Relación entre construcción de la multiplicación y el uso del sistema notacional en base 10[1]

Christian Hederich Martínez[2]
Mariela Orozco Hormaza[3]

Abstract

Dado el carácter multiplicativo (además de aditivo) del sistema de notación en base 10, podemos suponer que, para comprenderlo y manejarlo, los niños deben construir, en alguna medida, la operación multiplicativa. Dos tareas relativas a la construcción de la operación multiplicativa (proporción simple y producto de medida) y dos tareas relativas al manejo del sistema notacional en base 10 (escritura y equivalencia) fueron presentadas a 126 niños cursando los grados 1o a 7o de un colegio ubicado en Cali (Colombia). La información se examinó mediante un análisis de correlaciones ordinales y un análisis de correspondencias múltiples. Las relaciones encontradas entre el desempeño y la estrategia seguida al resolver problemas de multiplicación con los resultados obtenidos sobre manejo del sistema de notación decimal, permiten confirmar el supuesto.

Introducción

El sistema de notación en base 10, es un producto histórico relativamente reciente que los alumnos deben comprender y manejar como parte fundamental de su educación matemática. En esencia, es un sistema de carácter posicional, que involucra simultáneamente operaciones aditivas, multiplicativas, y de potenciación. Desde este punto de vista no es difícil suponer la necesidad de ciertos niveles de construcción de la operación multiplicativa para el uso del sistema notacional.

En el primer numeral examinamos las características del sistema y los antecedentes en la investigación psicológica sobre el uso del mismo, que evidencia algunas carencias en los modelos existentes de procesamiento numérico en tanto no involucran de forma directa las características operatorias del sistema. Así, concluye este numeral con un examen del sistema de notación arábigo y del sistema de numeración verbal en castellano que releva sus características operatorias. El segundo numeral hace explícitas de forma breve las características del desarrollo de la multiplicación en el niño. La metodología de la observación, los resultados y las conclusiones se presentan en la última parte del artículo.

El uso del sistema de notación en base 10

El sistema

---

[1] El presente artículo resume algunos de los resultados del Proyecto financiado por Colciencias, *Construcción de la operación multiplicativa y del sistema de notación en base 10: una relación posible*.

[2] Profesor asociado. Facultad de Educación, Universidad Pedagógica Nacional, Santa Fe de Bogotá, Colombia

[3] Profesora titular. Escuela de Psicología, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

La historia y la arqueología nos han hecho conocer un gran número de sistemas de numeración; cuya finalidad esencial "...es asignar, a cada entero individual (hasta un límite que depende de las necesidades prácticas) un nombre y una representación escrita, formados por combinaciones de un reducido número de signos, efectuadas siguiendo leyes más o menos regulares" (Bourbaki, 1969, p. 71).

La historia del desarrollo de los sistemas de numeración muestra una evolución desde los llamados "sistemas concretos", pasando por los aditivos (p.e. la numeración romana), los llamados "sistemas híbridos" (simultáneamente aditivos y multiplicativos) y finalmente a los sistemas posicionales, dentro de los cuales nuestro sistema de notación en base 10 constituye el ejemplo por excelencia.

Un ejemplo de sistema "híbrido" es el de las palabras numéricas en inglés o español. En las notaciones híbridas, se distinguen dos tipos de partículas: las referidas a cantidades numéricas específicas y las multiplicadoras, como 'cientos", que Guitel (1975, citado por Dehaene, p. 4) llama signos σ, que frecuentemente no tienen valor numérico intrínseco y sirven como marcadores gramaticales en la cadena de palabras.

Antecedentes en la investigación psicológica

Manejar el sistema de notación en base 10 (SNB10), significa el logro de dos competencias básicas: 1] la **comprensión** de numerales codificados en el SNB10, o lo que es lo mismo, la construcción de una representación interna adecuada del número a partir de un imput previamente codificado en el sistema, ya sea en la forma arábiga o en la verbal, y 2] la **producción** de numerales codificados en el formato del SNB10 o, lo que es lo mismo, la codificación de números en el sistema de notación.

Desde la perspectiva psicolingüística y trabajando con pacientes que presentan dificultades neurológicas McCloskey y colaboradores (1985, 1991), han propuesto un modelo de tipo modular para el procesamiento numérico. La arquitectura del modelo diferencia dos subsistemas independientes: el de comprensión y el de producción numérica, y en cada uno de estos subsistemas distingue el componente que procesa números verbales del que procesa números arábigos. En el componente de procesamiento arábigo se distinguen, a su vez, los mecanismos de procesamiento léxico y sintáctico: "El mecanismo léxico involucra la comprensión o producción de los elementos individuales en un numeral (por ejemplo, el dígito 3 o la palabra "tres"); en tanto que el procesamiento sintáctico involucra el procesamiento de relaciones entre los elementos (p. e. orden de las palabras) con el fin de comprender o producir numerales como un todo" (McCloskey, 1992, p. 114).

Desde la perspectiva del funcionamiento, el modelo propone que, en el proceso de comprensión del número, los componentes de procesamiento de los números arábigos y verbales convierten el 'imput' correspondiente en una representación interna, de carácter semántico, que posteriormente se puede usar, por ejemplo, para calcular. Esta representación semántica de los números "...especifica, en forma abstracta, las cantidades básicas en un número y el poder de diez asociado con cada uno (p. e, en el número 47, cuatro dieces y siete unos)". (McCloskey, M., Alminosa, D., & Sokol, S. M., 1991, p. 156). En el proceso de producción, la representación interna del número se traduce en las formas adecuadas al 'output' arábigo o verbal.
Partiendo del modelo de McCloskey y colaboradores, un grupo de psicólogos del desarrollo han trabajado el desarrollo de los sistemas notacionales en niños, que incluyen el sistema de notación en base 10. Karmiloff-Smith & Tolchinsky (1991), por ejemplo, analizan los errores que niños pequeños (entre 3 y 7 años) cometen diferenciando los aspectos sintácticos y léxicos de los mismos, tanto en la notación escrita como en la producción verbal. Otras autoras adoptan el mismo enfoque para analizar producciones de niños en edad

escolar (Martínez-Ruiz, 1995), el uso del lenguaje de señas en niños sordos (Fuentes-Loss, 1996) y el desarrollo de sistemas simbólicos externos de notación en niños pequeños que incluyen tareas relativas al sistema notacional en base 10 (Lee & Karmiloff-Smith, 1996).

Los resultados de esta línea de trabajo son bastante interesantes. Sinclair (1988, 1992) y Scheuer (2000), por ejemplo, concluyen que la experiencia del niño con en sistema de numerales verbales tiene una implicación directa en el aprendizaje del sistema de notación arábigo. Pontecorvo (1996), por su parte, ha avanzado en el establecimiento de un desarrollo evolutivo en la representación de la cantidad, encontrando ciertas categorías ordenadas para la tipificación de los errores de escritura. En la misma dirección, Lerner y Sadovsky (1993) postulan cierta direccionalidad en el desarrollo del snb10. De acuerdo con este trabajo, el niño inicia con la hipótesis de una correspondencia estricta entre el orden de la enunciación en el numeral verbal y la notación arábiga; cuando el niño incorpora al sistema las relaciones aditivas y multiplicativas, se prepara un conflicto que surge del reconocimiento de la correspondencia entre la cantidad de cifras y la magnitud del número representado. En esta misma dirección hemos avanzado nosotros con la propuesta de una serie de categorías, aún no completamente ordinales, para la tipificación de casi el 90% de los errores cometidos por los niños (Orozco y Hederich, 2000).

