

Teoría de aberraciones  
platicada

---

---

---

---

---

---

---

---

**ABERRACIÓN CROMÁTICA**

---

---

---

---

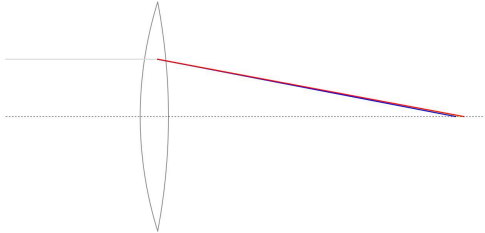
---

---

---

---

Indice de refracción depende de  $\lambda$ .



Aún en la aproximación paraxial el material de la lente dispersa la luz.  
La distancia focal es diferente para distintos colores.  
Aberración cromática.

---

---

---

---

---

---

---

---

### Poder de dispersión

- Longitudes de onda de referencia (visible): tres líneas de absorción en el espectro del sol (Fraunhofer).
  - Rojo.  $\lambda_c = 656 \text{ nm}$
  - Amarillo.  $\lambda_D = 589 \text{ nm}$
  - Azul.  $\lambda_F = 486 \text{ nm}$
- Poder de dispersión

$$v = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$$

- Número de Abbe (índice de dispersión)  $V = 1/v$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Vidrio	n <sub>C</sub>	n <sub>632.8</sub>	n <sub>D</sub>	n <sub>F</sub>	v	V
FK3	1.46232	1.46300	1.46444	1.46939	0.01522	65.69165
N-SK10	1.61947	1.62049	1.62268	1.63040	0.01755	56.96981
N-SK15	1.61970	1.62070	1.62286	1.63044	0.01724	57.99441
N-BAF3	1.57899	1.58013	1.58261	1.59149	0.02146	46.60880
BAFN6	1.58536	1.58647	1.58889	1.59752	0.02065	48.42845
N-LAF3	1.71252	1.71389	1.71687	1.72747	0.02085	47.95117
SFL57	1.83643	1.83952	1.84635	1.87227	0.04235	23.61468
SFL6	1.79609	1.79884	1.80491	1.82780	0.03940	25.38348
N-SF19	1.66092	1.66271	1.66661	1.68106	0.03021	33.09881
N-SF56	1.77607	1.77868	1.78444	1.80614	0.03833	26.08713
LASF35	2.01185	2.01493	2.02173	2.04702	0.03442	29.05118
N-SF64	1.69914	1.70119	1.70571	1.72249	0.03309	30.22313
N-PSK53	1.61717	1.61808	1.62005	1.62694	0.01576	63.46469
BK7G18	1.51724	1.51802	1.51968	1.52541	0.01572	63.60832
LF5G19	1.59214	1.59349	1.59642	1.60710	0.02508	39.86765
LF5G15	1.57974	1.58103	1.58384	1.59404	0.02449	40.82797
K5G20	1.52065	1.52151	1.52336	1.52987	0.01762	56.76356
LAK9G15	1.68680	1.68798	1.69052	1.69941	0.01826	54.75971
F2G12	1.61573	1.61725	1.62057	1.63271	0.02736	36.54711
SF6G05	1.79988	1.80265	1.80878	1.83190	0.03959	25.25859
KZFSN5	1.64920	1.65070	1.65397	1.66571	0.02525	39.61054

---

---

---

---

---

---

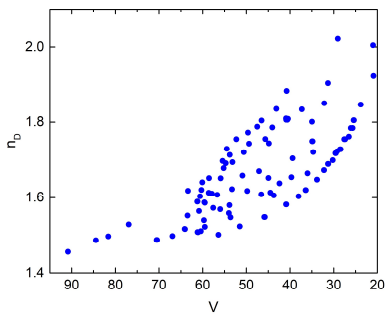
---

---

---

---

### Gráfica




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Una solución: par acromático



- Construir un juego de lentes de tal manera que la combinación tenga la misma distancia focal efectiva para los colores extremos.

