τότε η αρχική υποστήριξη λαμβάνει το ρόλο της τελικής υποστήριξης. Σε άλλες περιπτώσεις όμως, χρειάζεται επιπλέον υποστήριξη, όπως η τελική επένδυση από σκυρόδεμα (Βιόπουλος, 2006).

### 2.6.1 Μέθοδοι Ενίσχυσης Βραχώμαζας

Ο όρος ενίσχυση της βραχώμαζας (rock reinforcement), καλείται έτσι εξαιτίας της λειτουργίας της να “βοηθάει” τη βραχώμαζα να αυτοϋποστηρίζεται. Οι μέθοδοι ενίσχυσης της βραχώμαζας, ενεργοποιούν τη φυσική αντοχή του πετρώματος εν

αντιθέσει με τις μεθόδους προσωρινής υποστήριξης, στις οποίες η υποστήριξη που εφαρμόζεται αντιστοιχεί στο πλήρες φορτίο του πετρώματος. Οι βασικές μέθοδοι ενίσχυσης της βραχώμαζας είναι η κοχλίωση (bolting) και οι μικροπάσσαλοι (micropiles). Τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται για την ενίσχυση, τοποθετούνται μέσα στη μάζα του πετρώματος και γίνονται μέρος του εν αντιθέσει με τις μεθόδους προσωρινής υποστήριξης (όπως είναι για παράδειγμα η σκυροδέτηση με οπλισμένο σκυρόδεμα) όπου περιορίζονται οι μετακινήσεις του πετρώματος και προσφέρεται εξωτερική υποστήριξη στη βραχώμαζα (Βιόπουλος, 2006 από USACE, 1997).

Η **κοχλίωση** των πετρωμάτων (bolting) εφαρμόζεται για την παρεμπόδιση της αύξησης του βέλους κάμψης των υπερκείμενων του ανοίγματος πετρωμάτων και συνεπώς στην αποφυγή της αστοχίας τους. Ο μηχανισμός της κοχλίωσης είναι παρόμοιος με αυτόν που λειτουργεί κατά τη υποστήριξη με πλαίσια ή άλλα συστήματα μεταφοράς φορτίων. Ένας κλασικός κοχλίας αποτελείται από μια μεταλλική ράβδο, η οποία στο ένα άκρο της έχει το σύστημα αγκύρωσης και στο άλλο άκρο είναι δυνατόν να τοποθετηθεί περικόχλιο (παξιμάδι), το οποίο αφού συσφιχθεί (τανυστεί) με ορισμένη ροπή, επιβάλλει μέσω μεταλλικής πλάκας αντίστοιχες τάσεις στο πέτρωμα. Στις σήραγγες, η τάνυση των κοχλίων γίνεται συνήθως αφού πρώτα προσαρμοστεί η βραχώμαζα στις αλλαγές των τάσεων που γίνονται εξαιτίας της διαδικασίας της εκσκαφής. Μέχρι να γίνει αυτό οι κοχλίες αφήνονται χωρίς την επιβολή τάνυσης. Οι κοχλίες μπορούν να διαχωριστούν ανάλογα με την προένταση της μεταλλικής ράβδου, στους προεντεταμένους και στους μη προεντεταμένους αλλά και ανάλογα με τον τύπο της αγκύρωσης σε κοχλίες σημειακής αγκύρωσης και σε κοχλίες κατανεμημένης αγκύρωσης. Κάποιοι τύποι κοχλίων είναι οι κοχλίες σημειακής αγκύρωσης με μεταλλική σφήνα, οι κοχλίες αναπτυσσόμενου κελύφους, οι προεντεταμένοι κοχλίες κατανεμημένης αγκύρωσης με ρητίνη (Σχήμα 2.25), οι προεντεταμένοι κοχλίες κατανεμημένης αγκύρωσης με τσιμέντο, οι μη προεντεταμένοι διαχωριζόμενοι κοχλίες σημειακής αγκύρωσης (split set) και οι μη προεντεταμένοι σωληνοειδείς κοχλίες σημειακής αγκύρωσης (swellex) (Βιόπουλος, 2006 από Αγιουτάντης, 2002).



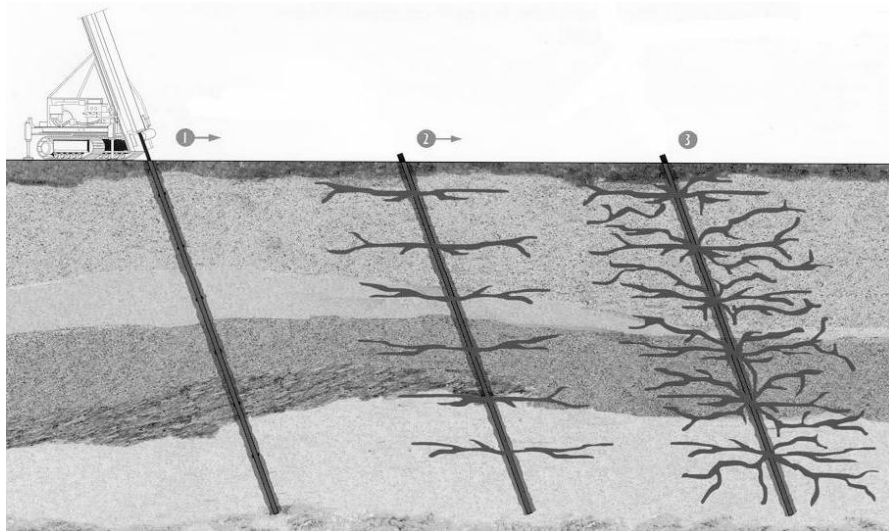
**Σχήμα 2.25** Προεντεταμένος κοχλίας κατανεμημένης αγκύρωσης με ρητίνη ( Βιόπουλος, 2006 από USACE, 1997)

Οι **μικροπάσσαλοι** (micropiles) είναι εύκαμπτα δομικά στοιχεία εντός του εδάφους που αποσκοπούν στην ανάληψη φορτίων. Οι πάσσαλοι αυτοί έχουν μικρή διάμετρο (έως 300 mm για κατασκευή με εκσκαφή και έως 150 mm για κατασκευή με έμπηξη). Οι μικροπάσσαλοι έχουν την ικανότητα να αναλαμβάνουν υψηλά φορτία. Ο διατρητικός εξοπλισμός και οι μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί, επιτρέπουν στους μικροπασσάλους να εγκαθίστανται σε οποιοσδήποτε εδαφικές συνθήκες, με ελάχιστες δονήσεις και σε οποιαδήποτε γωνία. Το φορτίο αναλαμβάνεται κυρίως από το χαλύβδινο μέρος και μεταφέρεται διαμέσω του τσιμεντενέματος στο περιβάλλον πέτρωμα όπως στις περιπτώσεις των αγκυρίων και των ηλώσεων (Βιόπουλος 2006, από Baker, 1996).

### 2.6.2 Μέθοδοι Βελτίωσης Βραχόμαζας

Σε εξαιρετικά δύσκολες συνθήκες κατασκευής σηράγγων, ενδείκνυται (ή ακόμα και απαιτείται σε ορισμένες περιπτώσεις) η χρησιμοποίηση μεθόδων βελτίωσης των μηχανικών χαρακτηριστικών των εδαφών (ground improvement). Γενικά υπάρχουν τέσσερις βασικές μέθοδοι βελτίωσης της βραχόμαζας. Αυτές είναι η ενεμάτωση με χαμηλή πίεση (grouting ή low pressure injection) η ενεμάτωση υψηλής πίεσης (jet-grouting), η ψύξη του εδάφους (freezing) και η αποστράγγιση (dewatering ή drainage) (Βιόπουλος, 2006 από Peila *et al*, 2006).

Η **ενεμάτωση με χαμηλή πίεση** (grouting ή low pressure injection) έχει σκοπό να σταθεροποιήσει, να βελτιώσει αλλά και να στεγανοποιήσει τα υπερκείμενα στρώματα. Αυτό επιτυγχάνεται με τη διάνοιξη διατρημάτων στο πέτρωμα και ενεμάτωσή τους με σκυρόδεμα. Όταν η ποιότητα του εδάφους είναι φτωχή, η διαδικασία της διάτρησης είναι δυσκολότερη ενώ η ανάγκη να διατρηθούν οριζόντια διατρήματα είναι πολύ μεγαλύτερη. Τα διατρήματα της ενεμάτωσης, πρέπει να γίνονται σε σωστές γωνίες σε σχέση με τις κύριες ρηγματώσεις, ούτως ώστε να επιτευχθεί όσο το δυνατόν καλύτερη πλήρωσή τους με σκυρόδεμα. Όταν είναι γνωστό ότι η σήραγγα θα διασχίσει αδύναμα εδάφη (όπως μη συνεκτικά εδάφη ή ζώνες με κατακεραματισμένα πετρώματα), με παρουσία νερού σε υψηλή πίεση, το έδαφος πρέπει να ενεματωθεί με χαμηλή πίεση έτσι ώστε να πληρωθούν τα κενά του χωρίς να αλλάξει σημαντικά η δομή του εδάφους ή ο όγκος του. Ο αρχικός σκοπός της ενεμάτωσης αυτής είναι η μείωση της διαπερατότητας του εδάφους. Η βελτίωση του εδάφους στην περίπτωση αυτή είναι συνήθως ένα παράπλευρο κέρδος. Είναι προτιμότερο η διαδικασία αυτή να γίνει (όπου αυτό βέβαια είναι δυνατόν) από την επιφάνεια του εδάφους (Σχήμα 2.26) για να αποφευχθούν χρονοβόρες διαδικασίες μέσα στη σήραγγα. Όταν η ενεμάτωση δεν μπορεί να γίνει από την επιφάνεια του εδάφους, γίνεται από το μέτωπο της σήραγγας.

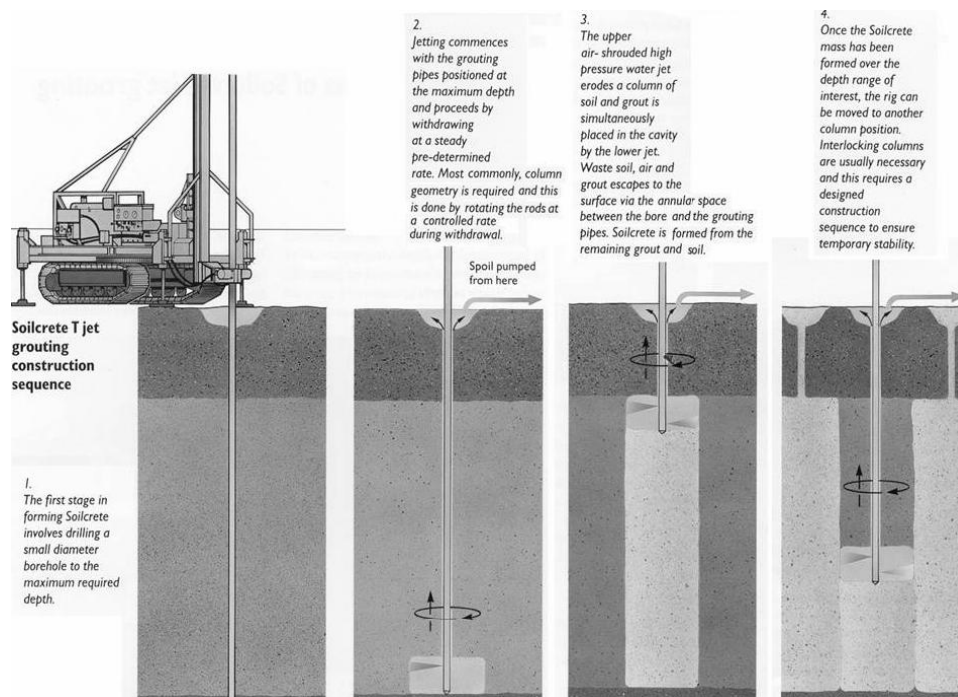


**Σχήμα 2.26** Ενεμάτωση από την επιφάνεια (Βιόπουλος, 2006 από Καββαδάς, 2000)

Η **ενεμάτωση με υψηλή πίεση** (jet grouting), διαφέρει σημαντικά από τις άλλες μεθόδους βελτίωσης εδαφών. Με τη μέθοδο αυτή, καταστρέφεται ολοκληρωτικά η δομή του εδάφους, το εδαφικό υλικό μεταφέρεται στην επιφάνεια με τη βοήθεια των



εισπιεζόμενων ρευστών και έπειτα διενεργείται ανάμιξη του εδαφικού υλικού με το τσιμέντο με αποτέλεσμα τη δημιουργία ομογενοποιημένου εδάφους που στο επόμενο στάδιο, στερεοποιείται. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται ανεξάρτητα από το είδος του εδάφους, την κοκκομετρία του ή την διαπερατότητά του. Θεωρητικά η τεχνική αυτή, μπορεί να βελτιώσει τα περισσότερα εδάφη από μαλακά αργιλώδη εδάφη ως αμμώδεις χάλικες. Η διαδικασία της βελτίωσης του εδάφους με τη μέθοδο της ενεμάτωσης με υψηλή πίεση (Σχήμα 2.27), έχει ως εξής: πρώτα γίνεται το διάτρημα μέχρι το επιθυμητό βάθος. Έπειτα με τη βοήθεια μιας ισχυρής αντλίας υψηλής πίεσης μέσω ενός ή περισσότερων ακροφυσίων τα οποία είναι τοποθετημένα στο άκρο της διατρητικής στήλης, γίνεται ο ψεκάσμος του μίγματος. Το μίγμα συνήθως αποτελείται από νερό και τσιμέντο ή σε άλλες περιπτώσεις από νερό, τσιμέντο και μπεντονίτη. Τέλος περιστρέφονται τα στελέχη και σταδιακά ανυψώνονται. Έτσι δημιουργείται μια στήλη μίγματος από εδαφικό υλικό και τσιμέντο. Η τεχνική αυτή ονομάζεται και τεχνική τσιμεντοεδαφοπασσάλων (Βιόπουλος, 2006 από Jet-grouting.com, 2005).



**Σχήμα 2.27** Τεχνική τσιμεντοεδαφοπασσάλων (Jet grouting) (Βιόπουλος, 2006 από Καββαδάς, 2000)

Η ψύξη εδαφών (ground freezing), είναι μια πιθανή εναλλακτική λύση από την ενεμάτωση με χαμηλή πίεση (grouting), όσον αφορά τον έλεγχο της εισροής υδάτων στη σήραγγα. Ειδικότερα, η ψύξη εδαφών είναι ιδιαίτερα δραστική εάν το έδαφος είναι φτωχής ποιότητας αλλά ανεπηρέαστο σε τσιμεντενέσεις. Η ιδέα της ψύξης εδαφών

στηρίζεται στο γεγονός ότι με τον τρόπο αυτό, το νερό αποκλείεται προσωρινά από την σήραγγα μέχρι να κατασκευαστεί η τελική επένδυση της σήραγγας η οποία και θα προσφέρει μια πλήρη υδατοστεγή προστασία. Η ψύξη των υδάτων γύρω από μια σήραγγα, μπορεί να οδηγήσει επίσης σε σταθεροποίηση του εδάφους ακόμη και σε υποστήριξη της κατασκευής εάν οι εδαφικές συνθήκες είναι οι κατάλληλες. Οι μόνιμοι περιορισμοί της μεθόδου είναι ότι η μάζα του πετρώματος πρέπει να έχει ένα ικανοποιητικό περιεχόμενο υγρασίας και ότι πρέπει να υπάρχει ελάχιστη ροή υδάτων διαμέσω ή γύρω από την παγωμένη ζώνη του πετρώματος. Κατά την ψύξη, η ζώνη ψύξης (frozen zone ή ice-wall), δημιουργείται γύρω από τους σωλήνες πάγου (freeze-tubes), η κατασκευή των οποίων, εξαρτάται από το μέγεθος της εκσκαφής (Βιόπουλος, 2006 από Harris, 1995).

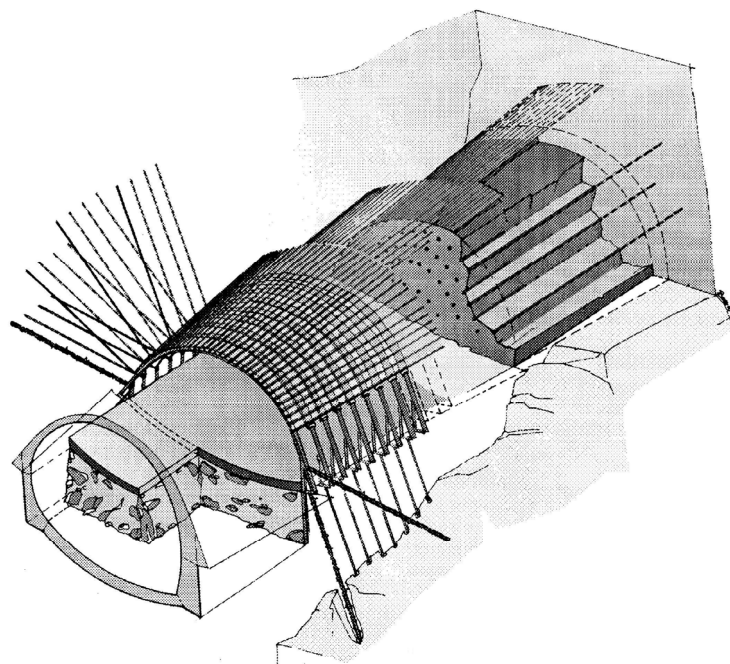
Η **αποστράγγιση** (dewatering) πρέπει να γίνεται έτσι ώστε τα ύδατα που βρίσκονται σε συγκεκριμένα σημεία που ορύσσεται η σήραγγα, να απομακρύνονται πριν η προχώρηση της εκσκαφής φτάσει στο σημεία αυτά. Το νερό που υπάρχει μέσα σε μια υπό κατασκευή σήραγγα, πρέπει να απομακρυνθεί γιατί κάνει τα πετρώματα πιο επιρρεπή σε καταστάσεις αποχωρισμού και πτώσης, μειώνοντας τη φυσική συνοχή τους. Αφαιρώντας το νερό, βελτιώνονται τα μηχανικά χαρακτηριστικά της βραχώμαζας, ενισχύεται η σταθερότητα της κατασκευής και βελτιώνονται οι συνθήκες εργασίας των εργαζόμενων. Το σύστημα αποστράγγισης που χρειάζεται μια σήραγγα, ποικίλλει καθώς εξαρτάται από τον τύπο της σήραγγας, το βάθος της και τις συνθήκες που επικρατούν στον υδροφόρο ορίζοντα. Σε μικρές και ρηχές εκσκαφές, η απορροή των υδάτων, μπορεί να γίνει μόνο με σωλήνες και χωρίς καθόλου έλεγχο των υδάτων. Σε μεγαλύτερες και βαθύτερες εκσκαφές όμως χρησιμοποιούνται μεγάλα συστήματα αποστράγγισης με πολλές μεθόδους ελέγχου των υδάτων αφού ο ρυθμός ροής των τελευταίων είναι υψηλότερος και τα φαινόμενα εισροής νερού είναι σοβαρότερα. Το σύστημα αποστράγγισης πρέπει να είναι συμβατό με τη μέθοδο εκσκαφής της σήραγγας καθώς και με τα μέτρα υποστήριξης που λαμβάνονται. Το σύστημα αποστράγγισης δεν θα πρέπει να εμποδίζει τον εξοπλισμό της εκσκαφής ούτε και την εγκατάσταση και λειτουργία του συστήματος υποστήριξης (Βιόπουλος, 2006 από USACE, 1997).

### 2.6.3 Μέθοδοι Προσωρινής Υποστήριξης Σηράγγων

Οι μέθοδοι προσωρινής υποστήριξης σηράγγων (pre-support), βασίζονται στην ιδέα της εξωτερικής υποστήριξης της βραχώμαζας και δρουν μέχρι την εγκατάσταση

της μόνιμης υποστήριξη που είναι η τελική επένδυση. Οι κυριότερες από αυτές είναι: η προπασσάλωση οροφής (forepoling), η χρήση εκτοξευόμενου σκυροδέματος (shotcrete), η εγκατάσταση χαλύβδινων πλαισίων (steel ribs, lattice girders), η περιφερειακή πρότμηση (mechanical precut) και η μέθοδος pretunnel (Βιόπουλος, 2006 από Peila *et al*, 2006).

Η **προπασσάλωση οροφής** (forepoling), έχει γίνει μια πολύ δημοφιλής μέθοδος προσωρινής υποστήριξης σηράγγων. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην τεχνική όπου η υποστήριξη τοποθετείται μπροστά από την εκσκαφή του μετώπου. Η υποστήριξη που παρέχεται από τη μέθοδο της προπασσάλωσης, αποτελείται από δοκούς που τοποθετούνται σαν ένα τόξο περιμετρικά μπροστά από το μέτωπο εκσκαφής και πριν από αυτή. Έτσι κατασκευάζεται μια ομπρέλα προστασίας πάνω από την εκσκαφή που το μήκος της αντιστοιχεί στο μήκος των δοκών προπορείας. Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζονται και οι επόμενες ομπρέλες. Αυτές, αλληλοεπικαλύπτονται σε μήκος που καθορίζεται από το σχεδιασμό του έργου. Έτσι σταθεροποιείται το μέτωπο της σήραγγας σε περιμετρικές και επιμήκεις κατευθύνσεις της σήραγγας. Το Σχήμα 2.28 δείχνει ένα χαρακτηριστικό σύστημα προπασσάλωσης οροφής.



**Σχήμα 2.28** Σύστημα forepoling (Peila *et al*, 2006)

Οι μέθοδοι προπασσάλωσης οροφής που μπορούν να αναφερθούν είναι η μέθοδος προπασσάλωσης με ενεμάτωση υψηλής πίεσης (jet grouting arch ή sub-horizontal jet

grouting), η μέθοδος προπασσάλωσης pipe roof και η μέθοδος προπασσάλωσης με χαλύβδινες δοκούς προπορείας (steel pipe umbrella) (Βιόπουλος, 2006).

**Εκτοξευόμενο σκυρόδεμα (shotcrete)**, ονομάζεται το σκυρόδεμα που συνίσταται από τσιμέντο, νερό και λεπτόκοκκα αδρανή (συνήθως έως 10 mm) καθώς και κάποιο επιταχυντή πήξεως, το οποίο εφαρμόζεται με εκτόξευση με τη βοήθεια πεπιεσμένου αέρα. Το εκτοξευόμενο σκυρόδεμα παρασκευάζεται είτε ως ξηρό μίγμα (dry mix) με προσθήκη νερού στο στόμιο εκτοξεύσεως είτε ως υγρό μίγμα (wet mix) όπου η ανάμιξη με νερό γίνεται στον αναδευτήρα κατά την παρασκευή του μίγματος. Το υγρό μίγμα χρησιμοποιείται συχνότερα στις περιπτώσεις κατανάλωσης εκτοξευόμενου σκυροδέματος σε μεγάλες ποσότητες (Καββαδάς, 2000). Με τη χρήση εκτοξευόμενου σκυροδέματος εξασφαλίζεται η παθητική αντίσταση έναντι της πλαστικοποίησης του περιβάλλοντος υλικού, κατασκευάζεται μια φέρουσα υποστήριξη κατά μήκος της σήραγγας και υπάρχει κατανομή των φορτίων. Η αντοχή και η πλαστικότητα του εκτοξευόμενου σκυροδέματος αυξάνονται με την προσθήκη μεταλλικών ινών (steel fibres) οι οποίες δρουν ως οπλισμός. Επίσης το ινοπλισμένο σκυρόδεμα δεν υπόκειται σε διάβρωση επειδή οι ίνες δεν είναι συνεχείς όπως το μεταλλικό πλέγμα. Επιπλέον η χρήση των ινών είναι ταχύτερη και κατασκευαστικά ευκολότερη απ' ό,τι η χρήση μεταλλικού πλέγματος ιδίως στην περίπτωση που η επιφάνεια της βραχώμαζας είναι αρκετά ανώμαλη (Βιόπουλος, 2006 από Καββαδάς, 2000).

Τα **χαλύβδινα πλαίσια (steel ribs)** αποτελούνται γενικά από στοιχεία που είναι σχετικά δύσκαμπτα για το μέγεθός τους, ενώ οι συνδέσεις μεταξύ των στοιχείων είναι άλλοτε λίγο και άλλοτε πολύ δύσκαμπτες σύμφωνα με το σκοπό και τη λειτουργία της υποστήριξης. Χρησιμοποιούμενα από μόνα τους, τα πλαίσια αποτελούν γενικά μια ασυνεχή υποστήριξη που αποτελείται από δακτυλίους οι οποίοι απέχουν μεταξύ τους ώστε να λειτουργούν ανεξάρτητα. Επίσης, σε σύγκριση με άλλα τέτοια συστήματα στήριξης, όπως οι ηλώσεις και η επένδυση από εκτοξευόμενο σκυρόδεμα, διακρίνονται από τη σχετική ανεξαρτησία τους από το περιβάλλον πέτρωμα που αντιστηρίζουν. Τα πλαίσια μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνα ή σε συνδυασμό με άλλα μέτρα. Μπορούν για παράδειγμα να λειτουργούν ως οπλισμός του εκτοξευόμενου σκυροδέματος και να εξασφαλίζεται έτσι η μακροχρόνια λειτουργία τους. Στις σήραγγες, τα χαλύβδινα πλαίσια τοποθετούνται στη διατομή της σήραγγας (ανά βήμα προχώρησης εκσκαφής). Μπορούν να διακριθούν δύο βασικές περιπτώσεις χρήσης χαλύβδινων πλαισίων. Η πρώτη είναι όταν μόνος σκοπός είναι η προστασία από καταπτώσεις μεμονωμένων τεμαχίων πετρώματος, χωρίς προσπάθεια αποτροπής της σύγκλισης της διατομής.

Αυτή η περίπτωση προκύπτει γενικά για βραχώμαζα που, ενώ θραύεται, οι γεωτεχνικές της ιδιότητες είναι επαρκείς για τη συγκράτηση των παραμορφώσεων σε μικρές τιμές. Τα πλαίσια στην περίπτωση αυτή "προστατεύουν". Αποσκοπούν στην προστασία των εργαζομένων κατά την κατασκευή του έργου, και διαδραματίζουν ένα δευτερεύοντα ρόλο στην υποστήριξη της περιβάλλουσας βραχώμαζας. Σε αυτήν την περίπτωση, χρησιμοποιούνται μόνα τους ή τοπικά σε συνδυασμό με φύλλα. Η δεύτερη είναι όταν σκοπός είναι και η καθυστέρηση της παραμόρφωσης και της σύγκλισης των τοιχωμάτων πριν από την τοποθέτηση της οριστικής επένδυσης. Τα πλαίσια τότε "υποστηρίζουν" επειδή, στην πραγματικότητα, αναλαμβάνουν έναν μέρος της πίεσης σταθεροποίησης. Σε αυτή την περίπτωση τα τόξα διακρίνονται σε βαριά, με δύσκαμπτες συνδέσεις που αντέχουν ένα μεγάλο φορτίο και περιορίζουν τις παραμορφώσεις της διατομής, και σε ελαφρά που επιτρέπουν μεγαλύτερες παραμορφώσεις αλλά αναλαμβάνουν μικρά φορτία (Βιόπουλος, 2006 από Σοφιανός, 2000).

Η **περιφερειακή πρότμηση** (mechanical precut) είναι μια μέθοδος υποστήριξης στην οποία, τέμνεται περιφερειακά ο θόλος της σήραγγας μπροστά από το μέτωπο και εισπιέζεται ένεμα από ινοπλισμένο (με χαλύβδινες ίνες) σκυρόδεμα στο κενό. Έτσι δημιουργείται κατά μήκος του τόξου της σήραγγας ένα συνεχές και λεπτό στρώμα σκυροδέματος. Η μέθοδος αυτή, συνήθως βρίσκει εφαρμογή σε μαλακά πετρώματα καθώς και σε μαλακές έως μέτρια σκληρές αργίλους. Ο εξοπλισμός που χρησιμοποιείται για τη μέθοδο της περιφερειακής πρότμησης φαίνεται στο Σχήμα 2.29. Σε μια αλυσίδα κοπής, εφαρμόζεται μια λεπίδα η οποία εισέρχεται μέσα στο έδαφος περιφερειακά της σήραγγας και τέμνει ένα στρώμα από το έδαφος όσο και το πλάτος της λεπίδας. Κατόπιν το κενό που αφήνει η λεπίδα καθώς κινείται στην περίμετρο της σήραγγας, καλύπτεται με ινοπλισμένο εκτοξευόμενο σκυρόδεμα. Απόρροια όλων των παραπάνω είναι να δημιουργείται διαρκώς ένα συνεχές περίβλημα από εκτοξευόμενο σκυρόδεμα το οποίο καλύπτει το θόλο και τις παρειές της σήραγγας σταθεροποιώντας τα. (Βιόπουλος 2006, από Δουβής, 2002)



Σχήμα 2.29 Μηχάνημα περιφερειακής πρότμησης (Βιόπουλος, 2006 από Peila *et al*, 2006)

Η μέθοδος **pretunnel**, αναπτύχθηκε για την κατασκευή μεγάλης διατομής σηράγγων σε δύσκολες εδαφικές συνθήκες. Ιστορικά μπορεί να θεωρηθεί σαν την εξέλιξη της περιφερειακής πρότμησης (mechanical precut). Ο εξοπλισμός που χρησιμοποιείται είναι παρόμοιος με της μεθόδου περιφερειακής πρότμησης σε μεγαλύτερη διάσταση. Η σημαντική καινοτομία της μεθόδου αυτής βρίσκεται στο γεγονός ότι κατασκευάζεται η τελική επένδυση μπροστά από το μέτωπο πριν από την εκσκαφή. Αυτό εξαφανίζει την ανάγκη για προσωρινή υποστήριξη και δημιουργεί ασφαλείς εργασιακές συνθήκες κατά την κατασκευή της σήραγγας. Η κατασκευή της τελικής επένδυσης σε μια φάση και μπροστά από το μέτωπο της εκσκαφής, έχει επίσης ως αποτέλεσμα την ελαχιστοποίηση των καθιζήσεων στην επιφάνεια (Βιόπουλος, 2006 από Tonon *et al*, 2005).

## Κεφάλαιο 3

### Κριτήρια Αστοχίας

Η εντατική κατάσταση ενός υλικού είναι δυνατόν να αναχθεί σε μια μορφή τέτοια, ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση με τα αντίστοιχα μεγέθη της αντοχής του υλικού. Στα πετρώματα, τα κριτήρια αστοχίας εκφράζονται συνήθως σαν συνάρτηση των αντοχών ενός υλικού σε θλίψη, εφελκυσμό ή διάτμηση. Η αστοχία του υλικού θεωρείται ότι επέρχεται όταν η τάση καταπόνησης του είναι μεγαλύτερη από οποιαδήποτε παράμετρο της αντοχής του (Αγιουτάντης, 2002).

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η τάση (που είναι το κύριο μέγεθος για την ανάλυση της εντατικής κατάστασης ενός σώματος) καθώς και τα βασικά κριτήρια αστοχίας που έχουν αναπτυχθεί για την μαθηματική περιγραφή της αστοχίας των πετρωμάτων (αλλά και γενικότερα ψαθυρών και όλκιμων υλικών) κάτω από δεδομένη εντατική κατάσταση.

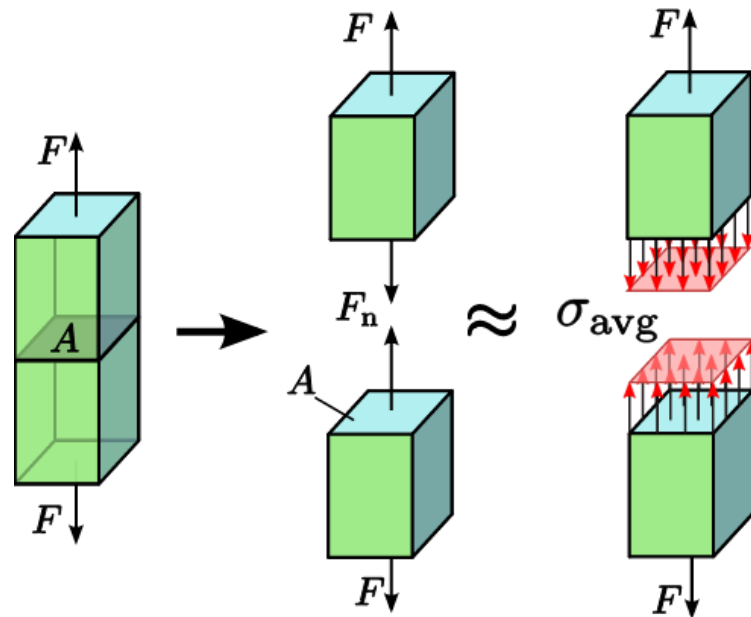
#### 3.1 Τάση

Ένα υλικό σώμα μπορεί να δέχεται δυο ειδών δυνάμεις. Τις δυνάμεις επιφάνειας (surface forces ή contact forces) και τις δυνάμεις πεδίου (body forces). Οι δυνάμεις επιφάνειας είναι αυτές που δρουν διαμέσου μιας εσωτερικής ή εξωτερικής επιφάνειας λόγω επαφής με άλλο σώμα ενώ οι δυνάμεις πεδίου είναι αυτές που δρουν από κάποια απόσταση (π.χ. δυνάμεις λόγω του πεδίου της βαρύτητας) (Αγιουτάντης, 2002).

Η τάση ορίζεται γενικά ως η ένταση των εσωτερικών δυνάμεων οι οποίες δρουν μεταξύ των σωματιδίων ενός σώματος δια μέσου φανταστικών εσωτερικών επιφανειών (τομών) (Chen and Han, 1988). Η μονάδα της τάσης (που ουσιαστικά είναι μονάδα πίεσης) στο SI είναι το pascal (το οποίο συμβολίζεται Pa) και ισοδυναμεί με δύναμη ενός newton (N) ανά μονάδα επιφάνειας ενός τετραγωνικού μέτρου ( $m^2$ ). Συνήθως στην Μηχανική η τάση μετριέται σε kilopascals (kPa), megapascals (MPa) ή gigapascals (GPa). Στο αγγλικό σύστημα η τάση εκφράζεται σε μονάδες psi ( $lbf/in^2$ ) και συνδέονται με τις μονάδες της τάσης στο SI με τη σχέση  $1 \text{ MPa} = 145.04 \text{ psi}$  (Αγιουτάντης, 2002).

Ωστόσο, επειδή γενικά η τάση δεν είναι ομοιόμορφα κατανομημένη σε μια τομή ενός συνεχούς σώματος, αυτό έχει ως αποτέλεσμα η τάση σε ένα σημείο μιας συγκεκριμένης επιφάνειας να είναι διαφορετική από τη μέση τάση  $\sigma_{avg}$  της επιφάνειας

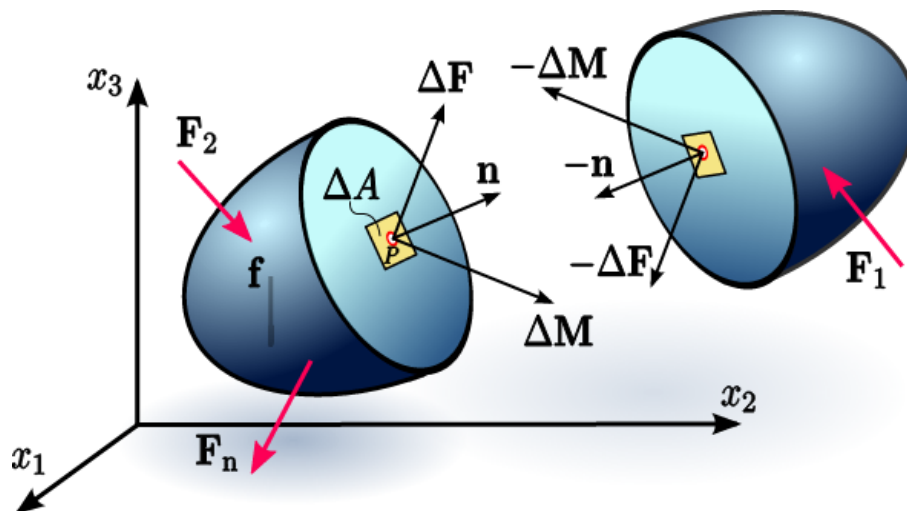
αυτής ( $\sigma_{avg} = \frac{F}{A}$ , όπου  $F$  η συνολική θλιπτική ή εφελκυστική δύναμη που ασκείται σε μια μονοαξονική δοκιμή (Σχήμα 3.1) και  $A$  το εμβαδόν της επιφάνειας του δοκιμίου).



**Σχήμα 3.1** Μέση τάση επιφάνειας σε μονοαξονική φόρτιση ([http://en.wikipedia.org/wiki/Stress\\_\(mechanics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics)))

### 3.1.1 Τάση σε Ένα Σημείο

Από τα παραπάνω, προκύπτει η ανάγκη να οριστεί η τάση σε ένα σημείο. Για το λόγο αυτό, θεωρείται ένα συνεχές στερεό σώμα το οποίο βρίσκεται σε ισορροπία κάτω από την επίδραση ορισμένων εξωτερικών δυνάμεων  $F$ , ένα τυχαίο επίπεδο το οποίο τέμνει το σώμα και διέρχεται από ένα εσωτερικό του σημείο  $P$  και μια στοιχειώδης επιφάνεια εμβαδού  $\Delta A$  στο σημείο  $P$  του σώματος πάνω στο τυχαίο επίπεδο (Σχήμα 3.2).



**Σχήμα 3.2** Τάση σε ένα σημείο ([http://en.wikipedia.org/wiki/Stress\\_\(mechanics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics)))



Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα (όπου το σώμα έχει διαιρεθεί σε δυο μέρη), ο προσανατολισμός της επιφάνειας  $\Delta A$  (αλλά και του τυχαίου επιπέδου), παριστάνεται με ένα μοναδιαίο διάνυσμα  $n_i$  κάθετο σε αυτή. Επειδή το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία, η συνολική δύναμη  $\Delta F_i$  που ασκείται στη θετική πλευρά της επιφάνειας ( $+n_i$ ) ισούται με τη δύναμη που ασκείται στην αρνητική πλευρά της επιφάνειας ( $-n_i$ ) (Αγιουτάντης, 2002).

Το διάνυσμα τάσης  $T_i^{(n)}$  (traction vector ή stress vector) στο σημείο P που αντιστοιχεί στην επιφάνεια  $\Delta A$  (στο επίπεδο του  $n_i$ ), έχει τη διεύθυνση της δύναμης  $\Delta F_i$  και ορίζεται από τη σχέση  $T_i^{(n)} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A} = \frac{dF_i}{dA} = \sigma_i$ . Η εντατική κατάσταση σε ένα σημείο λοιπόν, ορίζεται ως το σύνολο όλων των διανυσμάτων τάσης  $T_i^{(n)}$  στο σημείο αυτό (Chen and Han, 1988). Επειδή η κατανομή της δύναμης στην επιφάνεια  $\Delta A$  δεν είναι πάντα ομοιόμορφη, μπορεί να υπάρχει ροπή  $\Delta M$  στο σημείο P εξαιτίας της δύναμης  $\Delta F$ . Η ροπή αυτή, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του Cauchy, εξαφανίζεται όταν το  $\Delta A$  γίνεται πολύ μικρό και τείνει στο μηδέν και ο λόγος  $\Delta F/\Delta A$  γίνεται  $df/dA$ .

Η συνιστώσα του διανύσματος τάσης  $T_i^{(n)}$  κατά τη διεύθυνση  $n_i$  ονομάζεται ορθή ή κάθετη τάση (normal stress, direct stress), ενώ συνιστώσα του που ανήκει στο επίπεδο της επιφάνειας  $\Delta A$  ονομάζεται διατμητική τάση (shear stress). Η ορθή τάση μπορεί να είναι θλιπτική ή εφελκυστική, ενώ δεν υπάρχει αντίστοιχη διάκριση για τις διατμητικές τάσεις (Αγιουτάντης, 2002).

Αφού μπορούν να οριστούν άπειρα επίπεδα που περνούν από ένα σημείο, αντίστοιχα ορίζονται άπειρες τιμές του  $T_i^{(n)}$  που γενικά διαφέρουν η μια από την άλλη. Αυτός ο άπειρος αριθμός τιμών του  $T_i^{(n)}$ , χαρακτηρίζει την εντατική κατάσταση στο σημείο αυτό. Ωστόσο σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του Cauchy, δεν είναι ανάγκη να είναι γνωστές όλες οι τιμές των διανυσμάτων τάσης στα άπειρα αυτά επίπεδα αφού εάν είναι γνωστά τα διανύσματα τάσης  $T_i^{(1)}$ ,  $T_i^{(2)}$  και  $T_i^{(3)}$  σε τρία κάθετα μεταξύ τους επίπεδα, το διάνυσμα τάσης σε κάθε επίπεδο που περιλαμβάνει το σημείο αυτό μπορεί να βρεθεί από τις συνθήκες ισορροπίας στο σημείο αυτό (Chen and Han, 1988).

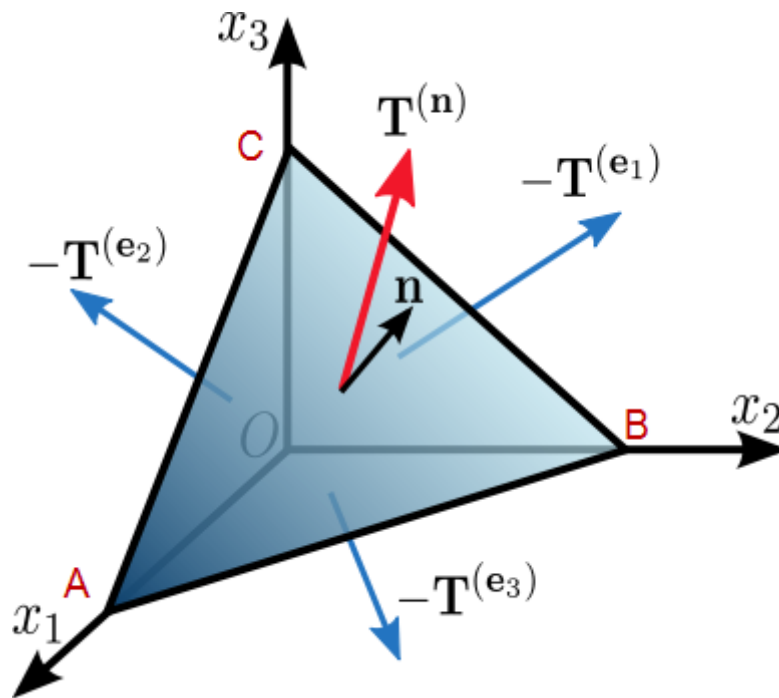
Το Σχήμα 3.3 απεικονίζει ένα τετραεδρικό στοιχείο OABC με διανύσματα τάσης  $T^{(-e_1)}$ ,  $T^{(-e_2)}$ ,  $T^{(-e_3)}$  και  $T^{(n)}$  τα οποία δρουν στις έδρες OBC, OAC, OAB και ABC αντίστοιχα. Το διάνυσμα τάσης  $T^{(-e_1)}(T^{(-e_2)}, T^{(-e_3)})$ , αντιπροσωπεύει την τάση που

υφίσταται δια μέσου του επιπέδου που είναι κάθετο στο μοναδιαίο διάνυσμα  $e_1(e_2, e_3)$  από την αρνητική στη θετική πλευρά. Το μοναδιαίο διάνυσμα  $n$  μπορεί να γραφεί και με την ακόλουθη μορφή:

$$n = (n_1, n_2, n_3) \quad [3.1]$$

όπου τα συνημίτονα κατεύθυνσης δίνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos(e_1, n) \\ n_2 &= \cos(e_2, n) \\ n_3 &= \cos(e_3, n) \end{aligned} \quad [3.2]$$



Σχήμα 3.3 Διανύσματα τάσης που δρουν σε τυχαίο επίπεδο  $n$   
([http://en.wikipedia.org/wiki/Stress\\_\(mechanics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics)))

Έστω ότι  $A$  είναι το εμβαδό της έδρας  $ABC$ . Τότε το εμβαδό της έδρας που είναι κάθετη στον  $x_i$  άξονα και που ορίζεται ως  $A_i$  θα είναι:

$$A_i = A \cos(e_i, n) = A n_i.$$

Από την συνθήκη ισορροπίας του σώματος  $OABC$  όμως, ισχύει:

$$\begin{aligned} T^{(n)}(A) + T^{(-e_1)}(A n_1) + T^{(-e_2)}(A n_2) + T^{(-e_3)}(A n_3) &= 0 \quad \eta \\ T^{(n)} &= -T^{(-e_1)} n_1 - T^{(-e_2)} n_2 - T^{(-e_3)} n_3 \end{aligned}$$

όμως επειδή ισχύει  $T^{(-i)} = -T^{(i)}$ , όπου  $i = 1, 2, 3$ , τότε συνεπάγεται:

$$T^{(n)} = T^{(e_1)} n_1 + T^{(e_2)} n_2 + T^{(e_3)} n_3 \quad [3.3]$$

ή σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:

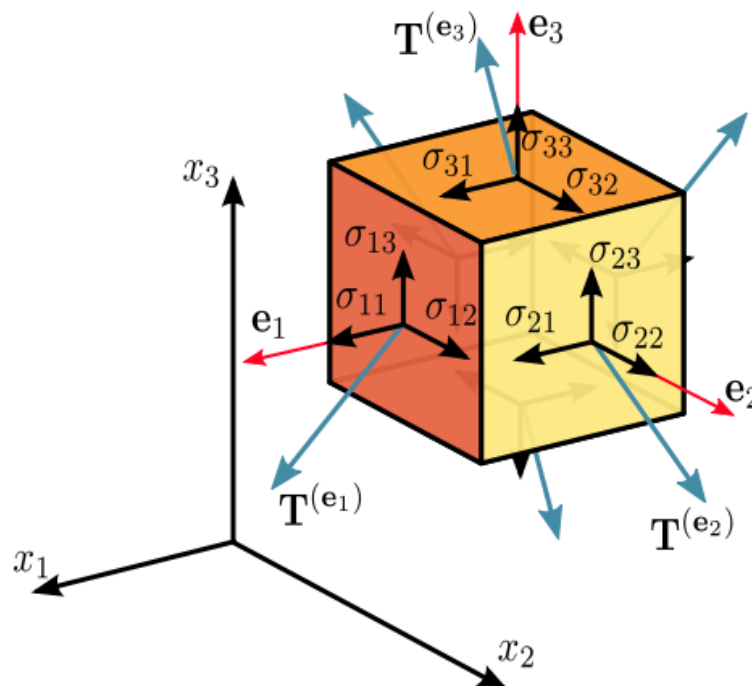
$$\mathbf{T}^{(n)} = T^{(x)}\mathbf{n}_x + T^{(y)}\mathbf{n}_y + T^{(z)}\mathbf{n}_z \quad [3.4]$$

Οι εξισώσεις [3.3] και [3.4], εκφράζουν το διάνυσμα τάσης  $\mathbf{T}^{(n)}$  σε οποιοδήποτε σημείο που σχετίζεται με το επίπεδο που ορίζει το  $n$  σε σχέση με τα διανύσματα τάσης στα επίπεδα που είναι κάθετα στους άξονες  $x_1$ ,  $x_2$  και  $x_3$  για το ίδιο σημείο. Είναι ξεκάθαρο ότι τα τρία διανύσματα  $\mathbf{T}^{(-e_1)}$ ,  $\mathbf{T}^{(-e_2)}$  και  $\mathbf{T}^{(-e_3)}$ , ορίζουν απόλυτα την εντατική κατάσταση στο σημείο αυτό (Chen and Han, 1988).

