

# CAPÍTULO 5

## EFFECTOS DE ESBELTEZ

### 5.1 Introducción

Se entiende por efecto de esbeltez la reducción de resistencia de un elemento sujeto a la compresión axial o a flexocompresión, debida a que la longitud del elemento es grande en comparación con las dimensiones de su sección transversal. Para ilustrar este efecto, considérese una columna articulada en sus extremos, sujeta a carga axial y momento flexionante (figura 5.1 a).

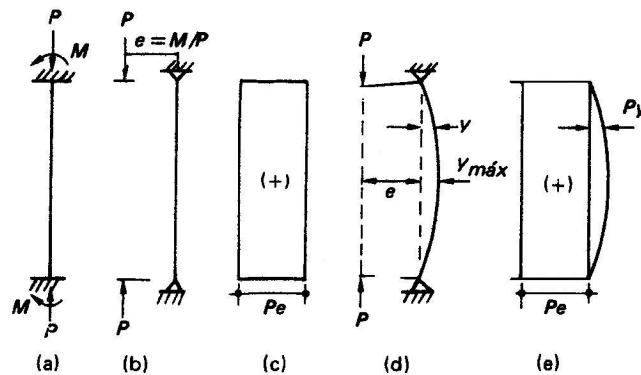


Figura 5.1 Momentos adicionales en una columna por efecto de esbeltez.

Esta columna es equivalente al sistema mostrado en la figura (5.1 b), y tiene el diagrama de momentos flexionantes de la figura (5.1 c). Al aplicar la carga  $P$  al sistema de la figura (5.1 b), éste se deforma, como se muestra en la figura (5.1 d), y, como consecuencia de esta deformación, aumenta la distancia de la línea de acción de las cargas  $P$  al eje de la columna, lo cual equivale a que crezca la

excentricidad de la carga en una cantidad  $Py$ , por lo tanto, el momento flexionante real en una sección cualquiera de la columna es:

$$M = Pe + Py = P ( e + y ) \quad (5.1)$$

El momento es máximo, para este ejemplo, a la mitad de la altura, donde alcanza el valor:

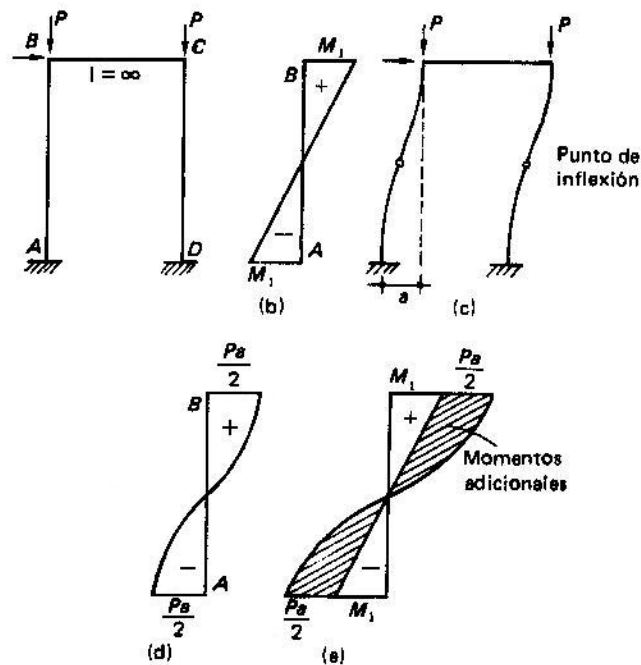
$$M = P ( e + y_{\max} ) \quad (5.1)$$

Como consecuencia de los momentos adicionales  $Py$ , la resistencia del elemento se reduce respecto a la resistencia que tendría si solo se aplicase el momento  $Pe$ . Esta reducción de resistencia se conoce como efecto de esbeltez.

Éste se presenta cualquiera que sea la longitud del elemento, pero es importante únicamente en elementos cuya relación longitud-peralte es grande, o sea, en elementos esbeltos. Solo en estos elementos la magnitud de los momentos adicionales,  $Py$ , es significativa en relación con los momentos  $Pe$ .

La reducción de resistencia por esbeltez puede deberse también a desplazamiento lateral relativo entre los dos extremos de la columna, como sucede en marcos no contraventeados sujetos a carga lateral o que presentan asimetría en carga o en geometría. En la figura (5.2 a) se muestra un marco de este tipo. La columna A-B de este marco tiene el diagrama de momentos de primer orden mostrado en la figura (5.2 b). (se entiende por momentos de primer orden los que no consideran

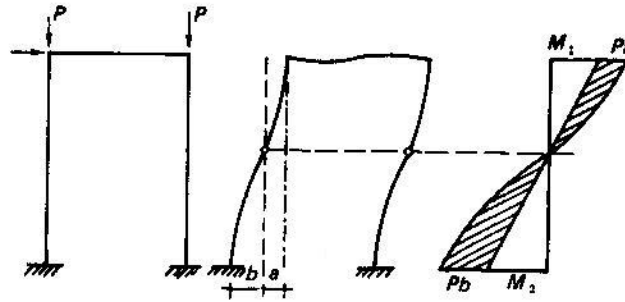
las deformaciones de la columna). Por efecto del desplazamiento lateral relativo entre los extremos de la columna (figura (5.2 c)) se presentan en la columna A-B los momentos de segundo orden mostrados en la figura (5.2 d). (se entiende por momentos de segundo orden, los momentos adicionales debido a las deformación de la columna). El diagrama de momentos totales es el de la figura (5.2 e).