- Para cada lente:

$$\frac{1}{f_i} = (n_i - 1) \left( \frac{1}{R_{i1}} - \frac{1}{R_{i2}} \right) = (n_i - 1) \rho_i$$

- Tomando diferencias respecto a n:

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{1}{f_i} \right) &= \rho_i \Delta n_i \\ &= v_i (n_{iD} - 1) \rho_i \\ &= \frac{v_i}{f_{iD}} \end{aligned}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Par acromático

- La distancia focal del par (lentes pegadas)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (1)$$

- El cambio en la distancia focal con longitud de onda es:

$$\Delta \left( \frac{1}{f} \right) = \frac{v_1}{f_1} + \frac{v_2}{f_2}$$

- Que se anula cuando  $v_1 f_2 = -v_2 f_1$  (2)
- Par acromático: solución de (1) y (2)

---

---

---

---

---

---

---

---

### Ejemplo

Diseñar un para acromático con vidrios BK7G18 (n<sub>C</sub> = 1.51724, n<sub>D</sub> = 1.51968, n<sub>F</sub> = 1.52541) y N-SF19 (n<sub>C</sub> = 1.66092, n<sub>D</sub> = 1.66661, n<sub>F</sub> = 1.68106) que tenga una distancia focal f = 10.0 cm. Si la segunda cara de la lente divergente debe ser plana, ¿cuáles deben ser los radios de curvatura de las demás superficies?

- Poderes de dispersión: v<sub>1</sub> = 0.01572, v<sub>2</sub> = 0.03021
- Ecuaciones

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= 10 \\ v_1 P_1 + v_2 P_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Solución: f<sub>1</sub> = 4.79647 cm; f<sub>2</sub> = -9.21771 cm. R<sub>12</sub> = R<sub>21</sub> = -6.14462 cm, R<sub>11</sub> = 4.19394 cm.

---

---

---

---

---

---

---

---

### Otra combinación acromática

- Utilizar dos lentes del mismo vidrio, pero ahora separadas una distancia  $t$ .

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{t}{f_1 f_2}$$

$$\Delta\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{v}{f_1} + \frac{v}{f_2} - t\left(\frac{v}{f_1 f_2} + \frac{v}{f_1 f_2}\right)$$

$$\therefore t = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### MÁS ALLÁ DE LA APROXIMACIÓN PARAXIAL.

---

---

---

---

---

---

---

---

### Recordemos.

- Para llegar a las expresiones de formación de imagen (Gaussiana) hicimos la aproximación paraxial. Esto es, supusimos que todos los ángulos que hacen los rayos que inciden sobre un sistema respecto al eje óptico son pequeños.
- Esto nos permitió sustituir en todas las expresiones geométricas y en Snell

$$\text{sen}\theta \approx \theta$$

- Ahora nos interesa analizar los defectos en la formación de imagen debidos a que esta aproximación deja de ser válida.
- El tratamiento consistirá en continuar la expansión en serie de seno.

$$\text{sen}\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!}$$

- Tendremos entonces la *teoría de aberraciones a tercer orden*.

---

---

---

---

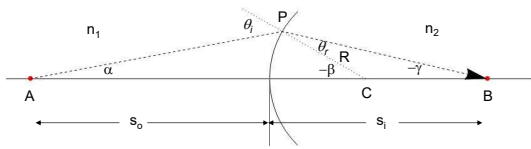
---

---

---

---

Ya hicimos el trazado exacto.



Triángulo ACP  $\theta_i = \alpha - \beta$

$$\frac{\text{sen} \alpha}{R} = \frac{\text{sen}(\pi - \theta_i)}{-s_o + R} = \frac{\text{sen} \theta_i}{-s_o + R}$$

Triángulo CBP  $-\beta = \theta_r - \gamma$

$$-\frac{\text{sen} \gamma}{R} = \frac{\text{sen} \theta_r}{s_i - R}$$

$$\therefore \alpha - \theta_i = \gamma - \theta_r$$

$$n_i \text{sen} \theta_i = n_r \text{sen} \theta_r$$

---

---

---

---

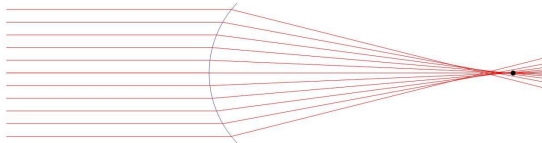
---

---

---

---

Ejemplo.