Varias objeciones pueden hacerse al modelo de McCloskey y colaboradores. El hecho de que el modelo describa la representación interna del número en términos de dígitos multiplicados con potencias de 10, es fácilmente cuestionable en el sentido en que esta forma de representación alude directamente a la forma en que los números se representan sistema de notación decimal que, como sabemos, es uno de muchos posibles en la representación de los números. Así, aun en el caso en que aceptemos esta característica del modelo, este quedaría restringido a algunos contextos culturales en los cuales este sistema de notación es de uso común.

Una objeción más radical al modelo de McCloskey es la planteada por Campbell y Clark (1991). En oposición a un modelo modular-abstracto, estos autores proponen un modelo de tipo integrado-específico, en el cual los diferentes códigos numéricos específicos (visoespaciales, verbales,...) están asociativamente conectados en una codificación compleja, y las diferentes facetas del procesamiento numérico generalmente involucran procesos más comunes que independientes (p. 204).

Todavía es posible formular una tercera objeción al modelo, mucho más vinculada con el tema específico de este artículo. De acuerdo con en modelo, cada uno los componentes del susbsistema de comprensión, con sus respectivos mecanismos de procesamiento léxico y sintáctico, arrojan como resultado una representación interna que posteriormente se utiliza para el cálculo. Esta descripción ignora el hecho de que es absolutamente necesario hacer un manejo de tipo operatorio para la construcción de la representación interna del número a partir de cualquier notación, ya sea numérica o verbal, tal y como lo mostraremos más adelante.

Trabajando desde una perspectiva operatoria, Kamii (1986, 1992), muestra que, para construir el sistema de notación en base 10 para los números arábigos, se requiere la construcción de sistemas jerárquicos sucesivos (p. e. el sistema de las decenas sobre el sistema de las unidades), segmentando en cada nuevo sistema el todo en partes iguales, ordenando cada parte, e incluyéndolas jerárquicamente (incluyendo el 10 en el 20, el 20 en el 30,...). De acuerdo con la autora, este mismo proceso debe ser repetido para cada nuevo subsistema.

La necesidad de hacer manejo operatorio de los numerales verbales o arábigos queda fundamentada en un análisis operatorio del sistema, que expondremos en el siguiente numeral.

Análisis operatorio del sistema

Numerales arábigos

Como todos los sistemas posicionales de notación, nuestro sistema en base 10 descompone los enteros en sumas “de unidades sucesivas”. Específicamente en el sistema de notación en base 10, esta descomposición se hace de la forma

$$n = \sum_{i=1}^{m} k_i 10^{i}$$

donde n es el número a descomponer, m representa el "orden del número", i varía entre 0 y m, y los k_i son enteros entre 0 y 9.

Para el caso de un numero concreto:

$$\begin{aligned} 2345 &= 2000 + 300 + 40 + 5 \\ &= 2(10x10x10) + 3(10x10) + 4(10) + 5(1) \\ &= 2x10^3 + 3x10^2 + 4x10^1 + 5x10^0 \end{aligned}$$

Es interesante anotar que, en algunos sistemas antiguos la base no era constante. En el sistema de los babilonios, por ejemplo, la base era igual, bien a 10, bien a 6; en el de los mayas la base era igual a 20, excepto en la unidad de orden 2, en que era igual a 18. Sobre sistemas de este tipo un progreso muy significativo fue la adopción de una misma base para todos los ordenes de las unidades, lo cual constituye el principio de la “numeración de posición” (Bourbaki, 1969, p. 71).

La estructura aditiva y multiplicativa del sistema de numeración arábiga es evidente. Primero, el número se expresa como la suma de una serie de unidades de diferente orden. Segundo, cada símbolo incluido en la expresión arábiga debe ser interpretado como la multiplicación del dígito que representa, por la potencia de 10 que marca su posición en la expresión. Así, la interpretación del grafismo arábigo requiere de la realización de adiciones, de multiplicaciones y, si se quiere, incluso de potenciaciones (que en sí, son multiplicaciones generalizadas). Así, es innegable desde un punto de vista matemático, el carácter multiplicativo de las expresiones arábigas.

Expresiones numéricas verbales en castellano

El análisis de las expresiones verbales en castellano que presentamos se realiza desde una doble perspectiva: 1] morfo-fonológica, que permite diferenciar prefijos de sufijos y analizar contracciones de las expresiones numéricas verbales, y 2] sintáctica, que permite la diferenciación de las palabras que componen cada expresión.

Obsérvese la siguiente expresión verbal:

“trescientos cincuenta mil seiscientos setenta y dos” (350672)

Como primer paso, denotemos las composiciones aditivas con un slash (/). Hecho así la expresión queda

{trescientos / cincuenta} mil / seiscientos / setenta y:/ dos

Como se observa tuvimos que introducir paréntesis ({}) para evitar ambigüedades en la interpretación de las asociaciones en la expresión. Debe notarse que la conjunción (y) denota una composición aditiva “explícita”, pero que en la mayoría de los casos no hay una marca gramatical específica que denote la adición.

Denotamos ahora las primeras composiciones multiplicativas por medio de paréntesis cuadrados ([ ]) Hecho así, la expresión queda

{tres[cientos] / cincuenta}[mil] / seis[cientos] / setenta y:/ dos

La inclusión de los marcadores morfológicos - que para el caso de este numero se reducen al sufijo “enta”, que indica una composición multiplicativa específica: la de un dígito por 10 (cincu-enta=5*10, ses-enta=6*10,...) –, permite descomponer la expresión de la siguiente manera:

{tres[cientos] /cincu[enta]} [mil] / seis[cientos] / set[enta] /(y) dos

Como se observa, esta expresión denota directamente una serie de sumas y multiplicaciones. Obsérvese que si traducimos ahora las palabras que denotan dígitos o expresiones numéricas específicas al formato arábigo, y los símbolos / y [] a los usuales en aritmética, esta expresión en su formato operatorio sería:

$$(3*100 + 5*10)*1000 + 6*100 + 7*10 + 2$$

Completemos esta expresión añadiendo explícitamente las multiplicaciones de las unidades de primer orden ($10^0=1$):

$$= (3*100 + 5*10 + 0*1)*1000 + 6*100 + 7*10 + 2*1$$

Como se observa, el factor de los miles (350), esta expresado de la misma forma que el factor de las unidades. Esto se hace más visible si asociamos y factorizamos el segundo término así:

$$= (3*100 + 5*10 + 0*1)*1000 + (6*100 + 7*10 + 2*1)*1$$

Queda clara, en esta forma, la “regla de las tres posiciones”: sumas de centenas, decenas y unidades se multiplican sucesivamente por factores (unidades, miles, millones, ….). Cuando, como en este caso, la expresión de esta secuencia de centenas, decenas y unidades se expresa sin explicitar las unidades de algún orden (p.e. en “trescientos cincuenta” falta la denotación de las unidades), esto se interpreta como ausencia de cantidad en ese orden de la unidad.

Un análisis general de las expresiones verbales numéricas en castellano permite señalar varias particularidades específicas de la lengua, a saber:

- Se conserva en castellano algunas raíces del latín, a veces fonológicamente vinculadas con el número original en su pronunciación española, a veces no tanto (por ejemplo en el número veinte: de *viginta* en latín, muy lejano al dos-enta; o en el quinientos: de *quinque*, en latín, relativamente lejano del cinco-cientos) y el uso frecuente de contracciones y supresiones de letras (veintiocho: veinte y ocho). Esta característica permiten suponer que el sistema de expresiones numéricas verbales en castellano resulta ligeramente menos transparente que el del inglés.