Φυσικά το διάνυσμα τάσης  $\mathbf{T}^{(n)}$ , δεν χρειάζεται να είναι κάθετο σε σχέση με το επίπεδο στο οποίο δρα. Έτσι πρακτικά, το  $\mathbf{T}^{(n)}$  αποσυντίθεται σε δυο συνιστώσες. Η μία είναι κάθετη στο επίπεδο  $n$  και καλείται ορθή τάση (normal stress) ενώ η άλλη είναι παράλληλη στο επίπεδο  $n$  και καλείται διατμητική τάση (shear stress).

### 3.1.2 Τανυστής Τάσης

Με την ίδια λογική, που αποσυντέθηκε το διάνυσμα τάσης στην προηγούμενη ενότητα, αποσυντίθεται τα διανύσματα τάσης που σχετίζονται με καθένα από τα κάθετα επίπεδα ως προς τους άξονες  $x_1$ ,  $x_2$  και  $x_3$ , σε συνιστώσες στην κατεύθυνση των τριών αυτών αξόνων. Για παράδειγμα, το διάνυσμα τάσης  $\mathbf{T}^{(-e_1)}$ , που σχετίζεται με το επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα  $x_1$ , έχει τρεις συνιστώσες τάσης. Την ορθή τάση  $\sigma_{11}$ , και τις διατμητικές τάσεις  $\sigma_{12}$  και  $\sigma_{13}$  στην κατεύθυνση των τριών αξόνων  $x_1$ ,  $x_2$  και  $x_3$  αντίστοιχα όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.4 (Chen and Han, 1988).



**Σχήμα 3.4** Συνιστώσες τάσης στις τρεις διαστάσεις  
([http://en.wikipedia.org/wiki/Stress\\_\(mechanics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics)))

Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω, ισχύει:

$$\begin{aligned} T^{(e_1)} &= \sigma_{11}e_1 + \sigma_{12}e_2 + \sigma_{13}e_3 \quad \text{ή} \\ T^{(e_1)} &= \sigma_{1j}e_j \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, για τα κάθετα επίπεδα στους άξονες  $\chi_2$  και  $\chi_3$  ισχύουν:

$$\begin{aligned} T^{(e_2)} &= \sigma_{2j}e_j \\ T^{(e_3)} &= \sigma_{3j}e_j \end{aligned}$$

Γενικά ισχύει:

$$T^{(i)} = \sigma_{ij}e_j \quad [3.5]$$

Ο  $\sigma_{ij}$  ονομάζεται τανυστής τάσης και οι εννέα ποσότητες που απαιτούνται για να οριστεί (που είναι οι συνιστώσες των τριών διανυσμάτων τάσης  $T^{(e_1)}$ ,  $T^{(e_2)}$  και  $T^{(e_3)}$ ), ονομάζονται συνιστώσες του τανυστή τάσης. Ο τανυστής τάσης δίνεται ως εξής:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} T^{(e_1)} \\ T^{(e_2)} \\ T^{(e_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad [3.6]$$

όπου οι συνιστώσες τάσης  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  και  $\sigma_{33}$  θεωρούνται ορθές τάσεις ενώ οι υπόλοιπες συνιστώσες  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{21}$ ,  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{31}$  και  $\sigma_{32}$ , θεωρούνται διατμητικές τάσεις. Σε καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, ο τανυστής τάσης δίνεται ως εξής (Chen and Han, 1988):

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad [3.7]$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εντατική κατάσταση σε ένα σημείο είναι δυνατόν να αποδοθεί από άπειρους τανυστές προσανατολισμένους ή αναφερόμενους σε αντίστοιχα άπειρα ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων, που είναι δυνατόν να οριστούν γύρω από το υπόψη σημείο (Αγιουτάντης, 2002).

### 3.1.3 Εξίσωση του Cauchy

Με αντικατάσταση της εξίσωσης  $T^{(i)} = \sigma_{ij}e_j$  στην εξίσωση  $T^{(n)} = T^{(e_1)}n_1 + T^{(e_2)}n_2 + T^{(e_3)}n_3$ , προκύπτει ότι οι συνιστώσες του διανύσματος  $T^{(n)}$  μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$T_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j \quad \text{όπου } i = 1, 2, 3 \quad [3.8]$$

Η εξίσωση [3.8], είναι γνωστή και ως η εξίσωση του Cauchy και εκφράζει τις συνιστώσες του διανύσματος τάσης  $T_i^{(n)}$  που δρουν σε τυχαίο επίπεδο  $n$  σε δοσμένο σημείο αναφορικά με αναφορικά με τις συνιστώσες του τανυστή τάσης  $\sigma_{ij}$  στο σημείο αυτό. Η σχέση αυτή μεταξύ του διανύσματος τάσης και του τανυστή τάσης υπαγορεύει ότι με τη γνώση των εννέα βασικών ποσοτήτων  $\sigma_{ij}$  μπορεί να υπολογιστεί οποιοδήποτε  $T_i$  για οποιοδήποτε  $n_i$ . Επίσης ένα σημαντικό στοιχείο είναι ότι από τις συνθήκες ισορροπίας δυνάμεων, προκύπτει ότι οι διατμητικές συνιστώσες του τανυστή τάσης  $\sigma_{ij}$  είναι συμμετρικές. Δηλαδή ισχύει (Chen and Han, 1988):

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad [3.9]$$

Στο σημείο αυτό, κρίνεται απαραίτητο να δοθούν κάποιοι τύποι του Cauchy για τις τάσεις. Οι εξισώσεις  $T^{(n)} = T^{(e_1)}n_1 + T^{(e_2)}n_2 + T^{(e_3)}n_3$  και  $T_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j$  είναι διαφορετικές μορφές της εξίσωσης του Cauchy για τις τάσεις. Στην πράξη όμως είναι επιθυμητό να εκφράζεται απευθείας σε ορθή ( $\sigma_n$ ) και διατμητική ( $S_n$ ) συνιστώσα κάθε διάνυσμα τάσης  $T^{(n)}$  που δρα σε τυχαίο επίπεδο  $n$  σε συγκεκριμένο σημείο, αναφορικά πάντα με τις συνιστώσες τάσης του τανυστή  $\sigma_{ij}$  στο σημείο αυτό.

Το μέτρο της ορθής συνιστώσας τάσης δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο των  $T_i$  και  $n_i$  :

$$\sigma_n = T^{(n)}n = T_i^{(n)}n_i \quad [3.10]$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση [3.10] για  $T_i^{(n)}$  την εξίσωση  $T_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j$  ισχύει:

$$\sigma_n = \sigma_{ij}n_i n_j \quad [3.11]$$

Το μέτρο της διατμητικής συνιστώσας τάσης δίνεται ως εξής:

$$S_n^2 = (T^{(n)})^2 - \sigma_n^2 \quad [3.12]$$

όπου, από την εξίσωση  $T_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j$ , ο όρος  $(T^{(n)})^2$  προκύπτει ως εξής:

$$(T^{(n)})^2 = T^{(n)}T^{(n)} = T_i^{(n)}T_i^{(n)} = (\sigma_{ij}n_j)(\sigma_{ik}n_k) = \sigma_{ij}\sigma_{ik}n_j n_k \quad [3.13]$$

Οι εξισώσεις [3.11] και [3.12], οι οποίες προσδιορίζουν τις ορθές και διατμητικές συνιστώσες της τάσης που δρα σε ένα τυχαίο επίπεδο  $n$ , είναι οι πιο χρήσιμες εκφράσεις των τύπων του Cauchy για τις τάσεις.

Το διάνυσμα  $\sigma_n$  έχει την ίδια διεύθυνση με το κάθετο διάνυσμα  $n$  ενώ το διάνυσμα  $S_n$  βρίσκεται στο επίπεδο που σχηματίζουν τα διανύσματα  $T^{(n)}$  και  $n$  (Chen and Han, 1988).

### 3.1.4 Μετασχηματισμός του Τανυστή Τάσης

Στην εξίσωση  $T_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$  όπου  $i = 1, 2, 3$  τα  $T_i^{(n)}$  και  $n_j$  είναι διανύσματα, ενώ ο τανυστής τάσεων  $\sigma_{ij}$  είναι δεύτερης τάξης. Έτσι οι συνιστώσες τάσης  $\sigma_{ij}$  σε σύστημα συντεταγμένων  $x_i$  και οι συνιστώσες τάσης  $\sigma'_{ij}$  σε σύστημα συντεταγμένων  $x'_i$ , σχετίζονται με την παρακάτω εξίσωση:

$$\sigma_{ij} = \alpha_{im} \alpha_{jn} \sigma'_{mn} \quad \text{ή}$$

$$\sigma'_{ij} = \alpha_{mi} \alpha_{nj} \sigma_{mn}$$

όπου τα στοιχεία  $\alpha_{ij}$  είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης που δίνονται στον Πίνακα 2.1. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως εξής:

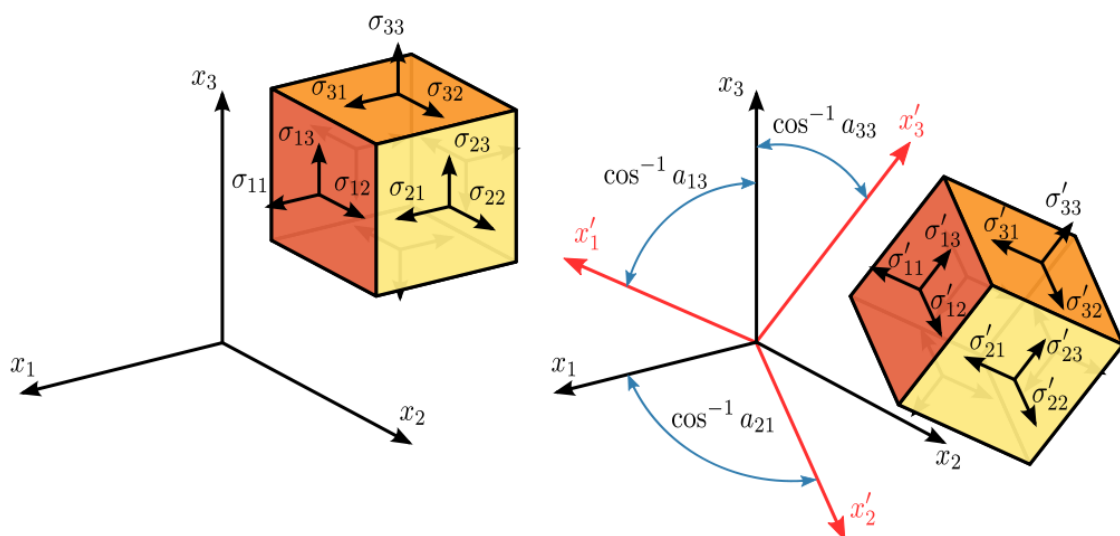
$$\sigma' = A \sigma A^T \quad [3.14]$$

όπου  $A$  είναι ο πίνακας στροφής με στοιχεία  $\alpha_{ij}$ .

Στο Σχήμα 3.5 παριστάνεται σχηματικά ο ανωτέρω περιγραφόμενος μετασχηματισμός.

**Πίνακας 2.1** Συνημίτονα κατεύθυνσης  $\alpha_{ij}$

| Άξονες | $x_1$         | $x_2$         | $x_3$         |
|--------|---------------|---------------|---------------|
| $x_1$  | $\alpha_{11}$ | $\alpha_{12}$ | $\alpha_{13}$ |
| $x_2$  | $\alpha_{21}$ | $\alpha_{22}$ | $\alpha_{23}$ |
| $x_3$  | $\alpha_{31}$ | $\alpha_{32}$ | $\alpha_{33}$ |



**Σχήμα 3.5** Μετασχηματισμός του τανυστή τάσης  
([http://en.wikipedia.org/wiki/Stress\\_\(mechanics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics)))

### 3.1.5 Κύριες Τάσεις και Αναλλοίωτες του Τανυστή Τάσης

Έστω ότι η κατεύθυνση  $n$  σε ένα σημείο ενός σώματος είναι κατά τέτοιο τρόπο προσανατολισμένη έτσι ώστε η τάση που προκύπτει με διάνυσμα τάσης  $T^{(n)}$  που αντιστοιχεί στη διεύθυνση αυτή είναι στην ίδια διεύθυνση με το μοναδιαίο διάνυσμα  $n$ . Έτσι  $T^{(n)} = \sigma_n n$  και δεν υπάρχει διατμητική τάση ( $S_n = 0$ ). Το επίπεδο  $n$  καλείται τότε **κύριο επίπεδο** (principal plane) στο σημείο αυτό, το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα  $n$  καλείται **κύρια διεύθυνση** (principal direction) και η ορθή τάση  $\sigma_n$  καλείται **κύρια τάση** (principal stress). Σε κάθε σημείο του σώματος υπάρχουν τουλάχιστον τρεις κύριες διευθύνσεις (Chen and Han, 1988).

Εξ ορισμού ισχύει:

$$T_i^{(n)} = \sigma n_i$$

Όμως:

$$T_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$$

Αντικαθιστώντας, ισχύει:

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i \quad [3.15]$$

Από την εξίσωση [3.15] συνεπάγονται οι ακόλουθες τρεις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 &= \sigma n_1 \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 &= \sigma n_2 \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 &= \sigma n_3 \end{aligned}$$

Επιλύοντας:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma) n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 &= 0 \\ \sigma_{21} n_1 + (\sigma_{22} - \sigma) n_2 + \sigma_{23} n_3 &= 0 \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + (\sigma_{33} - \sigma) n_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \quad [3.16]$$

όπου  $\delta_{ij}$  το  $\delta$  του Kronecker που ισούται με:  $\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Οι εξισώσεις [3.16] μπορούν να γραφούν και ως εξής:

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx} - \sigma) n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= 0 \\ \tau_{yx} n_x + (\sigma_{yy} - \sigma) n_y + \tau_{yz} n_z &= 0 \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + (\sigma_{zz} - \sigma) n_z &= 0 \end{aligned} \quad [3.17]$$

Η λύση του συστήματος προκύπτει από τον μηδενισμό της ορίζουσάς του. Έτσι είναι:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{ή } |\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}| = 0 \quad [3.18]$$

Γενικά, υπάρχουν τρεις λύσεις  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  και  $\sigma_3$  για τον προσδιορισμό των κύριων τάσεων. Αυτές ορίζονται πάντα έτσι ώστε να ισχύει η σχέση  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Η εύρεση των κύριων τάσεων ισοδυναμεί με την εύρεση των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του ταυστή τάσης (Αγιουτάντης, 2002).

Το ανάπτυγμα της παραπάνω ορίζουσας, οδηγεί στην χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad [3.19]$$

όπου τα σύμβολα  $I_1$ ,  $I_2$  και  $I_3$  αποτελούν τις σταθερές ή αναλλοίωτες τάσης (stress invariants), δηλαδή αντιπροσωπεύουν ποσότητες που δεν εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς της εντατικής κατάστασης ενός σημείου. Οι αναλλοίωτες τάσεις υπολογίζονται και ως συνάρτηση των κύριων τάσεων  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  και  $\sigma_3$  σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις (Αγιουτάντης, 2002):

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) \\ &= (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) - (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \\ &= (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ I_3 &= |\sigma_{ij}| = \frac{1}{6}(\sigma_{ii}\sigma_{jj}\sigma_{kk} - 3\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} + 2\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}) \\ &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \quad [3.20]$$

Οι αναλλοίωτες τάσης μπορούν εύκολα να υπολογιστούν για δεδομένη εντατική κατάσταση ενός σώματος και επομένως είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν για την έκφραση κριτηρίων αστοχίας ενός μέσου. Συνεπώς, για στατικά φορτία τα κριτήρια αυτά μπορούν να εφαρμόζονται ανεξάρτητα από τον τρόπο περιγραφής της εντατικής κατάστασης σε ένα μέσο (Αγιουτάντης, 2002).

Αντικαθιστώντας τα  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  και  $\sigma_3$  στην εξίσωση  $(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})n_j = 0$  και εισάγοντας τη σχέση  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ , (αφού  $n_i n_i = 1$ ), μπορούν να προσδιοριστούν οι συνιστώσες  $(n_1, n_2, n_3)$  του διανύσματος κατεύθυνσης  $n_i$  που αντιστοιχεί σε καθεμία από τις κύριες τάσεις  $\sigma$ . Έτσι ισχύει (Chen and Han, 1988):



$$\begin{aligned}
n^{(1)} &= (n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, n_3^{(1)}) \quad \text{όταν } \sigma = \sigma_1 \\
n^{(2)} &= (n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, n_3^{(2)}) \quad \text{όταν } \sigma = \sigma_2 \\
n^{(3)} &= (n_1^{(3)}, n_2^{(3)}, n_3^{(3)}) \quad \text{όταν } \sigma = \sigma_3
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Οι τρεις παραπάνω κατευθύνσεις, ονομάζονται κύριες κατευθύνσεις της φόρτισης. Η ανάγκη χρήσης της σχέσης  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$  προκύπτει διότι στην προσπάθεια επίλυσης του συστήματος  $(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij})n_j = 0$ , υπάρχουν τρεις άγνωστοι  $(n_1, n_2, n_3)$  και μόνο δύο εξισώσεις γραμμικά ανεξάρτητες. Χρειάζεται λοιπόν μια ακόμα εξίσωση για τη λύση του συστήματος (Αγιουτάντης, 2002).

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθούν τα ακόλουθα:

Στους κύριους άξονες 1, 2 και 3 όλες οι διατμητικές τάσεις είναι μηδέν. Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, το μέτρο του διανύσματος τάσης σε ένα τυχαίο επίπεδο δίνεται από τον τύπο:

$$(T^{(n)})^2 = \sigma_{ij} \sigma_{ik} n_j n_k$$

από τον οποίο προκύπτει ότι:

$$(T^{(n)})^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

Η εξίσωση  $\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j$  δίνει το μέτρο της ορθής (και εν προκειμένω κύριας τάσης) ως εξής:

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

Ενώ για τα  $n$  ισχύει:  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

Από την εξίσωση,  $S_n^2 = (T^{(n)})^2 - \sigma_n^2$  το μέτρο της διατμητικής συνιστώσας τάσης δίνεται ως εξής:

$$S_n^2 = (T^{(n)})^2 - \sigma_n^2 = (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2) - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2$$

Μπορεί ναδειχθεί ότι η ισότητα  $\sigma_n = \sigma_3$  είναι σταθερό μέγεθος, εάν από τις εξισώσεις  $\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$  και  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ , λύνοντας ως προς  $n_3$  την τελευταία ( $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$ ) και παίρνοντας το  $\sigma_n$  σαν συνάρτηση των  $n_1$  και  $n_2$ , τεθεί για σταθερές τιμές του  $\sigma_n$  ότι  $\frac{\partial \sigma_n}{\partial n_1} = 0$  και  $\frac{\partial \sigma_n}{\partial n_2} = 0$ . Με την αντίστοιχη διαδικασία

μπορεί να αποδειχτεί ότι και τα  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  είναι σταθερές τιμές της τάσης  $\sigma_n$ .

Όσον αφορά τις σταθερές τιμές της διατμητικής τάσης  $S_n$ , ισχύουν τα εξής: Ομοίως με τον παραπάνω τρόπο, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις

$S_n^2 = (\Gamma^{(n)})^2 - \sigma_n^2 = (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2) - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2$  και  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ , και λύνοντας ως προς  $n_3$  την τελευταία ( $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$ ), προκύπτει:

$$S_n^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)n_1^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)n_2^2 + \sigma_3^2 - [(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 + \sigma_3]^2$$

Οι σταθερές τιμές του  $S_n$ , προκύπτουν ως εξής:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S_n^2}{\partial n_1} = (\sigma_1 - \sigma_3)n_1 \{(\sigma_1 - \sigma_3) - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2]\} = 0$$

και

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S_n^2}{\partial n_2} = (\sigma_2 - \sigma_3)n_2 \{(\sigma_2 - \sigma_3) - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2]\} = 0$$

Επειδή ισχύει  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , υπάρχουν τρεις συνθήκες που να ικανοποιούν τις δυο παραπάνω εξισώσεις και την εξίσωση  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ :

- $n_1 = n_2 = 0, n_3 = \pm 1$

Η εξίσωση  $S_n^2 = (\Gamma^{(n)})^2 - \sigma_n^2 = (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2) - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2$  δίνει  $S_n = 0$ , και η συνιστώσα  $S_n$  δρα στο κύριο επίπεδο με κύρια διεύθυνση  $n_3$ . Αυτό είναι αναμενόμενο αφού στα κύρια επίπεδα υπάρχουν μόνο κύριες τάσεις.

- $n_1 = 0, n_2 = n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Οι τιμές αυτές ορίζουν δυο επίπεδα που διέρχονται από τον κύριο άξονα του  $\sigma_1$  υπό γωνία  $45^\circ$  με τους κύριους άξονες των  $\sigma_2$  και  $\sigma_3$ . Οι σταθερές τιμές του  $S_n$  στην περίπτωση αυτή είναι:

$$S_n^2 = \frac{1}{4}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 \quad \text{ή} \quad |S_n| = \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|$$

- $n_2 = 0, n_1 = n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Οι τιμές αυτές ορίζουν δυο επίπεδα που διέρχονται από τον κύριο άξονα του  $\sigma_2$  υπό γωνία  $45^\circ$  με τους κύριους άξονες των  $\sigma_1$  και  $\sigma_3$ . Οι σταθερές τιμές του  $S_n$  στην περίπτωση αυτή είναι:

$$|S_n| = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3|$$

Ομοίως μπορεί να οριστεί άλλη μια σταθερή τιμή του  $S_n$  με τιμή  $|S_n| = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|$  για τα επίπεδα που διέρχονται από τον κύριο άξονα του  $\sigma_2$  υπό γωνία  $45^\circ$  με τους κύριους άξονες των  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  ( $n_3 = 0$ ,  $n_1 = n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ).

Οι σταθερές τιμές  $\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|$ ,  $\frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|$  και  $\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3|$ , ονομάζονται **κύριες διατμητικές τάσεις** (principal shear stresses) και απαντώνται σε επίπεδα που διχοτομούν την γωνία μεταξύ των κύριων επιπέδων. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα κύρια διατμητικά επίπεδα δεν είναι καθαρά επίπεδα διάτμησης. Οι ορθές τάσεις στα κύρια διατμητικά επίπεδα, μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας την εξίσωση  $(T^{(n)})^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$  και τις αντίστοιχες τιμές των  $n_1$ ,  $n_2$  και  $n_3$ . Η μέγιστη τιμή των κύριων διατμητικών τάσεων καλείται **μέγιστη τάση διάτμησης** (maximum shearing stress), συμβολίζεται με  $\tau_{\max}$  και ισούται με  $\tau_{\max} = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3|$  για  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  (Chen and Han, 1988).

### 3.1.6 Αποκλίνων Τανυστής Τάσης και Αναλλοίωτες του Αποκλίνοντα Τανυστή Τάσης

Σε πολλές εφαρμογές (όπως στη μοντελοποίηση υλικών) είναι απαραίτητο να διαχωριστεί ο τανυστής τάσης σε δύο μέρη. Το ένα μέρος ονομάζεται υδροστατικός τανυστής τάσης (hydrostatic stress tensor ή spherical stress tensor) και περιγράφει την υδροστατική εντατική κατάσταση ενός σημείου (καθαρή υδροστατική εντατική κατάσταση – φόρτιση μόνο με ορθές τάσεις) και το άλλο μέρος ονομάζεται αποκλίνων τανυστής τάσης (stress deviator tensor) και περιγράφει τη διατμητική εντατική κατάσταση ενός σημείου (κατάσταση καθαρής διάτμησης).

Ο υδροστατικός τανυστής τάσης είναι ο τανυστής του οποίου τα στοιχεία δίνονται από τη σχέση  $p\delta_{ij}$ , όπου  $p$  είναι η μέση τάση (mean stress) και δίνεται από τον τύπο:

$$p = \frac{1}{3}\sigma_{kk} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}I_1 \quad [3.22]$$

Από την παραπάνω εξίσωση, είναι προφανές ότι η μέση τάση  $p$  είναι κοινή για κάθε πιθανό προσανατολισμό των αξόνων. Για αυτό το λόγο, ονομάζεται υδροστατική τάση. Ο αποκλίνων τανυστής τάσης  $s_{ij}$  ορίζεται από την αφαίρεση της υδροστατικής

εντατικής κατάστασης από την πραγματική εντατική κατάσταση (Chen and Han, 1988). Έτσι ισχύει:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= s_{ij} + p\delta_{ij} \quad \text{ή} \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - p\delta_{ij}\end{aligned}\quad [3.23]$$

Αναλυτικότερα για την εξίσωση [3.23] ισχύει:

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma_{11} - p) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - p) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - p) \end{bmatrix}\quad [3.24]$$

Είναι προφανές ότι αφαιρώντας μια σταθερή ορθή τάση από όλες τις διευθύνσεις, δεν αλλάζει τις κύριες διευθύνσεις. Έτσι οι κύριες διευθύνσεις είναι οι ίδιες για τον αποκλίνοντα τανυστή τάσης όπως και για τον αρχικό τανυστή τάσης. Όσον αφορά τις κύριες τάσεις, ο αποκλίνοντας τανυστής  $s_{ij}$  για αυτές είναι:

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - p \end{bmatrix} \quad \text{ή}$$

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{bmatrix}\quad [3.25]$$

Οι αναλλοίωτες του αποκλίνοντα τανυστή τάσης  $s_{ij}$ , προκύπτουν από την αντίστοιχη διαδικασία με αυτή που έγινε στο προηγούμενο κεφάλαιο για τις αναλλοίωτες του τανυστή τάσης. Έτσι ισχύει:

$$\begin{aligned}|s_{ij} - s\delta_{ij}| &= 0 \quad \text{ή} \\ s^3 - J_1s^2 + J_2s - J_3 &= 0\end{aligned}\quad [3.26]$$

όπου τα σύμβολα  $J_1$ ,  $J_2$  και  $J_3$  αποτελούν τις σταθερές ή αναλλοίωτες του αποκλίνοντα τανυστή τάσης. Οι αναλλοίωτες τάσεις υπολογίζονται και ως συνάρτηση των κύριων τάσεων  $s_1$ ,  $s_2$  και  $s_3$  σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις (Chen and Han, 1988):

$$\begin{aligned}
J_1 &= s_{ii} = s_{11} + s_{22} + s_{33} = s_1 + s_2 + s_3 = 0 \\
J_2 &= \frac{1}{2}(s_{ij}s_{ji}) = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \\
&= -s_{11}s_{22} - s_{22}s_{33} - s_{33}s_{11} + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 = -(s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1) \\
&= \frac{1}{6}[(s_{11} - s_{22})^2 + (s_{22} - s_{33})^2 + (s_{33} - s_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \\
&= \frac{1}{6}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \quad [3.27] \\
&= \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\
J_3 &= \frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki} = \begin{vmatrix} s_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & s_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & s_{zz} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) = s_1s_2s_3
\end{aligned}$$

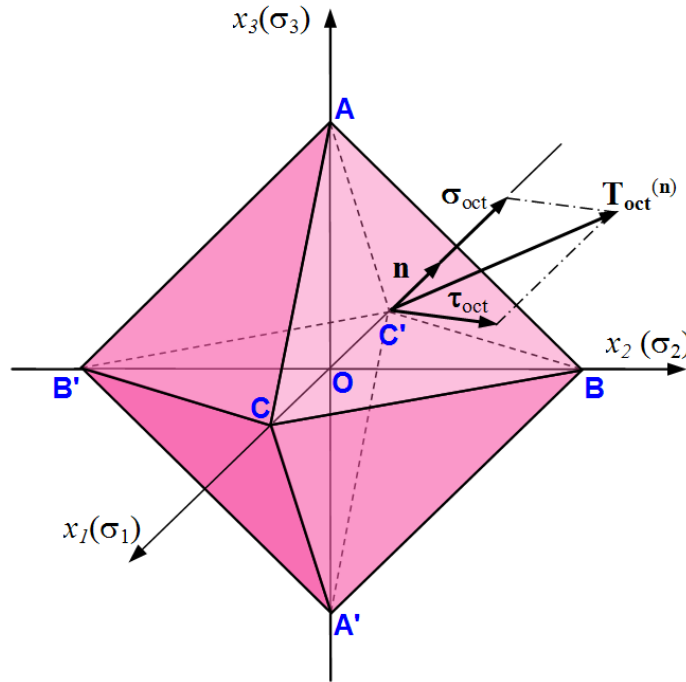
Πρέπει να σημειωθεί ότι οι αναλλοίωτες του αποκλίνοντα τανυστή τάσης  $J_1$ ,  $J_2$  και  $J_3$  και οι αναλλοίωτες του τανυστή τάσης  $I_1$ ,  $I_2$  και  $I_3$ , συνδέονται μεταξύ τους μέσω των παρακάτω σχέσεων (Chen and Han, 1988):

$$\begin{aligned}
J_1 &= 0 \\
J_2 &= \frac{1}{3}(I_1^2 - 3I_2) \\
J_3 &= \frac{1}{27}(2I_1^3 - 9I_1I_2 + 27I_3)
\end{aligned} \quad [3.28]$$

Ένα πλεονέκτημα της χρήσης του αποκλίνοντα τανυστή τάσης είναι ότι η πρώτη του αναλλοίωτος είναι πάντα μηδέν. Επίσης μπορεί ναδειχτεί ότι η αναγκαία και ικανή συνθήκη σε μια εντατική κατάσταση  $\sigma_{ij}$  για να μετατραπεί σε κατάσταση καθαρής διάτμησης είναι να ισχύει  $\sigma_{ii} = 0$  ή η πρώτη αναλλοίωτος του τανυστή τάσης να ισούται με το μηδέν ( $I_1 = 0$ ).

### 3.1.7 Οκταεδρικές Τάσεις

Οι οκταεδρικές τάσεις είναι τάσεις κάθετες σε επίπεδα, των οποίων το μοναδιαίο διάνυσμα ισαπέχει από τους κύριους άξονες. Τα επίπεδα αυτά ορίζουν ένα νοητό οκτάεδρο γύρω από το κέντρο των αξόνων, σε κάθε ογδοημόριο του χώρου όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.6. Η ονομασία των τάσεων αυτών προέρχεται από το γεγονός ότι είναι δυνατόν να οριστούν οκτώ τέτοια ισαπέχοντα επίπεδα γύρω από ένα σημείο με  $OA = OB = OC = OA' = OB' = OC'$ .



**Σχήμα 3.6** Επίπεδα οκταεδρικής τάσης ([http://en.wikipedia.org/wiki/Stress\\_\(mechanics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics)))

Το μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{n}$  των επιπέδων αυτών δίνεται από τον τύπο:

$$n_i = (n_1, n_2, n_3) = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \right| (1, 1, 1) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Στους κύριους άξονες 1, 2 και 3, ο τανυστής τάσης  $\sigma_{ij}$  δίνεται ως εξής:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Το μέτρο της ορθής συνιστώσας τάσης του διανύσματος τάσης στο σημείο  $O$  που σχετίζεται με τη διεύθυνση  $\mathbf{n}$  δίνεται από τον παρακάτω τύπο του Cauchy, όπως προαναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα:

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j \quad \text{ή}$$

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1 n_1 + \sigma_2 n_2 n_2 + \sigma_3 n_3 n_3$$

Έτσι η ορθή τάση σε μια έδρα του οκτάεδρου θα είναι:

$$\sigma_{oct} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I_1 \quad [3.29]$$

Το μέτρο της διατμητικής τάσης ( $\tau_{oct}$ ) σε μια έδρα του οκτάεδρου προκύπτει χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο του Cauchy, όπως προαναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα:

$$S_n^2 = (\Gamma^{(n)})^2 - \sigma_n^2 \quad \text{ή}$$

$$\tau_{oct}^2 = (\Gamma_{oct}^{(n)})^2 - \sigma_{oct}^2$$

Ο όρος  $(\Gamma_{oct}^{(n)})^2$  προκύπτει από τον τύπο:

$$(\Gamma^{(n)})^2 = \Gamma^{(n)}\Gamma^{(n)} = \Gamma_i^{(n)}\Gamma_i^{(n)} = (\sigma_{ij}n_j)(\sigma_{ik}n_k) = \sigma_{ij}\sigma_{ik}n_jn_k$$

Έτσι είναι:

$$(\Gamma_{oct}^{(n)})^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \tau_{oct}^2 &= \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{3^2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\ &= \frac{1}{9}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned}$$

Όμως επειδή:

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

Τελικά είναι:

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2} \quad [3.30]$$

όπου  $J_2$  η δεύτερη αναλλοίωτος του αποκλίνοντα τανυστή τάσης. Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και σε συνάρτηση με τις αναλλοίωτες του τανυστή τάσης λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση  $J_2 = \frac{1}{3}(I_1^2 - 3I_2)$  ως εξής:

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2(I_1^2 - 3I_2)}}{3} \quad [3.31]$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι το μέτρο της  $\sigma_{oct}$  και στις οκτώ έδρες είναι το ίδιο και ότι η ποσότητα  $\sigma_{oct}$  είναι η μέση κύρια τάση (ή υδροστατική τάση), όπως αντίστοιχα ίδιο είναι και το μέτρο της  $\tau_{oct}$  και στις οκτώ έδρες (Chen and Han, 1988).

### 3.1.8 Φυσική Ερμηνεία των Αναλλοίωτων Τάσης $I_1$ και $J_2$

Υπάρχουν πολλές ερμηνείες των αναλλοίωτων τάσης  $I_1$  και  $J_2$ . Αρχικά, όπως παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, η οκταεδρική ορθή τάση  $\sigma_{oct}$  ισούται με

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}I_1 \quad \text{ενώ η οκταεδρική διατμητική τάση } \tau_{oct} \text{ ισούται με } \tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2} .$$

Μια άλλη ερμηνεία των αναλλοίωτων έχει να κάνει με την ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης (elastic strain energy). Η συνολική ενέργεια παραμόρφωσης  $W$  ανά μοναδιαίο όγκο ενός γραμμικά ελαστικού υλικού, μπορεί να διαχωριστεί σε δυο μέρη  $W_1$  και  $W_2$  που σχετίζονται με αλλαγή στον όγκο και αλλαγή στο σχήμα αντίστοιχα. Η ποσότητα  $W_1$  ονομάζεται και ενέργεια διαστολής (dilatational energy) ενώ η ποσότητα  $W_2$  ονομάζεται ενέργεια παραμόρφωσης (distortional energy). Έτσι:

$$W = W_1 + W_2 \quad [3.32]$$

όπου

$$W_1 = \frac{1-2\nu}{6E} I_1^2$$

$$W_2 = \frac{1+\nu}{E} J_2$$

Τα μεγέθη  $E$  και  $\nu$ , είναι το μέτρο ελαστικότητας και ο λόγος του Poisson αντίστοιχα. Οι αναλλοίωτες  $I_1$  και  $J_2$  είναι άμεσα ανάλογες της ενέργειας διαστολής και της ενέργειας παραμόρφωσης αντίστοιχα (Chen and Han, 1988).

Μια άλλη ερμηνεία των αναλλοίωτων έχει να κάνει με τη μέση τάση (mean stress). Έτσι η μέση ορθή τάση ισούται με (Chen and Han, 1988):

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I_1$$

Ενώ η μέση διατμητική τάση ισούται με:

$$\tau_m = \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{\sqrt{15}} \quad \text{ή}$$

$$\tau_m = \sqrt{\frac{2}{5}} J_2$$

Μια ακόμα ερμηνεία των αναλλοίωτων προκύπτει από τις σχέσεις των κύριων διατμητικών τάσεων που αναφέρθηκαν σε προηγούμενη ενότητα  $|S_n| = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|$ ,  $|S_n| = \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|$ ,  $|S_n| = \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1|$  των οποίων η τετραγωνική τιμή του μέσου τετραγώνου (root mean square) είναι:

$$\sqrt{\frac{1}{3} \left[ \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 \right]} = \frac{\sqrt{2J_2}}{2}$$

Τέλος, οι κύριες τάσεις του τανυστή τάσεων  $\sigma_{ij}$  μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των αναλλοίωτων ως εξής (Chen and Han, 1988):



$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{I_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \cos(\theta - 2\pi/3) \\ \cos(\theta + 2\pi/3) \end{Bmatrix} \quad [3.33]$$

για την  $\theta$  η οποία ονομάζεται γωνία του Lode, ισχύει:

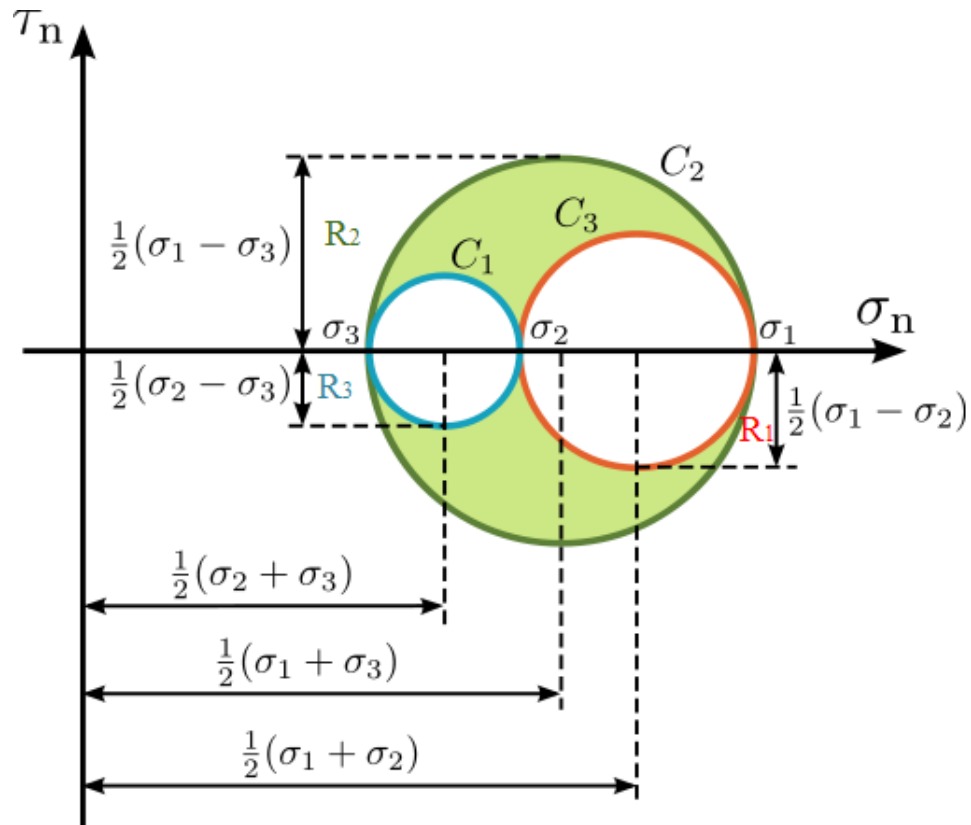
$$\cos(3\theta) = \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}} \right) \text{ με } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad [3.34]$$

### 3.1.9 Ο Κύκλος του Mohr

Ο κύκλος του Mohr, είναι μια χρήσιμη γραφική αναπαράσταση της εντατικής κατάστασης σε ένα σημείο. Στην αναπαράσταση αυτή, η εντατική κατάσταση ενός σημείου απεικονίζεται με ένα διάγραμμα κύκλου του Mohr στο οποίο η τετμημένη  $\sigma_n$  και η τεταγμένη  $S_n$  ή  $\tau_n$  κάθε σημείου, απεικονίζουν τις συνιστώσες της ορθής και της διατμητικής τάσης αντίστοιχα, που δρουν σε συγκεκριμένο τέμνον επίπεδο με σταθερή ορθή διεύθυνση.

Στη γενική τρισδιάστατη περίπτωση, για μια συγκεκριμένη εντατική κατάσταση σε ένα σημείο, οι τιμές των κύριων τάσεων  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  και  $\sigma_3$ , πρέπει πρώτα να υπολογιστούν όπως προαναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα από τη σχέση:  $\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$ , ενώ οι αντίστοιχοι κύριοι άξονες από τις σχέσεις:  $n^{(1)} = (n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, n_3^{(1)})$ , όταν  $\sigma = \sigma_1$ ,  $n^{(2)} = (n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, n_3^{(2)})$ , όταν  $\sigma = \sigma_2$  και  $n^{(3)} = (n_1^{(3)}, n_2^{(3)}, n_3^{(3)})$ , όταν  $\sigma = \sigma_3$ . Όταν οι τιμές  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  και  $\sigma_3$ , είναι γνωστές ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ), μπορεί να κατασκευαστεί ένα διάγραμμα κύκλου του Mohr όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.7.

Στο σχήμα αυτό, τα κέντρα των τριών κύκλων του Mohr,  $C_1$ ,  $C_2$  και  $C_3$  έχουν συντεταγμένες:  $\left[ \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3), 0 \right]$ ,  $\left[ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3), 0 \right]$  και  $\left[ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), 0 \right]$  αντίστοιχα. Οι τρεις ακτίνες  $R_1$ ,  $R_2$  και  $R_3$ , ισούνται με  $\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$ ,  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$  και  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$  αντίστοιχα. Συσχετισμένες με το τέμνον επίπεδο  $n$  στο προς εξέταση σημείο, αναφορικά με το κύριο σύστημα συντεταγμένων, οι αντίστοιχες ορθές και διατμητικές τάσεις, μπορούν να σχεδιαστούν σαν ένα σημείο στο εντατικό χώρο  $\sigma_n - \tau_n$ .



**Σχήμα 3.7** Ο κύκλος του Mohr στις τρεις διαστάσεις  
([http://en.wikipedia.org/wiki/Stress\\_\(mechanics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics)))

Παίρνοντας υπόψη τις θετικές τιμές του  $\tau_n$ , (οι οποίες αντιστοιχούν στο άνω μισό του εντατικού χώρου  $\sigma_n - \tau_n$ ) και θεωρώντας ότι οι συνιστώσες του μοναδιαίου κάθετου διάνυσματος  $n$  είναι  $n_1, n_2$  και  $n_3$ , στην διεύθυνση των κύριων αξόνων 1, 2 και 3 αντίστοιχα, με  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , οι εξισώσεις  $\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$  και  $\tau_n^2 = (T^{(n)})^2 - \sigma_n^2 = (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2) - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2$  γράφονται:

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = (T^{(n)})^2 = (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2)$$

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

Επιλύοντας τις παραπάνω δυο εξισώσεις για  $n_1^2, n_2^2$  και  $n_3^2$ , αφού για το μοναδιαίο διάνυσμα  $n$ , ισχύει  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$  είναι:

$$n_1^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$n_2^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}$$

$$n_3^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

Εφόσον ισχύει  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , η πρώτη και η τρίτη εξίσωση από τις παραπάνω τρεις εξισώσεις είναι μη αρνητικές. Έτσι ισχύουν:

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geq 0$$

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) \leq 0$$

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geq 0$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν και ως εξής:

$$\tau_n^2 + \left[ \sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 \geq \frac{1}{4}(\sigma_2 - \sigma_3)^2$$

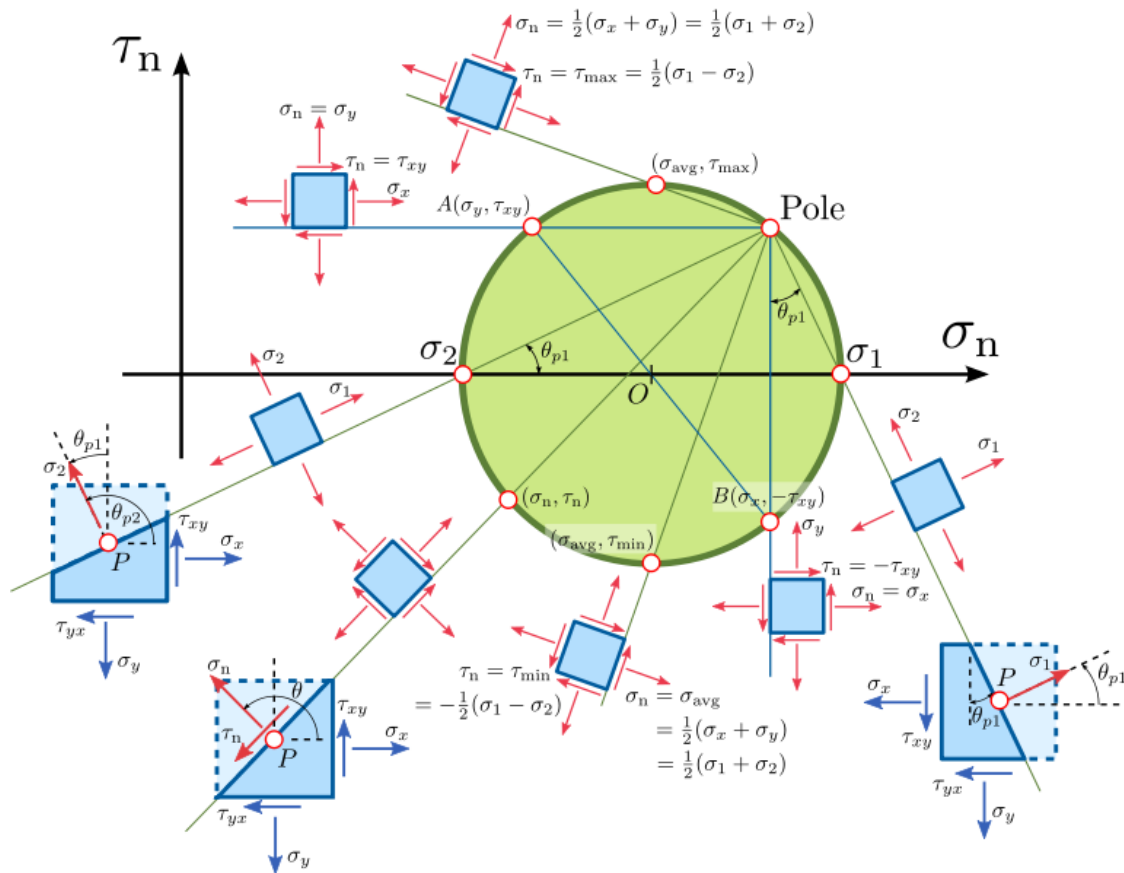
$$\tau_n^2 + \left[ \sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 \leq \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_3)^2$$

$$\tau_n^2 + \left[ \sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]^2 \geq \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2$$

Η πρώτη και η τρίτη εξίσωση από τις παραπάνω εξισώσεις, δείχνουν ότι οι αποδεκτές τιμές των  $\sigma_n$  και  $\tau_n$ , βρίσκονται μέσα ή στα όρια των περιοχών που περιβάλλονται από τους κύκλους  $C_1$ ,  $C_2$  και  $C_3$  όπως φαίνεται και από το Σχήμα 3.7 (Chen and Han, 1988).