**Figura 5.2** Momentos adicionales en una columna por desplazamiento lateral relativo.

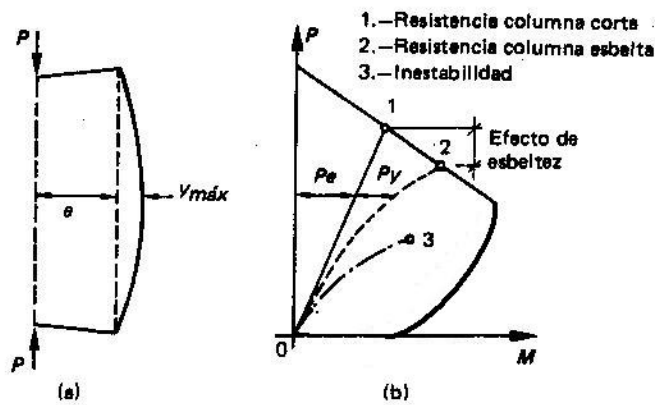
El caso representado en la figura (5.2) corresponde a un ejemplo hipotético en el que la rigidez de la viga superior es infinita, o sea, que la columna esta empotrada en sus dos extremos. Cuando la rigidez de la viga es finita, los momentos adicionales son diferentes en los dos extremos de la columna, como se muestra en la figura (5.3). Los momentos adicionales se pueden calcular aplicando la carga  $P$  en el punto de inflexión de la columna, y multiplicando dicha carga por el desplazamiento de los extremos respecto al punto de inflexión. La reducción de

resistencia por esbeltez es mayor cuando los extremos de la columna pueden sufrir desplazamiento lateral relativo que cuando están restringidos contra el mencionado desplazamiento.



**Figura 5.3** Momentos adicionales en una columna por efecto del desplazamiento lateral relativo.

En la figura (5.4 b) se ha trazado con línea llena el diagrama de interacción de una columna corta en la que los efectos de esbeltez son despreciables. Si en esta columna se aumenta la carga progresivamente, manteniendo constante la excentricidad, las combinaciones de  $P$  y  $M$  quedan representadas por la recta 0-1. La intersección de la recta 0-1 con el diagrama de interacción representa la resistencia de la columna corta.



**Figura 5.4** Comparación del comportamiento entre columna corta y una columna esbelta.

Si en una columna esbelta, como la de la figura (5.4 a), la carga aumenta progresivamente en la misma forma, las combinaciones de  $P$  y  $M$  quedan representadas por la curva 0-2. La diferencia en las abscisas de los puntos de las dos líneas correspondientes a un nivel dado de carga, se debe precisamente a los momentos adicionales  $P_y$ . La resistencia de la columna esbelta esta representada por la intersección de la línea 0-2 con el diagrama de interacción. Como puede verse en la figura, es menor que la resistencia de la columna corta.

En la figura (5.4 b) se ha indicado también, con línea punteada, la historia de carga de una columna sumamente esbelta que falla por inestabilidad. La característica de este tipo de falla, es que la carga aplicada alcanza su valor máximo antes de que la línea que representa la historia de carga corte al diagrama de interacción. La falla, en este caso, ocurre por pandea súbito del elemento, mientras que en el caso anterior, la falla ocurre por aplastamiento del concreto, en forma similar a la falla de una columna corta. Debido a que los elementos de concreto reforzado son de sección transversal relativamente grande, es raro que fallen por inestabilidad. De manera ordinaria, se presenta únicamente una reducción de resistencia por efecto de esbeltez. En este capítulo se describen métodos para calcular esta reducción de resistencia.

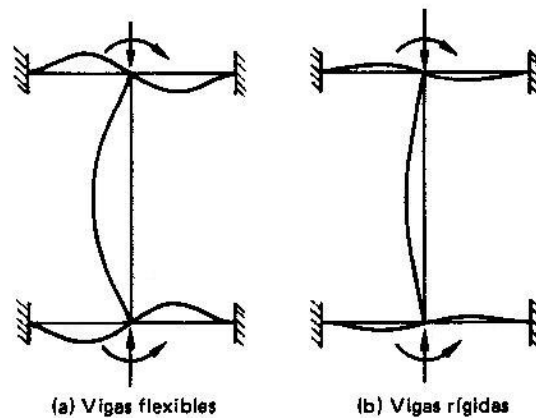
## **5.2 Comportamiento y variables principales**

El comportamiento de una columna que forma parte de una estructura de concreto reforzado es complejo, debido a que las estructuras generalmente son monolíticas y a que las columnas están restringidas por otros elementos estructurales que

influyen en su comportamiento. Se han realizado ensayos de columnas esbeltas que forman parte de marcos de concreto. Sin embargo, la interpretación de su comportamiento requiere un estudio previo del comportamiento de estructuras hiperestáticas. Solo se describirá aquí la influencia de algunas variables sobre la resistencia de columnas esbeltas que forman parte de estructuras.

### 5.2.1 Rigidez a flexión de vigas que restringen a la columna

Mientras mayor sea esta rigidez a flexión, es mayor el grado de empotramiento o restricción de la columna en sus extremos y, por tanto, son menores las deflexiones de la columna y los momentos adicionales  $P\delta$ . Este efecto puede verse en la figura (5.5), en la cual se comparan una columna restringida por vigas flexibles (figura (5.5 a)) y otra restringida por vigas rígidas (figura (5.5 b)).



**Figura 5.5** Efecto de la rigidez flexionante de las vigas que restringen a una columna.

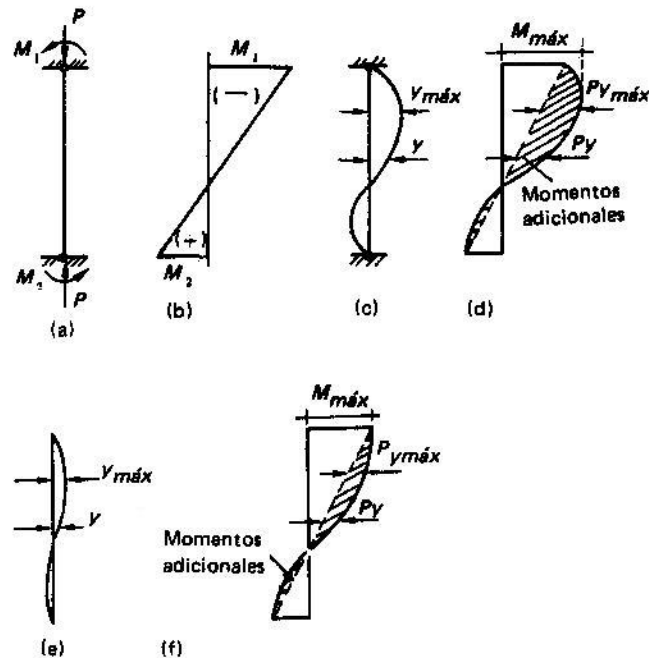
### 5.2.2 Rigidez a flexión de la columna

La rigidez a flexión de la propia columna tiene influencia sobre la reducción de resistencia por esbeltez, ya que mientras mas rígida sea la columna, son menores sus deflexiones y, por lo tanto, el valor de los momentos adicionales  $P_y$ . La rigidez a flexión de la columna depende principalmente del tamaño de la sección transversal, del modulo de elasticidad del concreto, del porcentaje de refuerzo longitudinal y de la longitud de la columna. El efecto combinado del tamaño de la sección transversal y de la longitud, suele tomarse en cuenta en los métodos de dimensionamiento mediante el parámetro llamado esbeltez de la columna, que se define como la relación entre la longitud y el radio de giro de la sección transversal. A veces, la esbeltez se define también en función de la relación entre la longitud y la dimensión menor de la columna.

