

**Študentská vedecká konferencia  
FMFI UK, Bratislava, 2011  
Zborník príspevkov**

**Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzita Komenského, Bratislava  
19. apríl 2011**

**Proceedings of the  
Student Science Conference 2011**

**Faculty of Mathematics, Physics and Informatics  
Comenius University, Bratislava  
April 19, 2011**





**Študentská vedecká konferencia  
FMFI UK, Bratislava, 2011  
Zborník príspevkov**

**Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzita Komenského, Bratislava  
19. apríl 2011**

**Proceedings of the  
Student Science Conference 2011**

**Faculty of Mathematics, Physics and Informatics  
Comenius University, Bratislava  
April 19, 2011**



Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2011: Zborník príspevkov

Editori: Tomáš Plachetka, Daniel Ševčovič, Tomáš Vinař

Autor loga: Matej Novotný

Vydavateľ: Knižničné a edičné centrum, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky,  
Univerzita Komenského, Bratislava (Library and Publishing Centre, Faculty of Mathematics,  
Physics and Informatics, Comenius University, Bratislava)

Vytlačil: OKAT PLUS s.r.o.

Náklad: 50

Vydanie: prvé

Počet číslovaných strán: 407

Miesto a rok vydania: Bratislava, 2011

ISBN 978-80-89186-87-7

Zborník obsahuje príspevky účastníkov Študentskej vedeckej konferencie,  
ktorá sa konala 19. apríla 2011 na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzity Komenského v Bratislave

<http://www.fmph.uniba.sk/svk>

Zborník © 2011 Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava  
Články © 2011 autori jednotlivých článkov

## Predhovor

Zborník obsahuje príspevky zo Študentskej vedeckej konferencie, ktorá sa konala 19. apríla 2011 na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave. Študentská vedecká konferencia má na fakulte dlhoročnú tradíciu a je príležitosťou pre študentov bakalárskeho, magisterského a doktorandského štúdia prezentovať vlastné vedecké a odborné práce z rozličných odborov matematiky, fyziky, informatiky, didaktiky týchto disciplín a ich filozofických aspektov.

V roku 2011 bolo na konferenciu prihlásených 95 príspevkov v desiatich tématických sekciách. Každý článok bol recenzovaný jedným až tromi recenzentami a posudzovaný odbornou komisiou. Na základe tohto procesu bolo do zborníka vybraných 46 článkov. Zvyšné príspevky sú v zborníku zastúpené formou jednostranového abstraktu. Príspevky boli prezentované 19. apríla 2011 na celodennej konferencii v priestoroch fakulty a odborné komisie udelili v rámci jednotlivých sekcií ocenenia 30 víťazom a 62 laureátom ŠVK. Komisie navrhli udeliť desať cien Literárneho fondu, cenu Slovenskej informatickej spoločnosti, a cenu Agentúry pre vzdelanie a vedu SEA. Pre širokú verejnosť tiež odznela plenárna prednáška Prof. RNDr. Pavla Zlatoša, CSc. na tému "Otázka bezospornosti základov matematiky na začiatku 21. storočia".

Chceme poďakovať všetkým predsedom a členom jednotlivých odborných komisií, organizátorom, sponzorom a predovšetkým študentom, ktorí na konferencii prezentovali svoje príspevky. Ďakujeme za mimoriadne úspešný priebeh konferencie a tešíme sa na Študentskú vedeckú konferenciu 2012.

Júl 2011

Tomáš Plachetka  
Daniel Ševčovič  
Tomáš Vinař

## Sponzori



SLOVENSKÁ  
INFORMATICKÁ  
SPOLOČNOSŤ



SEA  
agentúra pre vzdelanie a vedu



## Zloženie komisií

**Organizačný výbor:** Dr. Tomáš Plachetka; prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.; prof. RNDr. Ján Urban, DrSc.; Mgr. Tomáš Vinař, PhD

### Predsedovia odborných komisií:

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.	matematika
prof. RNDr. Melánia Babincová, CSc.	biofyzika
doc. RNDr. Anna Zahoranová, PhD	experimentálna fyzika
doc. RNDr. Ivan Sýkora, PhD	jadrová fyzika
doc. RNDr. Jaroslav Staníček, CSc.	aplikovaná jadrová fyzika
doc. Ing. Igor Farkaš, PhD	aplikovaná informatika
RNDr. Ela Šikudová, PhD	počítačová grafika
doc. RNDr. Rastislav Královič, PhD	teoretická informatika a teória grafov
RNDr. Ľudmila Jašková, PhD	didaktika informatiky
PaedDr. Mária Slavíčková, PhD	didaktika matematiky a fyziky

**Ďalší recenzenti:** Stanislav Antalic, Martin Baláž, Pavol Beluško, Daniela Bezáková, Andrej Blaho, Radoslav Böhm, Peter Borovský, Miloš Božek, Katarína Boďová, Broňa Brejová, Pavel Brunovský, Ignác Bugár, Zuzana Černeková, Soňa Chalupková, Marek Chmelík, Jana Dadová, Roman Ďurikovič, Pavol Fabo, Marián Fecko, Andrej Ferko, Jarko Fidrmuc, Marek Fila, Michal Forišek, Peter Fúsek, Andrej Gendiar, Miroslav Grajcar, Peter Guba, Zuzana Haladová, Margaréta Halická, Radoslav Harman, Viera Haverlíková, Tibor Hianik, Vladimír Hlinka, Karol Holý, Gabriel Horváth, Peter Horváth, Michal Hucko, Peter Jacko, Vladimír Juráš, Jozef Kačur, Ivan Kalaš, Jana Katreniaková, Iveta Kohanová, Lilla Koreňová, Dušan Kováčik, Zuzana Kubincová, Zbyněk Kubáček, Ivan Kupka, Vladimír Lacko, Pavel Mach, Zdenko Machala, Igor Melicherčík, Vladimír Mesároš, Andrej Mihálik, Martin Mojžiš, Monika Müllerová, Edita Máčajová, Daniel Olejár, Peter Papp, Marta Pémová, Pavel Petrovič, Miroslav Pikna, Jaroslav Polec, Pavol Quittner, Michaela Regecová, Tomáš Roch, Branislav Rován, Gabriel Ruttkay-Nedecký, Peter Rybár, Martin Samuelčík, Ján Šefránek, Zuzana Siebertová, Branislav Sitár, Martin Stanek, Michal Stano, Juraj Starinský, Beáta Stehlíková, Jana Szolgayová, Stanislav Tokár, Monika Tomcsányiová, Ivan Trenčanský, Mária Trnovská, Viera Uherčíková, Július Vanko, Tomáš Vinař, Miroslav Zahoran, Juraj Zeman, Jana Útla, Vladimír Černý, Pavla Ňuňuková, Libuša Šikurová, Fedor Šimkovič, Jozef Šiška, Martin Škoviera, Miloš Šrámek, Ján Žižka

# Obsah

## Matematika

### Recenzované články

<i>P. Dižo</i> : Matematické modelovanie pohybu makrofágu (neutrofilu) pri hojení infekcií	1
<i>T. Rusin</i> : O funkciách bez základnej periódy . . . . .	10
<i>M. Ždanský</i> : Minkowského priestor a hyperbolická geometria . . . . .	17
<i>B. Drobná</i> : Odhad odvodu daní z rodinných účtov . . . . .	18
<i>J. Minár</i> : Numerické modelovanie optimálneho riadenia . . . . .	30
<i>S. Peres</i> : Riešiteľnosť obyčajných diferenciálnych rovníc druhého rádu s nelineárnymi okrajovými podmienkami . . . . .	41
<i>I. Vilček</i> : Optimalita akciových indexov . . . . .	53

### Abstrakty

<i>J. Beran</i> : Maximum principle for infinite horizon discrete time optimal control problems	66
<i>K. Daniková</i> : The new Keynesian Phillips curve for the Czech Republic . . . . .	67
<i>V. Lacko</i> : Planning of experiments for a nonautonomous Ornstein-Uhlenbeck process	68
<i>V. Novák</i> : Performance evaluation of priority rules in job scheduling with abandonments . . . . .	69
<i>Z. Zíková</i> : Convergence model of interest rate . . . . .	70

## Biofyzika

### Recenzované články

<i>I. Karpíšová</i> : Štúdium fázových prechodov DNA aptaméru citlivého na ochratoxín .	71
<i>M. Morvová</i> : Zmeny v aktivite enzýmu $\text{Ca}^{2+}$ -ATPázy pri chronickom ochorení obličiek (CKD) . . . . .	75
<i>M. Pelach</i> : Porovnanie priameho a nepriameho pôsobenia nízkoteplotnej atmosférickej plazmy na bakteriálne kultúry . . . . .	77
<i>M. Považan, M. Tkačov</i> : In vivo $^{31}\text{P}$ MRS v pečeni na 7T: Stanovenie $T_1$ relaxačných časov . . . . .	80
<i>Z. Šípoldová</i> : Bio-dekontaminácia zubných povrchov a dutín pomocou DC korónových výbojov . . . . .	89
<i>V. Šubjaková</i> : Štúdium fyzikálnych vlastností dvojvrstvových lipidových membrán modifikovaných kalixarénmi . . . . .	99
<i>B. Tarabová</i> : Bio-dekontaminácia vody pomocou DC výbojov a skúmanie mechanizmov pôsobenia nerovnovážnej plazmy na bakteriálne bunky . . . . .	104
<i>V. Vargová</i> : Štúdium interakcie cytochrómu c s unilamelárnymi lipozómami modifikovanými kalix[6]arénom . . . . .	114

