Estudio de la Existencia de un Atractor Global y de la Convergencia de las Soluciones de un Sistema Semilineal de Ecuaciones de la Termoelasticidad en Una Dimensión

Jesús Matute
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes

Tesis de Grado
Para optar al título de

Master en Matemáticas

Tutor: *Dr. Hugo Leiva*

Trabajo financiado por el CDCHT
Código No. C-9052-99-05-E

Mérida - Venezuela

Resumen

En el presente trabajo se usa la *técnica de variación de constantes*, considerando hipótesis muy débiles sobre la parte lineal de una *ecuación semilineal y unidimensional de la termoelasticidad*, a fin de comprobar la existencia de un *atractor global* de dicho sistema . Así mismo, se verifica la *convergencia de las soluciones a un punto de equilibrio,* sin hipótesis adicionales referentes a la hiperbolicidad.

Estudio de la Existencia de un Atractor Global y de la Convergencia de las Soluciones de un Sistema Semilineal de Ecuaciones de la Termoelasticidad en Una Dimensión

Jesús Matute
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes

Tesis de Grado
Para optar al título de

Master en Matemáticas

Tutor: *Dr. Hugo Leiva*

Mérida - Venezuela

A la memoria de Ángela Gómez.

Agradecimiento

Agradecemos al *Doctor Hugo Leiva* por su asesoría durante la elaboración del presente trabajo. Este agradecimiento no constituye un mero formalismo de cortesía, ya que el *Doctor Leiva* siempre mostró gran interés en cada una de las diversas consultas en relación a este trabajo; traduciéndose esto en que sus observaciones y comentarios no sólo fueron útiles y efectivos para la conclusión del mismo, sino que también nos ayudaron a obtener una visión sustancial del tema estudiado. También se agradece al *Dr. Jesús Pérez Sánchez*, por sus sugerencias y la revisión cuidadosa del trabajo en consideración.

Índice

Introducción

La investigación matemática de la conducción del calor, se ha considerado casi idéntica al estudio de la ecuación: $u_t - \triangle u = f$ [Day; p. vii]. Esta ecuación se deriva bajo el supuesto de que el cuerpo conductor del calor es rígido, ignorando cualquier interacción entre los efectos térmicos y mecánicos [Day; p. vii]; sin embargo, el estudio hecho en años recientes del comportamiento mecánico de los materiales de alta tecnología ha resultado inadecuado, lo cual ha conducido a estudiar la relación existente entre los efectos mecánicos y termales en los cuerpos sólidos [Bonadies et al.; p. 1].

Desde el punto de vista de la Física, el problema de la Termoelasticidad en una Dimensión, consiste en estudiar la conducción del calor en un cuerpo homogéneo e isotrópico en forma de barra, cuyas partes se desplazan u oscilan paralelamente con respecto a una recta dada; excepto sus extremos, los cuales se mantienen fijos. El sistema correspondiente a este fenómeno es [Day; p. 3]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \dfrac{\partial \theta}{\partial t} + A\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A\dfrac{\partial \theta}{\partial x} + B\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\[2ex] u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \\[2ex] A > 0, \quad B > 0. \end{cases} \tag{1}$$

En el sistema anterior, $\theta(x,t)$ representa la temperatura de la barra en el punto "x" en el tiempo "t" y, análogamente, $u(x,t)$ se refiere al desplazamiento de dicho punto en el mismo tiempo antes indicado.

Tradicionalmente, el sistema (1) ha sido estudiado mediante una técnica catalogada como Método de la Energía[1]. En términos generales, este método consiste en una técnica de demostración que conduce a una desigualdad que contiene la Integral (Energía Total) de una función que incluye derivadas parciales. Ejemplos del uso del Método de la Energía en el problema de la Termoelasticidad en Una Dimensión; por sólo citar tres, son:

a) Day, W.A. *Heat Conduction within Linear Thermoelasticity.* Springer-Verlag. New York, 1985.

b) Hansen, S.W. *Exponential Energy Decay in a Linear Thermoelastic Rod.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. **167**, 429-442 (1992).

c) Slemrod M. *Global Existence, Uniqueness, and Asymtotic Stability of Classical Smoth Solutions in One-Dimensional Non-Linear Thermoelasticity.* Arch. Rational Mech. Anal. **76**, 87-134 (1981).

Otra técnica empleada en el estudio de un Sistema de Ecuaciones en Derivadas Parciales, es el uso de la Teoría de Semigrupo de Operadores. Este método consiste en asociar a un sistema en Derivadas Parciales una

[1]En [Zachmanoglou-Thoe; pp. 274-283], se usa y explica el empleo del término "energía".

Ecuación Diferencial Ordinaria sobre un Espacio de Banach de Dimensión Infinita (Ecuación de Evolución Abstracta), para luego reescribir ésta como una Ecuación Integral a través de la fórmula de variación de constantes: en el quinto capítulo, Sección 5.1, se explica cómo hacer esto último. Dicha sección se inicia considerando un sistema no lineal en derivadas parciales, del cual el sistema lineal (1) anterior es un caso particular (Sección 5.1, sistema (5.1)):

$$\begin{cases} u_{tt} = (au_x)_x - (m\theta)_x - g(u) & \\ & 0 < x < \pi \\ \theta_t = (k\theta_x)_x - mu_{tx} & \\ & \\ u(x,t) = \theta(x,t) = 0, \forall t \geq 0, \quad \text{si } x = 0, \pi & \end{cases} \tag{2}$$

En el sistema (2), a, m, k y g son funciones reales C^1 (Sección 5.1).

El presente trabajo consiste en una aplicación de la Teoría de Semigrupos al estudio del sistema (2). Concretamente, se escribe (2) como una ecuación ordinaria en el Espacio de Hilbert $H = H_0^1(I) \times L^2(I) \times L^2(I)$, $I = (0, \pi)$:

$$\dot{z} = Az + F(z), \quad z \in H \tag{3}$$

Mediante las letras A y F se denotan un Operador Lineal y la Función:

a) $A : D(A) \to H$; $A(u, v, \theta) = \left(v, (au')' - (m\theta)', (k\theta')' - mv'\right)$

b) $F : H \to H$; $F(u, v, \theta) = (o, -g \circ u, o)$

donde $D(A) = [H_0^1 \cap H^2] \times H_0^1 \times [H_0^1 \cap H^2]$ es un subespacio vectorial denso de H. En el primer capítulo se definen $D(A)$ y H, a partir del espacio H^1 (Definiciones 1.2.4 y 1.2.6, Observación 1.3.14).

El segundo capítulo trata sobre la parte lineal de la ecuación (3):

$$y' = Ay \tag{4}$$

En dicho capítulo se define el Operador A y se comprueba que genera un Semigrupo Fuertemente Continuo de Contracciones. Posteriormente se verifica que este último decae exponencialmente a cero.

La letra F en la ecuación (3) denota una función del espacio H en H. El tercer capítulo trata sobre la definición de F (Corolario 3.3.3) y la Diferenciabilidad de la misma. En el cuarto capítulo se verifica que F es Compacta (Corolario 4.3.1).

A su vez, la ecuación (3) se transforma en una ecuación integral (Método de Variación de Parámetros). Esto es tratado en el quinto capítulo; además de asociar el respectivo Sistema Dinámico a la mencionada ecuación integral.

En el sexto capítulo se comprueba que el Sistema Dinámico del capítulo cinco posee un Atractor Global; verificando luego en el séptimo capítulo que las órbitas de dicho sistema convergen a un punto de equilibrio que depende de cada órbita.

El trabajo que se considera, puede ser inscrito dentro de la idea desarrollada en el libro: Hale, J.K. *Asymtotic Behavior of Dissipative Systems.* Mathematical Surveys and Monograpas. **25**, AMS, Providence, R.I., 1989. El objetivo propuesto en este texto, es presentar una Teoría de los Sistemas Disipativos en Espacios de Dimensión Infinita; es decir, se estudia una clase general de sistemas, los cuales poseen un Atractor Global. En dicho texto se indica la importancia del concepto de **Radio Esencial** en el estudio de los Sistemas Disipativos: tal concepto es tratado y empleado al final de la Sección 2.7.

A pesar de que el trabajo desarrollado sigue de manera muy estrecha el artículo de [Hale, Perissinotto], es conveniente destacar lo siguiente:

1) El Teorema 2.6.8, tomado de [Haraux], es una versión del Teorema de Hille-Yosida-Phillips cuando el espacio en consideración es de Hilbert. Este Teorema, junto con la Proposición 2.5.3, son mucho más sencillos de usar en las aplicaciones, en donde el espacio es de Hilbert, que las versiones generales del Teorema recién indicado. Un Corolario útil de dicho Teorema, el cual es empleado en [Henry et al., Prueba del Teorema 1], es el siguiente:

   Corolario.

   Sea $D(T)$ un subespacio denso del Espacio de Hilbert X.

   Si la transformación lineal $T : D(T) \to X$ es disipativa (Proposición 2.5.3) y el número cero pertenece al resolvente de T (Definición 2.7.1), entonces T genera un semigrupo C_0 de contracciones.

   Las secciones que van desde la 2.2 hasta la 2.6 se han dispuesto de tal forma, que al seguir los títulos o el contenido de las mismas, se obtiene una prueba del Corolario anterior.

2) Las demostraciones del Corolario 2.7.25 y el Lema 7.2.9 son originales: Difieren de las dadas en el artículo de [Hale, Perissinotto].

3) El Teorema 2.4.1, junto con el Lema 2.7.2 y el Corolario 2.7.3, forman un esquema de la prueba de que el resolvente es un conjunto abierto. Si bien es cierto que en [Brézis] y [Komogórov-Fomin] existen demostraciones de esta propiedad del conjunto resolvente, las mismas suponen un Operador Lineal: $T : D(T) \to X$, tal que $D(T) = X$.

4) En la Sección 4.1 se hace una discusión sobre los términos: Conjunto Relativamente Compacto, Conjunto Precompacto y Conjunto Totalmente Acotado, ya que distintos autores no coinciden en el significado de aquellos.

5) Dejando de lado la Definición 4.2.1, la Sección 4.2, que se refiere a Funciones Compactas, se ha desarrollado en forma totalmente independiente. La misma se incluye, ya que la información contenida en dicha sección no se pudo encontrar mediante consulta bibliográfica.

6) En el artículo de [Hale, Perissinotto] se asume que la función "m", presente en el sistema (2) anterior, cumple con:

   (i) m es una función a valores reales de clase C^1, definida sobre el intervalo $[0, \pi]$.

   (ii) m es distinta de cero en algún punto del intervalo $[0, \pi]$.

   El segundo numeral de la hipótesis antes indicada, se ha cambiado por el siguiente:

   (iii) $m(x) \neq 0, \quad \forall x \in [0, \pi]$.

El literal (iii) ha sido empleado únicamente en las pruebas de la Propiedad 6.2.7 y del Lema 7.2.9. Al leer dichas pruebas con detenimiento, podemos convencernos de que asumiendo el literal (ii), no es claro cómo llevar a efecto las pruebas mencionadas.

7) La extensión de este trabajo no se debe tanto a la intención de que resultara lo más autocontenido posible, como al propósito de incluir aquellas demostraciones que no están presentes o están poco desarrolladas en el artículo de [Hale, Perissinotto].

Una extensión natural del presente trabajo es el estudio de la existencia de un Atractor Global del sistema análogo de la Termoelasticidad en $I\!R^n$:

$$\begin{cases} u_{tt} = h \triangle u_{tt} - \triangle^2 u - \alpha \triangle \theta - g(u) \\ \theta_t = \beta \triangle \theta + \alpha \triangle u_t \end{cases}, I\!R_+ \times \Omega$$

$$\theta = u = \triangle u = 0 \quad \text{sobre } I\!R_+ \times \partial\Omega.$$

$$\theta(0,x) = \theta_0(x), \quad u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \Omega$$

donde $\alpha \neq 0$, $\beta > 0$ y $h > 0$ son constantes; Ω es un dominio acotado en $I\!R^n$ con frontera suave $\partial\Omega$, el cual se interpreta físicamente como una chapa de altura pequeña h cuando $n = 2$. En este caso, las letras u y θ se denotan la deflección vertical y la temperatura, respectivamente, de un punto de la chapa en un instante determinado.

Capítulo 1
LOS ESPACIOS H Y $D(A)$

El propósito en este capítulo es definir los espacios H y $D(A)$ mencionados en la introducción y constatar que $D(A)$ es denso en H. Para este fin, es necesario considerar algunas propiedades importantes de los espacios de Sobolev $H_0^1(0,\pi)$ y $H^2(0,\pi)$.

1.1 Espacios de Sobolev

Sea $I := (0,\pi)$.

Mediante el símbolo $C_c^1(I)$, se designa al conjunto de las funciones reales con derivada continua en el intervalo I; y con soporte compacto contenido en I.

Definición 1.1.1. [Brézis; p. 120]

El espacio de Sobolev $W^{1,2}(I)$ *se define como:*

$$W^{1,2}(I) = \left\{u \in L^2(I) \,; \exists g \in L^2(I) \text{ tal que } \int_I u \cdot \varphi' = -\int_I g \cdot \varphi, \forall \varphi \in C_c^1(I)\right\}$$

Nota 1.1.2. Para cada $u \in W^{1,2}(I)$, se denota $u' := g$. La función g es única c.t.p. (casi en todas partes); debido al Lema IV.2 que se encuentra en [Brézis; p. 61].

Nota 1.1.3. Se acostumbra a usar el símbolo $H^1(I)$ en lugar de $W^{1,2}(I)$; es decir, $H^1(I) := W^{1,2}(I)$.

Con la finalidad de simplificar la notación, en la mayoría de las ocasiones se omitirá escribir la letra I, cada vez que ésta forme parte de algún símbolo. Así por ejemplo, se escribirá H^1 en lugar de $H^1(I)$.

Propiedad 1.1.4.

H^1 es un espacio vectorial. Más aún:

1) $(u+v)' = u' + v'$, $\forall u, v \in H^1$

2) $(\alpha v)' = \alpha v'$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall v \in H^1$

Prueba.

Se sigue de la definición de H^1. ■

Definición 1.1.5. [Brézis; p. 121]

Se dota al espacio H^1 del siguiente Producto Escalar:

$$\langle u, v \rangle_{H^1} := \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u', v' \rangle_{L^2}, \quad u, v \in H^1; \tag{1.1}$$

donde

$$\langle r, s \rangle_{L^2} := \int_I r.s, \quad r, s \in L^2$$

Observación 1.1.6.

La norma asociada al Producto Interno anterior es:

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \ ,$$

donde

$$\|r\|_{L^2}^2 := \int_I |r|^2$$

Propiedad 1.1.7. [Brézis; Proposición VIII.1, p.121]

El Espacio H^1 con la norma antes definida, es un Espacio de Hilbert separable.

Teorema 1.1.8. [Brézis; Teorema VIII.2, p. 122]

Sea $u \in H^1$. Entonces existe una función $\widetilde{u} \in C([0,\pi])$ tal que

i) $u = \widetilde{u}$ *c.t.p. en I.*

ii) $\widetilde{u}(y) - \widetilde{u}(x) = \int_x^y u'(t)\,dt$, $\forall x, y \in I$.

Observación 1.1.9. [Brézis; Nota 5, p. 122]

El Teorema anterior afirma que toda función u del Espacio H^1 admite un representante continuo, y sólo uno; es decir, existe una función continua perteneciente a la clase de equivalencia de u, para la relación de equivalencia:

$u \sim v$, sii, $u = v$ c.t.p. Más aún, este representante es **absolutamente continuo** [Brézis; Nota 8, p. 125]

De ahora en adelante, al considerar un elemento $u \in H^1$, el mismo designará a su representante continuo.

Notemos que el Teorema anterior se ha enunciado para $x, y \in I$. El Corolario que está después de la siguiente Propiedad, permite afirmar que el mencionado Teorema es cierto cuando $x = 0$ e $y = \pi$.

Propiedad 1.1.10.

Supongamos que $f \in L^1(I)$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\left(\pi-\frac{1}{n}\right)} f(t)\,dt = \int_0^{\pi} f(t)\,dt.$

Prueba.

Se define $f_n : (0,\pi) \to \mathbb{R}$;

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 \ , \text{ si } t \in \left(0, \dfrac{1}{n}\right) \cup \left(\pi - \dfrac{1}{n}, \pi\right) \\ \\ f(t) \ \ , \text{ si } t \in \left[\dfrac{1}{n}, \pi - \dfrac{1}{n}\right] \end{cases}.$$

Notemos que $|f_n| \leq |f|$, $\forall n \geq 1$. Además, $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in I$. Al usar el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, se obtiene la conclusión de la Propiedad. ■

Corolario 1.1.11.

Sea $u \in H^1$. Entonces la función $\widetilde{u}$ del Teorema 1.1.8, cumple que:

$$\widetilde{u}(\pi) - \widetilde{u}(0) = \int_0^{\pi} u'(t)\,dt.$$

Prueba.

Gracias al último Teorema mencionado, existe una función $\widetilde{u} \in C([0,\pi])$ tal que:

i) $u = \widetilde{u}$ c.t.p en I.

ii) $\widetilde{u}\left(\pi - \frac{1}{n}\right) - \widetilde{u}\left(\frac{1}{n}\right) = \int_{\frac{1}{n}}^{\pi - \frac{1}{n}} u'(t)\, dt$, $\forall n \geq 1$.

Ya que $\widetilde{u} \in C([0,\pi])$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left[\widetilde{u}\left(\pi - \frac{1}{n}\right) - \widetilde{u}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \widetilde{u}(\pi) - \widetilde{u}(0).$$

Por la Propiedad anterior, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi - \frac{1}{n}} u'(t)\, dt = \int_0^{\pi} u'(t)\, dt.$$

De la Unicidad del Límite, obtenemos que:

$$\widetilde{u}(\pi) - \widetilde{u}(0) = \int_0^{\pi} u'(t)\, dt.$$

$\blacksquare$

Teorema 1.1.12. [Brézis; Corolario VIII.9, p. 131]

Sean $u, v \in H^1$. Entonces $u \cdot v \in H^1$ y

1) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

2) $\int_x^y u \cdot v' = u(y) \cdot v(y) - u(x) \cdot v(x) - \int_x^y u' \cdot v$; $\forall x, y \in [0,\pi]$.

Observación 1.1.13.

El resultado anterior contrasta con lo que sucede en L^p : en general, si u y v pertenecen a L^p, el producto $u \cdot v$ no pertenece a L^p.

Nota 1.1.14.

$$C_c^1(I) \subseteq H^1(I).$$

Definición 1.1.15. [Brézis; p. 132]

Se designa por $H_0^1(I)$ el cierre (clausura) de $C_c^1(I)$ en $H^1(I)$.

Observación 1.1.16.

El Espacio H_0^1 está dotado del Producto Escalar (1.1), inducido por H^1. Con este Producto Escalar, el Espacio H_0^1 es un Espacio de Hilbert Separable.

Teorema 1.1.17. [Brézis; Teorema VIII.11, p. 133]

Sea $u \in H^1$, tal que u designa el representante continuo.

Entonces: $u \in H_0^1$, si y solamente si, $u(0) = u(\pi) = 0$.

Definición 1.1.18. [Brézis; p. 132]

$$H^2(I) = \left\{u \in H^1(I) ; u' \in H^1(I)\right\}$$

El símbolo $C_c^\infty(I)$, designa al conjunto de las funciones reales infinitamente *diferenciables, con soporte compacto contenido en el intervalo I.*

Propiedad 1.1.19.

1) $C_c^\infty(I) \subset H_0^1(I)$.

2) $C_c^\infty(I) \subset H^2(I)$.

3) $C_c^\infty(I) \subset L^2(I)$.

Prueba.

Sólo se dan las pruebas de los numerales 1) y 2), ya que el numeral 3) es bastante conocido.

Prueba del numeral 1):

Sea $f \in C_c^\infty(I)$.

Ya que f posee soporte compacto contenido en I, existen dos números reales a y b tal que $0 < a < b < \pi$ y $f(x) = 0$, $\forall x \in (I \setminus (a,b))$.

Sea $\varphi \in C_c^1(I)$. Observe que:

$$\int_I f \cdot \varphi' = \int_a^b f \cdot \varphi'.$$

Al usar el Método de Integración por Partes de la Integral de Riemann obtenemos:

$$\int_I f \cdot \varphi' = \int_a^b f \cdot \varphi' = f \cdot \varphi]_a^b - \int_a^b f'\varphi.$$

Ya que $f(a) = f(b) = 0$, entonces $f \cdot \varphi]_a^b := f(b) \cdot \varphi(b) - f(a) \cdot \varphi(a) = 0$.

Así tenemos que:

$$\int_I f\cdot\varphi' = -\int_a^b f'\varphi = -\int_I f'\varphi;\ \forall\varphi\in C_c^1(I).$$

Ya que $f\in C_c^\infty(I)$, entonces f' es continua y con soporte compacto en el intervalo $(0,\pi)$; por lo tanto $f'\in L^2(I)$.

Así hemos verificado que $f\in H^1(I)$.

Observación

En el razonamiento anterior se ha usado de forma intrínseca que si una función es Riemann Integrable, entonces es Lebesgue Integrable y el valor de ambas integrales coinciden.

Al usar el Teorema 1.1.17; definiendo $\widetilde{u}(x)=f(x)$, si $x\in I$ y $\widetilde{u}(x)=0$, si $x=0,\pi$: se tiene que $f\in H_0^1$. ■

Prueba del numeral 2):

Se repite la prueba anterior, tomando f' en lugar de f. ■

Corolario 1.1.20.

$$C_c^\infty(I)\subset\left[H_0^1(I)\cap H^2(I)\right].$$

Lema 1.1.21.

1) $[H_0^1(I)\cap H^2(I)]$ *es un subespacio vectorial de* H_0^1.

2) H_0^1 *es un subespacio vectorial de* L^2.

3) $[H_0^1 \cap H^2]$ *es un subespacio vectorial de* L^2.

Propiedad 1.1.22.

1) C_c^∞ es denso en H_0^1; con la norma $\|\cdot\|_{H^1}$ [Brézis; Nota 14, p. 133].

2) C_c^∞ es denso en L^2; con la norma usual en L^2 [Brézis; Corolario IV.23, p. 71].

Corolario 1.1.23.

1) $[H_0^1 \cap H^2]$ *es denso en* H_0^1*; con la norma* $\|\cdot\|_{H^1}$.

2) H_0^1 *es denso en* L^2*; con la norma usual de* L^2.

3) $[H_0^1 \cap H^2]$ *es denso en* L^2*; con la norma usual de* L^2.

Observación 1.1.24.

