RECOPILACION DE PROBLEMAS DE EXAMEN DE GEOMETRIA PROYECTIVA

1) Sea $f : \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ la proyectividad definida por

$$f(X_0 : X_1 : X_2 : X_3) = (X_0 - X_2 + X_3 : X_0 + X_1 : X_2 : X_2 + X_3).$$

Se pide:

a) Calcular (respecto de la referencia canónica) los puntos y planos invariantes por f.

b) Dar una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ respecto de la cual la matriz de f sea de Jordan.

c) Demostrar que f tiene una sola recta invariante, y dar sus ecuaciones en la referencia canónica.

2) Sean $P = (1 : 0 : 0)$, $Q = (0 : 0 : 1)$ y L la recta $X_0 + X_1 + X_2 = 0$. Sea g la proyectividad de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ que manda el punto P en el punto Q y tal que su restricción al plano afín $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \backslash L$ es una traslación. Se pide:

a) Calcular la imagen por g del punto $(1 : 0 : 1)$.

b) Calcular la razón doble de los puntos $(-1 : 0 : 1)$, P, Q y $g(Q)$.

3) Se considera el plano $\Pi : X_2 = X_3$ de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ y la proyectividad $g : \Pi \to \Pi$ definida por

$$g(X_0 : X_1 : X_2 : X_2) = (-X_0 + X_1 : X_1 : X_1 - X_2 : X_1 - X_2)$$

Se pide:

a) Calcular los puntos y rectas invariantes por g.

b) Demostrar que existe una única proyectividad $f : \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ y un plano Π' que contenga al punto $(0 : 0 : 1 : 0)$ tal que $f_{|\Pi} = g$ y la restricción de f a $\mathbb{P}^3 \setminus \Pi'$ sea una homotecia.

c) Hallar el centro y la razón de la homotecia del apartado anterior.

4) Sea $f : \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ la proyectividad definida por

$$f(X_0 : X_1 : X_2 : X_3) = (-X_0 + X_3 : -X_1 : -X_2 + X_3 : -X_3)$$

Se pide:

a) Calcular una referencia de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ de forma que la matriz de f respecto de ella sea la forma canónica de Jordan.

b) Encontrar todos los subespacios invariantes por f.

c) Demostrar que existe un único plano Π de forma que la restricción de f a $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \backslash \Pi$ sea una traslación.

5) Sea C la cónica afín de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones:

$$\begin{cases} X_1X_2 - X_2^2 - 1 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases}$$

Si $\bar{C} \subset \{X_3 = 0\} \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ es su completada proyectiva, se pide:

a) Clasificar C y calcular su centro.

b) Parametrizar $\bar{C}$.

c) Demostrar que existe una única cuádrica proyectiva $\bar{Q}$ de forma que se verifiquen todas las condiciones siguientes:

   (i) La intersección de $\bar{Q}$ con el plano $X_3 = 0$ es la cónica $\bar{C}$.

   (ii) El polo del plano $X_1 = X_2$ es el punto $(0 : 0 : 0 : 1)$.

   (iii) $\bar{Q}$ contiene al punto $(0 : 0 : 1 : 1)$.

6) Sea Π el plano de $\mathbb{P}^3$ de ecuación $X_0 = 0$ y sea ℓ la recta de ecuaciones $X_2 = X_3 = 0$. Se pide:

a) Demostrar que existe una única recta r en Π de forma que la restricción de la proyectividad de Π

$$g(0 : X_1 : X_2 : X_3) = (0 : X_1 : X_2 + 2X_3 : -X_3)$$

sea una homotecia en el plano afín $\Pi \setminus r$. Calcular el centro y la razón de dicha homotecia.

b) Encontrar las ecuaciones de la proyectividad $h : \ell \to \ell$ que tiene como único punto fijo el $(0 : 1 : 0 : 0)$ y que manda $(1 : 0 : 0 : 0)$ en $(2 : 1 : 0 : 0)$.

c) Calcular las ecuaciones respecto de la referencia canónica de la proyectividad $f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ tal que $f_{|\Pi} = g$ y $f_{|\ell} = h$.