### 5.2.3 Relación de excentricidades en los dos extremos de la columna y tipo de curvatura.

La relación de excentricidades, o sea, la relación entre los momentos en los dos extremos de la columna, influye en la magnitud de las deflexiones y, por tanto, en los momentos adicionales por esbeltez. Considérese, por ejemplo, el caso mostrado en la figura (5.6 a), en que los momentos de apoyo sobre barra son del mismo signo, y el diagrama de momentos flexionantes de primer orden es el indicado en la figura (5.6 b). La columna deformada tiene la forma mostrada en la figura (5.6 c), y el diagrama final de momentos, que se obtiene sumando el diagrama de la figura (5.6 b) con los momentos adicionales  $P_y$ , es el mostrado en la figura (5.6 d). Puede verse que, en este caso, el momento máximo de primer

orden y el momento máximo adicional,  $P y_{\text{máx}}$ , ocurren en secciones diferentes de la columna. Por consiguiente, el momento máximo total no es la suma de los momentos máximos de primer y segundo orden, sino un valor menor.



**Figura 5.6** Efecto de esbeltez en columnas con doble curvatura.

Para que haya reducción de resistencia por esbeltez en columnas de este tipo, es necesario que los momentos adicionales sean lo suficientemente grandes para desplazar la sección de momento máximo, como se muestra en la figura (5.6 d). Puede suceder que la columna no sea lo suficientemente esbelta para que ocurra este desplazamiento. En este caso no habrá reducción de resistencia, como se muestra en las figuras (5.6 e) y (5.6 f). Cuando hay reducción de resistencia, esta es relativamente pequeña, ya que el momento máximo no difiere mucho del momento aplicado en el extremo.



Considérese ahora el caso en que los momentos de apoyo sobre barra son iguales y de signo contrario (figura (5.7 a)). Aquí, el momento flexionante de primer orden es constante a lo largo de la columna (figura (5.7 b)), y la columna se deforma con curvatura simple (figura (5.7 c)). El momento máximo es igual a la suma del momento constante y el momento adicional al máximo  $P\delta_{máx}$ , que ocurre a la mitad de la altura (figura (5.7 d)). En estas columnas siempre hay reducción de resistencia por esbeltez, cualquiera que sea su longitud, y esta reducción es mayor que en el caso de la figura (5.6), puesto que el momento máximo total es la suma de los dos momentos máximos.

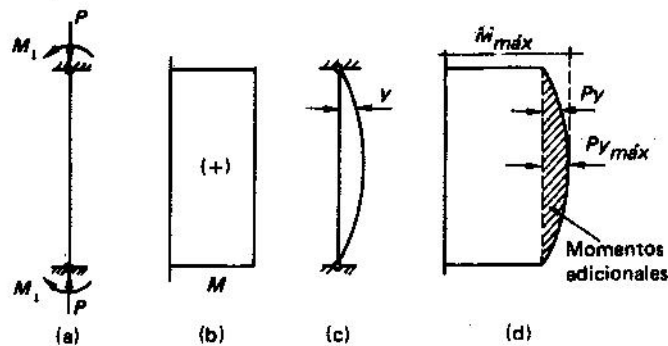


Figura 5.7 Efecto de esbeltez en columnas con curvatura simple

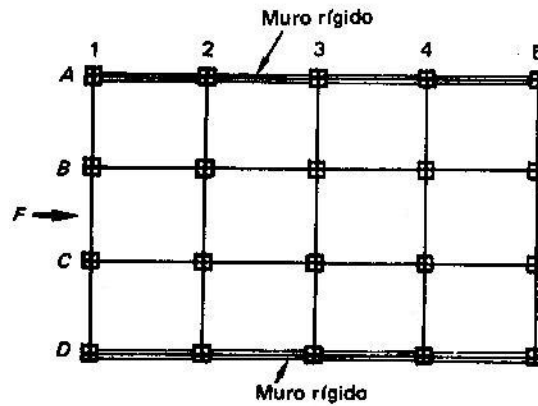
#### 5.2.4 Desplazamiento lateral relativo entre los dos extremos de la columna.

Se ha mencionado que las columnas pueden formar parte de marcos que no tengan posibilidad de sufrir deformaciones laterales, por estar contraventeados o unidos a otras estructuras muy rígidas, o de marcos cuya resistencia a cargas laterales dependa exclusivamente de la resistencia a flexión de sus miembros, y que, por lo tanto, puedan sufrir deformaciones laterales. También se ha

mencionado que cuando los marcos pueden desplazarse lateralmente los momentos adicionales son mayores que cuando los marcos no pueden hacerlo. Esto se debe a que, en el primer caso, los momentos adicionales máximos se presentan generalmente donde son máximos los momentos de primer orden, como puede verse en las figuras (5.2) y (5.3).

La magnitud del desplazamiento lateral relativo depende de la rigidez a flexión de las columnas y de las vigas de los marcos. Si la rigidez a flexión de las vigas es pequeña, en relación con la rigidez a flexión de las columnas, la rotación de los extremos de las columnas es grande y aumenta, por lo tanto, el desplazamiento lateral relativo. El desplazamiento lateral también depende del tipo de carga que actúa sobre el marco. Por lo general, es mayor el desplazamiento cuando el marco está sujeto a cargas laterales que cuando está sujeto únicamente a cargas verticales.

