

## 5. MODELO DE DISPERSIÓN GAUSSIANO

### 5.1 Formulación matemática

Como se observa en la siguiente Figura 2, la pluma se eleva a una altura adicional a  $h$  (la de la chimenea) como consecuencia de que los gases calientes flotan y además del propio movimiento vertical que tienen cuando salen de la chimenea; así que la altura efectiva de la chimenea es  $H = h + \Delta h$ , en donde  $\Delta h$  expresa la elevación de la pluma.

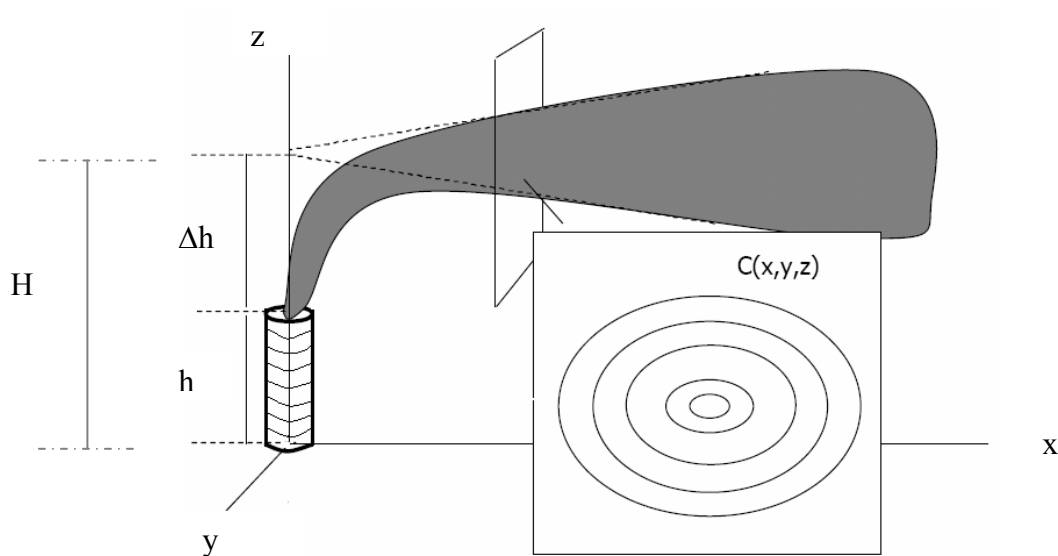


Figura 2. Un modelo de dispersión con la fuente virtual a una altura efectiva,  $H$ , de la chimenea

Las hipótesis sobre las cuales se basa la formulación matemática son:

- Desarrollo del modelo para un estado estacionario.
- La difusión de masa es despreciable en la dirección del eje  $x$ .
- La velocidad del viento  $u$  se considera constante ya que las variaciones de ésta en los tres ejes coordenados es muy pequeña y se puede despreciar.

- La fuente puntual se localiza en  $x = 0$  y a la altura efectiva de chimenea  $H$ .

La formulación matemática para el caso en cual los contaminantes emanan a la altura de la chimenea y sin efecto de reflexión del suelo, se describe a continuación:

$$C = \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{(z-H)^2}{\sigma_z^2}\right)\right] \quad \text{Ec. (5.1)}$$

Una modificación a la ecuación (5.1) se refiere a la consideración de que el contaminante se reflejará partir de una cierta distancia en  $x$ , al dispersarse a la atmósfera desde el nivel del suelo; lo que implica a su vez que el suelo no es sumidero para dicho contaminante. Para lo anterior es necesario usar una fuente imaginaria tal y como se muestra en la figura 2 con una localización en  $z=-H$ ,  $x$  y  $y = 0$  teniendo así una imagen en el espejo de la fuente original. La concentración será mayor a la determinada sin tomar en cuenta la reflexión del contaminante ya que existe una superposición de dos curvas gaussianas, la primera corresponde a la fuente virtual en  $H$  y la otra en  $-H$ . La formulación matemática es la ecuación (5.2).