Όταν η μελέτη του κύκλου του Mohr είναι στις δυο διαστάσεις, ένα σημαντικό σημείο του είναι το πολικό σημείο (Pole). Κάθε ευθεία γραμμή που σχεδιάζεται από το σημείο αυτό, τέμνει τον κύκλο του Mohr σε σημείο που αντιπροσωπεύει την εντατική κατάσταση (η ορθή και η διατμητική τάση που ζητείται) σε επίπεδο με την ίδια κλίση με αυτή της γραμμής που σχεδιάστηκε (Σχήμα 3.8).

Το πολικό σημείο είναι η κάθετη τομή των ευθειών που περνάνε από τα σημεία  $(\sigma_x, -\tau_{xy})$  και  $(\sigma_y, \tau_{xy})$  ή εναλλακτικά από τα σημεία  $(\sigma_x, \tau_{xy})$  και  $(\sigma_y, -\tau_{xy})$ . Στο Σχήμα 3.8,  $\theta$  είναι η γωνία που σχηματίζει το κάθετο διάνυσμα του εκάστοτε επιπέδου με το οριζόντιο επίπεδο ([http://en.wikipedia.org/wiki/Stress\\_\(mechanics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics))).

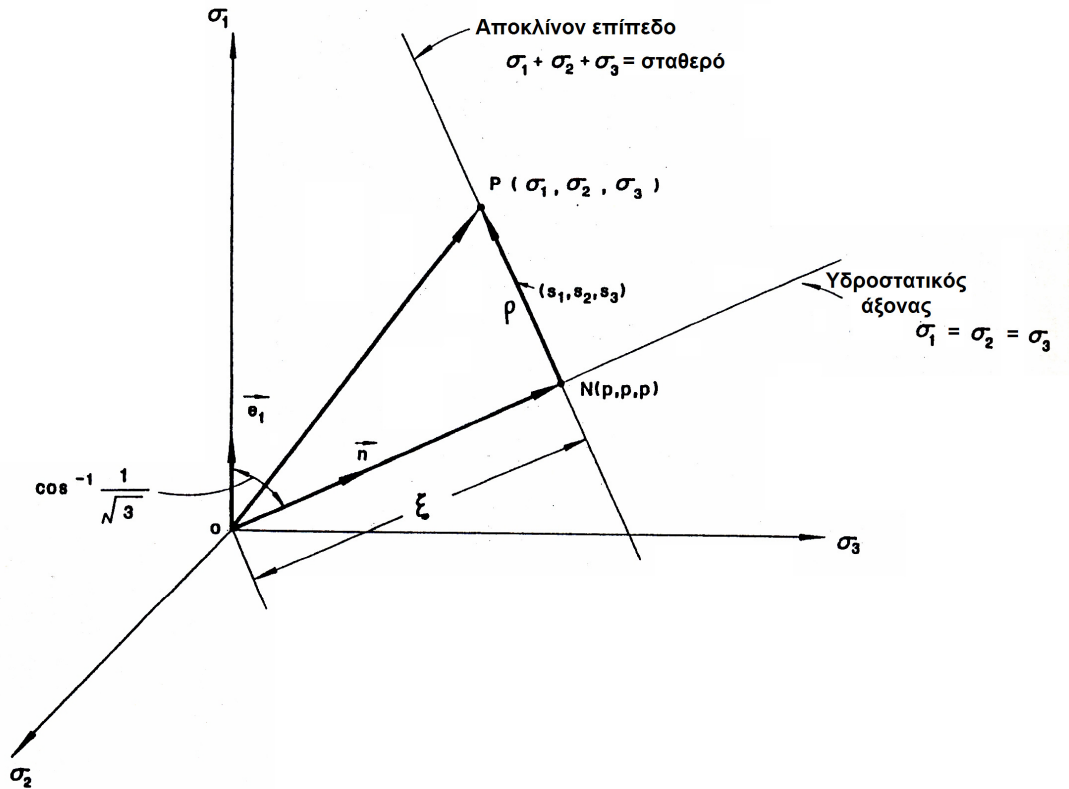


**Σχήμα 3.8** Πολικό σημείο του κύκλου του Mohr  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Stress\\_\(mechanics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics))

### 3.1.10 Ο Χώρος Τάσεων Haigh – Westergaard

Η γεωμετρική αναπαράσταση της εντατικής κατάστασης σε ένα σημείο είναι πολύ χρήσιμη στη μελέτη των κριτηρίων αστοχίας. Από τη στιγμή που ο τανυστής τάσεων  $\sigma_{ij}$  έχει έξι ανεξάρτητες συνιστώσες, είναι δυνατόν να θεωρηθούν αυτές οι συνιστώσες σαν αναφορικές συντεταγμένες σε ένα χώρο έξι διαστάσεων. Λόγω της δυσκολίας να γίνει κάτι τέτοιο, η απλούστερη εναλλακτική είναι να ληφθούν οι τρεις κύριες τάσεις  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  και  $\sigma_3$  σαν συντεταγμένες και να αναπαραστήσουν την εντατική κατάσταση σε ένα σημείο σαν ένα σημείο στον τρισδιάστατο εντατικό χώρο. Ο χώρος αυτός ονομάζεται χώρος τάσεων Haigh – Westergaard. Σε αυτόν τον χώρο κύριων τάσεων, κάθε σημείο που έχει συντεταγμένες  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  και  $\sigma_3$  αναπαριστά μια πιθανή εντατική κατάσταση. Οποιοσδήποτε δυο εντατικές καταστάσεις σε ένα σημείο P που διαφέρουν στον προσανατολισμό αλλά όχι στις τιμές των κύριων τάσεων τους, μπορούν να αναπαρασταθούν από το ίδιο σημείο στον τρισδιάστατο χώρο τάσεων. Αυτό αφήνει να εννοηθεί ότι ο τύπος της αναπαράστασης του χώρου τάσεων, είναι

εστιασμένος στην γεωμετρία της τάσης και όχι στον προσανατολισμό της εντατικής κατάστασης όσον αφορά το υλικό (Chen and Han, 1988). Στο Σχήμα 3.9 απεικονίζεται ο χώρος τάσεων Haigh – Westergaard.



Σχήμα 3.9 Χώρος τάσεων Haigh – Westergaard (Chen and Han, 1988)

Στο Σχήμα 3.9, διακρίνονται οι ποσότητες  $\xi$  και  $\rho$  που απεικονίζουν την υδροστατική και την αποκλίνουσα εντατική κατάσταση αντίστοιχα. Οι ποσότητες  $\xi$ ,  $\rho$  και  $\theta$ , περιγράφουν ένα κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (σύστημα συντεταγμένων Haigh – Westergaard). Για τις ποσότητες αυτές ισχύουν:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 \text{ και } \rho = \sqrt{2J_2} \quad [3.35]$$

Οι κύριες τάσεις του τανυστή τάσεων  $\sigma_{ij}$  μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των ποσοτήτων  $\xi$  και  $\rho$  ως εξής (Chen and Han, 1988):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \xi \\ \xi \\ \xi \end{Bmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \rho \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \cos(\theta - 2\pi/3) \\ \cos(\theta + 2\pi/3) \end{Bmatrix} \quad [3.36]$$

όπου  $\theta$  η γωνία του Lode.

### 3.2 Κριτήρια Διαρροής Ανεξάρτητα της Υδροστατικής Πίεσης

Το κριτήριο διαρροής καθορίζει τα ελαστικά όρια ενός υλικού κάτω από συνδυασμένες εντατικές καταστάσεις. Το ελαστικό όριο (elastic limit) σε μια απλή εφελκυστική δοκιμή (ή σε μια θλιπτική δοκιμή) είναι το όριο διαρροής (yield stress)  $\sigma_0$  ενώ σε μια απλή διατμητική δοκιμή είναι το όριο διαρροής  $\tau_0$ . γενικά το ελαστικό όριο ή όριο διαρροής είναι μια συνάρτηση της εντατικής κατάστασης  $\sigma_{ij}$ . Έτσι η συνθήκη διαρροής μπορεί γενικά να εκφραστεί ως εξής:

$$f(\sigma_{ij}, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad [3.37]$$

όπου  $k_1, k_2, \dots$  είναι οι σταθερές των υλικών, οι οποίες όπως τα  $\sigma_0$  και  $\tau_0$ , προσδιορίζονται πειραματικά.

Για ισότροπα υλικά, ο προσανατολισμός των αξόνων δεν έχει σχέση με το υλικό και οι τιμές των τριών κύριων αξόνων αρκούν για να περιγράψουν την εντατική κατάσταση. Έτσι ένα κριτήριο διαρροής, μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad [3.38]$$

Σε προηγούμενη ενότητα, δείχτηκε ότι οι τρεις κύριες τάσεις  $\sigma_1, \sigma_2$  και  $\sigma_3$ , μπορούν να εκφραστούν σε αντιστοιχία με τις αναλλοίωτες τάσης  $I_1$  (πρώτη αναλλοίωτος του τανυστή τάσης  $\sigma_{ij}$ ) και  $J_2, J_3$  (δεύτερη και τρίτη αναλλοίωτος αντίστοιχα του αποκλίνοντα τανυστή τάσης  $s_{ij}$ ). Έτσι η συνάρτηση [3.38] μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$f(I_1, J_2, J_3, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad [3.39]$$

Στα κριτήρια αστοχίας που είναι ανεξάρτητα της υδροστατικής πίεσης όσον αφορά τη διαρροή (όπως για παράδειγμα τα μέταλλα), οδηγεί την παραπάνω συνάρτηση να γραφεί ως εξής:

$$f(J_2, J_3, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad [3.40]$$

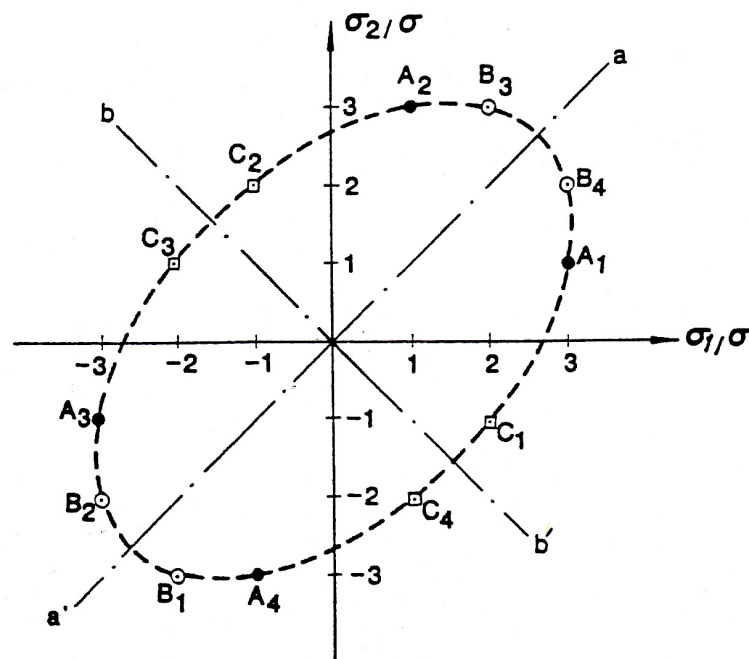
ή για το χώρο τάσεων Haigh – Westergaard:

$$f(\xi, \rho, \theta, k_1, k_2, \dots) = 0$$

Μια καμπύλη τάσης – παραμόρφωσης, σε μια απλή δοκιμή εφελκυσμού, δεν μπορεί από μόνη της να παρέχει πληροφορίες για τη συμπεριφορά υπό συνδυασμένη τάση. Οι δοκιμές συνδυασμένης τάσης, αναλογικά με την απλή δοκιμή εφελκυσμού, ονομάζονται αναλογικές δοκιμές φόρτισης (proportional loading tests) ή ακτινικές δοκιμές φόρτισης (radial loading tests). Στις δοκιμές αυτές, όλες οι τάσεις αυξάνονται αναλογικά. Σε μια διαξονική εντατική κατάσταση για παράδειγμα, η  $\sigma_1$  και η  $\sigma_2$ ,

αυξάνονται έτσι ώστε να διατηρείται ο λόγος  $\sigma_1/\sigma_2$  σταθερός. Από τα προηγούμενα μπορεί να υποθεθεί ότι χρειάζεται ένα μεγάλο πλήθος δοκιμών για να κατασκευαστεί ένας γεωμετρικός τόπος διαρροής (yield locus). Ωστόσο, θα δειχθεί ότι ένα σημείο στον γεωμετρικό τόπο διαρροής, μπορεί να μετατραπεί σε δώδεκα σημεία (Σχήμα 3.10) αν το υλικό είναι ισότροπο, ανεξάρτητο της υδροστατικής πίεσης και έχει το ίδιο όριο διαρροής σε εφελκυσμό και θλίψη.

Έστω λοιπόν ότι το υλικό αυτό, διαρρέει όταν η εντατική του κατάσταση είναι  $(3\sigma, \sigma, 0)$ . Το σημείο  $A_1(3\sigma, \sigma, 0)$  στο Σχήμα 3.9 βρίσκεται στον γεωμετρικό τόπο διαρροής στο επίπεδο  $\sigma_1 - \sigma_2$ . Αφού το υλικό είναι ισότροπο, τότε οι άξονες μπορούν να μετονομαστούν με ένα εναλλακτικό τρόπο και να δημιουργηθεί το σημείο  $A_2(\sigma, 3\sigma, 0)$  το οποίο επίσης βρίσκεται στον γεωμετρικό τόπο διαρροής. Επιπλέον αφού το υλικό έχει το ίδιο όριο διαρροής σε εφελκυσμό και θλίψη, τότε τα σημεία  $A_3(-3\sigma, -\sigma, 0)$  και  $A_4(-\sigma, -3\sigma, 0)$  θα βρίσκονται στον γεωμετρικό τόπο διαρροής. Τα σημεία  $A_1$  και  $A_2$ , ή τα σημεία  $A_3$  και  $A_4$ , είναι κατοπτρικά σε σχέση με μια ευθεία  $aa'$  που διχοτομεί τους άξονες  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$ . Ομοίως, τα σημεία  $A_1$  και  $A_4$ , ή τα σημεία  $A_2$  και  $A_3$ , είναι συμμετρικά σε σχέση με μια ευθεία  $bb'$  κάθετη στην  $aa'$ . Έτσι υπάρχουν δυο συμμετρικοί άξονες για το γεωμετρικό τόπο διαρροής.



Σχήμα 3.10 Γεωμετρικός τόπος διαρροής σε ένα σημείο δοκιμής (Chen and Han, 1988)

Επιπλέον, αφού η υδροστατική πίεση δεν έχει επίδραση στην διαρροή, μπορεί να προστεθεί μια υδροστατική εντατική κατάσταση  $(h, h, h)$  στην εντατική κατάσταση διαρροής, για να δημιουργηθεί ένα ακόμα σημείο διαρροής. Για παράδειγμα, αν προστεθεί η υδροστατική πίεση  $(-3\sigma, -3\sigma, -3\sigma)$  στο σημείο διαρροής  $(3\sigma, \sigma, 0)$ , τότε η εντατική κατάσταση  $(0, -2\sigma, -3\sigma)$ , είναι ένα ακόμα σημείο διαρροής. Διαφοροποιώντας τις συντεταγμένες έτσι ώστε ένα σημείο διαρροής  $B_1(-2\sigma, -3\sigma, 0)$ , να λαμβάνεται στο επίπεδο  $\sigma_1 - \sigma_2$ . Ομοίως, υπάρχει ακόμα ένα σημείο  $C_1(2\sigma, -\sigma, 0)$ , προσθέτοντας  $(-\sigma, -\sigma, -\sigma)$  στο  $(3\sigma, \sigma, 0)$  και διαφοροποιώντας τις συντεταγμένες ανάλογα. Τέλος, βάσει συμμετρίας, τα σημεία  $B_1$  και  $C_1$ , μπορούν όπως το  $A_1$ , να δημιουργήσουν τέσσερα σημεία  $B_1, B_2, B_3, B_4$  και  $C_1, C_2, C_3, C_4$  αντίστοιχα που να βρίσκονται πάνω στο γεωμετρικό τόπο διαρροής. Έτσι δημιουργήθηκαν δώδεκα σημεία διαρροής στο επίπεδο  $\sigma_1 - \sigma_2$ , από ένα μόνο σημείο της δοκιμής. Ενώνοντας τα σημεία αυτά με μια καμπύλη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.10, κατασκευάζεται ο γεωμετρικός τόπος διαρροής με τις συνθήκες που ορίστηκαν (ισοτροπία, μη εξάρτηση από την υδροστατική πίεση και ίδια συμπεριφορά σε εφελκυσμό και θλίψη) (Chen and Han, 1988).

Στα παρακάτω κεφάλαια θα αναλυθούν τα κριτήρια διαρροής του Tresca και του von Mises.

### 3.2.1 Το Κριτήριο Διαρροής Tresca

Ιστορικά το πρώτο κριτήριο για συνδυασμένη εντατική κατάσταση, προτάθηκε από τον Tresca, ο οποίος υπέθεσε ότι η διαρροή θα συνέβαινε όταν η μέγιστη διατμητική τάση σε ένα σημείο φτάσει σε μια κρίσιμη τιμή  $k$ . Σε όρους κύριων τάσεων, αυτό σημαίνει ότι το μισό της απόλυτης τιμής των διαφορών μεταξύ των κύριων τάσεων (παίρνοντάς τις ανά ζεύγη) πρέπει να ισούται με  $k$  στο όριο διαρροής. Έτσι:

$$\text{Max}\left(\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|\right) = k \quad [3.41]$$

όπου η σταθερά υλικού  $k$  προσδιορίζεται από μια απλή εφελκυστική δοκιμή. Έτσι:

$$k = \frac{\sigma_0}{2} \quad [3.42]$$

όπου  $\sigma_0$  είναι το όριο διαρροής στην απλή εφελκυστική δοκιμή.

Υπάρχουν έξι διαφορετικές εκφράσεις για το επίπεδο  $\sigma_1 - \sigma_2$ , που εξαρτώνται από τα σχετικά μέτρα και σύμβολα των  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  (Σχήμα 3.11). Στο σχήμα αυτό, στο



πρώτο τεταρτημόριο, μεταξύ του άξονα  $\sigma_1$  και της διχοτόμου των δύο αξόνων, η τάξη της τάσης απαιτεί ότι:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$$

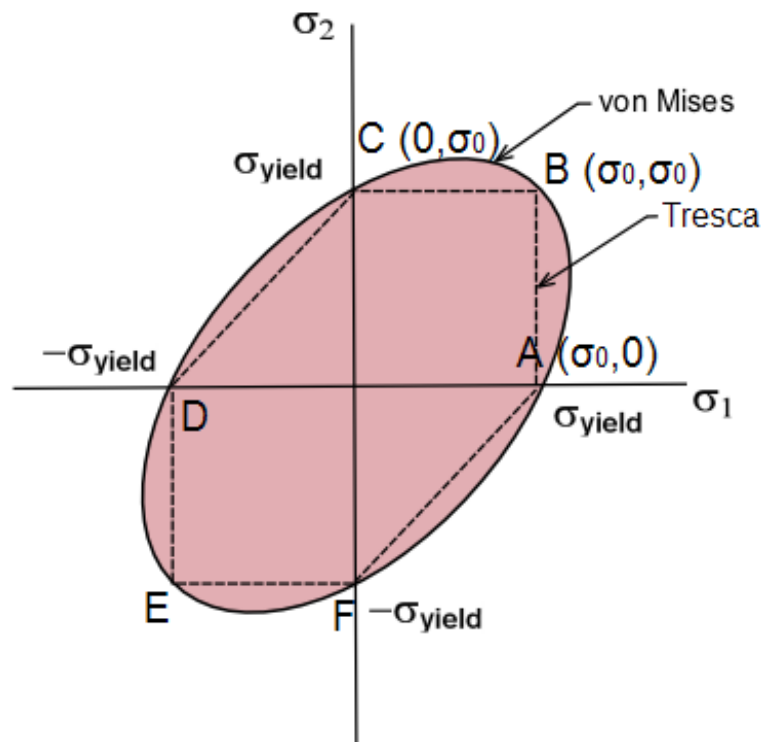
Έτσι το κριτήριο γίνεται  $\sigma_1 = \sigma_0$  και δίνει την γραμμή AB. Στο ίδιο τεταρτημόριο, μεταξύ της διχοτόμου των δύο αξόνων και του άξονα  $\sigma_1$ , ισχύει:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_2}{2}$$

Ενώ το κριτήριο γίνεται  $\sigma_2 = \sigma_0$  και δίνει την γραμμή BC. Στο δεύτερο τεταρτημόριο, ισχύει:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$$

Έτσι το κριτήριο γίνεται  $\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma_0$  και δίνει την γραμμή CD. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, κατασκευάζεται ο γεωμετρικός τόπος διαρροής που είναι το εξάγωνο ABCDEF, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.11.



**Σχήμα 3.11** Κριτήρια διαρροής σε εφελκυσμό ([http://en.wikipedia.org/wiki/Von\\_Mises\\_stress](http://en.wikipedia.org/wiki/Von_Mises_stress))

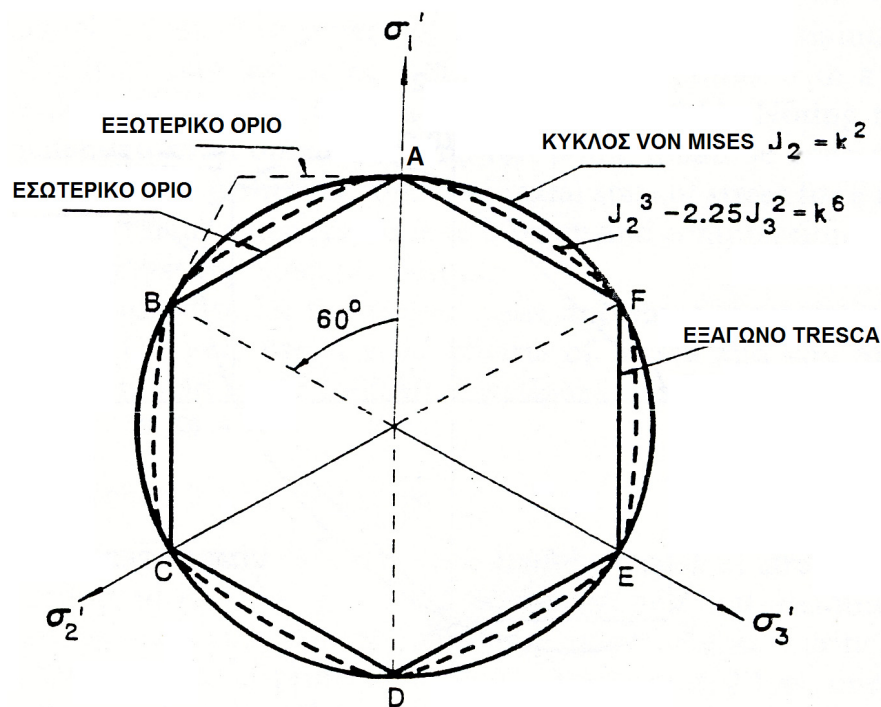
Το κριτήριο του Tresca, όσον αφορά τις αναλλοίωτες τάσης, γράφεται ως εξής:

$$f(J_2, \theta) = 2\sqrt{J_2} \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) - \sigma_0 \quad (0 \leq \theta \leq 60^\circ) \quad [3.43]$$

Ή σε σχέση με τις ποσότητες  $\xi$ ,  $\rho$ ,  $\theta$ :

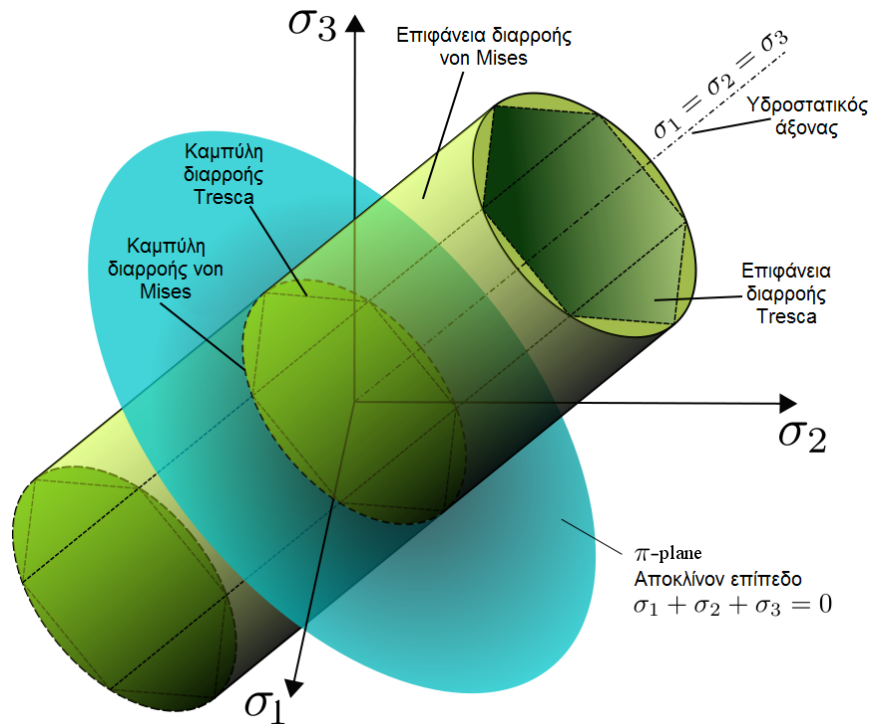
$$f(\rho, \theta) = \sqrt{2}\rho \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) - \sigma_0 \quad (0 \leq \theta \leq 60^\circ)$$

Αφού η υδροστατική πίεση δεν επηρεάζει την επιφάνεια διαρροής (yield surface), η παραπάνω εξίσωση πρέπει να είναι ανεξάρτητη της υδροστατικής πίεσης  $I_1$ . Στο αποκλίνον επίπεδο, η παραπάνω εξίσωση είναι μια ευθεία γραμμή που περνάει από το σημείο A ( $\theta = 0^\circ$ ) και από το σημείο B ( $\theta = 60^\circ$ ), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.12. Αυτός είναι ένας τομέας του γεωμετρικού τόπου διαρροής στο αποκλίνον επίπεδο. Καθεμία από τις άλλες πέντε πιθανές διατάξεις των μέτρων των κύριων τάσεων δίνει παρόμοιες γραμμές στους κατάλληλους τομείς του γεωμετρικού τόπου διαρροής στο αποκλίνον επίπεδο, έτσι δημιουργείται ένα κανονικό εξάγωνο ABCDEF (Chen and Han, 1988).



Σχήμα 3.12 Κριτήρια διαρροής σε εφελκυσμό στο αποκλίνον επίπεδο (Chen and Han, 1988)

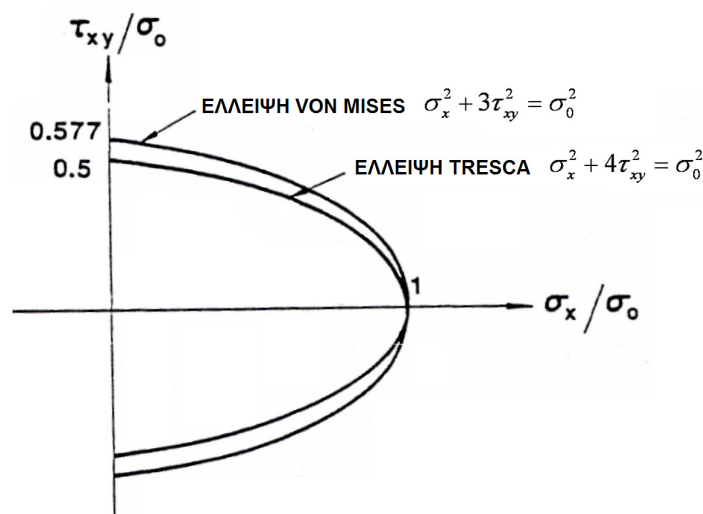
Η επιφάνεια διαρροής είναι ένα κανονικό εξαγωνικό πρίσμα σε χώρο κύριων τάσεων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.13.



**Σχήμα 3.13** Επιφάνειες διαρροής σε εφελκυσμό σε χώρο κύριων τάσεων ([http://en.wikipedia.org/wiki/Von\\_Mises\\_stress](http://en.wikipedia.org/wiki/Von_Mises_stress))

Στην ισοτροπία, δεν υπάρχει ανάγκη να σχεδιαστεί η επιφάνεια διαρροής σε ένα γενικό χώρο τάσης ( $\sigma_{ij}$ ). Παρόλα αυτά, κάποιες τομές συγκεκριμένων επιπέδων με την επιφάνεια σε ένα γενικό χώρο τάσης είναι ενδιαφέρουσες όπως η τομή με το  $\sigma_x - \tau_{xy}$  επίπεδο. Η τομή με το  $\sigma_x - \tau_{xy}$  επίπεδο, είναι ο γεωμετρικός τόπος διαρροής για συνδυασμένη ορθή και διατμητική τάση (Σχήμα 3.14), ο οποίος είναι μια έλλειψη με τύπο (Chen and Han, 1988):

$$\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2 \tag{3.44}$$



**Σχήμα 3.14** Τομή του επιπέδου  $\sigma_x - \tau_{xy}$  με την επιφάνεια διαρροής (Chen and Han, 1988)

### 3.2.2 Το Κριτήριο Διαρροής von Mises

Αν και το κριτήριο της μέγιστης διατμητικής τάσης είναι απλό, δεν απεικονίζει καμία επίδραση της ενδιάμεσης κύριας τάσης. Η οκταεδρική διατμητική τάση ή η ενέργεια παραμόρφωσης, είναι μια βολική εναλλακτική λύση στη μέγιστη διατμητική τάση ως η μεταβλητή – κλειδί που προκαλεί διαρροή σε υλικά που είναι ανεξάρτητα της πίεσης. Το κριτήριο von Mises, βασίζεται σε αυτή την εναλλακτική. Το κριτήριο αυτό, δηλώνει ότι η διαρροή ξεκινάει όταν η οκταεδρική διατμητική τάση φτάνει σε μια κρίσιμη τιμή  $k$ . Ισχύει:

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}k$$

Η οποία γράφεται και ως εξής:

$$f(J_2) = J_2 - k^2 = 0 \quad [3.45]$$

Ή σε όρους κύριων τάσεων:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6k^2$$

όπου  $k$  είναι το όριο διαρροής σε καθαρή διάτμηση.

Η διαρροή λαμβάνει χώρα σε μια μονοαξονική εφελκυστική δοκιμή όταν  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην παραπάνω εξίσωση ισχύει:

$$k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad [3.46]$$

Η εξίσωση αυτή αναπαριστά έναν κύλινδρο του οποίου η τομή με το αποκλίνον επίπεδο είναι ένας κύκλος με ακτίνα  $\rho = \sqrt{2}k$ .

Η σταθερά  $k$  για τα κριτήρια Tresca και von Mises, είναι το όριο διαρροής σε καθαρή διάτμηση. Ωστόσο, οι σχέσεις για το  $\sigma_0$  από τα δυο κριτήρια είναι διαφορετικές. Για να συμφωνούν τα δυο κριτήρια για μια απλή εφελκυστική δοκιμή με όριο διαρροής  $\sigma_0$ , ο λόγος του ορίου διαρροής σε διάτμηση,  $k$ , ανάμεσα στα δυο κριτήρια είναι  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  και γραφικά το εξάγωνο του Tresca είναι περιγεγραμμένο από τον κύκλο του von Mises όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.12. Ωστόσο για να συμφωνούν τα δυο κριτήρια για την περίπτωση της καθαρής διάτμησης (ίδια τιμή  $k$ ), ο κύκλος θα εγγράφει το εξάγωνο.

Το κριτήριο von Mises για διαξονική εντατική κατάσταση, αναπαριστάται από την τομή του κυλίνδρου με το επίπεδο  $\sigma_3 = 0$ . Έτσι είναι:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_0^2$$

η οποία είναι η έλλειψη που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.11.

Η τομή της επιφάνειας von Mises στο γενικό χώρο τάσεων με το  $\sigma_x - \tau_{xy}$  επίπεδο, είναι επίσης έλλειψη (όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.14) με τύπο (Chen and Han, 1988):

$$\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2 \quad [3.47]$$

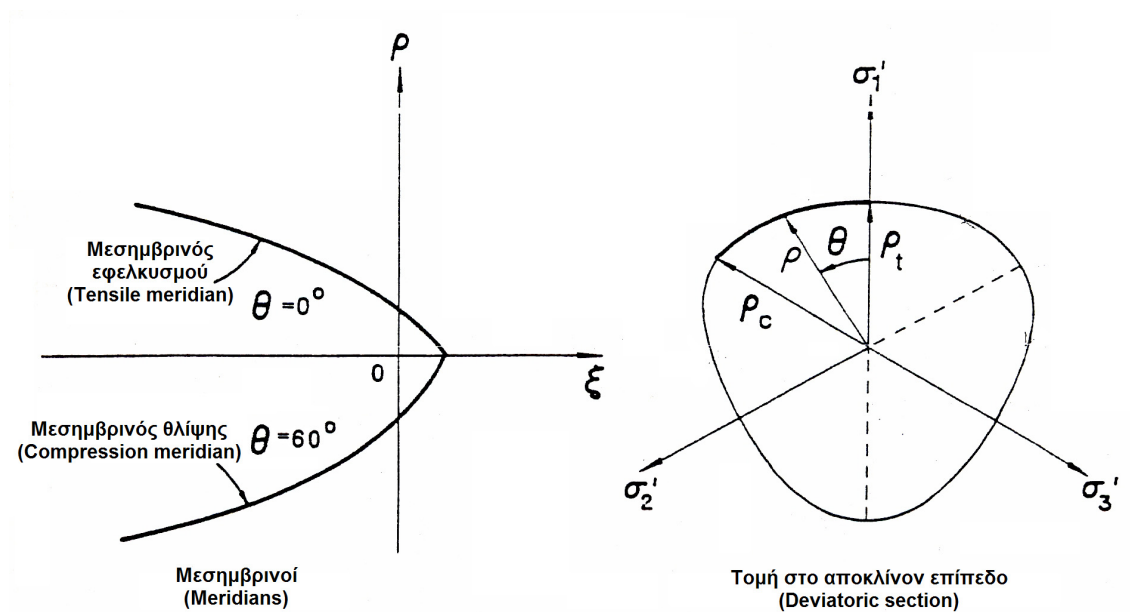
### 3.3 Κριτήρια Αστοχίας Εξαρτημένα από την Υδροστατική Πίεση

Η αστοχία σε ένα υλικό, ορίζεται συνήθως αναφορικά με τη φέρουσα ικανότητά του. Για τα τέλεια πλαστικά υλικά, η διαρροή σημαίνει αστοχία, έτσι το όριο διαρροής είναι και το όριο αντοχής.

Όπως και στην περίπτωση των κριτηρίων διαρροής, ένας γενικός τύπος για τα κριτήρια αστοχίας δίνεται από την εξίσωση:  $f(\sigma_{ij}, k_1, k_2, \dots) = 0$  για ανισότροπα υλικά και από τις εξισώσεις  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k_1, k_2, \dots) = 0$ ,  $f(I_1, J_2, J_3, k_1, k_2, \dots) = 0$  και  $f(\xi, \rho, \theta, k_1, k_2, \dots) = 0$  για τα ισότροπα. Η διαρροή για τα περισσότερα όλκιμα μέταλλα είναι ανεξάρτητη της υδροστατικής πίεσης, η συμπεριφορά όμως πολλών υλικών όπως τα εδάφη, τα πετρώματα και το σκυρόδεμα, χαρακτηρίζεται από την εξάρτησή τους από την υδροστατική πίεση. Έτσι οι αναλλοίωτες  $I_1$  και  $\xi$  δεν μπορούν να απαλειφτούν από τις εξισώσεις  $f(I_1, J_2, J_3, k_1, k_2, \dots) = 0$  και  $f(\xi, \rho, \theta, k_1, k_2, \dots) = 0$  αντίστοιχα.

Η γενική μορφή μιας επιφάνειας αστοχίας  $f(I_1, J_2, J_3) = 0$  ή  $f(\xi, \rho, \theta) = 0$  σε ένα τρισδιάστατο εντατικό χώρο μπορεί να περιγραφεί από τις εγκάρσιες τομές στα αποκλίνοντα επίπεδα και από τους μεσημβρινούς της (meridians) στα επίπεδα των μεσημβρινών (meridian planes) (Σχήμα 3.15). Οι εγκάρσιες τομές της επιφάνειας αστοχίας είναι οι τέμνουσες καμπύλες μεταξύ της επιφάνειας αυτής και του αποκλίνοντος επιπέδου το οποίο είναι κατακόρυφο στον υδροστατικό άξονα με  $\xi =$  σταθερό. Οι μεσημβρινοί της επιφάνειας αστοχίας είναι οι τέμνουσες καμπύλες μεταξύ της επιφάνειας και ενός μεσημβρινού επιπέδου που περιλαμβάνει τον υδροστατικό άξονα με  $\theta =$  σταθερό.

Για ένα ισότροπο υλικό οι τιμές 1, 2, 3 στους άξονες συντεταγμένων είναι αυθαίρετες. Αυτό σημαίνει ότι το σχήμα της εγκάρσιας τομής της επιφάνειας αστοχίας πρέπει να έχει συμμετρία και στους έξι τομείς της όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.15. Έτσι χρειάζεται μόνο η μελέτη στον τομέα από  $\theta = 0^\circ$  έως  $\theta = 60^\circ$  αφού οι άλλοι τομείς θα είναι γνωστοί λόγω συμμετρίας (Chen and Han, 1988).



Σχήμα 3.15 Γενικά σχήματα της επιφάνειας αστοχίας ισότροπων υλικών (Chen and Han, 1988)

### 3.3.1 Το Κριτήριο Αστοχίας Rankine

Το κριτήριο του Rankine ή αλλιώς το κριτήριο της μέγιστης εφελκυστικής τάσης, καθορίζει εάν ένα ψαθυρό υλικό αστοχεί σε εφελκυσμό. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, η ψαθυρή αστοχία λαμβάνει χώρα όταν η μέγιστη κύρια τάση σε ένα σημείο στο υλικό ισούται με την εφελκυστική αντοχή  $\sigma_0$  όπως αυτή λαμβάνεται από μια απλή εφελκυστική δοκιμή, ανεξαρτήτως των ορθών ή διατμητικών τάσεων που λαμβάνουν χώρα σε άλλα επίπεδα που περνούν από το σημείο αυτό. Οι εξισώσεις για την επιφάνεια αστοχίας που ορίζεται από αυτό το κριτήριο είναι:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$$

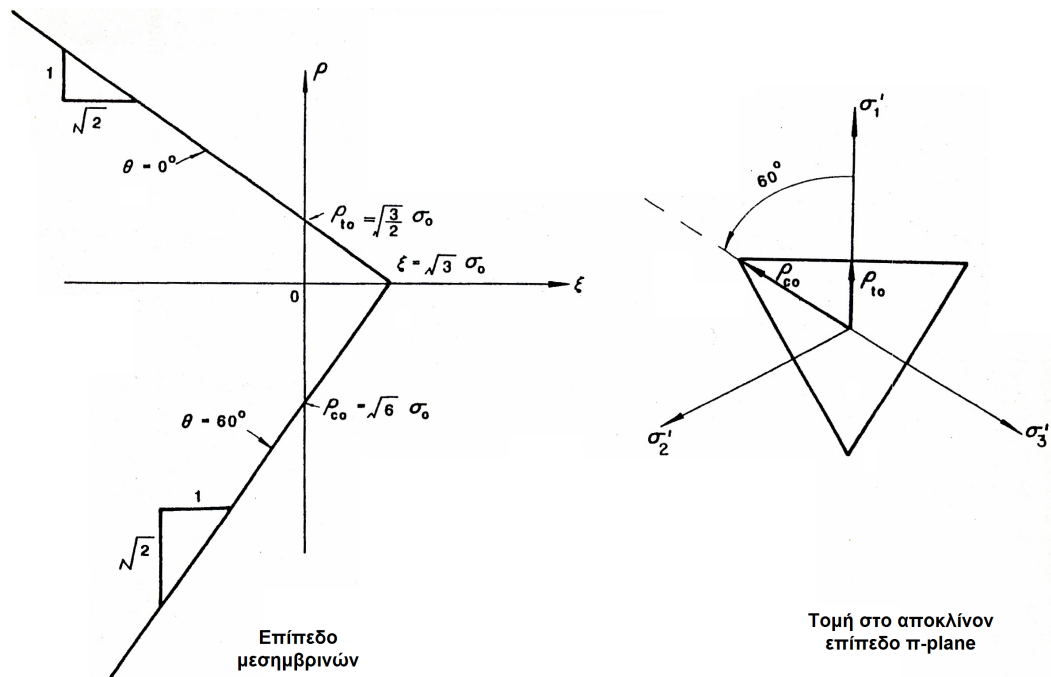
οι οποίες καταλήγουν σε τρία επίπεδα κατακόρυφα στους άξονες  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  και  $\sigma_3$  αντίστοιχα. Αυτή η επιφάνεια αστοχίας καλείται ως επιφάνεια αστοχίας – εφελκυσμού (tension – failure surface) ή απλά ως αποκοπή εφελκυσμού (tension cutoff). Όταν χρησιμοποιούνται οι μεταβλητές  $I_1$ ,  $J_2$ ,  $\theta$  ή  $\xi$ ,  $\rho$ ,  $\theta$ , η επιφάνεια αστοχίας μπορεί να περιγραφεί πλήρως από τις παρακάτω εξισώσεις για  $(0 \leq \theta \leq 60^\circ)$ :

$$f(I_1, J_2, \theta) = 2\sqrt{3}J_2 \cos \theta + I_1 - 3\sigma_0 = 0 \quad [3.48]$$

ή

$$f(\xi, \rho, \theta) = \sqrt{2}\rho \cos \theta + \xi - \sqrt{3}\sigma_0 = 0$$

Το Σχήμα 3.16, απεικονίζει το σχήμα της εγκάρσιας τομής στο αποκλίνον επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων ( $\pi$ -plane) ( $\xi = 0$ ) και τον εφελκυστικό ( $\theta = 0^\circ$ ) και θλιπτικό μεσημβρινό ( $\theta = 60^\circ$ ) της επιφάνειας αστοχίας (Chen and Han, 1988).



**Σχήμα 3.16** Σχήματα της επιφάνειας αστοχίας του κριτηρίου Rankine (Chen and Han, 1988)

Όπως είναι γνωστό, υλικά όπως τα εδάφη, τα πετρώματα και το σκυρόδεμα, έχουν πολύ καλή θλιπτική αντοχή. Υπό θλιπτική φόρτιση με περιορισμένη πίεση, αυτού του είδους τα υλικά μπορεί να επιδείξουν ακόμα και όλκιμη και διατμητική συμπεριφορά αστοχίας. Ωστόσο, υπό εφελκυστική φόρτιση, παρατηρείται ψαθυρή συμπεριφορά αστοχίας ενώ η αντοχή σε εφελκυσμό είναι πολύ χαμηλή. Συνεπώς, το κριτήριο αστοχίας Rankine, συνδυάζεται μερικές φορές με τα κριτήρια Tresca και von Mises για να προσεγγιστεί η συμπεριφορά αστοχίας τέτοιων υλικών. Τα συνδυασμένα αυτά κριτήρια, καλούνται ως Tresca ή von Mises κριτήρια με αποκοπή εφελκυσμού (tension cutoff) και οι γραφικές τους αναπαραστάσεις αποτελούνται από δυο επιφάνειες, που αντιστοιχούν στη συνδυασμένη συμπεριφορά διατμητικής αστοχίας σε θλιπτική και εφελκυστική αστοχία σε εφελκυσμό (Chen and Han, 1988).

