CLASE 1. Superficies Parametrizadas y Áreas

Hasta ahora hemos estudiado (tema de matemáticas 5) superficies definidas como gráficas de funciones de la forma $z = f(x, y)$. El conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^3 - z + x = 0\}$ corresponde a una hoja que se dobla sobre sí misma, respecto del plano xy, como se muestra en la Figura 1. Como podemos observar, S es una superficie que no es la gráfica de una función de la forma $z = f(x, y)$, ya que viola la definición de función: para el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ debe existir un único punto z_0 tal que $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

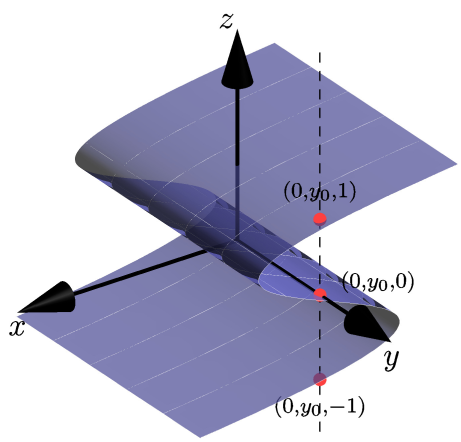

Figura 1: Una superficie que no es de la forma $z = f(x, y)$.

Extendemos nuestra definición de superficie de la siguiente manera:

Definición 1.1 (Superficie Parametrizada)**.** Una superficie parametrizada está definida por medio de una función ϕ, $\phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donde $\mathcal{D}$ es algún dominio en $\mathbb{R}^2$. La superficie S correspondiente a la función ϕ es su imagen, es decir, $S = \phi(\mathcal{D})$.

En este contexto, usualmente llamaremos a S superficie parametrizada y a ϕ su parametrización.

Usaremos la notación $\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, para $(u, v) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, donde uv representará el plano cartesiano en $\mathcal{D}$ (o, mas bien, en $\mathbb{R}^2$). Si ϕ es diferenciable, es decir, si las funciones reales $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ y $z = z(u, v)$ son diferenciables, diremos que S

es una superficie (parametrizada) diferenciable. En forma análoga si ϕ es de clase $\mathcal{C}^1$ (es decir, *continuamente diferenciable*) diremos que S es de clase $\mathcal{C}^1$.

De forma natural obtenemos dos vectores, denotados por $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$, tangentes a curvas sobre la superficie S, de la manera siguiente: suponemos que ϕ es diferenciable en el punto $(u_0, v_0) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Si fijamos $u = u_0$ constante, se tiene (en el plano uv) un segmento de recta paralelo al eje v, obteniéndose así una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$t \to \phi(u_0, t) = (x(u_0, t), y(u_0, t), z(u_0, t)),$$

cuya imagen es una curva sobre la superficie $S = \phi(\mathcal{D})$. El vector tangente a esta curva en el punto $\phi(u_0, v_0)$ está dado (de acuerdo a lo visto en matemáticas 5) por

$$\mathbf{T}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right).$$

En forma análoga, si fijamos $v = v_0$ constante, se tiene un segmento de recta paralelo al eje u, obteniéndose así una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$t \to \phi(t, v_0) = (x(t, v_0), y(t, v_0), z(t, v_0)),$$

cuya imagen es una curva sobre la superficie $S = \phi(\mathcal{D})$. El vector tangente a esta curva en el punto $\phi(u_0, v_0)$ está dado por

$$\mathbf{T}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right).$$

Como los vectores $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ son tangentes, en el punto $\phi(u_0, v_0)$, a (toda curva sobre) la superficie $S = \phi(\mathcal{D})$ entonces, si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq 0$ (es decir, si $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ son *linealmente independientes*) ellos determinan el plano tangente a la superficie en dicho punto, ya que $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ sería normal a la superficie.

Definición 1.2 (Superficie Suave; Producto Vectorial Fundamental)**.** La superficie (parametrizada) $S = \phi(\mathcal{D})$ se dice suave en $\phi(u_0, v_0)$ si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ en el punto (u_0, v_0). La superficie S se dice suave si lo es en todos sus puntos. A veces se le llama Producto Vectorial Fundamental (o simplemente PVF) a $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$.

Definición 1.3 (Plano Tangente)**.** Sea S una superficie parametrizada por $\phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $S = \phi(\mathcal{D})$, suave en $\phi(u_0, v_0)$, es decir, con $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ en (u_0, v_0). Se define el plano tangente a la superficie en $\phi(u_0, v_0)$ como el plano determinado por los vectores $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$.