- La supresión del uno (1) cuando actúa como operador multiplicativo (no decimos uno-cientos o uno-cien) tal y como se utilizaría en inglés (one-hundred), y la adopción del plural o singular como substitución de la regla para este caso particular (cien=1*100; trescientos=3*100).

- Un cierto uso específico de la “y” para denotar una composición aditiva, lo cual ocurre también en la forma inglesa de las palabras numéricas. Sin embargo, parece que en castellano esto ocurre de forma ligeramente diferente, como se observa en el siguiente ejemplo. En inglés la expresión para el numeral 172 es: one hundred and seventy two; en castellano, ciento setenta y dos; aunque en los dos sistemas se utiliza la pausa y la “y” (and) como marcador de composición aditiva, su posición en la frase difiere.

En conclusión, las expresiones verbales numéricas en castellano, tal y como lo mostrábamos para las expresiones arábigas, denotan una secuencia de operaciones aditivas y multiplicativas entre dígitos y ciertas potencias de 10. Estos dos sistemas, el arábigo y el verbal, siguen ciertas reglas comunes, aunque en la aplicación de algunas de ellas se observan diferencias muy importantes. Tal vez la más importante de estas diferencias es el uso del símbolo “0”: en la notación arábiga el cero denota la ausencia de unidades en un orden dado, mientras que en la verbal es la pausa en la vocalización de la secuencia completa (centenas-decenas -unidades) lo que denota esta ausencia. Esto hace del sistema de palabras numéricas verbales un sistema considerablemente más complejo que el de la escritura arábiga.

El desarrollo de la operación multiplicativa en el niño

En estudios previos insistentemente se ha señalado que los niños no siempre construyen la multiplicación y algunos, simplemente no llegan a construirla (Orozco, 1996). Schlieman (1997) señala que los vendedores de dulces no utilizan la multiplicación para resolver tareas de compra-venta de dulces. De acuerdo con Resnick, “los únicos conceptos fáciles de adquirir y que parece se adquieren universalmente, son los basados en la composición aditiva.” (Resnick, 1986, p. 189).

Piaget (1983, 1987) señala que la multiplicación no se puede entender como una manera rápida de sumar repetidamente, sino que es una operación que requiere pensamiento de alto orden, que el niño construye a partir de su habilidad para pensar aditivamente. En esta medida, describe la diferencia entre la multiplicación y la adición en términos de la diferencia en los niveles de abstracción y del número de relaciones de inclusión que un niño puede realizar simultáneamente.

El pensamiento aditivo solamente involucra un primer nivel de abstracción, en el cual, cada unidad que el niño suma está hecha de unos que le exige establecer relaciones de inclusión en un primer nivel: los grupos se combinan sucesivamente. En contraste, la multiplicación involucra dos tipos de relaciones que no son necesarias para la adición: la correspondencia múltiple y la composición de relaciones de inclusión de más de un nivel. En el caso de 3 veces 5, por ejemplo, el niño debe convertir 5 unidades de uno en una unidad de 5; por supuesto, esto exige una abstracción superior a la requerida para pensar en unidades de uno. Ahora bien, al nivel de las unidades de 5 el niño debe contabilizar tres unidades de cinco. En la multiplicación, estas relaciones sucesivas de inclusión se deben dar simultáneamente.

Desde una perspectiva de procesamiento, Anghileri (1989) señala que la adición repetida es un procedimiento más complejo que la suma de dos numerales porque los niños tienen que manejar un patrón interno y guardar cada total. Así, los niños deben utilizar el segundo factor para terminar la reiteración del patrón que el niño utiliza en un punto determinado. En este mismo sentido, uno de nosotros ha señalado que la coordinación de la cota y la operación de reiteración es lo que permite la transformación de las estrategias aditivas en multiplicativas. (Orozco, 1996).

La operación multiplicativa ha sido abordada desde dos perspectivas: la del cálculo de la multiplicación, y la de la resolución de problemas propiamente multiplicativos. En este trabajo nos centraremos en la resolución de problemas, en tanto esta actividad contiene las tareas de calculo y las supera al permitir el examen del tipo de estrategia seguida. Para hacerlo, adoptamos las concepciones propuestas por Vergnaud (1983, 1989) y Behr y cols. (1991), autores que ubican los problemas multiplicativos en el campo conceptual amplio de las estructuras multiplicativas.

Vergnaud (1983, 1989) analiza los problemas pertenecientes al campo conceptual de las estructuras multiplicativas desde la doble perspectiva de sus características matemáticas y las propiedades que resultan más “naturales” a los estudiantes. De acuerdo con este autor, los problemas multiplicativos pueden ser de tres tipos: de proporción simple, de producto de medida y de proporción múltiple.

Los problemas de proporción simple son los más sencillos, y admiten la posibilidad de una resolución exitosa procediendo sobre estrategias aditivas. Los de producto de medida, en contraste, implican el establecimiento de coordinaciones entre dos dimensiones, por lo que podría considerarse que resultan más propiamente multiplicativos que los de proporción simple, al requerir necesariamente el seguimiento de estrategias multiplicativas para su resolución exitosa. Los problemas de proporción múltiple son los más complejos, en tanto involucran reglas de tres múltiples.

La investigación ha mostrado que, en general, frente a problemas multiplicativos, los niños tienden a utilizar estrategias o procedimientos aditivos y que este tipo de estrategia resulta suficiente para resolver correctamente algunos problemas multiplicativos. Esta tendencia persiste aún cuando ya han “aprendido” las tablas de multiplicar (Vergnaud, 1983; Fischbein y cols., 1985; Gómez-Granell, 1987; Siegler, 1988; Anghileri, 1989; Mitchelmore y Mulligan, 1996; Orozco, 1996).

Las estrategias o procedimientos aditivos que los niños utilizan para solucionar problemas multiplicativos son la estrategia de enumeración o conteo, la de complemento y la de suma. Solo después los niños empiezan a utilizar estrategias propiamente multiplicativas.

Síntesis

Tal y como se observa, tanto las expresiones numéricas arábigas como las verbales tienen en común una estructura operatoria de adiciones y multiplicaciones. Por lo tanto quisiéramos proponer que el elemento que permite al niño comprender y producir números en el sistema de notación decimal es el dominio del componente operatorio del sistema.

Un punto deben recalcarse. Primero, aunque la interpretación de un numeral requiera de multiplicaciones y potenciaciones, en sentido estricto estas no se requieren de forma generalizada, sino que se encuentran restringidas a ciertas multiplicaciones específicas (del dígito por el orden la unidad) y a ciertas potenciaciones específicas (todas sobre la misma base: 10). En este sentido, podría pensarse que el sistema tiene una estructura multiplicativa restringida sobre un subconjunto de números enteros: dígitos y potencias de 10.

Así, es previsible que, para el manejo del sistema de notación decimal el niño requiera un cierto nivel de construcción de la operación multiplicativa que no necesariamente pasa por la construcción completa de la operación, sino que puede fundamentarse en construcciones parciales, y específicamente en un multiplicación restringida a ciertos conjuntos de números. Hasta que punto se puede realizar esta construcción parcial? Y más aún, hasta que punto la experiencia con el sistema permite o facilita la construcción de la operación multiplicativa?

Metodología

Diseño

Observación analítica de las relaciones entre la ejecución de dos tareas multiplicativas y dos tareas relativas al manejo del snb10. Se controlan las características individuales de edad- nivel educativo, y el nivel relativo de dificultad en las tareas.

