lo que manifiesta que *la fuerza es al efecto que produce en el cuerpo que se ha de rajar, como la base del triángulo isósceles es al duplo de su altura.*

Del rozamiento.

336. Se llama *rozamiento* la resistencia que se esperimenta al querer hacer resbalar un cuerpo sobre otro. Esta resistencia proviene de la naturaleza de los cuerpos, que por ser *porosos* tienen sus superficies sembradas de hoyos y eminencias; y cuando un cuerpo descansa sobre otro, se introducen las partes salientes del uno en las entrantes del otro; por consiguiente para que un cuerpo resbale sobre otro será necesario desprender estas desigualdades, doblarlas ó romperlas, y la fuerza que se debe emplear para este efecto se llama *rozamiento*.

Como el rozamiento depende de la naturaleza de las superficies en contacto, y las cuerdas necesitan de una cierta fuerza para doblarse, á la cual se da el nombre de *rigidez*, y por otra parte nunca se hallan las máquinas construidas con la perfeccion que se necesita, resulta que no se puede determinar exactamente por reglas generales. Así es, que en este punto nos debemos atener á la esperiencia, la cual enseña que el *rozamiento disminuye, pulimentando bien las superficies y cerrando los poros con materias grasas*; que *el rozamiento de dos cuerpos de una misma materia es mas considerable que cuando son de materias heterogéneas*; lo cual proviene, sin duda, de que en los cuerpos homogéneos deben encontrar mas facilidad las partes salientes en introducirse en las entrantes; que *el rozamiento es el mismo, cualquiera que sea la superficie de contacto* (con tal de que no se aproxime demasiado á ser una arista ó esquina); y últimamente que *el rozamiento es proporcional á la presion hasta cierto punto*. En los párrafos 275 al 297 del T. 3º p. 1. Trat. Elem., y en la nota del § 131 del Libro 5º del *Tratado sobre el movimiento y aplicaciones de las aguas*, se halla el

resultado de cuanto se sabe hasta el dia relativo al rozamiento y rigidez de las cuerdas.

DINAMICA.

Del movimiento uniforme.

337. En general se llama *movimiento* (intr.) la traslacion de un cuerpo de un lugar del espacio á otro; si el movimiento se refiere á puntos fijos del espacio, se llama *absoluto*; y si se refiere á puntos que no están fijos, se llama *relativo*. Este puede ser tal que el cuerpo que le tenga, con relacion á otro, puede estar inmóvil en el espacio; por ejemplo, un hombre que en un navío anduviese de proa á popa lo mismo que el navío andaba de popa á proa, estaría en reposo en el espacio, al paso que estaba en movimiento respecto del navío y de la gente que estuviese dentro.

Cuando el movimiento de un cuerpo es tal que en tiempos iguales anda espacios iguales, se llama *uniforme;* cuando no, se llama en general *variado*. Se llama *velocidad* de un cuerpo el espacio que corre en una unidad de tiempo, v. g. en un segundo, en un minuto, en una hora, etc.

338. *Cuando un cuerpo está en reposo, debe perseverar en este estado á menos que una causa estraña no le saque de él.* Porque en sí no tiene nada que le induzca á tomar un estado con preferencia á otro.

Recíprocamente, *un cuerpo en movimiento y abandonado á sí mismo*, *debe conservar constantemente la misma velocidad.* Porque en sí no tiene ninguna cosa que le pueda detener; ademas *debe moverse en línea recta*, porque él, de suyo, ni apetece el movimiento ni el reposo, y por consiguiente tampoco hay ninguna razon para que él por sí mismo se separe de la recta que une el punto que él ocupa en un instante, con el que ocupa en el instante siguiente.

339. El efecto de una fuerza sobre un cuerpo es el ha-

cerle correr un cierto espacio durante un tiempo cualquiera. En este efecto se han de considerar dos cosas, á saber: la masa del cuerpo y la velocidad con que se quiera que vaya; y como del mismo modo que crezca ó mengüe cualquiera de ellas, será tanto mayor ó menor el efecto, y por consiguiente la fuerza que se debe emplear, resulta que *dicho efecto se podrá medir por la masa del cuerpo multiplicada por la velocidad*, cuyo producto se llama *cantidad de movimiento.*

Como la velocidad es proporcional á la fuerza, resulta que la composicion de las velocidades comunicadas á un cuerpo, se debe hacer del mismo modo que la de las fuerzas aplicadas á dicho cuerpo.

