

Teoría de aberraciones

platicada

Más allá de la aproximación paraxial.

- Para llegar a las expresiones de formación de imagen (Gaussiana) hicimos la aproximación paraxial. Esto es, supusimos que todos los ángulos que hacen los rayos que inciden sobre un sistema respecto al eje óptico son pequeños.
- Esto nos permitió sustituir en todas las expresiones geométricas y en Snell

$$\text{sen } \theta \approx \theta$$

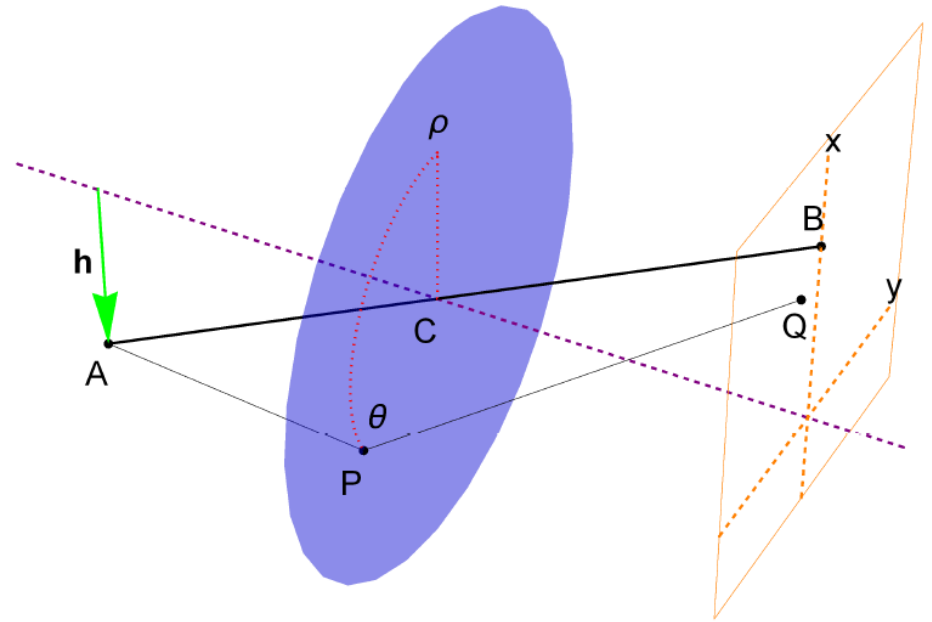
- Ahora nos interesa analizar los defectos en la formación de imagen debidos a que esta aproximación deja de ser válida.
- El tratamiento consistirá en continuar la expansión en serie de seno.

$$\text{sen } \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!}$$

- Tendremos entonces la teoría de aberraciones a tercer orden.

Aberraciones

A es un punto del objeto y B su imagen paraxial. El plano de la imagen contiene a B y es perpendicular al eje óptico.



- El punto Q donde un rayo NO paraxial corta el plano de la imagen es en general diferente de B. Depende de donde proviene en la pupila de salida (P).
- Nos interesa saber la dependencia de Q en el plano de la imagen en función de la posición del punto P en la pupila de salida y de la posición del punto en el objeto \vec{h}

Explicación platicada

- En la formación de imagen paraxial un punto en el objeto origina un frente de ondas esféricas. En la pupila de salida cada punto del frente de ondas genera a su vez frentes esféricos que convergen en el punto en la imagen.
- Las aberraciones se producen porque para los puntos no paraxiales en la pupila de salida los frentes de onda ya no tienen el radio de curvatura apropiado que los hace converger en el punto imagen.
- Para describir las aberraciones necesitamos obtener el cambio en los frentes de onda a medida que se mueve la fuente sobre la superficie de la pupila de salida.

Consideraciones de simetría

- Nos interesa por ahora encontrar la forma general que toma la posición de Q en función de la posición del punto P en la pupila de entrada y de la posición del punto A en el objeto.
- El eje óptico sigue siendo el eje de simetría del sistema. La expresión que buscamos debe ser invariante respecto a giros sobre el eje óptico.
- Los invariantes que podemos construir con las posiciones de A (\vec{h}) y P ($\vec{\rho}$) son

$$\vec{h}^2, \quad \vec{\rho}^2, \quad \vec{h} \cdot \vec{\rho} = h\rho \cos \theta$$

Expansión en serie

- El radio de curvatura del frente de ondas se puede escribir como una expansión en serie de potencias de estos invariantes.
- A cuarto orden

$$R = (a_1\rho^2 + a_2h^2 + a_3\rho h \cos \theta) + b_1\rho^4 + b_2\rho^3 h \cos \theta + b_3\rho^2 h^2 + b_4\rho^2 h^2 \cos^2 \theta + b_5\rho h^3 \cos \theta$$

- Ahora, los términos cuadráticos (en paréntesis) no afectan la formación de imagen (sólo mueven el punto de la imagen, ver Kenyon) . Nos quedamos con los términos cuárticos.

Cambio de R al mover P.