1) Al restringir la norma $\|\cdot\|_{H^1}$ al Espacio Vectorial $[H_0^1 \cap H^2]$, la misma proviene del Producto Escalar (1.1) restringido a $[H_0^1 \cap H^2]$.

2) Al restringir la norma usual de L^2 al Espacio Vectorial H_0^1, la misma proviene del producto escalar usual de L^2 restringido a H_0^1.

3) Al restringir la norma usual de L^2 al Espacio Vectorial $[H_0^1 \cap H^2]$, la misma proviene del producto escalar usual de L^2 restringido a $[H_0^1 \cap H^2]$.

1.2 Los Espacios H y $D(A)$

Lema 1.2.1.

Sean P, Q y M tres Espacios de Hilbert Separables.

Se define $V := P \times Q \times M$.

Sean $v := (a, b, c) \in V$; $\widetilde{v} := \left(\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}\right) \in V$.

El Producto Interno

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to I\!R;$$

$$\left\langle v, \widetilde{v} \right\rangle = \left\langle a, \widetilde{a} \right\rangle_P + \left\langle b, \widetilde{b} \right\rangle_Q + \left\langle c, \widetilde{c} \right\rangle_M ;$$

junto con el Espacio Vectorial V, constituyen un Espacio de Hilbert separable.

Lema 1.2.2. [Brézis; p. 133]

El Espacio H_0^1 es un Espacio de Hilbert Separable, con el producto interno (1.1) inducido por H^1.

Lema 1.2.3. [Brézis; Teorema IV.13, p. 62]

$L^2(I)$ es un Espacio de Hilbert separable, con el producto interno usual sobre L^2.

Definición 1.2.4.

$$H = H_0^1 \times L^2 \times L^2.$$

Corolario 1.2.5.

Sea $z = (u, v, \theta) \in H$, $\widetilde{z} = \left(\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{\theta}\right) \in H$.

El Producto Interno

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : H \times H \rightarrow I\!R;$$

$$\left\langle z, \widetilde{z} \right\rangle_1 = \left\langle u, \widetilde{u} \right\rangle_{H^1} + \left\langle v, \widetilde{v} \right\rangle_{L^2} + \left\langle \theta, \widetilde{\theta} \right\rangle_{L^2};$$

junto con el Espacio Vectorial H, constituyen un Espacio de Hilbert Separable.

Definición 1.2.6.

$$D(A) := \left[H_0^1 \cap H^2\right] \times H_0^1 \times \left[H_0^1 \cap H^2\right].$$

Corolario 1.2.7.

$D(A)$ *es denso en* H.

Prueba.

Es consecuencia de la definición del Espacio H y el Corolario 1.1.23.

1.3 Normas Equivalentes en H_0^1

Recordemos la siguiente definición:

Definición 1.3.1. [Kolmogórov-Fomin]

Dos normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ de un Espacio Lineal R se llaman equivalentes, cuando existen constantes $a, b > 0$ tales que $a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$, para todo $x \in R$.

En el Espacio H_0^1, puede definirse la siguiente norma:

Definición 1.3.2.

$$\|\cdot\|_W : H_0^1 \to [0, \infty);$$

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2}.$$

Propiedad 1.3.3. [Brézis, p. 121]

Las normas $\|\cdot\|_{H^1}$ y $\|\cdot\|_W$ son equivalentes.

Además del producto interno antes considerado, en el Espacio H_0^1 puede definirse el siguiente producto escalar:

Definición 1.3.4.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0} : H_0^1 \times H_0^1 \to I\!R;$$

$$\langle u, v \rangle_{H_0} = \langle u', v' \rangle_{L^2},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ es el producto escalar usual de L^2.

Observación 1.3.5.

La norma generada por el Producto Escalar anterior es

$$\|\cdot\|_{H_0} : H_0^1 \to [0, \infty);$$

$$\|u\|_{H_0} = \|u'\|_{L^2};$$

donde $\|\cdot\|_{L^2}$ es la norma usual de L^2.

Propiedad 1.3.6. [Brézis; Nota 17, p. 134]

Las normas $\|\cdot\|_{H^1}$ y $\|\cdot\|_{H_0}$ son equivalentes en el espacio H_0^1.

También podemos definir el siguiente Producto Escalar en H_0^1:

Definición 1.3.7.

Asumamos que "a" denota una función continua, positiva, sobre el intervalo $[0, \pi]$; es decir, sea $a : [0, \pi] \to I\!R$ una función continua tal que $a(x) > 0$, $\forall x \in [0, \pi]$.

Se define el siguiente Producto Interno:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1} : H_0^1 \times H_0^1 \to I\!R;$$

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_I a u' \cdot v'.$$

Nota 1.3.8.

No es complicado verificar que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1}$ antes definida es un Producto Escalar. La hipótesis de que a es positiva, nos ayuda a comprobar que $\langle u, u\rangle_{H_0^1} = 0$, sii, $u = \Theta$ (Θ denota el vector cero de H_0^1). Para verificar la bilinealidad, podemos usar la Propiedad 1.1.4.

Observación 1.3.9.

El producto interno anterior $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1}$, induce la siguiente norma sobre H_0^1:

$$\|\cdot\|_{H_0^1} : H_0^1 \to [0, \infty) ;$$

$$\|u\|_{H_0^1} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{H_0^1}} = \left(\int_I a \cdot (u')^2\right)^{1/2}.$$

Propiedad 1.3.10.

Las normas $\|\cdot\|_{H_0}$ y $\|\cdot\|_{H_0^1}$ son equivalentes.

Prueba.

Ya que por hipótesis la función a es continua, existen el mínimo y máximo de la función a sobre el intervalo $[0, \pi]$; los cuales denotamos respectivamente como A y B.

En vista de que a es una función positiva, se tiene que:

$$0 < A \leq a(x) \leq B; \forall x \in [0, \pi].$$

Por lo tanto:

$$A(u'(x))^2 \leq a(x)(u'(x))^2 \leq B(u'(x))^2 ; \forall x \in [0, \pi].$$

Luego:

$$\sqrt{A}\,\|u\|_{H_0} \leq \|u\|_{H_0^1} \leq \sqrt{B}\,\|u\|_{H_0}.$$

■

Propiedad 1.3.11.

Si $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ son equivalentes y $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_3$ son equivalente, entonces $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_3$ son equivalentes.

Corolario 1.3.12.

Las normas $\|\cdot\|_{H^1}$, $\|\cdot\|_W$, $\|\cdot\|_{H_0}$ y $\|\cdot\|_{H_0^1}$ en H_0^1; son equivalentes.

Corolario 1.3.13.

H_0^1 junto con el Producto Escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_0^1}$; es un Espacio de Hilbert Separable.

Prueba.

Es consecuencia del Corolario anterior y la Observación 1.1.16. ■

Observación 1.3.14.

En el conjunto H definido en la sección anterior, se puede definir el siguiente Producto Escalar:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_H : H \times H \to \mathbb{R};$$

$$\left\langle z, \widetilde{z}\right\rangle_H = \left\langle u, \widetilde{u}\right\rangle_{H_0^1} + \left\langle v, \widetilde{v}\right\rangle_{L^2} + \left\langle \theta, \widetilde{\theta}\right\rangle_{L^2} = \int_I a u' \cdot \widetilde{u}' + \int_I v \cdot \widetilde{v} + \int_I \theta \cdot \widetilde{\theta}\,;$$

donde $z = (u, v, \theta) \in H$; $\widetilde{z} = \left(\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{\theta}\right) \in H$.

Corolario 1.3.15.

El Producto Escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$, es un Espacio de Hilbert Separable.

Prueba.

Se usa el Lema 1.2.1.

Corolario 1.3.16.

$D(A)$ es denso en H, con la norma inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$.

Prueba.

Se imita la prueba del Corolario 1.2.7, usando el Corolario 1.3.13. ■

Observación 1.3.17.

En lo que resta, se trabaja preferentemente con el Producto Escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ y la norma generada por éste. Sin embargo, en algunas de las pruebas se usan convenientemente las normas equivalentes consideradas en la presente sección.

Nota 1.3.18.

El cuadrado de la norma inducida por el último producto escalar mencionado es:

$$\|(u, v, \theta)\|_H^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 + \|v\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2 .$$

Capítulo 2
Decaimiento Exponencial para el Problema de la Termoelasticidad Lineal

En este capítulo se está interesado en comprobar que el Operador A indicado en la Introducción, genera un Semigrupo de Contracciones que decae exponencialmente.

2.1 Definición del Operador A

Asumimos que:

1) a, m y k son funciones C^1 en el intervalo $[0, \pi]$.

2) a y k son funciones positivas sobre $[0, \pi]$, es decir, $a(x) > 0$, $k(x) > 0$ $\forall x \in [0, \pi]$.

3) La función m es positiva o negativa sobre $[0, \pi]$.

Definición 2.1.1.

Sean $D(A)$ y H los Espacios Definidos en la última sección del capítulo anterior (Observación 1.3.14).

Se define el Operador A como:

$$A : D(A) \to H;$$

$$A(u,v,\theta)=\Big(v,(au')'-(m\theta)',(k\theta')'-mv'\Big).$$

Nota 2.1.2. Al recurrir a la Propiedad 1.1.4 del primer capítulo, podemos verificar que la función anterior A **es una transformación lineal**.

2.2 Existencia del Inverso del Operador A

Definición 2.2.1. [Kolmogórov-Fomín; p. 239]

Sea B un Operador que actua de E en E_1 y sean D_B el campo de definición y R_B el campo de valores del Operador.

Un **Operador** B **se llama inversible**, cuando para cualquier $y \in R_B$ la ecuación:

$$B(x)=y,$$

tiene una solución única $x \in D_B$.

Lema 2.2.2.

Sea $p \in C^1([0,\pi])$ con $p \geq \alpha > 0$ en $[0,\pi]$ y $q \in C([0,\pi])$.

Para cada $r \in L^2(I)$, existe una única función $u \in [H_0^1 \cap H^2]$ que verifica:

$$\begin{cases} -(p \cdot u')' + qu = r \quad \text{en } I=(0,\pi). \\ u(0)=u(\pi)=0. \end{cases}$$

Además, existe una constante C que sólo depende del número real α, tal que $\|u\|_{H^1} \leq C\|r\|_{L^2}$.

Prueba.

La prueba está contenida en la demostración del Teorema VIII.20 de [Brézis; p. 145]. ■

Propiedad 2.2.3.

La Transformación Lineal A es Inversible.

Prueba.

Sea $(f, g, h) \in H = H_0^1 \times L^2 \times L^2$; es decir, $f \in H_0^1$, $g \in L^2$, $h \in L^2$.

Comprobar que A es inversible, es equivalente a verificar que dado $(f, g, h) \in H$, existe una solución única $(u, v, \theta) \in D(A)$, que satisface el siguiente sistema:

$$\begin{cases} v &= f \\ (au')' - (m\theta)' &= g \\ (k\theta')' - mv' &= h \end{cases}$$

Primera parte de la prueba.

Notemos que podemos definir v como $v := f$ y por la tanto, $v \in H_0^1$.

Segunda parte de la prueba.

Observe que $m \cdot f' \in L^2$.

Por ser L^2 un Espacio Vectorial, se tiene que $-(h + mf') \in L^2$.

Ahora consideremos la tercera igualdad del sistema escrito al inicio de esta prueba.

Al usar el Lema 2.2.2; tomando $p := k$, $q \equiv 0$, $r := -(h + m \cdot f')$; se tiene que existe una única función $\theta \in [H_0^1 \cap H^2]$ tal que:

$$\begin{cases} -(k\theta')' = -(h + m \cdot f') & \text{en } I \\ \theta(0) = \theta(\pi) = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, hay una única función $\theta \in [H_0^1 \cap H^2]$ tal que

$$(k\theta')' - mv' = (k\theta')' - mf' = h.$$

Tercera parte de la prueba.

Al repetir el razonamiento de la segunda parte anterior, pero ahora teniendo en cuenta la segunda igualdad del sistema ya indicado, se tiene que existe una única función $u \in [H_0^1 \cap H^2]$ tal que $(au')' = g + (m\theta)'$. ■

Definición 2.2.4. [Kolmogórov-Fomín; p. 239]

Si B es inversible, a cada elemento $y \in R_B$ se puede poner en correspondencia un elemento único $x \in D_B$ que es la solución de la ecuación $Bx = y$. El Operador que realiza esta correspondencia se llama inverso de B y se denota B^{-1}.

Lema 2.2.5. [Kolmogórov-Fomín; p. 239]

Un Operador B^{-1}, inverso de un Operador Lineal B, es también lineal.

Corolario 2.2.6.

A^{-1} es una Transformación Lineal de H en $D(A)$.

2.3 Acotamiento del Operador A^{-1}

Definición 2.3.1. [Hewitt-Stromberg; p. 210]

Si N y M son Espacios Normados, una **Transformación Lineal T de M en N es Acotada**, *si hay una constante $k > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq k\|x\|$, $\forall x \in N$.*

Nota 2.3.2. En la prueba de la siguiente Propiedad, se usa la equivalencia de las Normas sobre el Espacio H_0^1, que fueron consideradas en la tercera sección del capítulo anterior.

Propiedad 2.3.3.

El Operador Lineal A^{-1} es un Operador Acotado.

Prueba.

Sea $(f, g, h) \in H = H_0^1 \times L^2 \times L^2$. Se define $(u, v, \theta) := A^{-1}(f, g, h)$.

Primera etapa de la prueba.

Al repasar la primera parte de la prueba de la Propiedad 2.2.3, tenemos que $v = f$.

Recordemos que $\|f\|_W := \|f\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2}$. Así tenemos que:

$$\|v\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \leq \|f\|_W \leq k_1 \|f\|_{H_0^1}.$$

Por lo tanto:

$$\|v\|_{L^2}^2 \leq k_2 \|f\|_{H_0^1}^2.$$

Segunda etapa de la prueba.

Al usar la desigualdad del Lema 2.2.2 y repasar el final de la segunda parte de la prueba de la Propiedad 2.2.3, se tiene que:

$$\|\theta\|_{H^1} \leq C \|h + mf'\|_{L^2}.$$

Recordemos que $\|\theta\|_W := \|\theta\|_{L^2} + \|\theta'\|_{L^2}$.

Observe que:

$$\begin{aligned}\|\theta\|_{L^2} &\leq \|\theta\|_W \leq Q_1 \|\theta\|_{H^1} \leq Q_2 \|h + mf'\|_{L^2} \leq Q_2 (\|h\|_{L^2} + Q_3 \|f'\|_{L^2}) \leq \\ &\leq Q_2 (\|h\|_{L^2} + Q_4 \|f\|_W) \leq Q_2 \left(\|h\|_{L^2} + Q_5 \|f\|_{H_0^1}\right).\end{aligned}$$

Al usar la desigualdad:

$$2ab \leq a^2 + b^2, \quad \forall a, b \geq 0;$$

tenemos que:

$$\|\theta\|_{L^2}^2 \leq Q_6 \left(\|h\|_{L^2}^2 + \|f\|_{H_0^1}^2\right).$$

Tercera etapa de la prueba.

De nuevo, al emplear la desigualdad del Lema 2.2.2, se tiene que:

$$\|u\|_{H^1} \leq J_1 \left\|g + (m\theta)'\right\|_{L^2}.$$

Observemos que:

$$\begin{aligned}\left\|(m\theta)'\right\|_{L^2} &= \|m'\theta + m\theta'\|_{L^2} \leq \|m'\theta\|_{L^2} + \|m\theta'\|_{L^2} \leq J_2 \|\theta\|_{L^2} + J_3 \|\theta'\|_{L^2} \leq \\ &\leq J_4 (\|\theta\|_{L^2} + \|\theta'\|_{L^2}) = J_4 \|\theta\|_W\end{aligned}$$

Pero del razonamiento de la segunda etapa recién considerada, también se puede establecer que:

$$\|\theta\|_W^2 \leq J_5 \left(\|h\|_{L^2}^2 + \|f\|_{H_0^1}^2 \right).$$

Así tenemos:

$$\left\|(m\theta)'\right\|_{L^2}^2 \leq J_6 \left(\|h\|_{L^2}^2 + \|f\|_{H_0^1}^2 \right).$$

Al considerar nuevamente la desigualdad indicada al inicio de esta tercera etapa, se tiene que:

$$\|u\|_{H_0^1} \leq J_7 \|u\|_{H^1} \leq J_8 \left(\|g\|_{L^2} + \left\|(m\theta)'\right\|_{L^2} \right).$$

Por lo tanto:

$$\|u\|_{H_0^1}^2 \leq J \left(\|f\|_{H_0^1}^2 + \|g\|_{L^2}^2 + \|h\|_{L^2}^2 \right).$$

Cuarta etapa de la prueba.

Para concluir, recordemos que:

$$\left\|A^{-1}(f,g,h)\right\|_H^2 = \|(u,v,\theta)\|_H^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 + \|v\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2 \quad \text{(Nota 1.3.18).}$$

Al tomar en cuenta las conclusiones de las tres etapas anteriores, se tiene que:

$$\left\|A^{-1}(f,g,h)\right\|_H^2 \leq \widetilde{k} \left(\|f\|_{H_0^1}^2 + \|g\|_{L^2}^2 + \|h\|_{L^2}^2 \right).$$

Por lo tanto:

$$\left\|A^{-1}(f,g,h)\right\|_H \leq k \|(f,g,h)\|_H, \quad \forall (f,g,h) \in H$$

■

2.4 Biyectividad del Operador $(\lambda I - A)$, para λ Contenido en un Entorno del Cero

En esta sección se establece la biyectividad del operador $(\lambda I - B)$ en un entorno de λ_0, cuando $(\lambda_0 I - B)$ es biyectivo y el inverso de éste es acotado.

Ya que en la prueba del Teorema 2.4.1 se usa el Teorema del Punto Fijo de Banach, a continuación recordamos el enunciado de este último.

Teorema del Punto Fijo de Banach

Se X un Espacio métrico Completo y $S : X \to X$ una aplicación tal que $d(S(v_2), S(v_1)) \leq kd(v_1, v_2)$; $\forall v_1, v_2 \in X$ con $k < 1$.

Entonces S tiene un punto fijo único, es decir, existe un elemento $u \in X$ tal que $S(u) = u$ y u es único.

Teorema 2.4.1.

Sea X un Espacio de Banach Real.

Sea $D(T)$ un subespacio vectorial de X.

Sea $T : D(T) \to X$ una Transformación Lineal.

Sea $I : D(T) \to X$; $I(x) = x$.

Sea $\lambda_0 \in I\!R$.

Si $(T - \lambda_0 I) : D(T) \to X$ es biyectiva y $(T - \lambda_0 I)^{-1}$ es acotada, entonces hay un número real $\delta > 0$ tal que $(T - \lambda I) : D(T) \to X$ es biyectiva, $\forall \lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$.

Prueba.

Dado $\lambda \in I\!R$ (próximo a λ_0) y $f \in X$, se trata de resolver:

$$T(u) - \lambda u = f \quad (u \in D(T)). \tag{2.1}$$

Pero (2.1) puede reescribirse como:

$$T(u) - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0) u, \tag{2.2}$$

es decir,

$$u = (T - \lambda_0 I)^{-1} [f + (\lambda - \lambda_0) u].$$

Al usar el Teorema del Punto Fijo de Banach, vemos que (2.2) posee una solución única si:

$$|\lambda - \lambda_0| \left\| (T - \lambda_0 I)^{-1} \right\| < 1.$$

A fin de constatar la última afirmación, consideremos lo siguiente:

Sea

$$S : X \to X;$$

$$S(v) := (T - \lambda_0 I)^{-1} [f + (\lambda - \lambda_0) v].$$

Observe que:

$$\begin{aligned} d(S(v_2), S(v_1)) &= \|S(v_2) - S(v_1)\| = \left\| (T - \lambda_0 I)^{-1} [(\lambda - \lambda_0)(v_2 - v_1)] \right\| \leq \\ &\leq |\lambda - \lambda_0| \left\| (T - \lambda_0 I)^{-1} \right\| \cdot \|v_2 - v_1\| = \\ &= |\lambda - \lambda_0| \left\| (T - \lambda_0 I)^{-1} \right\| \cdot d(v_2, v_1). \end{aligned}$$

■

Nota 2.4.2. En la prueba anterior se amplía y calca parte de la Demostración de [Brézis; Proposición VI.7].

Corolario 2.4.3.

Se define $I : D(A) \to H$; $I(x) = x$. *Entonces hay un número* $\delta > 0$, *tal que* $(A - \lambda I) : D(A) \to H$ *es biyectivo para cada* $\lambda \in (-\delta, \delta)$.

Prueba.

Se usa el Teorema anterior tomando $\lambda_0 = 0$ y recordando que A es biyectivo y que A^{-1} está acotado (Secciones 2.2 y 2.3). ■

2.5 Disipatividad y m-Disipatividad de A

Definición 2.5.1. [Haraux; Definición 1.1.1, p. 1-1]

Sea X *un Espacio de Banach real.*

Un **Operador Lineal sobre** X, es un par (D, B), donde D es un subespacio lineal de X y $B : D \to X$ es una transformación lineal.

Definición 2.5.2. [Haraux; Definición 1.1.4, p. 1-1]

Un **Operador Lineal** B **sobre** X **es llamado Disipativo**, *si se cumple que:*

$$\forall u \in D(B), \quad \forall \lambda > 0 : \|u - \lambda B(u)\| \geq \|u\|,$$

donde $\|\cdot\|$ *denota la norma del Espacio de Banach real* X.

En el caso en el cual X es un Espacio de Hilbert, la Disipatividad se puede caracterizar de la siguiente forma:

Proposición 2.5.3. [Haraux; Proposición 1.1.6, p. 1-3]

Sea B un Operador Lineal sobre X, tal que X es un Espacio de Hilbert.

B es Disipativo (en X), si y sólo si, $\forall u \in D(B) : \langle B(u), u \rangle \leq 0$.

Corolario 2.5.4.

El Operador Lineal $A : D(A) \to H$ definido en la sección 2.1, es Disipativo.

Prueba.

Sea $(u, v, \theta) \in D(A) := [H_0^1 \cap H^2] \times H_0^1 \times [H_0^1 \cap H^2]$.