7) Sean $f, g : \mathbb{P}^n_K \to {\mathbb{P}^n_K}^*$ dos correlaciones. Se pide:

a) Si $K = \mathbb{C}$, demostrar que existe al menos un punto $p \in \mathbb{P}^n_K$ tal que los hiperplanos $f(p)$ y $g(p)$ coinciden.

b) Si $K = \mathbb{R}$ y n es par, demostrar que también en este caso existe al menos un punto $p \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ tal que su hiperplano imagen por f y g es el mismo.

c) Si $K = \mathbb{R}$ y respecto de las referencias canónicas f está definido por una matriz A cuyo cuadrado es la matriz identidad, demostrar que existe al menos un punto p de forma que la imagen por la correlación f del hiperplano $f(p)$ es el punto p.

8) Sea $f : \mathbb{P}^3_K \to {\mathbb{P}^3_K}^*$ una correlación nula. Se pide:

a) Demostrar que, dada una recta ℓ, son equivalentes:

   (i) ℓ es invariante por f.

   (ii) Para todo punto $p \in \ell$, el plano $f(p)$ contiene a ℓ.

   (iii) Existe un punto $p \in \ell$ tal que el plano $f(p)$ contiene a ℓ.

b) Si g es otra correlación nula, demostrar que por cada punto $P \in \mathbb{P}^3_K$ pasa una recta ℓ tal que $f(\ell) = g(\ell) = \ell$.

c) Demostrar que la recta del apartado anterior es única si y sólo si $f(P) \neq g(P)$.

9) Para cada $\lambda \neq -1$, sea $f_\lambda : \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ la proyectividad definida por

$$f_\lambda(X_0 : X_1 : X_2 : X_3) = (X_0 : (\lambda - 2)X_0 + X_1 : (\lambda - 2)X_1 + X_2 : X_2 + (\lambda + 1)X_3)$$

Se pide:

a) Calcular las rectas invariantes por f_λ cuando $\lambda = 0$.

b) Demostrar que existe un punto $P \in \mathbb{P}^3$ invariante para todas las aplicaciones f_λ, y determinar para qué valores de λ existe un plano $\Pi \subset \mathbb{P}^3$ tal que $f_{\lambda|\mathbb{P}^3 \setminus \Pi}$ sea una homotecia.

c) Encontrar los valores de λ para los cuales f_λ tenga un único plano invariante.

10) Sean las cónicas $C = \{(t_0^2 : t_0t_1 : t_1^2 : t_0t_1) \mid (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}^1\}$ (contenida en el plano $\Pi : X_1 = X_3$) y $C' = \{(X_0 : X_1 : X_2 : X_3) \mid X_0X_2 + X_1^2 = 0,\ X_3 = 0,\ \}$ (contenida en el plano $\Pi' : X_3 = 0$). Se pide:

a) Encontrar las rectas $\ell \subset \Pi$ que pasan por $(1 : 0 : 0 : 0)$ de forma que $C \setminus (C \cap \ell)$ sea una parábola en $\Pi \setminus \ell$.

b) Encontrar las tangentes a C' que pasan por $(0 : 1 : 0 : 0)$.

c) Sea Q la única cuádrica de $\mathbb{P}^3$ que contiene a C y C' y pasa por $(0 : 0 : 0 : 1)$. Encontrar el plano tangente a Q en $(1 : 0 : 0 : 0)$.

11) Sea f una proyectividad de $\mathbb{P}^3$ tal que: restringida al plano afín $X_3 = 0,\ X_0 \neq X_1$ es una homotecia de razón $1/2$; restringida al plano afín $X_0 = X_1,\ X_3 \neq 0$ es una traslación; $f(1 : 0 : 0 : 0) = (0 : 1 : 0 : 0)$; y $f(0 : 0 : 0 : 1) = (1 : 1 : 1 : 1)$. Se pide:

a) Calcular el centro de la citada homotecia y demostrar que la imagen de $(0 : 1 : 0 : 0)$ es $(1 : 3 : 0 : 0)$.

b) Demostrar que la imagen de $(1 : 1 : 1 : 1)$ por la traslación es el punto $(2 : 2 : 2 : 1)$.

c) Encontrar las ecuaciones de f y sus subespacios invariantes.