- La diferencia entre la imagen paraxial B y el punto Q se debe al cambio en radio de curvatura del frente a medida que P se mueve sobre la superficie de la pupila de salida (coordenadas x' , y').

$$\delta x \propto \frac{\partial R}{\partial x'}, \quad \delta y \propto \frac{\partial R}{\partial y'}$$

- Las coordenadas naturales sobre la pupila de salida son ρ y θ . Por tanto

$$\frac{\partial R}{\partial x'} = \frac{\partial R}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x'} + \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x'}, \quad \frac{\partial R}{\partial y'} = \frac{\partial R}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y'} + \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y'}$$

Talacha

- Cambio de coordenadas

$$\rho^2 = x'^2 + y'^2, \quad \theta = \tan^{-1}(y'/x')$$

- Parciales

$$\frac{\partial \rho}{\partial x'} = \cos \theta,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x'} = -\frac{\text{sen } \theta}{\rho}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y'} = \text{sen } \theta,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y'} = \frac{\cos \theta}{\rho}$$

Más talacha

- Calculando parciales

$$\delta x \propto \left(4b_1\rho^3 + 3b_2\rho^2 h \cos \theta + 2b_3\rho h^2 + 2b_4\rho h^2 \cos^2 \theta + b_5 h^3 \cos \theta\right) \cos \theta + \\ + \left(b_2\rho^3 h \sin \theta + 2b_4\rho^2 h^2 \cos \theta \sin \theta + b_5 h^3 \sin \theta\right) \frac{\sin \theta}{\rho}$$

$$\delta y \propto \left(4b_1\rho^3 + 3b_2\rho^2 h \cos \theta + 2b_3\rho h^2 + 2b_4\rho h^2 \cos^2 \theta + b_5 h^3 \cos \theta\right) \sin \theta - \\ - \left(b_2\rho^3 h \sin \theta + 2b_4\rho^2 h^2 \cos \theta \sin \theta + b_5 h^3 \sin \theta\right) \frac{\cos \theta}{\rho}$$

- Simplificando

$$\delta x \propto 4b_1\rho^3 \cos \theta + b_2\rho^2 h(2 + \cos 2\theta) + 2\rho h^2 (b_3 + b_4) \cos \theta + b_5 h^3$$

$$\delta y \propto 4b_1\rho^3 \sin \theta + b_2\rho^2 h \sin 2\theta + 2b_3\rho h^2 \sin \theta$$

Cinco aberraciones (3er orden)

Agrupando términos y redefiniendo coeficientes

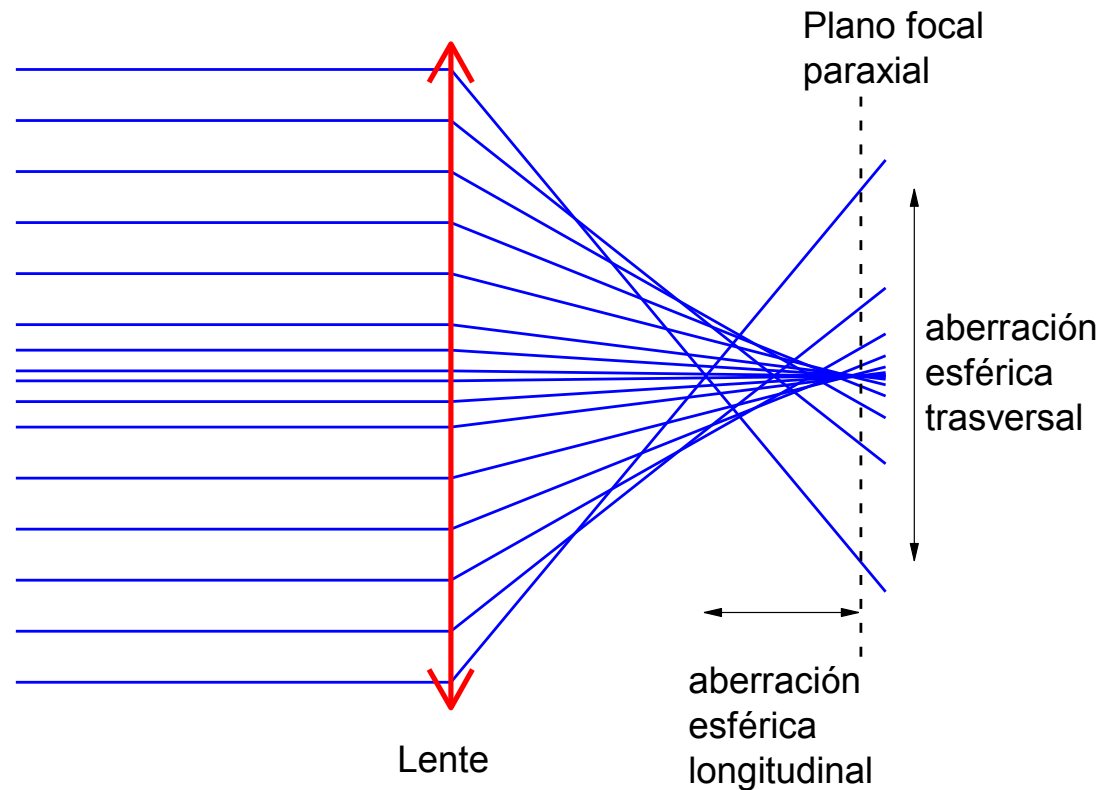
- Esférica $\delta x_1 = 4b_1\rho^3 \cos \theta = c_1\rho^3 \cos \theta$
 $\delta y_1 = 4b_1\rho^3 \text{sen} \theta = c_1\rho^3 \text{sen} \theta$
- Coma $\delta x_2 = b_2\rho^2 h(2 + \cos 2\theta) = c_2\rho^2 h(2 + \cos 2\theta)$
 $\delta y_2 = b_2\rho^2 h \text{sen} 2\theta = c_2\rho^2 h \text{sen} 2\theta$
- Astigmatismo $\delta x_3 = 3b_4\rho h^2 \cos \theta = 3c_3\rho h^2 \cos \theta$
 $\delta y_3 = b_4\rho h^2 \text{sen} \theta = c_3\rho h^2 \text{sen} \theta$
- Curvatura de campo $\delta x_4 = (2b_3 - b_4)\rho h^2 \cos \theta = c_4\rho h^2 \cos \theta$
 $\delta y_4 = (2b_3 - b_4)\rho h^2 \text{sen} \theta = c_4\rho h^2 \text{sen} \theta$
- Distorsión $\delta x_5 = b_5 h^3 = c_5 h^3$
 $\delta y_5 = 0$