### 3.3.2 Το Γραμμικό Κριτήριο Αστοχίας Mohr – Coulomb

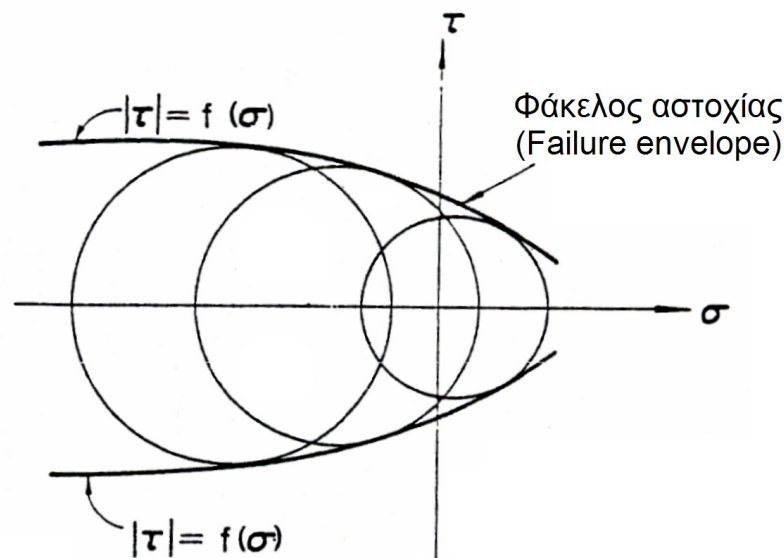
Το κριτήριο του Mohr, μπορεί να θεωρηθεί σαν μια γενικευμένη εκδοχή του κριτηρίου του Tresca. Και τα δυο κριτήρια βασίζονται στη θεώρηση ότι η μέγιστη διατμητική τάση είναι το μόνο κρίσιμο μέγεθος στην επικείμενη αστοχία. Ωστόσο, ενώ το κριτήριο του Tresca θεωρεί ότι η κρίσιμη τιμή της διατμητικής τάσης είναι σταθερή,

το κριτήριο του Mohr, θεωρεί ότι η διατμητική τάση  $\tau$  σε ένα επίπεδο, είναι συνάρτηση της ορθής τάσης  $\sigma$  στο ίδιο επίπεδο σε ένα σημείο. Έτσι:

$$|\tau| = f(\sigma) \quad [3.49]$$

όπου  $f(\sigma)$  είναι μια πειραματικά ορισμένη συνάρτηση.

Όσον αφορά τη γραφική αναπαράσταση της εντατικής κατάστασης, η συνάρτηση [3.49] υποδεικνύει ότι η αστοχία ενός υλικού θα συμβεί εάν η ακτίνα του μεγαλύτερου κύριου κύκλου εφάπτεται με την καμπύλη του φακέλου  $f(\sigma)$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.17. Σε αντίθεση με το κριτήριο του Tresca, το κριτήριο του Mohr, έχει προβλέψει για την επίδραση της μέσης τάσης ή της υδροστατικής (Chen and Han, 1988).



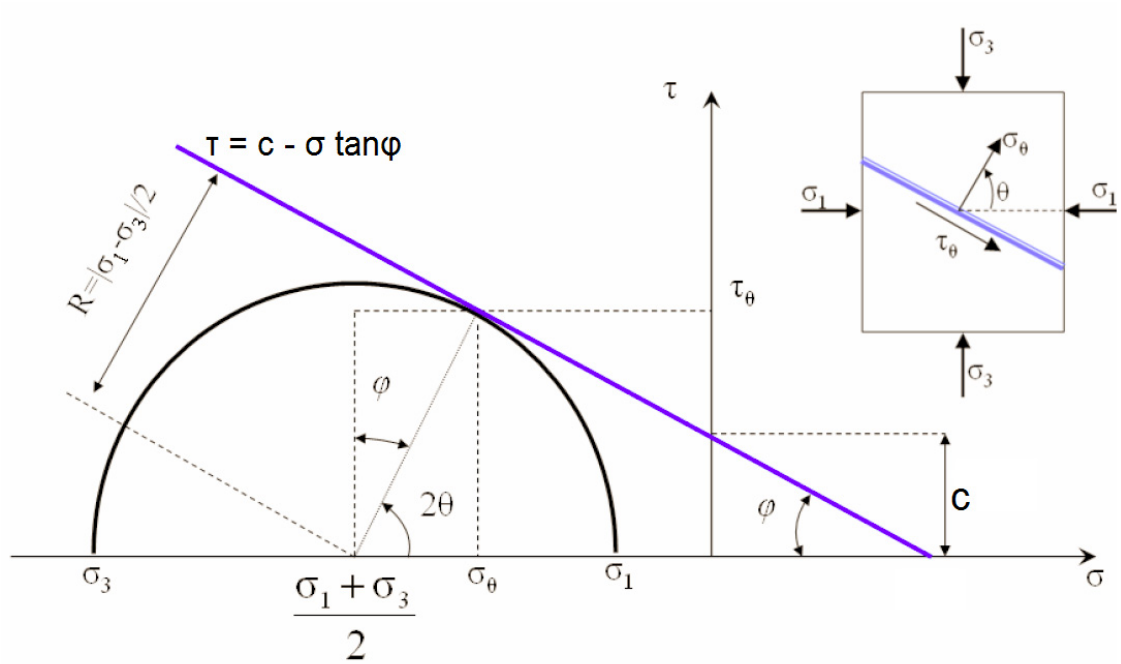
Σχήμα 3.17 Γραφική αναπαράσταση του κριτηρίου του Mohr (Chen and Han, 1988)

Η απλούστερη μορφή του φακέλου του Mohr  $f(\sigma)$ , είναι μια ευθεία γραμμή, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.18 (έχει επιλεγεί ημικύκλιο λόγω συμμετρίας). Η εξίσωση για τον φάκελο αστοχίας με την ευθεία γραμμή είναι γνωστή ως η εξίσωση του Coulomb:

$$|\tau| = c - \sigma \tan \varphi \quad [3.50]$$

όπου  $c$  είναι η συνοχή και  $\varphi$  η γωνία εσωτερικής τριβής. Και τα δυο μεγέθη είναι σταθερές του υλικού και καθορίζονται πειραματικώς. Το κριτήριο αστοχίας που σχετίζεται με την παραπάνω εξίσωση ονομάζεται γραμμικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb.





**Σχήμα 3.18** Γραμμικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb σε  $\tau - \sigma$  (Λιαράκος, 2008)

Στην ειδική περίπτωση υλικών χωρίς τριβή για τα οποία ισχύει  $\varphi = 0$ , η εξίσωση  $|\tau| = c - \sigma \tan \varphi$  υποβαθμίζεται στο κριτήριο της μέγιστης διατμητικής τάσης του Tresca,  $\tau = c$  και η συνοχή γίνεται ίση με το όριο διαρροής σε καθαρή διάτμηση  $c = k$ .

Το γραμμικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb από την εξίσωση  $|\tau| = c - \sigma \tan \varphi$ , μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \cos \varphi = c - \left[ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \right] \tan \varphi$$

ή

$$\sigma_1 \frac{1 + \sin \varphi}{2c \cos \varphi} - \sigma_3 \frac{1 - \sin \varphi}{2c \cos \varphi} = 1 \quad [3.51]$$

Αν οριστούν:

$$f'_c = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad \text{και} \quad f'_t = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad [3.52]$$

Τότε η εξίσωση [3.51], μπορεί να γραφεί:

$$\frac{\sigma_1}{f'_t} - \frac{\sigma_3}{f'_c} = 1 \quad \text{για} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad [3.53]$$

Από την εξίσωση [3.53],  $f'_t$  είναι η αντοχή σε απλό εφελκυσμό και  $f'_c$  είναι η αντοχή σε απλή θλίψη. Μερικές φορές είναι χρήσιμη η εισαγωγή μιας παραμέτρου  $m$  όπου:

$$m = \frac{f'_c}{f'_t} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad [3.54]$$

Έτσι ισχύει:

$$m\sigma_1 - \sigma_3 = f'_c \text{ για } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

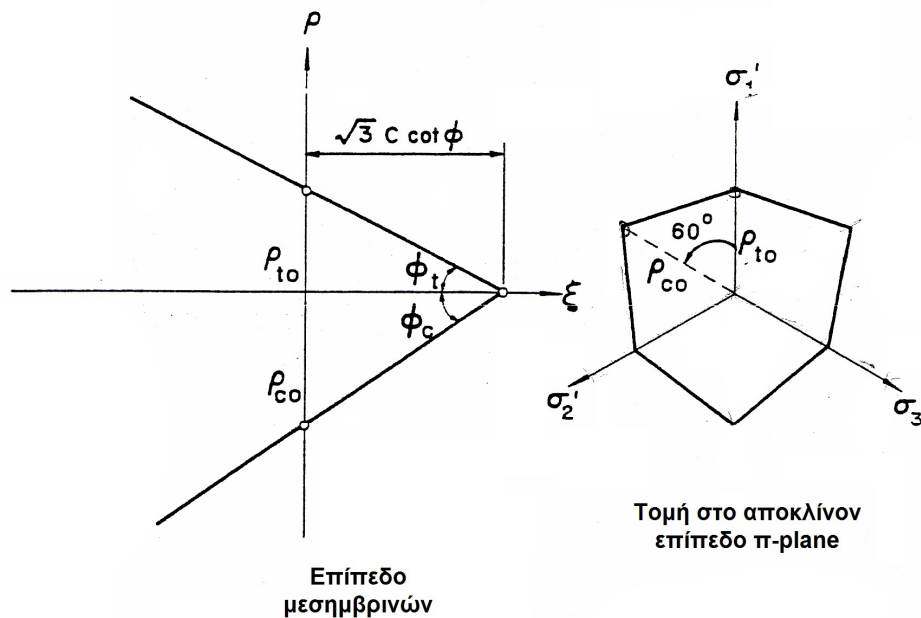
Το σχήμα της τρισδιάστατης επιφάνειας αστοχίας του γραμμικού κριτηρίου αστοχίας Mohr – Coulomb μπορεί να περιγραφεί πλήρως από τις παρακάτω εξισώσεις για ( $0 \leq \theta \leq 60^\circ$ ):

$$f(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3} I_1 \sin \varphi + \sqrt{J_2} \sin \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \varphi - c \cos \varphi = 0 \quad [3.55]$$

ή αλλιώς:

$$f(\xi, \rho, \theta) = \sqrt{2}\xi \sin \varphi + \sqrt{3}\rho \sin \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) + \rho \cos \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \varphi - \sqrt{6}c \cos \varphi = 0$$

Στον χώρο κύριων τάσεων τα παραπάνω δίνουν μια μη κανονική εξαγωνική πυραμίδα. Οι μεσημβρινοί της είναι ευθείες γραμμές και η τομή της στο  $\pi$ -plane είναι ένα μη κανονικό εξάγωνο (Σχήμα 3.19) (Chen and Han, 1988).



**Σχήμα 3.19** Σχήματα της επιφάνειας αστοχίας του γραμμικού κριτηρίου Mohr – Coulomb (Chen and Han, 1988)

### 3.3.3 Το Παραβολικό Κριτήριο Αστοχίας Mohr – Coulomb

Το παραβολικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb (Σχήμα 3.20), εκφράζεται μαθηματικά ως εξής (MSC.Marc Volume A, 2006):

$$f = \beta\sqrt{3}\sigma_0 I_1 + 3J_2 - \sigma_0^2 = 0 \quad [3.56]$$

όπου

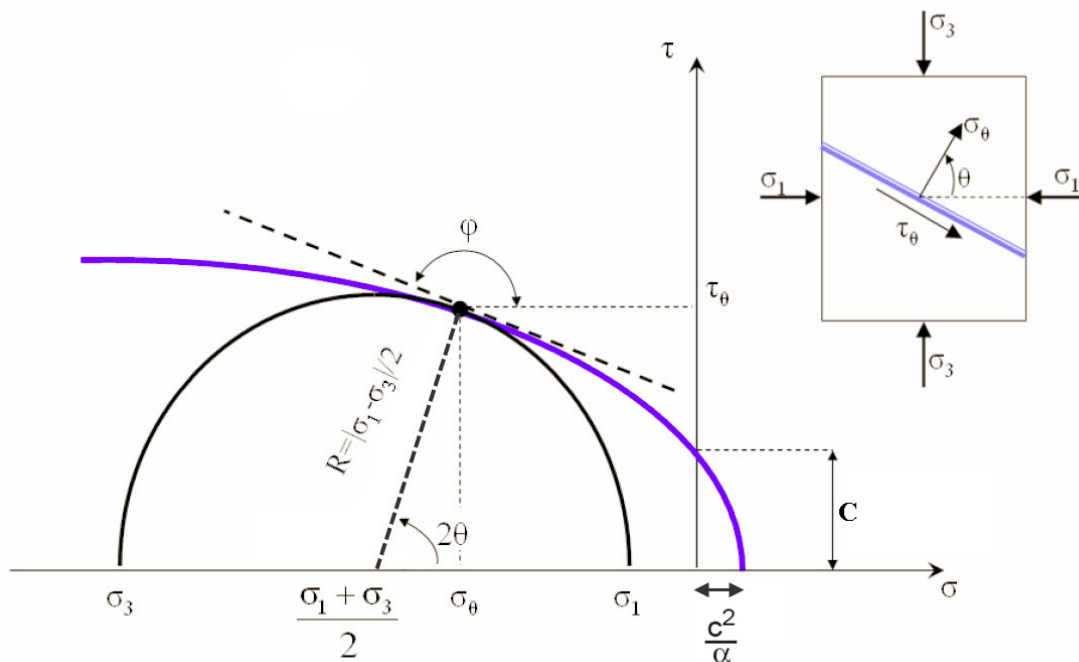
$\sigma_0$  η τάση διαρροής (yield stress) που ισούται με  $\sigma_0 = \sqrt{3\left(c^2 - \frac{\alpha^2}{3}\right)}$  (όπου  $c$  η

συνοχή)

$$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{3(3c^2 - \alpha^2)}} \text{ και}$$

$$a = c \tan \varphi \text{ ή}$$

$$\alpha = \frac{c}{\cos \varphi} \quad (\text{όπου } \varphi \text{ η γωνία εσωτερικής τριβής})$$



Σχήμα 3.20 Παραβολικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb σε  $\tau - \sigma$  (Λιαράκος, 2008)

### 3.3.4 Το Κριτήριο Αστοχίας Drucker – Prager

Το γραμμικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb, μπορεί όπως προαναφέρθηκε να χαρακτηριστεί ως γενίκευση του κριτηρίου του Tresca παίρνοντας υπόψη την υδροστατική πίεση. Το κριτήριο αστοχίας Drucker – Prager είναι μια απλή τροποποίηση του κριτηρίου von Mises, όπου η επίδραση της συνιστώσας της υδροστατικής τάσης στην αστοχία, γίνεται με την συμπερίληψη ενός επιπλέον όρου στην έκφραση von Mises έτσι ώστε:

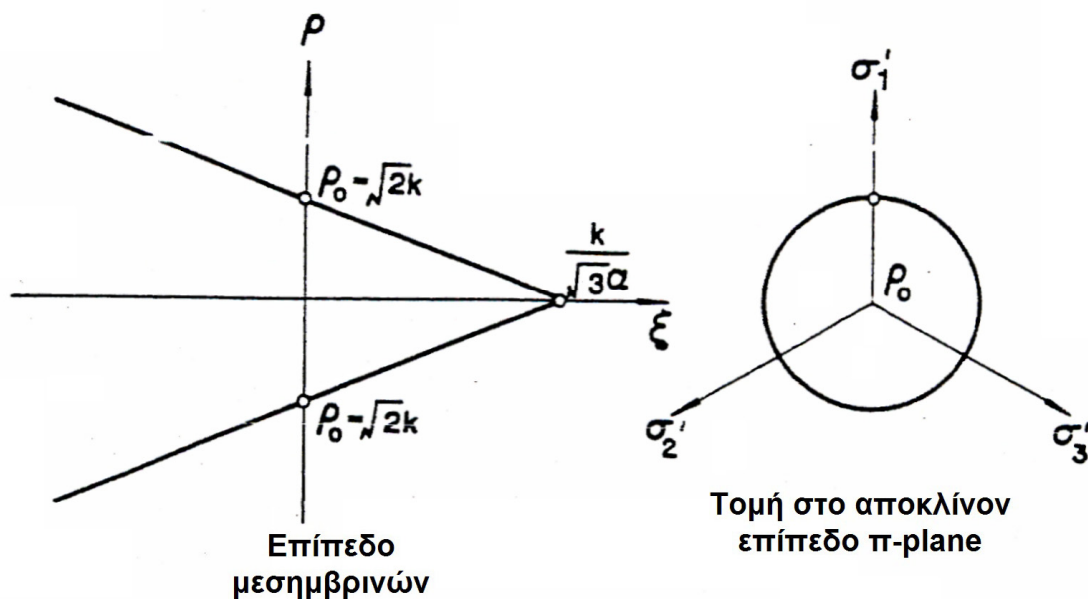
$$f(I_1, J_2) = aI_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad [3.57]$$

ή σε ποσότητες  $\xi$ ,  $\rho$ :

$$f(\xi, \rho) = \sqrt{6}\alpha\xi + \rho - \sqrt{2}k$$

όπου  $\alpha$  και  $k$  είναι σταθερές του υλικού. Όταν το  $\alpha$  είναι μηδέν, το κριτήριο υποβιβάζεται σε αυτό του von Mises (Chen and Han, 1988).

Η επιφάνεια αστοχίας σε χώρο κύριων τάσεων είναι ένας κυκλικός κώνος. Οι μεσημβρινοί και η τομή στο  $\pi$ -plane, φαίνονται στο Σχήμα 3.21.



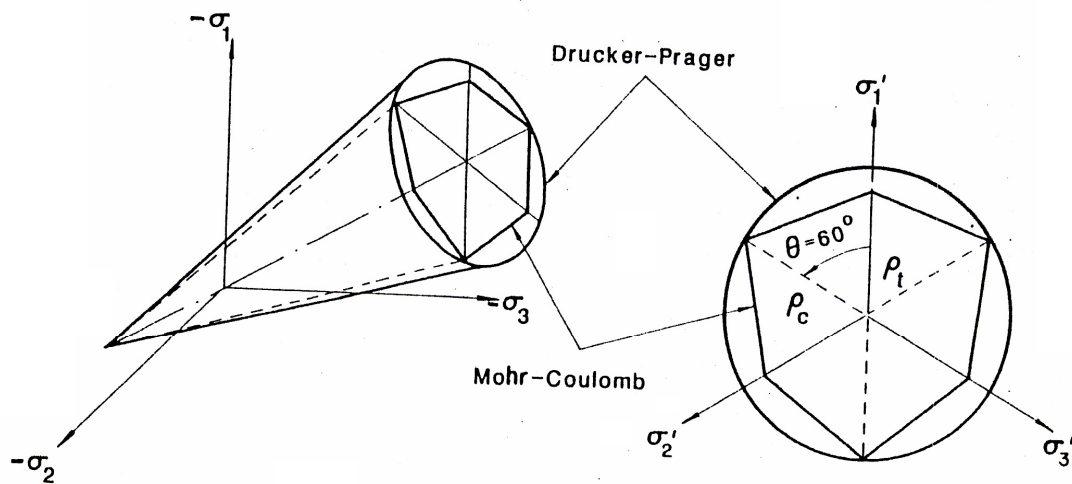
**Σχήμα 3.21** Σχήματα της επιφάνειας αστοχίας του κριτηρίου Drucker – Prager (Chen and Han, 1988)

Η εξαγωνική επιφάνεια αστοχίας του Mohr – Coulomb, είναι βολική από μαθηματικής άποψης μόνο όταν είναι γνωστό ποια από τις έξι πλευρές θα χρησιμοποιηθεί. Επίσης οι γωνίες του εξαγώνου μπορεί να δημιουργήσουν σημαντική δυσκολία όσον αφορά την επίλυση με αριθμητικές μεθόδους. Το κριτήριο Drucker –

Prager, σαν μια λεία προσέγγιση του Mohr – Coulomb, μπορεί να ταιριάζει με αυτό προσαρμόζοντας το μέγεθος του κώνου. Για παράδειγμα, για να ταιριάζει ο κύκλος του Drucker – Prager, με τις εξωτερικές γωνίες του εξαγώνου του Mohr – Coulomb πρέπει οι δυο επιφάνειες να συμπίπτουν κατά μήκος του μεσημβρινού θλίψης  $\rho_c$  όπου  $\theta = 60^\circ$ . Τότε οι σταθερές  $a$  και  $k$  σχετίζονται με τις σταθερές  $c$  και  $\varphi$  ως εξής:

$$a = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \text{ και } k = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad [3.58]$$

Ο κώνος που αντιστοιχεί στις παραπάνω σταθερές, περιγράφει την εξαγωνική πυραμίδα και αντιπροσωπεύει ένα εξωτερικό όριο στην επιφάνεια αστοχίας Mohr – Coulomb (Σχήμα 3.22).



**Σχήμα 3.22** Συνδυασμός κριτηρίων Drucker – Prager και Mohr – Coulomb (Chen and Han, 1988)

Από την άλλη πλευρά, ο εσωτερικός κώνος, περνάει από το μεσημβρινό εφελκυσμού  $\rho_t$  όπου  $\theta = 0^\circ$  και οι σταθερές παίρνουν την τιμή (Chen and Han, 1988):

$$a = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)} \text{ και } k = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)} \quad [3.59]$$

### 3.3.5 Το Κριτήριο Αστοχίας Buyukozturk

Το κριτήριο του Buyukozturk αποτελεί στην ουσία μια τροποποιημένη μορφή του παραβολικού κριτηρίου Mohr – Coulomb. Με την τροποποίηση αυτή, έχει εισαχθεί στο κριτήριο μια παράμετρος μορφής, που λαμβάνει υπόψη την ενισχυμένη παρουσία της ορθής τάσης στο μηχανισμό αστοχίας. Ουσιαστικά το συγκεκριμένο κριτήριο είναι ένα κριτήριο που μελετά τη διατμητική αστοχία που όμως με την εισαγωγή παραμέτρων

μορφής είναι δυνατό να περιγράψει ικανοποιητικά και την περίπτωση της διατμητικής αστοχίας (Λιαράκος, 2008).

Η μαθηματική του έκφραση έχει ως εξής (MSC.Marc Volume A, 2006):

$$f = \beta\sqrt{3}\sigma_0 I_1 + \gamma I_1^2 + 3J_2 - \sigma_0^2 \quad [3.60]$$

όπου οι όροι  $\sigma_0$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  είναι πειραματικές σταθερές του υλικού.

Ειδικότερα, η σταθερά  $\gamma$  είναι η παράμετρος μορφής, η τιμή της οποίας επιλέγεται κατάλληλα ώστε να επιταχύνεται η βέλτιστη προσαρμογή του κριτηρίου αστοχίας στα πειραματικά δεδομένα. Η βέλτιστη προσαρμογή της επιφάνειας αστοχίας στα πειραματικά δεδομένα επιταχύνεται για  $\gamma = 0,2$  (Λιαράκος, 2008). Για  $\gamma = 0$ , το κριτήριο αστοχίας του Buyukozturk ανάγεται στο παραβολικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb (MSC.Marc Volume A, 2006).

## Κεφάλαιο 4

### Μοντελοποίηση Σηράγγων

Η μοντελοποίηση των σηράγγων, γίνεται με τη χρήση αριθμητικών μεθόδων. Οι κυριότερες από αυτές είναι: η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (finite element method), η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (finite difference method), η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων (boundary element method) και η μέθοδος των διακριτών στοιχείων (distinct element method). Στην παρούσα διατριβή, έγινε χρήση μόνο της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

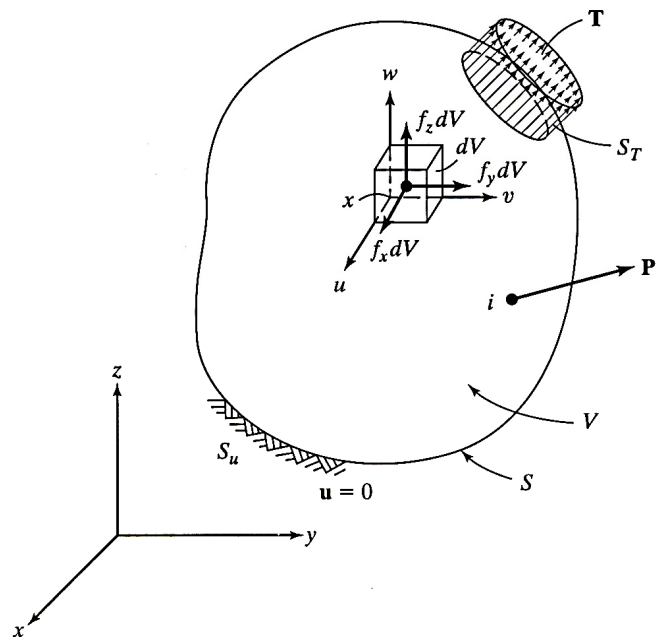
Αν και ο άνθρωπος θεωρείται επιτυχημένος κατασκευαστής σηράγγων πολύ πριν την εμφάνιση των αριθμητικών μεθόδων, η μοντελοποίηση και η προσομοίωση των σηράγγων με τη χρήση των μεθόδων αυτών είναι ιδιαίτερα απαραίτητη σε περιπτώσεις σηράγγων που πρόκειται να κατασκευαστούν σε προβληματικά πετρώματα ή εδάφη, των οποίων η συμπεριφορά μπορεί να θεωρηθεί ανισότροπη και μη γραμμική. Επίσης η πολυπλοκότητα της γεωμετρίας ενός υπόγειου ανοίγματος, ιδίως όταν μεταβάλλονται τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κατά το στάδιο της εκσκαφής, απαιτεί τη μοντελοποίηση του ανοίγματος με εξειδικευμένα αριθμητικά μοντέλα. Αυτά είναι σε θέση να αντιμετωπίσουν ανομοιογενή εδάφη και πετρώματα, ασυνέχειες, ρήγματα και υλικά με μεταβαλλόμενες ιδιότητες. Άλλωστε και η αλληλεπίδραση του γεωυλικού με το σύστημα υποστήριξης είναι μη γραμμικής μορφής όπως και μη γραμμική μπορεί να είναι και η συμπεριφορά του εδάφους, των πετρωμάτων, του σκυροδέματος, των αγκυρίων και των λοιπών στοιχείων της κατασκευής (Αγιουτάντης, 2002).

Στο κεφάλαιο αυτό, θα αναλυθούν κάποιες βασικές αρχές της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων με έμφαση στην δισδιάστατη ανάλυση (τύποι στοιχείων, μοντέλα συμπεριφοράς υλικών, επίπεδη τάση, επίπεδη παραμόρφωση) και θα περιγραφούν οι έννοιες που διέπουν την ελαστοπλαστική ανάλυση καθώς και άλλα στοιχεία που είναι χρήσιμα για την μοντελοποίηση σηράγγων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

## 4.1 Θεμελιώδεις Έννοιες

### 4.1.1 Τάσεις και ισορροπία

Έστω ένα τρισδιάστατο σώμα με όγκο  $V$  και επιφάνεια  $S$ , όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.1. Τα σημεία προσδιορίζονται με συντεταγμένες  $x, y, z$ . Το σύνορο περιορίζεται σε κάποια περιοχή που ορίζεται η μετατόπιση. Σε μέρος του συνόρου εφαρμόζεται εφελκυστική δύναμη η οποία κατανέμεται ανά μονάδα επιφάνειας  $T$ , ενώ το σώμα παραμορφώνεται κάτω από την επίδραση αυτής της δύναμης.



**Σχήμα 4.1** Σώμα τριών διαστάσεων με επιβαλλόμενη δύναμη (Chandrupatla and Belegundu, 2002)

Η παραμόρφωση του σημείου  $x = [x, y, z]^T$ , δίνεται με τις τρεις συνιστώσες της μετατόπισης:  $u = [u, v, w]^T$ .

Η κατανεμημένη δύναμη ανά μονάδα όγκου (όπως για παράδειγμα το βάρος ανά μονάδα όγκου) είναι το διάνυσμα  $f$  για το οποίο ισχύει:  $f = [f_x, f_y, f_z]^T$ .

Η δύναμη που ενεργεί επί του στοιχειώδους όγκου  $dV$ , φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Για τον εφελκυσμό στην επιφάνεια ισχύει:  $T = [T_x, T_y, T_z]^T$ . Παραδείγματα εφελκυσμού είναι η κατανεμημένη δύναμη επαφής και η δράση της πίεσης.

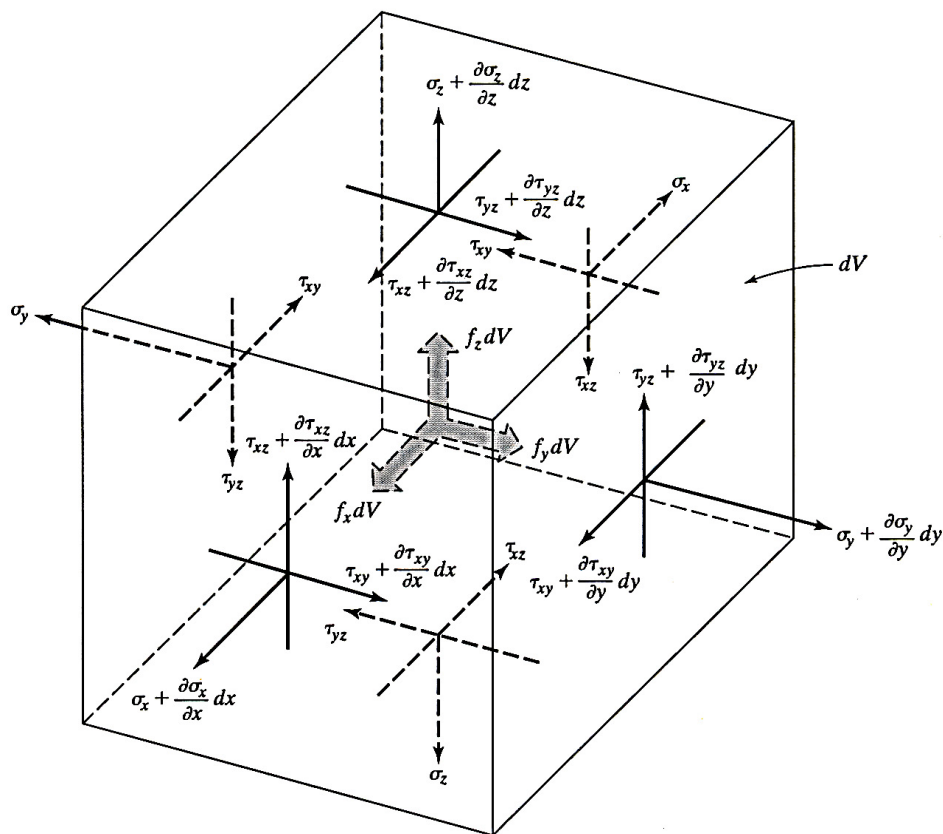
Ένα φορτίο  $P$  το οποίο ενεργεί στο σημείο  $i$  παριστάνεται ως εξής:  $P_i = [P_x, P_y, P_z]^T_i$ . Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στο σημείο αυτό η τάση παριστάνεται με τον ταυνοστή τάσης που είναι ένα συμμετρικό μητρώο  $3 \times 3$  διότι



από τις συνθήκες ισορροπίας δυνάμεων (και όταν δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές), προκύπτει ότι οι διατμητικές συνιστώσες του είναι συμμετρικές. Έτσι η τάση μπορεί να παρασταθεί με τις έξι ανεξάρτητες συνιστώσες ως εξής:  $\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T$ .

Λαμβάνοντας την ισορροπία του στοιχειώδους όγκου του Σχήματος 4.2 και με τον υπολογισμό των δυνάμεων στις επιφάνειες (πολλαπλασιάζοντας τις τάσεις με τις αντίστοιχες επιφάνειες), για  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$  και  $\Sigma F_z = 0$  (ισχύει  $dV = d_x d_y d_z$ ), προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις ισορροπίας (Chandrupatla and Belegundu, 2002):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned} \quad [4.1]$$



Σχήμα 4.2 Ισορροπία στοιχειώδους όγκου (Chandrupatla and Belegundu, 2002)

### 4.1.2 Συνοριακές Συνθήκες

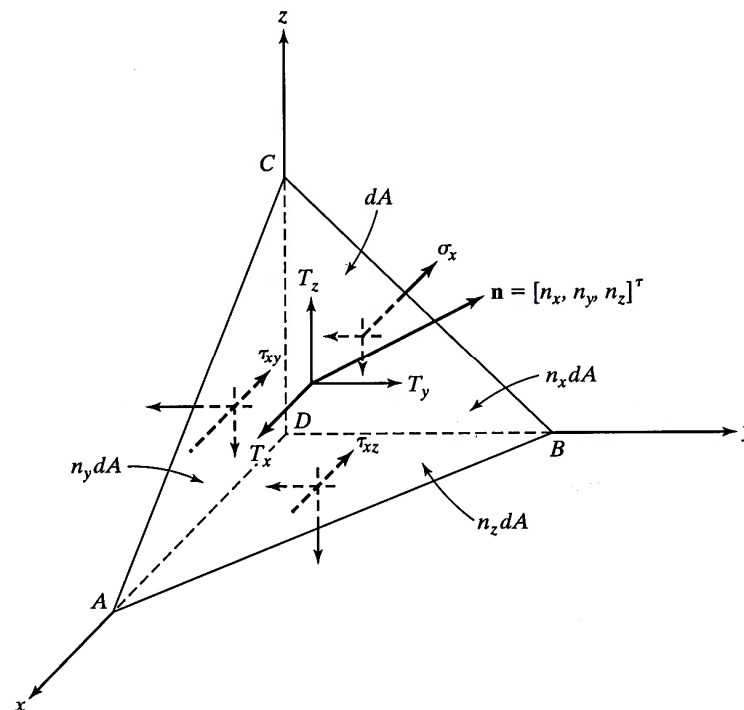
Στο Σχήμα 4.1, υπάρχουν συνοριακές συνθήκες μετατόπισης και συνθήκες επιφανειακής φόρτισης. Εάν η μετατόπιση  $u$ , καθορίζεται σε μέρος του συνόρου  $S_u$ , εκεί ισχύει  $u = 0$ .

Βέβαια, μπορούν να θεωρηθούν συνοριακές συνθήκες όπως  $u = a$  όπου  $a$  μια δεδομένη μετατόπιση.

Το Σχήμα 4.3, απεικονίζει ένα στοιχειώδες τετράεδρο ABCD σε ισορροπία. Τα DA, DB και DC είναι παράλληλα προς τους άξονες  $x$ ,  $y$  και  $z$  αντίστοιχα ενώ  $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$  είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην περιοχή ABC που συμβολίζεται με  $dA$ . Από την ισορροπία κατά μήκος των διευθύνσεων των τριών αξόνων ισχύει (Chandrupatla and Belegundu, 2002):

$$\begin{aligned}\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= T_x \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z &= T_y \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z &= T_z\end{aligned}\quad [4.2]$$

Οι παραπάνω συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται επί του συνόρου  $S_T$ , όπου εφαρμόζεται ο εφελκυσμός.



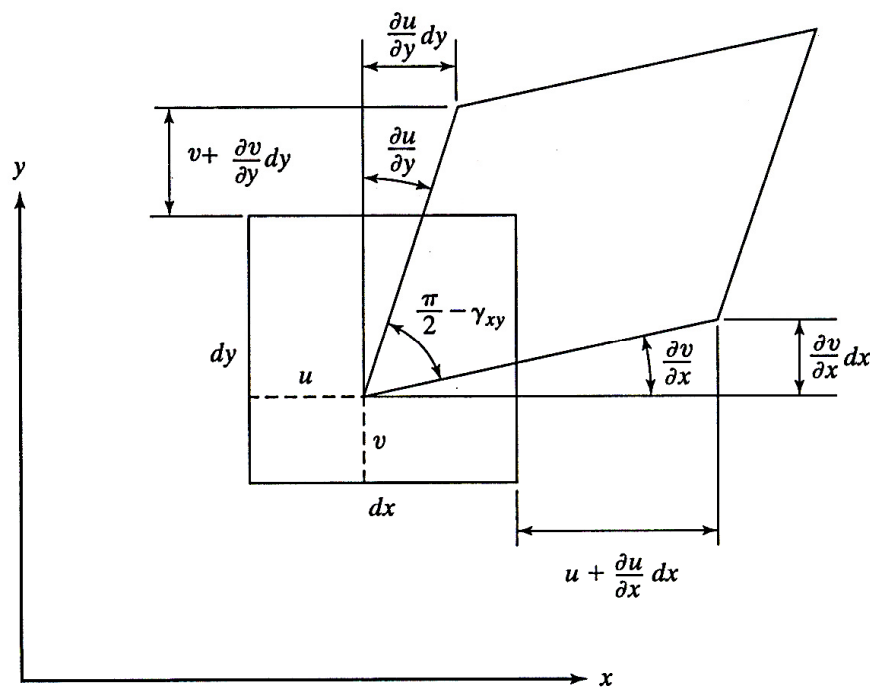
Σχήμα 4.3 Στοιχειώδης όγκος στην επιφάνεια (Chandrupatla and Belegundu, 2002)

### 4.1.3 Σχέσεις Τάσης – Παραμόρφωσης

Η πλήρης παραμορφωσιακή κατάσταση ενός σημείου μπορεί να αποδοθεί από τον τανυστή παραμόρφωσης για τον οποίο ισχύουν σχεδόν αυτά που ισχύουν και για τους τανυστές τάσης. Η μελέτη των τανυστών αυτών βέβαια είναι περισσότερο πολύπλοκη διότι στην μελέτη των παραμορφώσεων εμπλέκονται δυο καταστάσεις του σώματος. Το αρχικό ή απαραμόρφωτο σώμα και το τελικό ή παραμορφωμένο σώμα (Αγιουτάντης, 2002).

Οι παραμορφώσεις, μπορούν να παρασταθούν (όπως και η τάση), με τις έξι ανεξάρτητες συνιστώσες ως εξής:  $\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}]^T$ , όπου  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  και  $\varepsilon_z$  οι ορθές παραμορφώσεις και  $\gamma_{yz}, \gamma_{xz}$  και  $\gamma_{xy}$  οι διατμητικές παραμορφώσεις.

Το Σχήμα 4.4, δίνει την παραμόρφωση της επιφάνειας  $dx - dy$  για μικρές παραμορφώσεις (Chandrupatla and Belegundu, 2002).



Σχήμα 4.4 Παραμορφωμένο στοιχείο επιφάνειας (Chandrupatla and Belegundu, 2002)

Στα γραμμικά ελαστικά υλικά, οι σχέσεις τάσης – παραμόρφωσης, προέρχονται από τον γενικευμένο κανόνα του Hooke. Για τα ισότροπα υλικά, οι δυο ιδιότητες των υλικών είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young  $E$  και ο λόγος του Poisson  $\nu$ . Για ένα στοιχειώδη κύβο μέσα σε ένα σώμα, ο κανόνας του Hooke δίνει (Chandrupatla and Belegundu, 2002):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\
\gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Το μέτρο διάτμησης ή μέτρο δυσκαμψίας (ή ακαμψίας),  $G$ , δίνεται από τον τύπο:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4.4}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση [4.4] στις σχέσεις [4.3], προκύπτει:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{(1-2\nu)}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{4.5}$$

Η παραπάνω σχέση, μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\sigma = D\varepsilon \tag{4.6}$$

όπου  $D$  είναι το συμμετρικό μητρώο (6x6) που εξαρτάται από τις ελαστικές σταθερές του σώματος και το οποίο δίνεται από τον τύπο:

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Με μορφή τανυστών, η σχέση [4.6] γράφεται ως εξής (Chen and Han, 1988):

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{4.8}$$

Εφόσον οι τανυστές  $\sigma_{ij}$  και  $\varepsilon_{kl}$  είναι δεύτερης τάξης, συνεπάγεται ότι ο τανυστής  $D_{ijkl}$  είναι τέταρτης τάξης οπότε ότι έχει  $3^4 = 81$  όρους. Όμως λόγω του ότι οι τανυστές  $\sigma_{ij}$  και  $\varepsilon_{kl}$  είναι συμμετρικοί, ο μέγιστος αριθμός των ανεξάρτητων σταθερών όρων είναι 36 (έτσι προκύπτει και το συμμετρικό μητρώο 6x6) .

Στο σημείο αυτό, διακρίνονται ειδικές περιπτώσεις για μια διάσταση και για δυο διαστάσεις.

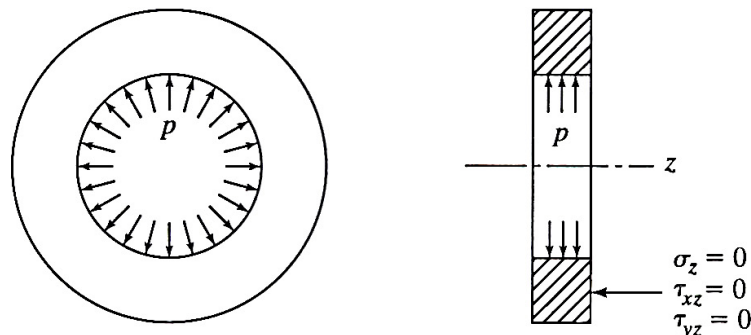
Σε μια διάσταση, υπάρχει κάθετη τάση  $\sigma$  κατά μήκος του  $x$  και η αντίστοιχη κάθετη παραμόρφωση  $\varepsilon$ . Έτσι η σχέση  $\sigma = D\varepsilon$ , γράφεται απλώς:

$$\sigma = E\varepsilon \quad [4.9]$$

Στις δυο διαστάσεις, το πρόβλημα μοντελοποιείται ως επίπεδη τάση και επίπεδη παραμόρφωση. Αυτές θα περιγραφούν στις επόμενες υποενότητες.

#### 4.1.4 Επίπεδη Τάση

Στην περίπτωση που η τρίτη διάσταση  $z$  ενός σώματος είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις άλλες δυο και τα φορτία που δέχεται το σώμα ανήκουν στο επίπεδο των δυο σημαντικών διαστάσεων (επίπεδο  $x, y$ ), μπορεί να θεωρηθεί ότι οι συνιστώσες τάσεις κατά τον τρίτο άξονα είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με τις συνιστώσες κατά το επίπεδο φόρτισης (Σχήμα 4.5). Η θεώρηση αυτή ονομάζεται θεώρηση της επίπεδης τάσης (plane stress) (Αγιουτάντης, 2002).



Σχήμα 4.5 Επίπεδη τάση (Chandrupatla and Belegundu, 2002)

Στο Σχήμα 4.5, οι τάσεις  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  και  $\tau_{yz}$  λαμβάνονται ως μηδενικές ενώ  $\varepsilon_z \neq 0$ . Οι σχέσεις του κανόνα του Hooke, δίνουν (Chandrupatla and Belegundu, 2002):

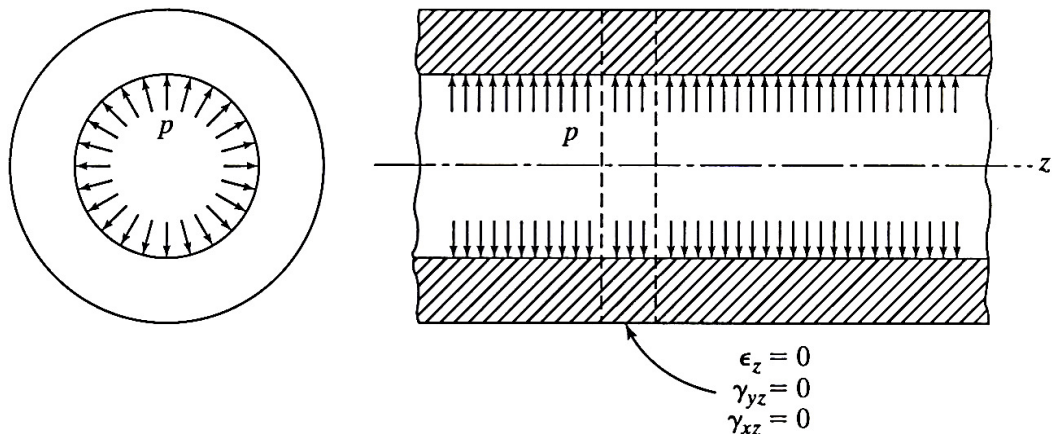
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \quad [4.10]$$

Για  $\sigma = D\varepsilon$  ισχύει:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad [4.11]$$

#### 4.1.5 Επίπεδη Παραμόρφωση

Στην περίπτωση που η τρίτη διάσταση  $z$  ενός σώματος δεν είναι μικρή, σε σύγκριση με τις άλλες δύο ( $x, y$ ) όπως προηγουμένως και τα φορτία που δέχεται το σώμα είναι πάνω στο επίπεδο ( $x, y$ ), τότε μπορεί να θεωρηθεί ότι η συνιστώσα του διανύσματος των μετατοπίσεων ( $u$ ) είναι μηδενική κατά την τρίτη διάσταση ( $u_z=0$  και επομένως  $\varepsilon_z=0$ ), καθώς επίσης και τα διανύσματα μετατόπισης στο επίπεδο  $x, y$  είναι ανεξάρτητα από την τρίτη διάσταση, δηλαδή  $u_x = f(x, y)$  και  $u_y = f(x, y)$  (Σχήμα 4.5). Η θεώρηση αυτή ονομάζεται θεώρηση της επίπεδης παραμόρφωσης (plane strain) (Αγιουτάντης, 2002).



Σχήμα 4.6 Επίπεδη παραμόρφωση (Chandrupatla and Belegundu, 2002)

Στο Σχήμα 4.6, τα  $\varepsilon_x$ ,  $\gamma_{xz}$  και  $\gamma_{yz}$  λαμβάνονται ως μηδενικά και  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ .

Για  $\sigma = D\varepsilon$  ισχύει (Chandrupatla and Belegundu, 2002):

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad [4.12]$$

#### 4.1.6 Συσχετισμός Επίπεδης Τάσης – Επίπεδης Παραμόρφωσης

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου χρειάζεται να γίνει μετατροπή των λύσεων επίπεδης τάσης σε λύσεις επίπεδης παραμόρφωσης και αντίστροφα.

Έτσι ένα πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με θεώρηση επίπεδης τάσης και να ληφθεί λύση για επίπεδη παραμόρφωση, χρησιμοποιώντας τους παρακάτω μετασχηματισμούς (Mahtab and Grasso, 1992):

$$\begin{aligned} E_{\text{EΠ}} &= \frac{E}{1-\nu^2} \\ \nu_{\text{EΠ}} &= \frac{\nu}{1-\nu} \end{aligned} \quad [4.13]$$

όπου  $E_{\text{EΠ}}$ , το ανηγμένο μέτρο ελαστικότητας που χρησιμοποιείται αντί του πραγματικού μέτρου ελαστικότητας  $E$  για να ληφθεί η λύση για επίπεδη παραμόρφωση και  $\nu_{\text{EΠ}}$ , ο ανηγμένος λόγος Poisson που χρησιμοποιείται αντί του πραγματικού λόγου Poisson  $\nu$ .