12) Sea Q la cuádrica afín de $\mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$-X_1 + X_2 + X_1^2 + X_1X_2 - 2X_3^2 = 0$$

Si $\bar{Q} \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ es su completada proyectiva, se pide:

a) Encontrar un plano que pase por $(0, 0, 0)$ y que corte a Q en un par de rectas. ¿Es único dicho plano?

b) Parametrizar la cónica proyectiva obtenida al cortar $\bar{Q}$ con el plano $X_3 = 0$.

c) Clasificar, según los valores de α, la cónica afín obtenida al cortar Q con el plano $X_3 = \alpha$.

13) Sea $f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^{3^*}$ la polaridad asociada a una cuádrica no degenerada $Q \subset \mathbb{P}^3$. Demostrar que una recta L es invariante por f si y sólo si $L \subset Q$.

14) Sea Π el plano de $\mathbb{P}^3$ de ecuación $X_3 = 0$. Se pide:

a) Calcular los puntos y rectas invariantes de la proyectividad $g : \Pi \to \Pi$ definida por

$$g(X_0 : X_1 : X_2 : 0) = (X_0 - X_2 : X_1 - X_0 : X_2 : 0).$$

b) ¿Existe alguna recta $L \subset \Pi$ tal que la restricción de g a $\Pi \setminus L$ sea una traslación?

c) Calcular las ecuaciones respecto de la referencia canónica de la única proyectividad $f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ que tiene una única recta invariante y que verifica las condiciones $f_{|\Pi} = g$ y $f(0 : 0 : 0 : 1) = (0 : 0 : 1 : -1)$.

15) Sea Q la cuádrica de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ de ecuación $X_0^2 - 2X_0X_2 + X_2^2 + 2X_1X_2 - X_3^2 = 0$ y sea C la cónica obtenida al cortar Q con el plano Π de ecuación $X_3 = 0$. Se pide:

a) Calcular los planos tangentes a Q que contienen a la recta $X_1 = X_2 = 0$.

b) Parametrizar C.

c) Clasificar la cónica afín obtenida al considerar en Π la recta $X_2 = X_3 = 0$ como recta del infinito.

16) Sea $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ una proyectividad involutiva (i.e. $f \circ f = id$) distinta de la identidad. Se pide:

a) Demostrar que f tiene exactamente dos puntos fijos.

b) Si P y Q son los dos puntos fijos, calcular la matriz de f respecto de la referencia $\{P, Q, R\}$, donde R es un punto cualquiera de $\mathbb{P}^1$ distinto de P y Q.

c) Concluir que dos proyectividades involutivas de $\mathbb{P}^1$ coinciden si y sólo si tienen los mismos puntos fijos.

17) Sea Q la cuádrica afín de $\mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$-X + Z + X^2 + XZ - 2Y^2 = 0$$

Si $\bar{Q} \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ es su completada proyectiva, se pide:

a) Clasificar la cónica afín obtenida al cortar la cuádrica Q con el plano $Y = 0$, y calcular su centro P.

b) Sea $f : \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^{3\,*}_{\mathbb{R}}$ la polaridad asociada a $\bar{Q}$. Comprobar que la imagen por f de la recta $X_0 = X_2 = 0$ es una recta que pasa por P.

c) Dar las ecuaciones de los planos tangentes a $\bar{Q}$ que pasan simultáneamente por los puntos $(0 : 1 : 0 : 0)$ y $(0 : 0 : 0 : 1)$.

18) Sea Q la cuádrica de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ de ecuación $X_0^2 - X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$ y sea C la cónica obtenida al cortar Q con el plano Π de ecuación $X_3 = 0$. Se pide:

a) Determinar si el plano Π es tangente o no a la cuádrica Q.

b) Parametrizar C.

c) Demostrar que no existe ninguna recta $\ell \subset \Pi$ de forma que la cónica afín real $C \setminus \ell \subset \Pi \setminus \ell$ sea una hipérbola cuyas asíntotas se corten en el punto $(0 : 1 : -1 : 0)$.