340. *El espacio corrido por un cuerpo con movimiento uniforme, es igual á la velocidad multiplicada por el tiempo.*

Porque si se repite el espacio corrido en la unidad de tiempo, ó lo que es lo mismo la velocidad, tantas veces como unidades de tiempo hay en la duracion del movimiento, resultará el espacio total corrido.

Luego llamando E el espacio corrido, V la velocidad, y T el tiempo, se tendrá $E=VT$ (22), que da

$$V=\frac{E}{T}\ (22')\ \text{y}\ T=\frac{E}{V}\ (22'').$$

Llamando e el espacio corrido por otro cuerpo, v su velocidad, y t el tiempo, se tendrá $e=vt$.

Con estas dos ecuaciones se pueden formar, y se deben formar, todas las proporciones análogas á las espuestas (286), para deducir de la traduccion de cada una la razon de los espacios, tiempos y velocidades en los diferentes casos en que puedan hallarse las cantidades que entran en ellas.

Del movimiento uniformemente acelerado y retardado.

341. Para que el movimiento sea *variado* es indispensable que una fuerza cualquiera obre continuamente en el cuerpo; esta fuerza se llama *aceleratriz*, si su efecto es aumentar el

movimiento, y *retardatriz*, cuando le disminuye. Si la fuerza aceleratriz ó retardatriz es constante, es decir, que en tiempos iguales le haga adquirir ó perder cantidades de movimiento iguales, el movimiento se llama *uniformemente acelerado* ó *uniformemente retardado.*

342. Sea g la fuerza aceleratriz, ó el grado de velocidad que ella comunica al móvil en cada instante, ó lo que es lo mismo, el espacio que el móvil anda en cada instante; k el tiempo que obra la fuerza aceleratriz, valuado en instantes bastante pequeños, para que en su duracion se pueda considerar el movimiento como uniforme; t el mismo tiempo valuado en segundos; y n el número de instantes contenidos en un segundo; por manera que se tenga

$$\frac{k}{n}\ \text{instantes}\ =t\ \text{segundos, ó}\ k\ \text{instantes}\ =nt\ \text{instantes.}$$

Esto supuesto, la velocidad adquirida por el móvil al fin del primer instante será g; al cabo del segundo instante será $2g$, esto es, la que tenía ya del primero, y la que adquirió en el segundo; al fin del tercero será $3g$;... y al cabo del instante k será kg; ó dividiendo por n para reducir el tiempo á segundos, poniendo t para espresarlos, y llamando v esta velocidad adquirida, que se llama *velocidad final*, se tendrá

$$v=\frac{k}{n}\times g=tg\ (23);$$

es decir, que si al cabo del tiempo t dejase de obrar la fuerza aceleratriz, *el móvil caminaría con una velocidad igual á la misma fuerza aceleratriz multiplicada por el tiempo que obra.*

De donde podríamos deducir, espresando por v', g', t', las cantidades correspondientes á otro movimiento, que *en los movimientos acelerados las velocidades son como las fuerzas aceleratrices multiplicadas por los tiempos.*

343. Ahora, el espacio total corrido por el cuerpo con este movimiento, será igual á la suma de todos los espacios par-

ciales corridos en cada instante, ó lo que es lo mismo, será la suma de esta progresion aritmética

$\div g.2g.3g.4g.5g......kg,$

cuyo número de términos es k; luego su suma (I. 200) será $(g+kg)\times\frac{1}{2}k$.