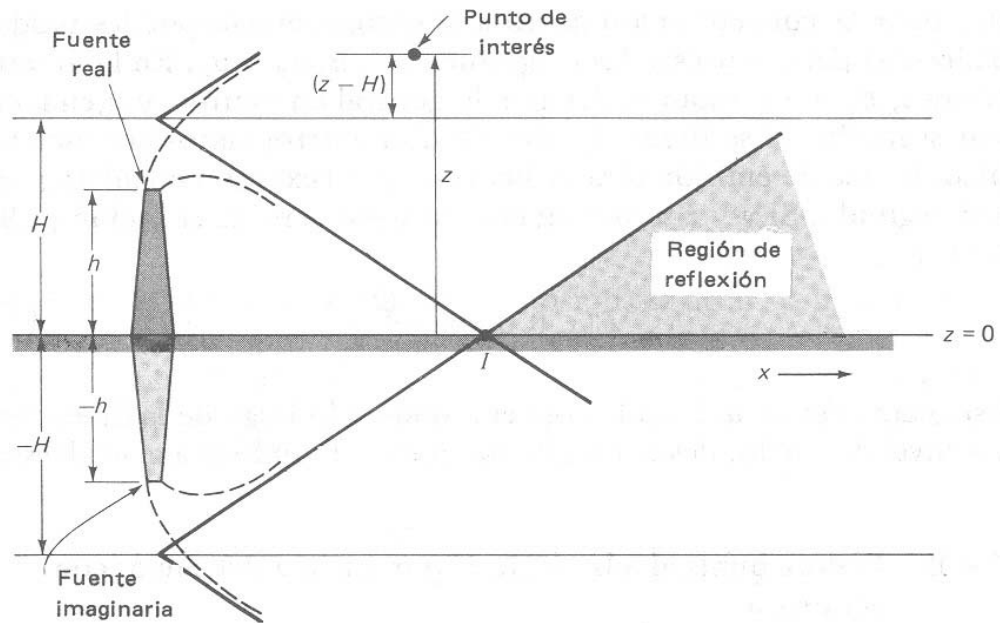


Figura 3. Efecto de reflexión del suelo<sup>2</sup>

$$C = \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left[-\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right] \left[ \exp\left[-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2}\right] + \exp\left[-\frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2}\right] \right] \quad \text{Ec. (5.2)}$$

La expresión más reducida del modelo de dispersión gaussiana correspondiente al nivel del suelo:

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{2\pi x (\sigma_y \sigma_z)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left( \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2} \right)\right] \quad \text{Ec. (5.3)}$$

La nomenclatura para las tres ecuaciones anteriores es:

<sup>2</sup> Wark, Kenneth & Cecil F. Warner. (1994). *Contaminación del aire. Origen y Control*. México: Editorial Limusa. p.152

$C$ : Concentración del contaminantes en  $\mu\text{g}/\text{m}^3$

$Q$ : Emisión de gas en g/s

$z$ : Distancia en el eje z en m

$y$ : Distancia en el eje y en m

$h$ : Altura de la chimenea en m

$H$ : Altura efectiva de la chimenea en m

$\sigma_y, \sigma_z$ : Desviaciones normales horizontal y vertical respectivamente.

Para la especificación de las desviaciones normales, Tuner en su libro “*Workbook of Atmospheric Dispersion Estimates*” propone el empleo de monogramas para aproximar el valor de  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ , se muestran en las figuras 4 y 5 respectivamente.

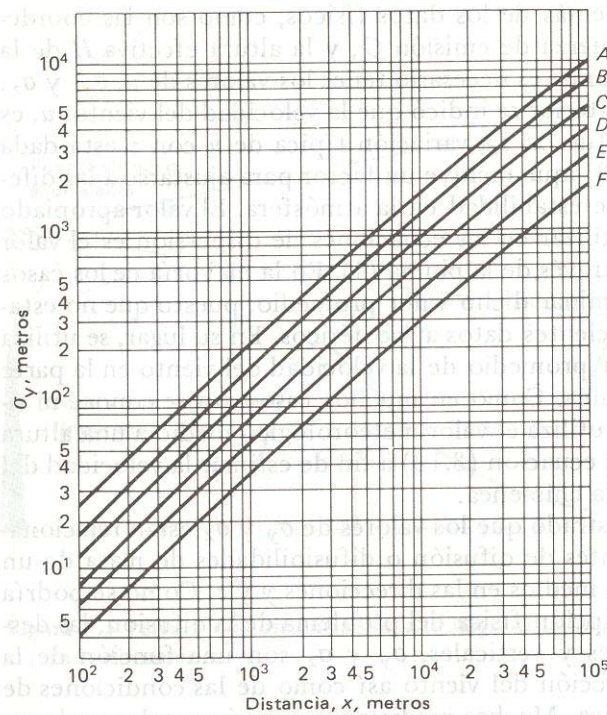


Figura 4. Desviación normal,  $\sigma_y$ , en dirección del viento cruzado como una función de la distancia en la dirección del viento