Para evaluar el desplazamiento lateral debe considerarse la estructura en conjunto y no solamente un marco separado. Por ejemplo, la estructura de la figura 5.8, en la que existen muros rígidos en los ejes  $A$  y  $D$ , si actúa la fuerza horizontal  $F$  sobre dicha estructura, los marcos  $B$  y  $C$  no sufrirán desplazamientos laterales importantes, a pesar de no estar contraventados, ya que lo impiden los marcos  $A$  y  $D$  que son muy rígidos por la presencia de muros. Se supone en este ejemplo que existe una losa de piso lo suficientemente rígida para obligar a que todos los marcos se deformen en conjunto.



**Figura 5.8** Estructura con muros rígidos

### 5.2.5 Duración de la carga

Cuando la carga actúa por un periodo prolongado de tiempo, las deflexiones aumentan por efecto de la contracción y el flujo plástico del concreto. Por lo tanto, aumentan también los momentos adicionales y la reducción de resistencia por efecto de esbeltez. La influencia de la duración de la carga es más importante mientras mayores sean las deflexiones adicionales.

### 5.3 Métodos de dimensionamiento

Del análisis anterior sobre la influencia de las distintas variables en la reducción de resistencia por esbeltez, puede deducirse que la solución rigurosa del problema consiste en calcular las deflexiones adicionales y los momentos de segundo orden. La suma de estos momentos y de los de primer orden es igual a los momentos totales de diseño. Sin embargo, el cálculo de los momentos de segundo orden, que se conoce con el nombre de análisis estructural de segundo

orden, resulta demasiado laborioso para fines de dimensionamiento de estructuras comunes.

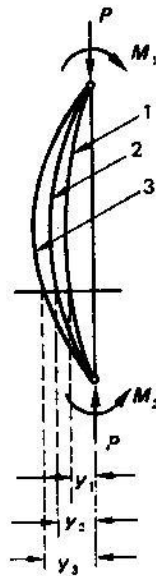
Algunas de las razones que complican este análisis son las siguientes. Es difícil evaluar con precisión las deflexiones de los elementos de la estructura en todas las etapas de carga, ya que debe tomarse en cuenta el comportamiento inelástico del concreto reforzado y los efectos del agrietamiento, contracción y flujo plástico. Las rigideces relativas de los elementos varían con la etapa de carga, ya que algunos alcanzan su momento de fluencia antes que otros y, por lo tanto, pierden su rigidez más rápidamente.

El análisis debe hacerse por aproximaciones sucesivas, ya que los momentos adicionales producen deflexiones adicionales, las que a su vez incrementan nuevamente los momentos.

Por ejemplo, si consideramos que en la figura 5.9, la línea 1 representa la columna deformada por efectos de los momentos de primer orden; los momentos adicionales,  $P_y_1$ , incrementan las deformaciones, y la columna deformada queda representada ahora por la línea 2, pero esto incrementa los momentos adicionales que ahora tienen el valor  $P_y_2$ ; las deflexiones también vuelven a aumentar al aumentar los momentos adicionales, y así sucesivamente.

El procedimiento de aproximaciones sucesivas se realiza calculando los momentos y las deformaciones de la manera descrita, hasta que los incrementos

entre dos etapas sucesivas sean muy pequeños en comparación con los momentos totales. Puede suceder que el procedimiento no converja y entonces la estructura es inestable.

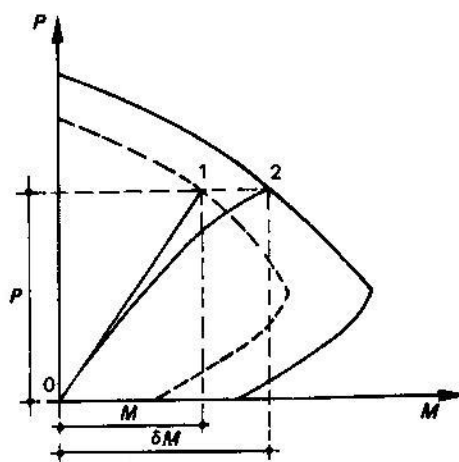


**Figura 5.9** Incrementos sucesivos de deformaciones debidos a momentos de segundo orden.

El dimensionamiento de columnas esbeltas en estructuras comunes suele hacerse con métodos simplificados, en los que no es necesario desarrollar análisis de segundo orden. Dichos métodos simplificados pueden reunirse en tres grupos: Método de amplificación de momentos, Método del momento complementario y Método del factor de reducción. Nosotros nos dedicaremos a estudiar el método de amplificación de momentos.

### 5.3.1 Método de amplificación de momentos

Este método consiste en obtener el valor de la carga axial,  $P$ , y el momento flexionante,  $M$ , en las columnas de una estructura por medio de un análisis de primer orden, y dimensionar las columnas para el mismo valor de  $P$  y para un momento amplificado,  $dM$ , donde  $d$  es un factor siempre mayor que la unidad. En la figura 5.10 se ilustra este concepto. Si despreciáramos el efecto de esbeltez, la columna se dimensionaría para los valores de  $P$  y  $M$ , y su resistencia sería la correspondiente al punto 1 del diagrama de interacción mostrado con la línea punteada. Los incrementos de carga con un valor constante de la excentricidad estarían representados por puntos sobre la línea recta 0-1.



**Figura 5.10** Valores de dimensionamiento en los métodos de amplificación de momentos.

Para tomar en cuenta el efecto de esbeltez, la columna se diseña para los valores  $P$  y  $dM$ , y su resistencia es la que corresponde al punto 2 del diagrama de interacción mostrado con la línea llena. Los incrementos de carga están

representados por los puntos sobre la línea 0-2, en la cual la excentricidad aumenta con el nivel de carga, puesto que el valor de  $d$  depende, en estos métodos, del valor de la carga  $P$ .

## 5.4 Cálculo de los efectos de esbeltez

### 5.4.1 Método del Reglamento ACI

En apego al reglamento del ACI, pueden calcularse los efectos de esbeltez con un momento complementario que está basado en el análisis elástico de elementos esbeltos sujetos a carga axial y flexión, los cuales se denominan frecuentemente “vigas columna”. El análisis riguroso de estos elementos se puede efectuar aplicando una ecuación diferencial de segundo orden o un procedimiento numérico de aproximaciones sucesivas. Sin embargo, al análisis simplificado indica que el momento máximo en una viga-columna que se deforma en curvatura simple puede calcularse aproximadamente con la ecuación:

$$M_{m\acute{a}x} = M_o + \frac{P \times a_o}{1 - \left(\frac{P}{P_c}\right)} \quad (5.3)$$

donde  $M_o$  y  $a_o$  son el momento y la deflexión máxima de primer orden, respectivamente,  $P$  es la carga axial, y  $P_c$  es la carga crítica de Euler.