Mas para que el movimiento se pueda mirar como uniforme en cada instante, es necesario que la velocidad g sea muy pequeña, y que k sea muy grande; luego suponiendo que ambas lleguen á sus límites respectivos, el primer término g del paréntesis desaparecerá, y el segundo kg será una cantidad finita (I. 235) y determinada; por consiguiente la espresion anterior del espacio, llamándole e, se convertirá en $e=\frac{1}{2}gk^2$;

ó poniendo en vez de k^2 su igual t^2 valuado en segundos, será $e=\frac{1}{2}gt^2$ (24);

que quiere decir, que *el espacio corrido con movimiento uniformemente acelerado, es igual á la mitad de la fuerza aceleratriz multiplicada por el cuadrado del tiempo que dura el movimiento.*

344. Por la (ec. 23) se tiene $v=gt$;

y poniendo este valor en la (ec. 24) será $e=\frac{1}{2}vt$ (25); es decir, que *el espacio corrido con movimiento uniformemente acelerado, tambien es igual á la mitad de la velocidad final multiplicada por el tiempo.*

Llamando e' otro espacio, v' la velocidad; y t' el tiempo, se tendrá $e'=\frac{1}{2}v't'$;

y formando proporcion, será $e:e'::\frac{1}{2}vt:\frac{1}{2}v't'::vt:v't'$;

que manifiesta, que *los espacios están en razon compuesta de las velocidades y tiempos.*

Si $e=e'$, será $vt=v't'$, que da $v:v'::t':t$;

que nos dice, que *á igualdad de espacios, las velocidades están en razon inversa de los tiempos.*

Pero si el móvil hubiera principiado á caminar con movimiento uniforme, con la velocidad v y durante el mismo tiempo t, hubiera andado (340) un espacio e espresado por vt, que es duplo de $\frac{1}{2}vt$;

luego de estas dos ecuaciones resulta que *el espacio corrido con movimiento uniformemente acelerado, es la mitad del que correria el móvil en el mismo tiempo, con movimiento uniforme y con la velocidad final adquirida en el movimiento acelerado.*

345. Despejando la t (ec. 23) y sustituyendo en la (ec. 25), se tendrá el espacio espresado en valores de la velocidad, el cual será $e=\frac{v^2}{2g}$ (26),

que da $v=\sqrt{2eg}$ (26*).

Si ántes de principiar á obrar la fuerza aceleratriz, tuviese el móvil una velocidad cualquiera v', las (ecs. 23 y 24) se convertirian en $\begin{cases} v=v'+gt, \\ e=v't+\frac{1}{2}gt^2; \end{cases}$

despejando t en la primera, y sustituyendo su valor en la segunda, se tendrá $e=\frac{v^2-v'^2}{2g}$ (27).

346. Estas ecuaciones se han deducido en el supuesto de que la velocidad v' se haya comunicado en el mismo sentido de la aceleracion; pero si la fuerza aceleratriz obra en sentido contrario, entónces el movimiento será uniformemente retardado, y sus condiciones vendrán espresadas por estas ecuaciones:

$$v=v'-gt \ (28),\quad e=v't-\tfrac{1}{2}gt^2 \ (29),\quad e=\frac{v'^2-v^2}{2g} \ (30).$$

Llamando b el valor de e (ec. 24) correspondiente á $t=1$, y despejando g, se tendrá $g=2b$;

es decir, que *la fuerza aceleratriz tiene por medida el duplo del espacio corrido en el primer segundo.*

347. Las (esc. 23, 24 y 26) manifiestan: la primera, que *la velocidad de un móvil, sometido á la accion de una fuerza*

aceleratriz constante, es proporcional al tiempo; y las otras dos, que *el espacio corrido por dicho móvil, está en razon duplicada del tiempo ó de la velocidad adquirida.*

348. *Los espacios corridos en los segundos sucesivos de la duracion del movimiento uniformemente acelerado, son entre sí como los números impares.*

En efecto, el espacio corrido en t segundos es igual (ec. 24) á $\frac{1}{2}gt^2$;
el corrido en $(t-1)$ segundos será $\frac{1}{2}g(t-1)^2$;
restando este valor del anterior, y llamando E la resta, se tendrá $E=\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}g(t-1)^2=\frac{1}{2}g(2t-1)$;
que es la espresion del espacio corrido en un solo segundo. Haciendo sucesivamente $t=1$, $t=2$, etc.,
y llamando E', E'', E''', E^{iv}, etc., los valores que va tomando E en estos supuestos, se tendrá
$E'=\frac{1}{2}g\times1$, $E''=\frac{1}{2}g\times3$, $E'''=\frac{1}{2}g\times5$, $E^{iv}=\frac{1}{2}g\times7$, etc., que formando una serie de razones iguales y simplificando por $\frac{1}{2}g$, se tendrá
$E':E'':E''':E^{iv}:\text{etc.}::1:3:5:7:\text{etc.}$, que es L. Q. D. D.