Ομοίως ένα πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης και να ληφθεί λύση για επίπεδη τάση, χρησιμοποιώντας τους παρακάτω μετασχηματισμούς (Mahtab and Grasso, 1992):

$$\begin{aligned} E_{\text{ΕΤ}} &= E \left[ 1 - \frac{\nu^2}{(1+\nu)^2} \right] \\ \nu_{\text{ΕΤ}} &= \frac{\nu}{1+\nu} \end{aligned} \quad [4.14]$$

όπου  $E_{\text{ΕΤ}}$ , το ανηγμένο μέτρο ελαστικότητας που χρησιμοποιείται αντί του πραγματικού μέτρου ελαστικότητας  $E$  για να ληφθεί η λύση για επίπεδη τάση και  $\nu_{\text{ΕΤ}}$ , ο ανηγμένος λόγος Poisson που χρησιμοποιείται αντί του πραγματικού λόγου Poisson  $\nu$ .

#### 4.1.7 Δυναμική Ενέργεια και Ισορροπία – Αρχή της Ελάχιστης Δυναμικής Ενέργειας

Στη Μηχανική των Στερεών, το πρόβλημα είναι ο προσδιορισμός της μετατόπισης  $u$  του σώματος που φαίνεται στο Σχήμα 4.1 και ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας που περιγράφηκαν. Οι τάσεις συνδέονται με τις παραμορφώσεις, οι οποίες με τη σειρά τους συνδέονται με τις μετατοπίσεις. Αυτό προϋποθέτει την επίλυση διαφορικών εξισώσεων μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης. Η λύση του συνόλου των εξισώσεων, αναφέρεται ως ακριβής λύση. Τέτοιες ακριβείς λύσεις, υπάρχουν για απλές γεωμετρικές δομές και απλές συνθήκες φόρτισης. Για προβλήματα όμως με σύνθετες γεωμετρίες και γενικές συνοριακές συνθήκες και συνθήκες φόρτισης (όπως είναι μια

σήραγγα), η επίτευξη τέτοιων λύσεων είναι αδύνατη. Στις προσεγγιστικές μεθόδους επίλυσης, συνήθως εφαρμόζονται τεχνικές δυναμικής ενέργειας ή μεταβολών, οι οποίες θέτουν λιγότερο περιοριστικές συνθήκες στις συναρτήσεις (Chandrupatla and Belegundu, 2002).

Η συνολική δυναμική ενέργεια  $\Pi$ , ενός ελαστικού σώματος, ορίζεται ως το άθροισμα της συνολικής ενέργειας παραμόρφωσης  $U$  και της ικανότητας παραγωγής έργου  $WP$ :

$$\Pi = U + WP \quad [4.15]$$

Για γραμμικά ελαστικά υλικά, η ενέργεια παραμόρφωσης ανά μονάδα όγκου του σώματος είναι  $\frac{1}{2}\sigma^T \varepsilon$ . Για το ελαστικό σώμα του Σχήματος 4.1, η συνολική ενέργεια παραμόρφωσης  $U$ , δίνεται από τον εξής τύπο:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV \quad [4.16]$$

Η ικανότητα παραγωγής έργου  $WP$ , δίνεται από τον εξής τύπο:

$$WP = - \int_V u^T f dV - \int_S u^T T dS - \sum_i u_i^T P_i \quad [4.17]$$

Η συνολική δυναμική ενέργεια για το γενικό ελαστικό σώμα του Σχήματος 4.1 είναι:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV - \int_V u^T f dV - \int_S u^T T dS - \sum_i u_i^T P_i \quad [4.18]$$

Η *Αρχή της Ελάχιστης Δυναμικής Ενέργειας*, ορίζεται ως εξής: για τα συστήματα διατήρησης, από όλα τα πεδία επιτρεπτών κινητικών μετατοπίσεων, αυτά τα οποία αντιστοιχούν σε ισορροπία, παρουσιάζουν ακρότατα ολικής δυναμικής ενέργειας. Εάν το ακρότατο είναι ελάχιστο, η κατάσταση ισορροπίας είναι σταθερή.

Συστήματα διατήρησης (conservative systems), θεωρούνται αυτά στα οποία το έργο του δυναμικού είναι ανεξάρτητο του θεωρούμενου δρόμου. Αν δηλαδή το σύστημα μετατοπίζεται από μια δεδομένη μορφή και επανέρχεται στην ίδια κατάσταση, οι δυνάμεις παράγουν μηδενικό έργο ανεξάρτητα από το δρόμο μετατόπισης. Κινητικά επιτρεπτές μετατοπίσεις είναι αυτές που ικανοποιούν την μονότιμη φύση των μετατοπίσεων (συμβατότητα) και τις συνοριακές συνθήκες (Chandrupatla and Belegundu, 2002).



#### 4.1.8 Η Μέθοδος Rayleigh – Ritz

Για συνεχή μέσα, η συνολική δυναμική ενέργεια της εξίσωσης  $\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV - \int_V u^T f dV - \int_S u^T T dS - \sum_i u_i^T P_i$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση μιας προσεγγιστικής λύσης. Η μέθοδος Rayleigh – Ritz, περιλαμβάνει την κατασκευή ενός υποτιθέμενου πεδίου μετατοπίσεων, δηλαδή:

$$\begin{aligned} u &= \sum \alpha_i \phi_i(x, y, z) & i = 1 \text{ έως } \ell \\ v &= \sum \alpha_j \phi_j(x, y, z) & j = \ell + 1 \text{ έως } m \\ w &= \sum \alpha_k \phi_k(x, y, z) & k = m + 1 \text{ έως } n, n > m > \ell \end{aligned} \quad [4.19]$$

Οι συναρτήσεις  $\phi_i$ , συνήθως λαμβάνονται ως πολυώνυμα. Οι μετατοπίσεις  $u$ ,  $v$  και  $w$  πρέπει να είναι κινητικά επιτρεπτές, δηλαδή τα  $u$ ,  $v$  και  $w$  πρέπει να ικανοποιούν τις καθορισμένες συνοριακές συνθήκες. Με την εισαγωγή σχέσεων τάσης – παραμόρφωσης και παραμόρφωσης – μετατόπισης και αντικατάσταση των εξισώσεων

$$[4.19] \text{ στην εξίσωση } \Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV - \int_V u^T f dV - \int_S u^T T dS - \sum_i u_i^T P_i, \text{ προκύπτει:}$$

$$\Pi = \Pi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \quad [4.20]$$

όπου  $r$  είναι ο αριθμός των ανεξάρτητων αγνώστων. Τα ακρότατα ως προς το  $\alpha_i$  ( $i = 1 \text{ έως } r$ ) δίνουν το σύνολο  $r$  εξισώσεων (Chandrupatla and Belegundu, 2002):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, r$$

#### 4.1.9 Η Μέθοδος Galerkin – Αρχή των Δυνατών Έργων

Η μέθοδος Galerkin, χρησιμοποιεί το σύνολο των εξισώσεων στην ανάπτυξη ενός τύπου ολοκληρώματος. Συνήθως, παρουσιάζεται ως μια από τις μεθόδους σταθμικών υπολοίπων. Έστω μια γενική παράσταση της διέπουσας εξίσωσης σε μια περιοχή  $V$ :

$$Lu = P \quad [4.21]$$

όπου  $u$  είναι η πολυωνυμική συνάρτηση και  $L$  ο τελεστής στη  $u$ . Η ακριβής λύση ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση για κάθε  $x$ . Με τη χρησιμοποίηση της προσεγγιστικής λύσης  $\tilde{u}$ , εισάγεται ένα σφάλμα  $\in(x)$ , το οποίο ονομάζεται υπόλοιπο και ισούται με:

$$\in(x) = L\tilde{u} - P \quad [4.22]$$

Οι προσεγγιστικές μέθοδοι, θέτουν το υπόλοιπο σχετικά με μια σταθμική συνάρτηση  $W_i$  ίσο με το μηδέν:

$$\int_V W_i(L\tilde{u} - P)dV = 0 \quad i = 1 \text{ έως } n \quad [4.23]$$

Η επιλογή της σταθμικής συνάρτησης  $W_i$  οδηγεί σε διάφορες προσεγγιστικές μεθόδους. Στη μέθοδο Galerkin, οι σταθμικές συναρτήσεις  $W_i$  επιλέγονται από τις συναρτήσεις βάσεως, οι οποίες χρησιμοποιούνται για την κατασκευή της  $\tilde{u}$ , η οποία παριστάνεται ως εξής;

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n Q_i G_i \quad [4.24]$$

όπου  $G_i$ ,  $i = 1 \text{ έως } n$ , είναι οι συναρτήσεις βάσεως (συνήθως πολυώνυμα των  $x, y, z$ ). Οι σταθμικές συναρτήσεις  $W_i$  επιλέγονται να είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσεως  $G_i$ . Ειδικότερα, θεωρείται μια αυθαίρετη συνάρτηση  $\phi$  η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i G_i \quad [4.25]$$

όπου οι συντελεστές  $\phi_i$  είναι αυθαίρετοι, εκτός της απαίτησης ότι η  $\phi$  ικανοποιεί ομογενείς (μηδενικές) συνοριακές συνθήκες όπου περιγράφεται η  $\tilde{u}$  (Chandrupatla and Belegundu, 2002).

Η μέθοδος Galerkin, ορίζεται ως εξής (Chandrupatla and Belegundu, 2002):

- Επιλέγονται συναρτήσεις βάσεως  $G_i$
- Προσδιορίζονται οι συντελεστές  $Q_i$  στην  $\tilde{u} = \sum_{i=1}^n Q_i G_i$  έτσι ώστε

$$\int_V \phi(L\tilde{u} - P)dV = 0 \quad \text{για κάθε } \phi \text{ του τύπου } \phi = \sum_{i=1}^n \phi_i G_i, \text{ όπου οι}$$

συντελεστές  $\phi_i$  είναι αυθαίρετοι, εκτός της απαίτησης ότι η  $\phi$  ικανοποιεί ομογενείς (μηδενικές) συνοριακές συνθήκες

- Η λύση των εξισώσεων οι οποίες προκύπτουν για τους  $Q_i$ , δίνει την προσεγγιστική λύση  $\tilde{u}$ .

Ο τύπος μεταβολών του Galerkin (ή αδύναμος τύπος) για την ανάλυση τάσης τριών διαστάσεων στην ελαστικότητα είναι ο ακόλουθος:

$$\int_V \sigma^T \varepsilon(\phi)dV - \int_V \phi^T f dV - \int_S \phi^T T dS - \sum_i \phi^T P_i \quad [4.26]$$

όπου  $\phi$  είναι μια αυθαίρετη μετατόπιση, συνεπώς με τις καθορισμένες συνοριακές συνθήκες της  $u$ . Η παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιείται για να ληφθεί μια

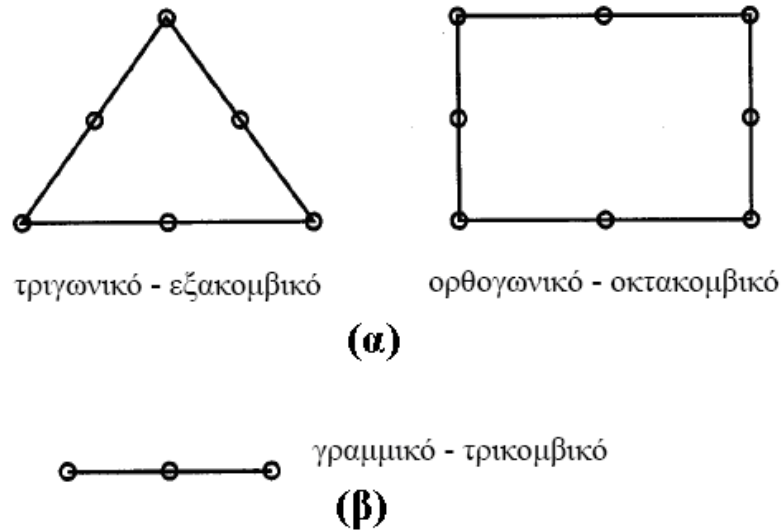
προσεγγιστική λύση. Για προβλήματα γραμμικής ελαστικότητας, η παραπάνω εξίσωση είναι η αρχή των δυνατών έργων (Chandrupatla and Belegundu, 2002).

Η *Αρχή των Δυνατών Έργων*, ορίζεται ως εξής: ένα σώμα είναι σε ισορροπία εάν το εσωτερικό δυνατό έργο ισούται με το εξωτερικό δυνατό έργο για κάθε κινητικά επιτρεπτό πεδίο μετατοπίσεων  $(\phi, \varepsilon(\phi))$ .

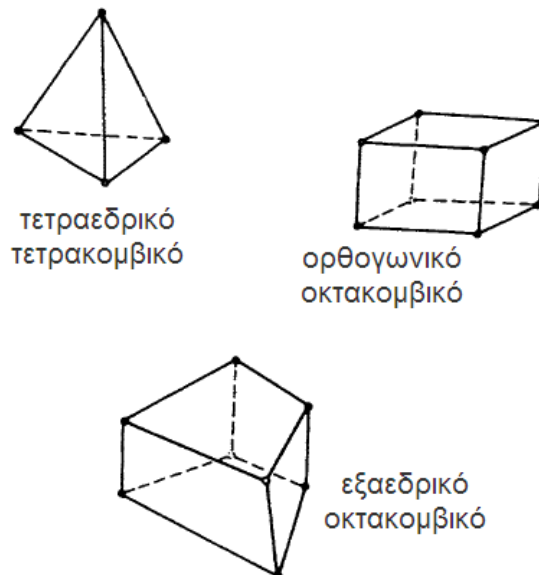
Η μέθοδος Galerkin και η αρχή των δυνατών έργων δίνουν το ίδιο σύνολο εξισώσεων για προβλήματα ελαστικότητας, όταν χρησιμοποιείται η ίδια βάση ή οι ίδιες συναρτήσεις συντεταγμένων (Chandrupatla and Belegundu, 2002).

## 4.2 Βασικές Αρχές της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων

Οι βασικές αρχές που διέπουν τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων δεν είναι ιδιαίτερα περίπλοκες. Έστω ένα σώμα επί του οποίου ζητείται να βρεθεί η κατανομή μιας άγνωστης μεταβλητής, έστω της μετατόπισης. Το σώμα διαιρείται σε σύνολο μικρότερων γεωμετρικών μορφών γνωστών ως *στοιχεία* (elements). Τα στοιχεία αυτά θεωρούνται συνδεδεμένα μεταξύ τους σε συγκεκριμένα σημεία τα οποία ονομάζονται *κόμβοι* (nodes). Χαρακτηριστικές μορφές στοιχείων είναι τα μονοδιάστατα ή γραμμικά, τα τριγωνικά και ορθογωνικά ή γενικότερα τετραπλευρικά (quadrilateral) σε δύο διαστάσεις (Σχήμα 4.7) και τα πυραμιδοειδή και πρισματικά (τρισδιάστατα) (Σχήμα 4.8). Οι απλούστερες μορφές στοιχείων είναι αυτές που χαρακτηρίζονται από το ότι ο αριθμός των κόμβων των στοιχείων είναι ίσος με τον αριθμό των πλευρών όπως για παράδειγμα τριγωνικά και τρικομβικά στοιχεία, τετραπλευρικά και τετρακομβικά (επίπεδα) στοιχεία, πυραμιδοειδή και τετρακομβικά (στερεά) στοιχεία, κλπ. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις, όπου ένα στοιχείο περιγράφεται από παραπάνω κόμβους και προκύπτουν τριγωνικά εξακομβικά στοιχεία, τετραπλευρικά και οκτακομβικά (επίπεδα) στοιχεία κλπ. Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας ενός στοιχείου (degrees of freedom – DOF) αναφέρεται στο σύνολο των αγνώστων μεταβλητών που αντιστοιχούν σε κάθε στοιχείο (Αγιουτάντης, 2002).

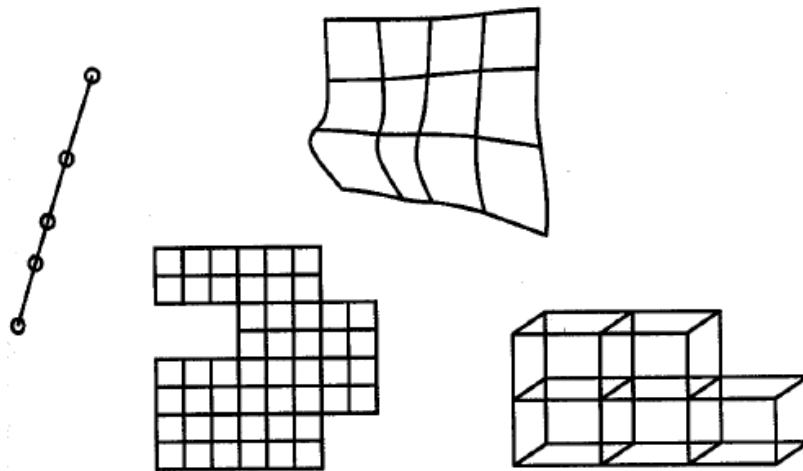


**Σχήμα 4.7** Είδη στοιχείων (α) στις δυο διαστάσεις και (β) στη μία διάσταση (Αγιουτάντης, 2002)



**Σχήμα 4.8** Είδη στοιχείων στις τρεις διαστάσεις (Rao, 2004)

Η διαδικασία του διαμερισμού του σώματος σε μικρότερα στοιχεία ονομάζεται **διακριτοποίηση** (descretization) (Σχήμα 4.9). Ανάλογα με τον αριθμό και το είδος των στοιχείων που έχουν επιλεχτεί να περιγράψουν το σώμα, η ζητούμενη άγνωστη μεταβλητή θεωρείται ότι επιδρά σε κάθε στοιχείο με κάποιο προκαθορισμένο τρόπο. Τελικά η κατανομή της άγνωστης μεταβλητής στη μάζα του σώματος προσεγγίζεται ικανοποιητικά αν αυτό έχει διακριτοποιηθεί σωστά.



Σχήμα 4.9 Διακριτοποίηση σώματος (Αγιουτάνης, 2002)

Η κατανομή των άγνωστων μεταβλητών (εν προκειμένω των μετατοπίσεων) σε κάθε στοιχείο συναρτήσκει των τιμών των μεταβλητών στους κόμβους, εκφράζεται από τις *συναρτήσεις μορφής*  $N_i$ , οι οποίες συνδέουν την μετατόπιση σε τυχαίο σημείο ενός στοιχείου με τις τιμές μετατόπισης σε κάθε κόμβο ως εξής (Chandrupatla and Belegundu, 2002):

$$u = \sum_{i=1}^n N_i q_i \quad [4.27]$$

όπου  $u$  η μετατόπιση σε τυχαίο σημείο ενός στοιχείου και  $q_i$  οι τιμές μετατόπισης σε κάθε κόμβο. Σε μορφή μητρώου η σχέση [4.27] γράφεται:  $u = Nq$ . Οι συναρτήσεις μορφής, μπορούν να γραφούν σε συντεταγμένες ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ). Αναλυτικότερα θα επεξηγηθούν στο κεφάλαιο 4.4. Επίσης ισχύουν:

$$\varepsilon = Bq \quad [4.28]$$

όπου  $B$  το μητρώο παραμόρφωσης – μετατόπισης του στοιχείου και

$$\sigma = DBq \quad [4.29]$$

όπου  $D$  το μητρώο με τις ελαστικές σταθερές του υλικού.

Μετά από τη διαδικασία της διακριτοποίησης, υπολογίζονται οι εξισώσεις ισορροπίας που διέπουν κάθε στοιχείο, με την προσέγγιση της δυναμικής ενέργειας και την προσέγγιση Galerkin σχηματίζεται ένα σύστημα εξισώσεων. Το σύστημα αυτό περιγράφει τη συμπεριφορά όλων των στοιχείων του σώματος και κατά συνέπεια όλο το σώμα και έχει τη γενική μορφή (Chandrupatla and Belegundu, 2002):

$$\{F\} = [K]\{Q\} \quad [4.30]$$

όπου  $\{F\}$  είναι το γενικευμένο διάνυσμα που περιγράφει τις δυνάμεις που ασκούνται στους κόμβους,  $[K]$  είναι το μητρώο ακαμψίας του σώματος και  $\{Q\}$  είναι το διάνυσμα των άγνωστων μετατοπίσεων στους κόμβους.

Για να επιλυθεί το παραπάνω σύστημα θέτονται *συνοριακές συνθήκες* (boundary conditions), οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις στηρίξεις και τις δυνάμεις που εφαρμόζονται στο σώμα καθώς και *αρχικές συνθήκες* (initial conditions) (εάν απαιτείται). Υπάρχουν τρεις τύποι συνοριακών συνθηκών: Οι γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες (geometric or forced boundary conditions) που είναι γνωστές ως συνθήκες Dirichlet και έχουν σχέση με τον προσδιορισμό της ζητούμενης παραμέτρου (μετατόπισης), οι φυσικές συνοριακές συνθήκες (slope or gradient, natural boundary conditions) που είναι γνωστές ως συνθήκες Neumann και έχουν σχέση με τον προσδιορισμό της μεταβολής της ζητούμενης παραμέτρου (παράγωγος της μετατόπισης) και οι μικτές συνθήκες που έχουν σχέση με τον προσδιορισμό και των δυο παραπάνω παραμέτρων. Οι συνοριακές συνθήκες εφαρμόζονται στους κόμβους των στοιχείων ανεξαρτήτως του αν αποτελούν κατανεμημένα φορτία, δυνάμεις πεδίου (βαρυτικά φορτία) ή σημειακές φορτίσεις (Αγιουτάντης, 2002).

Η επίλυση της εξίσωσης ( $\{F\} = [K]\{Q\}$ ) ως προς το διάνυσμα των μετατοπίσεων με αναστροφή του μητρώου ακαμψίας, θα αποδώσει τις τιμές των άγνωστων μεταβλητών. Από τη στιγμή που θα λυθεί η εξίσωση αυτή, θα βρεθούν οι άγνωστες μετατοπίσεις για κάθε κόμβο, θα υπολογιστούν οι παραμορφώσεις και στη συνέχεια οι τάσεις στα στοιχεία. Από αυτές γίνεται ο υπολογισμός των παραμορφώσεων και των τάσεων σε όλο το σώμα. Η λύση αυτής της εξίσωσης δεν είναι μια απλή διαδικασία. Η δυσκολία έγκειται στον μεγάλο αριθμό εξισώσεων που απαιτούνται για να περιγράψουν το μεγάλο αριθμό κόμβων. Κάποια προβλήματα για να περιγραφούν σωστά μπορεί να χρειάζονται πάνω από 50.000 εξισώσεις. Είναι λοιπόν κατανοητό ότι η αναστροφή του μητρώου ακαμψίας δεν είναι εύκολη διαδικασία.

Τα τελευταία χρόνια με την ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών και τη δημιουργία ειδικών μαθηματικών μεθόδων έχει γίνει εφικτή η επίλυση αυτών των εξισώσεων σε ικανοποιητικά χρονικά όρια. Η διαδικασία που ακολουθείται σε μια ανάλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε κάποιο λογισμικό πακέτο αποτελείται από τρία στάδια (Hutton, 2004):

1. Την *προεπεξεργασία* (preprocessing) η οποία αποτελεί το βασικότερο μέρος ορισμού από το χρήστη των παραμέτρων της ανάλυσης. Σε αυτό το στάδιο

γίνεται η διακριτοποίηση και η δημιουργία του προς ανάλυση μοντέλου. Εισάγονται οι εξισώσεις που διέπουν τους κόμβους, με την κατάλληλη επιλογή των στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν και οι συνοριακές συνθήκες.

2. Την *επεξεργασία ή λύση* (processing ή solution) που αποτελεί το καθαρά μαθηματικό μέρος της μεθόδου και κατά κύριο λόγο εκτελείται από τον ηλεκτρονικό υπολογιστή με τη βοήθεια του λογισμικού. Σε αυτό το στάδιο πραγματοποιείται ο υπολογισμός των μητρώων και των διανυσμάτων κάθε στοιχείου ξεχωριστά. Στη συνέχεια πραγματοποιείται η σύνδεση των επιμέρους πινάκων και διανυσμάτων ώστε να δημιουργηθούν οι εξισώσεις που περιγράφουν όλο το μοντέλο που πρόκειται να αναλυθεί. Από τις εξισώσεις αυτές δημιουργείται το μητρώο ακαμψίας και τα διανύσματα όλου του μοντέλου. Σε αυτά εισάγονται και οι συνοριακές συνθήκες που επιδρούν στο μοντέλο. Στο τελευταίο μέρος αυτού του σταδίου πραγματοποιείται η επίλυση των εξισώσεων και η εύρεση των άγνωστων μεταβλητών στους κόμβους.
3. Τη *μετα-επεξεργασία* (postprocessing) όπου λαμβάνει χώρα η επεξεργασία των αποτελεσμάτων για να παρασταθούν στο μοντέλο οι τάσεις και οι παραμορφώσεις. Συνήθως αυτές, εκτός από τις αριθμητικές τους τιμές μπορούν να παρασταθούν και γραφικά ώστε να είναι καλύτερα κατανοητές από τον μελετητή.

### 4.3 Μη Γραμμική Ανάλυση

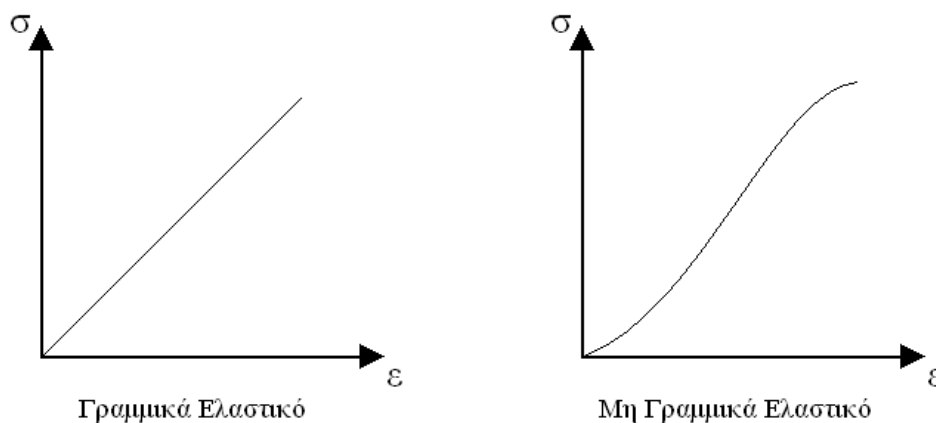
Ένα πρόβλημα, καλείται μη-γραμμικό όταν η σχέση δυνάμεων – μετατοπίσεων εξαρτάται από την τρέχουσα κατάσταση (δηλαδή την τρέχουσα μετατόπιση, την τρέχουσα δύναμη και τις τρέχουσες σχέσεις τάσης – παραμόρφωσης). Στην ουσία ένα πρόβλημα είναι μη-γραμμικό, όταν στη σχέση  $\{F\} = [K]\{Q\}$ , το μητρώο ακαμψίας  $[K]$  εξαρτάται από το διάνυσμα των δυνάμεων  $\{F\}$  ή από το διάνυσμα των μετατοπίσεων  $\{Q\}$ . Όταν το μητρώο ακαμψίας δεν εξαρτάται από το διάνυσμα των δυνάμεων ούτε από το διάνυσμα των μετατοπίσεων, το πρόβλημα θεωρείται γραμμικό (MSC.Marc Volume A, 2006).

Υπάρχουν τριών ειδών τύποι μη-γραμμικότητας. Η μη-γραμμική συμπεριφορά υλικού (material nonlinearity), η γεωμετρική μη-γραμμική συμπεριφορά (geometric nonlinearity) και η μη-γραμμική συμπεριφορά συνοριακών συνθηκών (nonlinear

boundary conditions). Η μη-γραμμική συμπεριφορά υλικού είναι αποτέλεσμα της μη-γραμμικής σχέσης μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων. Ένα παράδειγμα μη-γραμμικής συμπεριφοράς υλικού είναι η ελαστοπλαστική συμπεριφορά (elastoplastic behavior). Αυτή θα αναλυθεί στην επόμενη ενότητα. Η γεωμετρική μη-γραμμική συμπεριφορά είναι αποτέλεσμα της μη-γραμμικής σχέσης μεταξύ παραμορφώσεων και μετατοπίσεων από την μια μεριά και της μη-γραμμικής σχέσης μεταξύ τάσεων και δυνάμεων από την άλλη μεριά. Παραδείγματα γεωμετρικής μη-γραμμικής συμπεριφοράς είναι η ανάλυση προβλημάτων λυγισμού (buckling) και προβλημάτων μεγάλης παραμόρφωσης (large strain), όπου συμβαίνει μεγάλη αλλαγή της αρχικής γεωμετρίας. Η μη-γραμμική συμπεριφορά συνοριακών συνθηκών (και/ή φορτίσεων) μπορεί επίσης να προκαλέσει φαινόμενα μη-γραμμικότητας. Παραδείγματα μη-γραμμικής συμπεριφοράς συνοριακών συνθηκών είναι τα προβλήματα επαφής (contact) και προβλήματα με επακόλουθες δυνάμεις (follower forces) (MSC.Marc Volume A, 2006).

#### 4.3.1 Ελαστοπλαστική Ανάλυση

Η ελαστική συμπεριφορά στα υλικά περιγράφεται σε διάγραμμα τάσης – παραμόρφωσης σαν γραμμική ή μη γραμμική (Σχήμα 4.10). Η εντατική κατάσταση είναι τέτοια ώστε για οποιαδήποτε επιβολή τάσης σε αυτά τα όρια, το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά και ως εκ τούτου δεν εμφανίζει μόνιμες παραμορφώσεις.

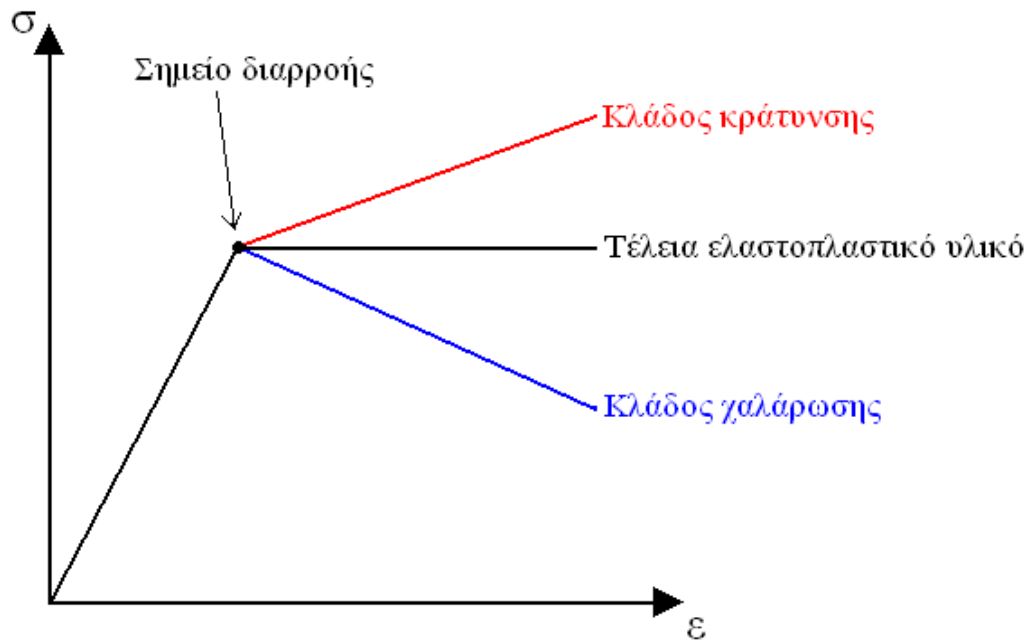


**Σχήμα 4.10** Τύποι ελαστικής συμπεριφοράς υλικού

Η ελαστοπλαστική συμπεριφορά στα υλικά χαρακτηρίζεται από έναν γραμμικά ή μη γραμμικά ελαστικό κλάδο. Όταν η εντατική κατάσταση του υλικού αντιπροσωπεύεται από τον ελαστικό κλάδο, τότε το υλικό παρουσιάζει ελαστική συμπεριφορά. Όταν όμως η εντατική κατάσταση υπερβεί το σημείο διαρροής του



υλικού, τότε αρχίζει η εμφάνιση μόνιμων παραμορφώσεων. Επίσης, ένα πέτρωμα ή γεωυλικό μπορεί να μην χαρακτηρίζεται από τέλεια ελαστοπλαστική συμπεριφορά, αλλά όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.11, στον κλάδο, μετά το σημείο διαρροής, να παρουσιάζει είτε κράτυνση (strain hardening) είτε χαλάρωση (strain softening) (Αγιουτάντης, 2002).



Σχήμα 4.11 Ελαστοπλαστική συμπεριφορά υλικού

Για να πραγματοποιηθεί μια ελαστοπλαστική ανάλυση, πρέπει να έχουν οριστεί τα ακόλουθα (Buyukozturk, 1977):

- Οι ελαστικές σταθερές του υλικού (το μητρώο καταστατικής συμπεριφοράς του ελαστικού υλικού), για να δημιουργηθεί ο ελαστικός κλάδος (Σχήμα 4.11).
- Το κριτήριο διαρροής (ή η συνάρτηση διαρροής), για να περιγραφούν οι συνθήκες έναρξης των πλαστικών παραμορφώσεων.
- Η καταστατική συμπεριφορά του υλικού μετά την έναρξη της διαρροής (flow rule) (κράτυνση, χαλάρωση ή τέλεια ελαστοπλαστικό υλικό).

Για την διατύπωση της καταστατικής εξίσωσης του υλικού στην ελαστοπλαστική περιοχή, εκτός από τα κριτήρια αστοχίας και τις συναρτήσεις διαρροής, λαμβάνονται υπόψη και τα εξής (Crisfield, 1991):

- Έστω  $F$  η εξίσωση που περιγράφει το κριτήριο αστοχίας. Κατά την έναρξη της διαρροής αλλά και καθ' όλη τη διάρκειά της πρέπει να επαληθεύεται το κριτήριο αυτό. Έτσι ισχύει  $dF = 0$ .
- Η τάση διαρροής  $\sigma_0$  είναι συνάρτηση της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης  $\varepsilon_{eq}^{pl}$ :  $\sigma_0 = g(\varepsilon_{eq}^{pl})$ .
- Το διάνυσμα μεταβολής των πλαστικών παραμορφώσεων είναι συνάρτηση της μεταβολής της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης και υπολογίζεται βάσει του νόμου πλαστικής ροής των Prandtl – Reuss:  $d\varepsilon^{pl} = d\varepsilon_{eq}^{pl} \frac{\partial F}{\partial \sigma}$ .
- Οι συνολικές παραμορφώσεις στην ελαστοπλαστική περιοχή ισούνται με το άθροισμα ελαστικών και πλαστικών παραμορφώσεων:  $\varepsilon^{ep} = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl}$ .
- Η κλίση της καμπύλης ισοδύναμης τάσης  $\sigma_{eq}$  – ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης  $\varepsilon_{eq}^{pl}$  συμβολίζεται με  $H'$ , ονομάζεται σταθερά κράτυνσης (hardening coefficient) και ισχύει (Buyukozturk, 1977):  $d\sigma_{eq} = H' d\varepsilon_{eq}^{pl}$ .

Μέσω των παραπάνω προκύπτει το ελαστοπλαστικό μητρώο καταστατικής συμπεριφοράς  $D^{ep}$  για το οποίο ισχύει:  $\{d\sigma\} = [D^{ep}] \{d\varepsilon\}$ .

### 4.3.2 Ανάλυση Επαφής

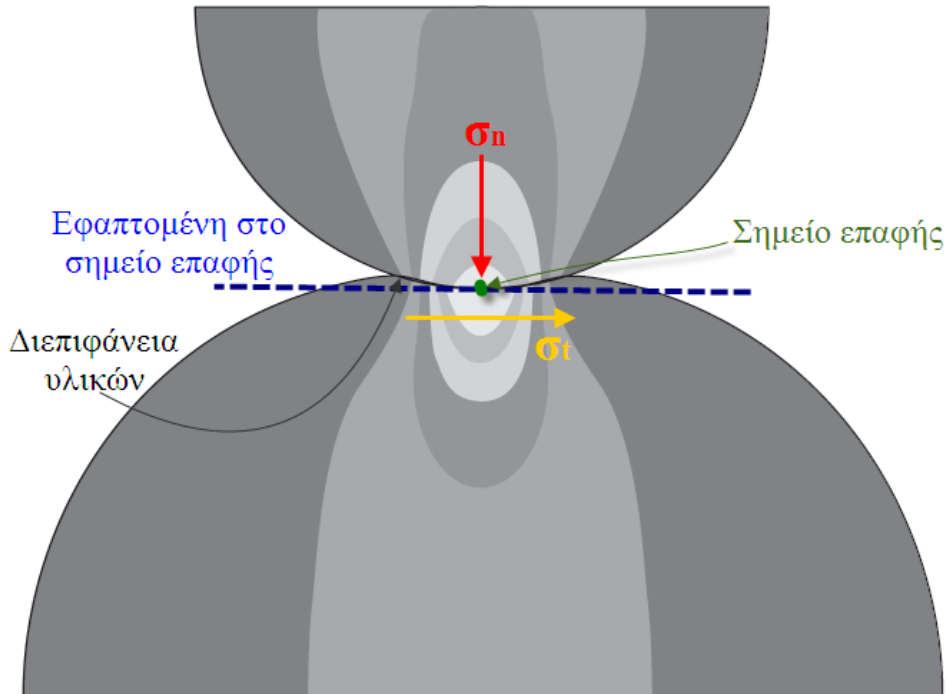
Μια άλλη μορφή μη γραμμικότητας, είναι η ανάλυση επαφής (contact analysis). Σε πολλά προβλήματα, αντιμετωπίζονται καταστάσεις όπου τα σημεία του ορίου του ενός σώματος, έρχονται σε επαφή με αυτά του ορίου του άλλου σώματος. Αυτά τα προβλήματα ονομάζονται προβλήματα επαφής (contact problems) (Zienkiewicz and Taylor, 2000).

Η ύπαρξη διεπιφανειών διαφορετικών σωμάτων, συνοδεύεται από την εμφάνιση δυνάμεων (και τάσεων) τριβής. Για την περιγραφή της εντατικής κατάστασης του συστήματος στην περιοχή της διεπιφάνειας (Σχήμα 4.12), το πιο απλό μοντέλο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι το μοντέλο τριβής του Coulomb, το οποίο έχει ως εξής:

$$|\sigma_t| \leq \mu \sigma_n$$

όπου  $\sigma_t$  η τάση τριβής ή εφαπτομενική τάση,  $\sigma_n$  η ορθή τάση και  $\mu$  ο συντελεστής τριβής. Εάν το μέτρο της  $\sigma_t$  είναι μικρότερο από την οριακή συνθήκη, τότε δεν υπάρχει μετατόπιση μεταξύ των δύο σωμάτων. Αυτή η κατάσταση καλείται στατική

τριβή (stick friction). Αντίθετα εάν το μέτρο της  $\sigma_t$  ισούται με την οριακή συνθήκη δηλαδή με το  $\mu\sigma_n$ , τότε υπάρχει μετατόπιση μεταξύ των δύο σωμάτων. Αυτή η κατάσταση καλείται τριβή ολίσθησης (slip friction) (Zienkiewicz and Taylor, 2000).



**Σχήμα 4.12** Επαφή σε σημείο διεπιφάνειας σωμάτων διαφορετικών υλικών (Zienkiewicz and Taylor, 2000)

#### 4.4 Γεωμετρία και Διακριτοποίηση Μοντέλων Σηράγγων

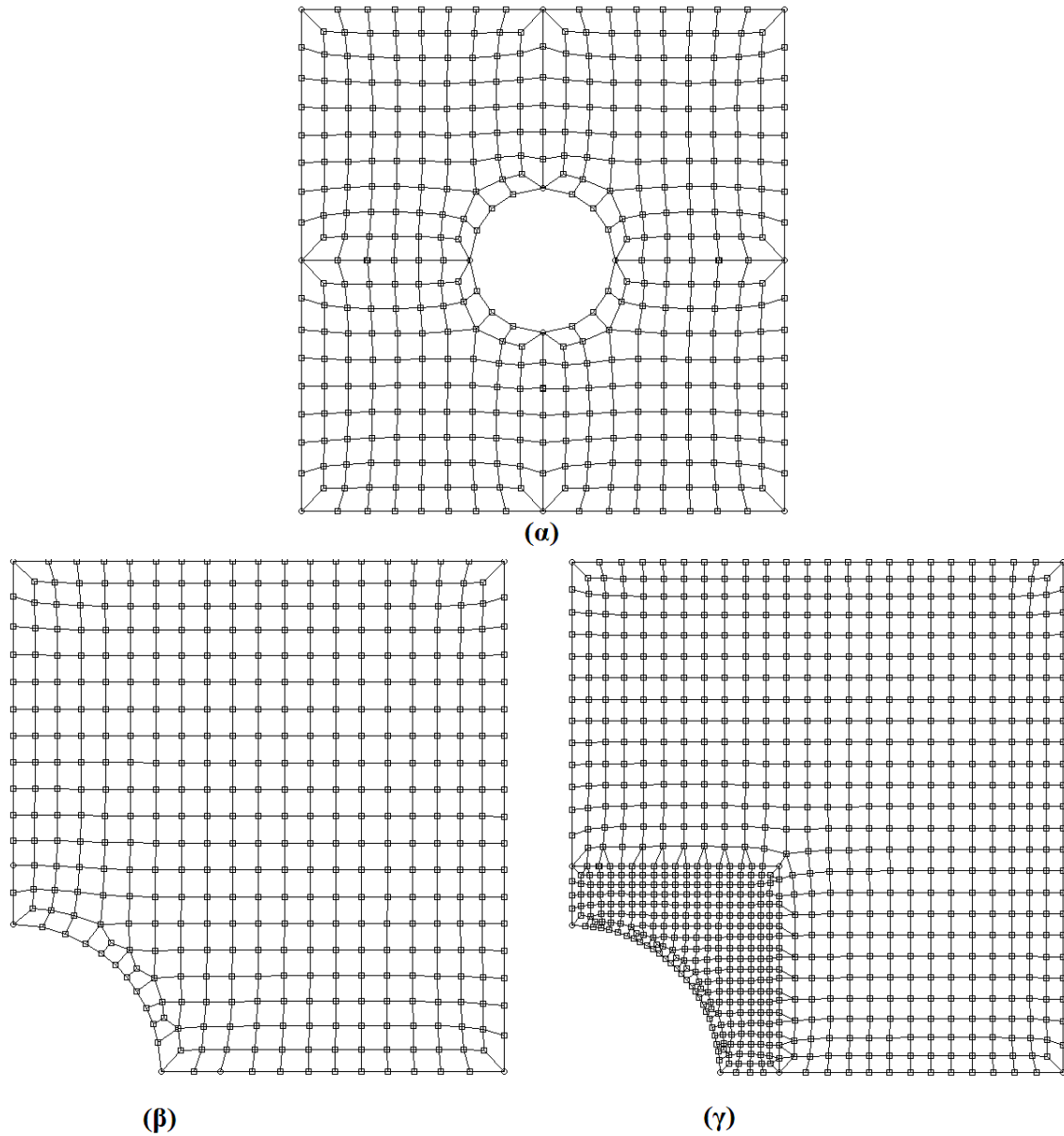
Η **διακριτοποίηση** της σήραγγας (και γενικότερα οποιουδήποτε σώματος), αποτελεί το πρώτο βήμα στη διαδικασία ανάλυσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Γενικά, σκοπός της διακριτοποίησης όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα, είναι ο διαμερισμός του υπό εξέταση σώματος σε μικρότερα στοιχεία με τέτοιο τρόπο, ώστε η άγνωστη μεταβλητή να εκπροσωπείται με ικανοποιητικό τρόπο στη μάζα αυτού. Η συνήθης πρακτική είναι να γίνεται η διακριτοποίηση κατά τέτοιο τρόπο, ώστε το μέγεθος των στοιχείων να είναι μικρό στα σημεία όπου απαιτείται μεγάλη ακρίβεια στους υπολογισμούς, ή εκεί που αναμένεται έντονη μεταβολή του ζητούμενου μεγέθους, ενώ το μέγεθος των στοιχείων να είναι μεγαλύτερο στις υπόλοιπες περιοχές του πεδίου (Σχήμα 4.13γ). Επίσης, όσον αφορά την ανάλυση σε δύο διαστάσεις, ενώ συνηθέστερα είναι τα τριγωνικά ή τετραπλευρικά στοιχεία με τρεις και τέσσερις κόμβους αντίστοιχα, είναι δυνατόν ανάλογα με τις απαιτήσεις του προβλήματος (απαίτηση μεγαλύτερης ακρίβειας στους υπολογισμούς ή πρόβλεψη

έντονης μεταβολής του ζητούμενου μεγέθους σε συγκεκριμένο σημείο του μοντέλου) να αυξηθούν οι κόμβοι σε ένα στοιχείο και να χρησιμοποιηθούν τετραπλευρικά στοιχεία με οκτώ κόμβους (Αγιουτάντης, 2002).

Στη διαδικασία της διακριτοποίησης ένας ακόμη στόχος είναι το μοντέλο που θα δημιουργηθεί να προσφέρει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια, στο μικρότερο δυνατό υπολογιστικό χρόνο (Rao, 2004). Για παράδειγμα, οικονομία πεπερασμένων στοιχείων (άρα και του χρόνου ανάλυσης), μπορεί να επιτευχθεί από τη χρήση απλοποιημένης **γεωμετρίας** αλλά και από την παρουσία συμμετρίας σε ένα μοντέλο.