Al usar el Teorema 1.1.12 del primer capítulo, se tiene que:

$$\int_0^\pi v\,(m\theta)' = v \cdot (m\theta)|_0^\pi - \int_0^\pi v' \cdot m\theta.$$

Si empleamos el Teorema 1.1.17 del capítulo anterior, obtenemos que:

$$v \cdot (m\theta)|_0^\pi = 0.$$

Por lo tanto:

$$\int_0^\pi v\,(m\theta)' = -\int_0^\pi v' \cdot m\theta.$$

Al proceder de manera análoga a lo hecho para obtener la igualdad anterior, se tiene:

$$\int_0^\pi v\,(au')' = -\int_0^\pi v'\,(au') = -\int_0^\pi a \cdot u' \cdot v'$$

$$\int_0^{\pi} \theta \left(k\theta'\right)' = -\int_0^{\pi} k \left(\theta'\right)^2 .$$

Ahora observemos que:

$$\begin{aligned}\left\langle (u,v,\theta) ; A\left(u,v,\theta\right)\right\rangle_H &= \int_0^{\pi} au' \cdot v' + \int_0^{\pi} v \cdot \left[(au')' - (m\theta)'\right] + \int_0^{\pi} \theta \left[(k\theta')' - mv'\right] = \\ &= -\int_0^{\pi} k \left(\theta'\right)^2 \leq 0, \quad \forall \left(u,v,\theta\right) \in D\left(A\right).\end{aligned}$$

La última desigualdad escrita, surge en parte debido a la hipótesis de que la función k es positiva en $[0,\pi]$ (Sección 2.1, numeral 2)). ∎

A continuación se considera la m-disipatividad del Operador A.

Definición 2.5.5. [Haraux; p. 1-2]

Un **Operador Lineal** B **se le denomina** m**-disipativo**, *si:*

a) *B es Disipativo*

b) *$\forall \lambda > 0$, el operador $(I - \lambda B)$ es sobreyectivo, es decir, $\forall f \in X$, $\forall \lambda > 0$, $\exists u \in D\left(A\right)$ tal que $\left(u - \lambda \cdot B\left(u\right)\right) = f$, donde X es un Espacio de Banach Real.*

Proposición 2.5.6. [Haraux; Proposición 1.1.5, p. 1-2]

Sea B un Operador Lineal Disipativo sobre X. Las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) *B es m-disipativo*

(ii) *Hay un número real $\lambda_0 > 0$, tal que para cada $f \in X$, existe un elemento $u \in D(B)$ el cual cumple con: $u - \lambda_0 B(u) = f$.*

Observación 2.5.7.

El numeral (ii) anterior es equivalente a que el Operador Lineal $(I - \lambda_0 B) : D(B) \to X$, es sobreyectivo.

Corolario 2.5.8.

El Operador Lineal $A : D(A) \to H$ definido en la sección 2.1 de este capítulo, es m-disipativo.

Prueba.

Se usa el Corolario 2.4.3, tomando un número real $\beta \in (0, \delta)$ y considerando el operador $(A - \beta I)$. Después, empleamos la Proposición 2.5.6 anterior, con el operador $(I - \lambda_0 A)$, donde $\lambda_0 := \dfrac{1}{\beta}$. ■

2.6 Generación de un Semigrupo de Contracciones

Comenzamos esta sección, recordando las siguientes definiciones:

Definición 2.6.1. [Pazy; Definición 1.1, p. 1]

Sea X un Espacio de Banach.

Una familia uniparamétrica $\{T(t)\}$, $0 \leq t < \infty$, de Operadores Lineales Acotados de X en X es un **Semigrupo de Operadores Lineales Acotados sobre X**, si:

(i) $T(0) = I$ (I denota al Operador Identidad sobre X).

(ii) $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$, para cada $t, s \geq 0$.

Definición 2.6.2. [Pazy; Definición 2.1, p. 4]

Un Semigrupo $\{T(t)\}, 0 \leq t < \infty$, de Operadores Lineales Acotados sobre X es un **Semigrupo de Operadores Lineales Acotados Fuertemente Continuo**, *si*

$$\lim_{t \to 0^+} T(t)(x) = x, \quad \forall x \in X.$$

Nota 2.6.3. [Pazy; p. 4] Un Semigrupo de Operadores Lineales Acotados Fuertemente Continuo, se llamará **Semigrupo de Clase C_0** o simplemente **Semigrupo C_0**.

Definición 2.6.4. [Ladas-Lakshmikantham; pp. 26-27]

Sea $\{T(t)\}$, $t \geq 0$, *un Semigrupo* C_0 *sobre el Espacio de Banach* X. *Para* $h > 0$, *se define el Operador Lineal* B_h, *por la fórmula:*

$$B_h(x) = \frac{T(h)(x) - x}{h}; \quad x \in X.$$

Sea $D(B)$ *el conjunto de aquellos elementos* $x \in X$ *para los cuales existe el límite:* $\lim\limits_{h \to 0^+} B_h(x)$. *Se define el operador* B *sobre* $D(B)$ *mediante la relación:*

$$B(x) = \lim_{h \to 0^+} B_h(x); \quad x \in D(B).$$

Al Operador Lineal B con dominio $D(B)$ se le llama el **Generador Infinitesimal del Semigrupo** $\{T(t)\}$, $t \geq 0$.

Definición 2.6.5. [Ladas-Lakshmikantham; Definición 2.2.1, p. 27]

Dado un Operador Lineal B *definido sobre* $D(B)$, *se dice que* B **genera al Semigrupo** C_0, $\{T(t)\}$, $t \geq 0$, *si* B *coincide con el Generador Infinitesimal de* $\{T(t)\}$, $t \geq 0$.

Definición 2.6.6. [Pazi; p. 8]

El Semigrupo C_0, $\{T(t)\}$, $t \geq 0$, **es de Contracciones**, si $\|T(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0$.

Nota 2.6.7. El símbolo $\|T(t)\|$, se refiere a la norma usual del Operador

Lineal Acotado $T(t)$, sobre un Espacio de Banach X (Definición 2.3.1).

Teorema 2.6.8. [Haraux; Teorema 1.2.1, p. 1-5]

Sea X un Espacio Real de Banach y B un Operador Lineal, densamente definido y m-disipativo. Entonces, existe una única familia uniparamétrica de Operadores Lineales Acotados sobre X, $\{T(t)\}$, $t \geq 0$, tal que:

1) $\|T(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0$

2) $T(0) = I$

3) $T(s+t) = T(t) \circ T(s), \forall t, s \geq 0$

4) *Para cada $x \in D(B)$, $u(t) = T(t)(x)$ es la única solución del problema:*
$$\begin{cases} u \in C([0,\infty); D(B)) \cap C^1([0,\infty), X) \\ u'(t) = B(u(t)), \quad \forall t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$
Finalmente, para cada $x \in D(B)$ y $t \geq 0$, se tiene que $(T(t) \circ B)(x) = (B \circ T(t))(x)$.

Observación 2.6.9.

Se recuerda que:
$$u'(0) := \lim_{h \to 0^+} \frac{u(h) - u(0)}{h}$$

Así tenemos, al considerar el numeral 4) del Teorema anterior, que:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)(x)-x}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{u(h)-u(0)}{h} =: u'(0) = B(u(0)) = B(x), \quad \forall x \in D(B).$$

Al recordar la Definición 2.6.5, constatamos que el numeral 4) del Teorema 2.6.8 implica que el Operador B genera al Semigrupo C_0 indicado en dicho Teorema.

Nota 2.6.10. El Teorema 2.6.8 anterior es la versión del Teorema de Hille-Yosida cuando B es un operador m-disipativo.

En el Libro de [Pazi], aparece una versión general del mencionado Teorema de Hille-Yosida.

Corolario 2.6.11.

El Operador Lineal A definido en la sección 2.1 de este capítulo, es el Generador Infinitesimal de un Semigrupo C_0 de Contracciones.

2.7 Decaimiento Exponencial del Semigrupo Generado por el Operador A

En la sección anterior se verificó que el Operador A considerado en la sección 2.1, es el Generador Infinitesimal de un Semigrupo C_0 de Contracciones, denotándose a este último como: $\{T(t)\}$, $t \geq 0$.

En la presente sección y en los capítulos restantes, al referirnos al mencionado Semigrupo C_0, $\{T(t)\}$, se empleará el símbolo e^{At}; es decir,

$$e^{At} := T(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Definición 2.7.1. [Goldstein; p. 13]

Sea $B : D(B) \to X$ un Operador Lineal, donde $D(B) \subset X$ ($D(B)$ es un Espacio Vectorial).

El Conjunto Resolvente de B, es el conjunto

$$\rho(B) := \left\{\lambda \in I\!R : (\lambda I - B) : D(B) \to X \text{ es biyectivo y } (\lambda I - B)^{-1} \in L(X)\right\};$$

donde X es un Espacio de Banach, I denota al Operador Identidad sobre X y $L(X)$ se refiere al conjunto de los Operadores Lineales Acotados de X en X (Definición 2.3.1).

Lema 2.7.2. [Goldstein; p. 13]

Si $\rho(B) \neq \emptyset$, entonces

$$\rho(B) = \{\lambda \in I\!R : (\lambda I - B) : D(B) \to X \text{ es biyectiva}\}.$$

Corolario 2.7.3.

El Conjunto Resolvente $\rho(B)$ es abierto.

Prueba.

Sea $\lambda_0 \in \rho(B)$.

Según la Definición 2.7.1 anterior, el Operador Lineal $(\lambda_0 I - B) : D(B) \to X$ es biyectivo y $(\lambda_0 I - B)^{-1}$ está acotado.

Al usar el Teorema 2.4.1, se tiene que existe un número $\delta > 0$ tal que $(B - \lambda I)^{-1} : D(B) \to X$ es biyectiva, $\forall \lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$.

Al usar el Lema 2.7.2, tenemos que $\lambda \in \rho(B)$, $\forall \lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$. ∎

Definición 2.7.4.

El Espectro del Operador B, *es el conjunto* $\sigma(B) := I\!R \setminus \rho(B)$.

Lema 2.7.5.

Sea X *un Espacio de Hilbert y* $D(B) \subseteq X$.

Si $B : D(B) \to X$ es disipativo y $(\lambda I - B) : D(B) \to X$ no es inyectivo, entonces $\lambda \in I\!R$ y $\lambda \leq 0$.

Prueba.

Recordemos que un Operador Lineal T es inyectivo, si y sólo si, $Ker(T)$ es igual al vector nulo.

Ya que por hipótesis $(\lambda I - B)$ no es inyectivo, se tiene existe un elemento $v \in D(B)$ tal que v es distinto del vector nulo y $(\lambda I - B)(v) = 0$.

Entonces tenemos un elemento no nulo $v \in D(B)$ tal que $B(v) = \lambda v$.

Ya que suponemos que B es disipativo, se tiene que:

$$\langle B(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \|v\|^2 \leq 0.$$

Por lo tanto, $\lambda \leq 0$. ∎

Lema 2.7.6.

Sea X un Espacio de Hilbert y $D(B) \subseteq X$.

Si $B : D(B) \rightarrow X$ es un Operador Lineal m-disipativo, entonces $(0, \infty) \subseteq \rho(B)$.

Prueba.

Ya que por hipótesis el operador B es m-disipativo, al usar la Definición 2.5.5, se tiene que $\left(I - \frac{1}{\lambda}B\right)$ es sobreyectivo $\forall \lambda > 0$.

Pero $(\lambda I - B) : D(B) \rightarrow X$ es sobreyectivo, si y sólo si, $\left(I - \frac{1}{\lambda}B\right) : D(B) \rightarrow X$ es sobreyectivo $(\lambda \neq 0)$.

Por lo tanto, $(\lambda I - B) : D(B) \rightarrow X$ es sobreyectivo $\forall \lambda > 0$.

El Lema 2.7.5 anterior implica que $(\lambda I - B)$ es inyectivo $\forall \lambda > 0$.

Al usar el Lema 2.7.2, se tiene que $(0, \infty) \subset \rho(B)$. ∎

Corolario 2.7.7.

Sea X un Espacio de Hilbert Real y $D(B) \subseteq X$.

Si $B : D(B) \rightarrow X$ es m-disipativo, entonces $\sup(\sigma(B)) \leq 0$.

Prueba.

Al usar la Definición 2.7.4 y el Lema 2.7.6, se tiene que $\sigma(B) \subseteq (-\infty, 0]$.

∎

Corolario 2.7.8.

Sea $A : D(A) \rightarrow H$ el Operador Lineal definido en la primera sección de este capítulo. Entonces $\sup(\sigma(A)) < 0$.

Prueba.

Ya que el Operador Lineal $A : D(A) \to H$ es m-disipativo (Corolario 2.5.8), por el Corolario 2.7.6 se tiene que $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$.

Al usar las Propiedades 2.2.3 y 2.3.3, tenemos que el Operador $A : D(A) \to H$ es biyectivo y que A^{-1} es un Operador Lineal Acotado de H en H, lo cual significa que $0 \in \rho(A)$.

Si empleamos el Corolario 2.7.3 se tiene que existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \rho(A)$.

Así tenemos que $(-\varepsilon, \infty) \subseteq \rho(A)$. Por lo tanto $\sigma(A) \subseteq (-\infty, -\varepsilon]$, y de aquí que $\sup(\sigma(A)) \leq -\varepsilon < 0$. ∎

Observación 2.7.9.

En la prueba del Corolario 2.7.8 anterior, se concluye que $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$ a partir del hecho de que el operador A es m-disipativo.

La conclusión de que $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$, también puede obtenerse a partir del Corolario 2.6.11 y del siguiente resultado:

Teorema [Goldstein; Hille-Yosida Theorem, p. 15]

B es el generador de un semigrupo C_0 de Contracciones, si y sólo si, B es cerrado, densamente definido, $(0, \infty) \subset \rho(B)$ y $\left\|\lambda(\lambda I - B)^{-1}\right\| \leq 1, \forall \lambda > 0$.

Definición 2.7.10.[Neves et al.; p. 324]

Un número λ es un Punto Normal de un Operador Lineal Acotado $T : X \to X$ *(X es un Espacio de Banach), si $\lambda \in \rho(T)$ ó λ es un punto aislado de $\sigma(T)$ tal que la correspondiente proyección espectral tiene rango finito dimensional.*

Definición 2.7.11. [Neves et al.; p. 324]

El Radio Esencial ($r_{esc}(T)$) de un Operador Lineal Acotado $T : X \to X$, *es el ínfimo del conjunto de números $r > 0$, tal que $\sigma(T) \cap \{\lambda : |\lambda| > r\}$ consiste de Puntos Normales de T; en otras palabras, $r_{esc}(T)$ es el radio del Complemento de los Puntos Normales.*

Nota 2.7.12.

Al Complemento de los Puntos Normales se le denomina Espectro Esencial ($\sigma_{esc}(T)$).

Nota 2.7.13. [D.B. Henry et al.; p.68]

Hay diversos conceptos de "Espectro Esencial" en uso, pero todos ellos coinciden en lo concerniente a la componente no acotada ($I\!R \setminus \sigma_{esc}(T)$); de este modo cada uno de estos conceptos conducen al mismo valor del **Radio Esencial**.

Notación 2.7.14. [Nagel; p. 73]

El símbolo $\mathfrak{K}(E)$ denota el Conjunto de los Operadores Lineales Compactos del Espacio de Banach E en E. Para la Definición de Operador Lineal Compacto, podemos consultar la Definición 3.2.1.

Definición 2.7.15. [Nagel; (3-6), p. 73]

$$\|T\|_{esc} = \inf\{\|T - K\| : K \in \mathfrak{K}(E)\}.$$

donde T es un Operador Lineal del Espacio de Banach E en E.

Notación 2.7.16. [Nagel; p. 60]

Sea $\{T(t)\}$, $t \geq 0$, un Semigrupo C_0 sobre un Espacio de Banach E.

Se usará el símbolo $\mathcal{T}$, para denotar dicho semigrupo; es decir, $\mathcal{T} := \{T(t)\}, t \geq 0$.

Definición 2.7.17. [Nagel; p. 74]

$$\omega_{esc} := \omega_{esc}(\mathcal{T}) := \lim_{t \to \infty} \|T(t)\|_{esc}.$$

Nota 2.7.18.

En [Nagel; p.74], se explica cómo verificar la existencia del límite anterior.

Propiedad 2.7.19. [Nagel; (3-10), p. 74]

$$r_{esc}\left(T\left(t\right)\right)=e^{t\cdot\omega_{esc}};\quad t\geq 0.$$

Definición 2.7.20. [Nagel; p. 60]

Consideremos un semigrupo C_0, $\mathcal{T}$.

$$\begin{aligned}\omega &:= \omega\left(\mathcal{T}\right) := \\ &:= \inf\left\{w\in I\!R : \left\|T\left(t\right)\right\|\leq M_w\cdot e^{wt}\right., \\ &\left.\text{para todo } t\geq 0 \text{ y un número real } M_w \text{ adecuado}\right\}.\end{aligned}$$

Observación 2.7.21.

Podemos constatar que el subconjunto de números reales indicado en la Definición 2.7.20 anterior, no es vacío, usando el siguiente Teorema:

Teorema. [Pazy; Teorema 2.2, p. 4]

Sea $\mathcal{T}$ un semigrupo C_0.

Hay unas constantes $w\geq 0$ y M≥ 1 tal que $\left\|T\left(t\right)\right\|\leq Me^{wt}, \forall t\geq 0$.

Definición 2.7.22. [Nagel; (1-2), p. 60]

Sea $B : D\left(B\right)\to E$ un Operador Lineal (E denota a un Espacio de Banach).

$$S\left(B\right):=\sup\left\{\operatorname{Re}\left(\lambda\right):\lambda\in\sigma\left(B\right)\right\}.$$

Propiedad 2.7.23. [Nagel; (3-11), p. 74]

$$\omega(\mathcal{T}) := \max\{\omega_{esc}(\mathcal{T}), S(B)\},$$

donde B es el Generador Infinitesimal del Semigrupo C_0, $\mathcal{T}$.

Lema 2.7.24. [Henry, D.B. et al.; p. 70]

Sea A el operador definido en la Sección 2.1 del presente capítulo y a, k, m las funciones mencionadas al inicio de dicha sección.

Entonces:

$$r_{esc}\left(e^{At}\right) = e^{-rt}, \quad \forall t \geq 0;$$

donde

$$r := \frac{\displaystyle\int_0^\pi \frac{m^2}{ka^{1/2}}}{\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{a^{1/2}}} > 0.$$

Corolario 2.7.25.

Existen constantes positivas M y b tal que $\left\|e^{At}\right\| \leq M \cdot e^{-bt}, \forall t \geq 0$.

Prueba.

De la Propiedad 2.7.19, tenemos que:

$$\omega_{esc} = \frac{1}{t}\left[\ln\left(r_{esc}\left(T\left(t\right)\right)\right)\right], \quad \forall t > 0.$$

Del Lema 2.7.24 anterior, tenemos que:

$$r_{esc}\left(e^{At}\right) < 1, \quad \forall t > 0.$$

Así tenemos que:

$$\ln\left(r_{esc}\left(e^{At}\right)\right) < 0, \quad \forall t > 0.$$

Por lo tanto:

$$\omega_{esc} = \frac{1}{t_0}\left[\ln\left(r_{esc}\left(e^{At_0}\right)\right)\right] < 0, \quad \text{para } t_0 > 0.$$

Al usar el Corolario 2.7.8, se obtiene que $S(A) < 0$ (Definición 2.7.22).

A partir de la Propiedad 2.7.23, tenemos que $\omega := \omega(\mathcal{T}) < 0$.

La prueba concluye al recordar la Definición 2.7.20. ∎

Capítulo 3
Diferenciabilidad de la Función F en H

El presente capítulo se refiere a la función F indicada en la Introducción. En forma específica, el objetivo es verificar que dicha función F es Diferenciable con Continuidad.

3.1 Existencia del Diferencial de la Función h

El comprobar que la función F mencionada al inicio de este capítulo es C^1, es basado en el hecho de que otras dos funciones, denotadas mediante los símbolos h y $\widetilde{h}$, son diferenciables. Por esta razón, en esta y la próxima sección se definen estas últimas y se verifica que las mismas son C^1.

Definición 3.1.1. [Iribarren[1]; p. 17]

Sean M y N Espacios Normados.

Sea A un subconjunto abierto y no vacío de M y una función $f : A \longrightarrow N$.

Tomemos puntos $x_0 \in A$ y $u \in M$ tal que u es distinto del vector nulo.

Sea $B(x_0; r)$ una bola abierta tal que $B(x_0; r) \subseteq A$. Se verifica directamente que $(x_0 + tu) \in B(x_0; r)\,, \forall t \in \left(-\frac{r}{\|u\|}, \frac{r}{\|u\|}\right)$.

Se denomina **Derivada Direccional de f en x_0 en la dirección** u, al siguiente límite, en caso de que el mismo exista:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[f\left(x_0 + tu\right) - f\left(x_0\right) \right].$$

Si el límite anterior existe, lo designamos por $f'_{x_0}(u)$. Observe que $f'_{x_0}(u) \in N$.

Definición 3.1.2.

Asumimos que se tiene una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la cual es C^1 en el sentido usual del Cálculo Infinitesimal.

Se define la función h como:

$$h : C\left([0, \pi]\right) \to L^2\left(0, \pi\right)$$

$$h\left(u\right) = g \circ u.$$

Nota 3.1.3.

La composición $g \circ u$ en la Definición anterior, se restringe al intervalo abierto $I := (0, \pi)$. Además, $g \circ u \in L^2(0, \pi)$, ya que $g \circ u$ es continua en $[0, \pi]$, por ser composición de funciones continuas.

Primero se requiere verificar que existe $h'_v(w)$, para cada par $v, w \in C([0, \pi])$; donde:

a) $M := C([0, \pi]) :=$ Conjunto de las funciones continuas del intervalo $[0, \pi]$ en $\mathbb{R}$; con la Norma del Supremo.

b) $N := L^2(0,\pi)$; con la Norma usual de L^2.

Lema 3.1.4.

La función h posee Derivada Direccional para cada par $v, w \in C([0,\pi])$. Más aún:

$$h'_v(w) = (g' \circ v) \cdot w;$$

donde el símbolo "$\cdot$" denota el producto de funciones a valores reales y g' es la derivada de la función g, en el sentido usual del Cálculo Infinitesimal.

Prueba.

Comenzamos fijando dos elementos $v, w \in C([0,\pi])$.

Ahora definimos la siguiente función:

$$G : [0,\pi] \times [0,1] \to I\!R;$$

$$G(x,t) := v(x) + tw(x).$$

Ya que G es una función continua y $[0,\pi] \times [0,1]$ es compacto, podemos definir los números μ_1 y μ_2 como:

$$\begin{aligned} \mu_1 &:= \min\{G(x,t) : (x,t) \in [0,\pi] \times [0,1]\} \\ \mu_2 &:= \max\{G(x,t) : (x,t) \in [0,\pi] \times [0,1]\}. \end{aligned}$$

Consideremos la función g indicada en la Definición 3.1.2. Ya que por hipótesis g es C^1 sobre $I\!R$, entonces g es C^1 al restringirla al intervalo $[\mu_1, \mu_2]$.