En el caso de vigas-columna que se deforman en curvatura simple, y que tienen momentos iguales en ambos extremos, la ecuación (5.3) puede aproximarse por la ecuación:

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{M_o}{1 - \left(\frac{P}{P_c}\right)} \quad (5.4)$$

y para otros casos la ecuaci3n:

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{C_m \times M_o}{1 - \left(\frac{P}{P_c}\right)} \quad (5.5)$$

donde  $C_m$  es un factor que hace equivalente el diagrama de momentos flexionantes del elemento, al diagrama de un elemento con momentos iguales en ambos extremos. La ecuaci3n (5.5) puede expresarse de la forma:

$$M_{m\acute{a}x} = \mathbf{d} M_o \quad (5.6)$$

donde

$$\mathbf{d} = \frac{C_m}{1 - \left(\frac{P}{P_c}\right)} \quad (5.7)$$

El t3rmino  $\mathbf{d}$  de la ecuaci3n (5.6) es el factor de amplificaci3n de momentos. Los resultados de an3lisis te3ricos y las mediciones efectuadas en ensayos de marcos de concreto reforzado, indican una conveniencia de distinguir entre los momentos producidos por cargas que no provocan desplazamientos laterales de la estructura



y los momentos producidos por cargas que sí los provocan, y de establecer factores de amplificación distintos para ambos tipos de momentos. Por lo tanto, el Reglamento ACI establece que los elementos se dimensionen usando la carga axial,  $P_u$ , afectada del factor de carga y obtenida de un análisis elástico convencional de primer orden, y un momento amplificado  $M_c$  definido por la ecuación:

$$M_c = \delta_b M_{2b} + \delta_s M_{2s} \quad (5.8)$$

$M_{2b}$  es el mayor de los momentos en los extremos del elemento producido por cargas que no provocan desplazamiento lateral apreciable y  $M_{2s}$  es el correspondiente a cargas que pueden provocar desplazamiento. Al final de esta sección se hace un comentario sobre lo que puede considerarse un desplazamiento lateral apreciable.

Los factores de amplificación  $\delta$  quedan definidos por las siguientes ecuaciones:

$$d_b = \frac{C_m}{1 - \left( \frac{P_u}{fP_c} \right)} \geq 1 \quad (5.9)$$

$$d_s = \frac{C_m}{1 - \left( \frac{\Sigma P_u}{f\Sigma P_c} \right)} \geq 1 \quad (5.10)$$

Para estructuras no contraventeadas, o sea, que pueden sufrir desplazamientos laterales, deben calcularse  $d_b$  y  $d_s$ ; para estructuras contraventeadas puede considerarse que  $d_s$  vale cero. Puede verse que la ecuación (5.9) es igual a la (5.7), con la inclusión únicamente del factor de reducción  $f$  que tiene los valores indicados en la sección 3.3.1 para miembros sujetos a flexocompresión. La ecuación (5.10) se deriva también de la (5.7), haciendo  $C_m$  igual a uno y sumando las cargas  $P_u$  y  $P_c$  de todas las columnas de un piso en vez de considerar cada columna en forma aislada. Esto último se hace para tomar en cuenta que cuando las columnas están unidas por una losa rígida que trabaja como diafragma horizontal, todas tienen el mismo desplazamiento lateral. A continuación se presenta la forma de valuar  $C_m$  y  $P_c$ , términos que aparecen en la ecuaciones (5.9) y (5.10).

Valuación de  $C_m$ :

En el método ACI se proponen las siguientes expresiones para calcularlo:

- 1) Para elementos sin posibilidad de desplazamiento lateral relativo y sin cargas transversales entre sus apoyos:

$$C_m = 0.6 + 0.4 \left( \frac{M_{1b}}{M_{2b}} \right) \quad (5.11)$$

- 2) Para elementos con posibilidad de desplazamiento lateral relativo o con cargas transversales entre sus apoyos:

$$C_m = 1 \quad (5.12)$$

Los momentos  $M_{1b}$  y  $M_{2b}$  son los momentos flexionantes en los extremos del elemento, siendo  $M_{2b}$  el momento numéricamente mayor. El término  $0.4 (M_{1b} / M_{2b})$  es positivo si el elemento se flexiona en curvatura simple y negativo si se flexiona en curvatura doble. Cabe observar que cuando  $M_{1b} = M_{2b}$ , y el elemento se flexiona en curvatura simple, el valor de  $C_m$  es igual a la unidad, y la ecuación (5.5) se transforma en la ecuación (5.4). Para el caso de columnas con desplazamiento lateral relativo entre sus extremos, el valor de  $C_m$  siempre es igual a la unidad, ya que en estas columnas el momento máximo de segundo orden ocurre en la misma sección que el momento máximo de primer orden, como sucede también en columnas con curvatura simple y momentos iguales en sus extremos.

Valuación de  $P_c$ :

La siguiente es la ecuación de la carga crítica de pandeo o carga crítica de Euler de elementos de comportamiento lineal

$$P_c = \frac{P^2 \times E \times I}{(kl_u)^2} \quad (5.13)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material,  $I$  es el menor momento de inercia de la sección transversal, y  $kl_u$  es la longitud efectiva de pandeo. La ecuación (5.13) no es rigurosamente aplicable a elementos de concreto reforzado,

ya que su comportamiento no es lineal. Sin embargo, puede usarse, en forma aproximada, si el valor de  $EI$  se calcula con una de las siguientes ecuaciones:

$$EI = \frac{\left( \frac{E_c \times I_g}{5} \right) + E_s \times I_s}{1 + b_d} \quad (5.14)$$