349. El movimiento vertical ó descenso de los cuerpos, es uniformemente acelerado; porque la gravedad obra continuamente sobre ellos; y como la fuerza de la gravedad no es la misma en todos los puntos de la tierra ni en todas las alturas, es necesario determinarla para cada parage en particular.

Así es, que en Madrid, atendiendo á su altura sobre el nivel del mar, y á su latitud, he encontrado * ser 35,1 piés españoles ** por segundo, cuyo valor será el que se debe

* Nota del § 162 del tomo tercero, parte primera del Tratado Elemental. Tambien determiné en dicha nota, que la fuerza de la gravedad á la latitud de 45° era de 35,18986 piés españoles, y que como para hallar la fuerza de la gravedad á una latitud cualquiera, se necesita multiplicar esta por el factor $1-0,002837 \cos. 2l$, la fórmula para hallar la gravedad á una latitud cualquiera espresada por l, era $35,18986(1-0,002837 \cos. 2l)$.

En el libro tercero del *Tratado sobre el movimiento* y *aplicaciones de las aguas*, determino la fuerza de la gravedad para once parages de España y otros once de los mas notables de todo el Globo terrestre.

** Creemos oportuno advertir que todas las medidas y pesos de que hagamos

sustituir en vez de g en las (ecs. 24 y 25) cuando se quiera saber lo que debe caer un cuerpo en un tiempo dado, ó el tiempo que deberá tardar en caer de una altura conocida.

Por ejemplo, si quiero saber cuánta será la altura de que cae un cuerpo, en cuyo descenso empléa 13 segundos, multiplicaré $\frac{1}{2}g=17,55$ por $13^2=169=t^2$,
y tendré que la altura pedida será 2965,95 piés.

Y si se quisiera saber el tiempo que tardaría un cuerpo en caer de una altura de 1421,55 piés, se sustituiría este valor en la ecuacion $e=17,55t^2$, en vez de e; y despejando la t, se tendria

$$e=\sqrt{\frac{1421,55}{17,55}}=\sqrt{81}=9;$$

que son los segundos que dicho cuerpo tardaría en bajar de la altura dada.

350. Las (ecs. 28, 29 y 30) sirven para determinar las circunstancias del movimiento de un cuerpo, arrojado verticalmente de abajo á arriba con la velocidad v'. Por ejemplo, si quiero saber el momento en que deja de subir un cuerpo, arrojado con una velocidad v' de 97 piés por segundo, haré $v=0$ en la (ec. 28), y despejando t, será

$$t=\frac{v'}{g}=\frac{97}{35,1}=2,76 \text{ seg.};$$

que manifiesta que el cuerpo dejará de subir á los 2,76 segundos de haberle arrojado.

Y si en este mismo supuesto se quiere saber la altura á que habrá subido, en la (ec. 30) se hará $v=0$, y se tendrá $e=\frac{97^2}{70,2}=\frac{9409}{70,2}=134,03$, que son los piés á que subirá el cuerpo.

Si algun valor de t hace negativo al de v ó al de e, el resultado indicará que al cabo de dicho tiempo el cuerpo vuelve

uso en lo sucesivo, serán castellanas, á menos que en algunos casos no se esprese lo contrario, por la denominacion que acompañe.

á caer con esta velocidad, ó que ha bajado mas abajo del punto de proyeccion una cantidad igual al resultado que se haya obtenido.

Del movimiento de los cuerpos sobre planos inclinados.

351. Para determinar las condiciones del movimiento de un cuerpo abandonado á sí mismo en un plano inclinado al horizonte, se considera su gravedad g á cada instante descompuesta en dos fuerzas aceleratrices, la una perpendicular y la otra paralela al plano, llamando α la inclinacion del plano, la primera de ellas tendrá (328 esc.) por valor $g\cos.\alpha$, la cual al mismo tiempo que es destruida por la resistencia del plano, espresa la presion que ejerce el cuerpo sobre él; y la segunda á la cual obedece el móvil en un todo, tiene constantemente por valor g sen. α; luego el movimiento de este cuerpo es uniformemente acelerado.