Aberración esférica

$$\delta x_1 = c_1 \rho^3 \cos \theta$$

$$\delta y_1 = c_1 \rho^3 \text{sen} \theta$$

- Ocurre para puntos sobre el eje óptico ($h=0$).
- Al recorrer un círculo en la pupila de salida se produce un círculo centrado en el origen en el plano de la imagen.



Coeficiente para lente delgada

- Se puede obtener una expresión cerrada a 3er. Orden (Jenkins & White).

$$\frac{1}{s_{ih}} - \frac{1}{s_{ip}} = \left[\frac{n+2}{n-1} q^2 + 4(n+1)pq + (3n+2)(n-1)p^2 + \frac{n^3}{n-1} \right] \times$$
$$\times \frac{\rho^2}{8f^3 n(n-1)}$$

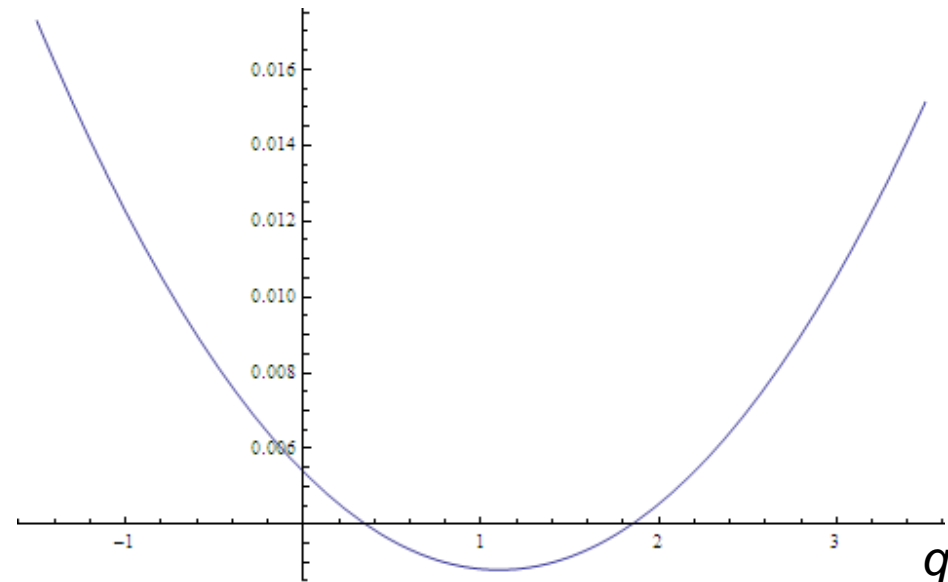
- Factor de forma $q = \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1}$

- Factor de posición $p = \frac{s_i + s_o}{s_i - s_o}$

- ρ es el radio de la apertura.

Dependencia en la forma de la lente

- Para un juego de posiciones paraxiales objeto-imagen se puede hacer una gráfica de esta diferencia en función del factor de forma.
- Se obtiene la forma óptima de la lente (en el vértice de la parábola)
- Objeto distante \rightarrow lente convexo-plana.