- Para puntos sobre el eje podemos hacer el trazado exacto de rayos.
- Resultado: rayos paralelos NO se enfocan en un punto. La imagen se ve borrosa.
- Ejemplo de aberración esférica.

(ver presentación Trazado de Rayos)

---

---

---

---

---

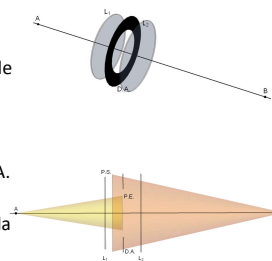
---

---

---

Pero antes...

- El paso de los rayos por un sistema óptico está limitado.
- Diafragma de Apertura: elemento que limita el acceso de los rayos.
- Pupila de Entrada: imagen del D.A. vista por el objeto (A).
- Pupila de Salida: imagen del D.A. vista por la imagen (B).
- El D.A. determina la calidad de la imagen que se obtiene en un sistema óptico.



(ver presentación diafragmas)

---

---

---

---

---

---

---

---

### Aberraciones

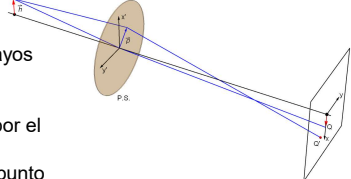
Desde el punto P en el objeto trazamos dos rayos hasta el plano de la imagen.

El rayo paraxial pasa por el centro de la pupila de salida (P.S.) y llega al punto Q en la imagen.

El rayo no paraxial pasa por el punto  $\vec{\rho}$  en la P.S.

El punto Q' donde este rayo no paraxial corta el plano de la imagen es en general diferente de Q.

En la teoría de aberraciones nos interesa saber la dependencia de Q' en el plano de la imagen en función de  $\vec{\rho}$  y de la posición del punto en el objeto  $\vec{h}$ .




---

---

---

---

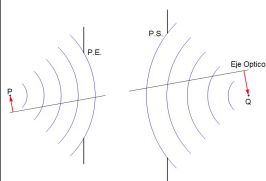
---

---

---

---

### Explicación platicada



- En la formación de imagen paraxial un punto en el objeto origina un frente de ondas esféricas. En la pupila de salida cada punto del frente de ondas genera a su vez frentes esféricos que convergen en el punto en la imagen.
- Las aberraciones se producen porque para los puntos no paraxiales en la pupila de salida los frentes de onda ya no tienen el radio de curvatura apropiado que los hace converger en el punto imagen.
- Para describir las aberraciones necesitamos obtener el cambio en los frentes de onda a medida que se mueve la fuente sobre la superficie de la pupila de salida.

---

---

---

---

---

---

---

---

### Consideraciones de simetría

- Nos interesa por ahora encontrar la forma general que toma la posición de Q' en función de la posición del punto  $\vec{\rho}$  en la pupila de entrada y de la posición del punto P en el objeto.
- El eje óptico sigue siendo el eje de simetría del sistema. La expresión que buscamos debe ser invariante respecto a giros sobre el eje óptico.
- Los invariantes que podemos construir con  $\vec{h}$  y  $\vec{\rho}$  son:

$$\vec{h}^2, \quad \vec{\rho}^2, \quad \vec{h} \cdot \vec{\rho} = h\rho \cos \theta$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Expansión en serie

- El radio de curvatura del frente de ondas se puede escribir como una expansión en serie de potencias de estos invariantes.
- A cuarto orden

$$R = (a_1\rho^2 + a_2h^2 + a_3\rho h \cos\theta) + b_1\rho^4 + b_2\rho^3 h \cos\theta + b_3\rho^2 h^2 + b_4\rho^2 h^2 \cos^2\theta + b_5\rho h^3 \cos\theta$$

- Ahora, los términos cuadráticos (en paréntesis) no afectan la formación de imagen (sólo mueven el punto de la imagen, ver Kenyon) . Nos quedamos con los términos cuárticos.