Muestra

Un total de 123 niños y niñas, que cursaban de 1o. a 7o. grados de educación básica primaria, en un colegio privado de alto nivel académico de Cali, Colombia. Los niños provenían de sectores socioeconómicos medios y medios-altos. Las edades de los niños oscilaron entre 6 y 12:9 años, correspondiendo con el grado escolar de la siguiente manera:

Grado	Edad (años)	N
1°	6 - 6:9	18
2°	7 - 7:9	18
3°	8 - 8:9	17
4°	9 -9:9	16
5°	10 -10:9	18
6°	11 - 11:9	18
7°	12 - 12:9	18
Total		123

Tareas

Sistema de notación en base 10

Dos tareas de utilizaron para verificar el nivel de manejo del sistema de notación en base 10: la tarea de escritura de numerales (tarea de dictado de palabras numéricas) y la tarea de equivalencia.

La **tarea de dictado de palabras numéricas** es la que ha sido utilizada con mayor frecuencia para el examen del manejo del sistema de notación decimal. Requiere transformar un imput fonológico que designa una palabra numérica verbal hablada en una gráfica codificada en el formato arábigo. Se trata de una tarea de lápiz y papel. El entrevistador pronuncia el numeral, espera que el niño lo escriba y no permite que borre. Solamente repite los números cuyo rango es mayor que el presupuestado para la edad y grado escolar del niño entrevistado.

En total, se examinaron las producciones de los niños frente a un máximo posible de 24 números, en cuatro diferentes órdenes según el grado. Los números fueron dictados alternando números con, y sin, ceros intermedios en su expresión arábiga., según se muestra en la siguiente tabla.

Grados	Rango numérico presupuestado para el grado	Numerales (expresión arábiga)
1°	10-100	23, 40, 87, 90
2° y 3°	100-1,000	325, 201, 987, 908
4° y 5°	1.000-10.000	1452, 3004, 8967, 9070
6° Y 7°	10.000-1.000.000.000	34223, 20103, 97586, 85007, 543112, 104.002, 987758, 800009, 124322154, 103204000, 698759876, 800069000

Iniciando con la presentación de los números correspondientes al rango presupuestado para el grado del niño, la prueba continuaba con los rangos superiores hasta que el niño cometiera dos errores, caso en el cual se finalizaba.

Sobre la base de la información recogida se efectuó un análisis detallado de los tipos de error cometidos por los niños en sus producciones y de las relaciones entre estos tipos de error y diferentes características del numeral hablado. Estos resultados se presentan en un artículo independiente (Orozco y Hederich, 2000). Para el caso de este artículo, sólo consideraremos como indicador de la tarea de dictado el número de producciones correctas efectuadas por los estudiantes.

La segunda de las tareas a través de las cuales examinamos el estado de construcción del sistema de notación decimal es la que denominamos como **tarea de equivalencia.** Esta tarea examina la comprensión de las relaciones de inclusión de las unidades de orden inferior en las de orden superior. Tal y como lo ha expuesto Kamii (1992), esta tarea es un pre-requisito del manejo del sistema de notación decimal.

Las preguntas formuladas son del tipo:
¿Para formar o tener 325, cuántos de 100 (cuántas centenas) necesitas?
¿Para formar o tener 325, cuántos de 10 (cuántas decenas) necesitas?
¿Para formar o tener 325, cuántos de 1, cuántas unidades necesitas?

Como en el caso de la tarea de escritura, los ítems varían en el rango numérico en función de la edad/grado. La tarea iniciaba con la presentación de un ítem demostrativo, de un rango inferior al presupuestado para el grado, en la forma verbal. Si el niño no conseguía resolver este ítem, se empezaba a variar la forma de presentación hasta llegar a una presentación concreta con monedas sobre la mesa. Si el niño no conseguía resolver este ítem, la prueba se suspendía. En el caso en que si lo consiguiera, se le presentaban el siguiente ítem, sin ceros intermedios siguiendo el mismo criterio expuesto para el ítem demostrativo. En el caso en que este ítem fuera resuelto se presentaba el siguiente.

La siguiente tabla muestra los números en función de los grados.

Grado	Item demostr.	Numerales arábigos
1	12	23 - 58
2 y 3	32	325, 908
4 y 5	32	1452, 9070
6 y 7	32	97586, 20103

Multiplicación

Para la evaluación del estado de construcción de la multiplicación se presentaron dos tipos de problemas: problemas de proporción simple directa (tareas de compra-venta), y problemas de producto de medida: (tareas de área).

La **tarea de proporción simple directa** es, de las tareas multiplicativas, la más simple posible. Se pregunta al niño

¿Alguna vez vas a la tienda a comprar bananas[4]? Yo voy a ser la tendera y te voy a vender bananas. Una banana vale \$5. ¿Cuánto valen 4 bananas?

La tarea se presenta oralmente, sin utilizar objetos materiales. Si el niño no responde, se repite el enunciado a medida que se coloca sobre la mesa 1 banana, frente a ésta, una moneda de \$5, a un lado las 4 bananas, cuyo valor el niño debe obtener.

La **tarea de producto de medida** es, como lo habíamos mencionado, la tarea más típicamente multiplicativa.

(1o. , 2o. y 3er. grados). Se presentan al niño una baldosa y un piso formado completamente por esas baldosas, tapado por una pantalla de forma que solo resultan visibles los cuatro bordes exteriores (las diomensiones del piso varían para cada grado así: 3x4 para 1o, y 7x8 para 2o. y 3o.) y se le dice: Con una baldosa como esta, construí este piso para una casa de muñecas. Este piso tiene baldosas por todas partes. ¿Cuántas baldosas necesité para construirlo? Para los grados restantes solo se hace la presentación verbal con dimensiones diferentes (4o. y 5o grados: 70 x 80; 6o. y 7o: 700x800)

Como en el caso de las tareas del sistema de notación en base 10 los ítems específicos de las tareas multiplicativas varían en función de la edad/grado de los niños modificando el rango de los números implicados y el tipo de presentación (con y sin material)

Grado	Proporción simple	Producto de Medida
1o	4×5	3×4
2o y 3o	5×10	7×8
4o y 5o	5×1.000	70×80
6o y 7o	5×10.000	700×800

Dos variables fueron examinadas en relación con cada una de las dos tareas multiplicativas: 1] el logro frente a la misma (indicado por la expresión de la respuesta esperada) y 2] el tipo de estrategia seguida.

[4] Caramelo típicamente colombiano

Para la determinación de la estrategia, la situación de prueba fue grabada en vídeo y posteriormente analizada. El examen de las cintas permitió inferir la estrategia seguida a partir de la determinación de los tiempos de latencia de respuesta (tiempos muy cortos indicaban estrategias multiplicativas), y del examen de movimientos reiterativos de dedos o cabeza, que podían indicar estrategias enumerativas o aditivas, dependiendo del conteo efectuado.

Procesamiento

Los resultados fueron codificados y digitados para su procesamiento y análisis. Para el análisis exploratorio y el correlacional se utilizó paquete estadístico SPSS(v8). Para el análisis de correspondencias múltiples se utilizo el paquete SPAD(v3.5).

Resultados y discusión

Tareas del sistema de notación en base 10

En relación con la **tarea de escritura** los resultados fueron codificados de acuerdo a la cantidad de producciones correctamente efectuadas hasta un máximo posible de 24. Examinada la muestra en su totalidad, los sujetos efectuaron 16.3 producciones correctas. El mínimo, 4 para 10 sujetos de primer grado y máximo 24, obtenido por 16 sujetos entre los grados 4o. y 7o. Como cabe esperar, existe una muy alta asociación entre el puntaje en la tarea de escritura y el grado cursado por el estudiante (Spearman rho=0.805, sig<0.0001).