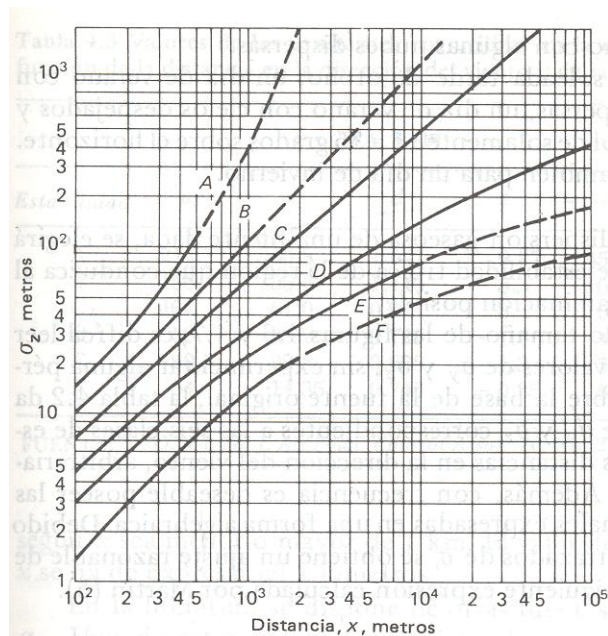


Figura 5. Desviación normal,  $\sigma_z$ , en dirección del viento cruzado como una función de la distancia en la dirección del viento

Otra alternativa que también se puede emplear es el uso de correlaciones, entre las cuales se pueden mencionar la propuesta por McMullen<sup>3</sup> en 1975, la cual se expresa en la siguiente forma:

$$\sigma = \exp\left[I + J(\ln x) + K(\ln x)^2\right] \quad \text{Ec. 5.4}$$

en donde:

$\sigma$ : Desviación normal de la concentración del contaminantes, ya sea horizontal  $\sigma_y$  o vertical  $\sigma_z$ .

$\ln x$ : Logaritmo natural de la distancia a nivel de suelo, expresada en kilómetros.

$I, J, K$ : Constantes empíricas para una condición de estabilidad correspondiente a cada valor de  $\sigma$ .

<sup>3</sup> R.W. McMullen. *J. Air Pollu. Control Assoc.* **25**, No. 10 (1975): 1057.

Las constantes I, J y K se obtienen de la siguiente tablas:

Tabla 3. Valores de I, J, K para  $\sigma_y$  en función de la distancia a nivel de piso y condición de estabilidad

| Condición de Estabilidad | I     | J      | K       |
|--------------------------|-------|--------|---------|
| A                        | 5.357 | 0.8828 | -0.0076 |
| B                        | 5.058 | 0.9024 | -0.0096 |
| C                        | 4.651 | 0.9181 | -0.0076 |
| D                        | 4.230 | 0.9222 | -0.0087 |
| E                        | 3.992 | 0.9222 | -0.0064 |
| F                        | 3.553 | 0.9181 | -0.0070 |

Fuente: R.W. McMullen. *J.Air Pollu. Control Assoc.* **25**, No. 10 (1975): 1057.

Tabla 4. Valores de I, J, K para  $\sigma_z$  en función de la distancia a nivel de piso y condición de estabilidad

| Condición de Estabilidad | I     | J       | K       |
|--------------------------|-------|---------|---------|
| A                        | 6.035 | 2.1097  | 0.2770  |
| B                        | 4.694 | 0.0136  | 0.0136  |
| C                        | 4.110 | -0.0020 | -0.0020 |
| D                        | 3.414 | -0.0316 | -0.0316 |
| E                        | 3.057 | -0.0450 | -0.0450 |
| F                        | 2.621 | 0.6564  | -0.0540 |

Fuente: R.W. McMullen. *J.Air Pollu. Control Assoc.* **25**, No. 10 (1975): 1057.

Cabe mencionar que las constantes I, J y K se obtuvieron a partir de un ajuste por el método de mínimos cuadrados de una función matemática de las curvas propuestas por Tuner.