---

---

---

---

---

---

---

---

### Cambio de R al mover P.

- La diferencia entre la imagen paraxial Q y el punto Q' se debe al cambio en radio de curvatura del frente a medida que  $\vec{\rho}$  se mueve sobre la superficie de la pupila de salida (coordenadas  $x', y'$ ).

$$\delta x \propto \frac{\partial R}{\partial x'}, \quad \delta y \propto \frac{\partial R}{\partial y'}$$

- Las coordenadas naturales sobre la pupila de salida son  $\rho$  y  $\theta$ . Por tanto

$$\frac{\partial R}{\partial x'} = \frac{\partial R}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x'} + \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x'}, \quad \frac{\partial R}{\partial y'} = \frac{\partial R}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y'} + \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y'}$$


---

---

---

---

---

---

---

---

### Talacha

- Cambio de coordenadas

$$\rho^2 = x'^2 + y'^2, \quad \theta = \tan^{-1}(y'/x')$$

- Parciales

$$\frac{\partial \rho}{\partial x'} = \cos\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x'} = -\frac{\sin\theta}{\rho}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y'} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y'} = \frac{\cos\theta}{\rho}$$


---

---

---

---

---

---

---

---

### Más talacha

- Calculando parciales

$$\delta x \propto (4b_1\rho^3 + 3b_2\rho^2 h \cos \theta + 2b_3\rho h^2 + 2b_4\rho h^2 \cos^2 \theta + b_5 h^3 \cos \theta) \cos \theta + (b_2\rho^3 h \sin \theta + 2b_4\rho^2 h^2 \cos \theta \sin \theta + b_5 h^3 \sin \theta) \frac{\sin \theta}{\rho}$$

$$\delta y \propto (4b_1\rho^3 + 3b_2\rho^2 h \cos \theta + 2b_3\rho h^2 + 2b_4\rho h^2 \cos^2 \theta + b_5 h^3 \cos \theta) \sin \theta - (b_2\rho^3 h \sin \theta + 2b_4\rho^2 h^2 \cos \theta \sin \theta + b_5 h^3 \sin \theta) \frac{\cos \theta}{\rho}$$

- Simplificando

$$\delta x \propto 4b_1\rho^3 \cos \theta + b_2\rho^2 h(2 + \cos 2\theta) + 2\rho h^2(b_3 + b_4) \cos \theta + b_5 h^3$$

$$\delta y \propto 4b_1\rho^3 \sin \theta + b_2\rho^2 h \sin 2\theta + 2b_3\rho h^2 \sin \theta$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Cinco aberraciones (3er orden)

Agrupando términos y redefiniendo coeficientes

- Esférica  $\delta x_1 = 4b_1\rho^3 \cos \theta = c_1\rho^3 \cos \theta$   
 $\delta y_1 = 4b_1\rho^3 \sin \theta = c_1\rho^3 \sin \theta$
- Coma  $\delta x_2 = b_2\rho^2 h(2 + \cos 2\theta) = c_2\rho^2 h(2 + \cos 2\theta)$   
 $\delta y_2 = b_2\rho^2 h \sin 2\theta = c_2\rho^2 h \sin 2\theta$
- Astigmatismo  $\delta x_3 = 3b_4\rho h^2 \cos \theta = 3c_3\rho h^2 \cos \theta$   
 $\delta y_3 = b_4\rho h^2 \sin \theta = c_3\rho h^2 \sin \theta$
- Curvatura de campo  $\delta x_4 = (2b_3 - b_4)\rho h^2 \cos \theta = c_4\rho h^2 \cos \theta$   
 $\delta y_4 = (2b_3 - b_4)\rho h^2 \sin \theta = c_4\rho h^2 \sin \theta$
- Distorsión  $\delta x_5 = b_5 h^3 = c_5 h^3$   
 $\delta y_5 = 0$