## Experimentálna fyzika

### Recenzované články

- O. Bogár*: Plazmou iniciované povrchové očkovanie netkaných textílií v kvapalnej fáze . . . . . 120
- S. Kováčik*: Analýza pohybu motorky, špeciálne jazdy na zadnom kolese . . . . . 128
- L. Moravský*: Dekontaminácia kvasiniek *Candida albicans* pomocou mikrovýbojov generovaných pri atmosférickom tlaku . . . . . 135
- R. Sobota*: Štúdium vplyvu vzorky na elektrické parametre plazmy generovanej pomocou DCSBD . . . . . 141
- I. Sukuba*: Teoretické štúdium klastrov berýlia a vodíka:  $Be_n nH_1$  . . . . . 147
- Z. Tučeková*: Stanovenie stratového výkonu v dielektriku DBD výbojov . . . . . 154
- M. Žemlička*: Kryogénne uhlíkové filtre na meranie supravodivých qubitov . . . . . 160

### Abstrakty

- A. Hubinský*: Lineárne optické vlastnosti dvojjadrových mikroštruktúrnych vlákien . . . . . 170

## Jadrová fyzika

### Recenzované články

- B. Andel*: Oneskorené štiepenie po beta premene v  $^{180}\text{Tl}$  a  $^{202}\text{Fr}$  . . . . . 171
- M. Bagljaš*: Study of background processes for the top-quark physics . . . . . 179
- M. Daniška*: Štúdium vlastností kvantových systémov pod vplyvom sínusovej deformácie . . . . . 186
- F. Herman*: Kalibrácia náboja b-jetu . . . . . 193
- L. Plazák*: Kalibrácia náboja b-jetov pomocou dvoj-jetových eventov . . . . . 198
- Rastislav Tatarko*: Experimentálny výskum vnútorného brzdného iarenia  $^{90}\text{Y}$  . . . . . 205

### Abstrakty

- R. Hodák, T. Stora*: Production of high intensity Beta Beams at the ISOLDE facility . . . . . 212
- Z. Kalaninová*: Decay studies of neutron deficient Ra and Fr isotopes . . . . . 213

## Aplikovaná jadrová fyzika

### Recenzované články

- T. Balog*: Mechanizmus kontroly dátových strát pre GEM TPC v Super-FRS . . . . . 214
- P. Blahušíak*: Návrh kontinuálneho monitora pre meranie radónu vo vode . . . . . 222
- A. Kováčik*: Gamaspektrometria meteoritu Košice . . . . . 225
- M. Mazánová*: Merania exhalačnej rýchlosti a štúdium exhalácie  $^{222}\text{Rn}$  z pôdy . . . . . 232
- A. Moravcsík*: Kontinuálne meranie objemovej aktivity radónu dvojfiltrnou metódou . . . . . 237
- P. Vnučko*: Read-out TPC komory s tripletom GEM . . . . . 244

### Abstrakty

- L. Brestáková*: Rádionuklidy v atmosférických zrážkach . . . . . 251
- A. Szabó*: Štúdium charakteristík miónovej zložky sekundárneho kozmického žiarenia v blízkosti zemského povrchu . . . . . 252

## Počítačová grafika

### Recenzované články

- S. Fecko*: Modelovanie kryštálov . . . . . 253
- M. Ferko*: Soft shadow mapping for large virtual environments . . . . . 257
- G. Kiss*: Zjednodušovanie mnohouholníkových plôch metódou ekvidištančných rezov . . . . . 265
- T. Kovačovský*: HDR SMISS—high dynamic range scalable multifunctional indoor scanning system . . . . . 277



**Abstrakty**

<i>M. Hudák</i> : Physical animation of wetting terrain and erosion . . . . .	289
<i>J. Kučerová</i> : Využitie detekcie tvárí pri určovaní významných oblastí v obraze . . . . .	290
<i>M. Madaras</i> : Concept of skeleton texture mapping . . . . .	291
<i>V. Major</i> : Image-based interpolácia obrazu v blízkej fotogrametrii . . . . .	292
<i>J. Onderik, Michal Chládek</i> : SPH with small scale details and improved surface reconstruction . . . . .	293
<i>M. Pálenkár</i> : Nefotorealistické modelovanie miest . . . . .	294
<i>J. Špaček</i> : Procedurálny model ruky so zameraním na deformáciu geometrie a vytváranie vrások . . . . .	295
<i>I. Varhaníková</i> : The worst view for virtual museum presentation . . . . .	296

**Aplikovaná informatika****Recenzované články**

<i>J. Blanár</i> : Simulácia šermu v 3D za pomoci UI . . . . .	297
<i>J. Danko</i> : Elektronické voľby a ich vybrané parametre . . . . .	305
<i>I. Kolesár</i> : Implementácia vybraných algoritmov na spracovanie objemových dát . . . . .	317
<i>M. Malý</i> : Diskrétna tomografia cez SAT solver a ILP solver . . . . .	322
<i>A. Šimko</i> : Preferred answer sets—banned generating set approach . . . . .	326

**Abstrakty**

<i>M. Antonič</i> : Yon—design and implementation of a new programming language . . . . .	334
<i>J. Dadová</i> : Flash mob like crowd motion control . . . . .	335
<i>R. Franta</i> : Prenos pohybu medzi artikulovanými štruktúrami . . . . .	336
<i>Z. Haladová</i> : Rekonštrukcia historickej udalosti s využitím zmiešanej reality . . . . .	337
<i>P. Heribanová</i> : Cued speech recognition method in video . . . . .	338
<i>M. Vince, M. Čertický, V. Dziuban</i> : Decentralized lightweight communication platform for heterogenous multi-context systems . . . . .	339
<i>V. Weissová</i> : Porovnanie mier kvality trojuholníka . . . . .	340

**Teoretická informatika****Recenzované články**

<i>L. Rampášek</i> : RNA structural motif search is NP-complete . . . . .	341
---	-----

**Abstrakty**

<i>P. Kostolányi</i> : Prechodovo vyvážené automaty . . . . .	349
<i>M. Kotrbčík</i> : Cycle space and the maximum genus of a graph . . . . .	350
<i>J. Kováč</i> : Rozšíriteľnosť párení na niektorých triedach grafov . . . . .	351
<i>M. Králik</i> : Grafový model alternatívneho zostrihu DNA . . . . .	352
<i>M. Kravec</i> : MCMC algoritmus na rekonštrukciu duplikačných historíí . . . . .	353
<i>M. Kucharík</i> : A new algorithm for using external information in gene finding . . . . .	354
<i>M. Rjaško</i> : Black-box property of cryptographic hash functions . . . . .	355
<i>I. Selečéniová</i> : Antidilatácia stromov . . . . .	356

**Didaktika informatiky****Recenzované články**

<i>A. Krommerová</i> : Vyuitie interaktívnej tabule v MŠ: prípadová štúdia z Budapešti . . . . .	357
<i>K. Mikolajová</i> : Rozvoj tvorivosti žiakov v kontexte školskej informatiky . . . . .	361
<i>D. Onačilová</i> : Tvorba úvodného kurzu počítačovej grafiky. Počítačová grafika z pohľadu študenta . . . . .	370

**Abstrakty**

<i>A. Bauer</i> : Pedagogický softvér Labák . . . . .	373
<i>A. Bauer</i> : Vizualizácia aproximačných algoritmov pre Problém obchodného cestujúceho . . . . .	374
<i>T. Gnidová</i> : Bezpečnosť nielen na internete . . . . .	375
<i>M. Gujberová</i> : Informatická výchova (SK) vs. Informatika (RU) . . . . .	376
<i>E. Hanková</i> : ABeCeDa—návrh a realizácia pedagogického softvéru . . . . .	377
<i>E. Hricková</i> : Matematický softvér pre 1.ročník ZŠ . . . . .	378
<i>K. Mayerová</i> : Softvérové prostredie na vyučovanie informatickej výchovy na 1. stupni ZŠ . . . . .	379

**Didaktika matematiky a fyziky****Recenzované články**

<i>M. Babinská</i> : E-learningová podpora vyučovania matematiky pre maturantov a študentov vysokých škôl . . . . .	380
<i>M. Gabajová</i> : Rozvíjanie priestorovej predstavivosti na základnej škole . . . . .	392