En lo que resta de la prueba, al referirnos a las funciones g ó g', las mismas serán sus restricciones al intervalo $[\mu_1, \mu_2]$.

Consideremos un número real t tal que $|t| \leq 1$ y $t \neq 0$.

Al usar el Teorema del Valor Medio de la Derivada usual del Cálculo, se tiene que:

$$\begin{cases} \dfrac{g\left(v\left(x\right)+tw\left(x\right)\right)-g\left(v\left(x\right)\right)}{t}=g'\left(\xi_{t,v(x),w(x)}\right)\cdot w\left(x\right), \\ \\ \text{donde: } \left|v\left(x\right)-\xi_{t,v(x),w(x)}\right|\leq\left|t\right|\cdot\left|w\left(x\right)\right|, \quad \forall x\in\left[0,\pi\right]. \end{cases} \tag{3.1}$$

Nota:

La condición anterior (3.1), puede obtenerse considerando los siguientes casos:

(i) $v\left(x\right)<v\left(x\right)+tw\left(x\right)$

(ii) $v\left(x\right)+tw\left(x\right)<v\left(x\right)$

(iii) $v\left(x\right)+tw\left(x\right)=v\left(x\right)$

En los casos (i) y (ii) anteriores, se usa el Teorema usual del Valor Medio de la Derivada, del Cálculo Infinitesimal.

Para el caso (iii), notemos que $v\left(x\right)+tw\left(x\right)=v\left(x\right)$ implica que $w\left(x\right)=0$; ya que un poco antes de (3.1), asumimos que $t\neq 0$. Así se tiene que (3.1) es cierta si el caso (iii) se cumple, tomando $\xi_{t,v(x),w(x)}:=v\left(x\right)$.

Recordemos que se está asumiendo que $0<\left|t\right|\leq 1$.

Observemos que:

$$\left|\frac{g\left(v\left(x\right)+tw\left(x\right)\right)-g\left(v\left(x\right)\right)}{t}-g'\left(v\left(x\right)\right)w\left(x\right)\right|=$$

$$=\left|g'\left(\xi_{t,v(x),w(x)}\right)\cdot w\left(x\right)-g'\left(v\left(x\right)\right)\cdot w\left(x\right)\right|\leq$$

$$\leq\left|w\right|_0\cdot\left|g'\left(\xi_{t,v(x),w(x)}\right)-g'\left(v\left(x\right)\right)\right|,$$

donde

$$|w|_0 := \sup \{|w(x)| : x \in [0, \pi]\}.$$

Supongamos que $|w|_0 > 0$. Debido a que por hipótesis la función g es C^1, se tiene que g' es uniformemente continua sobre el intervalo $[\mu_1, \mu_2]$; es decir, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|g'(\beta) - g'(\alpha)| \leq \varepsilon$, si $|\beta - \alpha| \leq \delta$, donde $\alpha, \beta \in [\mu_1, \mu_2]$.

Observemos que al tomar $|t| \leq \dfrac{\delta}{|w|_0}$, se cumple que

$$\left| v(x) - \xi_{t,v(x),w(x)} \right| \leq \delta.$$

Así se tiene que si $0 < |t| \leq \min\left\{1, \dfrac{\delta}{|w|_0}\right\}$, entonces:

$$\left| \frac{g(v(x) + tw(x)) - g(v(x))}{t} - g'(v(x)) \cdot w(x) \right|^2 \leq |w|_0^2 \varepsilon^2, \quad \forall x \in [0, \pi].$$

De este modo se tiene que si $0 < |t| \leq \min\left\{1, \dfrac{\delta}{|w|_0}\right\}$, se cumple que:

$$\int_0^\pi \left| \frac{g(v(x) + tw(x)) - g(v(x))}{t} - g'(v(x)) \cdot w(x) \right|^2 \leq \int_0^\pi |w|_0^2 \varepsilon^2 = \pi |w|_0^2 \varepsilon^2.$$

Pero observemos que:

$$\left| \frac{h(v + tw) - h(v)}{t} - (g' \circ v) \cdot w \right|_{L^2}^2 = \int_0^\pi \left| \frac{g(v(x) + tw(x)) - g(v(x))}{t} - g'(v(x)) \cdot w(x) \right|^2 dx$$

Hemos verificado que:

$$\lim_{t\to 0} \frac{h(v+tw)-h(v)}{t} = (g' \circ v)\cdot w$$

■

Corolario 3.1.5.

Fijemos cualquier elemento $v \in C([0,\pi])$. La función $w \longmapsto h'_v(w)$, es una Transformación Lineal.

Prueba.

Este Corolario es consecuencia de la igualdad $h'_v(w) = (g' \circ v)\cdot w$, la cual se enuncia en el Lema 3.1.4. ■

Definición 3.1.6.

Se denota por $\mathcal{L}(X,Y)$, al conjunto de los Operadores Lineales Acotados de X en Y, junto con la siguiente norma:

$$\|T\| := \sup\{\|T(v)\|_Y : \|v\|_X \leq 1\},$$

donde $T : X \to Y$, es una Transformación Lineal Acotada.

Lema 3.1.7.

Fijemos cualquier elemento $v \in C([0,\pi])$. El operador $w \longmapsto h'_v(w)$, es una Transformación Lineal Acotada.

Prueba.

Al usar la igualdad que aparece en el enunciado del Lema 3.1.4, notamos que:

$$\left|h_v'(w)\right|_{L^2}^2 = \int_0^\pi \left|g'(v(x)) \cdot w(x)\right|^2 dx \leq |w|_0^2 \cdot \int_0^\pi \left|g'(v(x))\right|^2 dx.$$

Así tenemos que:

$$\left|h_v'(w)\right|_{L^2} \leq k \cdot |w|_0, \quad \forall w \in C([0,\pi]), \quad \text{donde } k := \sqrt{\int_0^\pi \left|g'(v(x))\right|^2}$$

■

Lema 3.1.8.

Sea:

1) $X := C([0,\pi])$ = *Conjunto de las funciones continuas de* $[0,\pi]$ *en* $\mathbb{R}$, *junto con la norma del Supremo.*

2) $Y := L^2(0,\pi)$, *junto con la norma usual de* L^2.

Definimos $\mathcal{F}$ como:

$$\mathcal{F} : C([0,\pi]) \to \mathcal{L}(X,Y);$$

$$\mathcal{F}(v) = h_v'.$$

Entonces $\mathcal{F}$ es continua.

Prueba.

Comenzamos recordando que, según la Definición 3.1.6, se tiene que:

$$\|h_v'\| := \sup\left\{\left|h_v'(w)\right|_{L^2} : |w|_0 \leq 1\right\}$$

donde

$$|w|_0 := \sup\left\{|w(x)| : x \in [0,\pi]\right\}.$$

Sean $v, \widetilde{v} \in C([0,\pi])$. Observe que:

$$\begin{aligned}\left\|h'_v - h'_{\widetilde{v}}\right\| &= \sup\left\{\left|(g' \circ v)\cdot w - \left(g' \circ \widetilde{v}\right)\cdot w\right|_{L^2} : |w|_0 \le 1\right\}\\ &= \sup\left\{\left|\left(g' \circ v - g' \circ \widetilde{v}\right)\cdot w\right|_{L^2} : |w|_0 \le 1\right\}.\end{aligned}$$

Al asumir que $|w|_0 \le 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\left|(g' \circ v)\cdot w - \left(g' \circ \widetilde{v}\right)\cdot w\right|^2_{L^2} &= \int_0^\pi \left|\left(g' \circ v - g' \circ \widetilde{v}\right)(x)\cdot w(x)\right|^2 dx \le\\ &\le |w|_0^2 \cdot \int_0^\pi \left|\left(g' \circ v - g' \circ \widetilde{v}\right)(x)\right|^2 dx\\ &\le \int_0^\pi \left|\left(g' \circ v - g' \circ \widetilde{v}\right)(x)\right|^2 dx\end{aligned}$$

Fijemos un elemento $\widetilde{v} \in C([0,\pi])$ y definamos:

$$\begin{aligned} m &:= m\left(\widetilde{v}\right) &&:= \min\left\{\widetilde{v}(x) ; x \in [0,\pi]\right\}\\ M &:= M\left(\widetilde{v}\right) &&:= \max\left\{\widetilde{v}(x) ; x \in [0,\pi]\right\}.\end{aligned}$$

Sea $\mu > 0$. Observe que:

$$m - \mu < m \le \widetilde{v}(x) \le M < M + \mu; \quad \forall x \in [0,\pi].$$

Ya que por hipótesis g es C^1, se tiene que g' es Uniformemente Continua sobre el intervalo $[m-\mu, M+\mu]$; es decir, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que si $y, \widetilde{y} \in [m-\mu, M+\mu]$, $\left|y - \widetilde{y}\right| < \delta$, entonces $\left|g'(y) - g'\left(\widetilde{y}\right)\right| < \varepsilon$.

Sea δ tal que $0 < \delta < \mu$.

Consideremos un elemento $v \in C([0,\pi])$ tal que $\left|v - \widetilde{v}\right|_0 < \delta$. Esto implica que $\left|v(x) - \widetilde{v}(x)\right| < \delta$, $\forall x \in [0,\pi]$. De aquí se obtiene que:

$$\begin{aligned} m-\mu &< m-\delta \leq \widetilde{v}(x)-\delta < \\ &< v(x) < \\ &< \widetilde{v}(x)+\delta \leq M+\delta < M+\mu, \quad \forall x \in [0,\pi]. \end{aligned}$$

Ya que se asume que $\left|v-\widetilde{v}\right|_0 < \delta$, se tiene que:

$$\left|g'(v(x)) - g'\left(\widetilde{v}(x)\right)\right| < \varepsilon, \quad \forall x \in [0,\pi].$$

Así tenemos que si $\left|v-\widetilde{v}\right|_0 < \delta$ y $|w|_0 \leq 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \left|\left(g' \circ v - g' \circ \widetilde{v}\right) \cdot w\right|_{L^2}^2 &\leq \int_0^\pi \left|\left(g' \circ v - g' \circ \widetilde{v}\right)(x)\right|^2 dx \leq \\ &\leq \int_0^\pi \varepsilon^2 dx = \pi \cdot \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\left\|h'_v - h'_{\widetilde{v}}\right\| \leq \sqrt{\pi} \cdot \varepsilon, \text{ si } \left|v-\widetilde{v}\right|_0 < \delta$$

■

Definición 3.1.9. [Kolmogórov-Fomín; p. 267]

Sean X e Y Espacios Normados y V un entorno de un elemento $x \in X$.

Consideremos una función $F : V \to Y$.

La diferencial débil (Derivada Direccional) $F'_x(y)$, si existe, puede no ser lineal con respecto a y. Si esta linealidad tiene lugar, es decir, $y \longmapsto F'_x(y)$ es un Operador Lineal, a este operador se le llama **Derivada Débil** o **Derivada de Gateaux**.

Corolario 3.1.10.

Sea h la función de la Definición 3.1.2. Entonces la Derivada Débil de h (h'_v), existe $\forall v \in C([0,\pi])$.

Definición 3.1.11. [Kolmogórov-Fomín; p. 265-266]

Sean X e Y Espacios Normados.

Sea V un subconjunto abierto de X.

Consideremos una aplicación $F : V \longrightarrow Y$. Diremos que la aplicación F **es diferenciable en un punto dado** *$x \in V$, cuando existe un Operador Lineal Acotado $L_x : X \longrightarrow Y$, tal que:*

(i) $F(x+y) - F(x) = L_x(y) + \alpha(x;y)$.

(ii) $\lim\limits_{\|y\|\to 0} \dfrac{\|\alpha(x;y)\|}{\|y\|} = 0$, *donde* $\alpha : O \longrightarrow Y$; *$O$ es un abierto tal que* $x \in O \subset V$.

Al Operador Lineal L_x se le denomina la **Derivada Fuerte de la función F en** *x, y se denota mediante el símbolo $F'(x)$.*

Se dice que **la función** *F* **es** *C^1, si existe $F'(x)$ para cada $x \in V$ y la función $x \longmapsto F'(x)$ es una función continua de V en $L(X,Y)$.*

Teorema 3.1.12. [Kolmogórov-Fomín; p. 70]

Si la Derivada Débil F'_x de una aplicación F existe en una vecindad $U(x_0)$ del punto x_0 y representa en esta vecindad una función continua de x, en-

tonces la Derivada Fuerte $F'(x_0)$ existe en el punto x_0 y coincide con la Derivada Débil, es decir, $F'(x_0) = F'_{x_0}$.

Corolario 3.1.13.

La función h de la Definición 3.1.2, es una aplicación C^1 de $C([0,\pi])$ en $L^2(I)$.

3.2 Diferenciabilidad de la Función $\widetilde{h}$

Definición 3.2.1. [Brézis; p. 89]

Sean E y F dos Espacios de Banach.

Un **Operador Lineal (Transformación Lineal)** $T : E \to F$ **es Compacta**, *si la Clausura de $T(B_E)$ en el Espacio F es un conjunto compacto, donde B_E denota la bola abierta unitaria en el Espacio E.*

Recordemos la siguiente Propiedad, la cual es considerada en el Capítulo 1.

Lema 3.2.2. [Brézis; Teorema VIII.7, p. 129]

Sea $I := (0,\pi)$.

La inyección $H^1(I) \to C([0,\pi])$ es compacta.

Observación 3.2.3.

La inyección anterior, que se denotará como "i", se refiere a que si u es el representante continuo (Observación 1.1.9) de un elemento $[u] \in H^1(I)$, entonces $i([u]) = u$. Notemos que i **es una Transformación Lineal Compacta.**

Lema 3.2.4.

La inyección anterior i es una transformación lineal continua (acotada).

Prueba.

Es consecuencia del hecho general de que cualquier transformación lineal compacta, está acotada (es continua). ∎

Definición 3.2.5.

Se define la función j como:

$$j : H_0^1 \to H^1;$$

$$j([u]) = [u].$$

Lema 3.2.6.

La función j es una transformación lineal continua (acotada).

Prueba.

Es consecuencia de la definición de la función j. ∎

Teorema 3.2.7. [Kolmogórov-Fomín; p. 266]

La derivada de una aplicación lineal continua, es esta misma aplicación.

Corolario 3.2.8.

Las funciones anteriores i, j son C^1.

Teorema 3.2.9. [Kolmogórov-Fomín; p. 266]

Si F y G son aplicaciones C^1, entonces $F \circ G$ es C^1 y $(F \circ G)' = F' \circ G'$.

Definición 3.2.10.

Se define $\widetilde{i}$ como:

$$\begin{aligned} \widetilde{i} &: H_0^1 \to C([0, \pi]) \\ \widetilde{i} &= i \circ j. \end{aligned}$$

Observación 3.2.11.

La función anterior $\widetilde{i}$ es la restricción de la función i al conjunto $H_0^1(I)$.

Corolario 3.2.12.

La función $\widetilde{i}$ es C^1.

Corolario 3.2.13.

Se define la función $\widetilde{h}$ como:

$$\widetilde{h}\colon H_0^1 \to L^2;$$

$$\widetilde{h}([u]) = g \circ u. \qquad \text{(ver Definición 3.1.2)}$$

Entenderemos que $g \circ u$ se restringe al intervalo abierto $I := (0, \pi)$ y que u es el representante continuo de $[u] \in H_0^1$. Entonces $\widetilde{h}$ es una función C^1 de $H_0^1(I)$ en $L^2(I)$.

Prueba.

Observe que $\widetilde{h} = h \circ \widetilde{i}$.

Al usar el Teorema 3.2.9, se tiene $\widetilde{h}$ es C^1. ■

3.3 Diferenciabilidad de la Función F

Definición 3.3.1. [Iribarren[1]; p. 52]

Sean E, $N_1, N_2, ..., N_k$ Espacios Normados y

$$f : A \subset E \to N_1 \times N_2 \times ... \times N_k \; .$$

Se define $\|n\| := \|(n_1, n_2, ..., n_k)\| := \|n_1\|_{N_1} + ... + \|n_k\|_{N_k}$.

A las funciones:

$$f_i := pr_i \circ f : A \subset E \to N_i \, (i = 1, ..., k)$$

las llamaremos **funciones coordenadas** *de f.*

A su vez, las funciones pr_i se definen como:

$$pr_i : N_1 \times ... \times N_k \to N_i;$$

$$pr_i \, (h_1, ..., h_n) = h_i.$$

Observe que la función pr_i es una transformación lineal. Además, notemos que $f = (f_1, ..., f_k)$.

Teorema 3.3.2. [Iribarren[1]; p. 53]

Sea $f : A \subset E \to N_1 \times N_2 \times ... \times N_k$, donde A es abierto y $x_0 \in A$. Entonces, f es diferenciable en x_0, si y sólo si, son diferenciables en x_0 todas sus funciones coordenadas, en cuyo caso, las transformaciones coordenadas de $f'(x_0)$ son las Derivadas Fuertes de las funciones coordenadas en x_0; es decir,

$$(f'(x_0))_i = pr_i \circ f'(x_0) = (f_i')(x_0) \quad (i = 1, ..., k)$$

Corolario 3.3.3.

Recordemos que en el primer capítulo se definió el conjunto H como:

$$H := H_0^1(I) \times L^2(I) \times L^2(I) \quad \text{(Definición 1.2.4)}.$$

Se define la función F como

$$F : H \to H;$$

$$F(z) = (\Theta, -g \circ \ u, \Theta);$$

donde $z := (u, v, \theta) \in H$, el símbolo Θ denota la función constante cero definida sobre el intervalo $I := (0, \pi)$ y g es la función de la Definición 3.1.2. Entonces F es C^1.

Prueba.

Se usa el Teorema 3.3.2 anterior.

Observemos que:

$$\begin{aligned} N_1 &:= H_0^1(I) \\ N_2 &:= N_3 := L^2(I) \\ E &:= H = N_1 \times N_2 \times N_3. \end{aligned}$$

También notemos que las funciones coordenadas de F son:

$$\begin{aligned} F_1 : H \to H_0^1 \quad &; \quad F_1(z) = \Theta \\ F_2 : H \to L^2 \quad &; \quad F_2(z) = -g \circ u \\ F_3 : H \to L^2 \quad &; \quad F_3(z) = \Theta \end{aligned}$$

F_1 y F_3 son C^1 en H, ya que cualquier función constante es C^1 [Kolmogórov-Fomín; p. 266].

Observe que:

$$F_2 = -\left(\widetilde{h} \circ pr_1\right);$$

donde

$$pr_1 : H \to H_0^1; \quad pr_1(z) = [u].$$

Al emplear el Teorema 3.2.9, se tiene que F_2 es C^1. ∎

Capítulo 4
Compacidad de la Función F

En este capítulo se considera de nuevo la función F definida en el Corolario 3.3.3 del capítulo anterior, verificando en esta ocasión que dicha función es compacta.

La segunda sección del presente capítulo consiste en una introducción al tema de Funciones Compactas, por ser éste poco conocido cuando el tipo de función que se toma en cuenta no es necesariamente una Transformación Lineal.

4.1 Conjuntos Relativamente Compactos y Precompactos

Ya que el concepto de Función Compacta se basa en el de Conjunto Relativamente Compacto o Precompacto, en esta sección se discute en torno a estos dos últimos términos, en vista de que diversos autores no coinciden en el significado de los mismos.

Definición 4.1.1. [Kolmogórov-Fomín; p. 110] [Ladas-Lakshmikanthan; p. 201]

Un conjunto M, perteneciente a un Espacio Topológico T, se llama **Relativamente Compacto** *(en T), cuando su adherencia (clausura) en T es compacta.*

Observación 4.1.2.

En [Gilbarg-Trudinger; p. 222] a los Conjuntos Relativamente Compactos se les denomina **Precompactos**; sin embargo, consideremos la siguiente definición.

Definición 4.1.3. [Iribarren^2; p. 85] [Ladas-Lakshmikanthan; p. 201]

Sea A un subconjunto no vacío en un Espacio Métrico $(\mathbb{E}, d)$.

A es **Precompacto**, *si a cualquier número real $\varepsilon > 0$ corresponde un conjunto finito de puntos $\{x_1, ..., x_n\} \subset A$ tal que $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B(x_k; \varepsilon)$; donde $B(x_k; \varepsilon)$ denota la bola abierta con centro en x_k y radio ε.*

Observación 4.1.4.

Según [Iribarren^2; p. 87]: "en la literatura matemática se emplea con frecuencia el nombre de **Conjunto Totalmente Acotado** en lugar de Precompacto" (Definición 4.1.3); en particular, en [Ladas-Lakshmikanthan; (iii), p. 201], los términos Totalmente Acotado y Precompacto (Definición 4.1.3) son sinónimos.

Si se exige que el Espacio Métrico $(\mathbb{E}, d)$ sea un Espacio Normado de

sea un Espacio Métrico Completo, las dos últimas definiciones consideradas (Definición 4.1.1 y Definición 4.1.3), se implican mutuamente. Esta afirmación se deduce del siguiente Teorema:

Teorema. [Kolmogórov-Fomín; p. 114]

Sea $(\mathbb{E}, d)$ *un Espacio Métrico Completo.*

Sea $M \subset \mathbb{E}$.

Para que el conjunto M *sea Relativamente Compacto (Definición 4.1.1), es necesario y suficiente que sea Totalmente Acotado (Definición 4.1.3).*

4.2 Funciones Compactas

Definición 4.2.1. [Tineo; p. 31] [Gilbarg-Trudinger; p. 222]

Sean X *e* Y *Espacios Métricos.*

Una aplicación $f : X \to Y$ *se dice que es* **Compacta, Completamente Continua o Totalmente Acotada**, *si:*

(i) f *es Continua*

(ii) *La función* f *envía conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos (Definición 4.1.1).*

Observación 4.2.2.

En [Kesavan; p. 221] también aparece el concepto de Función Compacta, pero basado solamente en la condición (ii) de la anterior Definición 4.2.1; es decir, se exige sólo la condición (ii), pero **no** que la función sea continua.

A fin de discernir entre las condiciones (i) y (ii), presentes en la Definición 4.2.1, se consideran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.2.3.

Sea $X := Y := \mathbb{R}$, con la Métrica Usual.

Se define f como:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};$$
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Notemos que f es discontinua, en el sentido usual del Cálculo Infinitesimal, para cada $x \in \mathbb{R}$.

Ahora, observe que para cualquier subconjunto no vacío A de $\mathbb{R}$, sólo se cumple una de las siguientes posibilidades:

a) $F(A) = \{0\}$

b) $F(A) = \{1\}$

c) $F(A) = \{0, 1\}$

Así tenemos que $f(A)$ es compacto para cualquier subconjunto A en $\mathbb{R}$.