352. Luego si queremos obtener las condiciones de este movimiento, no habrá mas que modificar las (ecs. 23, 24 y 26) poniendo en vez de g el valor g sen.α; y el movimiento de un cuerpo que desciende á lo largo de un plano inclinado, estará determinado por las ecuaciones siguientes:

$$v=gt.\text{sen}.\alpha\ (31),\quad e=\tfrac{1}{2}gt^2\text{sen}.\alpha\ (32),\quad e=\frac{v^2}{2g\text{sen}.\alpha}\ (33).$$

Haciendo en las (esc. 28, 29 y 30) las mismas sustituciones, el movimiento de un cuerpo que sube á lo largo de un plano inclinado, en virtud de una velocidad v' comunicada al cuerpo paralelamente al plano, vendrá espresado por las tres ecuaciones siguientes:

$$v=v'-gt\text{sen}.\alpha\ (34),\quad e=v't-\tfrac{1}{2}gt^2\text{sen}.\alpha\ (35),$$

$$e=\frac{v'^2-v^2}{2g\text{sen}.\alpha}\ (36).$$

Haciendo $v=0$ en las (ecs. 34 y 36), dará: la una el tiempo al cabo del cual dejará el cuerpo de subir; y la otra, el espacio total que andará el cuerpo á lo largo del plano. Todas las circunstancias de este movimiento son las mismas que las de los cuerpos que caen libremente, con solo la modificacion que se acaba de hacer.

353. Si el plano fuese horizontal y opusiese constantemente al cuerpo una resistencia r, las circunstancias del movimiento vendrian espresadas por las ecuaciones siguientes:

$$v=v'-rt,\quad e=v't-\tfrac{1}{2}rt^2,\quad e=\frac{v'^2-v^2}{2r};$$

de donde se sacará haciendo $v=0$, el tiempo al cabo del cual se estingue la velocidad, y termina el espacio total corrido por el cuerpo.

354. *Un cuerpo, que ha corrido la longitud de un plano inclinado, ha adquirido la misma velocidad que si hubiera caido libremente una cantidad igual á la altura de dicho plano.*

Porque si llamamos a la altura del plano, y l su longitud, la (ec. 26) nos dará para la velocidad adquirida por el cuerpo que ha andado el espacio ó altura a, la espresion $v=\sqrt{2ag}$;
y la (ec. 33) dará para la velocidad del cuerpo que ha corrido el espacio ó longitud l del plano; este valor

$v=\sqrt{2gl\text{sen}.\alpha}$; y como (I. § 464 esc.) $l$sen.$\alpha=a$, sustituyendo en la ecuacion anterior se convertirá en $\sqrt{2ag}$, que es la misma que nos dió la (ec. 26); luego las velocidades adquiridas por los dos cuerpos son iguales. L. Q. D. D.

Cor. De aquí se sigue que si llamamos v' la velocidad adquirida por otro cuerpo á lo largo de otro plano inclinado, cuya altura sea a' se tendrá $v'=\sqrt{2a'g}$; y formando proporcion, y simplificando por $\sqrt{2g}$,
resultará $v:v'::\sqrt{a}:\sqrt{a'}$;
que quiere decir, que *las velocidades adquiridas á lo largo*

de dos planos inclinados, son como las raices cuadradas de las alturas de los mismos planos.