**Abstrakty**

<i>M. Dovičák</i> : Finančná matematika na SŠ . . . . .	396
<i>M. Figurová</i> : Aplikácia popularizačných textov vo vyučovaní fyziky . . . . .	397
<i>J. Horváthová</i> : Prieskum postojov učiteľov fyziky k využívaniu hier vo vyučovaní . . . . .	398
<i>M. Porkertová</i> : Dialektika vo vyučovaní matematiky . . . . .	399
<i>M. Velanová</i> : Fyzikálna vzdelávacia hra "... a bolo svetlo" . . . . .	400

**Recenzované články**

<i>P. Jursová</i> : Násobilka v rytme rapu alebo rytmizovaná násobilka . . . . .	401
--	-----

# Matematické modelovanie pohybu makrofágu (neutrofilu) pri hojení infekcií

Peter Dižo\*

Školiteľ: Richard Kollár†

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

**Abstrakt:** Práca sa zaoberá návrhom a následnou implementáciou modelu popisujúceho fungovanie ľudského imunitného systému, konkrétne pohybom makrofágu a elimináciou baktérií. V texte sú popísané základné mikrobiologické teoretické poznatky týkajúce sa makrofágov, baktérií a ich interakcií. Na ich základe je navrhnutý tzv. „equation-free” model, implementovaný s využitím matematického softvéru MATLAB, pričom sú načrtnuté základné algoritmy. V závere práce sú interpretované výsledky rôznych simulácií, týkajúce sa vplyvu niektorých parametrov na úspešnú elimináciu baktérií.

**Kľúčové slová:** Matematické modelovanie v Biológii, Equation free, Chemotaxia, Makrofág, Imunitný systém, Baktérie

## 1 Úvod

Základom pre modelovanie akéhokoľvek procesu je nájdenie všetkých signifikantných objektov vystupujúcich v modeli, pochopenie ich reálneho fungovania a vzájomných interakcií. Ako základ pre túto prácu poslúžilo reálne video, zobrazujúce makrofág prenasledujúci baktériu v prirodzenom prostredí. Modrou



Obr. 1: Makrofág a baktéria

\*peter.dizo@gmail.sk

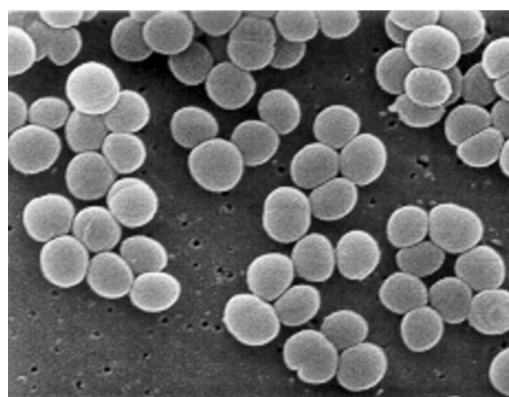
†kollar@fmph.uniba.sk

farbou je v tomto prípade označená prenasledovaná baktéria, červenou červená krvinka, a makrofág je najväčší útvar v strede obrázku. Červené krvinky nás ďalej nebudú zaujímať, keďže podľa videa nemajú pravdepodobne závažný vplyv na hojenie infekcií, a preto ich ďalej pri vytváraní modelu nebudeme uvažovať.

Cieľom práce bolo pokúsiť sa pochopiť základné princípy chemotaktického pohybu a na ich základe navrhnúť vhodný model, na ktorom by sa dala sledovať efektívnosť makrofágu v závislosti od rôznych parametrov. Na modelovanie použijeme tzv. „equation-free” prístup, ktorý nám umožní modelovať pohyb baktérií a difúziu chemoatraktantu štandardnými metódami, kým modelovanie makrofágu bude diskrétné na základe množiny pravidiel vyhodnocujúcich lokálny stav makrofágu, koncentráciu chemoatraktantu a náhodné faktory (rast panôžok, nehomogenitu prostredia, atď.).

## 2 Základné mikrobiologické poznatky

### 2.1 Baktérie



Obr. 2: Baktérie

Pojem baktéria zahŕňa obrovskú časť prokaryotických (neobsahujú bunkové jadro) mikroorganizmov. Bežne sa vyskytujú všade okolo nás a sú najrozšírenejšou formou organizmov na Zemi. Len v samotnom

Ľudskom tele a na povrchu pokožky sa ich nachádza rádovo 10-násobne viac ako buniek v celom tele. Väčšina týchto baktérií je však neškodná, niektoré sú dokonca organizmu prospešné. Existujú však druhy spôsobujúce rôzne druhy ochorení, ako napríklad cholera, tuberkulóza alebo syfilis, ktoré každoročne zabíjajú na svete státisíce ľudí.

### 2.1.1 Veľkosť a tvar

Veľkosť baktérií je rôzna, pohybuje sa rádovo okolo 0,5 až 5 mikrometrov v závislosti od druhu. Tvary baktérií sú taktiež veľmi rôznorodé. Najjednoduchšie majú guľovitý alebo podlhovastý tvar, zložitejšie môžu byť napríklad špirálovité. Veľa druhov vytvára špecifické štruktúry spájaním dvoch a viac buniek. K takýmto patria napríklad diplokoky (dve spojené bunky), streptokoky (jednoduché reťazce buniek) alebo stafylokoky (štruktúry pripomínajúce strapce hrozna). Práve posledne spomenuté sú častou príčinou rôznych dýchacích ochorení.

### 2.1.2 Pohyb

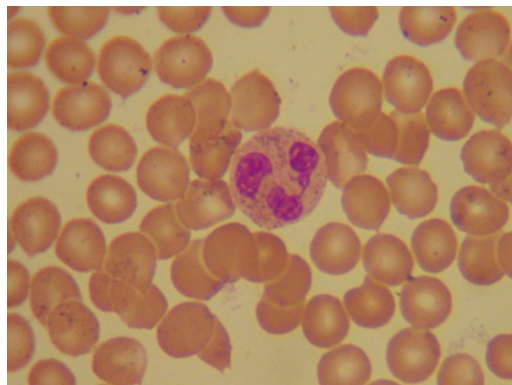
Baktérie poznáme pohyblivé a nepohyblivé. Vo videu, z ktorého vychádzame, je baktéria očividne pohyblivá, preto sa budeme ďalej zaoberať práve týmito. Základný pohybový aparát väčšiny baktérií je bičík (flagellum). Počet a umiestnenie bičíkov je rôzne - existujú druhy s jedným, dvoma umiestnenými oproti sebe alebo viacerými rovnomerne rozmiestnenými po celom obvode.

U baktérií rozlišujeme dva druhy pohybu. Priamy pohyb a rotačný. Tieto dva baktéria strieda, čím sa dokáže pohybovať v prostredí. U pohyblivých druhov baktérií bola pozorovaná schopnosť chemotaxie, t.j. schopnosť pohybovať sa smerom do tých častí prostredia, kde je vyššia koncentrácia chemoatraktantu<sup>1</sup>. Toto je dosiahnuté zmenou frekvencie striedania rotačného a priameho pohybu. Baktéria dokáže obmedziť rotačný pohyb, ak sa pohybuje do miest s vyššou koncentráciou pre ňu zaujímavej látky, a naopak zvýši frekvenciu zmien smeru, ak koncentrácia chemoatraktantu klesá.

## 2.2 Makrofág (neutrofil)

Makrofágy sú najbežnejším druhom bielych krviniek v ľudskom tele. Tvoria približne 70% všetkých bie-

<sup>1</sup>Chemoatraktant je látka, ktorej zmenu koncentrácie dokáže organizmus vycítiť.



Obr. 3: Makrofág (neutrofil)

lych krviniek a sú jednou z najvýznamnejších súčastí imunitného systému pri boji s bakteriálnymi infekciami.

Ich prirodzeným prostredím je krvné riečište, ktorým sa v prípade infekcie dokážu veľmi rýchlo dostať k zasaiahnutému miestu. Sú spravidla jedni z prvých organizmov, ktoré sa na miesto infekcie dostanú a pri hojení hrajú kľúčovú úlohu. V ľudskom tele sa ich nachádza približne 2,5 - 7,5 miliárd na liter krvi. Priemerná dĺžka života jedného makrofágu v krvnom obehú je približne 12 hodín. V prípade infekcie sa dostáva do tkaniva, kde môže prežiť až 2 dni.

### 2.2.1 Veľkosť a tvar

Na rozdiel od baktérií, makrofágy patria k eukaryotickým organizmom, čiže obsahujú jadro. Sú meňavkovitého tvaru, ich tvar je premenlivý a sú veľmi flexibilné. Tento fakt im umožňuje dostať sa k miestam infekcie aj cez tkanivo. Veľkosť makrofágu závisí od počtu lalokov, na ktorý je segmentované jeho jadro. V závislosti od tohto počtu môže jeho priemer nadobúdať hodnoty 10 - 12 mikrometrov.