Por su parte, la escala según la cual se califica el logro en la **tarea de equivalencia** es de cuatro puntos. El mayor puntaje se refiere a los niños que resolvieron correctamente los dos ítems (41 sujetos, 33%); le siguen aquellos niños que solo resolvieron un ítem (24 niños, 20%), los que sólo resolvieron el ítem demostrativo (47 niños, 38%), y finalmente los que no lograron resolver ningún ítem (11 niños, 9%)[5]. No parece haber una relación entre este puntaje y el grado cursado por el estudiante (rho=0.050, sig.=0.581).

Esta baja correlación entre la tarea de equivalencia y el grado del estudiante podría estar indicando varias puntos.

Primero, la tarea de equivalencia examina un factor de inclusión aditiva de las unidades de orden inferior en las de orden superior (32 decenas en 325) que se contradice directamente con el modelo imperante en la escuela o modelo de “valor de posición” (según el cual hay 2 decenas en 325). Esta situación puede alterar los resultados de la correlación entre las dos tareas elevando los puntajes de equivalencia en grados inferiores, que no han tenido gran exposición al modelo escolar, y disminuyéndola en grados superiores. Esto podría sugerir que el indicador de la tarea de equivalencia esté distanciado de la competencia que realmente se quiere evaluar.

El examen de la asociación entre los puntajes de escritura y equivalencia muestra una correlación que, si bien resulta significativa, es moderadamente baja (rho=0.236, sig=0.0086). Esta situación no nos aclara de

[5] Hemos suprimido, para efectos de este análisis la información relativa al modo de presentación en que el niño logra la resolución de los ítems. Los detalles al respecto pueden ser encontrados en el informe técnico presentado a Colciencias.

manera satisfactoria la pertinencia de las dos variables como indicadoras del uso del sistema de notación decimal. Para aclarar un poco las características de esta relación se calcularon las correlaciones de forma independiente para cada grado. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Correlaciones entre escritura y equivalencia por grado

GRADO	Corr	Sig
1	-0.0113	0.9645
2	0.7313	0.0006
3	0.5303	0.0236
4	0.2990	0.2606
5	-0.1586	0.5433
6	0.3904	0.1093
7	0.0716	0.7777

Tal y como se observa, las mayores correlaciones entre las dos tareas se presentan en segundo y tercer grados. Es difícil interpretar este resultado, si bien podríamos suponer que podría estar indicando que la tarea de equivalencia parece estar relacionada con la tarea de en un cierto momento específico de apconstrucción del sistema de notación. Los niños de segundo y tercer grado se encuentrarían en el momento crítico en el que se estructurarían la relaciones de inclusión entre las diferentes unidades del sistema. A partir del tercer grado, todos los niños estarían en capacidad de resolver de forma satisfactoria la tarea de equivalencia, si bien la interferencia del modelo de “valor de posición” haría cada vez más difícil que el niño expresara la respuesta esperada para esta tarea. No resulta clara la ausencia de correlaciones en primer grado.

En general, podemos aceptar que la tarea de escritura podría considerarse un indicador mucho más directo del uso del sistema de notación decimal que la tarea de equivalencia, en tanto la primera involucra el manejo de la notación arábiga al tiempo que de la notación numérica verbal, mientras que la segunda podría constituir un indicador indirecto del factor de comprensión del numeral arábigo, enmascarado por factores relativos a las particularidades del aprendizaje matemático en la escuela.

Tareas multiplicativas

Como se recordará, dos tareas multiplicativas fueron examinadas: la tarea de proporción símple directa y la tarea de producto de medida, y en cada una de ellas, dos indicadores fueron obtenidos: el indicador de logro y el de la estrategia seguida.

Iniciando con la **tarea de proporción simple directa**, los resultados indican que la tarea resulta bastante sencilla para la generalidad de los niños. Examinada la muestra en general, el 94% de los sujetos resuelven la tarea de proporcionalidad simple exitosamente: sólo 9 sujetos fracasaron en esta tarea. En relación con las estrategias seguidas para resolver esta tarea los resultados indican un tendencia mayoritaria a seguir una estrategia multiplicativa (64%), le sigue en orden de frecuencia un 28% de sujetos que utilizan estrategias aditivas y una minoría, de menos del 8%, que siguen estrategias de enumeración. Es observable una relación significativa entre estos dos indicadores: los sujetos que llevan estrategias multiplicativas , y en menor grado aditivas tienden a producir la respuesta correcta, mientras que los sujetos que siguen estrategias de enumeración muestran una mayor tendencia a producir respuestas incorrectas (rho=0.2618 sig=0.0042).

La relación entre el logro en la tarea de proporción simple y el grado es prácticamente nula: de los 9 sujetos que fracasaron en esta tarea, 5 están entre primero y segundo grado, y los 4 restantes estan entre sexto y séptimo grado (rho=0.0452 sig=0.6238). Otro es el caso de la relación entre la estrategia seguida y la edad-grado: de los 9 sujetos siguieron una estrategia enumerativa, 8 de ellos se encuentran entre 1o. y 2o. grados, la correlación entre grado y estrategia en esta tarea es bastante alta (rho=0.6267 sig<0.0001). Este resultado confirma el caracter evolutivo de la estrategia seguida.

Los resultados de la **tarea de producto de medida** muestran que esta tiende a ser considerablemente más difícil para los niños que la de proporción simple: sólo 43 sujetos (35%) la resuelven exitosamente. En relación con la estrategia seguida, los sujetos se ubican, en proporciones similares frente a las tres estrategias: el 33% multiplica, el 32% adiciona y el 35% enumera. Como en el caso de la tarea de producto de medida, es observable una relación significativa entre el éxito y la estrategia seguida, si bien en este caso la relación es bastante más fuerte: mientras que los sujetos que llevan estrategias multiplicativas resuelven la tarea exitosamente en un 72% de los casos, en los sujetos que enumeran esto solo ocurre en el 22%. (rho=0.4135 sig<0.0001)

Como sucedía en la tarea de proporción simple, la relación entre el logro en la tarea de producto de medida y el grado cursado por el estudiante es bastante escasa. Sujetos cursando todos los grados parecen tener éxito o fracaso en la tarea sin que se detecte una asociación apreciable (rho=0.0650, sig=0.4771). En contraste, los resultados sobre la estrategia seguida muestran un alto nivel de asociación entre el grado y la estrategia (rho=0.6908, sig<0.0001), que incluso supera al encontrado para el caso de la tarea de proporción simple. Este resultado confirma el caracter evolutivo de la estrategia.

El examen de las relaciones entre las dos tareas multiplicativas es bastante esclarecedor. En relación con el logro, 42 sujetos tienen éxito en las dos tareas, 69 sujetos tienen éxito sólo en la tarea de proporción simple y 9 sujetos no resuelven exitosamente ninguna de las dos tareas. En ningún caso se reuelve la tarea de producto de medida sin resolver la de proporción simple. Este resultado es perfectamente coherente con el supuesto de mayor complejidad de la tarea de producto de medida.