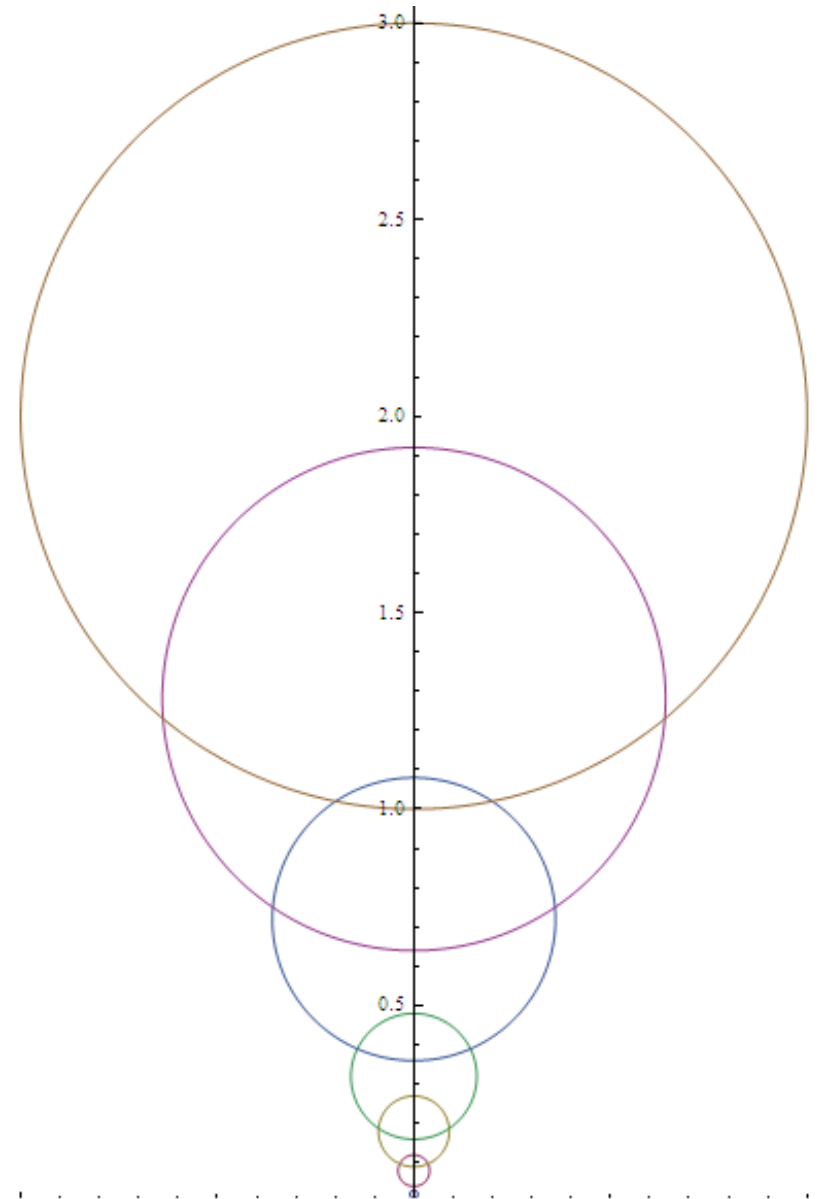
$$f = 20, \quad n = 1.75, \quad \rho = 6, \quad p = -1$$

Coma

$$\delta x_2 = c_2 \rho^2 h (2 + \cos 2\theta)$$

$$\delta y_2 = c_2 \rho^2 h \sin 2\theta$$

- Imagen de un punto fuera del eje.
- Plano tangencial: contiene al eje óptico y al vector h .
- Al recorrer un círculo en la pupila de salida se recorre dos veces un círculo en el plano de la imagen. El centro está sobre el plano sagital y depende del radio del círculo en la pupila.