### 2.2.2 Pohyb

U makrofágov podobne ako u baktérií, bola pozorovaná schopnosť chemotaxie. Zatiaľ čo baktérie sú schopné reagovať na zmenu koncentrácie chemoatraktívnych látok len veľmi jednoducho kvôli ich eukaryotickej stavbe bunky, chemotaktický pohyb makrofágov je oveľa komplexnejší. Baktérie pri pohybe používajú len časový údaj, vnímajú časovú zmenu gradientu, na základe ktorej dokážu prispôsobiť pohyb. Na druhej strane makrofág má väčší povrch a dokáže vyhodnocovať priestorovú informáciu o gradiente na celom svojom povrchu použitím citlivých receptorov.

Jeho pohyb sa dá rozdeliť na tri úzko súvisiace základné časti, ktorými sú vytváranie panôžok, polarizácia a vnímanie smeru [Devreotes and Haastert, 2004].

**Tvorba panôžok** Vytváranie malých výbežkov po obvode bunky je základnou črtou meňavkovitého pohybu. Aj v prípade, keď je v okolí makrofágu rovnomerná hladina chemoatraktantu a nie je nijak polarizovaný, tvoria sa tieto panôžky periodicky po celom jeho obvode, čo zabezpečuje jeho pohyblivosť. Najskôr sa sformujú aktínové filamenty, po ktorých sa vysunie panôžka. Táto fáza trvá približne minútu a následuje buď jej stiahnutie späť alebo prichytenie o substrát, po ktorom sa makrofág pohybuje. Potom sa celá bunka posunie v danom smere, čo vytvára pohyb. Následne sa vytvorí ďalšia panôžka v náhodnej časti makrofágu a proces sa opakuje.

**Polarizácia** V prípadoch, keď je rozdiel koncentrácií chemoatraktantu medzi dvoma protiľahlými časťami bunky rôzny aspoň o 2 - 10%, dokáže sa chemotaktická bunka polarizovať. Tento jav sa vyznačuje vytváraním panôžok hlavne na okajoch bunky s vyššou koncentráciou, kde je taktiež väčší obsah aktínových filamentov a potlačením ich vytvárania v časti s nižšou koncentráciou, kde je naopak väčší obsah myozínových filamentov. Polarizácia umožňuje makrofágom účinnejšie zachovávať smer, a tým efektívnejšie prenasledovať zdroj chemoatraktívnych látok. Má však aj svoje nevýhody. Pri silnej polarizácii nie je bunka schopná hneď reagovať na náhlu zmenu pozície zdroja chemoatraktantu. V takomto prípade sú panôžky stále tvorené aj na pôvodnej strane s vyšším obsahom aktínových filamentov, čo núti bunku zachovávať si z časti pôvodný smer a polaritu mení pomaly. Z tohto faktu vyplýva, že makrofágy skôr vykonajú pomalú zatáčku, ako by náhle zmenili polaritu.

**Vnímanie smeru** V tomto prípade ide hlavne o pozorovanie, že viac panôžok je tvorených v oblastiach s vyššou koncentráciou chemoatraktantu. To znamená, že aj v prípade, keď bunka nie je polarizovaná a momentálne sa nehýbe, majú panôžky väčšiu tendenciu tvoriť sa na okrajoch vystavených vyšším koncentráciám. Bolo pozorované, že aj v prípadoch, keď boli makrofágy zbavené možnosti tvorby aktínových a myozínových filamentov, a tým zbavené možnosti pohybu, stále boli schopné tvoriť panôžky práve v smere s vyššími koncentráciami chemoatraktívnej látky.

### 2.2.3 Eliminácia baktérií

Spôsob, akým makrofágy dokážu zneškodňovať baktérie, sa nazýva fagocytóza. V prípade, keď sa nejaká baktéria dostane do jeho blízkosti, makrofág začne okolo nej vytvárať útvary podobné panôžkam, avšak tieto sa nezachytávajú o substrát ale o pohlcovanú baktériu. Tieto výbežky sa predlžujú, až kým nie je baktéria úplne pohltená a následne rozložená vo vnútri makrofágu, čím dochádza k jej eliminácii.

## 2.3 Prostredie

Prirodzeným prostredím makrofágov je ľudská krv. Avšak v prípade infekcie sú schopné preniknúť do tkanív, kde následne dochádza k prenasledovaniu a zneškodňovaniu baktérií. Základnou charakteristikou tohto prostredia je difuzivita, teda rýchlosť akou sa v ňom rozširujú rôzne látky. Toto je kľúčovým prvkom práve v prípade chemotaxie. Ovplyvňuje totiž významne schopnosť makrofágu sledovať chemickú stopu zanechávanú pôsobením baktérií. V prípade, že by chemoatraktant príliš rýchlo difundoval, vzniklo by prostredie s relatívne uniformnou koncentráciou a makrofág by nebol schopný polarizácie a následného účinného prenasledovania baktérií spôsobujúcich závažné ochorenia.

## 3 Model

V našom prípade modelujeme 3 základné procesy, ktorými sú pohyb baktérií, pohyb makrofágu a difúzia prostredia.

### 3.1 Pohyb baktérií

Ako bolo spomenuté vyššie, baktérie sú schopné jednoduchej chemotaxie, avšak v našom modeli sme sa rozhodli túto vlastnosť zanedbať, keďže nás zaujíma hlavne schopnosť makrofágu efektívne ich prenasledovať. Budeme teda uvažovať jedine ich schopnosť produkovať pri pohybe chemoatraktívnu látku. Ich pohyb bude teda modelovaný ako náhodný. Baktéria pri pohybe vpred v určitom momente, po prejdení nejakej vzdialenosti vždy zmení smer. Čas do zmeny stavu (čas kým baktéria opäť začne fázu rotačného pohybu) je modelovaný ako Poissonov proces [Higham, 2008]. Pre parameter  $\lambda$  vyjadrujúci pohyb-

livosť baktérie je to teda:

$$t = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pre } x \geq 0 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

### 3.2 Pohyb makrofágu

Na tento proces vplyvajú dve základné sily. Jednou je povrchové napätie makrofágu, ktoré zabezpečuje jeho súdržnosť a hladký tvar a druhou chemoatraktívna sila, ktorá zabezpečuje jeho pohyb v smere s vyššími koncentraciami chemoatraktantu. Sily pôsobiace na jeho povrch môžeme zapísať ako

$$E = \int_{\partial\Omega} (\sigma - \alpha c) \, dl,$$

kde  $\sigma$  reprezentuje povrchové napätie,  $\alpha$  je koeficient popisujúci citlivosť na chemickú látku, a  $c$  je jej koncentrácia [Horstmann, 2003]. Podmienkou v našom modeli je taktiež zachovanie objemu:

$$|\Omega| = \text{const.}$$

Pohyb makrofágu v závislosti od prostredia by bolo možné numericky riešiť aj použitím metódy úrovnových množín (level sets) [Sethian, 1996], ktorá by sa implementovala vo výpočtovej doméne. My však v sekcii „Implementácia” navrhujeme alternatívny prístup s využitím equation-free modelu, keďže zámerom tejto práce je skúmanie explicitnej závislosti správania makrofágu na voľbe a významnosti diskretných pravidiel popisujúcich jeho správanie. Tento prístup nám tak umožňuje väčšiu flexibilitu pri modelovaní pohybu makrofágu. Z toho dôvodu implementujeme len equation-free formuláciu problému a nezaobráame sa jeho ekvivalentom vo formulácii pomocou parciálnych diferenciálnych rovníc implementovaných metódou úrovnových množín.

Štandardne používaný model pre chemotaxiu v odbornej literatúre [Othmer and Schaap, 1998] je Keller-Segelov model vo forme parciálnej diferenciálnej rovnice popisujúcej hustotu objektov (baktérií, makrofágov a pod.) v tzv. štatistickom priblížení. V takýchto modeloch sa veľkosť organizmov považuje za veľmi malú až zanedbateľnú. Keďže v našej práci študujeme detailné správanie makrofágu na veľmi malej mierke a jeho schopnosť pohlcovať baktérie, tento štandardný prístup nie je vhodný a makrofág modelujeme diskretné.

### 3.3 Difúzia

Difúzia je tradične modelovaná pomocou Laplaceovho operátora a inak to nebude ani v prípade nášho modelu. Platí:

$$u_t = k\Delta u.$$

Prostredie modelujeme ako homogénne, hodnota difúzneho koeficientu bude konštantná. Budeme uvažovať periodické okrajové podmienky pre tok chemoatraktantu, baktérie a taktiež makrofág, čo zodpovedá rovnomernej hustote baktérií v prostredí. Pri pokuse o prekročenie okraja domény sa daný prvok objaví na jej opačnom konci. Platí:

$$c(x, y + P) = c(x, y),$$

$$c(x + R, y) = c(x, y),$$

kde  $P$  a  $R$  sú rozmery domény.