La asociación entre las estrategias seguidas muestra que, en la gran mayoría de los casos, los sujetos tienden a llevar la misma estrategia para las dos tareas (52 casos, 44% del total) o bien muestran estrategias más complejas en la tarea de proporción simple que en la de producto de medida (61 casos, 52% del total). Sólo 5 casos son excepciones a esta regla: en 4 de ellos se sigue una estrategia multiplicativa en producto de medida y aditiva en proporción simple, y en 1 caso se sigue una estrategia aditiva en producto de medida y enumerativa en proporción simple. Estos resultados son coherentes con lo ya encontrado antes en el sentido en que indican, dentro de un marco de relativa estabilidad de las estrategias, que los niños tienden a retornar al uso de estrategias menos complejas en el abordaje de problemas más difíciles. De cualquier forma, la correlación entre los niveles de complejidad de las estrategias seguidas en las dos tareas es bastante alta y significativa: a mayor complejidad de la estrategia seguida en una tarea, mayor complejidad de la estrategia seguida en la otra. (rho=0.5151, sig.<0.0001)

		Estrategia en proporción simple			**Total**
		Enumera	Adiciona	Multiplica	
	Enumera	8	20	13	41
		19.51	48.78	31.71	34.75
		88.88	60.61	17.11	
Estrategia seguida en producto de medida	Adiciona	1	9	28	38
		2.63	23.6842	73.6842	32.20
		11.11	27.2727	36.8421	
	Multiplica	0	4	35	39
		0	10.2564	89.7436	33.05
		0	12.1212	46.0526	
Total		9	33	76	118
		7.63	27.97	64.41	100

Relaciones entre los dos tipos de tareas

Para el examen de las relaciones entre las dos tareas procedimos de dos formas: 1] el examen de las correlaciones ordinales (Spearman rho); y 2] un análisis de correspondencias múltiples.

Análisis correlacional

Los resultados de las correlaciones se muestran en la tabla anexa. Varios puntos se pueden resaltar.

Tal y como se observa, el examen de las asociaciones entre el puntaje de la tarea de dictado de palabras numéricas y las tareas multiplicativas muestra correlaciones muy altas, y muy particularmente en relación con los niveles de complejidad de las estrategias seguidas en las tareas (en proporción simple, rho=0.582, sig.< 0.0001; en producto de medida, rho=0.688, sig<0.0001). Las asociaciones entre escritura y resolución exitosa en tareas multiplicativas es más bien bajo.

Algo similar, aunque no tan claro lo muestran las asociaciones entre la tarea de equivalencia y las dos tareas multiplicativas, si bien en este caso las correlaciones son más bien moderadamente bajas. Como en el caso anterior, las asociaciones entre logro en equivalencia y éxito en las tareas multiplicativas son mas bien bajas. Este punto será examinado con mayor profundidad más adelante.

Los resultados confirman en buena medida las hipótesis que nos formulamos al iniciar este trabajo, en el sentido en que muestran una alta asociación entre el proceso de construcción de la multiplicación y el manejo del sistema en base 10, y muy específicamente entre la tarea de escritura de numerales verbales y las estrategias seguidas en los dos problemas multiplicativos.

		Tareas del sistema de notación decimal		Tareas multiplicativas				Grado
		Escritura	Equival.	Proporción simple		Producto de medida		
				Logro	Estrategia	Logro	Estrategia	
Escritura	Correlac	1.0000	0.2359	0.1543	**0.5823**	0.2308	**0.6879**	**0.8054**
	signific	.	0.0086	0.0924	0.0000	0.0105	0.0000	0.0000
Equival.	Correlac	0.2359	1.0000	0.2803	0.3537	0.2470	0.2730	0.0503
	signific	0.0086	.	0.0019	0.0001	0.0061	0.0023	0.5810
Logro en pr. simple	Correlac	0.1543	0.2803	1.0000	0.2618	0.2089	0.1788	0.0452
	signific	0.0924	0.0019	.	0.0042	0.0220	0.0507	0.6238
Estrat. (pr. simple)	Correlac	**0.5823**	0.3537	0.2618	1.0000	0.2749	**0.5151**	**0.6267**
	signific	0.0000	0.0001	0.0042	.	0.0026	0.0000	0.0000
Logro (pr. medida)	Correlac	0.2308	0.2470	0.2089	0.2749	1.0000	0.4135	0.0650
	signific	0.0105	0.0061	0.0220	0.0026	.	0.0000	0.4771
Estrat. (pr. medida)	Correlac	**0.6879**	0.2730	0.1788	**0.5151**	0.4135	1.0000	**0.6908**
	signific	0.0000	0.0023	0.0507	0.0000	0.0000	.	0.0000
Grado	Correlac	**0.8054**	0.0503	0.0452	**0.6267**	0.0650	**0.6908**	1.0000
	signific	0.0000	0.5810	0.6238	0.0000	0.4771	0.0000	.

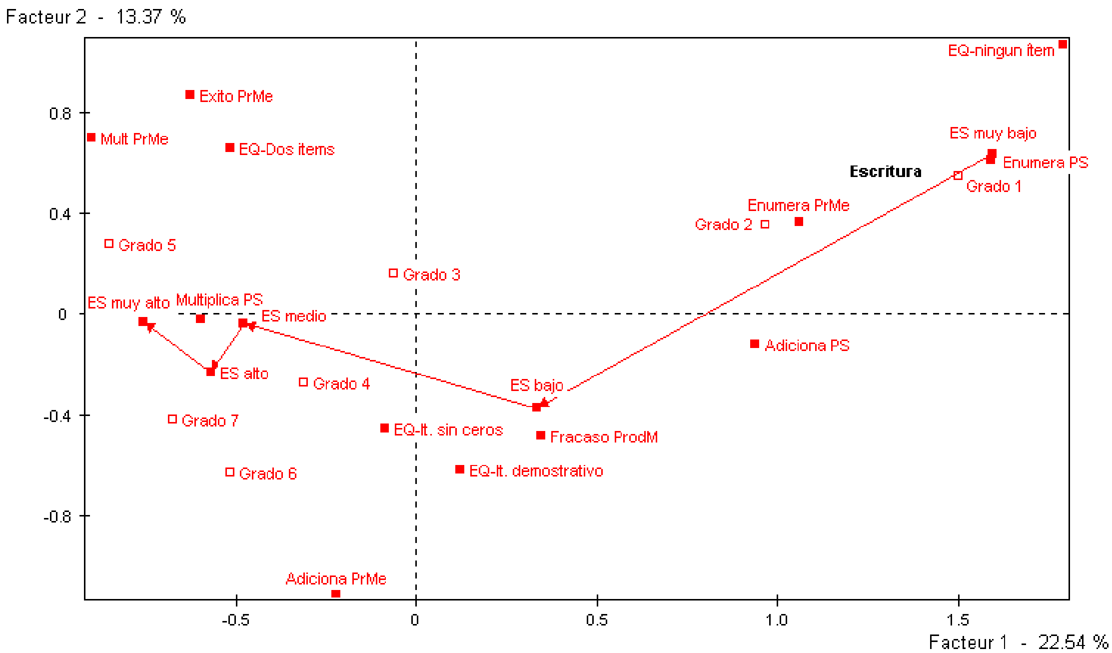
Análisis de correspondencias

Para el análisis de correspondencias múltiples, se incluyeron como variables principales[6] los resultados de las tareas de escritura, equivalencia y las dos tareas multiplicativas. Después de las primeras exploraciones se excluyó de este grupo de variables la del exito o fracaso en la tarea de proporción simple, dado el hecho de que casi la totalidad de la muestra resolvió esta tarea exitosamente. Además de estas variables, se consideró como variable ilustrativa[7] el grado cursado por el estudiante.