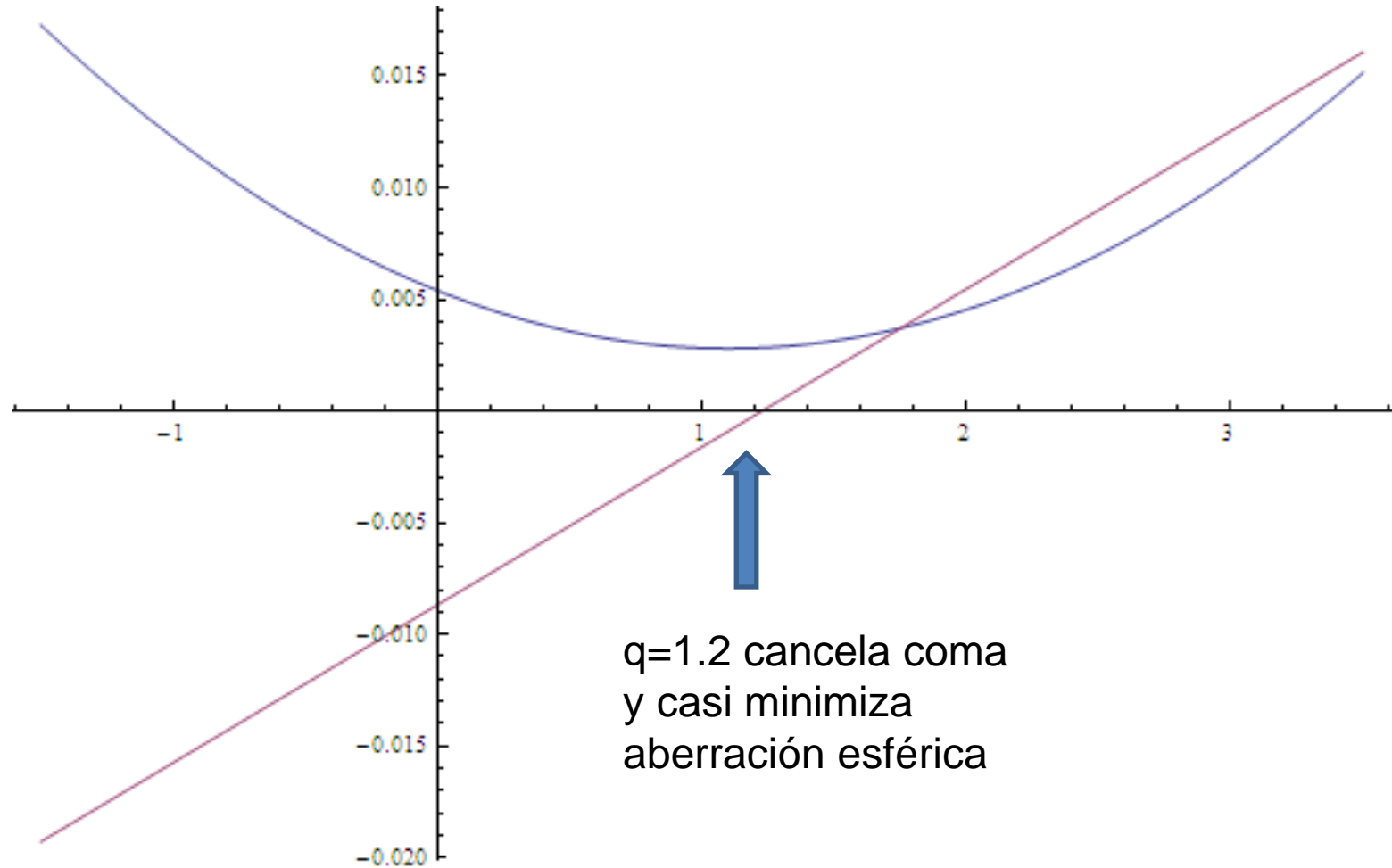
Coma para lente delgada

- Nuevamente a tercer orden se puede obtener una expresión para el radio del círculo comático

$$C_s = \frac{j\rho^2}{f^2} \left[\frac{3(2n+1)}{4n} p + \frac{3(n+1)}{4n(n-1)} q \right]$$

donde f es la distancia focal, p y q son los factores de posición y forma y j es la distancia respecto del eje a la que se forma la imagen paraxial.

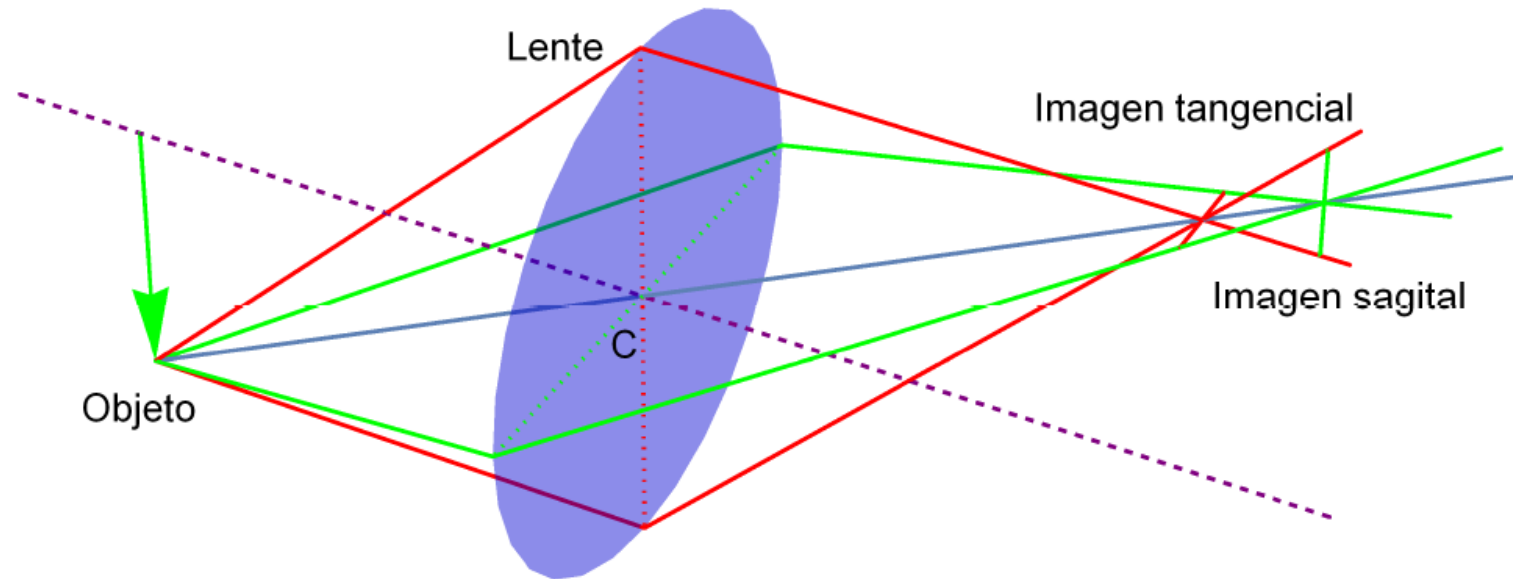
Aberración esférica y coma.