Οι σήραγγες, όπως όλα τα σώματα και οι κατασκευές αποτελούνται από τρεις διαστάσεις. Πολλές φορές όμως, για λόγους απλότητας και ευκολίας, προβλήματα τριών διαστάσεων ανάγονται στο επίπεδο με μικρή μείωση της ακρίβειας της ανάλυσης. Αν η γεωμετρία και τα φορτία που ασκούνται στη σήραγγα μπορούν να παρασταθούν σε ένα επίπεδο τότε το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί σε δύο διαστάσεις. Οι σήραγγες ανάλογα με την προσομοίωσή τους στο επίπεδο, μπορεί να διαθέτουν είτε μια μικρή διάσταση σε σχέση με τις άλλες δυο (προσομοίωση μηκοτομής σήραγγας) είτε να διαθέτουν μια μεγάλη διάσταση σε σχέση με τις άλλες δυο (προσομοίωση πρόσοψης σήραγγας). Η ανάλυση αυτών των περιπτώσεων μπορεί να γίνει με τη μοντελοποίηση με θεώρηση *επίπεδης τάσης* και *επίπεδης παραμόρφωσης* αντίστοιχα.

Εκτός από τη γεωμετρική απλοποίηση που μπορεί να πραγματοποιηθεί σε μια σήραγγα, μπορεί να πραγματοποιηθεί και απλοποίηση λόγω συμμετρίας. Υπάρχουν κυρίως τέσσερα είδη συμμετρίας που συναντώνται στα προβλήματα μηχανικής: η αξονική, η επίπεδη, η κυκλική και η επαναλαμβανόμενη. Αν η γεωμετρία της σήραγγας και οι εξωτερικοί παράγοντες όπως είναι τα φορτία που δέχεται, παρουσιάζουν κάποιο από τα παραπάνω είδη συμμετρίας, μπορεί να αναλυθεί μέρος της που παρουσιάζει συμμετρία και όχι ολόκληρη. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στις συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στο μέρος του σώματος που αναλύεται ώστε πραγματικά να αντικατοπτρίζεται η συμμετρία του σώματος. Στο Σχήμα 4.13, απεικονίζεται η χρήση συμμετρίας για τη μοντελοποίηση κυκλικής σήραγγας. Στο Σχήμα 4.13α φαίνεται η διακριτοποίηση σε ολόκληρο το μέρος της διατομής της σήραγγας, ενώ στο Σχήμα 4.13β φαίνεται η διακριτοποίηση στο ένα τέταρτο της διατομής της σήραγγας. Επίσης, στο Σχήμα 4.13γ φαίνεται η πυκνότερη διακριτοποίηση κοντά στο υπόγειο άνοιγμα (όπου απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια στους υπολογισμούς και που αναμένεται έντονη μεταβολή της εντατικής κατάστασης) σε σχέση με το Σχήμα 4.13β.

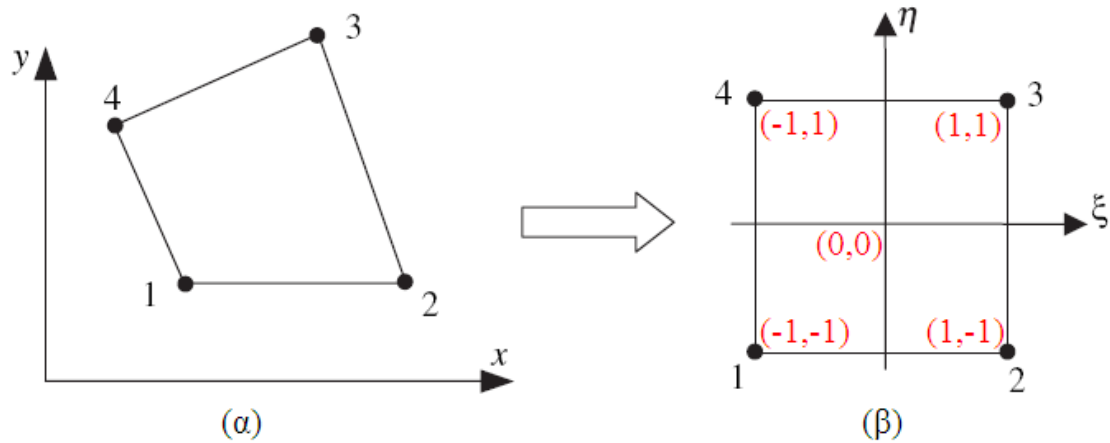


**Σχήμα 4.13** Τύποι διακριτοποίησης διατομής σήραγγας στις δυο διαστάσεις

Στις επόμενες υποενότητες παρουσιάζονται κάποιοι χαρακτηριστικοί τύποι πεπερασμένων στοιχείων, όπως είναι το τετράπλευρο τετρακομβικό στοιχείο, το τετράπλευρο οκτακομβικό στοιχείο, το γραμμικό δικομβικό στοιχείο δοκού και το εξαεδρικό οκτακομβικό στοιχείο που χρησιμοποιούνται στη μοντελοποίηση σηράγγων στις δυο και στις τρεις διαστάσεις.

#### 4.4.1 Το Τετράπλευρο Τετρακομβικό Στοιχείο

Το τετράπλευρο τετρακομβικό στοιχείο (Σχήμα 4.14) είναι ισοπαραμετρικό. Ισοπαραμετρικά είναι τα στοιχεία για τα οποία η μετατόπιση  $u$  και η συντεταγμένη  $x$ , παρεμβάλλονται εντός του στοιχείου με τις ίδιες συναρτήσεις μορφής  $N_i$ .



**Σχήμα 4.14** Τετράπλευρο τετρακομβικό στοιχείο (α) στο χώρο  $x,y$  και (β) στο χώρο  $\xi,\eta$  (Fish and Belytschko, 2007)

Οι συναρτήσεις μορφής προκύπτουν από την εξίσωση:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad i = 1 \text{ έως } 4$$

όπου  $(\xi_i, \eta_i)$ , είναι οι συντεταγμένες του κόμβου  $i$  (Σχήμα 4.14β). Έτσι οι συναρτήσεις μορφής για τους τέσσερις κόμβους είναι οι εξής (Chandrupatla and Belegundu, 2002):

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

Το μητρώο ακαμψίας  $k^e$  του στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

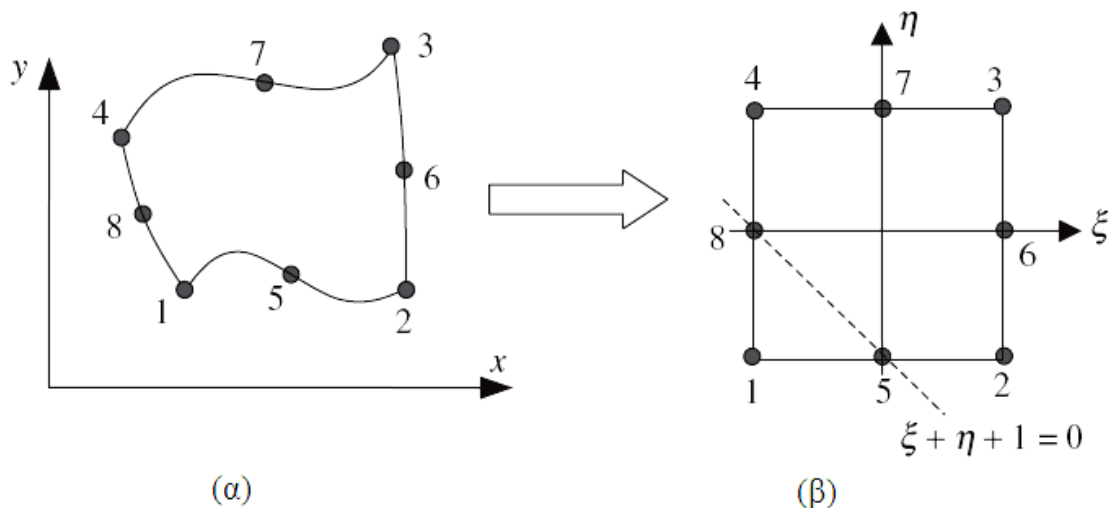
$$k^e = t_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B \det J d\xi d\eta$$

όπου  $t_e$  το πάχος του στοιχείου,  $\det J$  η ορίζουσα της Ιακωβιανής,  $B$  το μητρώο παραμόρφωσης – μετατόπισης του στοιχείου και  $D$  το μητρώο με τις ελαστικές σταθερές του υλικού. Επίσης ισχύει:  $dx dy = \det J d\xi d\eta$ .

#### 4.4.2 Το Τετράπλευρο Οκτακομβικό Στοιχείο

Το τετράπλευρο οκτακομβικό στοιχείο (Σχήμα 4.15) είναι ισοπαραμετρικό και ανήκει στην οικογένεια στοιχείων ‘serendipity’. Σε αυτήν την οικογένεια ανήκουν τα στοιχεία ανώτερης τάξης τα οποία έχουν κόμβους μόνο στο σύνορό τους και όχι στο εσωτερικό τους (Fish and Belytschko, 2007). Οι συναρτήσεις μορφής για τους τέσσερις κόμβους είναι οι εξής (Chandrupatla and Belegundu, 2002):

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) & N_5 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\ N_2 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta) & N_6 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\ N_3 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta) & N_7 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\ N_4 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta) & N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \end{aligned}$$



**Σχήμα 4.15** Τετράπλευρο οκτακομβικό στοιχείο (α) στο χώρο  $x,y$  και (β) στο χώρο  $\xi,\eta$  (Fish and Belytschko, 2007)

Το μητρώο ακαμψίας  $k^e$  του στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

$$k^e = t_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B \det J d\xi d\eta$$

#### 4.4.3 Το Γραμμικό Δικομβικό Στοιχείο Δοκού

Στο γραμμικό δικομβικό στοιχείο δοκού εκτός από τις μετατοπίσεις  $u$ , λαμβάνουν χώρα και περιστροφές (Σχήμα 4.16). έτσι καθώς εμπλέκονται κομβικές τιμές και κομβικές κλίσεις, ορίζονται συναρτήσεις μορφής Hermite που ικανοποιούν τις

απαιτήσεις κομβικών τιμών και συνέχειας των κλίσεων (Chandrupatla and Belegundu, 2002). Έτσι ισχύουν (Fish and Belytschko, 2007):

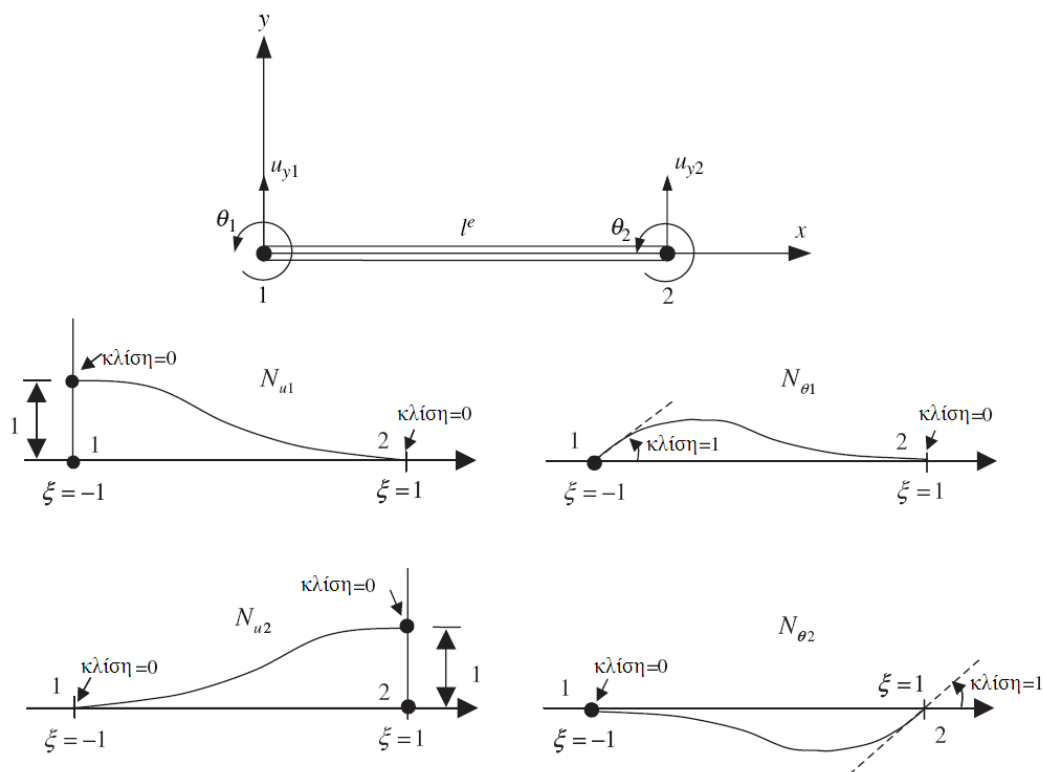
$$N_{u1} = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi)$$

$$N_{\theta1} = \frac{\ell^e}{8}(1-\xi)^2(1+\xi)$$

$$N_{u2} = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi)$$

$$N_{\theta2} = \frac{\ell^e}{8}(1+\xi)^2(1-\xi)$$

όπου  $\ell^e$  το μήκος του στοιχείου.



**Σχήμα 4.16** Γραμμικό δικομβικό στοιχείο δοκού και συναρτήσεις μορφής (Fish and Belytschko, 2007)

#### 4.4.4 Το Εξαεδρικό Οκτακομβικό Στοιχείο

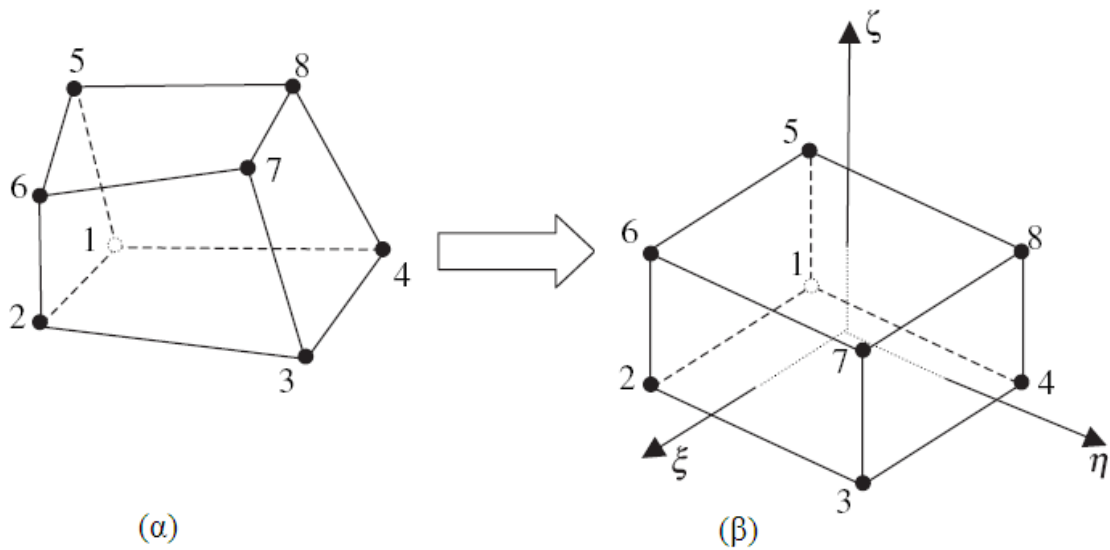
Το εξαεδρικό οκτακομβικό στοιχείο (Σχήμα 4.17) είναι ισοπαραμετρικό. Οι συναρτήσεις μορφής προκύπτουν από την εξίσωση (Chandrupatla and Belegundu, 2002):

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i) \quad i = 1 \text{ έως } 8$$



όπου  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , είναι οι συντεταγμένες του κόμβου  $i$  (Σχήμα 4.17β). Έτσι οι συναρτήσεις μορφής για τους τέσσερις κόμβους είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) & N_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) & N_6 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) & N_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) & N_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \end{aligned}$$



**Σχήμα 4.17** Εξαεδρικό οκτακομβικό στοιχείο (α) στο χώρο  $x,y,z$  και (β) στο χώρο  $\xi,\eta,\zeta$  (Fish and Belytschko, 2007)

Το μητρώο ακαμψίας  $k^e$  του στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

$$k^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B \det J d\xi d\eta d\zeta$$

Επίσης ισχύει:  $dV = \det J d\xi d\eta d\zeta$ .

#### 4.5 Συνοριακές Συνθήκες και Φόρτιση Μοντέλων Σηράγγων

Σκοπός της εφαρμογής των συνοριακών συνθηκών είναι καταρχήν να αποδοθούν οι δυνάμεις και οι τάσεις στο μοντέλο της σήραγγας που έχει κατασκευαστεί, και κατά δεύτερον να επιβληθούν περιοριστικές δυνάμεις, ώστε να διατηρηθεί το μοντέλο σε ισορροπία.

Η φόρτιση του διαιρεμένου πεδίου, που αντιπροσωπεύει το υλικό, δύναται να επιτευχθεί με έναν ή περισσότερους από τους ακόλουθους τρόπους (Αγιουτάντης, 2002):

- Επιβολή δυνάμεων πεδίου στην μάζα του στοιχείου (όπως βαρυτικές δυνάμεις – body forces).
- Επιβολή σημειακών δυνάμεων στους κόμβους του στοιχείου (κομβικές δυνάμεις – nodal forces).
- Επιβολή κατανεμημένων δυνάμεων στις πλευρές του στοιχείου (επιφανειακές δυνάμεις – traction forces).
- Επιβολή μετατοπίσεων στους κόμβους του στοιχείου.

Οι βαρυτικές δυνάμεις εφαρμόζονται σε όλο το μοντέλο της σήραγγας, λαμβάνοντας υπόψη την επιτάχυνση της βαρύτητας και την πυκνότητα του γεωυλικού.

Οι κομβικές δυνάμεις εφαρμόζονται σε μοντέλα σηράγγων σε περιπτώσεις χρειάζεται να εφαρμοστεί σημειακή φόρτιση.

Οι δυνάμεις επιφάνειας που εφαρμόζονται σε μοντέλα σηράγγων, υπολογίζονται σύμφωνα με τους παρακάτω τύπους των κατακόρυφων και οριζόντιων τάσεων και του συντελεστή πλευρικών τάσεων  $k$ , που επεξηγήθηκαν αναλυτικά στην ενότητα 2.3:

$$\sigma_v = \gamma h, \quad \sigma_v = \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i, \quad \sigma_h = k \sigma_v$$

Σε βαθιές σήραγγες, δε χρειάζεται να δημιουργηθεί όλο το ύψος από τη στέψη της σήραγγας μέχρι την επιφάνεια του μοντέλου για να εφαρμοστούν εκεί οι δυνάμεις επιφάνειας. Αρκεί να δημιουργηθεί μοντέλο όπου η επιφάνειά του να βρίσκεται σε ύψος ίσο με πέντε φορές τη διάμετρο της σήραγγας. Σε ρηχές σήραγγες όμως πρέπει να δημιουργηθεί όλο το μοντέλο.

Η επιβολή μετατοπίσεων στους συνοριακούς κόμβους εκτός της ανάγκης για ισορροπία στο μοντέλο, εφαρμόζεται και όταν υπάρχει ενδεδειγμένη συμμετρία σε αυτό. Όταν υπάρχει συμμετρία, οι μετατοπίσεις είναι μηδενικές στην διάσταση που είναι κάθετη στο σύνορο. Εφόσον δηλαδή υπάρχει συμμετρία του μοντέλου ως προς τον άξονα  $y$ , τότε, επάνω στο σύνορο η μετατόπιση ως προς την διάσταση  $x$  θα είναι μηδενική ( $dx = 0$ ) και αντιστρόφως. Η αξιοποίηση της συμμετρίας, όπως προαναφέρθηκε, και η κατάλληλη χρήση συνοριακών συνθηκών, δύναται να μειώσει σε σημαντικό βαθμό τον αριθμό των στοιχείων, κατά συνέπεια και των κόμβων στο χωρίο, με αποτέλεσμα να μειωθεί αισθητά και ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος.

Στην περίπτωση κατά την οποία φορτιστεί ένα σώμα και όλοι του οι κόμβοι είναι ελεύθεροι να κινηθούν, τότε δεν υφίσταται παραμόρφωση, αλλά απλή μετακίνηση (ή στροφή). Σε αυτή την περίπτωση δεν είναι δυνατή η επίλυση του προβλήματος, διότι το φαινόμενο δεν υπακούει στην ίδια καταστατική εξίσωση (Αγιουτάντης, 2002).

#### 4.6 Ιδιότητες Υλικών στα Μοντέλα Σηράγγων

Μετά την διακριτοποίηση και τον ορισμό των συνοριακών συνθηκών, εισάγονται τα καταστατικά μοντέλα συμπεριφοράς των γεωυλικών. Αυτά συνήθως είναι το γραμμικό ελαστικό, το ελαστοπλαστικό μοντέλο με εφαρμογή κατάλληλων συναρτήσεων διαρροής όπως περιγράφηκαν σε προηγούμενη ενότητα, το μοντέλο Cam – Clay, το Cap model και άλλα. Τα μοντέλα Cam – Clay και Cap model όμως δεν χρησιμοποιούνται ιδιαίτερα λόγω των περισσότερων παραμέτρων εισαγωγής που απαιτούν (Στειακάκης, 2001).

Οι μηχανικές ιδιότητες που εισάγονται στα μοντέλα των σηράγγων είναι το μέτρο ελαστικότητας του κάθε γεωυλικού  $E$ , ο λόγος του Poisson  $\nu$ , το μοναδιαίο βάρος του γεωυλικού  $\gamma$ , η γωνία εσωτερικής τριβής  $\phi$  και η συνοχή του υλικού  $c$ . Οι δυο πρώτες παράμετροι περιγράφουν τη συμπεριφορά των γεωυλικών στην ελαστική περιοχή ενώ με τις δυο τελευταίες υπολογίζεται η είσοδος στην πλαστική περιοχή, βάσει των συναρτήσεων διαρροής. Η συμπεριφορά του γεωυλικού στην πλαστική περιοχή καθορίζεται όπως προαναφέρθηκε, βάσει του κανόνα διαρροής (τέλεια πλαστικό, κράτυνση, χαλάρωση). Τα προηγούμενα καταστατικά μοντέλα είναι ανεξάρτητα της παραμέτρου του χρόνου (time independent material models). Υπάρχουν όμως και καταστατικά μοντέλα που μπορούν να προσομοιώσουν καταστάσεις ερπυσμού, θερμικής συμπεριφοράς, φαινόμενα πίεσης πόρων και άλλα (Στειακάκης, 2001 από Oettl et al, 1998).

Στην περίπτωση που απαιτείται προσομοίωση των σταδίων εκσκαφής μιας σήραγγας, αυτή γίνεται μέσω της απενεργοποίησης των στοιχείων στο σημείο της εκσκαφής. Έτσι δεν υπάρχουν ιδιότητες των υλικών στο σημείο αυτό και δημιουργούνται τα επιθυμητά στάδια της εκσκαφής.

Τέλος στην περίπτωση της μοντελοποίησης της υποστήριξης μιας σήραγγας, αυτή μπορεί να γίνει με δύο τρόπους.

Ο πρώτος είναι με την απενεργοποίηση συγκεκριμένων στοιχείων του γεωυλικού και ενεργοποίηση των αντίστοιχων στοιχείων της υποστήριξης. Αυτό μπορεί να γίνει

με σταδιακή αποτόνωση των κομβικών δυνάμεων για να προσομοιωθεί καλύτερα η αλληλεπίδραση μεταξύ του γεωυλικού και της υποστήριξης (Galli et al, 2004).

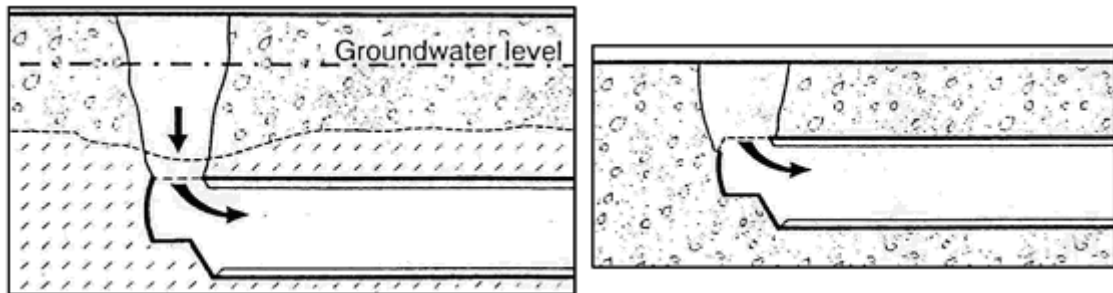
Ο δεύτερος τρόπος είναι με την μοντελοποίηση της υποστήριξης με τη μέθοδο της επαφής. Η μοντελοποίηση με τη μέθοδο της επαφής είναι και η καλύτερη για την μελέτη της αλληλεπίδρασης μεταξύ των γεωυλικών και του υλικού της υποστήριξης. Γεωυλικό και υποστήριξη θεωρούνται δυο ξεχωριστά σώματα τα οποία έρχονται σε επαφή και μελετούνται φαινόμενα όπως η ολίσθηση του γεωυλικού στη διεπιφάνειά του με την υποστήριξη. Η ολίσθηση αυτή εμφανίζεται λόγω της αρκετά μικρότερης διατμητικής αντοχής του γεωυλικού σε σχέση με την υποστήριξη.

## Κεφάλαιο 5

### Μελέτη Περίπτωσης: Ελαστοπλαστική Προσομοίωση του Φαινομένου της ‘Καμινάδας’ σε Σήραγγα

#### 5.1 Εισαγωγή

Η κατασκευή σηράγγων σε αργιλώδη (μαλακά) εδάφη έχει γίνει πολύ δημοφιλής τα τελευταία χρόνια διότι είναι μια από τις συχνά χρησιμοποιούμενες κατασκευαστικές μεθόδους για τη δημιουργία συστημάτων ταχείας μαζικής μεταφοράς (όπως το Μετρό) και αποχετευτικών συστημάτων σε πυκνοκατοικημένα αστικά κέντρα. Στις ορύξεις σηράγγων σε εδαφικά υλικά χαμηλής συνοχής, είναι απαραίτητη η εφαρμογή κάποιων μέτρων υποστήριξης στο μέτωπο ταυτόχρονα με την προχώρηση. Χωρίς τα μέτρα αυτά, μπορεί να επέλθει κατάρρευση, η οποία συνήθως είναι απόρροια των μεγάλων πλαστικών παραμορφώσεων του εδάφους (Lee et al, 2006). Εάν η κατάρρευση αυτή διαδοθεί στην επιφάνεια του εδάφους, τότε το φαινόμενο αυτό ονομάζεται φαινόμενο σπηλαιώσης ή ‘καμινάδας’ (ή αστοχία τύπου ‘καμινάδας’) και οι συνέπειες εκεί μπορεί να είναι σοβαρές σε σχέση πάντα με τις εκάστοτε υπάρχουσες συνθήκες (Σχήμα 5.1) .



Σχήμα 5.1 Τυπικοί μηχανισμοί σπηλαιώσης σε ρηχό κάλυμμα (HSE, 1996)

Σύμφωνα με τους Brady και Brown (1985) τρεις είναι οι μηχανισμοί που σχετίζονται με το φαινόμενο της ‘καμινάδας’ στις σήραγγες και ο καθένας σχετίζεται με διαφορετικά γεωλογικά περιβάλλοντα. Οι μηχανισμοί αυτοί συνήθως σχετίζονται με αδυναμία υποστήριξης στη στέψη της σήραγγας, σε ανεπαρκή προστασία από τον υδροφόρο ορίζοντα ή ανεπαρκή κάλυψη από υπερκείμενα εναποτιθέμενα γεωυλικά. Ακόμη το φαινόμενο της ‘καμινάδας’ στις σήραγγες μπορεί να σχετίζεται με την

ύπαρξη κάθετων ρηγματώσεων και κατασκευών του ανθρώπου όπως γεωτρήσεις ή διάφορα αποχετευτικά έργα.

Ο πρώτος μηχανισμός συναντάται σε διαρρηγμένα ή αδύναμα πετρώματα ή σε προηγουμένως σπηλαιωμένη βραχομάζα. Ο δεύτερος μηχανισμός έχει να κάνει με κατάρρευση ασυνεχούς βραχομάζας, ενώ ο τρίτος μηχανισμός έχει να κάνει με δυσμενή δομικά χαρακτηριστικά (Brady and Brown, 1985).

Η παρουσία φακών χαμηλής συνοχής (π.χ. φακοί από άμμο) αυξάνει την πιθανότητα ρευστοποίησης αμμοδών υλικών η οποία οδηγεί είτε σε τοπική είτε σε ευρύτερη αστάθεια. Για παράδειγμα, κατά τη διάρκεια της κατασκευής μιας επέκτασης στο Μετρό της Τουλούζης (Langmaack and Feng, 2005) με ένα TBM τύπου EPB, ενώ η όρυξη προχωρούσε κανονικά, μόλις εμφανίστηκαν κάποιοι φακοί άμμου, κατέρρευσε η υποστήριξη του μετώπου ενώ παρατηρήθηκε και εισροή υδάτων. Επίσης παρατηρήθηκαν καθιζήσεις στην επιφάνεια του εδάφους.

Ειδικότερα, όσον αφορά τον πρώτο μηχανισμό, αυτός παρουσιάζεται σε περιπτώσεις φτωχής ποιότητας βραχομάζας ή σε πρώην σπηλαιωμένα πετρώματα. Είναι ένας προοδευτικός μηχανισμός που αρχίζει με την αστοχία της οροφής ή σε κεκλιμένες επιφάνειες. Εάν δεν σχηματιστεί ένα σταθερό αυτοσταθεροποιούμενο τόξο, η αστοχία μπορεί να διαδοθεί μέχρι την επιφάνεια. Όταν κατά την αστοχία τα υλικά πέφτουν από την οροφή της σήραγγας ή από την σπηλαιώση, η τελευταία θα γίνει μεγαλύτερη σε διαστάσεις και θα τείνει συνέχεια να γεμίζει το κενό παρασέρνοντας υλικά μέχρι την επιφάνεια του εδάφους. Αυτός ο προοδευτικός μηχανισμός αστοχίας χρησιμοποιείται συχνά σε μελέτες μοντέλων αστοχίας αβαθών σηράγγων σε άμμο και άργιλο (Seidenfub, 2006). Το παραπάνω είναι πολύ πιθανό να συμβεί όταν οι μηχανικές ιδιότητες του γεωυλικού είναι παρόμοιες με αυτές ενός εδάφους. Όταν αρχίσει η διάδοση της αστοχίας προς την επιφάνεια του εδάφους, τότε μπορεί να επιταχυνθεί, ιδιαίτερα όταν δεν υπάρχει επαρκές κάλυμμα στη στέψη της σήραγγας. Αυτό δίνει την εντύπωση ότι η σπηλαιώση προσεγγίζει την επιφάνεια αμέσως και ότι ο μηχανισμός είναι μάλλον ακαριαίος παρά προοδευτικός (Seidenfub, 2006).

Στην παρούσα διατριβή, προσομοιώνεται μέσω λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων ο πρώτος μηχανισμός που οδηγεί στο φαινόμενο της ‘καμινάδας’. Συγκεκριμένα, προσομοιώνεται όρυξη σήραγγας σε εδαφικό γεωυλικό (το οποίο θεωρείται ελαστικό μέσο) με το μέτωπο της σήραγγας να εφάπτεται σε φακό εδαφικού γεωυλικού (το οποίο θεωρείται ελαστοπλαστικό μέσο) φτωχών μηχανικών ιδιοτήτων. Η παραμετρική ανάλυση γίνεται σε δισδιάστατα μοντέλα σε μηκοτομή, με την επιλογή

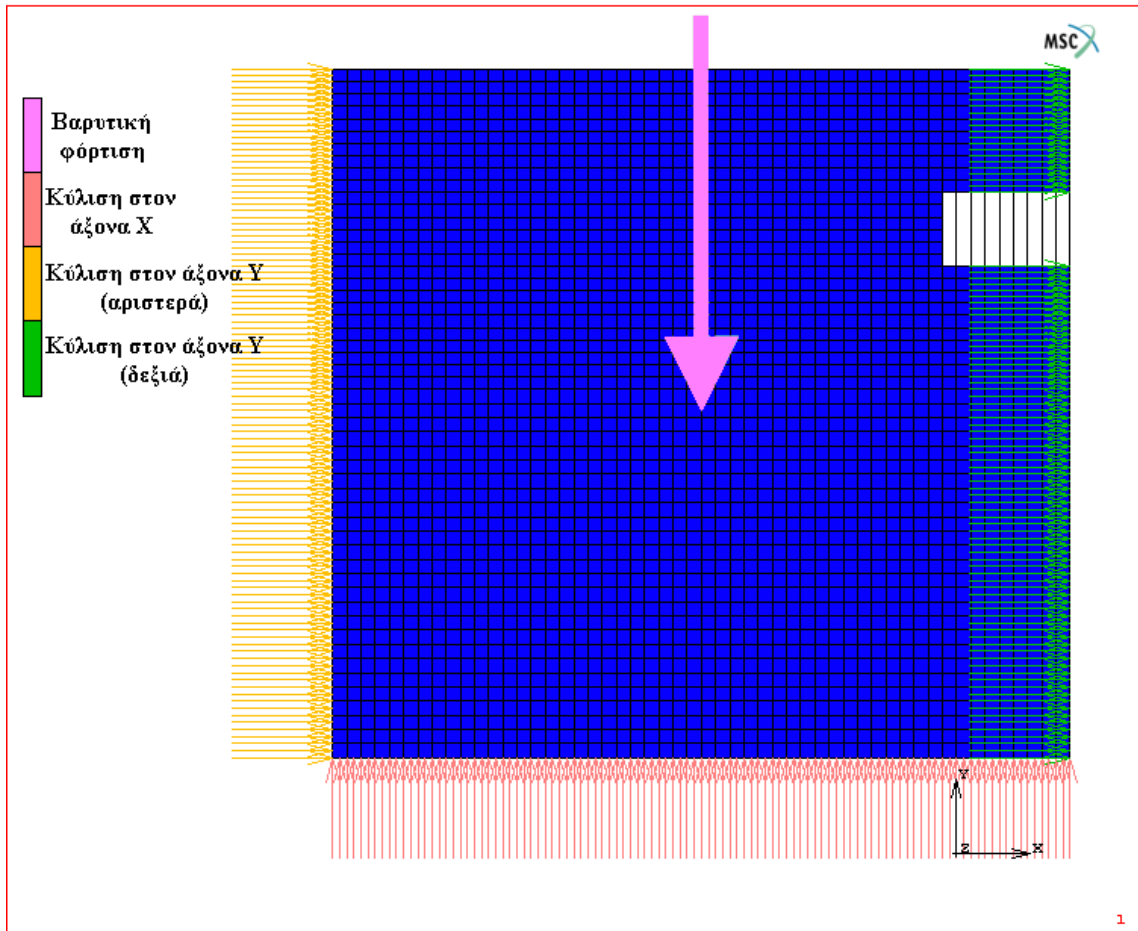
φακών ποικίλης διατομής μπροστά από το μέτωπο εκσκαφής της σήραγγας οι οποίοι προσομοιώνονται ελαστοπλαστικά με τη χρήση τριών διαφορετικών κριτηρίων αστοχίας. Μέρος της παρούσας διατριβής, δημοσιεύθηκε στο 11<sup>ο</sup> διεθνές συνέδριο Associated Research Centers for Urban Underground Space (ACUUS): ‘Underground Space: Expanding the Frontiers’, στις 10 – 13 Σεπτεμβρίου 2007 στην Αθήνα (Agioutantis et al, 2007).

## 5.2 Περιγραφή Μοντέλων

Για τη διερεύνηση του φαινομένου της ‘καμινάδας’, κατασκευάστηκαν 25 διδιάστατα μοντέλα. Η κατασκευή και η επίλυσή τους, έγινε μέσω του λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων, MSC.Marc 2005r3 το οποίο εξειδικεύεται σε μη γραμμική ανάλυση.

### 5.2.1 Γεωμετρία και Συνοριακές Συνθήκες

Κάθε μοντέλο που δημιουργήθηκε, απεικονίζει τη σήραγγα σε πλάγια όψη. Οι διαστάσεις των μοντέλων επιλέχθηκαν έτσι ώστε να αποφευχθούν συνοριακά φαινόμενα όπως για παράδειγμα η επιρροή των συνόρων στην επίλυση γύρω από το μέτωπο της σήραγγας. Η σήραγγα βρίσκεται 10m κάτω από την επιφάνεια του εδάφους και έχει ορυχθεί κατά 10m, ενώ το πλάτος της είναι 6m. Η απόσταση από την επιφάνεια μέχρι το κάτω μέρος του μοντέλου είναι 56m και το μήκος της επιφάνειας είναι 60m. Η γεωμετρία και οι συνοριακές συνθήκες που ορίστηκαν στο μοντέλο, φαίνονται στο Σχήμα 5.2. Στο αριστερό και στο δεξιό όριο του μοντέλου εφαρμόστηκε κύλιση στον άξονα Y ( $dX = 0$ ), ενώ στο κάτω όριο του μοντέλου, εφαρμόστηκε κύλιση στον άξονα X ( $dY = 0$ ). Η φόρτιση του μοντέλου έγινε με επιβολή βαρυτικής φόρτισης, θεωρώντας το μοναδιαίο βάρος του κύριου γεωυλικού  $\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$  ενώ το μοναδιαίο βάρος του κάθε φακού θεωρήθηκε  $\gamma = 14 \text{ kN/m}^3$ . Τέλος, τα μοντέλα επιλύθηκαν με παραδοχή επίπεδης τάσης.

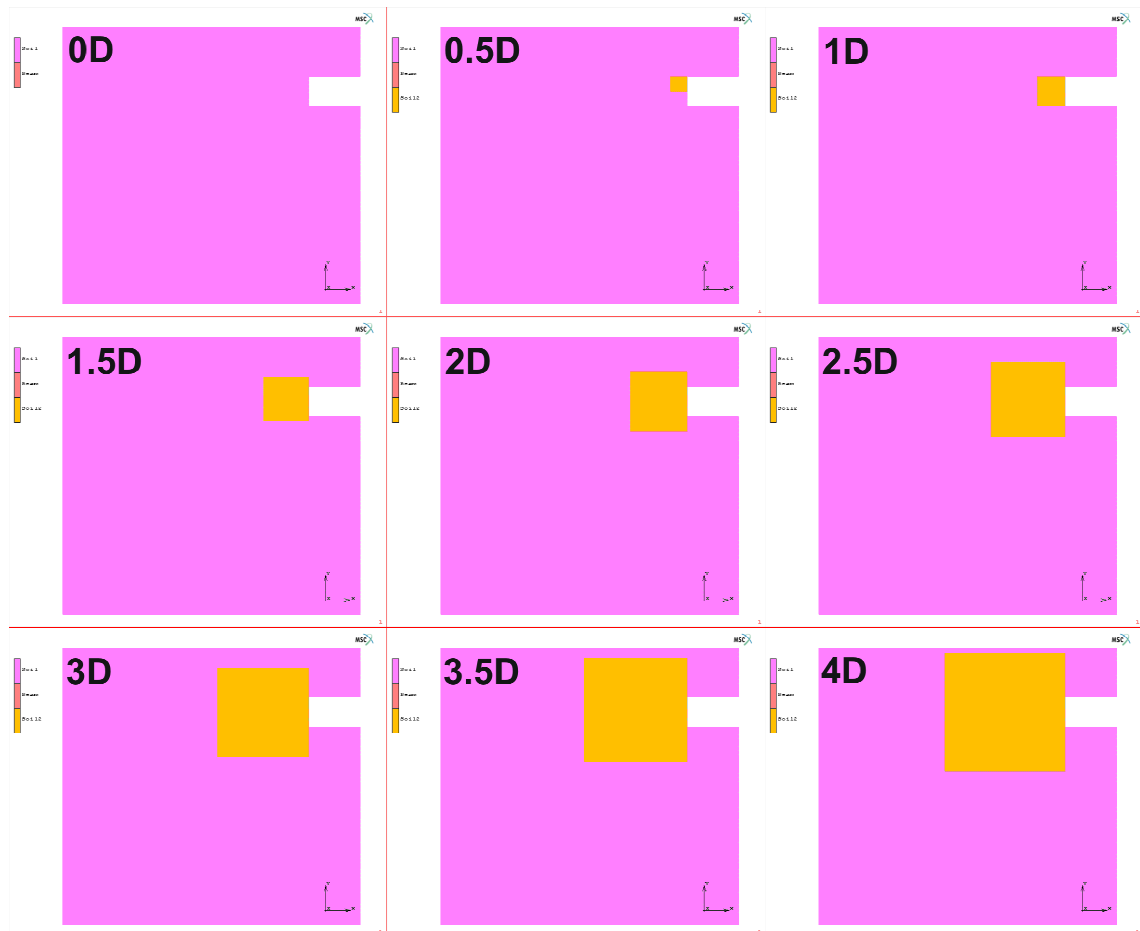


Σχήμα 5.2 Γεωμετρία και συνοριακές συνθήκες του μοντέλου

### 5.2.2 Ιδιότητες Υλικών και Είδη Στοιχείων

Κάθε μοντέλο είναι το ίδιο γεωμετρικά αλλά με διαφορές στις ιδιότητες των υλικών. Έτσι όπως προαναφέρθηκε, ένας ‘μαλακός’ εδαφικός φακός εισήχθη στο μοντέλο μέσω της παραμετρικής ανάλυσης. Ο φακός ήταν τετραγωνικός με πλευρά ίση με  $0D$  (μοντέλο χωρίς φακό),  $0.5D$ ,  $1D$ ,  $1.5D$ ,  $2D$ ,  $2.5D$ ,  $3D$ ,  $3.5D$  και  $4D$ , όπου  $D$  είναι το πλάτος της σήραγγας (Σχήμα 5.3).





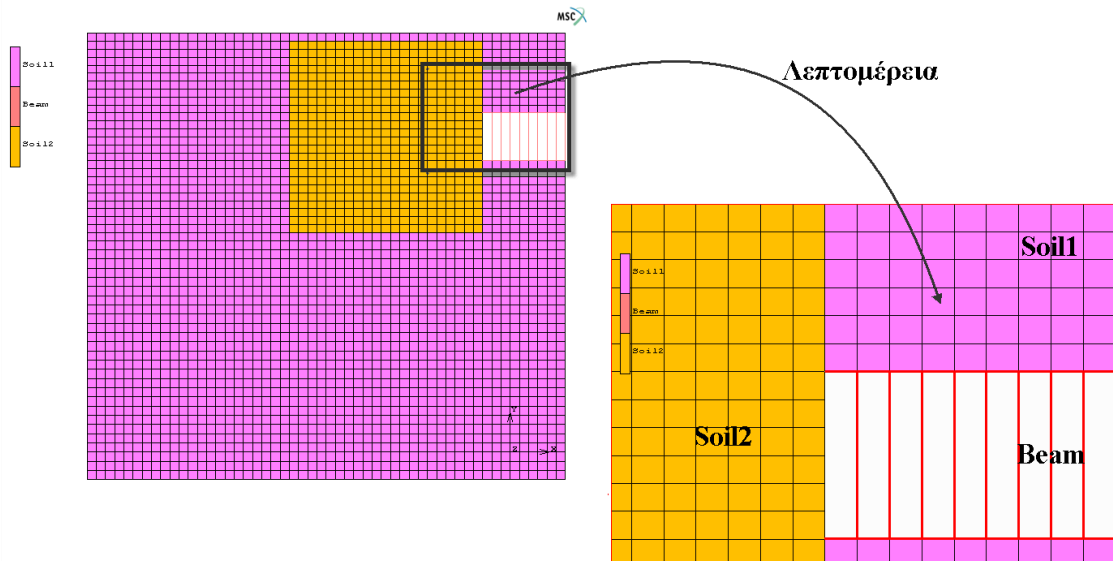
Σχήμα 5.3 Διάφορες γεωμετρίες φακών

Το εδαφικό υλικό που αποτελεί την κύρια μάζα του μοντέλου ονομάστηκε soil1 και προσομοιάστηκε ως ελαστικό, ομογενές και ισότροπο. Η υποστήριξη της σήραγγας ονομάστηκε beam (Σχήμα 5.4) και έγινε με δοκούς χάλυβα πάχους 10 cm και διατομής 100 cm<sup>2</sup>. Ο φακός τετραγωνικής διατομής από έδαφος με φτωχά μηχανικά χαρακτηριστικά προσομοιώθηκε ως ελαστοπλαστικό υλικό με γωνία εσωτερικής τριβής 10<sup>0</sup> και συνοχή 30 kPa. Το υλικό αυτό ονομάστηκε soil2 (Σχήμα 5.4) και η προσομοίωση του έγινε χρησιμοποιώντας τρία διαφορετικά κριτήρια αστοχίας. Το γραμμικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb, το παραβολικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb και το κριτήριο αστοχίας von Mises. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι τα μοντέλα που μελετήθηκαν συνολικά ήταν 25:

- 1 μοντέλο χωρίς φακό μπροστά από το μέτωπο
- 8 μοντέλα με φακούς 0.5D, 1D, 1.5D, 2D, 2.5D, 3D, 3.5D και 4D και ελαστοπλαστική επίλυση με χρήση του γραμμικού κριτηρίου αστοχίας Mohr – Coulomb

- 8 μοντέλα με φακούς 0.5D, 1D, 1.5D, 2D, 2.5D, 3D, 3.5D και 4D και ελαστοπλαστική επίλυση με χρήση του παραβολικού κριτηρίου αστοχίας Mohr – Coulomb
- 8 μοντέλα με φακούς 0.5D, 1D, 1.5D, 2D, 2.5D, 3D, 3.5D και 4D και ελαστοπλαστική επίλυση με χρήση του κριτηρίου αστοχίας von Mises.

Οι ιδιότητες όλων των υλικών φαίνονται στον πίνακα 5.1.