---

---

---

---

---

---

---

---

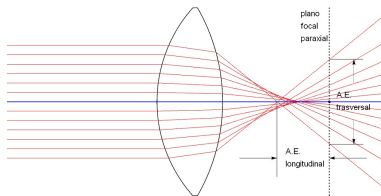
---

---

### Aberración esférica

$$\delta x_1 = c_1\rho^3 \cos \theta$$

$$\delta y_1 = c_1\rho^3 \sin \theta$$



- Ocurre para puntos sobre el eje óptico ( $h=0$ ).
- Al recorrer un círculo en la pupila de salida se produce un círculo centrado en el punto de imagen paraxial en el plano de la imagen.
- Depende de la forma de la lente.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



**PUNTOS FUERA DEL EJE ÓPTICO.**

---

---

---

---

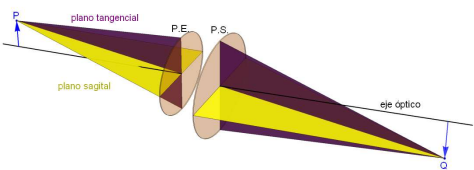
---

---

---

---

**Definiciones.**



- Punto P fuera del eje óptico.
- Plano tangencial contiene a P y al eje óptico.
- Plano sagital: contiene a P y es perpendicular al plano tangencial

---

---

---

---

---

---

---

---

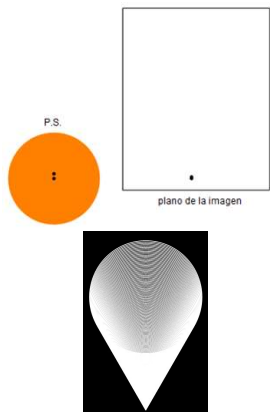
**Coma**

$$\delta x_2 = c_2 \rho^2 h (2 + \cos 2\theta)$$

$$\delta y_2 = c_2 \rho^2 h \sin 2\theta$$

Al recorrer un círculo en la pupila de salida se recorre dos veces un círculo en el plano de la imagen.

El centro está sobre el plano tangencial y depende del radio del círculo en la pupila.




---

---

---

---

---

---

---

---

### Astigmatismo

$$\delta x_3 = 3c_4 \rho h^2 \cos \theta$$

$$\delta y_3 = c_4 \rho h^2 \sin \theta$$

- Al recorrer un círculo en la pupila de entrada se produce una elipse en el plano de la imagen.
- Si se mueve el plano se localizan dos imágenes en forma de línea: foco tangencial y foco sagital.

---

---

---

---

---

---

---

---

### Imágenes sagital y tangencial

objeto                      foco sagital                      foco tangencial

---

---

---

---

---

---

---

---

### Curvatura de campo

$$\delta x_4 = c_4 \rho h^2 \cos \theta$$

$$\delta y_4 = c_4 \rho h^2 \sin \theta$$

- Efecto similar al de astigmatismo, pero el movimiento de los dos focos (tangencial y sagital) es en la misma dirección y crece como  $h^2$ .
- La imagen se forma no en un plano sino en una superficie curvada -> superficie de Petzval.
- Si además hay astigmatismo las superficies tangencial y sagital se curvan de manera diferente.

---

---

---

---

---

---

---

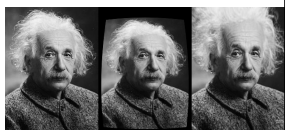
---

### Distorsión

$$\delta x_5 = b_5 h^3 = c_5 h^3$$

$$\delta y_5 = 0$$

- No depende de la pupila de salida.
- Proporcional a  $h^3$  y sólo actúa en la dirección x (tangencial).
- Amplifica de manera diferente a medida que el punto se aleja del eje óptico.
- Coeficiente positivo -> alfiletero, aleja más puntos más lejanos.  
Negativo -> barril, aleja menos puntos más lejanos.




---



---



---



---



---



---



---