Astigmatismo

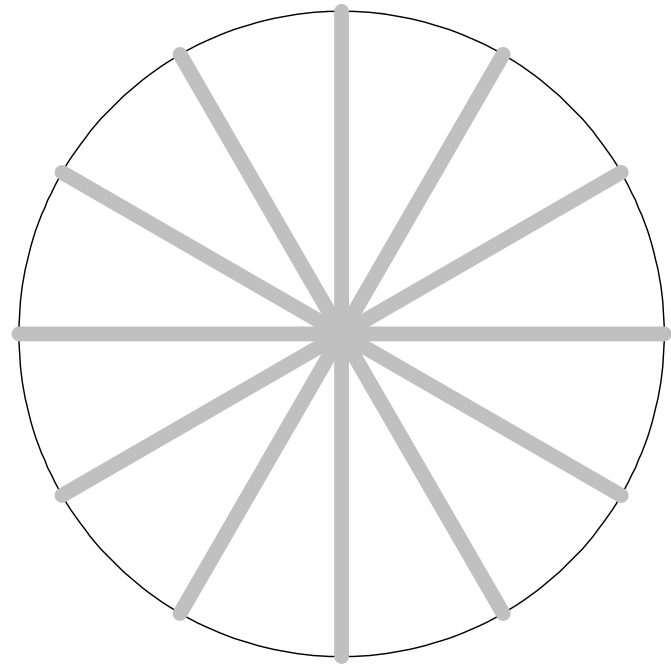
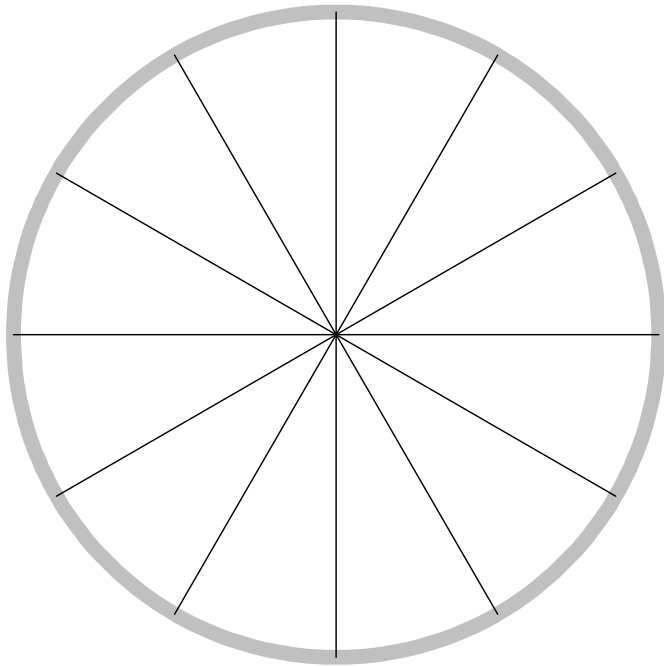
$$\delta x_3 = 3c_4 \rho h^2 \cos \theta$$

$$\delta y_3 = c_4 \rho h^2 \sin \theta$$



- Al recorrer un círculo en la pupila de entrada se produce una elipse en el plano de la imagen.
- Si se mueve el plano se localizan dos imágenes en forma de línea: foco tangencial y foco sagital.

Focos sagital y tangencial

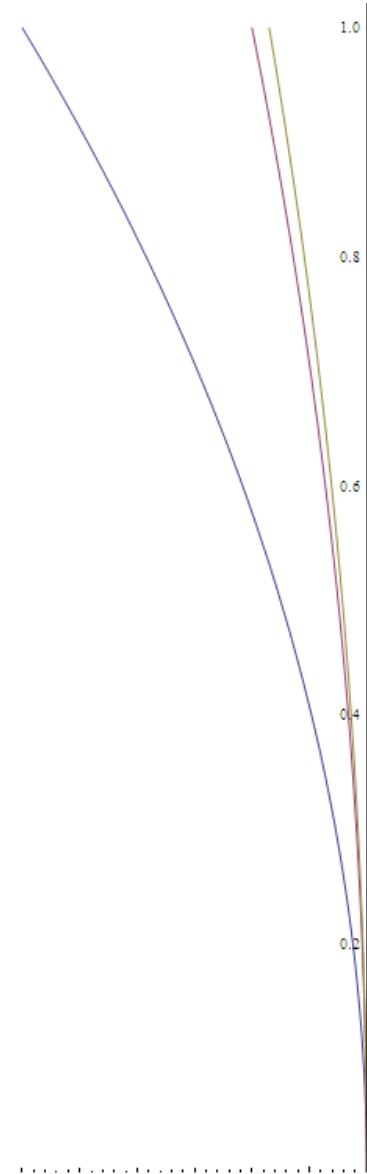


Curvatura de campo

$$\delta x_4 = c_4 \rho h^2 \cos \theta$$

$$\delta y_4 = c_4 \rho h^2 \text{sen} \theta$$

- Efecto similar al de astigmatismo, pero el movimiento de los dos focos (tangencial y sagital) es en la misma dirección y crece como h^2 .
- La imagen se forma no en un plano sino en una superficie curvada -> superficie de Petzval.
- Si además hay astigmatismo las superficies tangencial y sagital se curvan de manera diferente.