Delance O. Martín<sup>4</sup> propuso otras correlaciones para estimar los valores de  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  las cuales son:

$$\sigma_y = ax^b \quad \text{Ec. 5.5}$$

$$\sigma_z = cx^d + f \quad \text{Ec. 5.6}$$

Las constantes  $a$ ,  $c$ ,  $d$  y  $f$  están en función de la clave de categoría de estabilidad (Pasquill) y  $b$  siempre toma el valor de 0.894; asimismo,  $x$  es la distancia en el eje  $x$  y debe estar en kilómetros. Las tablas 2 y 3 muestran las claves de categorías de estabilidad en base a la velocidad del viento (a 10 m de altura) y los valores de las constantes para el cálculo de  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  respectivamente.

Tabla 5. Categorías de Estabilidad (Pasquill)

| Velocidad del viento (m/s) a nivel de suelo a 10 m de altura | Día                                            |                                                   |                                               | Noche              |                    |
|--------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------|--------------------|--------------------|
|                                                              | Radiación solar incidente                      |                                                   |                                               |                    |                    |
|                                                              | Fuerte<br>(mayor que 50 cal/cm <sup>2</sup> h) | Moderada<br>(entre 25 y 50 cal/cm <sup>2</sup> h) | Débil<br>(menor que 25 cal/cm <sup>2</sup> h) | Nubosidad =<br>4/8 | Nubosidad =<br>3/8 |
| < 2                                                          | A                                              | A – B                                             | B                                             | F                  | F                  |
| 2 – 3                                                        | A – B                                          | B                                                 | C                                             | E                  | F                  |
| 3 – 5                                                        | B                                              | B – C                                             | C                                             | D                  | E                  |
| 5 – 6                                                        | C                                              | C – D                                             | D                                             | D                  | D                  |
| > 6                                                          | C                                              | D                                                 | D                                             | D                  | D                  |

FUENTE: De Nevers, N. 2000. *Air Pollution Control Engineering*. New York: McGraw-Hill.

<sup>4</sup> R.W. McMullen. *J. Air Pollu. Control Assoc.* **25**, No. 10 (1975): 1057.

Es de relevancia considerar significado de las claves de categoría atmosférica:

- A: Es la más inestable
- B: Es moderadamente inestable
- C: Es ligeramente inestable
- D: Clase neutral
- E: Es ligeramente estable
- F: Es la más estable

Para efectos de dispersión de contaminantes es deseable una condición atmosférica inestable ya que el movimiento vertical del aire se ve favorecido, generalmente se presenta en el día cuando la radiación origina que el aire circundante en la superficie de la tierra esté más caliente y liviano respecto al aire de la atmósfera; el movimiento constante se origina cuando el aire caliente se eleva mezclándose con el frío y pesado de la parte superior y éste tiende a bajar.

En cambio, una condición estable obstaculiza el esparcimiento de los medios contaminantes del aire puesto que el aire más caliente se encuentra encima del frío inhibiendo así la mezcla vertical; esta condición también es conocida como inversión térmica.



Tabla 6. Valores de las constantes para el cálculo de  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  como una función de la distancia en la dirección del viento y de la condición de estabilidad

| <i>Estabilidad</i> | <i>x ≤ 1 km</i> |          |          |          | <i>x &gt; 1 km</i> |          |          |
|--------------------|-----------------|----------|----------|----------|--------------------|----------|----------|
|                    | <i>a</i>        | <i>c</i> | <i>d</i> | <i>f</i> | <i>c</i>           | <i>d</i> | <i>f</i> |
| A                  | 213             | 440.8    | 1.941    | 9.27     | 459.7              | 2.094    | -9.6     |
| B                  | 156             | 106.6    | 1.149    | 3.3      | 108.2              | 1.098    | 2        |
| C                  | 104             | 61       | 0.911    | 0        | 61                 | 0.911    | 0        |
| D                  | 68              | 33.2     | 0.725    | -1.7     | 44.5               | 0.516    | -13      |
| E                  | 50.5            | 22.8     | 0.678    | -1.3     | 55.4               | 0.305    | -34      |
| F                  | 34              | 14.35    | 0.740    | -0.35    | 62.6               | 0.180    | -48.6    |

FUENTE: D. O. Martin. *J. Air Pollu. Control Assoc.* **26**, No. 2 (1976): 145.