ó

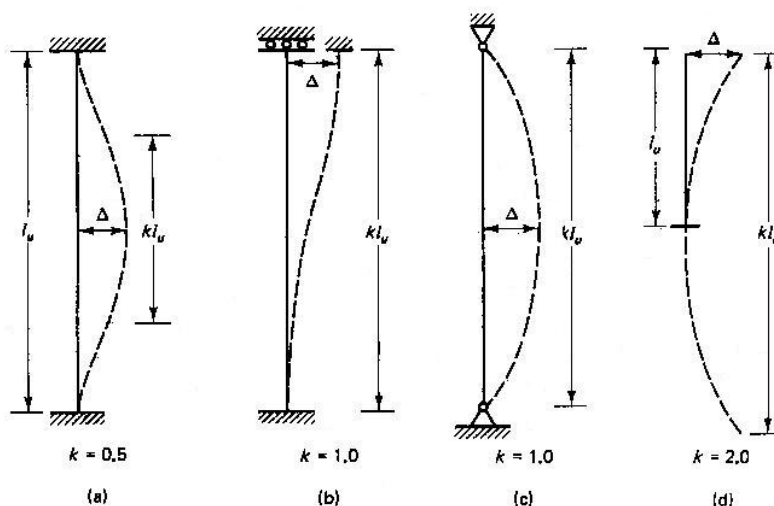
$$EI = \frac{\left( \frac{E_c \times I_g}{2.5} \right)}{1 + b_d} \quad (5.15)$$

En estas ecuaciones,  $E_c$  es el módulo de elasticidad del concreto,  $E_s$ , el módulo de elasticidad del acero,  $I_g$ , el momento de inercia de la sección gruesa,  $I_s$ , el momento de inercia del refuerzo respecto al eje centroidal de la columna, y  $b_d$  es la relación entre el momento producido por la carga muerta y el momento total.

La ecuación (5.15) es más sencilla de usar que la ecuación (5.14) pero no se recomienda para columnas con relaciones muy elevadas de refuerzo. El término  $b_d$  toma en cuenta que la rigidez del elemento, la cual se puede medir en términos de  $EI$ , se reduce bajo la acción de cargas permanentes de larga duración.

La longitud efectiva de pandeo,  $kl_u$ , depende del grado de restricción de la columna en sus extremos y de la posibilidad de que exista desplazamiento lateral relativo. En la figura (5.11) se muestran las longitudes efectivas de pandeo de

columnas con condiciones ideales de restricción (perfectamente articulada o perfectamente empotrada).



**Figura 5.11** Longitud efectiva de pandeo para diferentes condiciones de apoyo.

En estructuras de concreto reforzado, las columnas se encuentran restringidas parcialmente por los sistemas de piso, sin que existan articulaciones o empotramientos perfectos. El grado de restricción depende de la relación entre las rigideces de las columnas y del sistema de piso, la cual puede definirse en la siguiente forma:

$$j = \frac{\sum K_{col}}{\sum K_{piso}} \quad (5.16)$$

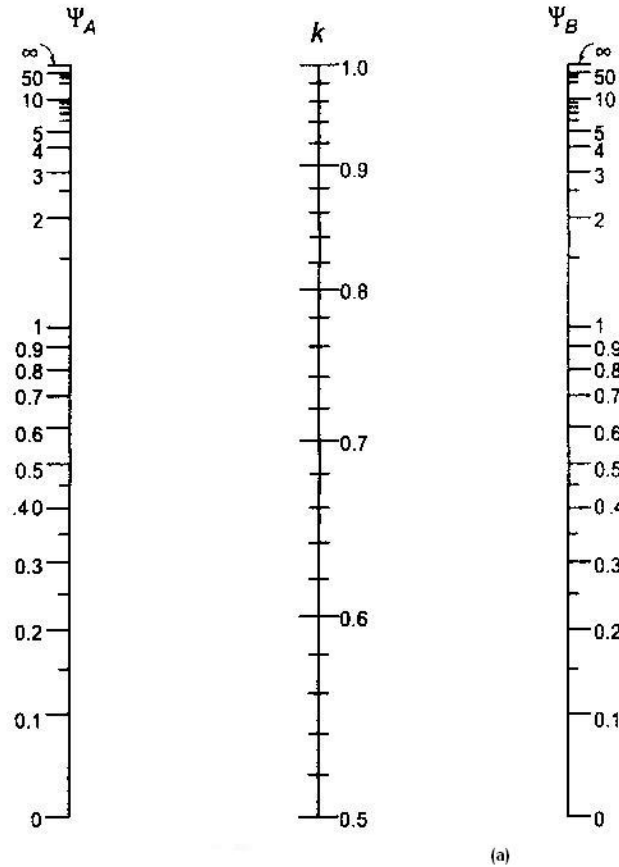
En esta ecuación,  $K$  es la rigidez  $EI/L$ ;  $\sum K_{col}$  se refiere a las columnas que concurren en un nudo en la estructura; y  $\sum K_{piso}$  se refiere a los elementos que forman el sistema de piso y que están contenidos en el plano del marco estructural

que se analiza; o sea, que no se incluyen en la suma las rigideces de las vigas perpendiculares al marco.

El calculo de la longitud efectiva de pandeo en función del grado de restricción,  $j$ , puede hacerse utilizando los nomogramas de la figura (5.12), en los que  $j_A$  y  $j_B$  son los valores de  $\varphi$  en los extremos  $A$  y  $B$  de la columna. Para valores dados de  $j_A$  y  $j_B$ , las longitudes efectivas son mayores para columnas de marcos con posibilidad de desplazamiento lateral. Esto refleja el hecho de que los momentos de segundo orden son mayores en ese tipo de marcos, como ya se ha señalado anteriormente. La longitud efectiva de las columnas de estos marcos tiende a infinito cuando la rigidez del sistema de piso tiende a cero, o sea, cuando las columnas están articuladas. En este caso se tiene una columna inestable. En cambio, en columnas sin posibilidad de desplazamiento lateral, la longitud efectiva,  $kl_u$ , nunca es mayor que la longitud real,  $l_u$ . Los nomogramas de la figura (5.12) se desarrollaron para columnas de comportamiento lineal, pero pueden utilizarse en forma aproximada para columnas de concreto reforzado.

Una vez calculados los valores de  $C_m$  y  $P_c$ , de la manera descrita, pueden determinarse los factores de amplificación,  $d$ , con las ecuaciones (5.9) y (5.10), y el momento máximo de diseño con la ecuación (5.8). En el caso de que los momentos máximos se presenten en los extremos de las columnas, los momentos de primer orden en los extremos del sistema de piso también deben incrementarse

con el mismo factor de amplificación, ya que la resistencia del sistema de piso debe ser congruente con la de las columnas.