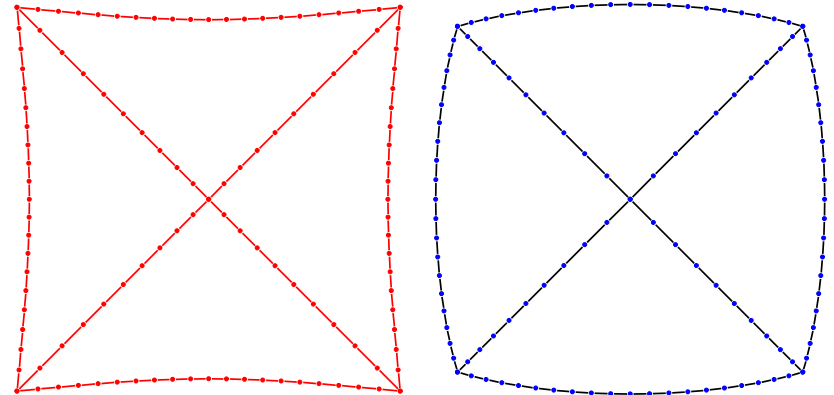
Distorsión

$$\delta x_5 = b_5 h^3 = c_5 h^3$$

$$\delta y_5 = 0$$

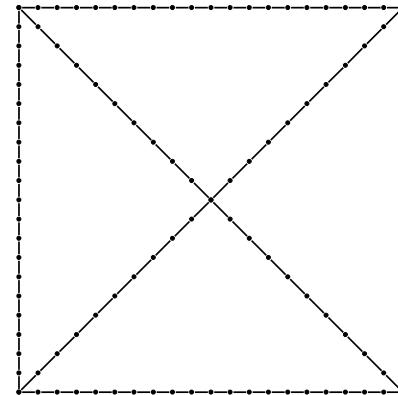
- Término proporcional a h^3 y sólo actúa en la dirección x.
- Amplifica de manera diferente a medida que el punto se aleja del eje óptico.
- Coeficiente positivo \rightarrow alfiletero, aleja más puntos más lejanos. Negativo \rightarrow barril, aleja menos puntos más lejanos.

Distorsión



alfiletero

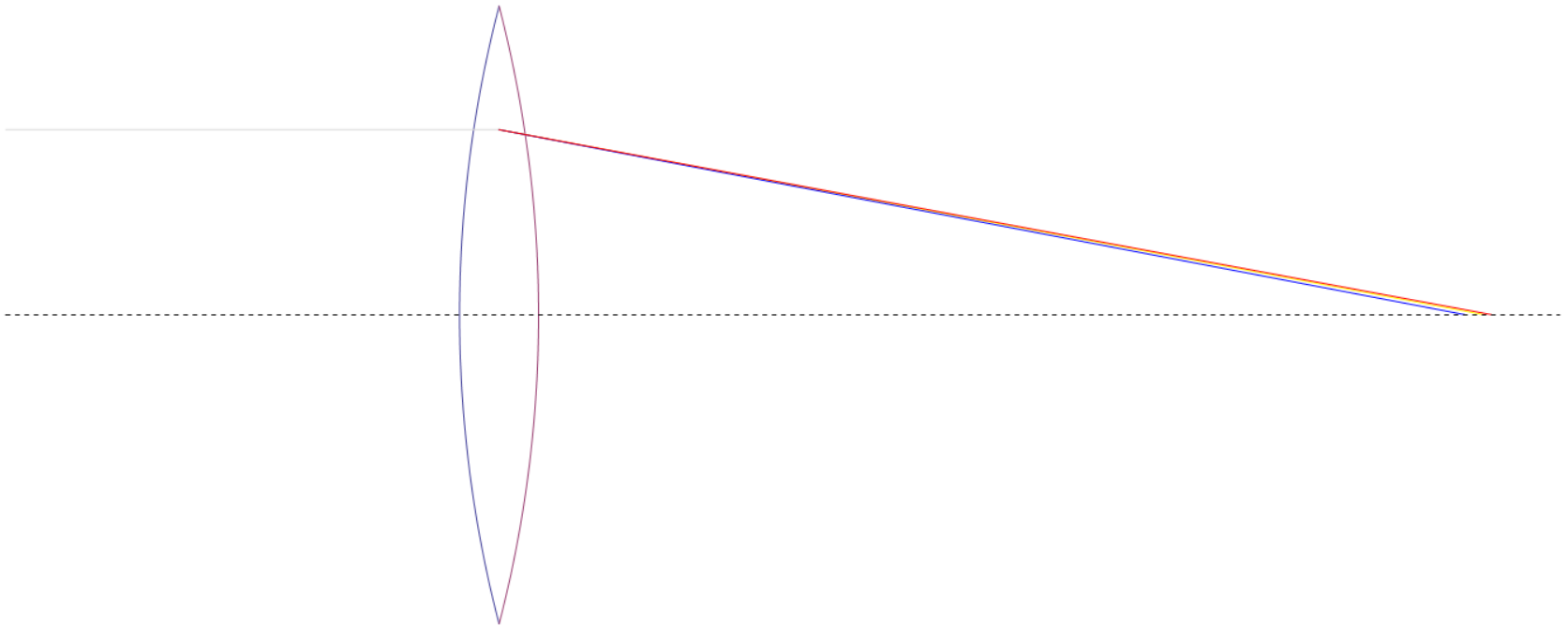
barril



objeto

ABERRACIÓN CROMÁTICA

Índice de refracción depende de λ .