El procedimiento genera un total de 12 factores (o valores propios) que explicarían el 100% de la variación. Se observa una fuerte distancia entre el primer factor (con un valor propio de 0.59, explica el 22.5% de la variación) y el segundo (con un valor propio de 0.32, ya solo explica el 13.4% de la variación). A partir del tercer factor los valores propios son despreciables. Los resultados del cruce entre los dos primeros factores, que explican la mayor parte de la variación en los datos (36%), se sintetizan en la siguiente gráfica.

[6] También llamadas "variables nominales activas" o variables efectivamente consideradas en la generación de los factores

[7] Aunque se grafican en el mapa, no son utilizadas para la generación de factores.



Tal y como se observa, el primer factor separa de forma drástica las categorías que resultan indicadores de altos logros en todas las tareas (a la izquierda de la gráfica) de las indicadoras de bajos logros (a la derecha de la gráfica). Contribuyen de forma especialmente alta a este factor el **logro en escritura**, y **las estrategias seguidas en las tareas de proporción simple y producto de medida**.

El segundo factor no ofrece una interpretación tan clara como el primero. Según parece, este factor diferencia, por un lado los sujetos con valores medios en las tareas de equivalencia y multiplicación, de los valores extremos, muy altos o muy bajos. Contribuyen de forma notable este factor **la tarea de equivalencia**, y **el éxito y la estrategia en la tarea de producto de medida.**

En síntesis, el análisis de correspondencia vincula de forma estrecha en el primer factor el éxito en la tarea de escritura con la estrategia seguida en la tarea de proporción simple; en el segundo factor, se vinculan los resultados en la tarea de equivalencia y el éxito en la tarea de producto de medida. Los dos factores comparten altas contribuciones de la estrategia seguida en la tarea de producto de medida.

Varios puntos deben recalcarse en estos resultados. En primer lugar el fuerte vínculo del manejo del sistema de notación decimal con la estrategia seguida en la tarea de proporción simple y producto de medida, indican la estrecha asociación entre el manejo del sistema de notación decimal (indicado por la escritura) y el uso de estrategias multiplicativas en la resolución de problemas.

En segundo lugar, debe observarse la separación entre la tarea de escritura y la tarea de equivalencia en factores diferentes. Podríamos pensar que la tarea de equivalencia parece examinar un manejo mucho más complejo del sistema de notación que el implicado por la simple escritura de numerales.

En efecto, una posibilidad de resolver de forma correcta la tarea de equivalencia consiste en operar directamente sobre la forma arábiga del numeral: así, sobre el numeral “325” pueden obtenerse el numero de decenas simplemente “ignorando” el último dígito: 32 decenas, y procediendo de la misma forma para el numero de centenas. Esta mecanica de rtesolución fue claramente observable en algunos muchachos, en los que fueros observados sus escasos tiempos de respuesta frente a esta tarea. Este tipo de procedimiento parece usar el formato arábigo para, mediante la aplicación de un algorítmo sobre la cadena textual de dígitos, obtener la respuesta correcta con óptima eficiencia: máximo de precisión y mínimo de recursos de memoria. En este sentido podría considerarse la tarea de equivalencia como indicadora de un manejo mucho más complejo del sistema de notación decimal, en el que este pasa a ser un insumo para la aplicación de un algorítmo.

Así, estamos frente a una situación difícil: en un cierto sentido la tarea de equivalencia indicaría manejos muy elaborados del sistema de nortación decimal, en otro podría considerarse que tales manejos son tan elaborados que, realmente, la tareas de equivalencia supera lo que puede ser considerado como manejo mismo del sistema de notación. No tenemos absoluta claridad al respecto: posiblemente parte del problema sean las cantidades efectivamente incluídas en la tarea, que superan las que estrictamente serían necesarias para el manejo del sistema (esto es dígitos y potencias de 10) y que indagan por multiplicaciones muchos más generalizadas (p.e. 700x800). Esta duda podría ser aclarada más adelante adecuando las particuñaridades de la tarea.

La situación de los grados en este mapa de variables muestra a los primeros grados muy cercanos a los bajos logros en todas las tareas, y a los grados superiores más cercanos a los altos logros (primer factor). Respecto del segundo factor, pareciera establecer una separación de los últimos grados (6o y 7o) que los vincularia con logros intermedios en la tarea de equivalencia y con estrategias aditivas en la tarea de producto de medida. Esto podría explicarse en relación con ciertas características de la matemática aprendida en la escuela, ya mucho más cristalizadas en los niños de estos grados, que dificulta de forma notable la resolución exitosa de la tarea de equivalencia (recuerdese que, según la concepción imperante en la matemática escolar, el numeral “325” contiene sólo 2 decenas).

Conclusiones

Existe una clara relación entre el desarrollo de la operación multiplicativa en el niño y su manejo del sistema de notación decimal. Presumiblemente, esta relación se encuentra limitada a manejos multiplicativos restringidos a cierto rango de números enteros (dígitos y potencias de 10) sin que, al parecer, se requiera de una multiplicación generalizada para el correcto uso del sistema notacional.

La relación entre multiplicación y uso del sistema notacional se encuentra estrecha y directamente vinculada con el grado cursado y la edad de los sujetos, aunque se observan interesantes variaciones en relación con los últimos grados. En efecto, los sujetos de los grados 6o y 7o. parecen retornar a uso de estrategias aditivas para la resolución de problemas multiplicativos complejos y a mantener, de forma fija, ciertas concepciones erróneas de la matemática escolar respecto del sistema de notación decimal. Aunque esta situación no parece afectar su rendimiento en la escritura de numerales, si evidencian una relativa dificultad para hacer manejos flexibles de la notación decimal que, presumimos, aparecerán después vinculados con un manejo de la información matemática de tipo más bien mecánico y algorítmico que verdaderamente comprensivo.

Bibliografía

Anghileri, J. (1989). An investigation of young children’s understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 367-385.

Berh, M. J., Harel, G., Post, T., Lesh, R. (1991). Rational numbers: Toward a semantic analysis - emphasis on the operator construct. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Learning, Teaching and Assessing Rational Number Concept: Multiple Research Perspectives*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Bourbaki (1969). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza (1976).

Campbell, J.I.D. & Clark, J.M. (1992). Cognitive number processing: an encoding complex perspective. In J.J.D. Campbell (Ed.), *The Nature and Origins of Mathematical Skill*.

Carraher, T. N. (1986). From drawings to buildings; working with mathematical scales. *International Journal of Behavioral Development*, 9, 527-544.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44, 1-42.

Fischbein, R., Deri, M., Nello, M., y Marino, M. (1985). The Rol of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3-17.

Fuentes Loss, M. (1996). *La comprensión y producción de numerales en niños sordos*. Barcelona: Tesis Doctoral, Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación, Facultad de Psicología, Universidad de Barcelona.

Gómez-Granell, C. (1987). *Representación y simbolización en el marco de problemas multiplicativos*. Barcelona: Tesis doctoral no publicada. Universidad de Barcelona.

Kamii, C. (1986). Place Value: An explanation of its difficulty and implications for the primary grades. *Journal for Research in Childhood Education*, 1,. 75-86.

Kamii, C. (1992). *Reinventando la aritmética II*. Madrid: Aprendizaje-Visor.

Lee, K. y Karmiloff-Smith, A. (1996). The Development of External Symbol Systems: The Child as a Notator. En: Gelman, R. & Kit-Fong Au, T. (Eds.) *Perceptual and Cognitive Development*. San Diego: Academic Press, 185-241

Lerner, D. y Sadovsky, P. (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En Parra, C. y Saiz, J. (comp.), *Didáctica de las matemáticas*. Buenos Aires, Paidós, 95-184.