355. *Dos cuerpos que parten á la vez del vértice comun de dos planos inclinados para correrlos, llegan al mismo tiempo á los puntos en que encuentran á dichos planos las perpendiculares que se les tire desde un mismo punto de su comun altura.*

Sean t, t' los tiempos empleados en correr los espacios AB, AC (fig. 117), determinados por las perpendiculares DB, DC; sean α, α' las inclinaciones de los planos AM, AN; con lo cual la (ec. 32) nos dará

$$AB=\tfrac{1}{2}gt^2\text{sen.}\alpha,\ AC=\tfrac{1}{2}gt'^2\text{sen.}\alpha';$$

pero (I. § 464, esc). $\begin{cases} AB=AD\cos.BAD=AD\text{sen.}\alpha, \\ AC=AD\cos.CAD=AD\text{sen.}\alpha'; \end{cases}$

luego las dos ecuaciones anteriores serán lo mismo que estas $AD\text{sen.}\alpha=\tfrac{1}{2}gt^2\text{sen.}\alpha$, $AD\text{sen.}\alpha'=\tfrac{1}{2}gt'^2\text{sen.}\alpha'$; que dan un mismo valor para t y t', y por consiguiente $t=t'$, que es L. Q. D. D.

Si sobre AD como diámetro se describe una circunferencia, esta pasará por los vértices de los ángulos rectos ABD, ACD; de donde se deduce que todas las cuerdas de un círculo tiradas desde el estremo del diámetro vertical, son corridas en un mismo tiempo por un cuerpo, y este tiempo es tambien el mismo que emplearía el cuerpo en correr todo el diámetro.

356. *Los tiempos empleados por dos cuerpos en correr las longitudes de dos planos inclinados, son entre sí como las longitudes divididas por las raices cuadradas de las alturas.*

Porque, conservando las mismas denominaciones, si en la (ec. 32) ponemos sucesivamente l, l', en vez de e, y $\frac{a}{l}$, $\frac{a'}{l'}$ en vez de sen.α, despejando los tiempos t, t', dará

$$t=\frac{l}{\sqrt{\tfrac{1}{2}ag}},\quad t'=\frac{l'}{\sqrt{\tfrac{1}{2}a'g}};$$

que, formando proporcion y simplificando por $\frac{1}{\sqrt{\tfrac{1}{2}g}}$,

será $t:t'::\frac{l}{\sqrt{a}}:\frac{l'}{\sqrt{a'}}$, que es L. Q. D. D.

Del movimiento de los proyectiles en el vacío.

357. Se llama *proyectil* todo cuerpo arrojado en una direccion cualquiera, y que al mismo tiempo obedece á la gravedad.

358. *El espacio que anda un proyectil es una curva plana y vertical.*

En efecto, supongamos un punto material lanzado desde el punto A (fig. 118) en la direccion AC, y que AB sea el espacio que, siguiendo esta direccion, correria en el primer instante en virtud de la fuerza ó velocidad de proyeccion sola; y sea la vertical AP lo que la gravedad haria bajar al cuerpo durante el mismo instante. Construyendo un paralelogramo sobre AB, AP, el proyectil se hallará (265 y 266) al fin del primer instante en el estremo L de la diagonal de dicho paralelogramo; en el segundo instante, el proyectil sin la accion de la gravedad correría en la prolongacion de la diagonal un espacio LD=AL, y combinando esta fuerza con la accion vertical LQ de la gravedad en el mismo tiempo, el proyectil se hallará al cabo del segundo instante en el estremo O de la diagonal LO del paralelogramo construido sobre las líneas LD, LQ, y lo mismo sucederá en los instantes siguientes. Ahora suponiendo que los instantes vayan disminuyendo hasta llegar á su límite, tambien lo irán haciendo las diagonales, y su conjunto que formaba un polígono, vendrá á constituir una curva; y como cada paralelogramo tiene dos lados contiguos en el plano vertical del anterior, resulta que la curva descrita por el proyectil está toda en un mismo plano vertical. L. Q. D. D.

359. Esta curva se llama *trayectoria*. Para determinar su ecuacion respecto de la línea horizontal AC (fig. 119), sea α

el ángulo de proyeccion KAC que forma con la horizontal la direccion en que ha sido arrojado el proyectil, v la velocidad comunicada, a la altura $\frac{v^2}{2g}$ debida á esta velocidad, AMC la curva descrita, M el lugar de proyectil al cabo de un tiempo cualquiera t, y x, z las coordenadas rectangulares AP, PM.