Aún en la aproximación paraxial el material de la lente dispersa la luz.

La distancia focal es diferente para distintos colores.

Aberración cromática.

Poder de dispersión

- Longitudes de onda de referencia (visible): tres líneas de absorción en el espectro del sol (Fraunhofer).
 - Rojo. $\lambda_C = 656 \text{ nm}$
 - Amarillo. $\lambda_D = 589 \text{ nm}$
 - Azul. $\lambda_F = 486 \text{ nm}$
- Poder de dispersión

$$V = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$$

- Índice de dispersión $V = 1/v$

Vidrio	nC	n632.8	nD	nF	v	V
FK3	1.46232	1.46300	1.46444	1.46939	0.01522	65.69165
N-SK10	1.61947	1.62049	1.62268	1.63040	0.01755	56.96981
N-SK15	1.61970	1.62070	1.62286	1.63044	0.01724	57.99441
N-BAF3	1.57899	1.58013	1.58261	1.59149	0.02146	46.60880
BAFN6	1.58536	1.58647	1.58889	1.59752	0.02065	48.42845
N-LAF3	1.71252	1.71389	1.71687	1.72747	0.02085	47.95117
SFL57	1.83643	1.83952	1.84635	1.87227	0.04235	23.61468
SFL6	1.79609	1.79884	1.80491	1.82780	0.03940	25.38348
N-SF19	1.66092	1.66271	1.66661	1.68106	0.03021	33.09881
N-SF56	1.77607	1.77868	1.78444	1.80614	0.03833	26.08713
LASF35	2.01185	2.01493	2.02173	2.04702	0.03442	29.05118
N-SF64	1.69914	1.70119	1.70571	1.72249	0.03309	30.22313
N-PSK53	1.61717	1.61808	1.62005	1.62694	0.01576	63.46469
BK7G18	1.51724	1.51802	1.51968	1.52541	0.01572	63.60832
LF5G19	1.59214	1.59349	1.59642	1.60710	0.02508	39.86765
LF5G15	1.57974	1.58103	1.58384	1.59404	0.02449	40.82797
K5G20	1.52065	1.52151	1.52336	1.52987	0.01762	56.76356
LAK9G15	1.68680	1.68798	1.69052	1.69941	0.01826	54.75971
F2G12	1.61573	1.61725	1.62057	1.63271	0.02736	36.54711
SF6G05	1.79988	1.80265	1.80878	1.83190	0.03959	25.25859
KZFSN5	1.64920	1.65070	1.65397	1.66571	0.02525	39.61054

Una solución: par acromático



- Construir un juego de lentes de tal manera que la combinación tenga la misma distancia focal efectiva para los colores extremos.
- Para cada lente: $\frac{1}{f_i} = (n_i - 1) \left(\frac{1}{R_{i1}} - \frac{1}{R_{i2}} \right) = (n_i - 1) \rho_i$
- Tomando diferencias respecto a n :

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{1}{f_i} \right) &= \rho_i \Delta n_i \\ &= v_i (n_{iD} - 1) \rho_i \\ &= \frac{v_i}{f_{iD}} \end{aligned}$$

Par acromático

- La distancia focal del par (lentes pegadas)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (1)$$

- El cambio en la distancia focal con longitud de onda es:

$$\Delta\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{v_1}{f_1} + \frac{v_2}{f_2}$$

- Que se anula cuando $v_1 f_2 = -v_2 f_1$ (2)
- Par acromático: solución de (1) y (2)

Ejemplo

Diseñar un para acromático con vidrios BK7G18 ($n_C = 1.51724$, $n_D = 1.51968$, $n_F = 1.52541$) y N-SF19 ($n_C = 1.66092$, $n_D = 1.66661$, $n_F = 1.68106$) que tenga una distancia focal $f = 10.0$ cm. Si la segunda cara de la lente divergente debe ser plana, ¿cuáles deben ser los radios de curvatura de las demás superficies?

- Poderes de dispersión: $\nu_1 = 0.01572$, $\nu_2 = 0.03021$

- Ecuaciones

$$P_1 + P_2 = 10$$

$$\nu_1 P_1 + \nu_2 P_2 = 0$$

- Solución: $f_1 = 4.79647$ cm; $f_2 = -9.21771$ cm. $R_{12} = R_{21} = -6.14462$ cm, $R_{11} = 4.19394$ cm.

Otra combinación acromática

- Utilizar dos lentes del mismo vidrio, pero ahora separadas una distancia t .

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{t}{f_1 f_2}$$

$$\Delta\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{v}{f_1} + \frac{v}{f_2} - t\left(\frac{v}{f_1 f_2} + \frac{v}{f_1 f_2}\right)$$

$$\therefore t = \frac{f_1 + f_2}{2}$$