Este ejemplo muestra que a pesar de que una función cumpla con que $F(A)$ es Relativamente Compacto para cada subconjunto acotado A; sin embargo, f puede ser discontinua en todo su dominio.

Ejemplo 4.2.4.

Sea $X := (0, \infty)$, $Y := \mathbb{R}$; ambos conjuntos con la Métrica Usual.

Se define f como:

$$f : X \to Y : f(x) = \frac{1}{x}.$$

Esta función f es un ejemplo de una función continua, tal que no se cumple que $f(A)$ es Relativamente Compacto para cada subconjunto acotado A contenido en X. Observemos que en este ejemplo sucede que si $A := (0, \delta)$, entonces $f(A) = \left(\frac{1}{\delta}, \infty\right), \forall \delta > 0$.

Ejemplo 4.2.5.

Se inicia este ejemplo, recordando la siguiente definición:

Definición 4.2.6. [Brézis; p. 89]

Sean E y F dos Espacios de Banach.

Sea $T : E \to F$ una Transformación Lineal.

T **es compacto**, *si $T(B_E)$ es relativamente compacto según $\|\cdot\|_F$.*

Se sabe que una transformación lineal compacta (según la última definición) es continua; por lo tanto, si T es una transformación lineal compacta en el sentido de la Definición 2.4.6, también es Completamente Continua según la Definición 4.2.1.

Observación 4.2.7.

En el Ejemplo 4.2.5 anterior, se considera una clase de funciones para las cuales la condición (ii) de la Definición 4.2.1, implica el numeral (i) de esta definición.

Ejemplo 4.2.8.

Sean X e Y Espacios Métricos.

Supongamos que:

1) $f : X \to Y$ es continua.

2) f envía conjuntos acotados en conjuntos acotados.

3) Cualquier subconjunto acotado del espacio Y, es Relativamente Compacto (Definición 4.1.1).

   Entonces f es compacta (Definición 4.2.1).

Ejemplo 4.2.9.

Supongamos que:

1) X es un Espacio Métrico Compacto

2) Y es un Espacio Métrico

3) $F : X \to Y$ es una función continua.

Entonces f es Compacta (Definición 4.2.1).

Prueba.

Definamos la función g como:

$$g : X \to f(X) ; g(x) = f(x) .$$

Sabemos que la imagen de un Espacio Topológico Compacto, bajo una función continua, es Compacta [Munkres; Teorema 5.5, p. 167]. Por lo tanto, $f(X)$ es un subespacio compacto de Y.

Recordemos que cualquier subconjunto de un Espacio Métrico Compacto es Acotado. Así tenemos que cualquier subconjunto de $f(X)$ está acotado.

Hemos verificado que g envía conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Observemos que g es continua, al dotar al conjunto $f(X)$ de la Topología Relativa según el Espacio Y ($f(X)$ posee la métrica inducida por Y) [Munkres; Teorema 7.2(e), p. 107].

Ahora verifiquemos que cualquier subconjunto de $f(X)$ es Relativamente Compacto (Definición 4.1.1).

Sea A cualquier subconjunto del Espacio Topológico Compacto $f(X)$.

Consideremos $\overline{A}$. Recordemos que la clausura de cualquier conjunto es cerrada. Así tenemos que $\overline{A}$ es un conjunto cerrado.

También recordemos que todo subconjunto cerrado de un Espacio Topológico Compacto, es Compacto. Por lo tanto, $\overline{A}$ es un subconjunto compacto de $f(X)$ para cualquier subconjunto A de $f(X)$.

Notemos que se verificaron cada una de las condiciones que se suponen en el Ejemplo 4.2.8 anterior. Por lo tanto, al usar la conclusión de dicho ejemplo, se concluye que la función g es Compacta.

Del hecho de que g es una función Compacta, se deduce que f es una función Compacta, ya que $f(X)$ posee la Topología Relativa de Y.

Observación 4.2.10.

Notemos que en el Ejemplo 4.2.4 no se cumple la segunda de las hipótesis del Ejemplo 4.2.8.

Observación 4.2.11.

En el Ejemplo 4.2.8 se considera una clase de funciones para las cuales la condición (i) de la Definición 4.2.1 implica el numeral (ii) de esta Definición.

Ejemplo 4.2.12.

Supongamos que E es un Espacio de Banach de dimensión infinita.

Sea $I : E \to E; I(x) = x$.

Se sabe que I es una transformación lineal continua, pero que no es compacta, ya que **no** cumple con el numeral (ii) de la Definición 4.2.1 [Kolmogórov-

Fomín; p. 250].

Observación 4.2.13.

El ejemplo anterior muestra que no es suficiente que una función continua sea una transformación lineal, a fin de que sea una función compacta.

Teorema 4.2.14.

Sean X, Y, Z Espacios Métricos.

Consideremos dos aplicaciones T y S, **no** necesariamente transformaciones lineales, tales que:

1) $T : X \to Y$ es continua y envía acotados en acotados.

2) $S : Y \to Z$ es compacta.

Entonces $S \circ T$ es compacta.

Prueba.

Sea A un subconjunto acotado de X. Por el numeral 1) anterior, $T(A)$ es acotado.

Del numeral 2) se tiene que $S(T(A))$ es relativamente compacto; es decir, $(S \circ T)(A) = S(T(A))$ es relativamente compacto.

$S \circ T$ es continua ya que es la composición de funciones continuas. ■

Observación 4.2.15.

Definamos las siguientes dos funciones:

a) $T : (0, \infty) \to I\!R; T(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $S : I\!R \to I\!R; S(x) = x$.

Notemos que T es continua, pero no envía acotados en acotados (Ejemplo 4.2.4), y que S es compacta.

Observemos que $S \circ T = T$, y que por lo tanto $S \circ T$ **no** es Compacta (Ejemplo 4.2.4).

Podemos afirmar entonces que para que se cumpla la conclusión del Teorema 4.2.14, no es suficiente que la función T sea continua.

Observación 4.2.16.

Sean X e Y Espacios Métricos.

Si se cumple alguna de las condiciones que siguen, entonces la función $T : X \to Y$, envía acotados en acotados:

1) X e Y son Espacios Normados y T es una transformación lineal continua

2) X es compacto y T es continua

Teorema 4.2.17.

Sean X, Y, Z Espacios Métricos.

Consideremos dos aplicaciones T y S, las cuales no son necesariamente transformaciones lineales, tales que:

1) $T : X \to Y$ *es compacta*

2) $S : Y \to Z$ *es continua*

Entonces $S \circ T$ es compacta.

Prueba.

$S \circ T$ es continua por ser la composición de funciones continuas.

Supongamos que A es un subconjunto acotado de X.

Ya que por hipótesis T es una función compacta, tenemos que $\overline{T(A)}$ es un conjunto compacto. Ya que la imagen de un compacto mediante una función continua es compacta [Munkres; Teorema 5.5, p. 167], tenemos que $S\left(\overline{T(A)}\right)$ es un subconjunto compacto.

Recordemos que todo subconjunto compacto de un Espacio de Hausdorff, es cerrado [Munkres; Teorema 5.3, p. 166]. Al tener en cuenta que cualquier Espacio Métrico es de Hausdorff, se tiene que el conjunto $S\left(\overline{T(A)}\right)$ es cerrado.

Al recordar que un conjunto C es cerrado, sii, $C = \overline{C}$; se tiene que

$$\overline{S\left(\overline{T(A)}\right)} = S\left(\overline{T(A)}\right) \tag{4.1}$$

También recordemos que si f es continua, entonces $f\left(\overline{N}\right) \subseteq \overline{f(N)}$, para cada subconjunto N del dominio de f [Munkres; Teorema 7.1, p. 103]. De esto se obtiene que:

$$S\left(\overline{T(A)}\right) \subset \overline{S(T(A))}.$$

Ahora, notemos que:

$$T(A) \subseteq \overline{T(A)} \Rightarrow S(T(A)) \subset S\left(\overline{T(A)}\right) \Rightarrow \overline{S(T(A))} \subset \overline{S\left(\overline{T(A)}\right)} = S\left(\overline{T(A)}\right)$$

(ver (4.1))

Así tenemos que:

$$S\left(\overline{T(A)}\right) \subset \overline{S(T(A))} \subset S\left(\overline{T(A)}\right)$$

Por lo tanto:

$$\overline{S(T(A))} = S\left(\overline{T(A)}\right)$$

Pero ya se verificó que $S\left(\overline{T(A)}\right)$ es un subconjunto compacto, debido a que S es una función continua.

Así concluimos que $\overline{S(T(A))}$ es compacto. ■

Observación 4.2.18.

En relación a la prueba del Teorema 4.2.17, es interesante observar lo siguiente:

a) En la prueba anterior, no se usa que T es continua para verificar que $\overline{S(T(A))}$ es compacto.

b) Cuando A es un subconjunto acotado, se puede caracterizar $\overline{(S \circ T)(A)}$; de manera más específica, se comprobó que:

$$\overline{(S \circ T)(A)} = \overline{S(T(A))} = S\left(\overline{T(A)}\right).$$

Lema 4.2.19.

Sea $(\mathbb{E}, d)$ *un Espacio Métrico. Sea* $K \subseteq \mathbb{E}$.

K es un subconjunto compacto, sii, cada sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ contenida en K, posee una subsucesión que converge a un elemento $x_0 \in K$.

Lema 4.2.20.

Sea $(\mathbb{E}, d)$ *un Espacio Métrico. Sea* $A \subseteq \mathbb{E}$.

A es relativamente compacto, sii, dada cualquier sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq A$, la misma posee una subsucesión convergente.

Propiedad 4.2.21.

Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre dos Espacios Métricos.

f envía acotados en relativamente compactos, sii, dada una sucesión acotada $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$, ésta posee una subsucesión $\left\{x_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$, tal que $\left\{f\left(x_{k_j}\right)\right\}_{j=1}^{\infty}$ converge.

Prueba.

$(\Rightarrow)$

Sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, una sucesión acotada.

Ya que f envía acotados en conjuntos relativamente compactos, entonces el conjunto $\{y_k := f(x_k) : k = 1, 2, ...\}$ es relativamente compacto.

Por el Lema anterior, existe una subsucesión $\left\{y_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ convergente.

Al tomar $\left\{x_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $y_{k_j} = f\left(x_{k_j}\right)$, se obtiene que $\left\{f\left(x_{k_j}\right)\right\}_{j=1}^{\infty} = \left\{y_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ es convergente.

$(\Leftarrow)$

Sea A un subconjunto acotado de X.

Consideremos $f(A)$. Además, fijemos cualquier sucesión $\{y_k\}_{j=1}^{\infty} \subset f(A)$.

De la definición del conjunto $f(A)$, se tiene que existe $x_k \in A$ tal que $f(x_k) = y_k$. Como por hipótesis A está acotado, entonces la sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ está acotada.

Por hipótesis, existe una subsucesión $\left\{y_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty} = \left\{f\left(x_{k_j}\right)\right\}_{j=1}^{\infty}$ convergente.

Al usar el Lema anterior, se obtiene que $f(A)$ es relativamente compacto.

∎

Propiedad 4.2.22.

Sean $N_1, N_2, ..., N_k$ Espacios Normados.

Consideremos $N := N_1 \times ... \times N_k$ con la norma $\|n\| := \|(n_1, ..., n_k)\| := \sum_{i=1}^{k} \|n_k\|_{N_i}$.

Sea E un Espacio Normado. Consideremos una función

$$f : E \to N_1 \times ... \times N_k.$$

Se tiene que: f es compacta, sii, sus funciones coordenadas son compactas.

Prueba.

La parte referida a la continuidad de f, sii, son continuas las funciones coordenadas, puede consultarse en [Iribarren[1]; p. 52].

Recordemos que la función coordenada se define por:

Sea $s = 1, ..., k$.

$$f_s : E \to N_s; f_s := pr_s \circ f;$$

donde

$$pr_s : N_1 \times ... \times N_k \to N_s, \qquad pr_s\,(n_1, ..., n_s, ..., n_k) = n_s.$$

Observemos que: $f = (f_1, ..., f_k)$.

Recordemos que pr_s es una transformación lineal. Observe que de la definición de $\|n\|$, se tiene que la función pr_s es continua (acotada):

$$\|pr_s\|_{N_s} = \|n_s\|_{N_s} \leq \|n\| := \sum_{i=1}^{k} \|n_k\|_{N_i}.$$

$(\Rightarrow)$

Sea $\{n_i\}_{i=1}^{\infty} = \{(n_{1i}, ..., n_{ki})\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión acotada de E.

De las hipótesis y la Propiedad 4.2.21 anterior, se obtiene una subsucesión $\left\{n_{i_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\left\{f\left(n_{i_j}\right)\right\}_{j=1}^{\infty}$ converge.

Como pr_s es una función continua, entonces $\left\{pr_s\left(f\left(n_{i_j}\right)\right)\right\}_{j=1}^{\infty}$ converge, ya que

$$\begin{aligned} f_s\left(n_{i_j}\right) &= (pr_s \circ f)\left(n_{i_j}\right) = \\ &= pr_s\left(f\left(n_{i_j}\right)\right). \end{aligned}$$

Al usar nuevamente la Propiedad 4.2.21. se tiene que f_s es una función compacta $(s = 1, ..., k)$.

$(\Leftarrow)$

Ahora supongamos que cada función coordenada f_s es compacta.

Sea $\{n_i\}_{i=1}^{\infty} = \{(n_{1i}, ..., n_{ki})\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión acotada de E. Por la definición de $\|n\|$, se tiene que $\{n_{si}\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada de N_s $(s = 1, ..., k)$.

Al tomar subsucesiones de subseciones convergentes, desde $s = 1$ hasta $s = k$, se construye una subsucesión $\{n_{i_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ tal que

$$\{f(n_{i_\ell})\}_{\ell=1}^{\infty} = \{(f_1(n_{i_\ell}), ..., f_k(n_{i_\ell}))\}_{\ell=1}^{\infty}$$

es convergente. ∎

4.3 Compacidad de la Función F

Recordemos que se definió la función $\widetilde{i}$ (Definición 3.2.9), como:

$$\begin{aligned}\widetilde{i} &: H_0^1 \to C([0,\pi]) \\ \widetilde{i} &= i \circ j;\end{aligned}$$

donde:

$j : H_0^1 \to H^1$

$j([u]) = [u]$ (Definición 3.2.5)

2) $i : H^1 \to C([0,\pi])$,

donde i es la **Inyección Compacta** indicada en el Lema 3.2.2 y la Observación 3.2.3.

En el Lema 3.2.6 se indica que j es una transformación lineal continua (acotada).

Al usar el Teorema 4.2.14, se concluye que la Transformación Lineal $\widetilde{i}$ **es compacta**.

Por otra parte, en la prueba del Corolario 3.2.13, se indica que $\widetilde{h} = h \circ \widetilde{i}$, donde la función h se considera en la Definición 3.1.2.

Recordemos que cualquier función Diferenciable es Continua. Ya que h es Diferenciable (Corolario 3.1.13), se tiene que h es Continua.

Al emplear el Teorema 4.2.17 se obtiene que $\widetilde{h}$ **es una función compacta**.

Corolario 4.3.1.

Recordemos que:

1) $H := H_0^1 \times L^2 \times L^2$

2) $F : H \longrightarrow H$; $F(z) = (\Theta, -g \circ u, \Theta)$ donde $z := (u, v, \theta)$ (Corolario 3.3.3).

Entonces, F es una Función Compacta.

Prueba.

Se usa la Propiedad 4.2.22, considerando que:

1) $N_1 := H_0^1$; $N_2 := N_3 := L^2$ y $E := H$

2) $f_1 := pr_1 \circ F \equiv \Theta$

$f_2 := pr_2 \circ F = -\left(\tilde{h} \circ pr_1\right)$

$f_3 := pr_3 \circ F = \Theta$

3) Las funciones anteriores f_1 y f_3 son compactas, ya que toda función constante es compacta.

4) f_2 es compacta debido al Teorema 4.2.14 (la función pr_1 es una transformación lineal acotada). ■

Capítulo 5
El Sistema Dinámico Asociado al Problema de la Termoelasticidad Unidimensional

El concepto de Semigrupo tratado en la Definición 2.6.1 admite una generalización, la cual consideramos en el presente capítulo. Concretamente, al Sistema de Ecuaciones en Derivadas Parciales (2) de la Introducción, se le asocia un Sistema Dinámico a través de una Ecuación Integral. A fin de verificar que las soluciones de tal ecuación existen globalmente, se recurre a la ayuda de un funcional V definido sobre el espacio H.

5.1 Ecuación Integral asociada al Sistema de Ecuaciones Semilineal de la Termoelasticidad

A continuación se recopilan las hipótesis que se han asumido en los capítulos anteriores:

1) Las letras: a, m y k denotan funciones C^1 a valores reales, definidas sobre el intervalo $[0, \pi]$.

2) Las funciones a y k son positivas, es decir, $a(x) > 0$ y $k(x) > 0, \forall x \in [0, \pi]$.

3) La función m es positiva o negativa: $m(x) > 0, \forall x \in [0, \pi]$ ó $m(x) < 0, \forall x \in [0, \pi]$.

4) Se denota mediante la letra g a una función C^1, definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

El Sistema en Derivadas Parciales asociado al fenómeno de la Termoelasticidad en una Dimensión es [Hale-Perissinotto; p. 1]:

$$\begin{cases} u_{tt} = (au_x)_x - (m\theta)_x - g(u) & \\ & 0 < x < \pi \\ \theta_t = (k\theta_x)_x - mu_{tx} & \\ & \\ u(x,t) = \theta(x,t) = 0, \forall t \geq 0, \text{ si } x = 0, \pi & \end{cases} \tag{5.1}$$

Notemos que el sistema anterior es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = (au_x)_x - (m\theta)_x - g(u); \quad 0 < x < \pi \\ \theta_t = (k\theta_x)_x - mv_x \\ u = \theta = 0, \quad \text{para } x = 0, \pi \end{cases} \tag{5.2}$$

A su vez, el sistema (5.2) puede reescribirse como la siguiente Ecuación Abstracta de Evolución:

$$\dot{z} = A(z) + F(z), \quad z \in H \tag{5.3}$$

donde:

1) $A : D(A) \to H$

$$A(u,v,\theta) = \left(v, (au')' - (m\theta)', (k\theta')' - mv'\right) \qquad \text{(Definición 2.1.1)}$$

2) $F : H \to H$;

$$F(u,v,\theta) = (\Theta, -g \circ u, \Theta) \qquad \text{(Corolario 3.3.3)}$$

Antes de asociar una Ecuación Integral a la ecuación (5.3) es conveniente hacer las consideraciones que siguen:

Sea $-B$ el Generador Infinitesimal de un Semigrupo C_0, $\{T(t)\}, t \geq 0$, sobre un Espacio de Banach X y $f : [t_0, T] \times X \to X$ una función continua en t, la cual satisface una condición de Lipschitz con respecto a la variable $u \in X$.

Considere el siguiente problema con Condición Inicial:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + B(u(t)) = f(t, u(t)); & t_0 \leq t < T \\ u(t_0) = u_0 \in X \end{cases} \tag{5.4}$$

También tengamos en cuenta la siguiente definición:

Definición 5.1.1. [Pazy; Definición 1.1, p. 184]

Una función continua u se denomina una **Solución Débil (Mild Solution) del problema con Condición Inicial** *(5.4), si u satisface la Ecuación Integral :*

$$u(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s) f(s, u(s))\, ds; \quad 0 \leq t < T. \tag{5.5}$$

Los siguientes Teoremas indican la relación que puede existir entre las soluciones de las ecuaciones (5.4) y (5.5).

Teorema 5.1.2. [Pazy; Teorema 1.4, p. 185]

Supongamos que $f : [0, \infty) \times X \to X$, *es una función continua que satisface que, para cada número real* $c > 0$, *hay una constante* $k(c)$ *tal que* $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k(c)\|x - y\|$; *cada vez que:* $0 \leq t \leq c, \|x\| \leq c, \|y\| \leq c$. *También se asume que* $-B$ *es el Generador Infinitesimal de un Semigrupo* $C_0, \{T(t)\}$, *sobre el Espacio de Banach* X.

Entonces, para cada $u_0 \in X$, *hay un* $\tau_{\max} \leq \infty$, *tal que el problema con Valor Inicial:*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + B(u(t)) = f(t, u(t)); \quad 0 \leq t < \tau_{\max} \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{5.6}$$

tiene una única Solución Débil u, *definida sobre el intervalo maximal* $[0, \tau_{\max})$. *Además, si* $\tau_{\max} < \infty$, *entonces* $\lim_{t \to \tau_{\max}^-} \|u(t)\| = \infty$.

Teorema 5.1.3. [Pazy; Teorema 1.5, p. 187]

Sea $-B$ *el Generador Infinitesimal de un Semigrupo* $C_0, \{T(t)\}$, *sobre el Espacio de Banach* X. *Si* $f : [t_0, T] \times X \to X$ *es continuamente diferenciable, entonces una Solución Débil del problema (5.4) con* $u_0 \in D(B)$, *es una Solución Clásica del problema con Valor Inicial (5.4).*

Ahora, reconsideremos la Ecuación Abstracta de Evolución (5.3), a partir del concepto de Solución Débil (Definición 5.1.1). Para ello, observemos que en nuestro caso:

1) El Espacio de Banach X mencionado un poco antes del problema (5.4), es el Espacio H definido en la Observación 1.3.14.

2) Si definimos el Operador B como $B := -A$, se tiene que $-B$ es el Generador Infinitesimal de un Semigrupo C_0 (Corolario 2.6.11).

3) Al definir f como:
$$f : [0, \infty) \times H \to H;$$
$$f(t, z) = F(z)$$
entonces f cumple con las hipótesis de los anteriores Teoremas 5.1.2 y 5.1.3, ya que F es una función C^1 (Corolario 3.3.3).

4) El problema (5.6) se convierte en:
$$\begin{cases} \dot{z}(t) - A(z(t)) = F(z(t)) \\ z(0) = z_0 \in H \end{cases} \tag{5.7}$$

5) El problema (5.7) anterior es equivalente a la ecuación (5.3):
$$\begin{cases} \dot{z} = A(z) + F(z) \\ z(0) = z_0 \in H \end{cases} \tag{5.8}$$

Así tenemos que la Ecuación Integral (5.5) asociada al problema (5.7), y por lo tanto a la ecuación (5.3), es:
$$z(t) = e^{At}(z_0) + \int_0^t e^{A(t-s)}(F(z(s)))\,ds; \tag{5.9}$$
donde $e^{At} := T(t)$ (Sección 2.7, primer y segundo párrafos).