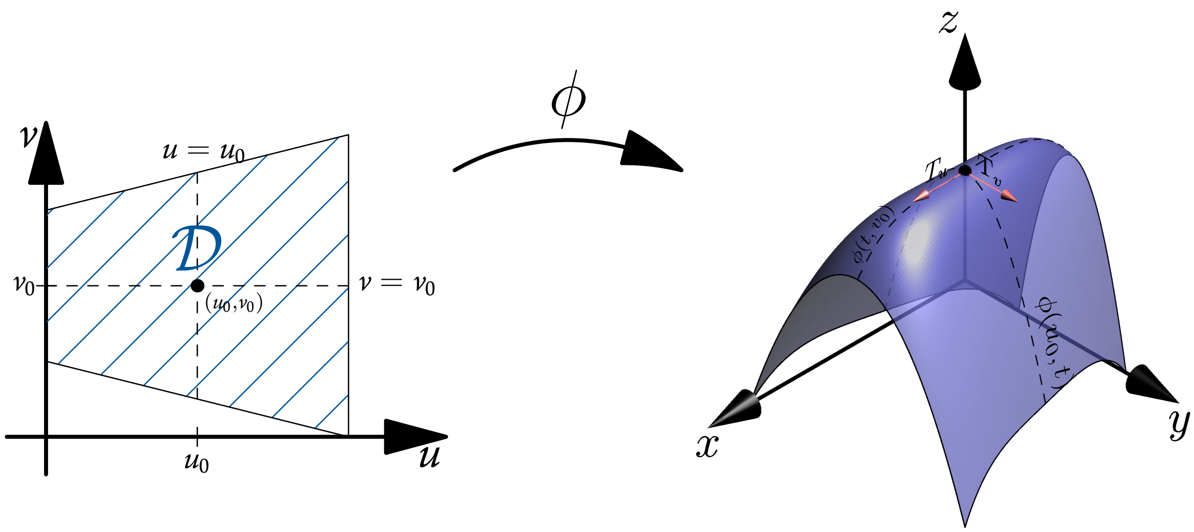

Figura 2: Vectores tangentes a una superficie parametrizada.

Así $\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$, evaluado en el punto (u_0, v_0), es un vector normal a S (en el punto $\phi(u_0, v_0)$) y la ecuación del plano tangente en $(x_0, y_0, z_0) = \phi(u_0, v_0)$ a la superficie viene dada (como se vió en matemáticas 3) por $\mathbf{n} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$, es decir,

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0,$$

al escribir $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$.

Otro asunto geométrico directamente relacionado con el Producto Vectorial Fundamental es el área. Recordando (del curso matemáticas 3) que $\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|$ da el área del paralelogramo determinado por los vectores $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$, podemos obtener el área de S "*sumando*" el área de todos los paralelogramos "*infinitesimales*" que determinan $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ cuando (u, v) varía en todo $\mathcal{D}$. Note que estos paralelogramos cubren todo S puesto que cualquier punto de S está en el rango de ϕ (¿recuerda que $S = \phi(\mathcal{D})$?). Eso sí, debemos tener cuidado de no sumar repetidamente una misma área. En otras palabras, hace falta restringir a ϕ pidiendo que ésta sea una función inyectiva.[1]

Definición 1.4 (Área de una superficie)**.** Sea S una superficie parametrizada suave, es decir, $S = \phi(\mathcal{D})$, con $\phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ en todo S. Definimos el área de la superficie

[1]Bastaría, en realidad, con pedirle a ϕ que los puntos "repetidos" de su rango formen un conjunto con área cero.

S como el valor de la integral doble

$$\text{Area}(S) = \iint_{\mathcal{D}} \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

donde $\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|$ es la norma (Euclídea) del producto vectorial fundamental $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$.

Si S no es una superficie suave sino que es unión de superficies (disjuntas entre sí, claro está) $S_1, S_2, \ldots, S_n$ suaves (es lo que llamaríamos una superficie suave a trozos), su área se define como la suma de las áreas de las superficies S_i (con $i = 1, 2, \ldots, n$).

***Observación* 1.5.** El lector acucioso podrá haber notado que en la definición anterior es necesario exigir algunas condiciones adicionales sobre S. Esta *omisión* ha sido intencional, por razones didácticas (para no dispersar la atención entre tantos detalles sino mantener el foco en las cosas importantes), siendo matemáticas 6 un curso dirigido, principalmente, a estudiantes de ingeniería (por lo que el énfasis debe estar principalmente en el cálculo) y se pueden apreciar también, omisiones similares, en otros *lugares* de la presente guía. En el caso del área de una superficie suave a trozos, la definición dada *exige* (para que pueda tener sentido) que cada una de las superficies $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sean superficies parametrizadas con las siguientes propiedades:

(i) $\phi_i : \mathcal{D}_i \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $S_i = \phi_i(\mathcal{D}_i)$ (para $i = 1, 2, \ldots, n$).

(ii) $\mathcal{D}_i$ es una región elemental en el plano.

(iii) ϕ_i es de clase $\mathcal{C}^1$ y es inyectiva, excepto (posiblemente) en la frontera de $\mathcal{D}_i$.

(iv) S_i es suave, excepto en (a lo sumo) un número finito de puntos.

