1. előadás

Normált terek. Norma, normált tér. Példák normált térre. $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. Indukált metrika. Nyílt és zárt egységgömb, a zárt egységgömb nem a nyílt lezártja. Banach-tér, ellenpélda.

2. előadás

Gömb eltoltja, nagyítása. Az összeadás és a skalárral való szorzás sorozatfolytonosak, és ezért folytonosak is. Lineáris altér lezártja is lineáris altér.
Lineáris operátorok normált téren. Lineáris operátor. Folytonos operátor, folytonosság ekvivalens jellemzései. Folytonos lineáris funkcionál, duális tér. Operátornorma ekvivalens definíciói. $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$. Az operátornorma norma és szubmultiplikatív.

3. előadás

Algebra, szubmultiplikatív norma algebra fölött, normált algebra, Banach-algebra. Ha E nt és F bt, akkor $B(E, F)$ Banach-tér az operátornormával. Következmények: $B(E)$ Banach-algebra, E' Banach-tér. Ha $A_n \to A$ operátornormában, akkor pontonként is (fordítva nem igaz). $A_n \to A$ operátornormában $\Leftrightarrow$ $A_n \to A$ egyenletesen $\overline{B}_1(0, E)$-n. Folytonos lineáris operátorok kiterjesztési tétele, következmények sűrű lineáris altérre.
Ekvivalens normák. Ekvivalens normák. Homeomorfizmus és normaekvivalencia ekvivalens.

4. előadás

Ekvivalens normákra a konvergencia, Cauchy-konvergencia és teljesség ekvivalens. Véges dimenziós vt felett minden norma ekvivalens. Véges dimenziós nt-ből nt-be menő operátor folytonos. Ha két nt között van lineáris homeomorfizmus, akkor egyszerre teljesek. Véges dimenziós nt bt. Véges dimenziós lineáris altér zárt. Véges dimenzióban kompakt $\Leftrightarrow$ korlátos és zárt.

5. előadás

Konstrukciók normált térre. Véges sok nt szorzata: nt a max-normával, $\|\mathrm{pr}_i\| \leq 1$, a topológia a szorzattopológia, a teljesség megmarad. Faktortér, faktornorma: a j természetes homomorfizmusra $\|j\| \leq 1$, a teljesség megmarad, $W \subseteq E/M$ nyílt $\Leftrightarrow$ $j^{-1}\langle W\rangle$ nyílt, j nyílt leképezés.
$|||f|||$ norma $\mathcal{C}(K, \mathbb{K})$-n. $|||f_n - f||| \to 0 \Leftrightarrow f_n \rightarrowtail f$. $(\mathcal{C}(K, \mathbb{K}), |||\cdot|||)$ Banach-tér.

6. előadás

Approximáció folytonos függvényekkel. $\mu_k(t)$. Lemma μ_k szummázásairól. Approximáció Bernstein-polinomokkal. Elemi Stone–Weierstrass-tétel. Borel-mérték, reguláris Borel-mérték. $\mathcal{L}^p(\mu)$-ben a folytonos függvények sűrűn vannak. Speciális eset: Lebesgue-mérték. A folytonos függvények beágyazása L^p-be.

7. előadás

Példák. Példák nem teljes normált térre. Banach-térben egy lineáris altér pontosan akkor zárt, ha teljes. Példák folytonos ill. nem folytonos lineáris operátorra. $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ felett $\|\cdot\|_1$ és $|||\cdot|||$ inekvivalensek.

8. előadás

Hilbert-terek. Skaláris szorzat, prehilbert tér. CBS-egyenlőtlenség. Indukált norma, ez valóban norma. Hilbert-tér. Paralelogramma-szabály. Polarizációs formulák. Példák Hilbert-térre. A skaláris szorzat folytonos. Merőlegesség, ortokomplementer, biortokomplementer. $M^\top$ zárt lineáris altér, $M \subseteq N \Rightarrow M^\top \supseteq N^\top$, $M \subseteq M^{\top\top}$, $M^{\top\top\top} = M^\top$, $M^\top = \overline{\operatorname{span} M}^\top$.