## 4 Implementácia

Pri implementácii vybraného modelu je dôležité navrhnúť vhodné algoritmy, ktoré budú pri testovaní verne reflektovať realitu, avšak nie na úkor časovej nenáročnosti testovania. Na implementáciu bol použitý matematický softvér MATLAB.

### 4.1 Doména

Prostredie, v ktorom sa budú odohrávať všetky deje, bude predstavovať sieť veľkosti  $m \times n$ . Táto má dve základné charakteristiky. Prvou je pozícia baktérií a makrofágu a druhou je koncentrácia chemoatraktívnej látky. Reprezentovať ju budú dve matice, každá s  $n$  riadkami a  $m$  stĺpcami. V matici pozícií budú jej prvky nadobúdať hodnoty 0 až 2, kde 2 predstavuje miesto, na ktorom sa v tom momente nachádza makrofág, 1 predstavuje pozície baktérií a 0 je voľné miesto.

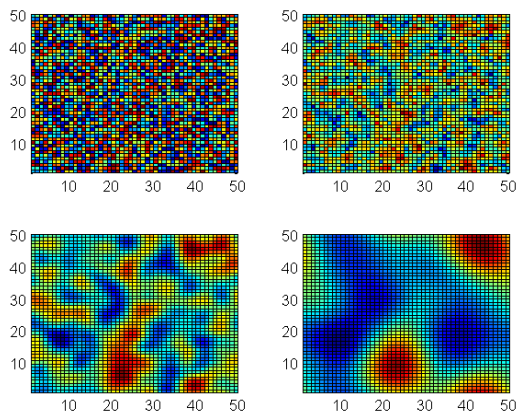
V matici reprezentujúcej koncentrácie chemoatraktantu budú jej prvky nadobúdať nezáporné hodnoty, kde 0 predstavuje najnižšiu koncentráciu.

### 4.2 Difúzia

Pri modelovaní difúzie ide o to, že v každom momente dochádza k premiešavaniu molekúl chemoatraktívnej látky v postredí. V každom časovom kroku časť chemoatraktantu z jedného miesta difunduje do okolia, a naopak časť z okolia skončí na jeho mieste. To, aká veľká je táto časť a ako rýchlo sa premieša, určuje difúzny koeficient. V našom modeli budeme považovať

za prilahlé políčka len miesta nad, pod a po stranách uvažovaného. Implementáciou je teda klasická diskretizácia Laplaceovho operátora.

Týmto spôsobom bola následne skonštruovaná funkcia difúzia.m, ktorej vstupom je matica koncentrácií chemoatraktantu a výstupom táto istá matica, avšak po jednom difúznom kroku. Ilustráciu fungovania tejto funkcie na matici náhodných čísel veľkosti  $50 \times 50$  použitím funkcie `pcolor()`<sup>2</sup> zobrazuje Obrázok 4, ktorý zobrazuje vygenerované prostredie s ná-



Obr. 4: Ilustrácia fungovania difúzie

hodnými koncentraciami chemoatraktantu v každom z bodov a difúziu po jednom, desiatich, až sto krokoch.

### 4.3 Baktérie

Pre tieto je vytvorená samostatná trieda `bact`. To znamená, že každá baktéria bude jedinečná, avšak typy premenných a funkcie majú rovnaké.

V prvom rade si každá baktéria musí pamätať svoju pozíciu, preto sú vytvorené premenné `bact.x` a `bact.y` kde sú uložené súradnice  $x$  a  $y$  baktérie. Ďalším parametrom je smer baktérie, o ktorom nám hovorí premenná `bact.direction` nadobúdajúca hodnoty 0 až 360 a reprezentujúca smer, ktorým je momentálne baktéria orientovaná.

Problematickým je modelovanie pohybu. Rozhodli sme sa v tejto práci zanedbať chemotaktické schopnosti baktérií, keďže našou snahou je testovať efektivitu makrofágu a nie schopnosti baktérií. Ich pohyb bude náhodný. Ako bolo spomenuté vyššie, baktérie

striedajú 2 druhy pohybu. Točivý a priamy. To, v akej fáze sa práve konkrétna baktéria nachádza, uvádza premenná `b.state` (0 pre točivý a 1 pre priamy). Dôležité je rozhodnúť, aký počet krokov bude prejdejších pred tým, než nastane zmena smeru. Táto dĺžka je jednoducho vypočítateľná zo vzťahu pre čas do zmeny stavu. Pre dĺžku prejdejšieho kroku  $X$  dostávame vzťah

$$X = \frac{\ln\left(\frac{1}{Z}\right)}{\lambda},$$

kde  $\lambda$  je koeficient popisujúci pohyblivosť baktérie a  $Z$  je náhodná premenná s rovnomerným rozdelením na intervale  $(0, 1)$ . Koeficient  $\lambda$  sme zvolili experimentálne tak, aby vizualizácia čo najvernejšie simulovala reálne video, z ktorého sme vychádzali.

Pre zjednodušenie výpočtov je predgenerovaných 100 hodnôt, uložených ako hodnoty vektoru `bact.stp` a premenná `bact.index`, ktorá označuje aktuálnu hodnotu vektora, teda koľko krokov baktéria prejde, ak jej nič nepríde do cesty. V prípade keď baktéria vyčerpá všetkých 100 hodnôt, vektor `bact.stp` je vygenerovaný nanovo a `bact.index` nastavený opäť na prvú pozíciu. Modelovanie pohybu baktérií je veľmi realistické, keďže sa pohybujú spojitاً. V diskretnej doméne bude ich poloha zaznačená na políčku, v ktorom aktuálne stoja.

Problémom je vylučovanie chemoatraktantu, keďže baktérie sa hýbu spojitاً a doména je diskretná. V každom časovom kroku baktéria vylúči jednotku chemoatraktantu, ktorá bude rozdelená na príslušné políčka domény, ktoré v tom kroku baktéria prešla. Množstvo látky, ktoré prípadne tomu ktorému políčku, bude pritom dané dĺžkou dráhy, ktorú na ňom baktéria prešla.

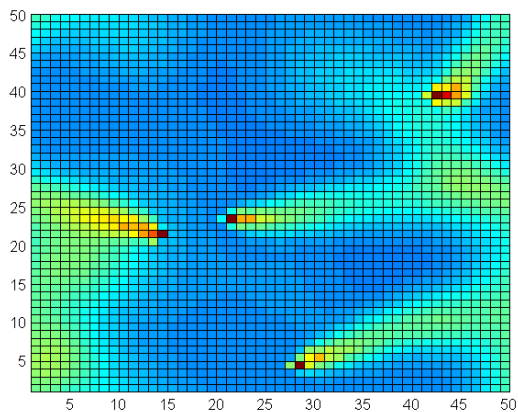
Baktéria je v našom modeli považovaná za mŕtvu v prípade, že je zo všetkých štyroch základných strán obklopená makrofágom. Toto odzrkadľuje proces fagocytózy, predstavuje teda vstrebanie baktérie makrofágom.

Pohyb baktérií a vylučovanie chemoatraktantu ilustrované pomocou funkcie `pcolor()` na matici koncentrácií zobrazuje Obrázok 5.

### 4.4 Makrofág

Obdobne ako pri implementácii baktérií, makrofág predstavuje samostatná trieda s názvom `neut`. Veľkosť makrofágu bude pre jednoduchosť modelu konštantná a bude zaberat' 50 bodov. Táto veľkosť odzrkadľuje približne reálny pomer medzi rozmerom jednopolíčkovej baktérie s rozmerom rádovo jeden mikrometer a

<sup>2</sup>Táto funkcia vykreslí danú maticu, pričom každému políčku priradí farbu podľa jeho hodnoty v závislosti od veľkosti najmenšej a najväčšej hodnoty matice.



Obr. 5: Ilustrácia pohybu baktérií

desaťmikrometrovým makrofágom. Na reprezentáciu jeho polohy je použitá matica *neut.pos* s 50 riadkami a 2 stĺpcami, kde každý riadok predstavuje postupne súradnice  $x$  a  $y$  políčka, ktoré práve zaberá makrofág.

Implementácia pohybu makrofágu je však komplexnejšia. V jednom kroku je potrebné, aby sa jedno políčko z tých, ktoré zaberá presunulo na nové miesto. Problematickým je rozhodovanie, ktoré konkrétne to bude, a kam sa presunie tak, aby bol pohyb vierohodný, reflektoval čo najkvalitnejšie reálne fungovanie chemotaxie, a pritom nebol príliš výpočtovo náročný. V prvom rade musíme vylúčiť možnosť makrofágu sa roztrhnúť alebo nadobudnúť príliš neprirodzený tvar a následne vziať do úvahy veľkosti koncentrácií chemoatraktantu v jeho najbližšom okolí.