Queremos enfatizar que estas cuatro condiciones "adicionales" son requeridas por la definición dada (de hecho, si alguna de ellas no se cumple entonces no tiene sentido la definición dada[2]). Por ejemplo, el que cada $\mathcal{D}_i$ sea una región elemental es necesario para que tenga sentido la integral doble sobre cada $\mathcal{D}_i$ y por ésta razón no hizo falta exigirla explícitamente en la definición (y similarmente con las otras condiciones). De esta manera, más que omitir algunas hipótesis (que son *necesarias*, de hecho), lo que hemos omitido es exigir éstas de forma *explícita* (aunarle a esto las razones didácticas esgrimidas en el párrafo anterior).

Por favor tome en cuenta esta observación para las siguientes definiciones y resultados teóricos.

[2] La excepción es la suavidad de S y la inyectividad de ϕ.

Usando determinantes jacobianos,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u},$$

se prueba con facilidad que

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right),$$

y así

$$\text{Area}(S) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

***Observación* 1.6** (Parametrización de superficies del tipo $z = f(x,y)$)**.** Cualquier superficie S, gráfica de una función, $z = f(x,y)$ con $(x,y) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, puede ser parametrizada (parametrización usual) por $\phi(u,v) = (u,v,f(u,v))$, con $(u,v) \in \mathcal{D}$. Si f es de clase $\mathcal{C}^1$, la parametrización es de tipo $\mathcal{C}^1$ y suave (obviamente inyectiva) y calculando los vectores

$$\mathbf{T}_u = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right), \quad \mathbf{T}_v = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right), \quad \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right),$$

se tiene la fórmula del área

$$\text{Area}(S) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

Ejemplo 1.7. El cilindro de ecuación $(x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2$, siendo $r > 0$, corta en el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ una superficie acotada S (ver Figura 3). Calcule el área de S.

Solución. Una parametrización de S en el cono es $\phi(u,v) = (u, v, \sqrt{u^2+v^2})$, tomando $\mathcal{D} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (u-1)^2 + (v-1)^2 \leq r^2\}$. Se calcula, de acuerdo a lo hecho en la Observación 1.6, $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = (-f_u, -f_v, 1)$,

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1 \right)$$

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \sqrt{2}.$$

Luego

$$\text{Area}(S) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{2}\ \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \sqrt{2} \iint_{(u-1)^2+(v-1)^2 \leq r^2} \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \sqrt{2}\ \text{Area}(\mathcal{D}) = \sqrt{2}\,\pi r^2.$$

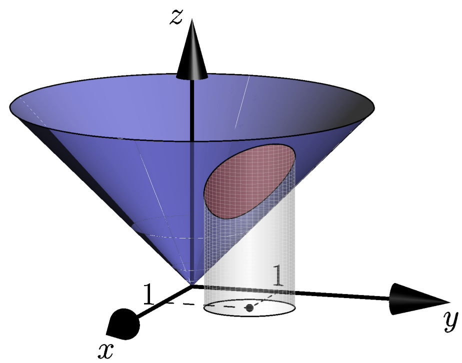

Figura 3: Parametrizando la superficie S que el cilindro corta en el cono.

Ejemplo 1.8. Calcular el área de la parte S del cono $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$, que está dentro de la región esférica $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6z$.

Solución. La superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$ se intersecan en el punto $(0, 0, 0)$ y en la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ del plano $z = 3$, ver Figura 4.

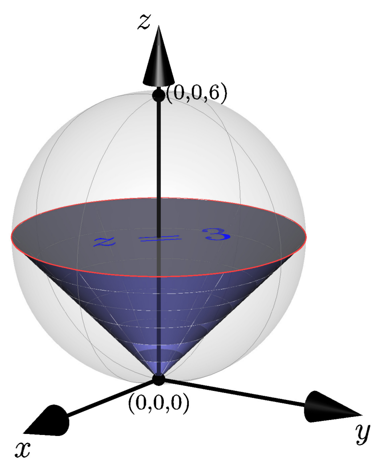

Figura 4: Parametrizando la parte S del cono dentro de la esfera.

En lugar de la parametrización usual del cono, dada por $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, usaremos la parametrización

$$\phi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta), r).$$

Note que, independientemente del dominio de esta función ϕ, su rango (o imagen) está contenido en el cono dado en el enunciado puesto que los puntos del rango satisfacen la ecuación del cono: si llamamos $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$ y $z = r$ entonces se cumple $x^2 + y^2 = z^2$. Para no parametrizar todo el cono sino únicamente a S, tomamos como dominio de ϕ el conjunto $\mathcal{D} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 3,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Fácilmente se calcula $\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta = (-r\cos(\theta), -r\,\mathrm{sen}(\theta), r)$ y $\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| = r\sqrt{2}$, así que

$$\mathrm{Area}(S) = \iint_{\mathcal{D}} \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^3 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 9\pi\sqrt{2}.$$