9. előadás

Riesz tétele: zárt konvex halmaztól való távolság egyetlen pontban realizálódik. Riesz ortogonális felbontási tétele. Altér szerinti ortogonális felbontás. $M \subseteq H$ zárt lineáris altér $\Rightarrow M = M^{\top\top}$. $M \subsetneq H$ zárt lineáris altér $\Rightarrow M^\top \neq \{0\}$. $M^\top = \{0\} \Leftrightarrow \overline{\operatorname{span} M} = H$. $M^{\top\top} = \overline{\operatorname{span} M}$. Riesz reprezentációs tétele.

Ortogonális rendszerek, ortogonális sorok. Totális halmaz, teljes halmaz, Hilbert-térben ezek ekvivalensek. Ortogonális és ortonormált rendszer és sorozat, ortogonális sor.

10. előadás

Sorösszeggel vett skaláris szorzat vehető tagonként. Elemi Pitagorasz-tétel. Parseval-tétel. Ortogonális sor általános alakja. $\sum \alpha_n e_n$ konvergens $\Leftrightarrow \sum |\alpha_n|^2$ konvergens. A Fourier-együtthatók egyértelműsége. Absztrakt Fourier-sor. Bessel-egyenlőtlenség. $\sum_{n=0}^{\infty}(x|e_n)e_n$ egyenlő az x-nek a $\overline{\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$-re vett vetületével. Fourier-sorba fejthetőség. Gram–Schmidt-ortogonalizáció.

11. előadás

Gyenge konvergencia Hilbert-térben. Gyenge konvergencia. Normabeli konvergencia $\Rightarrow$ gyenge konvergencia, fordítva nem igaz. A gyenge limesz egyértelmű. Ha $(x_n|y) \to (x|y)$ $\forall y \in S$, akkor $\forall y \in \overline{\operatorname{span} S}$-re is. Hilbert-térben korlátos sorozatnak van gyengén konvergens részsorozata. Radon–Nikodym-tétel (véges esetben).

12. előadás

Folytonos lineáris operátorok Hilbert-térben. Adjungált: folytonos, az adjungálás normatartó involúció. Algebrai tulajdonságok, C*-tulajdonság. Normális, önadjungált, pozitív, unitér operátorok, ortogonális projekció. $(\operatorname{ran} A)^\top = \ker A^*$ és $\overline{\operatorname{ran} A} = (\ker A^*)^\top$. Sebestyén-tétel. Komplex Hilbert-térben $(Ax|y)$ felírása, operátoregyenlőség jellemzése skaláris szorzattal. Ellenpélda valósban. Következmény normálisokra, önadjungáltakra és pozitívokra.

13. előadás

Numerikus értékkészlet és numerikus sugár. Numerikus értékkészlet és numerikus sugár. w abszolút homogén és szubadditív (félnorma). Komplex Hilbert-térben $\frac{1}{2}\|A\| \le w(A) \le \|A\|$. $|(Ax|y) + (Ay|x)| \le 2w(A).\|x\|.\|y\|$. Komplex Hilbert-térben $w\left(T^{2^n}\right) \le w(T)^{2^n}$. Komplex Hilbert-térben normális T-re $w(T) = \|T\|$.
Hahn–Banach-tételkör. Szublineáris függvény. Szublineáris függvény által dominált lineáris funkcionál kiterjesztése bővebb altérre. Hahn–Banach-tétel algebrai alakja.

14. előadás

Példák szublineáris függvényre. Abszolút dominált funkcionál kiterjesztése. Folytonos lineáris funkcionál kiterjesztése. Kis Hahn–Banach-tétel. E' szétválasztó E felett. $x = 0 \Leftrightarrow \forall f \in E' : f(x) = 0$. $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in E', \|f\| \le 1\}$.
Normált tér biduálisa. Biduális tér, $\hat{x}$.

15. előadás

$\|\hat{x}\| = \|x\|$. $T(x) = \hat{x}$ lineáris izometria. Teljessé tétel, $\hat{E} = \overline{\operatorname{ran} T}$ az E teljessé tétele. Nt-ből bt-be menő folytonos lineáris operátor átvezethető a teljessé tételen. E pontosan akkor bt, ha $\operatorname{ran} T \subseteq E''$ zárt. Reflexív bt. Gyenge konvergencia, gyenge-* konvergencia. Gyenge $\Rightarrow$ gyenge-*, a másik irány pontosan a reflexív terekre igaz. Példák.
Banach-adjungált. Banach-adjungált. $A^* \in B(F', E')$, $\|A*\| = \|A\|$. Algebrai tulajdonságok.