Odobratie jedného políčka prebehne v štyroch krokoch:

1. Ošetrenie roztrhnutia
2. Ošetrenie neprirodzeného tvaru
3. Kandidátom priradíme hodnotu

$$X = n + ms \times c$$

4. Vyberieme minimum

Pridanie políčka analogicky:

1. Uvažujeme len priľahlé políčka
2. Ošetrenie neprirodzeného tvaru
3. Kandidátom priradíme hodnotu

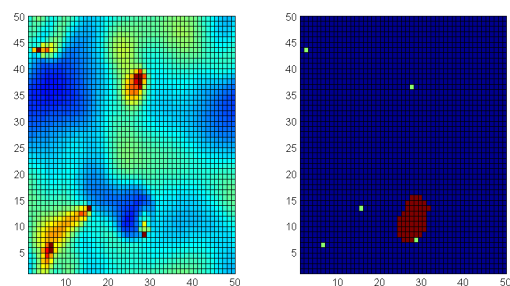
$$X = n + ms \times c + rs \times rand()$$

#### 4. Vyberieme maximum

kde  $n$  predstavuje počet susedov, na ktorých je makrofág (1 až 8),  $c$  je koncentrácia chemoatraktívnej látky,  $ms$  je koeficient určujúci citlivosť makrofágu na túto látku a koeficient  $rs$  predstavuje veľkosť vplyvu náhodnosti pri pohybe. Táto náhodnosť reprezentuje fakt, že panôžky sa v každom momente tvoria náhodne po celom obvode makrofágu, majú len väčšiu pravdepodobnosť tvorby na miestach s vyššou koncentráciou chemoatraktívnej látky. Správny pomer rýchlostí makrofágu a baktérií je zabezpečený tým, že zatiaľ čo baktérie za jeden časový krok prejdú jednotkovú dĺžku, makrofág presunie viac políčok. Ich počet bol opäť odpozorovaný z videa, z ktorého sme vychádzali, aby čo najvernejšie reflektoval realitu.

Schopnosť polarizácie bude zabezpečená tým, že makrofág bude redukovať množstvo chemoatraktantu na miestach, kde sa práve nachádza. Týmto nadobudne tendenciu nevracať sa okamžite na miesta, ktorými pred tým prešiel a bude si zachovávať smer pohybu. Vyjadrovať túto vlastnosť bude koeficient  $csm$ .

Chemotaktický pohyb makrofágu a redukcia chemoatraktantu produkovaného baktériami ilustrované pomocou funkcie *pcolor()* na matici koncentrácií a matici pozícií sú zachytené na Obrázku 6.



Obr. 6: Ilustrácia pohybu makrofágu

Z vizualizácie je vidieť, ako makrofág dokáže redukovať chemoatraktant, čo sa prejavuje chladnejšími farbami v miestach kde sa práve nachádza alebo nachádzal.

## 5 Testovanie

Pri testovaní sme sledovali počet časových krokov, potrebných na úspešnú elimináciu dopredu daného počtu baktérií z pôvodného počtu v závislosti od rôznych parametrov, ako sú citlivosť makrofágu na che-



moatraktant, veľkosť náhodného šumu alebo difuzivita prostredia.

### 5.1 Test závislosti efektivity od difuzivity prostredia

V tomto prípade sme testovali závislosť efektivity makrofágu od veľkosti difúzneho koeficientu.

Doména mala rozmer  $50 \times 50$  bodov. Na začiatku sa náhodne vygenerovalo 6 baktérií, pričom za terminálnu podmienku bolo považované chytenie aspoň troch. Koeficienty makrofágu v tomto prípade boli  $ms = 5$ ,  $rs = 1$ ,  $csm = 0,98$ . Difúzny koeficient nadobúdal hodnoty 0,02 až 0,2 v krokoch po 0,02. Pre každú hodnotu bolo vykonaných 400 simulácií a zaznamenaný počet krokov potrebných na úspešnú elimináciu aspoň troch baktérií. Výsledné dáta:

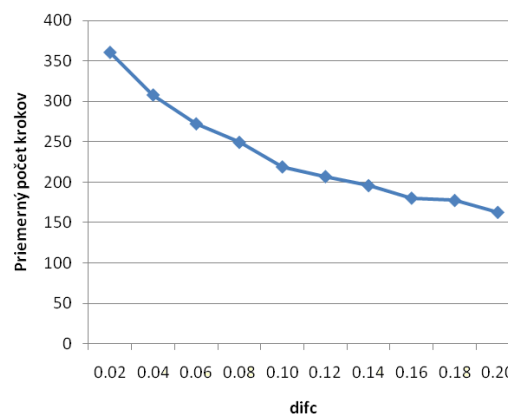
difc	Priemerný počet krokov	Štandardná odchýlka
0,02	361,04	139,71
0,04	308,23	137,99
0,06	272,44	131,34
0,08	249,43	119,56
0,10	219,00	115,18
0,12	207,01	109,67
0,14	195,81	103,28
0,16	180,26	92,45
0,18	177,42	92,21
0,20	162,63	85,69

Tabuľka 1: Efektivita v závislosti od difuzivity prostredia

Ako je vidno z Tabuľky 1 a Obrázku 7, makrofág bol efektívnejší v prostredí, kde chemoatraktívna látka lepšie difundovala. Pre príliš nízke hodnoty difúzneho koeficientu bola u makrofágu pozorovaná tendencia sledovať aj pomerne staré chemické stopy zanechávané baktériami a pri ich eliminácii bol neefektívny. Zaujímavé sú aj hodnoty štandardných odchýlok, ktoré nasvedčujú tomu, že náš model je robustnejší pre difúzivnejšie prostredie.

### 5.2 Test závislosti efektivity od redukcie chemoatraktantu

V tomto prípade sme testovali závislosť efektivity makrofágu od veľkosti koeficientu  $csm$ , určujúceho



Obr. 7: Závislosť efektivity od difuzivity prostredia

aká časť chemoatraktantu zreaguje na políčku kde práve stojí makrofág.

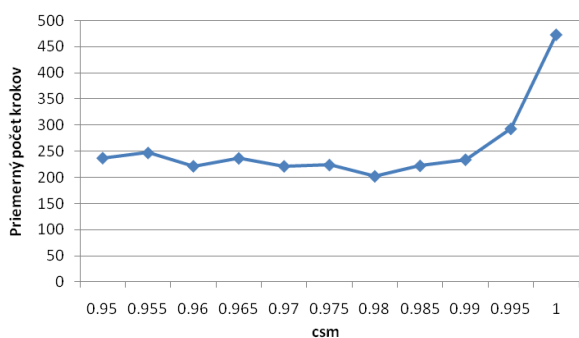
Doména mala rozmer  $50 \times 50$  bodov. Na začiatku sa náhodne vygenerovalo 6 baktérií, pričom za terminálnu podmienku bolo považované chytenie aspoň troch. Koeficienty makrofágu v tomto prípade boli  $ms = 5$ ,  $rs = 1$  a difúzny koeficient  $difc = 0,195$ . Parameter  $csm$  nadobúdal hodnoty 0,95 až 1 v krokoch po 0,005. Výsledné dáta:

csm	Priemerný počet krokov	Štandardná odchýlka
0,95	237,34	124,03
0,955	247,22	127,22
0,96	221,8	122,04
0,965	236,86	121,49
0,97	221,69	119,8
0,975	224,12	123,43
0,98	202,62	103,32
0,985	222,58	110,82
0,99	234,22	112,55
0,995	293,17	116,78
1,00	472,9	76,36

Tabuľka 2: Efektivita v závislosti od redukcie chemoatraktantu

V tomto prípade je v Tabuľke 5.2 do očí bijúca hodnota štandardnej odchýlky pre koeficient  $csm$  veľkosti 1. Toto je však spôsobené len obmedzením na maximálny počet krokov, ktoré bolo nastavené na 500. Makrofág takmer stratil schopnosť prenasledovať a úspešne eliminovať baktérie. Spôsobené to je tým, že vôbec neredukoval chemoatraktant a stratil schopnosť

polarizácie, čo malo na jeho efektivitu katastrofálny účinok. Charakter výsledkov je tiež pomerne zaujímavý, ako ukazuje Obrázok 8. Priemerný počet krokov má tendenciu jemne klesať so stúpajúcou hodnotou koeficientu, kde po prekročení hranice 0,98 opäť stúpa. Toto by mohlo nasvedčovať tomu, že existuje nejaká optimálna hodnota tohto parametra, pre ktorú je makrofág najefektívnejší. Avšak na potvrdenie tejto hypotézy by sme potrebovali vykonať ešte veľmi veľa simulácií, čo je však príliš časovo náročné.



Obr. 8: Závislosť efektivity od redukcie chemoatraktantu

### 5.3 Test efektivity makrofágu od koeficientov $ms$ a $rs$

V tomto prípade sme testovali závislosť efektivity makrofágu od veľkosti koeficientu  $ms$  a  $rs$ , od jeho senzitivity a od veľkosti náhodnosti tvorby panôžok.