Observación 5.1.4.

Por medio del Teorema 5.1.2, sabemos que para cada $z_0 \in H$, existe $\tau(z_0)$ tal que la ecuación (5.9) posee una única Solución débil sobre el intervalo maximal $[0, \tau(z_0))$. Para verificar que $\tau(z_0) = \infty$, para cada $z_0 \in H$, se hace uso de un Funcional V, el cual se estudia en la próxima sección.

5.2 Un Funcional Definido sobre el Espacio H

En esta sección se define una función $V : H \to I\!R$, donde H es el espacio definido en la sección 1.3 (Observación 1.3.14). También se consideran aquellas propiedades del Funcional V que son necesarias en las próximas secciones.

Definición 5.2.1.

Sea $L \in I\!R$. *Sea* $f : I\!R \to I\!R$. *Diremos que* $\limsup_{|s| \to \infty} f(s) = L$, *si*

1) $\forall \varepsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *tal que* $f(s) < L + \varepsilon$, *si* $|s| \geq \delta$.

2) *Dado cualquier* $\varepsilon > 0$ *y dado cualquier número real* $M > 0$, *se pueden encontrar dos números* s_1 *y* s_2 *tales que* $s_1 < -M, M < s_2$; *de tal forma que* $(L - \varepsilon) < f(s_1)$ *y* $(L - \varepsilon) < f(s_2)$.

Hipótesis 5.2.2.

Sea g una función que cumple con las siguientes condiciones:

(i) $g : I\!R \rightarrow I\!R$, es una función C^1, en el sentido usual del Cálculo Infinitesimal.

(ii) $\limsup_{|s| \rightarrow \infty} -\dfrac{g(s)}{s} \leq 0.$

Definición 5.2.3.

Se define la función G como:

$$G : I\!R \rightarrow I\!R;$$

$$G(\xi) = \int_0^{\xi} g(s)\, ds.$$

Nota 5.2.4.

Del primer Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal y la Hipótesis 5.2.2, se obtiene que la función G es C^1, en el sentido del Cálculo Infinitesimal.

Lema 5.2.5.

Fijemos un número real $\varepsilon > 0$. Hay una constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$-G(\xi) \leq \frac{\varepsilon}{2}\xi^2 + C_\varepsilon, \quad \forall \xi \in I\!R.$$

Prueba.

Consideremos el caso en que $\xi \geq 0$.

De la Hipótesis 5.2.2 tenemos que:

$$\limsup_{|s| \rightarrow \infty} -\frac{g(s)}{s} \leq 0.$$

La desigualdad anterior implica que dado $\varepsilon > 0$, existe $T := T(\varepsilon) > 0$ tal que $-\dfrac{g(s)}{s} < \varepsilon, \forall s \geq T$.

Así: $-g(s) < \varepsilon \cdot s, \forall s \geq T$.

Lo anterior implica:

$$\int_T^\xi -g(s)\,ds \leq \int_T^\xi \varepsilon s ds, \forall \xi \geq T.$$

Notemos:

$$\int_T^\xi \varepsilon s ds = \frac{\varepsilon}{2}\xi^2 - \frac{\varepsilon}{2}T^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}\xi^2.$$

También observamos:

$$\int_0^\xi g(s)\,ds = \int_0^T g(s)\,ds + \int_T^\xi g(s)\,ds \quad (\xi \geq T)$$

Se cumple entonces que:

$$-\int_0^\xi g(s)\,ds \leq \frac{\varepsilon}{2}\xi^2 - \int_0^T g(s)\,ds.$$

De la Nota 5.2.4 se tiene que la función $h(\xi) := -G(\xi) = -\int_0^\xi g(s)\,ds$ es continua en el intervalo $[0,T]$; y por lo tanto, existe $C := \max\{h(\xi) : \xi \in [0,T]\}$.

Fijemos un número real positivo C_ε tal que $C_\varepsilon > C$.

Así tenemos que:

$$-G(\xi) = -\int_0^\xi g(s)\,ds \leq \frac{\varepsilon}{2}\xi^2 + C_\varepsilon, \quad \forall \xi \leq 0.$$

El caso $\xi < 0$, se deduce de forma análoga a lo hecho en la presente prueba. ∎

Definición 5.2.6.

Recordemos que en el segundo numeral, al inicio de la Sección 5.1, se incluye como hipótesis que la letra "a" designa una función positiva.

Sea $z = (u, v, \theta) \in H$.

Se define el Funcional V *como:*

$$V \quad : H \to \mathbb{R}$$

$$V(z) \quad = V(u, v, \theta) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} a(x)\left(u'(x)\right)^2 dx + \int_0^{\pi} (v(x))^2 dx + \int_0^{\pi} (\theta(x))^2 dx\right] + \int_0^{\pi} G(u(x))\, dx$$

Observación 5.2.7.

La Norma sobre el conjunto H que se emplea en este capítulo, es aquella considerada en la Observación 1.3.14. Al usar la Nota 1.3.18, tenemos:

$$V(u, v, \theta) = \frac{1}{2}\|z\|_H^2 + \int_0^{\pi} G(u(x))\, dx, \quad \text{donde } z = (u, v, \theta).$$

Propiedad 5.2.8.

Hay una constante $C > 0$ tal que $V(z) \geq \frac{1}{4}\|z\|_H - C\pi, \quad \forall z \in H.$

Prueba.

Sea $\xi := u(x)$.

Al usar el Lema 5.2.5, se tiene:

$$0 \leq G(u(x)) + \frac{\varepsilon}{2}(u(x))^2 + C_\varepsilon, \quad \forall x \in [0, \pi].$$

Por lo tanto:

$$0 \leq \int_0^{\pi} G(u(x))\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^{\pi} (u(x))^2\,dx + C_\varepsilon \pi.$$

Al recordar la definición de la norma $\|\cdot\|_{H^1}$ (Observación 1.1.6) y que $\|\cdot\|_{H^1}$ y $\|\cdot\|_{H_0^1}$ son equivalentes (Corolario 1.3.12), se tiene que:

$$\int_0^{\pi} (u(x))^2\,dx \leq \|u\|_{H^1}^2 \leq C_1 \|u\|_{H_0^1}^2$$

Al tomar $\varepsilon := \dfrac{1}{2C_1}$, obtenemos:

$$0 \leq \frac{1}{4}\|u\|_{H_0^1}^2 + \int_0^{\pi} G(u(x))\,dx + \pi C_\varepsilon.$$

Al recordar la Nota 1.3.18 y al sumar $\dfrac{1}{4}\|z\|_H^2$ a ambos miembros de la desigualdad anterior:

$$\frac{1}{4}\|z\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{4}\|v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|\theta\|_{L^2}^2 + \int_0^{\pi} G(u(x))\,dx + \pi C_\varepsilon.$$

Ya que $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2}$, se obtiene:

$$\frac{1}{4}\|z\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|z\|_H^2 + \int_0^{\pi} G(u(x))\,dx + \pi C_\varepsilon.$$

Al usar la Observación 5.2.7, tenemos:

$$0 \leq \frac{1}{4}\|z\|^2 \leq V(z) + \pi C_\varepsilon, \quad \forall z \in H. \tag{5.10}$$

Caso 1.

Supongamos que $\|z\|_H \geq 1$.

Se tiene que $\|z\|_H^2 \geq \|z\|_H$.

Al usar la desigualdad (5.10), tenemos:

$$\frac{1}{4}\|z\|_H \leq V(z) + \pi C_\varepsilon.$$

Caso 2.

Si asumimos que $\|z\|_H < 1$, se tiene que $\frac{1}{4}\|z\|_H \leq \frac{\pi}{4}$.

De la desigualdad (5.10) tenemos:

$$0 \leq V(z) + \pi C_\varepsilon, \quad \forall z \in H.$$

Al sumar $\frac{\pi}{4}$ a ambos miembros de la desigualdad anterior:

$$\frac{\pi}{4} \leq V(z) + \left(C_\varepsilon + \frac{1}{4}\right)\pi, \quad \forall z \in H.$$

Así tenemos que si $\|z\|_H < 1$, entonces:

$$\frac{1}{4}\|z\|_H \leq V(z) + \left(C_\varepsilon + \frac{1}{4}\right)\pi.$$

De este modo se ha comprobado que:

$$\frac{1}{4}\|z\|_H \leq V(z) + C\pi, \quad \forall z \in H; \quad \text{donde } C := C_\varepsilon + \frac{1}{4}$$

■

Propiedad 5.2.9.

Para cada número real $r > 0$, hay una constante $c(r) > 0$ tal que si $\|z\|_H \leq r$, entonces $V(z) \leq \frac{1}{2}r^2 + c(r)\cdot\pi\cdot r$.

Prueba.

Supongamos que $\|z\|_H \leq r$. Recordando que $\|z\|_H^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 + \|v\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2$, tenemos que $\|u\|_{H_0^1} \leq r$.

Ahora consideremos el siguiente Teorema [Brézis; Teorema VIII.7, p. 129]:

Existe una constante C_1 tal que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_1 \|u\|_{H^1}, \quad \forall u \in H^1;$$

donde:

$\|f\|_{L^\infty} := \inf \{C \in I\!R : |f(x)| \leq C \quad \text{c.t.p. en } (0,\pi)\}$; [Brézis; Definición , p.56].

Si "u" es el representante continuo (Observación 1.1.9), tenemos:

$$\|u\|_{L^\infty} = \max \{|u(x)| : x \in [0,\pi]\}.$$

Al recordar que $\|\cdot\|_{H^1}$ y $\|\cdot\|_{H_0^1}$ son equivalentes:

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_1 \|u\|_{H^1} \leq C_2 \|u\|_{H_0^1}, \quad \forall u \in H_0^1.$$

Por lo tanto:

$$|u(x)| \leq C_2 r, \quad \text{si } \|u\|_{H_0^1} \leq r.$$

De la Nota 5.2.4, existe:

$$\widetilde{c}(r) := \max \{|g(s)| : s \in [-C_2 r, C_2 r]\}.$$

(i) Si recordamos la Observación 5.2.7:

$$\begin{aligned} V(z) &\leq |V(x)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\|z\|_H^2 + \left|\int_0^\pi G(u(x))\,dx\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\|z\|_H^2 + \int_0^\pi |G(u(x))|\,dx \end{aligned}$$

(ii) Ya que asumimos que $\|z\|_H \leq r$, tenemos que $\frac{1}{2}\|z\|_H^2 \leq \frac{1}{2}r^2$.

Caso 1.

Al considerar el caso $u(x) \geq 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} |G(u(x))| &= \left|\int_0^{u(x)} g(s)\,ds\right| \leq \int_0^{u(x)} |g(s)|\,ds \leq \\ &\leq \int_0^{C_2 r} \widetilde{c}(r)\,ds = C_2 r c(r). \end{aligned}$$

Caso 2.

Si en cambio $u(x) < 0$, entonces:

$$G(u(x)) := \int_0^{u(x)} g(s)\,ds = -\int_{u(x)}^0 g(s)\,ds.$$

De tal modo que si $u(x) < 0$, entonces:

$$\begin{aligned} |G(u(x))| &= \left|-\int_{u(x)}^0 g(s)\,ds\right| = \\ &= \left|\int_{u(x)}^0 g(s)\,ds\right| \leq \int_{u(x)}^0 |g(s)|\,ds \leq \\ &\leq \int_{-C_2 r}^0 \widetilde{c}(r)\,ds = C_2 r \widetilde{c}(r). \end{aligned}$$

De este modo hemos verificado que:

$$|G(u(x))| \leq C_2 r \widetilde{c}(r), \quad \text{si } \|z\|_H \leq r.$$

Al considerar los numerales anteriores (i) y (ii) de esta prueba, tenemos:

$$\begin{aligned} V(z) &\leq \frac{1}{2}r^2 + \int_0^\pi |G(u(x))|\, dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2}r^2 + C_2 \pi \cdot r \cdot \widetilde{c}(r); \quad \text{si } \|z\|_H \leq r. \end{aligned}$$

■

Definición 5.2.10.

Sea $z \in H$.

Según la Observación 5.1.4, existe una única solución $z(t)$ de la ecuación (5.9), donde $t \in [0, \tau(z))$; donde este último intervalo es el intervalo maximal de la solución $z(t)$. Esta solución la designamos como $T(t)(z)$; es decir, $T(t)(z) = z(t)$.

Nota 5.2.11.

El símbolo de la definición anterior: $T(t)(z)$, no debe confundirse con uno similar usado en la sección y capítulos precedentes.

Propiedad 5.2.12.

Para cada $z \in H$, la función $t \longmapsto V(T(t)(z))$ es decreciente; de hecho se cumple que:

$$V(T(t)(z)) = V(z) - \int_0^t \int_0^\pi k(x) \left[\frac{\partial \theta}{\partial x}(x,s)\right]^2 dxds.$$

Prueba.

Indiquemos que:

$$\dot{V}\left(T\left(t\right)\left(z\right)\right):=\frac{d}{dt}\left(V\left(T\left(t\right)\left(z\right)\right)\right).$$

Además, se usa la siguiente notación:

$$\left(u\left(t\right)\left(x\right);v\left(t\right)\left(x\right);\theta\left(t\right)\left(x\right)\right):=\left(u\left(x,t\right);v\left(x,t\right);\theta\left(x,t\right)\right):=T\left(t\right)\left(z\right).$$

De este modo se tiene: $V\left(T\left(t\right)\left(z\right)\right)=\int_0^\pi\left[\frac{1}{2}\left(a\left(x\right)u_x^2+v^2+\theta^2\right)+G\left(u\left(x,t\right)\right)\right]dx.$

Así obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{V}\left(T\left(t\right)\left(z\right)\right)&=\frac{d}{dt}\left\{\int_0^\pi\left[\frac{1}{2}\left(au_x^2+v^2+\theta^2\right)+G\left(u\left(x,t\right)\right)\right]\right\}dx\\&=\int_0^\pi\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\left(au_x^2+v^2+\theta^2\right)+G\left(u\left(x,t\right)\right)\right\}dx\\&=\int_0^\pi au_xu_{xt}dx+\int_0^\pi v\cdot v_tdx+\int_0^\pi\theta\cdot\theta_tdx+\int_0^\pi G'\left(u\right)u_tdx.\end{aligned}\tag{5.11}$$

Al tener en cuenta que:

$$G\left(\xi\right)=\int_0^\xi g\left(s\right)ds\quad\text{(Definición 5.2.3)},$$

entonces $G'\left(\xi\right)=g\left(\xi\right)$. Luego:

$$G'\left(u\left(x,t\right)\right)=g\left(u\left(x,t\right)\right).$$

Por lo tanto:

(i) $\int_0^\pi G'\left(u\left(x,t\right)\right)u_tdx=\int_0^\pi g\left(u\left(x,t\right)\right)u_tdx.$

(ii) Usando las dos primeras ecuaciones de (5.2) (Sección 5.1):

$$\begin{aligned} v \cdot v_t &= u_t \left[(au_x)_x - (m\theta)_x - g(u) \right] = \\ &= u_t (au_x)_x - u_t (m\theta)_x - u_t \cdot g(u) . \end{aligned}$$

(iii) Si usamos la tercera y primera ecuación de (5.2):

$$\begin{aligned} \theta\theta_t &= \theta \left[(k\theta_x)_x - mv_x \right] = \\ &= \theta (k\theta_x)_x - \theta m v_x = \\ &= \theta (k\theta_x)_x - \theta m u_{tx} = \\ &= \theta (k\theta_x)_x - \theta m u_{xt}. \end{aligned}$$

Ahora observamos que:

$$\int_0^\pi \theta (k\theta_x)_x \, dx = \theta (k\theta_x)|_0^\pi - \int_0^\pi \theta_x k \theta_x dx.$$

Al usar las condiciones sobre la Frontera del sistema (5.2):

$$\theta (k\theta_x)|_0^\pi = 0.$$

Así:

iv) $\int_0^\pi \theta (k\theta_x)_x \, dx = - \int_0^\pi k (\theta_x)^2 \, dx.$

De igual forma:

$$\int_0^\pi u_t (au_x)_x \, dx = u_t (au_x)|_0^\pi - \int_0^\pi u_{xt} a u_x dx.$$

Al usar de nuevo las condiciones de frontera del sistema (5.2), se deduce que $u_t = 0$, si $x = 0, \pi$.

Así que:

$$u_t\,(au_x)|_0^\pi = 0.$$

Luego:

v) $\displaystyle\int_0^\pi u_t\,(au_x)_x\,dx = -\int_0^\pi au_t u_{xt} dx.$

De manera análoga:

vi) $\displaystyle\int_0^\pi u_t\,(m\theta)_x\,dx = -\int_0^\pi m\theta u_{xt} dx.$

Al sustituir los seis numerales anteriores en la igualdad (5.11), tenemos:

$$\dot{V}\,(T\,(t)\,(z)) = -\int_0^\pi k\,(\theta_x)^2\,dx.$$

Si usamos el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\begin{aligned} V\,(T\,(t)\,(z)) - V\,(T\,(0)\,(z)) &= V\,(T\,(t)\,(z)) - V\,(z) = \\ &= -\int_0^t \left(\int_0^\pi k\,(x)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\,(x,s)\right)^2 dx\right) ds; \qquad \text{donde } t \geq 0. \end{aligned}$$

■

Nota 5.2.13.

La prueba anterior sigue la idea contenida en [Henry et al.; Teorema 4, p. 74]. Esta idea consiste en usar las soluciones clásicas de un sistema, tal como el (5.2), para deducir que las Soluciones Débiles (Mild Solution) cumplen también con el resultado análogo obtenido para las soluciones clásicas.

5.3 Sistema Dinámico Asociado al Sistema de Ecuaciones de la Termoelasticidad en una Dimensión

El Lema 5.3.2 que sigue, establece que $\tau(z) = \infty, \forall z \in H$ (Observación 5.1.4).

Lema 5.3.1.

Sea $z \in H$.

Sea $[0, \tau(z))$ el intervalo maximal de la Solución Débil $T(t)(z)$ de la ecuación (5.3).

Si $\tau(z) < \infty$, entonces

$$\lim_{t \to (\tau(z))^-} V(T(t)(z)) = \infty.$$

Prueba.

Sea $z \in H$.

Del Teorema 5.1.2 tenemos:

$$\lim_{t \to (\tau(z))^-} \|T(t)(z)\| = \infty.$$

Al usar la Propiedad 5.2.8:

$$V(T(t)(z)) \geq \frac{1}{4} \|T(t)(z)\|_H - C\pi.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{t \to (\tau(z))^-} V(T(t)(z)) = \infty.$$

■

Lema 5.3.2.

Sea z cualquier elemento de H.

Sea $[0, \tau(z))$ el intervalo maximal de la Solución Débil: $T(t)(z)$, de la ecuación (5.3).

Entonces: $\tau(z) = \infty$.

Prueba.

Sea $z \in H$.

De la Propiedad 5.2.12 se tiene que:

$$V(T(t)(z)) \leq V(z), \quad \forall t \in [0, \tau(z)). \tag{5.12}$$

Si fuera cierto que $\tau(z) = \infty$, el Lema anterior implicaría que $V(T(t)(z)) \to \infty$, si $t \to (\tau(z))^-$; pero esto contradice (5.12), por lo tanto, $\tau(z) = \infty$. ■

Definición 5.3.3. [Haraux; Definición 4.1.1, p. 4-1] [Hale, p. 35]

Sea (Z, d) un Espacio Métrico Completo.

Un **Sistema Dinámico** C^r **sobre** (Z, d), *es una familia uniparamétrica $\{R(t)\}_{t \geq o}$ de mapas de Z en Z, tal que:*

(i) *$R(t)$ es una función continua de Z en Z, $\forall t \geq 0$.*

(ii) $R(0) =$ *Función Identidad.*

(iii) $R(t+s) = R(t) \circ R(s)\,; \forall s, t \geq 0.$

(iv) $R(t)(x)$ *es continua en* t, x, *así como sus derivadas en* x, *hasta el orden* r $(r \geq 0)$.

Teorema 5.3.4.

Sea H *el espacio considerado en la Observación 1.3.14.*

Sea $t \geq 0$. *Se define* $S(t)$ *como:*

$$S(t) : H \to H;$$

$$S(t)(z) = T(t)(z)\,;$$

donde $T(t)(z)$ *es la Solución Débil de la ecuación (5.3).*

Entonces $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *es un Sistema Dinámico* C^1 *sobre* H.

Prueba.

Podemos seguir la Demostración de [Haraux; Teorema 4.1.10, p. 4-4].

Propiedad 5.3.5.

Las Órbitas Positivas de los subconjuntos acotados de H están acotadas; es decir, dado cualquier subconjunto acotado B de H, se cumple que el conjunto $\{T(t)(B)\,; t \geq 0\}$ está acotado.

Prueba.

Sea B un subconjunto acotado de H. Observe que:

$$\{T(t)(B);t\geq 0\}=\bigcup_{b\in B}\{T(t)(b);t\geq 0\}.$$

Como B está acotado, existe un número $r>0$, tal que $\|b\|_H\leq r,\forall b\in B$. Al usar la Propiedad 5.2.12, tenemos que:

$$V(T(t)(b))\leq V(b),\quad \forall t\geq 0.$$

Si empleamos la Propiedad 5.2.9, se tiene que:

$$V(b)\leq \frac{1}{2}r^2+c(r)\cdot\pi\cdot r,\quad \forall b\in B.$$

Por lo tanto:

$$V(T(t)(b))\leq \frac{1}{2}r^2+c(r)\cdot\pi\cdot r,\quad \forall b\in B,\quad \forall t\geq 0.$$

Si suponemos que el conjunto $\{T(t)(B);t\geq 0\}$ no está acotado, entonces hay una sucesión $\{T(t_n)(b_n)\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\{T(t)(B);t\geq 0\}$, tal que $\|T(t_n)(b_n)\|\to\infty$, si $n\to\infty$.

Al emplear la Propiedad 5.2.8, se tiene que $V(T(t_n)(b_n))\to\infty$, si $n\to\infty$; pero esto contradice la última desigualdad escrita; por lo tanto el conjunto$\{T(t)(B);t\geq 0\}$ está acotado. ■

Capítulo 6
Existencia de un Atractor Global para el Problema de Termoelasticidad

El propósito de este capítulo es comprobar que el Sistema Dinámico Definido en el Teorema 5.3.4 posee una Atractor Global.

6.1 El Operador Compacto $U(t)$

Definición 6.1.1.

Fijemos un número real $t \geq 0$.