16. előadás

Banach-terek alaptételei. Baire-kategóriatétel I. Sehol sem sűrűség, első kategóriájúság, második kategóriájúság. Baire-kategóriatétel II. Példa sehol sem differenciálható folytonos függvényre. Kiegyensúlyozottság, elnyelőség, hordóság. Minden bt hordós. Nt-ben p félnorma folytonos $\Leftrightarrow p(x) \le C.\|x\|$.

17. előadás

Gelfand–Zabreiko-lemma. Pontonkénti és egyenletesen korlátos operátorcsaládok. Banach egyenletes korlátossági tétele. Gyengén korlátos halmaz. Normált tér részhalmaza korlátos $\Leftrightarrow$ gyengén korlátos. Banach–Steinhaus-tétel. Hellinger–Toeplitz-tétel.

18. előadás

Zárt leképezés. A zártság jellemzése sorozatokkal. Banach-féle zártgráf-tétel. Banach-féle lineárishomeomorfizmus-tétel. Lineárishomeomorfizmus-tétel $\Rightarrow$ zártgráf-tétel.

19. előadás

Invertálható operátorok Banach-téren. Folytonos invertálhatóság, $G(B(E))$. Carl Neumann-sor. $G(B(E)) \subseteq B(E)$ nyílt. Reguláris érték, spektrum, spektrumpont, sajátérték, sajátvektor. Ekvivalens feltétel a spektrumpontokra. Shift-operátorok. $\rho(A) \subseteq \mathbb{K}$ nyílt és $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$. $\operatorname{Sp} A \subseteq \overline{B}_{\|A\|}(0, \mathbb{K})$ kompakt. Spektrum komplex Banach-térben (BN).
Invertálható operátorok Hilbert-téren. Adjungált és inverz kapcsolata, $\operatorname{Sp} A^* = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \operatorname{Sp} A\}$, ez sajátértékekre nem igaz. Normálisra $Tx = \lambda x \Rightarrow T^*x = \overline{\lambda}x$.

20. előadás

Banach-terek közti lineáris homeomorfizmusok jellemzése. Hilbert-térben a spektrumpontok jellemzése. $\operatorname{Sp} A \subseteq \overline{W(A)}$. Következmény önadjungált ill. pozitív operátorokra.
Speciális operátorok Hilbert-téren. *Önadjungált operátorok:* Félskalárszorzat. CBS félskalárszorzatra. CBS operátorokra. Önadjungáltakra $\inf(Ax|x)$, $\sup(Ax|x) \in \operatorname{Sp} A$.
Pozitív operátorok: Rendezés önadjungált operátorokra.

21. előadás

Vigier-tétel. Pozitív operátor pozitív négyzetgyöke felcserélhetőségi feltétellel.
Ortogonális projekciók: Zárt lineáris altérre való ortogonális projekció tulajdonságai.

22. előadás

$P = P^* = P^2 \Rightarrow P$ ortogonális projekció $(\ker P)^\top$-re.
Unitér és izometrikus operátorok: Unitér operátor, izometrikus operátor. Unitér $\Rightarrow$ izometrikus. Izometrikusság jellemzése. Unitérség jellemzése.
Kompakt operátorok: Kompakt operátor. T kompakt $\Leftrightarrow T\langle B\rangle$ teljesen korlátos. Kompakt $\Rightarrow$ folytonos. $K(E) \triangleleft B(E)$. Véges rangú operátor kompakt. Véges rangú operátorsorozat operátornormában vett limesze kompakt.
Kompakt normális operátorok: Ortogonális sorból származtatott normális ill. kompakt operátor.

23. előadás

Lemma a Hilbert-térbeli normális operátor sajátértékéről. Lemma a komplex Hilbert-térbeli normális operátor sajátértékéről. Hilbert–Schmidt-tétel.
Riesz-lemma. Végtelen dimenziós nt zárt egységgömbje nem kompakt, következmények.

24. előadás

Kompakt operátorok Riesz-féle alaptétele. Fredholm-alternatívatétel. Kompakt operátorok spektrumának jellemzése.