Martínez-Ruiz, S. (1995). *Análisis evolutivo del principio de valor posicional en situaciones de producción, interpretación y uso de numerales*. Barcelona: (Tesis Doctoral) Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación, Facultad de Psicología, Universidad de Barcelona.

McCloskey, M., (1992). Cognitive mechanisms in numerical processing: Evidence from acquired dyscalculia. *Cognition*, 44, 107-157.

McCloskey, M., Aliminosa, D., y Sokol, S. (1991). Facts, rules and procedures in normal calculation: Evidence from multiple single-patient studies of impaired arithmetic fact retrieval. *Brain and Cognition*, 17, 154-203.

McCloskey, M., Caramazza, A. (1985). Cognitive Mechanisms in Number Processing and Calculation: Evidence from Dyscalculia. *Brain and Cognition*, 4, 171-196.

Mitchelmore, M., Mulligan, J. (1996). Children’s developing multiplication and division strategies. In L. Puig, A. Gutiérrez (Eds.). *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 3. Valencia (Spain): Universitat de València. Dept. de Didàctica de la Matemàtica, 407-414.

Orozco, M. (1996). *Estudio microgenético y procesual de la construcción de la operación multiplicativa*. Barcelona: Tesis Doctoral, Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación, Facultad de Psicología, Universidad de Barcelona.

Orozco, M. y Hederich, C. (2000). Errores de los niños al escribir numerales dictados. (En prensa).

Piaget, J. (1987). *Possibility and Necessity*. Minneapolis: University of Minnesota Press. (Trabajo Original Publicado en 1983).

Pontecorvo, C. (1996). La notación y el razonamiento con números y nombres en el período preescolar y en la escuela primaria. *Infancia y Aprendizaje*, 74, 3-24

Resnick, L. (1983). A development theory of number understanding. En H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. Nueva York: Academic Press, 110-151.

Resnick, L. B. (1986). The development of mathematical intuition. In M.. Perlmutter (Ed.), *Perspectives on Intellectual Development*. Minnesota Symposia on Child Psychology, 9, 159-194.

Scheuer, N., Sinclair, A., Merlo de Rivas, S. y Tièche, C.. (2000) Cuando ciento setenta y uno se escribe 10071: niños de 5 a 8 años produciendo numerales. *Infancia y Aprendizaje*, 90, 31-50.

Schliemann, A. D. (1997). Razonamiento lógico-matemático en contextos socioculturales. Dossier-Debate *Revista Colombiana de Psicología*, 5-6, 11-19.

Siegler, R. S. (1988). Strategy choice procedures and the development of multiplication skills. *Journal of Experimental Psychology General*, 117, 258-275.

Sinclair, A. (1988). La notation numérique chez l'enfant. En H. Sinclair (comp). *La production de notations chez le jeune enfant: langage, nombre, rytmes et mélodies*. Paris: PUF, 71-98.

Tolchinsky, L., Karmiloff-Smith, A. (1991). Las restricciones del conocimiento notacional. *Psicología Educativa*, 16-17, 39-90.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics: Concepts and Processes*. New York: Academic Press, 128-174.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert, J. and M. Behr. *Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Vol 2*. Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Second Printing 1989, 141-161.

Anexo

ANALISIS DE CORRESPONDENCIAS MÚLTIPLES
TOTAL DE INDIVIDUOS ACTIVOS : 118.00
SUMA DE VALORES PROPIOS 2.4000
HISTOGRAMA DE LOS 12 PRIMEROS VALORES PROPIOS

FAC	Valor propio	Porcen	Porcen acum	Histograma
1	0.54	22.54	22.54	** ****************
2	0.32	13.37	35.91	**
3	0.25	10.50	46.41	**************************************
4	0.23	9.73	56.14	***********************************
5	0.22	9.06	65.21	*********************************
6	0.18	7.60	72.81	***************************
7	0.17	7.24	80.05	**************************
8	0.15	6.45	86.49	***********************
9	0.13	5.24	91.74	*******************
10	0.09	3.66	95.40	*************
11	0.07	2.91	98.30	***********
12	0.04	1.70	100.00	*******

ANALISIS DE CORRESPONDENCIAS MÚLTIPLES
COORDENADAS Y CONTRIBUCIONES DE CADA CATEGORIA A LOS CINCO PRIMEROS VALORES PROPIOS

Modalidades			Coordenadas					Contribuciones				
Nombre de la categoría	**P.R.**	**DIST**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Exito producto de medida												
EX01 - Fracaso ProdM	12.88	0.55	0.35	-0.48	0.31	-0.01	0.01	2.90	9.30	4.90	0.00	0.00
EX02 - Exito ProdM	7.12	1.81	-0.63	0.87	-0.56	0.02	-0.01	5.20	16.80	8.80	0.00	0.00
			Contribución acumulada					8.00	26.10	13.70	0.00	0.00
Estrategia producto de medida												
ES01 - Enumera ProdM	6.95	1.88	1.06	0.37	-0.04	0.11	0.17	14.50	2.90	0.10	0.30	0.90
ES02 - Adiciona ProdM	6.44	2.11	-0.22	-1.11	0.24	0.10	0.01	0.60	24.90	1.40	0.30	0.00
ES03 - Multiplica ProdM	6.61	2.03	-0.90	0.70	-0.18	-0.21	-0.19	9.90	10.00	0.90	1.30	1.10
			Contribución acumulada					24.90	37.80	2.40	1.90	2.00
Estrategia proporción simple												
ES01 - Enumera PS	1.53	12.11	1.59	0.61	1.70	0.38	-1.22	7.10	1.80	17.50	1.00	10.40
ES02 - Adiciona PS	5.59	2.58	0.94	-0.12	-0.75	-0.14	0.30	9.10	0.30	12.60	0.50	2.30
ES03 - Multiplica PS	12.88	0.55	-0.60	-0.02	0.13	0.01	0.02	8.50	0.00	0.80	0.00	0.00
			Contribución acumulada					24.70	2.00	30.90	1.40	12.70
Tarea de equivalencia												
EQ01 - EQ-ningun ítem	1.69	10.8	1.79	1.06	-0.33	-0.34	-0.05	10.00	6.00	0.70	0.80	0.00
EQ02-EQ-It. demostrativo	7.46	1.68	0.12	-0.62	-0.41	0.64	-0.26	0.20	8.80	4.90	13.30	2.40
EQ03 - EQ-It. sin ceros	3.9	4.13	-0.09	-0.46	0.04	-1.47	-0.17	0.10	2.50	0.00	35.80	0.50
EQ04 - EQ-Dos items	6.95	1.88	-0.52	0.66	0.49	0.21	0.39	3.40	9.40	6.70	1.40	4.80
			Contribución acumulada					13.70	26.70	12.30	51.30	7.80
Tarea de escritura												
ES01 - ES muy bajo	4.07	3.92	1.59	0.63	0.47	-0.11	-0.16	19.10	5.10	3.50	0.20	0.50
ES02 - ES bajo	3.39	4.9	0.33	-0.37	-1.51	-0.13	0.21	0.70	1.50	30.60	0.20	0.70
ES03 - ES medio	3.73	4.36	-0.48	-0.04	0.33	1.23	1.03	1.60	0.00	1.60	24.00	18.10
ES04 - ES alto	4.41	3.54	-0.57	-0.23	0.53	-1.04	0.68	2.60	0.70	5.00	20.20	9.20
ES05 - ES muy alto	4.41	3.54	-0.75	-0.03	-0.08	0.20	-1.55	4.60	0.00	0.10	0.70	49.00
			Contribución acumulada					**28.60**	7.30	40.70	45.40	77.50