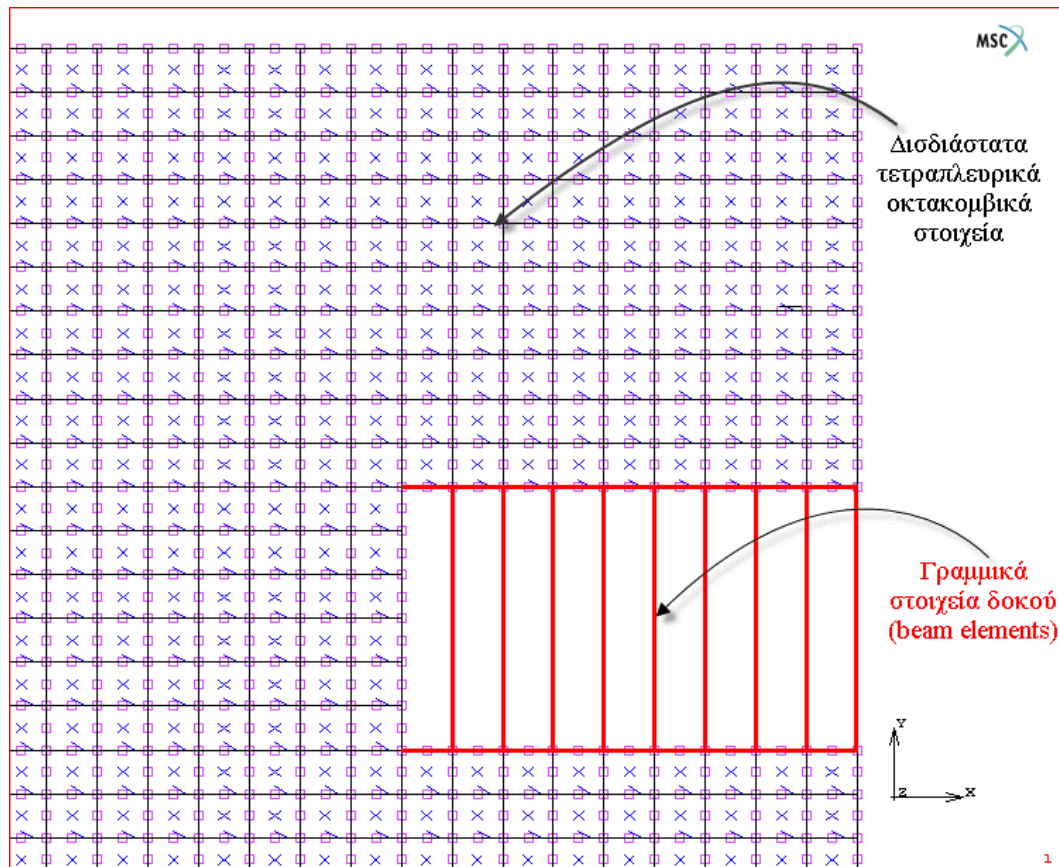
Σχήμα 5.4 Είδη υλικών μοντέλου

Πίνακας 5.1 Μηχανικές ιδιότητες υλικών μοντέλων

| Υλικό                               | soil1                | soil2                | beam                 |
|-------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Τύπος μοντέλου                      | ελαστικό             | ελαστοπλαστικό       | ελαστικό             |
| Μέτρο ελαστικότητας (E)             | 150 MPa              | 3 MPa                | 210 GPa              |
| Λόγος Poisson ( $\nu$ )             | 0.3                  | 0.3                  | 0.25                 |
| Γωνία εσωτερικής τριβής ( $\phi$ )  | –                    | $10^0$               | –                    |
| Συνοχή (c)                          | –                    | 30 kPa               | –                    |
| Μοναδιαίο βάρος υλικού ( $\gamma$ ) | 24 kN/m <sup>3</sup> | 14 kN/m <sup>3</sup> | 77 kN/m <sup>3</sup> |

Τα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν στη διακριτοποίηση του μοντέλου ήταν δισδιάστατα τετραπλευρικά οκτακομβικά στοιχεία (element type 27 στη βιβλιοθήκη στοιχείων του λογισμικού MSC.Marc 2005r3) (Σχήμα 5.5), τα οποία επιλέχθηκαν λόγω του γεγονότος ότι οι τύποι των υλικών που χρησιμοποιήθηκαν ήταν εδαφικοί και τα στοιχεία αυτά είναι καταλληλότερα σε αυτές τις περιπτώσεις (MSC.Marc Volume B, 2006). Για την υποστήριξη της σήραγγας, χρησιμοποιήθηκαν μονοδιάστατα γραμμικά

στοιχεία δοκού (beam element, element type 5 στη βιβλιοθήκη στοιχείων του λογισμικού MSC.Marc 2005r3) (Σχήμα 5.5) τα οποία τοποθετήθηκαν οριζόντια κατά το μήκος της σήραγγας, αλλά και κάθετά ανά 1 m. Ο συνολικός αριθμός των στοιχείων που αποτελούν το κάθε μοντέλο ήταν 2695 ενώ οι κόμβοι ήταν 8177. Ο αριθμός των στοιχείων και των κόμβων για όλα τα μοντέλα φακών, φαίνονται στον Πίνακα 5.2.



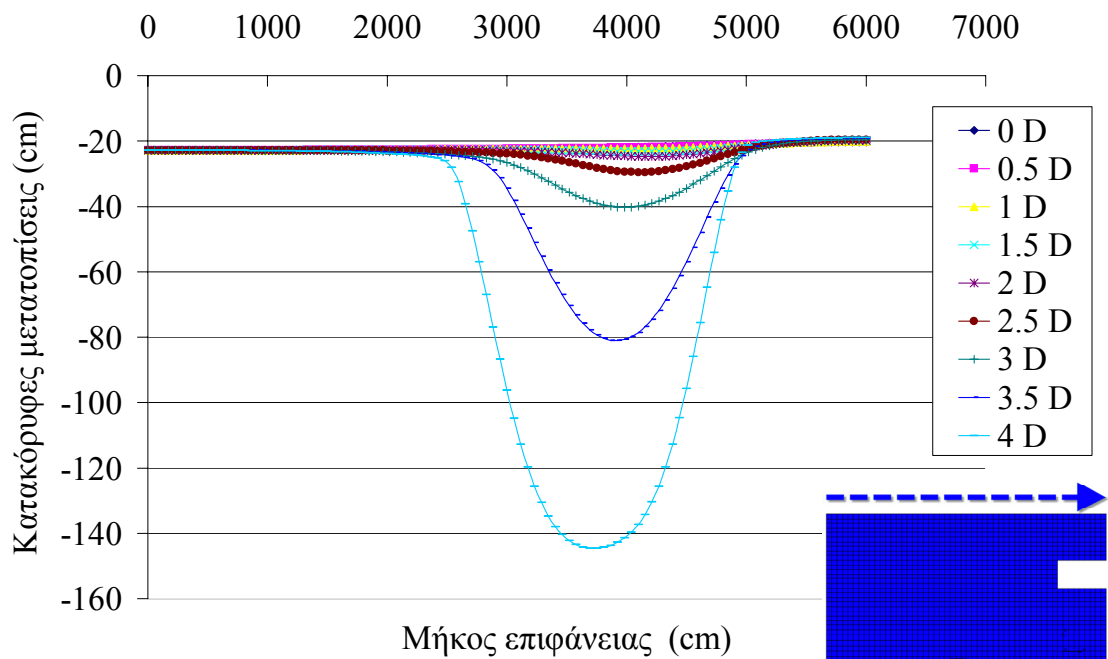
Σχήμα 5.5 Είδη στοιχείων μοντέλου

Πίνακας 5.2 Αριθμός στοιχείων και κόμβων για όλα τα μοντέλα φακών

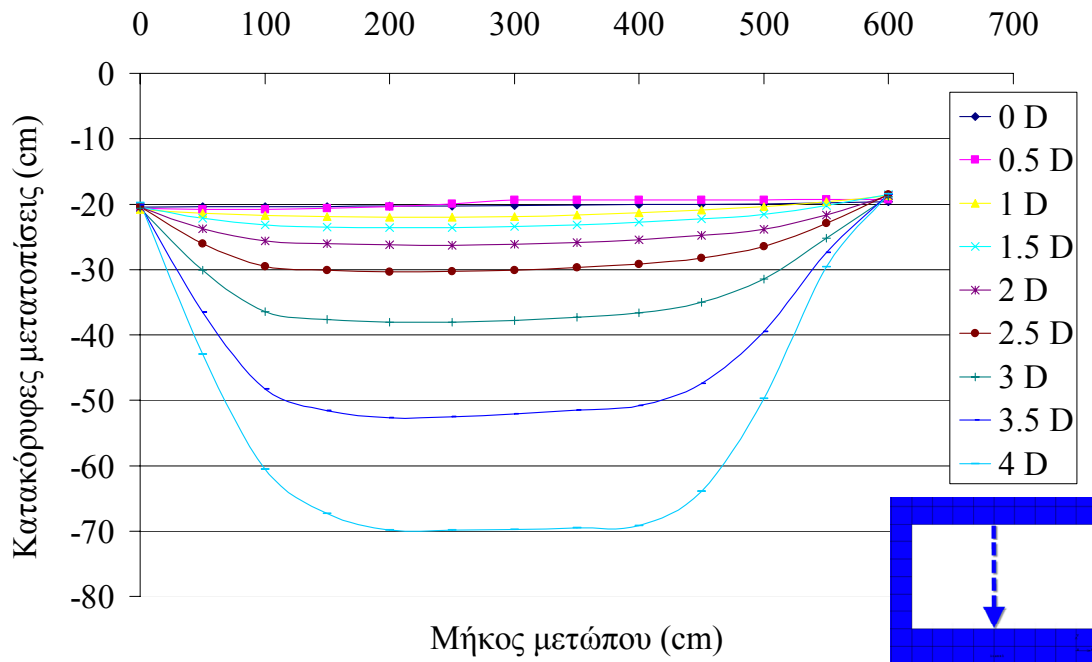
| Φακοί             | soil1    |        | soil2    |                  | beam     |        |
|-------------------|----------|--------|----------|------------------|----------|--------|
|                   | Στοιχεία | Κόμβοι | Στοιχεία | Κόμβοι           | Στοιχεία | Κόμβοι |
| 0D                | 2650     | 8177   | –        | –                | 45       | 38     |
| 0.5D              | 2641     | 8156   | 9        | 40               | 45       | 38     |
| 1D                | 2620     | 8097   | 30       | 113              | 45       | 38     |
| 1.5D              | 2578     | 7983   | 72       | 251              | 45       | 38     |
| 2D                | 2530     | 7849   | 120      | 405              | 45       | 38     |
| 2.5D              | 2455     | 7636   | 195      | 642              | 45       | 38     |
| 3D                | 2362     | 7369   | 288      | 933              | 45       | 38     |
| 3.5D              | 2272     | 7109   | 378      | 1213             | 45       | 38     |
| 4D                | 2146     | 6743   | 504      | 1603             | 45       | 38     |
| Συνολικά στοιχεία |          |        | 2695     | Συνολικοί κόμβοι |          | 8177   |

### 5.3 Αποτελέσματα Επίλυσης με το Γραμμικό Κριτήριο Αστοχίας Mohr – Coulomb

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ελαστοπλαστική επίλυση στα μοντέλα με εφαρμογή του γραμμικού κριτηρίου αστοχίας Mohr – Coulomb. Η επίλυση έγινε σε 100 στάδια φόρτισης. Σκοπός στη διερεύνηση του φαινομένου της ‘καμινάδας’, είναι να καθοριστεί το πώς επηρεάζεται η εντατική κατάσταση στην επιφάνεια και στο μέτωπο της σήραγγας από την απότομη μετάβαση από σχετικά καλές σε κακές (και συνήθως απρόβλεπτες) γεωλογικές συνθήκες. Έτσι κατασκευάζονται διαγράμματα των κάθετων μετατοπίσεων που λαμβάνουν χώρα στην επιφάνεια του εδάφους (Σχήμα 5.6) και στο μέτωπο της σήραγγας (Σχήμα 5.7). Στα παρακάτω σχήματα απεικονίζεται με μπλε βέλος η φορά της διαδρομής των κόμβων από τους οποίους λήφθηκαν τα δεδομένα.



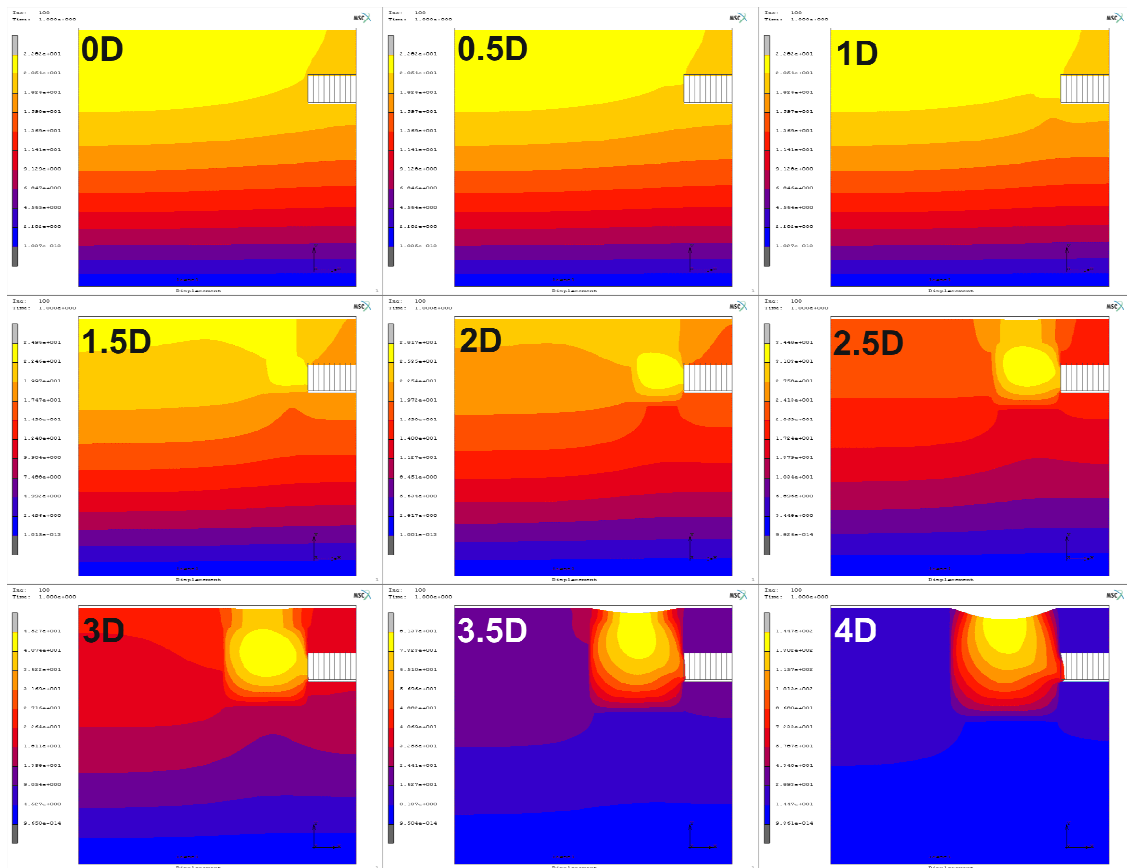
**Σχήμα 5.6** Διάγραμμα κατακόρυφων μετατοπίσεων κατά μήκος της επιφάνειας για όλους τους φακούς (γραμμικό Mohr – Coulomb)



**Σχήμα 5.7** Διάγραμμα κατακόρυφων μετατοπίσεων κατά μήκος του μετώπου για όλους τους φακούς (γραμμικό Mohr – Coulomb)

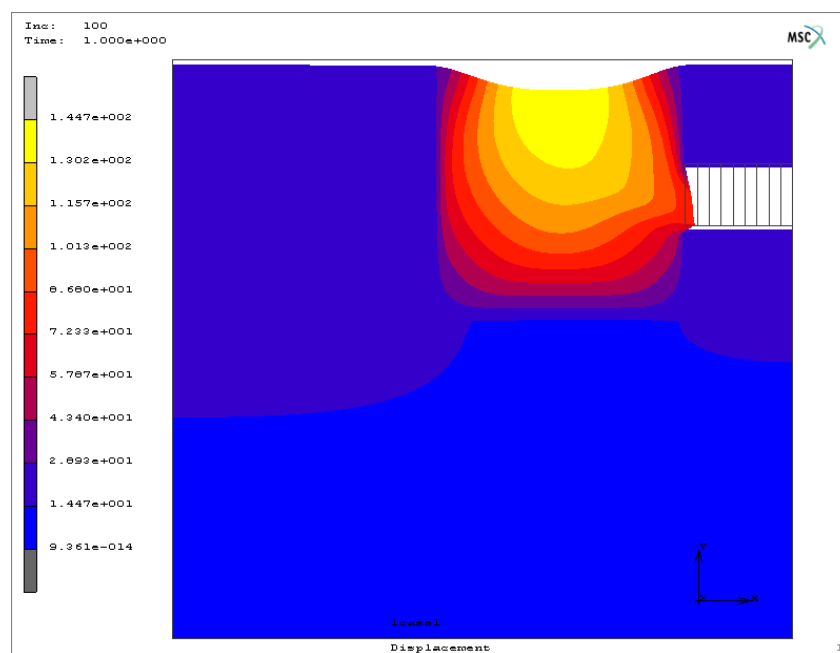
Όπως φαίνεται από τα παραπάνω διαγράμματα (και όπως αναμενόταν), οι κατακόρυφες μετατοπίσεις αυξάνονται όσο αυξάνεται το μέγεθος της γεωμετρίας του φακού. Στο Σχήμα 5.6 παρατηρείται ότι οι κατακόρυφες μετατοπίσεις στην επιφάνεια αυξάνονται ουσιαστικά από το μοντέλο 3D και μετά. Οι κατακόρυφες μετατοπίσεις στην επιφάνεια για το μοντέλο χωρίς φακό είναι περίπου 20 cm. Στο μοντέλο 3D είναι διπλάσιες, στο μοντέλο 3.5D τετραπλάσιες και στο μοντέλο 4D επταπλάσιες. Αντίστοιχα στο Σχήμα 5.7 παρατηρείται ότι οι κατακόρυφες μετατοπίσεις στο μέτωπο αυξάνονται από το μοντέλο 3D και μετά. Οι κατακόρυφες μετατοπίσεις στο μέτωπο για το μοντέλο χωρίς φακό είναι περίπου 20 cm. Στο μοντέλο 3D είναι περίπου 40 cm, στο μοντέλο 3.5D περίπου 50 cm και στο μοντέλο 4D 70 cm.

Από τα παραπάνω, φαίνεται ότι τα μοντέλα 3.5D και 4D δίνουν πολύ μεγαλύτερες μετατοπίσεις σε σχέση με τα προηγούμενα μοντέλα που οι μετατοπίσεις τους αυξάνονται σχεδόν αναλογικά με την αύξηση της διάστασης του φακού. Το μοντέλο 4D είναι αυτό που περιγράφει χαρακτηριστικότερα το φαινόμενο της ‘καμινάδας’ δίνοντας κάθετες μετατοπίσεις 140 cm και 70 cm στην επιφάνεια και στο μέτωπο αντίστοιχα. Στο Σχήμα 5.8 απεικονίζονται με χρωματικό κώδικα οι συνολικές μετατοπίσεις για όλα τα μοντέλα.



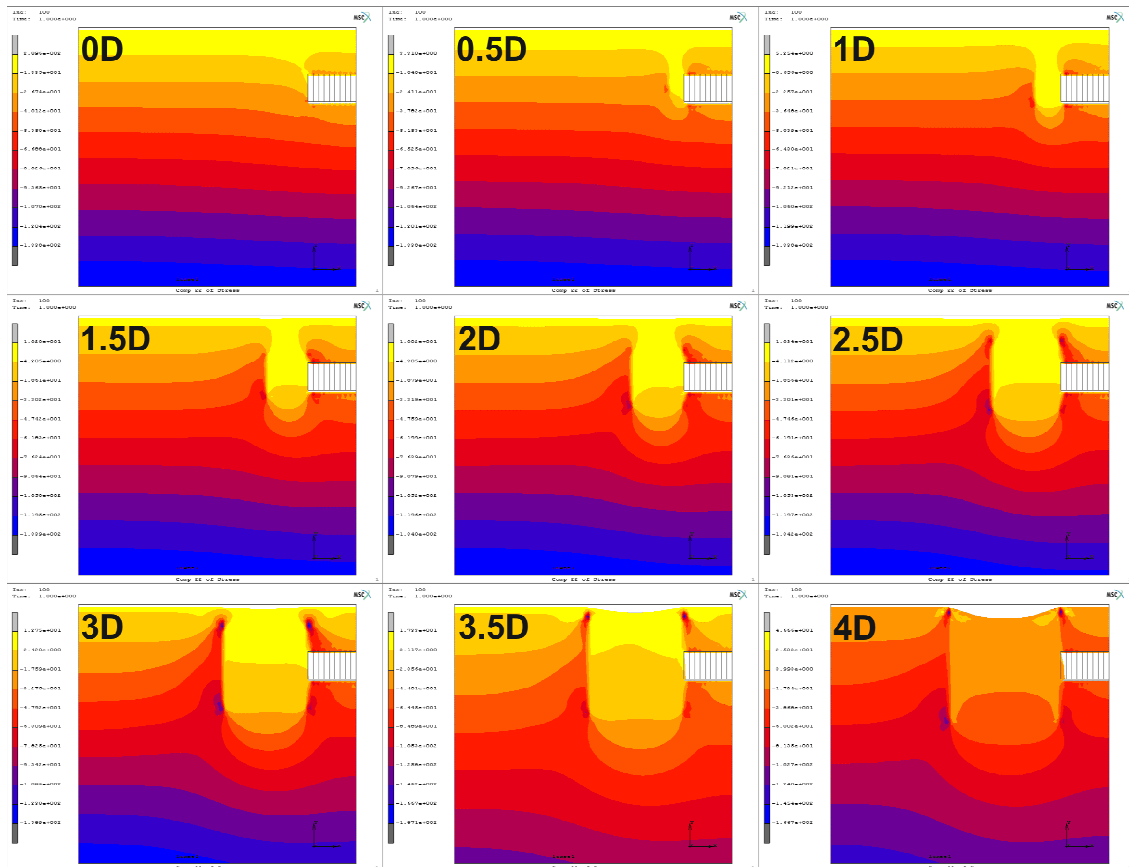
Σχήμα 5.8 Συνολικές μετατοπίσεις για όλους τους φακούς (γραμμικό Mohr – Coulomb)

Στο Σχήμα 5.9 απεικονίζονται με χρωματικό κώδικα οι συνολικές μετατοπίσεις για το μοντέλο 4D το οποίο περιγράφει χαρακτηριστικότερα το φαινόμενο της ‘καμινάδας’.



Σχήμα 5.9 Συνολικές μετατοπίσεις μοντέλου με φακό 4D (γραμμικό Mohr – Coulomb)

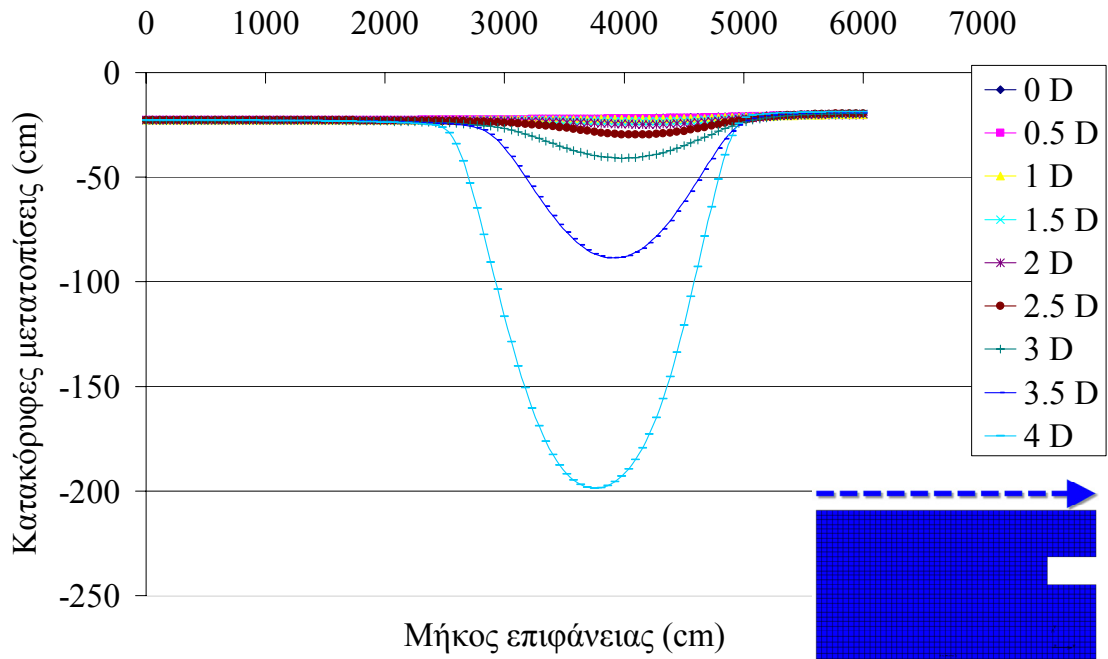
Στο Σχήμα 5.10 απεικονίζονται με χρωματικό κώδικα οι κάθετες τάσεις ( $\sigma_{22}$ ) για όλα τα μοντέλα.



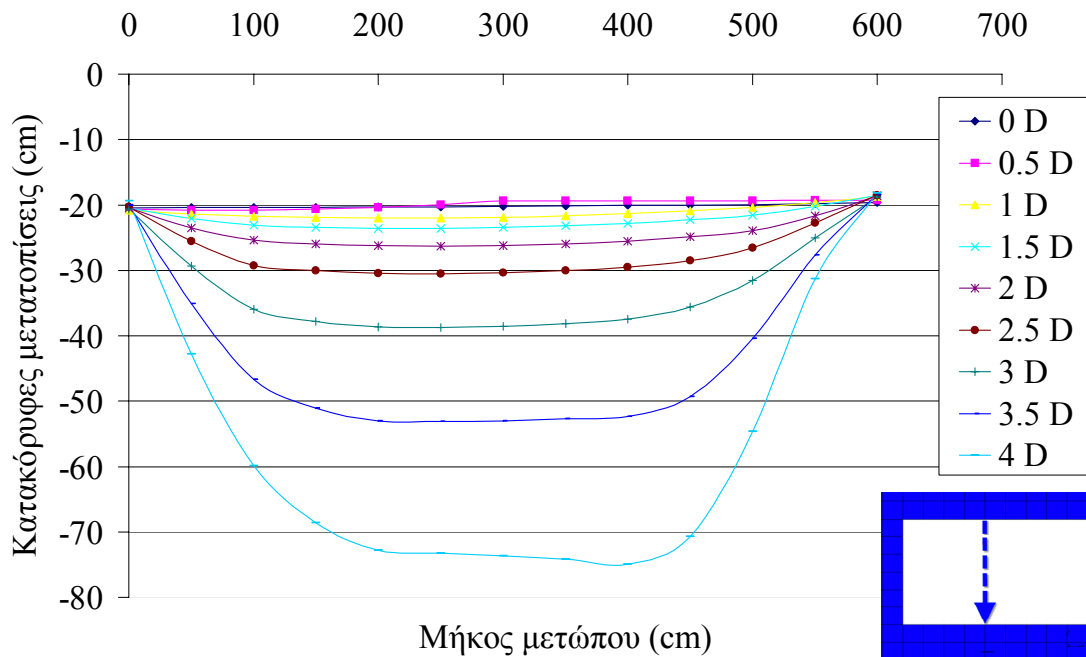
Σχήμα 5.10 Κάθετες τάσεις ( $\sigma_{22}$ ) για όλους τους φακούς (γραμμικό Mohr – Coulomb)

#### 5.4 Αποτελέσματα Επίλυσης με το Παραβολικό Κριτήριο Αστοχίας Mohr – Coulomb

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ελαστοπλαστική επίλυση στα μοντέλα με εφαρμογή του παραβολικού κριτηρίου αστοχίας Mohr – Coulomb. Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα των κάθετων μετατοπίσεων που λαμβάνουν χώρα στην επιφάνεια του εδάφους (Σχήμα 5.11) και στο μέτωπο της σήραγγας (Σχήμα 5.12).



**Σχήμα 5.11** Διάγραμμα κατακόρυφων μετατοπίσεων κατά μήκος της επιφάνειας για όλους τους φακούς (παραβολικό Mohr – Coulomb)



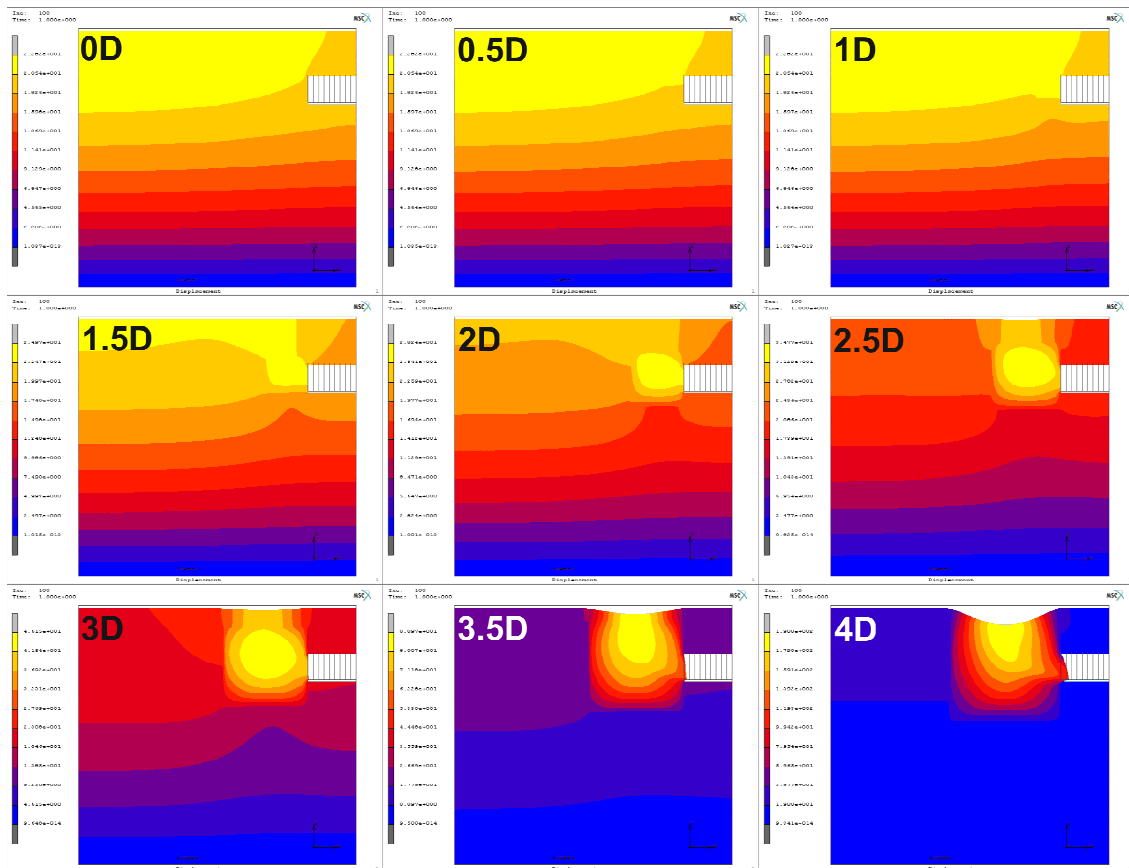
**Σχήμα 5.12** Διάγραμμα κατακόρυφων μετατοπίσεων κατά μήκος του μετώπου για όλους τους φακούς (παραβολικό Mohr – Coulomb)

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω διαγράμματα, οι κατακόρυφες μετατοπίσεις αυξάνονται όσο αυξάνεται το μέγεθος της γεωμετρίας του φακού. Στο Σχήμα 5.11 παρατηρείται ότι οι κατακόρυφες μετατοπίσεις στην επιφάνεια αυξάνονται ουσιαστικά από το μοντέλο 3D και μετά. Οι κατακόρυφες μετατοπίσεις στην επιφάνεια για το μοντέλο χωρίς φακό είναι περίπου 20 cm. Στο μοντέλο 3D είναι διπλάσιες, στο



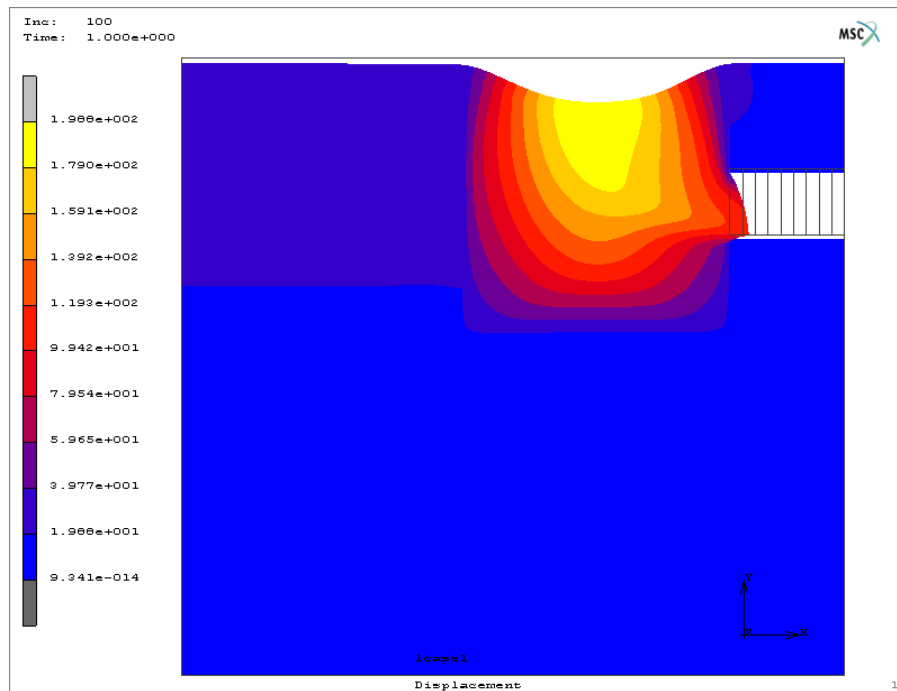
μοντέλο 3.5D τετραπλάσιες και στο μοντέλο 4D δεκαπλάσιες. Αντίστοιχα στο Σχήμα 5.12 παρατηρείται ότι οι κατακόρυφες μετατοπίσεις στο μέτωπο αυξάνονται από το μοντέλο 3D και μετά. Οι κατακόρυφες μετατοπίσεις στο μέτωπο για το μοντέλο χωρίς φακό είναι περίπου 20 cm. Στο μοντέλο 3D είναι περίπου 40 cm, στο μοντέλο 3.5D πάνω από 50 cm και στο μοντέλο 4D πάνω από 70 cm.

Από τα παραπάνω, φαίνεται ότι τα μοντέλα 3.5D και 4D δίνουν πολύ μεγαλύτερες μετατοπίσεις σε σχέση με τα προηγούμενα μοντέλα που οι μετατοπίσεις τους αυξάνονται σχεδόν αναλογικά με την αύξηση της διάστασης του φακού. Το μοντέλο 4D είναι αυτό που περιγράφει χαρακτηριστικότερα το φαινόμενο της ‘καμινάδας’ δίνοντας κάθετες μετατοπίσεις 200 cm και 75 cm στην επιφάνεια και στο μέτωπο αντίστοιχα. Στο Σχήμα 5.13 απεικονίζονται με χρωματικό κώδικα οι συνολικές μετατοπίσεις για όλα τα μοντέλα.



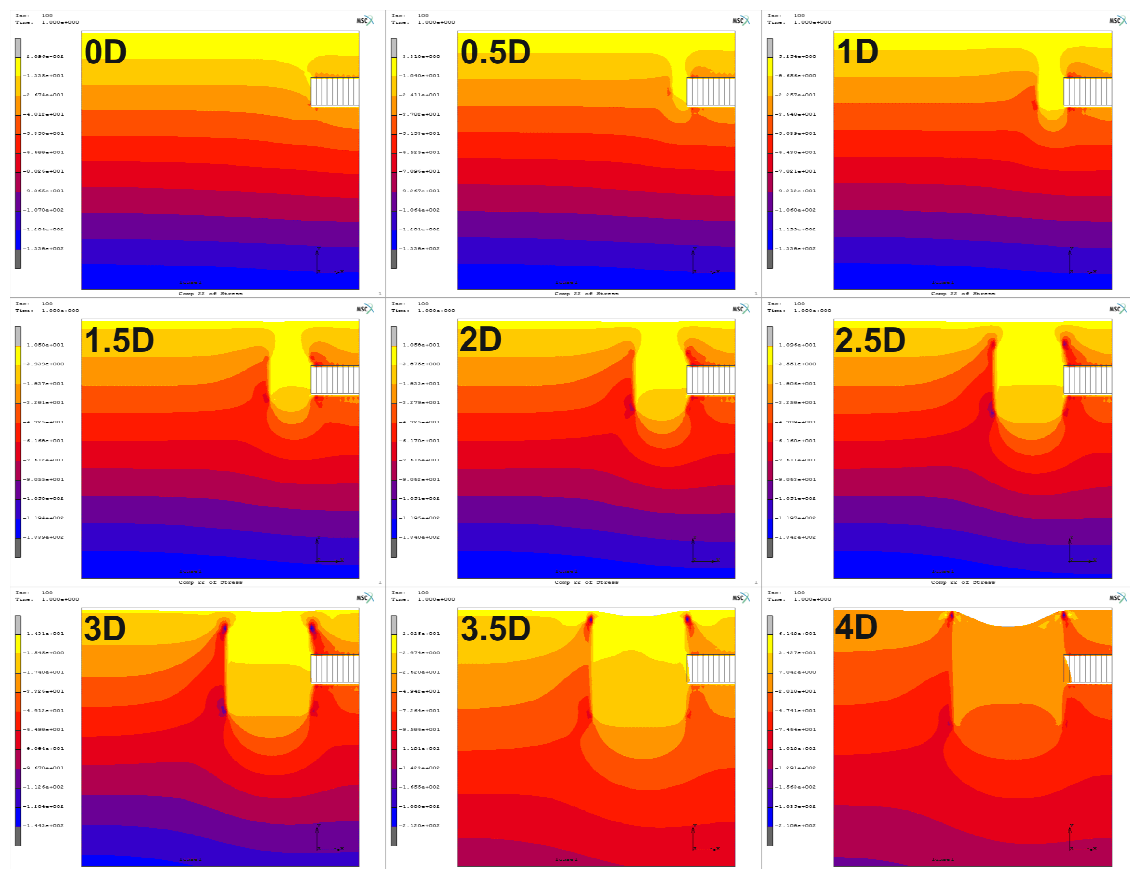
**Σχήμα 5.13** Συνολικές μετατοπίσεις για όλους τους φακούς (παραβολικό Mohr – Coulomb)

Στο Σχήμα 5.14 απεικονίζονται με χρωματικό κώδικα οι συνολικές μετατοπίσεις για το μοντέλο 4D το οποίο περιγράφει χαρακτηριστικότερα το φαινόμενο της ‘καμινάδας’.



Σχήμα 5.14 Συνολικές μετατοπίσεις μοντέλου με φακό 4D (παραβολικό Mohr – Coulomb)

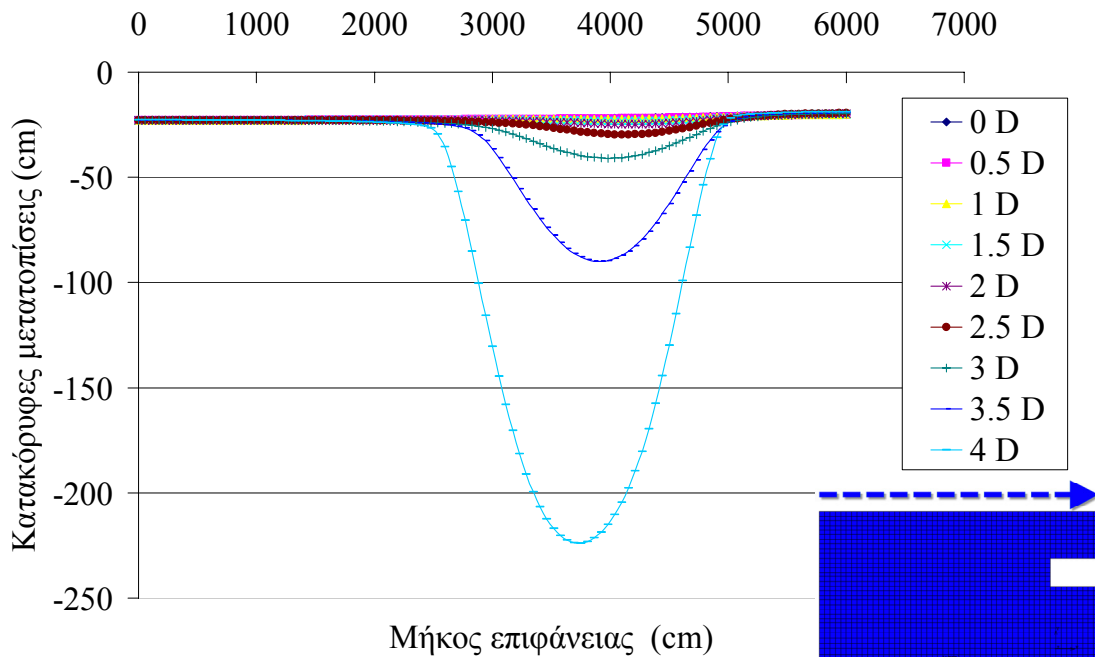
Στο Σχήμα 5.15 απεικονίζονται με χρωματικό κώδικα οι κάθετες τάσεις ( $\sigma_{22}$ ) για όλα τα μοντέλα.



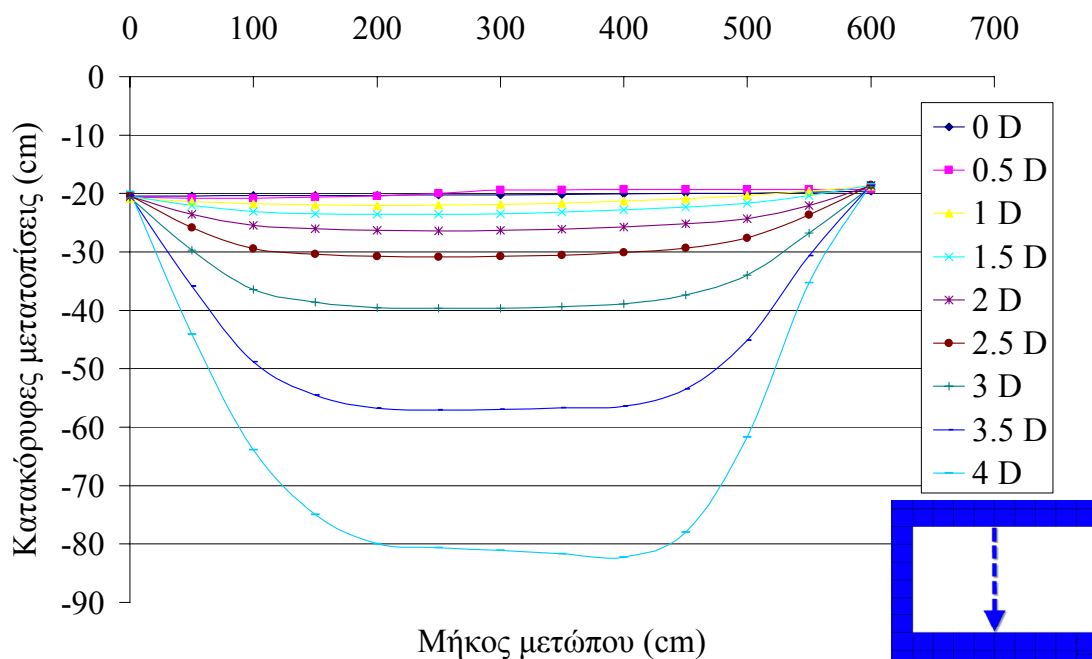
Σχήμα 5.15 Κάθετες τάσεις ( $\sigma_{22}$ ) για όλους τους φακούς (παραβολικό Mohr – Coulomb)

## 5.5 Αποτελέσματα Επίλυσης με το Κριτήριο Αστοχίας von Mises

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ελαστοπλαστική επίλυση στα μοντέλα με εφαρμογή του κριτηρίου αστοχίας von Mises. Τα διαγράμματα των κάθετων μετατοπίσεων που λαμβάνουν χώρα στην επιφάνεια του εδάφους (Σχήμα 5.16) και στο μέτωπο της σήραγγας (Σχήμα 5.17) είναι τα ακόλουθα:



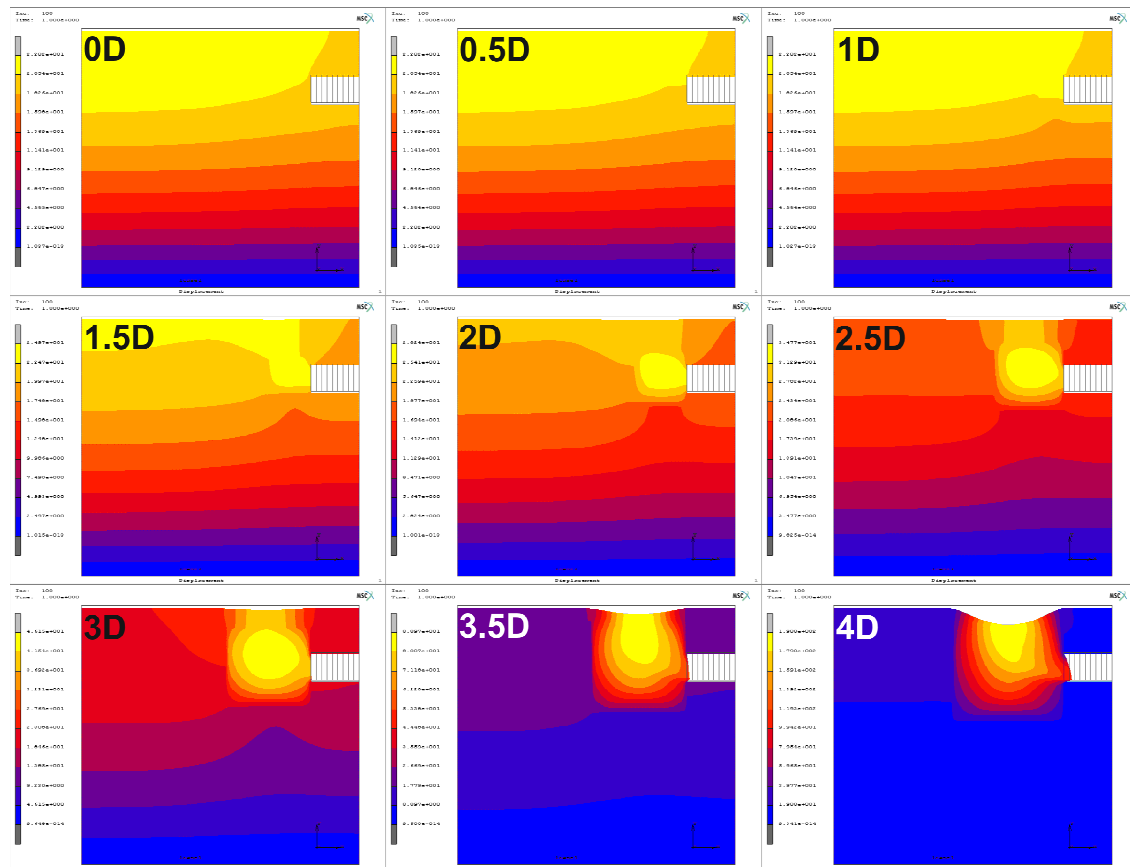
**Σχήμα 5.16** Διάγραμμα κατακόρυφων μετατοπίσεων κατά μήκος της επιφάνειας για όλους τους φακούς (von Mises)



**Σχήμα 5.17** Διάγραμμα κατακόρυφων μετατοπίσεων κατά μήκος του μετώπου για όλους τους φακούς (von Mises)

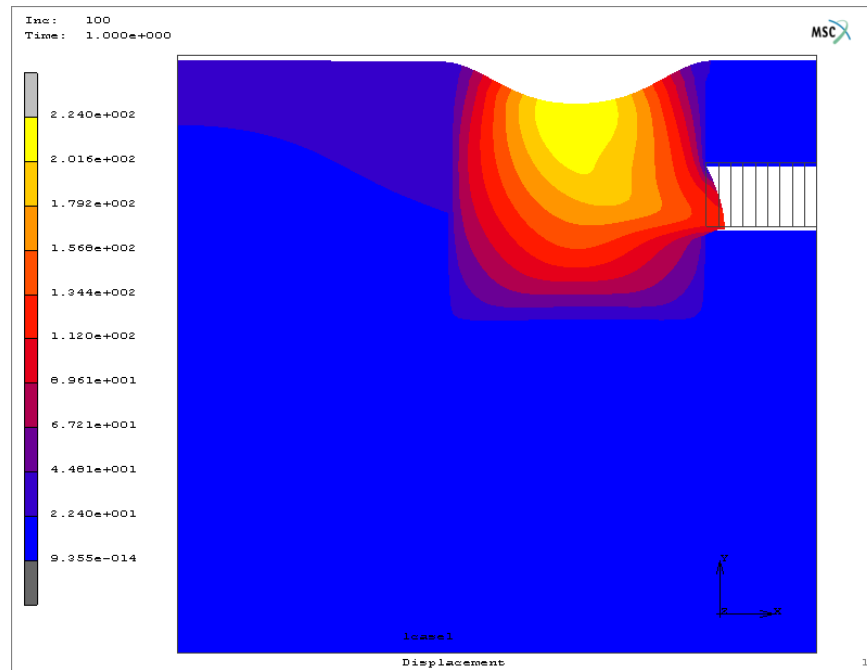
Όπως φαίνεται από τα παραπάνω διαγράμματα, οι κατακόρυφες μετατοπίσεις αυξάνονται όσο αυξάνεται το μέγεθος της γεωμετρίας του φακού. Στο Σχήμα 5.16 παρατηρείται ότι οι κατακόρυφες μετατοπίσεις στην επιφάνεια αυξάνονται ουσιαστικά από το μοντέλο 3D και μετά. Οι κατακόρυφες μετατοπίσεις στην επιφάνεια για το μοντέλο χωρίς φακό είναι περίπου 20 cm. Στο μοντέλο 3D είναι διπλάσιες, στο μοντέλο 3.5D τετραπλάσιες και στο μοντέλο 4D εντεκαπλάσιες. Αντίστοιχα στο Σχήμα 5.17 παρατηρείται ότι οι κατακόρυφες μετατοπίσεις στο μέτωπο αυξάνονται από το μοντέλο 3D και μετά. Οι κατακόρυφες μετατοπίσεις στο μέτωπο για το μοντέλο χωρίς φακό είναι περίπου 20 cm. Στο μοντέλο 3D είναι περίπου 40 cm, στο μοντέλο 3.5D 55 cm και στο μοντέλο 4D πάνω από 80 cm.