## 5.2 Cálculo de la elevación de la pluma

La pluma que sale de la chimenea, antes de empezarse a dispersar, sufrirá una elevación como consecuencia de la cantidad de movimiento vertical producido cuando éstos salen de la chimenea con una velocidad específica y de que a temperaturas altas los gases cuentan con una capacidad de flotación

Los factores que se consideran en el cálculo de la elevación del penacho son: características de ésta, condiciones meteorológicas, naturaleza física y química del efluente. Se han realizado diferentes estudios para determinarla, entre los cuales se puede mencionar el realizado por Carson y Moses quienes efectuaron una comparación de resultados obtenidos aplicando diferentes ecuaciones que como característica común entre ellas se tiene que en sus términos se considera la cantidad de movimiento vertical del gas de la chimenea causado por su velocidad ( $V_s$ ); otro factor considerado es la flotación térmica motivada por el hecho de que la temperatura del gas de la chimenea ( $T_s$ ) y la temperatura ambiental ( $T_a$ ) son diferentes. La conclusión del trabajo de los científicos antes mencionados, Carson y Moses, se resume a través de la siguiente correlación:

$$\Delta h = -0.029 \frac{V_s d}{u} + 2.62 \frac{(Q_h)^{1/2}}{u} \quad \text{Ec. (5.7)}$$

en donde:

$\Delta h$ : Elevación de la pluma en m

$V_s$ : Velocidad de salida del gas de la chimenea en m/s

$d$ : Diámetro de salida de la chimenea en m

$u$ : Velocidad del viento a la altura de la chimenea en m/s

$Q_h$ : Tasa de emisión de calor en KJ/s

Por otro lado, para determinar  $Q_h$  se tiene:

$$Q_h = \dot{m} C_p (T_s - T_a) \quad \text{Ec. (5.7.1)}$$

en donde:

$\dot{m}$ : Flujo másico del gas en la chimenea en Kg/s

$C_p$ : Calor específico a presión constante del gas de la chimenea en KJ/Kg·K

$T_s$ : Temperatura de salida a la salida del gas de la chimenea en K

$T_a$ : Temperatura del aire atmosférico a la altura de la chimenea en K

Para la determinación del flujo másico que pasa a través de la chimenea se tiene que:

$$\dot{m} = \frac{\pi d^2 V_s P}{4RT_s} \quad \text{Ec. (5.7.2)}$$

en donde:

$P$ : Presión barométrica a la salida de la chimenea en KPa

La simbología de los términos restantes es la misma que se describió anteriormente. Además, es importante mencionar que la correlación de Carson y Moses puede considerar la condición atmosférica: inestable, neutral y estable; las ecuaciones son:

- Condición inestable:  $\Delta h = 3.47 \frac{V_s d}{u} + 5.15 \frac{Q_h^{0.5}}{u}$  Ec. (5.7.3)

- Condición neutral:  $\Delta h = 0.35 \frac{V_s d}{u} + 2.64 \frac{Q_h^{0.5}}{u}$  Ec. (5.7.4)

- Condición estable:  $\Delta h = -1.04 \frac{V_s d}{u} + 2.24 \frac{Q_h^{0.5}}{u}$  Ec. (5.7.5)

Otro estudio significativo en cuanto a la elevación de la pluma se refiere, es el realizado por Thomas, Carpenter y Colbaugh, cuyo trabajo estuvo enfocado principalmente a alturas de tamaño significativo localizadas en instalaciones que generan electricidad, y en el cual utilizaron diez ecuaciones para determinar la flotabilidad de la pluma, su conclusión fue que la correlación propuesta por Holland presenta una aproximación adecuada a sus observaciones aunque tiende a subestimar la elevación de la pluma; la ecuación es la siguiente:

$$\Delta h = \frac{V_s d}{u} \left[ 1.5 + 2.68 \times 10^{-3} P d \left( \frac{T_s - T_a}{T_s} \right) \right] \quad \text{Ec. (5.8)}$$

Su nomenclatura es la misma para la correlación (5.7), sin embargo, la presión ( $P$ ) debe estar en milibares. Cabe recalcar que presenta mayor exactitud en el caso de chimeneas con alturas considerables. Asimismo, una variante de la ecuación de Holland es:

$$\Delta h = \frac{V_s d}{u} \left[ 1.5 + 0.0096 \frac{Q_h}{V_s d} \right] \quad \text{Ec. (5.8.1)}$$