Se define la función $U(t)$ *como:*

$$U(t) : H \to H$$

$$U(t)(z) = \int_0^t e^{A(t-s)} \left(F\left(T(s)(z)\right)\right) ds;$$

donde:

1) e^{At} *se refiere al semigrupo* C_0 *definido al inicio de la Sección 2.7.*

2) F *es la función considerada en el Corolario 3.3.3.*

3) $T(z)(s)$ *denota la solución de la ecuación (5.9) (Definición 5.2.11 y Nota 5.2.12).*

Propiedad 6.1.2.

El Operador $U(t)$ es Compacto (Definición 4.2.1), para cada $t \geq 0$.

Prueba.

Al usar la Propiedad 5.3.5 se tiene que el conjunto $\{T(s)(x) : x \in B; 0 \leq s \leq t\}$ está acotado si B es un subconjunto acotado de H.

El resto de la prueba es igual a la Demostración de [Hale; Teorema 4.6.1, p. 121]. Esta demostración comienza asumiendo el párrafo anterior; por esta razón este último fue escrito. ■

6.2 El Conjunto de Puntos de Equilibrio

Esta sección se refiere al conjunto de Puntos de Equilibrio de la Ecuación de Evolución, asociada al Sistema de Ecuaciones de la Termoelasticidad en una Dimensión (Sección 5.1, ecuación (5.3)).

Definición 6.2.1. [Hale; p. 39]

Sea $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ *un Sistema Dinámico sobre* (Z, d) (Definición 5.3.3).

Sea $y \in Z$.

El elemento y **es un Punto de Equilibrio de** $\{R(t)\}_{t\geq 0}$, *si* $R(t)(y) = y, \forall t \geq 0$.

Observación 6.2.2.

La situación considerada en el Teorema 5.3.4, es un caso particular de la siguiente [Haraux; p. 3-1].

Supongamos que:

1) X un Espacio de Banach.

2) $\{C(t)\}$ un semigrupo C_0 (Definición 2.6.2 y Nota 2.6.3)

3) $J : X \to X$ es una función localmente Lipschitz, continua, sobre Conjuntos Acotados.

   Dado cualquier $x \in X$, consideremos la única Solución Maximal $u \in C([0, \tau(x)), X)$ (Sección 5.1, Teorema 5.1.2) de la Ecuación Integral:

$$u(t) = C(t)(x) + \int_0^t C(t-s) J(u(s)) \, ds, \quad \forall t \in [0, \tau(x)).$$

Si suponemos que $\tau(x) = \infty, \forall x \in X$, la familia $\{R(t)\}_{t \geq 0}; R(t) := u(t)(x)$, es un Sistema Dinámico. Dentro del caso que se está considerando, los Puntos de Equilibrio del Sistema Dinámico recién indicado, son aquellos elementos $y \in X$ tal que:

$$y = C(t)(y) + \int_0^t C(t-s) J(y) \, ds, \quad \forall t \geq 0.$$

El siguiente resultado explica una forma de encontrar los Puntos de Equilibrio, cuando se tiene el caso general considerado en la anterior Observación 6.2.2.

Lema 6.2.3. [Haraux; Lema 3.1.1, p. 3-1]

Sea L el Generador Infinitesimal del semigrupo C_0, $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ (Definición 2.6.5).

Un elemento $b \in X$ es un Punto de Equilibrio del Sistema Dinámico definido en la Observación 6.2.2 anterior, si y sólo si, $b \in D(L)$ y
$L(b) + J(b) = 0$; donde J es la función de la Observación 6.2.2.

Propiedad 6.2.4.

Consideremos el Sistema Dinámico $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, definido en el Teorema 5.3.4 del capítulo precedente.

Sea $z \in H$.

El elemento z es un Punto de Equilibrio de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, si y sólo si,
$z = (u, \Theta, \Theta)$ y $(au')' - g \circ u = \Theta; u(0) = u(\pi) = 0$.

Prueba.

En esta prueba se hace uso del Lema 6.2.3. En este caso se tiene:

a) $L := A : D(A) \to H$.

b) $J := F : H \to H$.

c) $z = (u, v, \theta) \in H := H_0^1 \times L^2 \times L^2$, es un Punto de Equilibrio, si y sólo si, $A(z) + F(z) = (\Theta, \Theta, \Theta)$,donde (Θ, Θ, Θ) es el vector nulo del Espacio H.

Al recordar las Definiciones del Operador A (Definición 2.1.1) y de la Función F (Corolario 3.3.3), tenemos que la igualdad del literal c) anterior, es equivalente a:

$$\Big(v; (au')' - (m\theta)' - g \circ u; (k\theta')' - mv'\Big) = (\Theta, \Theta, \Theta) .$$

De la igualdad anterior obtenemos:

$$\begin{cases} v &= \Theta \\ (au')' - (m\theta)' - g \circ u &= \Theta \\ (k\theta')' - mv' &= \Theta \end{cases}$$

Pero, $v = \Theta \Rightarrow v' = \Theta$. Por lo tanto, $(k\theta')' = \Theta$.

Al usar el Lema 2.2.2 tenemos que $\theta = \Theta$.

Al sustituir $\theta = \Theta$ en la segunda ecuación del sistema anterior, se tiene:

$$(au')' - g \circ u = \Theta.$$

Así hemos verificado que si $z = (u, v, \theta) \in H$ es un Punto de Equilibrio, entonces $v = \Theta; \theta = \Theta$ y $(au')' - g \circ u = \Theta$. También se cumple que $u(0) = u(\pi) = 0$, ya que $u \in H_0^1$ (consideramos que u es el representante continuo, a fin de poder usar el Teorema 1.1.17).

No es complicado verificar, mediante el Lema 6.2.3, que si
$z = (u, \Theta, \Theta) \in H$, entonces z es un Punto de Equilibrio. ∎

Notación 6.2.5.

Denotemos mediante la letra E al conjunto de los Puntos de Equilibrio del Sistema Dinámico $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ (Teorema 5.3.4).

Propiedad 6.2.6.

El conjunto E está acotado.

Prueba.

Sea $z = (u, v, \theta) \in E$.

Por la Propiedad 6.2.4, sabemos que $z = (u, \Theta, \Theta)$ y $(au')' - g \circ u = \Theta$, tal que $u(0) = u(\pi) = 0$.

Al multiplicar la igualdad anterior por la función u:

$$u \cdot (au')' = u \cdot (g \circ u)$$

Al usar el Teorema 1.1.12, tenemos:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^\pi u(x) \cdot (au'(x))' \, dx &= u(x) \, a(x) \, u'(x)|_0^\pi - \int_0^\pi u'(x) \, a(x) \, u'(x) \, dx \\ &= -\int_0^\pi a(x) \, (u'(x))^2 \, dx. \end{aligned}$$

Luego:

$$\int_0^\pi a(x) \, (u'(x))^2 \, dx = -\int_0^\pi g(u(x)) \cdot u(x) \, dx. \tag{6.1}$$

Recordemos que una de las hipótesis que se asume es que $\limsup\limits_{|s|\to\infty} -\dfrac{g(s)}{s} \leq 0$. Esto implica que dado un número real $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $-\dfrac{g(x)}{x} \leq \varepsilon$, si $|x| \geq \delta$.

A continuación se definen dos subconjuntos del intervalo $[0,\pi]$:

$$I_1 := \{x \in [0,\pi] : |u(x)| \geq \delta\}$$

$$I_2 := [0,\pi] \setminus I_1.$$

Primer Caso. $x \in I_1$.

$x \in I_1 \Rightarrow -\dfrac{g(u(x))}{u(x)} \leq \varepsilon.$

Al multiplicar ambos miembros de la desigualdad anterior por $(u(x))^2$:

$$-g(u(x))\,u(x) \leq \varepsilon\,(u(x))^2.$$

Así tenemos:

$$-\int_{I_1} g(u(x))\,u(x)\,ds \leq \varepsilon \int_{I_1} (u(x))^2\,dx \leq \varepsilon \int_0^{\pi} (u(x))^2\,dx = \varepsilon\,\|u\|_{L^2}^2.$$

Recordando que $\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2$ (Observación 1.1.6) y que existe una constante $k > 0$ tal que $\|u\|_{H^1} \leq k\,\|u\|_{H_0^1}$ (Corolario 1.3.12), se tiene que:

$$-\int_{I_1} g(u(x))\,u(x)\,ds \leq \varepsilon k^2\,\|u\|_{H^1}^2.$$

Segundo Caso. $x \in I_2$.

Ya que por hipótesis g es una función C^1 de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, entonces g es continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Luego, existe:

$$C := \max\{|g(x)|\,; x \in [-\delta,\delta]\}.$$

Así tenemos que si $x \in I_2$, entonces $|g(u(x))| \leq C$.

Ahora observamos que si $x \in I_2$, entonces:

$$|g(u(x))| \cdot |u(x)| \leq C\,|u(x)| \leq C \cdot \delta.$$

Así:

$$\int_{I_2} |g(u(x))| \cdot |u(x)|\,dx \leq \int_{I_2} C \cdot \delta dx \leq \int_0^\pi C \cdot \delta dx = \pi \cdot C \cdot \delta.$$

Al tener en cuenta la igualdad (6.1) escrita un poco después de iniciar esta prueba, y observando que $I = I_1 \bigcup I_2$ (unión disjunta), tenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi a(x)\,(u'(x))^2\,dx &= -\int_0^\pi g(u(x)) \cdot u(x)\,dx = \\ &= -\int_{I_1} g(u(x))\,u(x)\,ds - \int_{I_2} g(u(x))\,u(x)\,ds \leq \\ &\leq \varepsilon k^2\,\|u\|_{H^1}^2 + \pi \cdot C \cdot \delta.\end{aligned}$$

Recordando que $\|u\|_{H_0^1}^2 = \displaystyle\int_0^\pi a(x)\,(u'(x))^2\,dx$ (Observación 1.3.9), tenemos:

$$\|u\|_{H_0^1}^2 \leq \varepsilon k^2\,\|u\|_{H^1}^2 + \pi \cdot C \cdot \delta.$$

Ya que $\varepsilon > 0$ es un número que puede elegirse, el mismo se escoge de tal forma que $0 < \varepsilon k^2 < 1$. (k es una constante que no depende de ε).

Por lo tanto:

$$\|u\|_{H_0^1}^2 \leq \frac{\pi \cdot C \cdot \delta}{1 - \varepsilon k^2}$$

Tomando en cuenta la Nota 1.3.18 y considerando cualquier elemento $z = (u, v, \theta) \in E$, tenemos:

$$\|z\|_H^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 + \|\Theta\|_{L^2}^2 + \|\Theta\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 \le \frac{\pi \cdot C \cdot \delta}{1 - \varepsilon k^2}$$

∎

Propiedad 6.2.7.

Sea $V : H \to I\!R$ el funcional de la Definición 5.2.8.

Sea $\{S(t)\}$ el semigrupo definido en el Teorema 5.3.4.

Sea $z \in H$.

Si $V(T(t)(z)) = V(z), \forall t \ge 0$, entonces z es un Punto de Equilibrio.

Prueba.

Dado $z = (u, v, \theta) \in H$; supongamos que $V(T(t)(z)) = V(z), \forall t \ge 0$.

Se define $z(t) := (u(t), v(t), \theta(t)) := T(t)(z)$.

Al usar la Propiedad 5.2.12, se tiene que:

$$\int_0^t \left(\int_0^\pi k(x) \left[\frac{\partial \theta}{\partial x}(s,x) \right]^2 dx \right) ds = 0, \quad \forall t \ge 0.$$

Ya que $k(x) \left[\frac{\partial \theta}{\partial x}(s,x) \right]^2 \ge 0, \forall s \ge 0$; tenemos:

$$p(s) := \int_0^\pi k(x) \left[\frac{\partial \theta}{\partial x}(s,x) \right]^2 dx \ge 0.$$

En vista de que: $\int_0^t p(s) = 0, \forall t \ge 0$; se cumple que $p(t) = 0, \forall t \ge 0$; es decir:

$$\int_0^\pi k(x) \left[\frac{\partial \theta}{\partial x}(t,x) \right]^2 dx = 0, \quad \forall t \ge 0.$$

Fijemos cualquier número real $t \ge 0$. Ya que $k(x) \left[\frac{\partial \theta}{\partial x}(t,x) \right]^2 \ge 0$,

$\forall x \in [0, \pi]$; entonces la última igualdad escrita implica que
$k(x)\left[\frac{\partial \theta}{\partial x}(t, x)\right]^2 = 0, \forall x \in [0, \pi]$. Así tenemos: $\frac{\partial \theta}{\partial x}(t, x) = 0, \forall x \in [0, \pi]$.

La última igualdad puede reescribirse como: $\theta'(t)(x) = 0, \forall t \geq 0$, $\forall x \in [0, \pi]$.

Al fijar un número real $t \geq 0$, tenemos que $\theta(t) =$ constante (constante que puede depender de $t \geq 0$).

Pero $\theta(t) \in H_0^1$. Por lo tanto, al usar el Teorema 1.1.17:
$\theta(t)(0) = \theta(t)(\pi) = 0$.

Así tenemos que $\theta(t) = \Theta$.

Se recalca que $z(t) := (u(t), v(t), \theta(t))$.

Es conveniente recordar que el símbolo: $\dot{z}$, se refiere a la derivada de $z(t)$ con respecto a t; en cambio, u', v' y θ' son las derivadas de u, v y θ respectivamente, en el Espacio H^1 (Sección 1.1; Definición 1.1.1 y Nota 1.1.2).

Al recordar que $\dot{z}(t) = \left(\dot{u}(t), \dot{v}(z), \dot{\theta}(t)\right)$ y que $z(t) := T(t)(z)$ cumple con la ecuación (5.3) (Sección 5.1); tenemos:

a) $\dot{\theta}(t) = \left(k(\theta(t))'\right)' - m(v(t))'$.

Ya que se ha comprobado que $\theta(t) = \Theta \in H_0^1, \forall t \geq 0$; entonces:

b) $\dot{\theta}(t) = \Theta \in H_0^1, \forall t \geq 0$.

c) $\theta'(t) = \Theta \in H_0^1, \forall t \geq 0$.

Recordemos que por hipótesis $m(x) \neq 0, \forall x \in [0, \pi]$.

Así se tiene que $v'(t) = \Theta, \forall t \geq 0$. Por lo tanto, $v(t) =$ constante (constante que puede depender de t).

Pero sabemos que $v(t) \in H_0^1$. Al asumir que $v(t)$ es el representante continuo y usar de nuevo el Teorema 1.1.17, se obtiene que: $v(t)(0) = v(t)(\pi) = 0, \forall t \geq 0$. Ya que fijado $t \geq 0, v(t)$ es constante; esta constante debe ser la función constante cero.

Así hemos verificado que $v(t) = \Theta, \forall t \geq 0$.

Otra vez, al usar la ecuación (5.2) (Sección 5.1):

$$\dot{u}(t) = v(t).$$

Por lo tanto: $\dot{u}(t) = \Theta, \forall t \geq 0$.

Consideremos la siguiente Propiedad [Ladas-Lakshmikathan; Colorario 1.2.1, p. 4]:

Si $x \in C[[a, b], X]$ y $\dot{x}(t) = 0, a < t < b$, entonces $\mathrm{x}(t) \equiv$ constante.

Así tenemos que existe $u \in H_0^1 \cap H^2$ tal que $u(t) = u, \forall t \geq 0$.

Notemos entonces que se ha verificado que $z = (u, \Theta, \Theta), \forall t \geq 0$; donde u es una función fija tal que $u \in H_0^1 \cap H^2$.

Pero al usar la Propiedad 6.2.4 se tiene que z es una Punto de Equilibrio.

■

6.3 Existencia de un Atractor Global

Sea X un Espacio Métrico Completo.

Sea $\{R(t)\}_{t\geq 0}$, un Sistema Dinámico sobre X (Definición 5.3.3).

Definición 6.3.1. [Hale; p. 36]

Sea $B \subseteq X$, $C \subseteq X$.

Se dice que el **conjunto** B **atrae al conjunto** C **bajo** $\{R(t)\}_{t\geq 0}$, si $\operatorname{dis}(T(t)(C), B) \to 0$, cuando $t \to \infty$.

Definición 6.3.2. [Hale; p. 36]

El semigrupo $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ *es* **Asintóticamente Suave**, *si para cualquier conjunto no vacío, cerrado y acotado* $B \subseteq X$, *para el cual* $T(t)(B) \subseteq B$; *hay un conjunto compacto* $J \subseteq B$ *tal que* J *atrae a* B.

Lema 6.3.3. [Hale; Lema 3.2.3, p. 37]

Sea X *un Espacio de Banach.*

Supongamos que, para cada $t \geq 0, R(t) = C(t) + U(t) : X \to X$; *donde:*

1) $U(t)$ *es completamente continuo* $\forall t \geq 0$ (Definición 4.2.1).

2) *Hay una función continua* $k : [0,\infty)\times[0,\infty) \to [0,\infty)$; *tal que* $k(t,r) \to 0$, *cuando* $t \to \infty$ *y* $|C(t)x| \leq k(t,r)$, *si* $|x| \leq r$.

Entonces $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ *es Asintóticamente Suave.*

Corolario 6.3.4.

Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *el Sistema Dinámico definido en el Teorema 5.3.4.*

Entonces $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es Asintóticamente Suave.*

Prueba.

Se usa el Lema anterior, tomando:

(i) $R(t) := S(t)$.

(ii) $U(t)$ es el operador de la Definición 6.1.1 (Propiedad 6.1.2).

(iii) $C(t) := e^{At}$ (Sección 2.7; los dos primeros párrafos).

(iv) $k(t,r) := Cre^{-bt}$ (Corolario 2.7.25) ■

Definición 6.3.5.

Sea $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ *un Sistema Dinámico.*

Sea $x \in X$.

La **Órbita Positiva** *de* x*, es el conjunto:*

$$\gamma^{+}(x) = \{R(t)(x)\,; t \geq 0\}.$$

Lema 6.3.6. [Hale; Lema 3.2.1, p. 36]

Supongamos que $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ *es un Sistema Dinámico Asintóticamente Suave.*

Si dado $x \in X$, se cumple que $\gamma^+(x)$ está acotada, entonces $\overline{\gamma^+(x)}$ es un Conjunto Compacto.

Corolario 6.3.7.

Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ el Sistema Dinámico definido en el Teorema 5.3.4. Entonces, dado cualquier elemento $z \in H$, se cumple que $\overline{\gamma^+(z)}$ es un Conjunto Compacto.

Prueba.

Este Corolario es consecuencia de la Propiedad 5.3.5, el Corolario 6.3.4 y el Lema 6.3.6. ■

Definición 6.3.8. [Hale; Definición 3.8.1, p. 49]

Un Sistema Dinámico C^r $(r \geq 1)$, $\{R(t)\}_{t\geq 0}$, se dice que es un **Sistema Gradiente**, *si:*

(i) *Cada Órbita Positiva Acotada es Relativamente Compacta* (Definición 4.1.1).

(ii) *Hay un función de Lyapunov para $\{R(t)\}_{t\geq 0}$; es decir, existe una función continua $V : X \to I\!R$, con las siguientes propiedades:*

(ii.1) *V está acotada inferiormente.*

(ii.2) *$V(x) \to \infty$, cuando $|x| \to \infty$.*

(ii.3) *$V(R(t)(x))$ es decreciente con respecto a t, para cada $x \in X$.*

(ii.4) *Si* X *es tal que* $T(t)(x)$ *está definida* $\forall t \in \mathbb{R}$ *y* $V(T(t)(x)) = V(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, *entonces* x *es un Punto de Equilibrio.*

Corolario 6.3.9.

Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *el Sistema Dinámico definido en el Teorema 5.3.4. Entonces* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es un Sistema Gradiente.*

Prueba.

Este Corolario es la consecuencia de:

(i) Corolario 6.3.7.

(ii.1) Propiedad 5.2.8.

(ii.2) Propiedad 5.2.8.

(ii.3) Propiedad 5.2.12.

(ii.4) Propiedad 6.2.7. ■

Definición 6.3.10. [Hale; p. 36]

Sea $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ *un Sistema Dinámico sobre* X.

Un **conjunto** $S \subseteq X$ **es invariante**, *si* $R(t)(S) = S$ *para* $t \geq 0$.

Definición 6.3.11. [Hale; p. 38]

Dado el Sistema Dinámico $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ *sobre* X*; un conjunto compacto e invariante* A *se dice que es* **Compacto Maximal Invariante**, *si todo conjunto compacto invariante del Sistema Dinámico* $\{R(t)\}_{t\geq 0}$, *está contenido en* A.

Definición 6.3.12. [Hale; p. 39]

Un **conjunto invariante** A **es un Atractor Global**, *si* A *es un conjunto compacto maximal invariante, el cual atrae a cada conjunto acotado* $B \subseteq X$ (Definición 6.3.1).

Teorema 6.3.13. [Hale; Teorema 3.8.5, p. 51]

Si $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ *es un Sistema Gradiente, Asintóticamente Suave y* P *está acotado (*P *es el conjunto de los Puntos de Equilibrio de* $\{R(t)\}_{t\geq 0}$*); entonces* $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ *posee un Atractor Global.*

Corolario 6.3.14.

El Sistema Dinámico $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, *definido en el Teorema 5.3.4, posee un Atractor Global.*

Prueba.

Este Corolario es consecuencia del Teorema 6.3.13, la Propiedad 6.2.6, Corolario 6.3.4 y el Corolario 6.3.9. ■

Capítulo 7
Convergencia a un Punto de Equilibrio

En este capítulo, se muestra que cada Órbita Positiva del Sistema Dinámico $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ (Teorema 5.3.4), generado por el Sistema de Ecuaciones de la Termoelasticidad en Una Dimensión, converge a un único Punto de Equilibrio. Para hacer esto, se emplea un Teorema de Hale-Raugel, con el cual se inicia la próxima sección.

7.1 Un Teorema referente a la Convergencia

Supongamos que Z es un Espacio de Banach.

Consideremos la siguiente Ecuación Abstracta de Evolución:

$$\dot{z} = L(z) + J(z)\,; \tag{7.1}$$

donde:

1) L es el Generador Infinitesimal de un Semigrupo C_0 (Definición 2.6.5).

2) La función J es un mapa C^1, de Z en Z (Definición 3.1.11).

Definición 7.1.1.

Sea $z_0 \in Z$.

z_0 **es un Punto de Equilibrio de la ecuación (7.1) anterior**, *si:*

$$L(z_0) + J(z_0) = 0.$$

Nota 7.1.2.

Recordemos que en el Capítulo 6, se considera el concepto de Punto de Equilibrio: Definición 6.2.1 y Lema 6.2.3.

Observación 7.1.3.

Supongamos que z_0 es un Punto de Equilibrio de la ecuación (7.1).