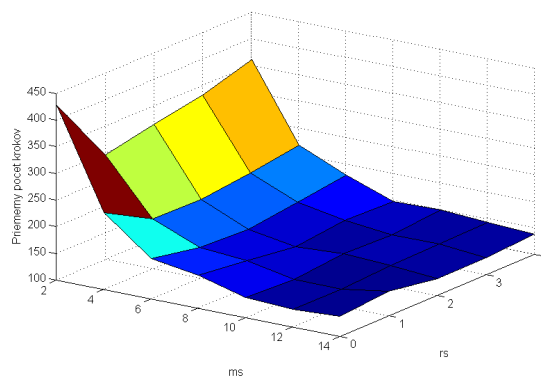
Doména mala rozmer  $50 \times 50$  bodov. Na začiatku sa náhodne vygenerovalo 6 baktérií, pričom za terminálnu podmienku bolo považované chytenie aspoň troch. Koeficienty  $csM$  makrofágu bol  $csM = 0,98$ . Difúzny koeficient  $difc = 0,195$ . Koeficient  $ms$  nadobúdal hodnoty 2 až 14 v krokoch po 2 a koeficient  $rs$  0 až 4 v krokoch po 1. Pre každú kombináciu hodnôt bolo vykonaných 450 simulácií a zaznamenaný počet krokov potrebných na úspešnú elimináciu aspoň troch baktérií.

Ako vidno z výsledkov v Tabuľke 5.3, makrofág má pre hodnoty  $ms > 8$  pomerne vyrovnanú efektivitu. Toto je spôsobené tým, že tieto hodnoty parametra sú už extrémne vysoké a dominujú rozhodovaniu o jeho pohybe. Zaujímavé sú však hodnoty pre  $rs = 0$ . Tieto zodpovedajú vylúčeniu akejkoľvek náhodnosti čo sa týka tvorby panôžok a je možné vidieť, že makrofág bol v tomto prípade menej efektívny, čiže sa ukazuje,

rs/ms	0	1	2	3	4
2	427,37	297,13	315,77	332,16	360,52
4	243,58	193,9	192,7	203,23	217,23
6	175,36	157,56	153,17	166,66	178,6
8	161,29	151,07	138,78	149,22	147,08
10	136,85	132,62	143,53	140,29	148,38
12	132,54	132,87	138,76	140,76	143,21
14	137,85	146,2	131,67	132,54	138,34

Tabuľka 3: Efektivita v závislosti od senzitivity a šumu

že tvorba panôžok po celom obvode je naozaj esenciálna aj v našom modeli. Ako je vidno z Obrázku 9, zaujímavé pozorovanie je pre kombináciu parametrov  $rs = 0$  a  $ms = 2$ , kde bol makrofág najneefektívnejší. Toto je spôsobené faktom, že pri rozhodovaní kam sa pohne, mal najväčšiu váhu člen vyjadrujúci povrchové napätie, teda makrofág sa hýbal len pri extrémnych hodnotách koncentrácií vo svojom okolí.



Obr. 9: Závislosť efektivity od senzitivity a šumu

## 6 Záver

V tejto práci sme skúmali fungovanie jednej z najpodstatnejších častí ľudského imunitného systému, ktorou je práca bielych krviniek - makrofágov. Boli popísané ich základné vlastnosti, podobne ako vlastnosti baktérií a prostredia, kde sa všetky skúmané deje odohrávajú. Na základe získaných teoretických poznatkov sme zostavili a prezentovali model, ktorý bol následne implementovaný s využitím matematického softvéru MATLAB. Na tomto modeli sme potom testovali efektivitu makrofágu pri eliminácii baktérií v závislosti od rôznych parametrov, akými sú jeho

citlivosť, veľkosť redukcie chemoatraktantu alebo difuzivita prostredia.

Zistili sme napríklad stúpajúcu závislosť efektivity makrofágu od difuzivity prostredia, alebo sa potvrdil predpoklad, že makrofág musí byť schopný polarizácie, ak má byť eliminácia baktérií efektívna. Náš model taktiež ukázal výhodu tvorby panôžok po celom obvode makrofágu aj v prípade polarizácie, čo je experimentálne pozorovaný jav.

Tento prezentovaný model je veľmi jednoduchý a neodráža úplne do detailu fungovanie reálneho sveta. Zanedbali sme napríklad chemotaktickú schopnosť baktérií a model makrofágu bol taktiež veľmi jednoduchý, avšak s malými zmenami by sa jeho základ dal použiť aj na popis iných dejov, akými sú napríklad schopnosť zvierať cítiť feromóny a podobne.

Prezentovaná práca má stále veľký potenciál na zlepšenie, zďaleka neboli vykonané všetky možné testy a tiež počet ich opakovaní môže byť vždy väčší. Veľký potenciál na zlepšenie v budúcnosti má však model makrofágu, kde je možné prejsť k spojenému modelu zahŕňajúcemu vnútrobunkové procesy založené na enzymatických reakciách [Levchenko and Iglesias, 2002], čo je predmetom ďalšieho výskumu.

## Literatúra

- [Devreotes and Haastert, 2004] Devreotes, P. N. and Haastert, P. J. V. (2004). Chemotaxis: Signalling the way forward. *Nature reviews*, 5.
- [Higham, 2008] Higham, D. J. (2008). Modeling and simulating chemical reactions. *SIAM review*, 50.
- [Horstmann, 2003] Horstmann, D. (2003). From 1970 until present: the keller-segel model in chemotaxis and its consequences i. *Jahresberichte*, pages 103–165.
- [Levchenko and Iglesias, 2002] Levchenko, A. and Iglesias, P. A. (2002). Models of eukaryotic gradient sensing: Application to chemotaxis of amoebae and neutrophils. *Biophysical Journal*, 82:50 – 63.
- [Othmer and Schaap, 1998] Othmer, H. and Schaap, P. (1998). Oscillatory camp signaling in the development of dictyostelium discoideum. *Comments on Theoretical Biology*, 5:175–282.
- [Sethian, 1996] Sethian, J. A. (1996). *Level Set Methods*. Cambridge University Press.

# O funkciách bez základnej periódy

Tomáš Rusin\*

Školiteľ: Ivan Kupka†

Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky,  
FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

**Abstrakt:** V tejto práci sa budeme zaoberať vlastnosťami periodických funkcií bez základnej periódy, ktoré sa budeme snažiť zovšeobecniť pre funkcie periodické podľa  $p$ -homeomorfizmu. Pomocou relácie zjemnenia  $p$ -homeomorfizmov zavedieme pojem základnej zovšeobecnenej periódy a bližšie sa pozrieme na reálne zovšeobecnene periodické funkcie reálnej premennej bez základnej zovšeobecnenej periódy.

*Kľúčové slová:* periodická funkcia, základná perióda,  $p$ -homeomorfizmus, zjemnenie  $p$ -homeomorfizmu

## 1 Úvod

Číslo  $p > 0$  nazývame perióda funkcie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ak pre každé  $x \in \mathbb{R}$  platí  $f(x) = f(x + p)$ . Ak takéto číslo existuje, funkcia  $f$  sa potom nazýva periodická. Označme  $\mathcal{P}(f)$  množinu všetkých periód funkcie  $f$ .

Ďalej budeme potrebovať nasledujúce koncepty zoslabujúce spojitosť. Použijeme definíciu z úvodu článku [Borsík, Doboš, Repický, 1999/2000].

Hovoríme, že funkcia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je kvázispojité v bode  $x_0 \in \mathbb{R}$ , ak pre každé  $\varepsilon > 0$  a každé okolie  $U(x_0)$  bodu  $x_0$  existuje neprázdna otvorená množina  $V \subseteq U(x_0)$ , taká, že pre všetky  $x \in V$  platí  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Hovoríme, že funkcia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je kľukatá v bode  $x_0 \in \mathbb{R}$ , ak pre každé  $\varepsilon > 0$  a každé okolie  $U(x_0)$  bodu  $x_0$  existuje neprázdna otvorená množina  $V \subseteq U(x_0)$ , taká, že pre všetky  $x, y \in V$  platí  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

Je zrejmé, že ak je funkcia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá v bode  $x_0 \in \mathbb{R}$ , potom je v tomto bode aj kvázispojité. Ak je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kvázispojité v bode  $x_0 \in \mathbb{R}$ , potom je v tomto bode aj kľukatá.

Definujme si teraz, čo budeme rozumieť pod pojmom základnej periódy periodickej funkcie.