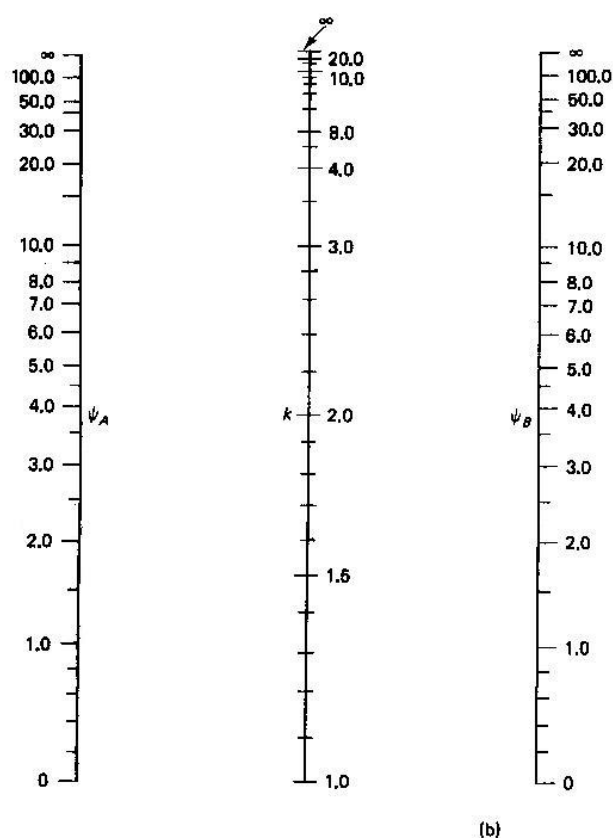


**Figura 5.12 (a)** Factores para obtener las longitudes efectivas de pandeo para marcos contraventeados.

En el reglamento del ACI se recomienda que se tomen en cuenta los efectos de esbeltez en columnas en las que el termino  $kl_u / r$  es mayor que  $34 - 12 M_{1b} / M_{2b}$ , o que 22, según se trate, respectivamente, de marcos sin desplazamiento lateral o con desplazamiento lateral. El término  $r$  es el radio de giro de la sección, que puede estimarse como 0.30 veces el lado menor para columnas rectangulares, o 0.25 veces el diámetro para columnas circulares. Cuando el valor de  $kl_u / r$  es

mayor que 100, no se permite el método simplificado descrito en esta sección, sino que debe usarse un análisis de segundo orden.

En este método se hace una diferenciación importante entre estructuras que puedan sufrir desplazamientos laterales importantes y las que no pueden. Es por lo tanto necesario distinguir ambos tipos de estructuras. Los sistemas estructurales a base de marcos no contraventeados o sin muros de cortante, que estén sujetos a cargas laterales de sismo o viento, sí sufren desplazamientos laterales y para ellas debe incluirse el factor de amplificación  $d_s$ . También debe incluirse en estructuras asimétricas en carga o geometría cuando la relación entre el desplazamiento lateral y altura de la columna es mayor de 1/1500.



**Figura 5.12 (b)** Factores para obtener las longitudes efectivas de pandeo para marcos no contraventeados.



Cuando existen contravientos o muros de cortante suficientemente rígidos se reducen los desplazamientos laterales a valores muy pequeños y entonces puede considerarse que  $d_s$  vale cero. Para calcular si los contravientos o muros de cortante son suficientemente rígidos, el comentario al Reglamento del ACI recomienda dos métodos:

1) Índice de estabilidad:

$$Q = \frac{\sum P_u \times \Delta u}{H_u \times h_s} \quad (5.17)$$

donde

$\Delta_u$  = desplazamiento lateral en el nivel de piso calculado en un análisis elástico de primer orden.

$H_u$  = fuerza cortante en el piso considerado.

$h_s$  = altura del entrepiso medida centro a centro de los pisos superior e inferior.

Si el índice de estabilidad es menor que 0.04 puede considerarse que los momentos debidos a desplazamientos laterales no exceden del 5 por ciento de los momentos de primer orden y que por lo tanto la estructura esta suficientemente contraventeada.

El segundo método consiste en calcular la rigidez de los contravientos o muros de cortante y compararla con la rigidez del sistema de columnas. Si el primero es por lo menos seis veces mayor que el segundo, la estructura puede considerarse

contraventeada. El calculo de las rigideces de los contravientos, muros de cortante y sistema de columnas puede hacerse con diversos grados de precisión.

#### 5.4.2 Método del Reglamento del Distrito Federal

Este método es semejante al del Reglamento ACI. También distingue entre estructuras que pueden desplazarse lateralmente. Sin embargo, no separa los momentos debidos a las cargas que producen el desplazamiento lateral y los momentos por cargas que no lo producen. Por lo tanto, el momento amplificado se calcula siempre con la ecuación:

$$M_c = F_a \times M_2 \quad (5.18)$$

donde  $F_a$  es el factor de amplificación y  $M_2$  es el mayor de los momentos en los extremos de la columna, o sea, es la suma de los momentos  $M_{2b}$  y  $M_{2s}$  de la ecuación (5.8).

Para miembros que no puedan desplazarse lateralmente, el factor de amplificación se calcula con la ecuación:

$$F_a = \frac{C_m}{1 - \left( \frac{P_u}{P_c} \right)} \geq 1 \quad (5.19)$$

la cual es igual a la ecuación (5.7). El término  $C_m$  se calcula con la ecuación (5.11), pero en lugar de los momentos  $M_{1b}$  y  $M_{2b}$  se usan los momentos totales  $M_1$

y  $M_2$  en los extremos de las columnas. La carga crítica,  $P_c$ , se calcula con la ecuación:

$$P_c = \frac{F_R \times P^2 \times EI}{(H')^2} \quad (5.20)$$

Esta ecuación es igual a la (5.13), usando la notación  $H'$  para la longitud efectiva de pandeo e incluyendo el factor de reducción  $F_R$ . Para calcular  $EI$ , el RCDF especifica la ecuación (5.15) únicamente.