Al remplazar "z" por $y := z + z_0$, la ecuación (7.1) es equivalente a:

$$\dot{y} = C(y) + N(y), \tag{7.2}$$

donde

$$C := L + DJ(z_0).$$

Nota 7.1.4.

El símbolo anterior: $DJ(z_0)$, denota la Derivada Fuerte de J en z_0 (Definición 3.1.11).

Observación 7.1.5.

El Operador Lineal C anterior (Observación 7.1.3) es el Generador Infinitesimal de un semigrupo C_0; el cual denotamos como: e^{Ct}, $t \geq 0$. Esta observación es consecuencia del siguiente resultado:

Teorema. [Pazy; Teorema 1.1, p. 76]

Sea Z un Espacio de Banach y L el Generador Infinitesimal de un semigrupo C_0, $T(t)$ sobre Z; el cual satisface que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$.

Si B es un Operador Lineal Acotado sobre Z, entonces $(L+B)$ es el Generador Infinitesimal de un semigrupo C_0, $S(t)$ sobre Z, el cual satisface que $\|S(t)\| \leq Me^{(\omega+M\|B\|)t}$.

Recordemos que de la Definición de Función C^1, se tiene que $DJ(z)$ es una Transformación Lineal Acotada, $\forall z \in Z$ (Definición 3.1.11).

Definición 7.1.6. [Hale; p.35]

Sea Z un Espacio Métrico Completo.

Supongamos que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un Sistema Dinamico C^r $(r \geq 0)$ sobre Z (Definición 5.3.3).

Sea B cualquier subconjunto de Z. Se define el **Conjunto Omega Límite de** B, *como:*

$$\omega(B) := \bigcap_{s\geq 0} \left(\overline{\bigcup_{t\geq s} T(t)(B)} \right).$$

En el Teorema 7.1.7 que sigue, se asume que:

H1) La función J, que aparece en la ecuación (7.1), es una función C^1 de Z en Z.

H2) Hay una descomposición del espacio Z , como: $Z = Y_1 \oplus X \oplus Y_2$; acompañada de los respectivos Operadores de Proyección, Continuos: P_1, P_0 y P_2, los cuales conmutan con e^{Ct}.

H3) Los Rangos X e Y_2, de los Operadores P_0 y P_2, son de dimensión finita.

H4) El Espectro $\sigma\left(e^C\right)$ de e^C puede ser escrito como $\sigma\left(e^C\right) = \sigma_1 \cup \sigma_0 \cup \sigma_2$, donde $\sigma_1 := \sigma\left(e^C \circ P_1\right)$, $\sigma_0 := \sigma\left(e^C \circ P_0\right)$, $\sigma_2 := \sigma\left(e^C \circ P_2\right)$, están contenidos, respectivamente, dentro del círculo, sobre la circunferencia y fuera del círculo de radio igual a uno y centro $0 \in \mathbb{C}$. Además, la distancia de σ_1 a dicho círculo es positiva.

Teorema 7.1.7. [Hale-Raugel]

Consideremos la ecuación (7.1).

Asumamos que la hipótesis H1 se cumple, que la órbita positiva $\gamma^+(z)$ *es precompacta,* $\forall z \in Z$ *y que los conjuntos omega límites* $\omega(z)$ *están contenidos en el conjunto de los puntos de equilibrio,* $\forall z \in Z$.

También supongamos que dado cualquier elemento $z \in Z$*, para cualquier* $z_0 \in \omega(z)$*, el semigrupo* e^{Ct}, $t \geq 0$*, satisface las hipótesis anteriores H2, H3 y H4 y; además, que* $\sigma_0 = \sigma\left(e^C \circ P_0\right)$ *es el conjunto vacío ó contiene el valor* 1*, el cual es un autovalor simple de* e^C.

Entonces hay un único punto $\varphi := \varphi_z$, tal que $\omega(z) = \varphi_z$.

Lo que resta del presente capítulo, consiste en aplicar el Teorema anterior a la ecuación (5.3) considerada en la Sección 5.1 del quinto capítulo.

En relación a la ecuación (5.3) (Sección 5.1); ya verificamos lo siguente:

1) Se cumple la hipótesis H1; es decir, F es una función C^1 de H en H (Corolario 3.3.3).

2) La órbita positiva $\gamma^+(z)$ es relativamente compacta, $\forall z \in Z$ (Corolario 6.3.7).

Ahora, verifiquemos que el conjunto $\omega(z)$ está contenido en el conjunto de los puntos de equilibrio, $\forall z \in H$.

Recordemos que mediante la letra E, se denota al conjunto de los puntos de equilibrio de la ecuación (5.3) (Notación 6.2.5).

Lema 7.1.8.

Sea $z \in H$.

Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ el Sistema Dinámico considerado en el Teorema 5.3.4.

Entonces $\omega(z) \subseteq E, \forall z \in H$.

Prueba.

Este Lema es consecuencia del Corolario 6.3.9 y del siguiente resultado:

Lema. [Hale; Lema 3.8.2, p. 50]

Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *es un Sistema Gradiente sobre el Espacio de Banach* X*, entonces* $\omega(x)$ *está contenido en el conjunto de los puntos de equilibrio* $\forall x \in X$. ∎

7.2 Tres Lemas que conducen a las Hipótesis H2, H3 y H4

Recordemos que la Ecuación de Evolución a la cual se aplica el Teorema 7.1.7 es:

$$\dot{z} = A(z) + F(z); \tag{7.3}$$

donde

1) $A : D(A) \to H$;

$$A(z) = A(u, v, \theta) = \left(v; (au')' - (m\theta)'; (k\theta')' - mv'\right).$$

2) $F : H \to H$;

$$F(u, v, \theta) = (\Theta; -g \circ u, \Theta).$$

Sea $z_0 \in \omega(z)$; donde z es cualquier elemento fijo del Espacio H.

Nota 7.2.1.

Sea $z \in H$.

Según el Lema 7.1.8 y la Propiedad 6.2.4; si $z_0 \in \omega(z)$, entonces $z_0 = (u_0, \Theta, \Theta)$.

Observación 7.2.2.

Al usar el Lema 3.1.4, el Teorema 3.3.2 y el Corolario 3.3.3; tenemos que la Derivada Fuerte de F en $\widetilde{z} \in H$ es:

$$DF(\widetilde{z})(z) = (\Theta; -(g' \circ \widetilde{u}) \cdot u, \Theta),$$

donde

1) g es la función de la Hipótesis 5.2.2.

2) $\widetilde{z} := \left(\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{\theta}\right) \in H$; $z := (u, v, \theta)$.

En caso de que $z_0 \in \omega(z)$, se tiene:

$$DF(z_0)(z) = (\Theta; -(g \circ u_0) \cdot u, \Theta).$$

Nota 7.2.3.

$DF(z)$ es una transformación lineal compacta, $\forall z \in H$ (Definición 4.2.6).

Observación 7.2.4.

Al repetir lo indicado en la Observación 7.1.3, pero en relación a la ecuación (7.3), el operador C de dicha observación es:

$$C = A + DF(z_0),$$

donde $z_0 \in \omega(z) \subset E$ (Lema 7.1.8).

Nota 7.2.5.

Observe que:

$$C(z) = C(u, v, \theta) = \left(v; (au')' - (m\theta)' - (g' \circ u_0) \cdot u; (k\theta')' - mv'\right)$$

donde: $z := (u, v, \theta) \in H$; $z_0 := (u_0, \Theta, \Theta) \in \omega(z)$.

También notemos que C es un Operador Lineal de $D(A)$ en H. Además; según la Observación 7.1.5, C es el Generador Infinitesimal de un semigrupo C_0 sobre el Espacio de Banach H.

A partir de los siguientes Lemas, se puede verificar H2, H3 y H4.

Lema 7.2.6.

La función resolvente del operador C, $R(\lambda; C)$, es compacta.

Prueba. [Hale-Perissinott; p.7]

Asumamos que $\lambda \in \rho(C)$. Entonces la transformación lineal $(\lambda I - C)^{-1} : H \to (D(A); \|\cdot\|_H)$ es un Operador Acotado.

Sea $C_\lambda : H \to H_a$ definida como $C_\lambda(z) := (\lambda I - C)^{-1}(z)$, donde

$$|z|_a := \|z\|_H + \|C(z)\|_H \quad \text{y} \quad H_a := (D(A); |\cdot|_a).$$

Observe que C_λ es una transformación lineal acotada inyectiva de H en H_a. Así tenemos que $C_\lambda^{-1} : H_a \to H$ es una transformación lineal acotada.

Ahora considere la función

$$(\lambda I - C) : (D(A) ; |\cdot|_b) \to H,$$

donde

$$|\cdot|_b^2 := |\cdot|_{H^2}^2 + |\cdot|_{H^1}^2 + |\cdot|_{H^2}^2 \quad \text{y} \quad |u|_{H^2}^2 := |u|_{L^2}^2 + |u'|_{L^2}^2 + |u''|_{L^2}^2 .$$

Observemos que $|\cdot|_a$ y $|\cdot|_b$ son normas equivalentes. Por lo tanto, si un conjunto $B \subset H$ está acotado, entonces $(\lambda I - C)^{-1}(B) \subset H_a$ está acotado; lo que a su vez implica que $(\lambda I - C)^{-1}(B) \subset (D(A) ; |\cdot|_b)$ está acotado y que $(\lambda I - C)^{-1}(B)$ tiene clausura compacta en H. ■

Nota 7.2.7.

El Lema anterior implica que el espectro $\sigma(C)$ consiste únicamente de una sucesión de autovalores aislados de multiplicidad finita, cuyas normas tienden a infinito.

Lema 7.2.8.

Los números complejos λ tal que $\lambda = i\beta, \beta \neq 0, \beta \in I\!R$, no son autovalores de C.

Prueba.

Consideremos:

$$u := u_1 + iu_2 \quad (u_1, u_2 \in I\!R)$$

$$v := v_1 + iv_2 \quad (v_1, v_2 \in I\!R)$$

$$\theta := \theta_1 + i\theta_2 \quad (\theta_1, \theta_2 \in I\!R)$$

Supongamos que:

$$C\left(u,v,\theta\right)=i\beta\left(u,v,\theta\right);$$

tal que $\beta\left(u,v,\theta\right)\in I\!R \quad \left(\beta:=\beta\left(u,v,\theta\right)\right)$ y $\beta\neq 0$.

Según la Nota 7.2.5, tenemos:

$$C\left(u,v,\theta\right)=\Big(v;\left(au'\right)'-\left(m\theta\right)';\left(k\theta'\right)'-mv'\Big)+\left(\Theta;-\left(g'\circ u_0\right)\cdot u;\Theta\right).$$

De las igualdades anteriores, obtenemos el siguiente sistema:

1) $i\beta\left(u_1+iu_2\right)=v_1+iv_2$.

2) $i\beta\left(v_1+iv_2\right)=\Big(a\left(u_1+iu_2\right)'\Big)'-\left(m\left(\theta_1+i\theta_2\right)\right)'-\left(g'\circ u_0\right)\left(u_1+iu_2\right)$.

3) $i\beta\left(\theta_1+i\theta_2\right)=\Big(k\left(\theta_1+i\theta_2\right)'\Big)'-m\left(v_1+iv_2\right)'$.

Al separar en partes reales e imaginarias, el sistema anterior es equivalente al siguiente:

(a) $v_2=\beta u_1$, luego $v_2'=\beta u_1'$.

(b) $v_1=-\beta u_2$, luego $v_1'=-\beta u_2'$.

(c) $\beta v_1=\left(au_2'\right)'-\left(m\theta_2\right)'-\left(g'\circ u_0\right)\cdot u_2$.

(d) $-\beta v_2=\left(au_1'\right)'-\left(m\theta_1\right)'-\left(g'\circ u_0\right)\cdot u_1$.

(e) $\beta\theta_1=\left(k\theta_2'\right)'-mv_2'$.

(f) $-\beta\theta_2=\left(k\theta_1'\right)'-mv_1'$.

Al multiplicar las ecuaciones (c) y (d) respectivamente por $-u_1$ y u_2, tenemos:

$$\begin{aligned} -\beta v_1 u_1 &= -\left(a u_2'\right)' u_1 + \left(m\theta_2\right)' u_1 + \left(g' \circ u_0\right) \cdot u_1 \cdot u_2 \\ -\beta v_2 u_2 &= \left(a u_1'\right)' u_2 - \left(m\theta_1\right)' u_2 - \left(g' \circ u_0\right) \cdot u_1 \cdot u_2. \end{aligned}$$

Antes de sumar miembro a miembro las dos últimas igualdades, notemos que las ecuaciones (a) y (b) implican que:

$$-\beta v_1 u_1 - \beta v_2 u_2 = -v_1 \cdot v_2 + v_1 \cdot v_2 = 0.$$

Así tenemos que al sumar las antepenúltimas igualdades y luego multiplicar por β:

(g) $\beta\left[\left(a u_1'\right)' u_2 - \left(a u_2'\right)' u_1 - \left(m\theta_1\right)' u_2 + \left(m\theta_2\right)' u_1\right] = 0.$

Ahora, al multiplicar las igualdades (e) y (f) por θ_2 y θ_1 respectivamente, tenemos:

$$\begin{aligned} \beta\theta_1\theta_2 &= \left(k\theta_2'\right)' \theta_2 - m v_2' \theta_2 \\ -\beta\theta_1\theta_2 &= \left(k\theta_1'\right)' \theta_1 - m v_1' \theta_1. \end{aligned}$$

Al sumar miembro a miembro las dos igualdades anteriores:

$$\left(k\theta_1'\right)' \theta_1 + \left(k\theta_2'\right)' \theta_2 - m v_2' \theta_2 - m v_1' \theta_1 = 0$$

De las ecuaciones: (a), (b), (e) y (f); se desprende que:

(h) $\beta\left[m\theta_2 u_1' - m\theta_1 u_2'\right] = \left(k\theta_1'\right)' \theta_1 + \left(k\theta_2'\right)' \theta_2.$

Al sumar miembro a miembro las igualdades (g) y (h):

(i) $\beta\left[(au_1')'\,u_2-(au_2')'\,u_1-(m\theta_1)'\,u_2+(m\theta_2)'\,u_1+m\theta_2u_1'-m\theta_1u_2'\right]=$
$=(k\theta_1')'\,\theta_1+(k\theta_2')'\,\theta_2.$

Al usar Integración por Partes (Teorema 1.1.12, numeral 2)) y el hecho de que $(u_1,v_1,\theta_1)\in D(A)$, $(u_2,v_2,\theta_2)\in D(A)$, se tiene que:

4) $\displaystyle\int_0^\pi (au_1')'\,u_2=au_1'u_2|_0^\pi-\int_0^\pi au_1'u_2'=-\int_0^\pi au_1'u_2'.$

5) $\displaystyle-\int_0^\pi (au_2')'\,u_1=\int_0^\pi au_2'u_1'.$

6) $\displaystyle-\int_0^\pi (m\theta_1)'\,u_2=\int_0^\pi m\theta_1u_2'.$

7) $\displaystyle\int_0^\pi (m\theta_2)'\,u_1=-\int_0^\pi m\theta_2u_1'.$

Al integrar ambos miembros de la ecuación (i), al mismo tiempo que se toman en cuenta las cuatro últimas integrales, obtenemos:

$$\int_0^\pi\left[(k\theta_1')'\,\theta_1+(k\theta_2')'\,\theta_2\right]=0.$$

Al usar de nuevo el Método de Integración por Partes y el hecho de que el Dominio del Operador C es el conjunto $D(A)$; de la igualdad anterior se tiene:

$$\int_0^\pi k\left[(\theta_1')^2+(\theta_2')^2\right]=0.$$

De la última igualdad obtenemos:

$$k\left[(\theta_1')^2+(\theta_2')^2\right]=\Theta,$$

ya que

$$k\left[(\theta_1')^2 + (\theta_2')^2\right] \geq 0,$$

en vista de que por hipótesis $k > 0$. Así tenemos que

$$(\theta_1')^2 + (\theta_2')^2 = \Theta;$$

con lo que

$$\theta_1' = \theta_2' = \Theta.$$

Pero $\theta_1' = \theta_2' = \Theta \Rightarrow \theta_1 =$ constante y $\theta_2 =$ constante. Recordando que $\theta_1, \theta_2 \in H_0^1$, tenemos que $\theta_1 = \theta_2 = 0$. De aquí y recordando que por hipótesis la función "m" es distinta de cero en todo el intervalo$[0, \pi]$, al usar la ecuación 3) tenemos que $v_1' = v_2' = \Theta$.

Al usar las igualdades (a) y (b) se obtiene:

$$u_1' = u_2' = \Theta \quad (\beta \neq 0).$$

Luego: $u_1 =$ constante y $u_2 =$ constante.

Ya que $u_1, u_2 \in H_0^1$, se concluye que $u_1 = u_2 = \Theta$.

Al emplear de nuevo las ecuaciones (a) y (b), tenemos: $v_1 = v_2 = \Theta$. ■

Lema 7.2.9.

El número cero no es un autovalor del operador C (Nota 7.2.5).

Prueba.

Supongamos que el elemento $z := (u, v, \theta)$ pertenece al Núcleo del Operador C.

Al usar la Nota 7.2.5, tenemos:

$$\begin{cases} v &= \Theta \\ (au')' - (m\theta)' - (g' \circ u_0) \cdot u &= \Theta \\ (k\theta')' - mv' &= \Theta \end{cases}$$

Al usar la primera y tercera igualdad, obtenemos:

1) $v = \Theta \Rightarrow v' = \Theta$.

2) $v' = \Theta; (k\theta')' - mv' = \Theta \Rightarrow (k\theta')' = \Theta$.

Recordando que el dominio del operador C es el conjunto $D(A)$, se tiene que $\theta \in H_0^1$; con lo que $\theta(0) = \theta(\pi) = 0$ (Teorema 1.1.17). De este modo se tiene el siguiente problema:

$$\begin{cases} -(k\theta')' = \Theta \quad \text{en } I \\ \theta(0) = \theta(\pi) = 0 \end{cases}$$

Al usar el Lema 2.2.2, de la unicidad de la solución se tiene que $\theta = \Theta$.

Cuando empleamos la segunda ecuación del sistema escrito al inicio de esta prueba, obtenemos:

$$(au')' - (g' \circ u_0) \cdot u = \Theta.$$

Ya que el dominio del operador C es el conjunto $D(A)$, tenemos que $u \in H_0^1$ y por lo tanto $u(0) = u(\pi) = 0$ (Teorema 1.1.17).

Nuevamente, al usar el Lema 2.2.2, la función $u = \Theta$ es la única solución del problema:

$$\begin{cases} -(au')' - (g' \circ u_0) \cdot u = \Theta \\ \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

Hemos verificado que el Núcleo del Operador está constituido solamente por el vector (Θ, Θ, Θ). ∎

Referencias Bibliográficas

1. Bonadies, M.; Franco, P.; Lucía, U. *Thermoelastic Stress Analysis for Linear Thermoelastic Bodies.* Universita'Di Torino. Quaderni del Dipartimento Di Matematica. Quaderno No. 1 / 1998.

2. Brézis, H. *Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones.* Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

3. Day, W.A. *Heat Conduction within Linear Thermoelasticity.* Springer-Verlag. New York, 1985.

4. Gilbarg, D.; Trudinger, N. *Elliptic Partial Differential Equation of Second Order.* Springer-Verlag, 1977.

5. Goldstein, J.A. *Semigroups of Linear Operators and Applications.* Oxford University Press. New York Clarendon. Press Oxford, 1985.

6. Hale, J.K. *Asymtotic Behavior of Dissipative Systems.* Mathematical Surveys and Monographs **25**, AMS, Providence, R.I., 1989.

7. Hale, J.K.; Perissinotto Jr., A. *Global Atractor and Convergence for One-Dimensional Semilinear Thermoelasticity.* Dynamic Systems and Applications. **2**, 1-10 (1993).

8. Hale, J.K.; Raugel, G. *Convergence in Gradient-Like Systems with Applications to PDE.* Center for Dynamical Systems and Nonlinear Studies , Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA, USA, Preprint No. 50, 1991.

9. Hansen, S.W. *Exponential Energy Decay in a Linear Thermoelastic Rod.* Journal of Mathematical Analysis and Applications **167**, 429-442 (1992).

10 Haraux, A. *Stability questions in PDE.* Center for Dynamical Systems and Nonlinear Studies. Georgia Institute of Technology, CDSNS 92-90.

11. Henry, D.B.; Perissinotto Jr., A.; Lopes, O.F. *On the Essential Spectrum of a Semigroup of Thermoelasticity.* Journal of Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 21, 1, pp. 65-75 (1993).

12. Hewitt, E.; Stromberg, K. *Real and Abstract Analysis.* Graduate Texts in Mathematics **25**. Springer-Verlag.

13. [Iribarren[1]]: Iribarren, I.L. *Cálculo Diferencial en Espacios Normados.* Equinoccio, Editorial de la Universidad Simón Bolívar, Caracas, 1980.

14. [Iribarren[2]]: Iribarren, I.L. *Topología de Espacios Métricos.* Editorial Limusa-Wiley, S.A., México, 1973.

15. Kesavan, D. *Topics in Functional Analysis and Applications.* John Wiley and Sons. Copyright 1989.

16. Kolmogórov, A.N.; Fomín, S.V. *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional.* Editorial MIR, Moscú, traducción al español, Editorial Mir, 1978.

17. Ladas, G.E.; Lakshmikanthan, V. *Differential Equations in Abstract Spaces.* Academic Press. New York and London, 1972.

18. Munkres, J.R. *TOPOLOGY. A first Course.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, Copyright 1975.

19. Nagel, R. (Editor). *One-Parameter Semigroups of Positive Operators.* Lecture in Mathematics, **1184**. Springer-Verlag.

20. Neves, A.F.; Ribeiro, H.; Lopes, O. *On the Spectrum of Evolution Operators Generated by Hyperbolic Systems.* Journal of Functional Analysis **67**, 3, 320-344 (1986).

21. Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Vol. 44, 1983.

22. Slemrod, M. *Global Existence, Uniqueness, and Asymtotic Stability of Classical Smooth Solutions in One-Dimensional Non-Linear Thermoelasticity.* Arch. Rational Mech. **76**, 97-134 (1981).

23. Tineo, A. *Métodos de Análisis No Lineal.* Primera Escuela Venezolana de Matemáticas. Universidad de Los Andes, Mérida, 17 al 30 de septiembre de 1988.

24. Zachmanoglou, E.C.; Thoe, D.W. *Introduction to Partial Differential Equations with Applications.* Dover Publications, Inc. New York, Copyright 1976, 1986.