Concibamos que, en el momento en que se lanza el proyectil, su velocidad esté descompuesta en otras dos, la una horizontal, cuyo valor (328 esc.) será $v\cos.\alpha$, y la otra vertical espresada por $v\text{sen}.\,\alpha$. En virtud de la primera, el espacio $\text{AP}=x$ habrá sido corrido con movimiento uniforme, y (340) se tendrá

$$x=vt\cos.\alpha \quad (37);$$

y como PM es la altura á que un cuerpo puede subir en el tiempo t con la velocidad $v\text{sen}.\alpha$, la (ec. 29) nos dará $z=vt\text{sen}.\alpha-\frac{1}{2}gt^2$ (38).

Sustituyendo en esta en vez de t su valor (ec. 57)

$$\frac{x}{v\cos.\alpha}, \text{ se tendrá } z=\frac{vx\text{sen}.\alpha}{v\cos.\alpha}-\tfrac{1}{2}g\frac{x^2}{v^2\cos.\alpha^2};$$

quitando el divisor, sustituyendo despues en vez de v^2 su valor $2ag$, y dividiendo por g toda la ecuacion, resultará $4az\cos.\alpha^2=4ax\text{sen}.\alpha\cos.\alpha-x^2$ (39), que es la ecuacion de la trayectoria.

360. Resolviéndola con relacion á x, se tendrá (I. § 168)

$$x=2a\text{sen}.\alpha\cos.\alpha\pm\sqrt{4a\cos.\alpha^2(a\text{sen}.\alpha^2-z)},$$

cuyo valor manifiesta, primero; que *la curva es simétrica respecto de un eje vertical ED, distante del origen A la cantidad* $\text{AE}=2a\text{sen}.\alpha\cos.\alpha$;

y por cada valor de z da dos para x, cuyos estremos distan igualmente de este eje.

2º Que *para el máximo valor de* x, *ó el alcance* AC *correspondiente á* z=0 *se tiene*

$\text{AC}=4a\text{sen}.\alpha\cos.\alpha=$(I. § 460, 5ª)$2a\text{sen}.2\alpha$.

3º Que *la máxima elevacion del proyectil ó el máximo valor de* z *permaneciendo* x *real, es* $a\text{sen}.\alpha^2$.

Este valor que corresponde á $x=2a\text{sen}.\alpha\cos.\alpha=\text{AE}$, y está representado por $\text{ED}=a\text{sen}.\alpha^2$.

El valor $4a\text{sen}.\alpha\cos.\alpha$ de AC, permanece el mismo aunque en vez de α se sustituya $\frac{1}{2}\pi-\alpha$ ó su complemento; lo que manifiesta, que *los alcances serán los mismos con dos ángulos que sean complemento el uno del otro, ó equidistantes de 45º*; esto es, el mismo alcance se tendrá con un ángulo de elevacion de 37º, que con uno de 53º.

El otro valor $2a\text{sen}.2\alpha$ de la misma AC, hace ver que *permaneciendo una misma la carga de pólvora, es mayor el alcance cuando el ángulo de proyeccion* α *es la mitad de uno recto ó es de 45º*; pues entónces $\text{sen}.2\alpha=1$, que es el mayor seno; y llamando P á dicho alcance bajo este ángulo, se tendrá $\text{P}=2a$; sustituyendo este valor en el de AC, todas las amplitudes con una misma carga quedarán referidas á la amplitud P, y serán dadas por la ecuacion $\text{AC}=\text{P}\text{sen}.2\alpha$.

361. Si se quiere conocer la naturaleza de la curva ADC, refiriendo sus puntos al eje vertical DE, se hará $\text{MQ}=z'$, $\text{DQ}=x'$, y se tendrá

$$x=2a\text{sen}.\alpha\cos.\alpha-z' \text{ y } z=a\text{sen}.\alpha^2-x';$$

sustituyendo estos valores en la (ec. 59) y simplificando, se convertirá en $z'^2=4ax'\cos.\alpha^2$;

luego (96) la curva es una parábola cuyo parámetro relativo al eje DE es $4a\cos.\alpha^2$.