Para miembros que puedan desplazarse lateralmente se utiliza la ecuación:

$$Fa = \frac{C_m}{1 - \left( \frac{\Sigma Pu}{f \Sigma P_c} \right)} \geq 1 \quad (5.21)$$

equivalente a la ecuación (5.10). También debe calcularse el factor de amplificación con la ecuación (5.19), como si la columna tuviera sus extremos restringidos lateralmente, y tomarse el mayor de los dos factores.

Las recomendaciones respecto a los casos en que pueden desprejarse los efectos de esbeltez, aquellos en que se puede usar el método presentado anteriormente, y a las situaciones en que se requiere un análisis de segundo orden son iguales a las del Reglamento del ACI, nada mas sustituyendo  $M_{1b}$  y  $M_{2b}$  por  $M_1$  y  $M_2$ , respectivamente.

En el RCDF, la estructura puede considerarse suficientemente contraventeada contra desplazamientos laterales si el índice de estabilidad calculado con la ecuación (5.17) es menor que 0.08, o si la rigidez de los contravientos o muros de cortante es por lo menos el 85 por ciento de la rigidez total de entrepiso.

Se establece una restricción adicional respecto a la losa considerada como diafragma horizontal; su rigidez no debe ser menor que diez veces la rigidez de entrepiso del marco a que pertenece la columna en estudio. La rigidez de un diafragma horizontal con relación a un eje de columnas se define como la fuerza que debe aplicarse al diafragma en el eje en cuestión para producir una deflexión unitaria sobre dichos ejes, estando el diafragma libremente apoyado en los elementos que dan restricción lateral.

## Ejemplo 5.1

Diseño de una columna esbelta de sección cuadrada con flexocompresión en dos direcciones

marcos no contraventeados

Datos

Pu	160 ton
Mux	11 ton-m
Muy	15 ton-m
fc	140 kg/cm <sup>2</sup>
fy	4200 kg/cm <sup>2</sup>
Fr	0,7
u	0
Ec tipo	2

rigideces

direccion x

positivo	3
negativo	0

direccion y

positivo	2
negativo	2

direccion z

positivo	2
negativo	3

nudo inferior empotramiento

seccion

altura	60 cm
base	60 cm

altura total 600 cm

Valores constantes

f <sup>'</sup> c	112 kg/cm <sup>2</sup>
f <sup>'</sup> c	95,2 kg/cm <sup>2</sup>

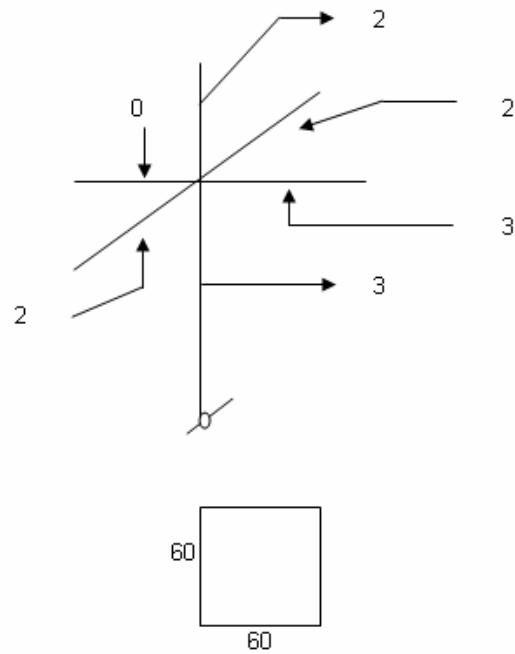
Efectos de Esbeltez

Dirección x

grado de restriccion sup	1,66666667
grado de restriccion inf	0
	0,833333333

k	1,297589467
H'	778,5536804 cm
r	17,32050808 cm
H'/r	44,9498177

deben considerarse efectos de esbeltez  
se puede usar al análisis simplificado



Factor de amplificación

Ec 94657,27653 kg/cm<sup>2</sup>  
I<sub>g</sub> 1080000 cm<sup>4</sup>  
EI 40891943461 kg/cm<sup>2</sup>  
P<sub>c</sub> 466,0777953 ton  
Fax 1,522742919

Dirección Y

grado de restriccion sup 1,25  
grado de restriccion inf 0  
0,625

k 1,234918788  
H' 740,9512731 cm  
r 17,32050808 cm  
H'/r 42,7788417

deben considerarse efectos de esbeltez  
se puede usar el análisis simplificado

Factor de amplificación

Ec 94657,27653 kg/cm<sup>2</sup>  
I<sub>g</sub> 1080000 cm<sup>4</sup>  
EI 40891943461 kg/cm<sup>2</sup>  
P<sub>c</sub> 514,5839543 ton  
Fay 1,451233052

Dimensionamiento

excentricidades accidentales

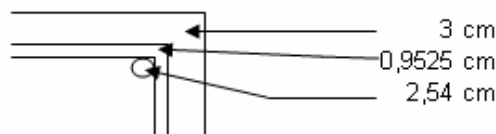
e<sub>ax</sub> 3 cm  
e<sub>ay</sub> 3 cm  
M<sub>2x</sub> 15,8 ton-m  
M<sub>2y</sub> 19,8 ton-m

Momentos amplificados de diseño

M<sub>cx</sub> 24,05933811 ton-m  
M<sub>cy</sub> 28,73441444 ton-m  
e<sub>x</sub> 15,03708632 cm  
e<sub>y</sub> 17,95900902 cm

Parametros adimensionales para el diseño

detalle del acero de refuerzo



Recubrimiento libre de 3 cm  
Empleando barras del # 8 2,54 0  
y estribos del # 3

d 54  
d/h 0,9

sea  $q=$  0,5

Kro 1,5  
ex/h 0,250618105  
ey/h 0,299316817  
Krx 0,85  
Kry 0,75

1/Kr 1,843137255  
Kr 0,542553191  
Pr 130,1606809 ton

q se debe aumentar el q

sea  $q=$  0,8

Kro 1,8  
ex/h 0,250618105  
ey/h 0,299316817  
Krx 1,03  
Kry 0,93

1/Kr 1,490587048  
Kr 0,67087662  
Pr 160,9459845

q el q es adecuado

Por lo tanto

p 0,018133333  
As 65,28

Armado propuesto

8  $\phi$  # 10