Από τα παραπάνω, φαίνεται ότι τα μοντέλα 3.5D και 4D δίνουν πολύ μεγαλύτερες μετατοπίσεις σε σχέση με τα προηγούμενα μοντέλα που οι μετατοπίσεις τους αυξάνονται σχεδόν αναλογικά με την αύξηση της διάστασης του φακού. Το μοντέλο 4D είναι αυτό που περιγράφει χαρακτηριστικότερα το φαινόμενο της ‘καμινάδας’ δίνοντας κάθετες μετατοπίσεις 220 cm και 80 cm στην επιφάνεια και στο μέτωπο αντίστοιχα. Στο Σχήμα 5.18 απεικονίζονται με χρωματικό κώδικα οι συνολικές μετατοπίσεις για όλα τα μοντέλα.



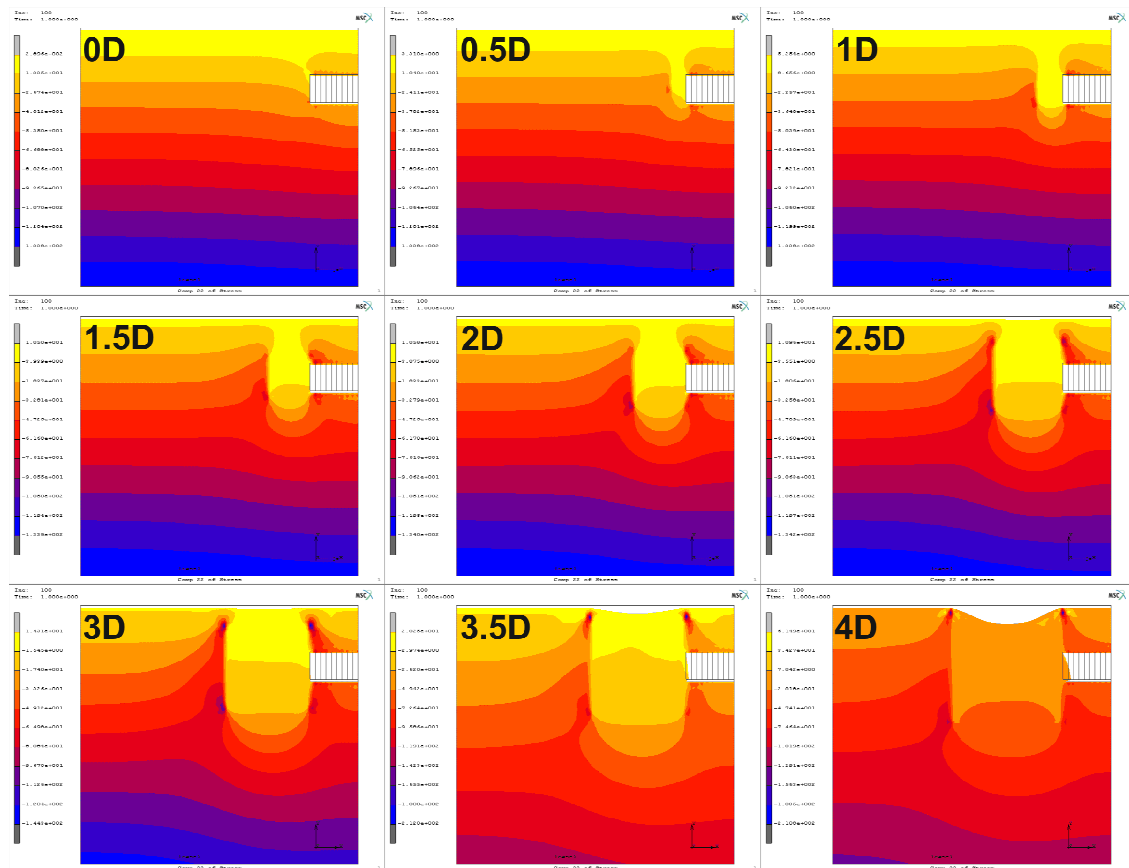
Σχήμα 5.18 Συνολικές μετατοπίσεις για όλους τους φακούς (von Mises)

Στο Σχήμα 5.19 απεικονίζονται με χρωματικό κώδικα οι συνολικές μετατοπίσεις για το μοντέλο 4D το οποίο περιγράφει χαρακτηριστικότερα το φαινόμενο της ‘καμινάδας’.



Σχήμα 5.19 Συνολικές μετατοπίσεις μοντέλου με φακό 4D (von Mises)

Στο Σχήμα 5.20 απεικονίζονται με χρωματικό κώδικα οι κάθετες τάσεις ( $\sigma_{22}$ ) για όλα τα μοντέλα.

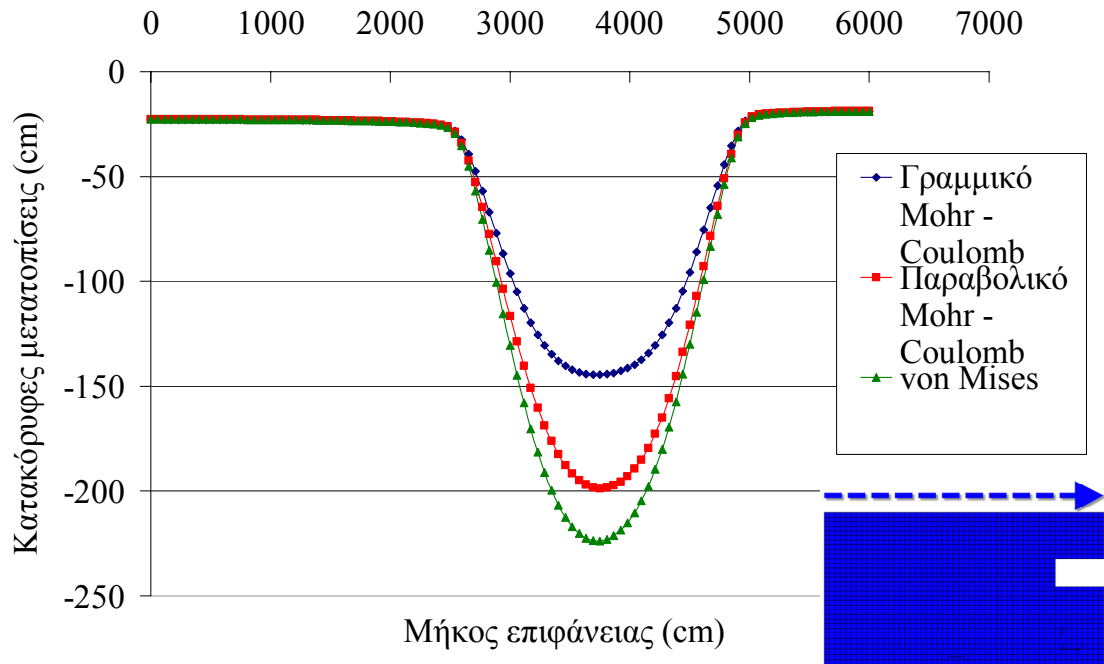


Σχήμα 5.20 Κάθετες τάσεις ( $\sigma_{22}$ ) για όλους τους φακούς (von Mises)

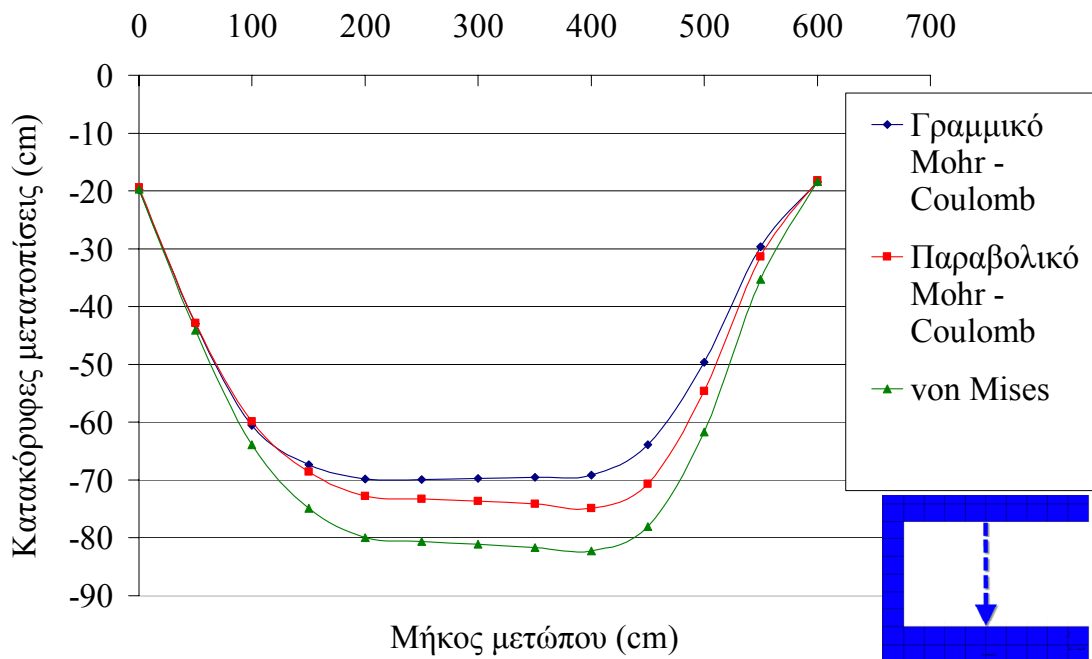
## 5.6 Συγκριτικά Αποτελέσματα Επίλυσης Κριτηρίων Αστοχίας

Στην ενότητα αυτή, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων που ελήφθησαν για τα τρία διαφορετικά κριτήρια αστοχίας που εφαρμόστηκαν στα μοντέλα. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο 4D, που περιγράφει χαρακτηριστικότερα το φαινόμενο της ‘καμινάδας’.

Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα των κατακόρυφων μετατοπίσεων που λαμβάνουν χώρα στην επιφάνεια του εδάφους (Σχήμα 5.21) και στο μέτωπο της σήραγγας (Σχήμα 5.22) για τα τρία κριτήρια αστοχίας.



**Σχήμα 5.21** Συγκριτικό διάγραμμα κατακόρυφων μετατοπίσεων κατά μήκος της επιφάνειας για το μοντέλο 4D για τα τρία κριτήρια αστοχίας



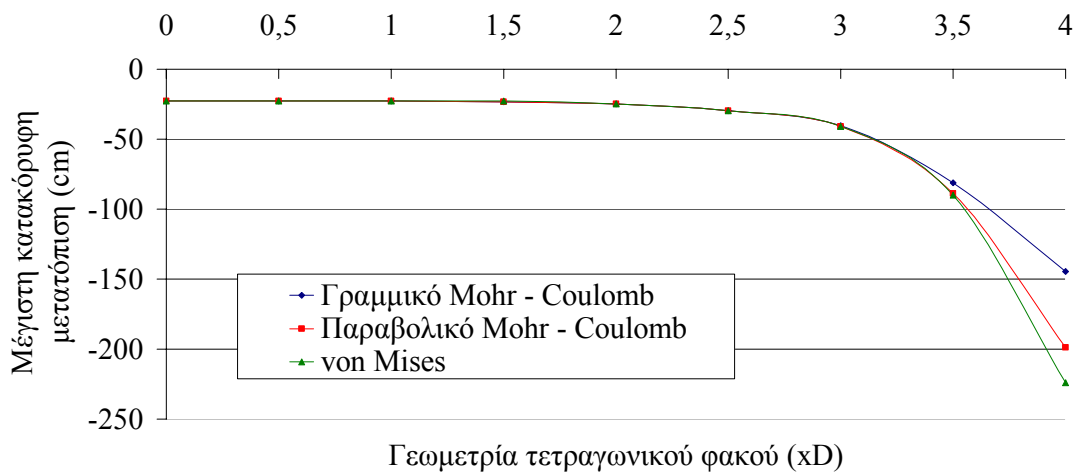
**Σχήμα 5.22** Συγκριτικό διάγραμμα κατακόρυφων μετατοπίσεων κατά μήκος του μετώπου για το μοντέλο 4D για τα τρία κριτήρια αστοχίας

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.21, το κριτήριο αστοχίας von Mises δίνει τις μεγαλύτερες κατακόρυφες μετατοπίσεις στην επιφάνεια σε σχέση με το γραμμικό και με το παραβολικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb. Ειδικότερα, με το παραβολικό κριτήριο Mohr – Coulomb η διαφορά στις μετατοπίσεις είναι αισθητή αλλά όχι πάρα

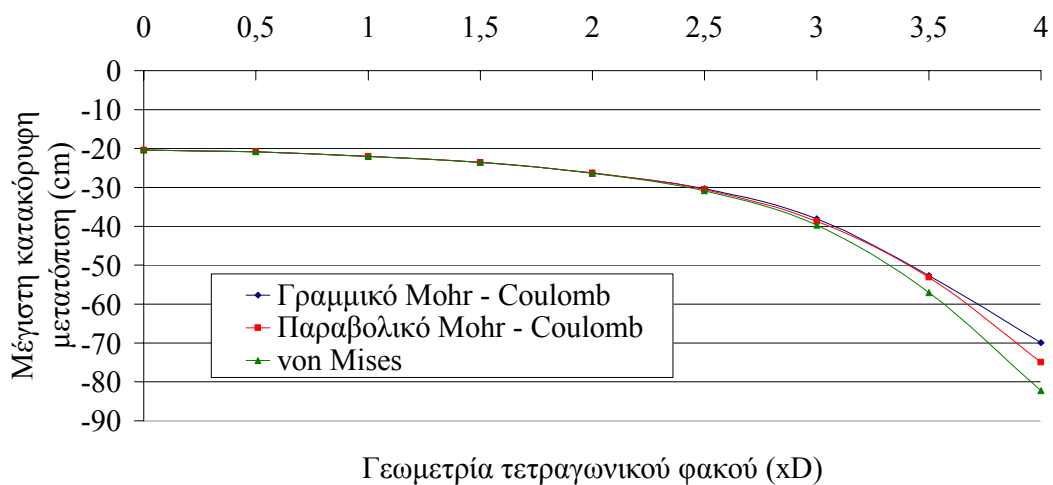
πολύ μεγάλη (περίπου 20 cm). Αντιθέτως σε σχέση με το γραμμικό κριτήριο Mohr – Coulomb η διαφορά στις μετατοπίσεις είναι πολύ μεγάλη (της τάξης των 80 cm).

Αντίστοιχα στο Σχήμα 5.22, το κριτήριο αστοχίας von Mises δίνει τις μεγαλύτερες κατακόρυφες μετατοπίσεις στην επιφάνεια σε σχέση με το γραμμικό και με το παραβολικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb. Ειδικότερα, με το παραβολικό κριτήριο Mohr – Coulomb η διαφορά στις μετατοπίσεις είναι μικρή (περίπου 5 cm). Αντιθέτως σε σχέση με το γραμμικό κριτήριο Mohr – Coulomb η διαφορά στις μετατοπίσεις είναι αισθητή (της τάξης των 10 cm).

Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι μέγιστες κατακόρυφες παραμορφώσεις στην επιφάνεια (Σχήμα 5.23) και στο μέτωπο (Σχήμα 5.24) σε σχέση με το μέγεθος του κάθε φακού και για τα τρία κριτήρια αστοχίας.



**Σχήμα 5.23** Συγκριτικό διάγραμμα μέγιστων κατακόρυφων μετατοπίσεων στην επιφάνεια για κάθε φακό και για τα τρία κριτήρια αστοχίας

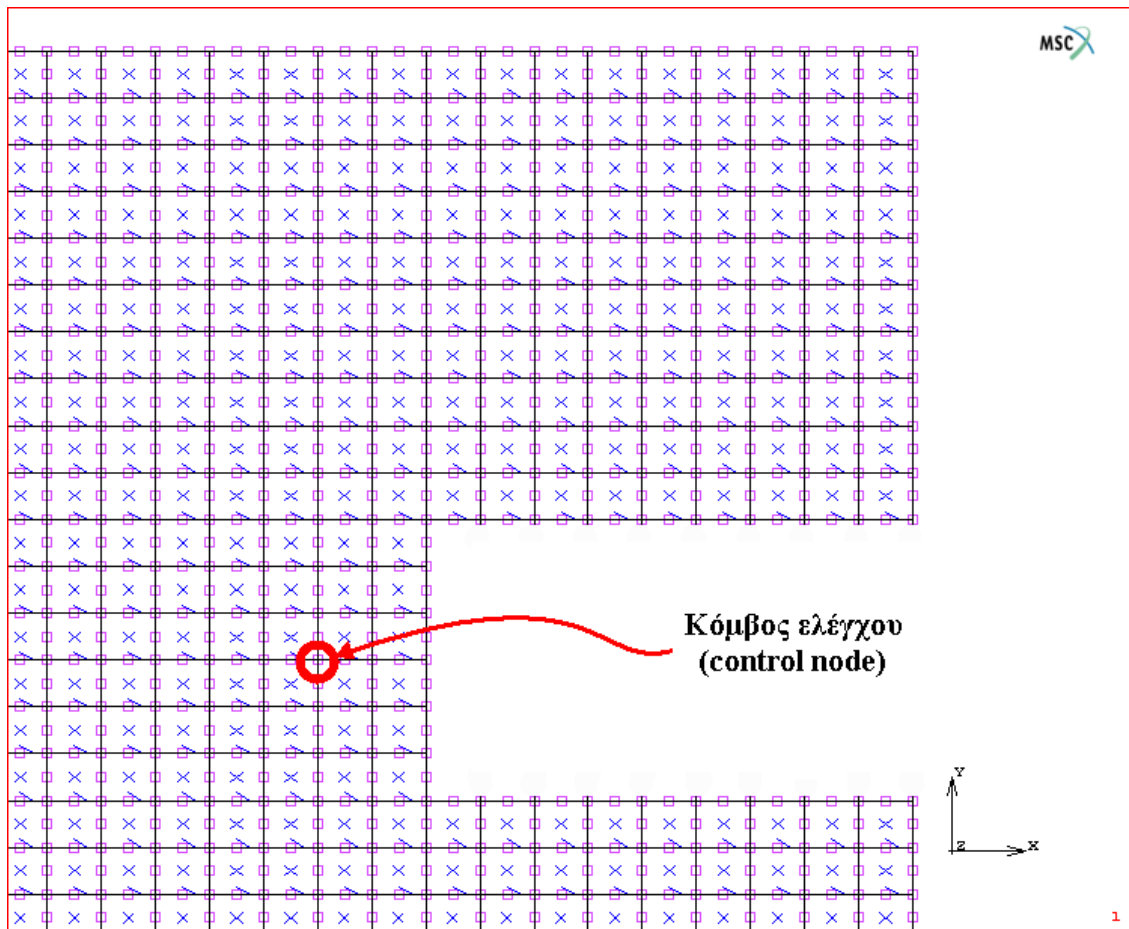


**Σχήμα 5.24** Συγκριτικό διάγραμμα μέγιστων κατακόρυφων μετατοπίσεων στο μέτωπο για κάθε φακό και για τα τρία κριτήρια αστοχίας



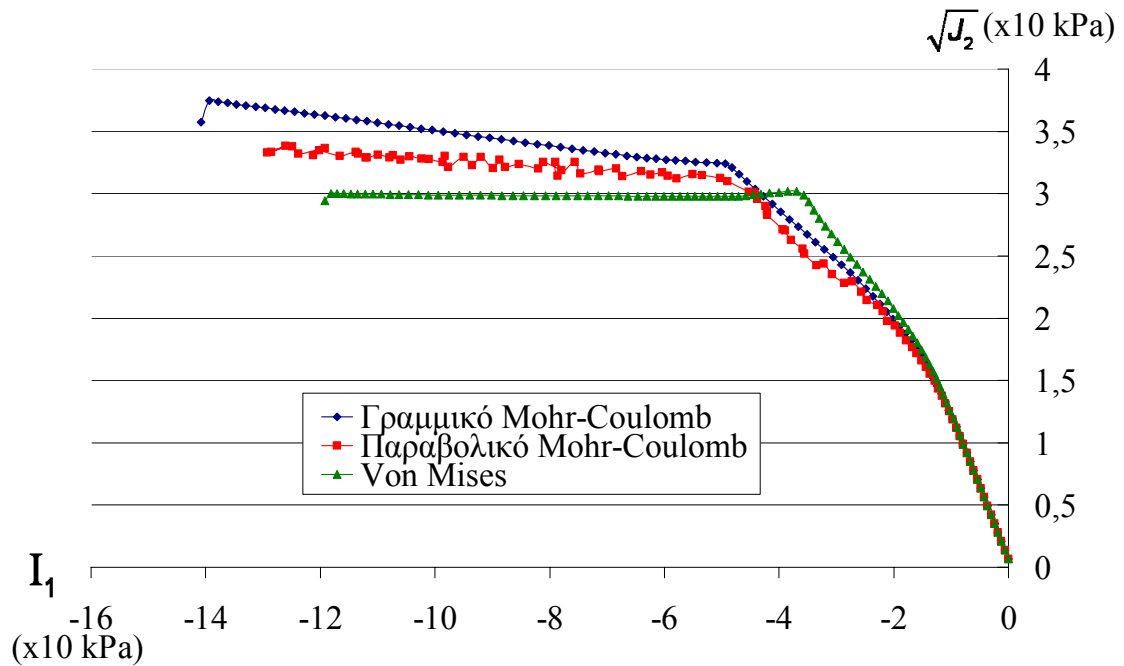
Όπως φαίνεται στα δυο προηγούμενα διαγράμματα, όσον αφορά τα τρία κριτήρια αστοχίας που χρησιμοποιήθηκαν, ουσιαστικές διαφορές παρατηρούνται μόνο στα μοντέλα 3.5D και 4D και ειδικότερα στο μοντέλο 4D.

Ακόμη για τη σύγκριση των τριών κριτηρίων αστοχίας, επιλέχθηκε ένας κόμβος ελέγχου (control node) κοντά στο μέτωπο της σήραγγας ούτως ώστε να καταγραφεί το ιστορικό του. Ο κόμβος ελέγχου ήταν ο κόμβος 3825 και η θέση του φαίνεται στο Σχήμα 5.25.



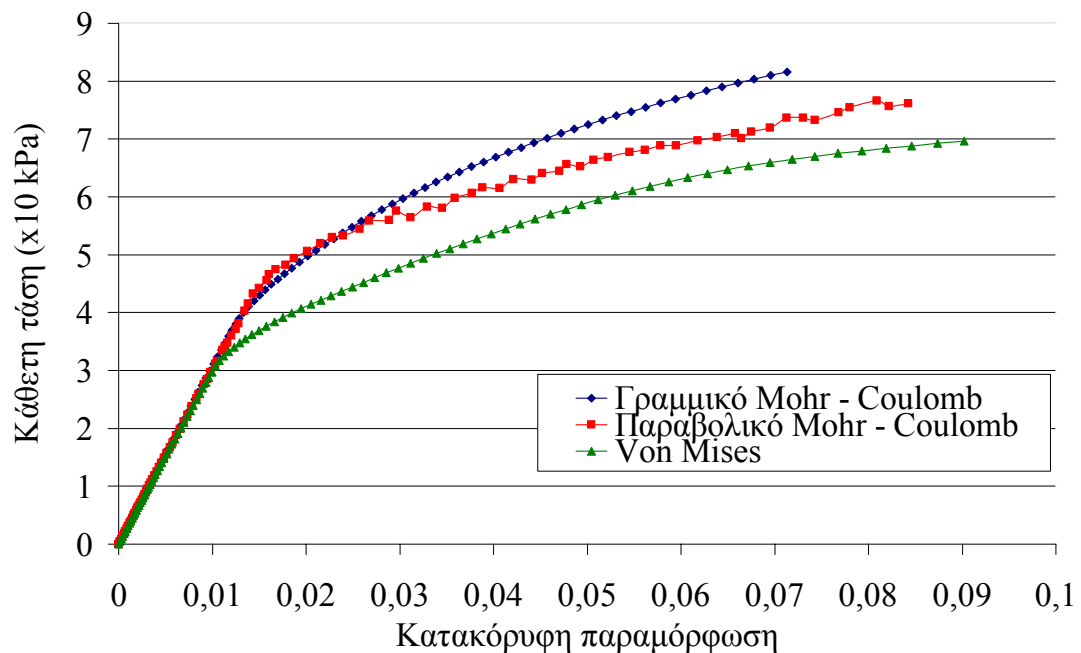
Σχήμα 5.25 Κόμβος ελέγχου

Βάσει των δεδομένων που ελήφθησαν από τον κόμβο ελέγχου, κατασκευάστηκε το ακόλουθο διάγραμμα  $\sqrt{J_2} - I_1$  (Σχήμα 5.26) που ισοδυναμεί με διάγραμμα  $\tau - \sigma$ .

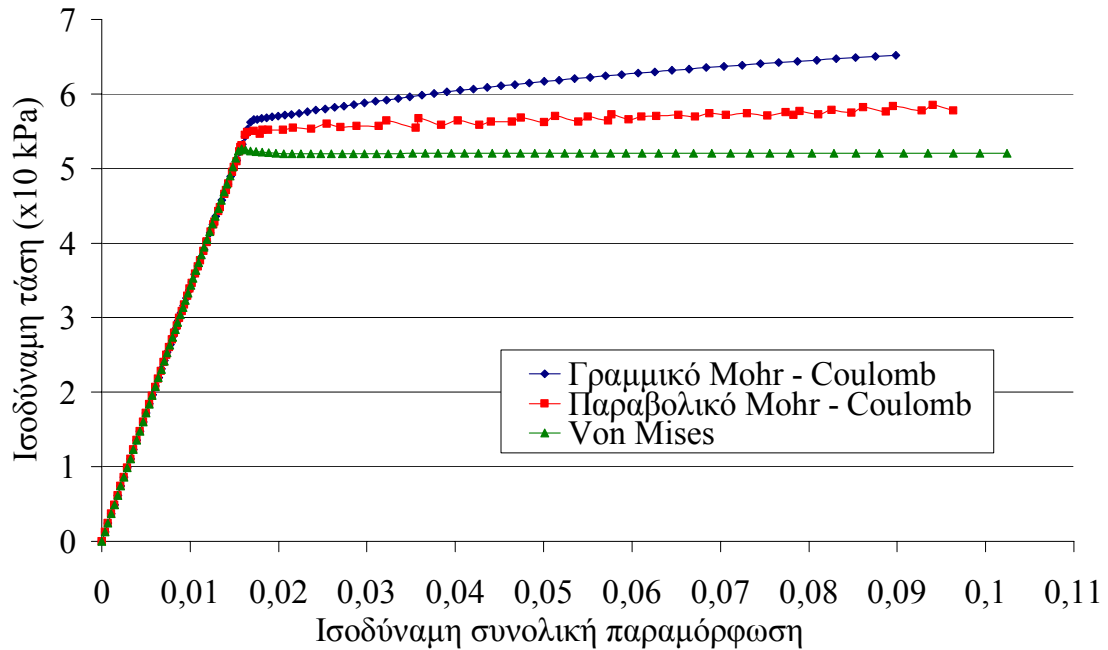


**Σχήμα 5.26** Συγκριτικό διάγραμμα  $\sqrt{J_2} - I_1$  για το μοντέλο 4D για τα τρία κριτήρια αστοχίας

Στα παρακάτω σχήματα, απεικονίζονται τα διαγράμματα κάθετης τάσης – κατακόρυφης παραμόρφωσης για κάθε κριτήριο αστοχίας (Σχήμα 5.27) και τα διαγράμματα ισοδύναμης τάσης – ισοδύναμης συνολικής παραμόρφωσης για κάθε κριτήριο αστοχίας (Σχήμα 5.28).



**Σχήμα 5.27** Συγκριτικό διάγραμμα κάθετης τάσης ( $\sigma_{22}$ ) – κατακόρυφης παραμόρφωσης ( $\epsilon_{22}$ ) για το μοντέλο 4D για τα τρία κριτήρια αστοχίας



**Σχήμα 5.28** Συγκριτικό διάγραμμα ισοδύναμης τάσης ( $\sigma_{eq}$ ) – ισοδύναμης συνολικής παραμόρφωσης ( $\epsilon_{eq}$ ) για το μοντέλο 4D για τα τρία κριτήρια αστοχίας

Στα παραπάνω διαγράμματα, φαίνεται ότι το γραμμικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb, παρουσιάζει μεγαλύτερες τάσεις από το παραβολικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb, το οποίο με τη σειρά του παρουσιάζει μεγαλύτερες τάσεις από το κριτήριο αστοχίας von Mises. Το αντίστροφο συμβαίνει με τις παραμορφώσεις.

## Κεφάλαιο 6

### Συμπεράσματα και Προτάσεις

Στο κεφάλαιο αυτό, παρατίθενται τα αποτελέσματα που εξήχθησαν από την βιβλιογραφική έρευνα και από τη αριθμητική ανάλυση που διεξάχθηκε, όπως και κάποιες προτάσεις που έχουν σκοπό να βελτιώσουν την εργασία ή και να συντελέσουν σε περαιτέρω διερεύνησή της.

Το φαινόμενο της ‘καμινάδας’ είναι ένας δυναμικός μηχανισμός αστοχίας, καθώς τις περισσότερες φορές που ενεργοποιείται, η διάδοσή του μέχρι την επιφάνεια μπορεί να είναι πολύ γρήγορη. Στις περισσότερες περιπτώσεις που εμφανίζεται τέτοιου τύπου αστοχία τα περιβάλλοντα γεωυλικά έχουν μηχανικές ιδιότητες παρόμοιες με αυτές του εδάφους.

Η σταθερότητα της ανυποστήρικτης εκσκαφής και το μέτωπο της σήραγγας, καθορίζουν το είδος της υποστήριξης και τη χρονική στιγμή που θα πρέπει αυτή να εφαρμοστεί. Η κατασκευή σηράγγων σε οποιοδήποτε ‘μαλακό’ έδαφος σχετίζεται με αλλαγή στο καθεστώς των τάσεων γύρω από το άνοιγμα με τις ανάλογες επιφερόμενες παραμορφώσεις και μετατοπίσεις. Οι επιφερόμενες αυτές παραμορφώσεις και μετατοπίσεις, δεν προκαλούν αναγκαστικά μια ανεπιθύμητη κατάσταση αφού επιτρέπουν την ενεργοποίηση της εσωτερικής αντοχής του εδάφους με αποτέλεσμα την αυτοϋποστήριξή του. Όταν όμως ξεπεράσουν τις αντοχές του εδάφους, μπορεί να οδηγήσουν σε αστοχία με μεγάλες μετατοπίσεις των περιβαλλόντων γεωυλικών.

Όταν μελετώνται φαινόμενα όπως το φαινόμενο της ‘καμινάδας’ σε γεωυλικά με τόσο φτωχές μηχανικές ιδιότητες, η προσομοίωσή τους σε αριθμητικά μοντέλα είναι δύσκολη διότι τα υλικά αυτά (όπως και τα πετρώματα εν γένει) είναι σύνθετα ψαθυρά υλικά και διακρίνονται για την ανομοιογένεια και την ανισοτροπία τους. Επίσης σημαντικό ρόλο παίζει και η γεωμετρία του μοντέλου. Η μοντελοποίηση στις τρεις διαστάσεις σίγουρα είναι πολύ πιο αντιπροσωπευτική από την θεώρηση επίπεδης τάσης στα μοντέλα αυτής της εργασίας (η οποία δεν είναι και πολύ αντιπροσωπευτική όσον αφορά και τη γεωμετρία της μηκοτομής). Ωστόσο οι χρόνοι επίλυσης των μοντέλων ήταν πολύ καλοί, ενώ η ελαστοπλαστική μοντελοποίηση του υλικού (και με τα τρία κριτήρια αστοχίας), έδωσε μια καλή εκτίμηση της κίνησης του υλικού αλλά και του μεγέθους της κίνησης αυτής.

Η μη-γραμμική συμπεριφορά του προβλήματος, με την εφαρμογή ελαστοπλαστικής ανάλυσης, προσεγγίστηκε σε μεγάλο βαθμό και με τα τρία κριτήρια διαρροής που ορίστηκαν. Συγκεκριμένα στα μοντέλα με τον φακό 4D, παρατηρήθηκαν μεγάλες πλαστικές παραμορφώσεις και ρευστοποίηση του υλικού.

Όσον αφορά τα κριτήρια αστοχίας που χρησιμοποιήθηκαν, το γραμμικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb, εμφανίζεται το πιο συντηρητικό εμφανίζοντας τις μικρότερες παραμορφώσεις και μετατοπίσεις από τα άλλα δυο. Το παραβολικό κριτήριο αστοχίας Mohr – Coulomb, είναι πιο χαρακτηριστικό για την προσομοίωση του φαινομένου της ‘καμινάδας’. Η εξάρτηση από τον παραβολικό υδροστατικό άξονα, είναι μια εναλλακτική λύση σε σχέση με το πιο σύνηθες γραμμικό κριτήριο έτσι ώστε η υδροστατική εξάρτηση του κριτηρίου αστοχίας να μπορεί να μοντελοποιηθεί καλύτερα σε ένα ευρύτερο φάσμα τάσεων. Το κριτήριο αστοχίας von Mises, δίνει τις μεγαλύτερες παραμορφώσεις και μετατοπίσεις όμως δεν είναι τόσο αντιπροσωπευτικό για το υπό μελέτη φαινόμενο διότι το κριτήριο αυτό είναι ανεξάρτητο της υδροστατικής πίεσης. Το κριτήριο αυτό είναι καλύτερο για τη μελέτη όλκιμων υλικών (όπως είναι τα μέταλλα).

Κάποιες προτάσεις που μπορούν να γίνουν για την περαιτέρω διερεύνηση της εργασίας, είναι να εισαχθούν στα μοντέλα και άλλες παράμετροι όπως εισαγωγή υδροφορέα στα μοντέλα (πίεση πόρων) ή ακόμα και να μοντελοποιηθούν τυχόν ρηγματώσεις. Ειδικά όσον αφορά την ύπαρξη του νερού, είναι αποδεδειγμένο ότι σε τέτοιου είδους αστοχίες, παίζει πολύ σημαντικό ρόλο.

Ακόμα ενδιαφέρον θα είχε η μοντελοποίηση του προβλήματος στις τρεις διαστάσεις. Τα μοντέλα αυτά σίγουρα δεν θα είναι οικονομικά όσον αφορά το χρόνο επίλυσης, αλλά σίγουρα μπορούν να δώσουν μια καλύτερη εικόνα σε σχέση με την μοντελοποίηση στις δυο διαστάσεις, αφού εκτός από τη μηκοτομή, η σήραγγα θα προσομοιωθεί σε τομή.

Επίσης μπορεί να γίνει μελέτη και άλλων κριτηρίων αστοχίας όπως του Buyukozturk.

Τέλος μπορούν να εισαχθούν στα μοντέλα πραγματικές μετρήσεις από τέτοιες αστοχίες για την καλύτερη προσομοίωση του φαινομένου. Επειδή όμως αυτό δεν είναι εύκολο, μπορεί να κατασκευαστεί ένα φυγόκεντρο μοντέλο (centrifuge model) που θα προσομοιάζει το φαινόμενο σε κλίμακα και να συγκριθούν τα αποτελέσματα του μοντέλου αυτού με τα αριθμητικά μοντέλα.

## Βιβλιογραφία

### Ελληνική

1. Αγιουτάντης, Ζ (2002). Στοιχεία Γεωμηχανικής, Μηχανική Πετρωμάτων, Εκδόσεις Ίων.
2. Αντωνίου, Α. (2005). Σημειώσεις του μαθήματος Εφαρμογές Τεχνικής Γεωλογίας στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Πολυτεχνική σχολή, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Βόλος.
3. Βιόπουλος, Π. (2006). Παραμετρική Διερεύνηση Εντατικής Κατάστασης κατά τη Διάνοιξη Σήραγγας με τη Μέθοδο της Προπασσάλωσης Οροφής, Διπλωματική εργασία, Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Πολυτεχνείο Κρήτης.
4. Εξαδάκτυλος, Γ. και Μ. Σταυροπούλου (2006). Κατασκευή και Μηχανική των Σηράγγων και των Υπογείων Έργων, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Πολυτεχνείο Κρήτης, Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Χανιά.
5. Καββαδάς, Μ. (2005). Σημειώσεις Σχεδιασμού Υπογείων Έργων, Έκδοση Ε.Μ.Π.
6. Λιαράκος, Ε. (2008). Αριθμητική Διερεύνηση Κριτηρίων Αστοχίας και Μεθόδων Ενίσχυσης Κατασκευών από Τοιχοποιία, Μεταπτυχιακή Διατριβή, Γενικό Τμήμα, Τομέας Μηχανικής, Πολυτεχνείο Κρήτης.
7. Μαραγκός, Χ (1999). Τεχνικά Έργα Υποδομής, Κατασκευές στην επιφάνεια του βράχου, Υπόγειες κατασκευές, Φράγματα, Χρήστος Μαραγκός, Θεσσαλονίκη.
8. Παπαντώνη, Χ. (2007). Παραμετρική Διερεύνηση Εναλλακτικών Συστημάτων Υποστήριξης σε Οδική Σήραγγα, Μεταπτυχιακή Διατριβή, Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Πολυτεχνείο Κρήτης.
9. Στειακάκης, Ε. (2005). Σημειώσεις Τεχνικής Γεωλογίας – Εδαφομηχανικής, Πολυτεχνείο Κρήτης, Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Χανιά.

10. Στειακάκης, Χ. (2001). Γεωτεχνική Ανάλυση Σηράγγων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, Μεταπτυχιακή Διατριβή, Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Πολυτεχνείο Κρήτης.

## Διεθνής

1. Agioutantis, Z., P. Vioroulos, S. Maurigiannakis (2007). Elastoplastic Modeling of the Chimney Failure Potential at the Face of Underground Openings, 11<sup>th</sup> ACUUS Conference: Underground Space: Expanding the Frontiers, 10 – 13 September 2007, Athens, Greece, pp. 391–396.
2. Brady, B.H.G. and E.T. Brown (1985). Rock Mechanics for Underground Mining, George Allen & Unwin (Publishers) Ltd, London.
3. Buyukozturk, O. (1977). Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Structures, Computers & Structures, Vol. 7, Pergamon Press pp. 149–156.
4. Chandrupatla, T. R. and A. D. Belegundu (2002). Introduction to Finite Elements in Engineering, 3<sup>rd</sup> Edition, published by Pearson Education, Inc, publishing as Prentice Hall, Inc, Ελληνική Έκδοση: Chandrupatla, T. R. and A. D. Belegundu (2005). Εισαγωγή στα Πεπερασμένα Στοιχεία για Μηχανικούς, Τρίτη Αμερικάνικη έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος.
5. Chen, W. F. and D. J. Han (1988). Plasticity for Structural Engineers, Springer – Verlag Inc., New York.
6. Crisfield, M. A. (1991). Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1: Essentials, John Wiley and Sons, Ltd, Chichester.
7. Fish, J. and T. Belytschko (2007). A First Course in Finite Elements, John Wiley and Sons, Ltd, Chichester.
8. Galli, G., A. Grimaldi, A. Leonardi (2004). Three-Dimensional Modelling of Tunnel Excavation and Lining, Computer and Geotechnics 31, pp. 171–183.
9. Health and Safety Executive (1996). Safety of New Austrian Tunnelling Method (NATM) Tunnels, HSE Health & Safety Executive Books, London.

10. Heiniö, M. (1999). Rock Excavation Handbook, Copyright Sandvik Tamrock Corp.
11. Hoek, E. (2007). Practical Rock Engineering, Course Notes,  
Web address: [www.roscience.com/hoek/PracticalRockEngineering.asp](http://www.roscience.com/hoek/PracticalRockEngineering.asp)
12. Hutton, D. V. (2004). Fundamentals of Finite Elements Analysis, 1<sup>st</sup> Edition, McGraw – Hill, New York.
13. Langmaack, L. and Q. Feng (2005). Soil Conditioning for EPB Machines – Balance of Functional and Ecological Properties,  
Web address: [www.ugc.basf.com/NR/rdonlyres/2D00D73B-3DF0-4939-87AA-0E035839C388/0/ITA2005.pdf](http://www.ugc.basf.com/NR/rdonlyres/2D00D73B-3DF0-4939-87AA-0E035839C388/0/ITA2005.pdf)
14. Lee C.J., B.R. Wu, H.T. Chen, K.H. Chiang (2006). Tunnel Stability and Arching Effects During Tunneling in Soft Clayey Soil. Tunnelling and Underground Space Technology 21, pp. 119–132.
15. Mahtab, A. M. and P. Grasso (1992). Geomechanics Principles in the Design of Tunnels and Caverns in Rocks, Elsevier, 250p.
16. MSC.Marc (2006). Volume A: Theory and User Information, MSC.Software.
17. MSC.Marc (2006). Volume B: Element Library, MSC.Software.
18. Rao, S. S. (2004). The Finite Element Method in Engineering, 4<sup>th</sup> Edition, Elsevier Science & Technology Books.
19. Saglamer, A. (2005). Cut and Cover Tunnels in Metropolitan Areas, ITA/AITES – Training Course, Tunnel Engineering, Istanbul.
20. Seidenfub, T. (2006). Collapses in Tunnelling, Master thesis, Lausanne 2006. Master Degree, Foundation Engineering and Tunnelling, Stuttgart, Germany.
21. Zienkiewicz, O. C. and R. L. Taylor (2000). The Finite Element Method, Volume 2: Solid Mechanics, 5<sup>th</sup> Edition, Butterworth – Heinemann, Oxford.



## Διαδίκτυο

1. [http://el.wikipedia.org/Ευπαλίνιο\\_όρυγμα](http://el.wikipedia.org/Ευπαλίνιο_όρυγμα)
2. [http://en.wikipedia.org/wiki/Stress\\_\(mechanics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics))
3. [http://en.wikipedia.org/wiki/Von\\_Mises\\_stress](http://en.wikipedia.org/wiki/Von_Mises_stress)
4. <http://sfrang.com/historia/selida626.htm>
5. [www.atlascopco.com](http://www.atlascopco.com)
6. [www.komatsu.com](http://www.komatsu.com)
7. [www.mitsumiike.co.jp](http://www.mitsumiike.co.jp)
8. [www.pipejacking.org](http://www.pipejacking.org)
9. [www.sandviktamrock.fi](http://www.sandviktamrock.fi)
10. [www.tunnelseis.com](http://www.tunnelseis.com)