Otra correlación que suele utilizarse para el cálculo de la flotabilidad de la pluma es la propuesta por Concawe, la cual es la siguiente:

$$\Delta h = 2.71 \frac{Q_h^{1/2}}{u^{3/4}} \quad \text{Ec. (5.9)}$$

La nomenclatura no presenta diferencias con las formulaciones matemáticas antes mencionadas. Por otro lado, la ecuación (5.9) fue modificada por Thomas, Carpenter y Colbaugh y el resultado fue:

$$\Delta h = 4.71 \frac{Q_h^{0.444}}{u^{0.694}} \quad \text{Ec. (5.9.1)}$$

Por otro lado, la Agencia de Protección Ambiental de los Estados Unidos (EPA, en sus siglas en inglés) utiliza la correlación de Briggs para la estimación de la flotabilidad de la pluma la cual ha sido modificada con el uso de datos empíricos y su utilización presenta los mejores resultados respecto a las demás ecuaciones en el caso de estudios en plantas que utilizan carbón; la ecuación es la siguiente:

$$\Delta h = \frac{114CF^{1/3}}{u} \quad \text{Ec. (5.10)}$$

en donde la constante 114 tiene unidades de  $m^{2/3}$  y F se calcula con la fórmula:

$$F = \frac{gV_s d^2 (T_s - T_a)}{4T_a} \quad \text{Ec. (5.10.1)}$$

siendo  $g$  la aceleración de la gravedad. Asimismo  $C$  se determina con la siguiente expresión:

$$C = 1.58 - 41.4 \left( \frac{\Delta\theta}{\Delta z} \right) \quad \text{Ec. (5.10.2)}$$

en donde:

$\left( \frac{\Delta\theta}{\Delta z} \right)$ : gradiente de temperatura potencial en K/m

La utilidad de la ecuación de Briggs radica en que el gradiente de temperatura potencial proporciona la flexibilidad de hacer un ajuste de la condición de estabilidad atmosférica.

### 5.3 Corrección de la velocidad

La localización de árboles y presencia de edificios son algunos de los factores que modifican el perfil de velocidad vertical del viento ya que la rugosidad de la superficie ocasiona fricción y afecta el movimiento del aire; por lo tanto es significativo tomar en cuenta la variación de la velocidad del viento respecto al tipo de suelo, urbano o rural, en el cual se esté haciendo la determinación de difusión de un contaminantes. También hay que considerar un ajuste de dicha velocidad ya que su medición se efectúa a 10 m y la fuente virtual, como se mencionó anteriormente, se localiza a una altura de la chimenea que es puede ser diferente a la convenida internacionalmente.

La siguiente correlación representa una opción para corregir la velocidad del viento ( $U$ ), en base al tipo de suelo y altura en donde se ubica la fuente de emisión:

$$U_2 = U_1 \left( \frac{H_2}{H_1} \right)^n \quad \text{Ec. (5.11)}$$

en donde:

$U_1$ : Velocidad del viento a la altura de referencia en m/s

$U_2$ : Velocidad del viento a la altura efectiva de la chimenea en m/s

$H_1$ : Altura de referencia en m

$H_2$ : Altura efectiva de la chimenea en m

$n$ : Constante

La constante  $n$  se obtiene a partir de la siguiente tabla:

Tabla 7. Valores de la constante  $n$  empleada en la ecuación 5.11

| <b>Estabilidad<br/>atmosférica</b> | <b>Superficie<br/>rural</b> | <b>Superficie<br/>urbana</b> |
|------------------------------------|-----------------------------|------------------------------|
|                                    | $n$                         | $n$                          |
| <i>A</i>                           | 0.10                        | 0.15                         |
| <i>B</i>                           | 0.15                        | 0.15                         |
| <i>C</i>                           | 0.20                        | 0.20                         |
| <i>D</i>                           | 0.25                        | 0.25                         |
| <i>E</i>                           | 0.25                        | 0.40                         |
| <i>F</i>                           | 0.30                        | 0.60                         |

#### **5.4 Aplicación para varias fuentes puntuales**

Las ecuaciones (5.1, 5.2, 5.3) sólo se aplican para una fuente de emisión, sin embargo, es posible emplear la ecuación (4.3) para varias fuentes urbanas, para cada una de éstas se aplica el modelos de dispersión gaussiano con el fin de calcular la concentración en el receptor.