362. Para hallar el ángulo de proyeccion que se debe emplear para dar en un punto cuya posicion es conocida, se dividirá la (ec. 59) por $\cos.\alpha^2$; despues se sustituirá

$\text{tang}.\alpha$ en vez de $\frac{\text{sen}.\alpha}{\cos.\alpha}$,

y $\sec.\alpha^2$ ó $1+\text{tang}.\alpha^2$ en vez de $\frac{1}{\cos.\alpha^2}$;

y se tendrá $\text{tang}.\alpha=\dfrac{2a\pm\sqrt{4a^2-4az-x^2}}{x}$.

Esta fórmula manifiesta que mientras x^2+4az sea menor que $4a^2$, se podrá dar en el punto que se quisiere con dos direcciones diferentes. Si el punto está en el horizonte se hará $z=0$; y si está inferior al horizonte se hará z negativa.

El tiempo que el proyectil empléa en llegar al blanco se hallará por la (ec. 37), sustituyendo en vez de x la distancia horizontal de la batería al blanco, y por v la velocidad *inicial*, que es aquella con que es arrojado el cuerpo.

363. Se llama *línea de puntería* el rayo visual (fig. 120) que enrasa la parte superior de la culata y el punto mas elevado del brocal.

El cañon siempre está mas reforzado de metal en la recámara que hácia la boca; por consiguiente cuando la línea de puntería natural está dirijida al blanco, el eje de la pieza se halla elevado sobre la línea de puntería una cierta cantidad, que se llama *ángulo de puntería*.

364. Si se concibe la velocidad inicial del proyectil como descompuesta en otras dos, la una horizontal y la otra vertical, la primera será la misma durante todo el alcance del tiro, y la vertical irá disminuyendo continuamente en razon de la gravedad, y vendrá á ser nula durante el corto instante en que el movimiento sea horizontal, desde el cual instante en adelante será negativa; donde se ve que el proyectil que arroja la pieza cortará al principio la línea de puntería al subir: y al descender la volverá á encontrar una segunda vez en el punto M. La distancia AM de este punto á la boca de la pieza, es lo que se llama *alcance de punto en blanco*; y cuando el blanco es el punto M, es herido como si el proyectil hubiese corrido la recta AM. Luego *para dar en el blanco es necesario que el proyectil, considerado como sin gravedad, y llegado á la vertical del blanco, se eleve en ella por la parte superior á este blanco, la misma cantidad que la gravedad hace descender al proyectil en el mismo tiempo que empléa en llegar á la vertical*, que es justamente lo que se verifica en el punto en blanco M. Pero, si el objeto está mas distante que el punto en blanco

y á la misma altura que este, el proyectil pasará por la parte inferior á él; luego para darle *será necesario apuntar mas alto ó por elevacion*.

Si el objeto estuviese mas inmediato que el alcance de punto en blanco, *se debería hacer la puntería un poco mas baja*.

365. Con estos conocimientos se pueden resolver varios problemas relativos á este punto; pero como la resistencia del aire, calidad de la pólvora, estado de la atmósfera, etc., alteran considerablemente los resultados, se ha procurado conocer por esperimentos la velocidad que una cierta carga de pólvora puede imprimir á un proyectil de un peso conocido, tirando á una pequeña distancia sobre un péndulo de gran peso, y observando la cuerda del arco que un punto determinado de dicho péndulo ha corrido en virtud del choque de la bala.

El resultado de los esperimentos ha sido que hasta una carga igual á la mitad del peso de la bala, las velocidades comunicadas eran entre si como las raices cuadradas de las cargas de pólvora, divididas por las raices cuadradas de los pesos de las balas. Así, para conocer la velocidad que recibirá una bala de cañon, basta saber que una bala de á 24 con una carga igual á la tercera parte de su peso, es arrojada con una velocidad de 420 á 430 varas por segundo.

Tambien se ha observado que los alcances de una misma pieza, bajo un mismo ángulo, crecen como las raices cuartas de las cargas.

La misma esperiencia ha hecho conocer que los alcances de punto en blanco de las piezas cargadas con la tercera parte del peso de su bala, para las piezas de sitio de á

...............24, 16, 12, 8, 4,

son..........840, 760, 720, 670, 620 varas.

Para las de campaña de á 12, 8, 4,

son......................... 570, 550, 530 varas.

Que el alcance de punto en blanco del fusil es de 210 á 220 varas, y su alcance total de 360 á 380.