**Def.1.1.** *Nech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je periodická funkcia. Ak existuje  $p > 0$  spĺňajúce tieto predpoklady:*

i)  $p \in \mathcal{P}(f)$

ii) ak  $q \in \mathcal{P}(f)$  a  $q \leq p$ , potom  $q = p$

*potom hovoríme, že číslo  $p$  je základná perióda funkcie  $f$ . Ak takéto číslo neexistuje, hovoríme, že  $f$  je periodická funkcia bez základnej periódy, alebo, že  $f$  nemá základnú periódu.*

Základná perióda funkcie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je tým pádom minimálny prvok z množiny periód funkcie  $f$ . Keďže vieme porovnať ľubovoľné dve reálne čísla, tak to znamená, že každá perióda je väčšia alebo rovná základnej perióde. Platí dokonca, že každá perióda je jej celočíselným násobkom.

**Lema1.1.** *Nech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je periodická funkcia. Nech  $p \in \mathcal{P}(f)$ . Potom sú nasledujúce výroky ekvivalentné:*

i) ak  $q \in \mathcal{P}(f)$ , potom  $q = np$  pre nejaké  $n \in \mathbb{N}$

ii) číslo  $p$  je základná perióda funkcie  $f$

*Dôkaz.*  $i) \Rightarrow ii)$ . Stačí overiť druhú podmienku základnej periódy. Nech  $q$  je perióda funkcie  $f$  a  $q \leq p$ . Podľa predpokladu  $q = np \geq p$ . To znamená, že  $q = p$ .

$ii) \Rightarrow i)$ . Sporom. Nech  $p$  je základná perióda  $f$  a existuje perióda  $q$  taká, že  $q \neq np$  pre žiadne  $n \in \mathbb{N}$ . Potom existujú  $k \in \mathbb{Z}, r > 0$  také, že  $q = kp + r$  pričom  $r < p$ . Lenže  $r = q - kp$  je celočíselná kombinácia periód je tiež periódou funkcie  $f$ , čo je spor s minimalitou  $p$ .

**Lema1.2.** *Nech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je periodická funkcia. Potom sú nasledujúce výroky ekvivalentné:*

\* rusintomas@zoznam.sk

† ivan.kupka@fmph.uniba.sk

i) funkcia  $f$  je periodická funkcia bez základnej periódy

ii) pre každé  $\varepsilon > 0$  existuje perióda  $p < \varepsilon$

*Dôkaz.*  $i) \Rightarrow ii)$ . Množina  $\mathcal{P}(f)$  je neprázdna a zdola ohraničená nulou, preto má infimum, ktoré označíme  $L$ . Keďže  $\mathcal{P}(f)$  nemá minimum, lebo  $f$  nemá základnú periódu, tak  $L \notin \mathcal{P}(f)$ . Tým pádom sa pre ľubovoľné  $\varepsilon > 0$  v intervale  $(L, L + \varepsilon)$  musí nachádzať nekonečne veľa prvkov z  $\mathcal{P}(f)$ . Preto máme dve periódy  $p, q \in (L, L + \varepsilon)$ . Ich rozdiel je tiež perióda a tá je menšia ako  $\varepsilon$ .

$ii) \Rightarrow i)$ . Z predpokladu okamžite vyplýva, že  $\inf \mathcal{P}(f) = 0$ . Lenže  $0 \notin \mathcal{P}(f)$ , preto  $\mathcal{P}(f)$  nemá minimum.

**Lema 1.3.** *Nech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je periodická funkcia s periódami  $p, q$ , pričom platí  $\frac{p}{q} \notin \mathbb{Q}$ . Potom je funkcia  $f$  periodickou funkciou bez základnej periódy.*

*Dôkaz.* Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme  $p > q > 0$ . Potom existujú  $a_1 \in \mathbb{N}$  a  $p_1 \geq 0$  také, že  $p = a_1 q + p_1$ , kde  $q > p_1 \geq 0$ . Ďalej platí  $\frac{p_1}{q} = \frac{p - a_1 q}{q} = \frac{p}{q} - a_1$ , preto  $\frac{p_1}{q} \notin \mathbb{Q}$ . Tým pádom  $p_1 \neq 0$ , teda je splnené  $q > p_1 > 0$ . A keďže  $p_1$  je celočíselná kombinácia periód, je tiež periódou funkcie  $f$ .

Postup zopakujeme pre periódy  $q, p_1$ . Platí  $q > p_1 > 0$  a  $\frac{p_1}{q} \notin \mathbb{Q}$ . Existujú  $a_2 \in \mathbb{N}$  a  $q_1 \geq 0$  také, že  $q = a_2 p_1 + q_1$ , kde  $p_1 > q_1 \geq 0$ . Potom pre  $q_1$  platí  $\frac{q_1}{p_1} = \frac{q - a_2 p_1}{p_1} = \frac{q}{p_1} - a_2$ , teda  $\frac{q_1}{p_1} \notin \mathbb{Q}$ . Tým pádom aj  $q_1 \neq 0$ , preto  $p_1 > q_1 > 0$ . A keďže  $q_1$  je celočíselná kombinácia periód, je tiež perióda  $f$ .

Ďalej platí  $p_1 < \frac{p}{2}$ , lebo ak by  $p_1 \geq \frac{p}{2}$ , potom  $p = a_1 q + p_1 \geq q + p_1 > p_1 + p_1 \geq p$  a dostávame  $p > p$ , čo je spor.

A rovnako  $q_1 < \frac{q}{2}$ , lebo ak by  $q_1 \geq \frac{q}{2}$ , potom  $q = a_2 p_1 + q_1 \geq p_1 + q_1 > q_1 + q_1 \geq q$  a dostávame  $q > q$ , čo je spor.

Zhrňme, čo sme vlastne týmto postupom dostali. Pomocou periód  $p, q$  s vlastnosťou  $\frac{p}{q} \notin \mathbb{Q}$  sme našli periódy  $p_1, q_1$ , ktoré tiež spĺňajú  $\frac{q_1}{p_1} \notin \mathbb{Q}$  a navyše  $p_1 < \frac{p}{2}$  a  $q_1 < \frac{q}{2}$ .

To znamená, že pre ľubovoľné  $n \in \mathbb{N}$  existujú periódy  $p_n, q_n$ , také, že  $\frac{q_n}{p_n} \notin \mathbb{Q}$ , pričom  $p_n < \frac{p}{2^n}$  a  $q_n < \frac{q}{2^n}$ . Čiže pre ľubovoľné  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  také, že  $p_{n_0} < \varepsilon$ . To znamená, že funkcia  $f$  nemá základnú periódu. Q.E.D.

**Veta 1.1.** *Nech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je periodická funkcia bez základnej periódy a nech je kľukatá v nejakom bode  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Potom je  $f$  konštantná.*

*Dôkaz.* Nech  $U(x_0)$  je pevné okolie bodu  $x_0$ . Potom k  $\varepsilon > 0$  existuje otvorená neprázdna množina  $U \subseteq U(x_0)$ , taká, že pre všetky  $x, y \in U$  platí  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Keďže  $U$  je otvorená a neprázdna, tak existuje  $\delta > 0$  také, že  $U$  obsahuje nejaký uzavretý interval dĺžky  $\delta$ . Označme ho  $I_\delta$ . Potom pre všetky  $x, y \in I_\delta$  je splnené  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

Z toho, že periodická funkcia  $f$  nemá základnú periódu vyplýva, že existuje jej perióda  $p < \delta$ . Potom existuje uzavretý interval  $I_p$  dĺžky  $p$ , taký, že  $I_p \subset I_\delta$ . Potom platí  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  pre každé  $x, y \in I_p$ .

Keďže  $p$  je perióda funkcie  $f$ , tak pre ľubovoľné  $r \in \mathbb{R}$  existuje  $s \in I_p$  také, že  $f(r) = f(s)$ . Preto  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  pre všetky  $x, y \in \mathbb{R}$ . A to má platiť pre každé  $\varepsilon > 0$ . Teda  $f$  je konštantná. Q.E.D.

Podmienka kľukatosti v aspoň jednom bode je esenciálna. Nie je totiž pravda, že každá periodická funkcia bez základnej periódy je konštantná. Dokážeme, že existuje periodická funkcia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bez základnej periódy, ktorej obor hodnôt je nespočítateľný.

Definujme si na množine  $\mathbb{R}$  reláciu  $\sim$  predpisom  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ .

Takto definovaná relácia  $\sim$  je relácia ekvivalencie. Ak prevedieme faktorizáciu  $\mathbb{R}$  podľa tejto relácie, dostaneme systém tried  $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$  taký, že  $\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha$  a pre  $\alpha \neq \beta$  je  $T_\alpha \cap T_\beta = \emptyset$ . Každá trieda je spočítateľná množina a preto indexová množina  $A$  je nespočítateľná.

Podľa axiómy výberu existuje zobrazenie  $u: \{T_\alpha: \alpha \in A\} \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha = \mathbb{R}$ , ktoré každej triede  $T_\alpha$  priradí číslo  $u(T_\alpha) \in T_\alpha$ . Keďže triedy sú navzájom disjunktné, takto získané hodnoty  $u(T_\alpha)$  sú navzájom rôzne. Definujme teraz funkciu

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nasledovným spôsobom. Prvku  $x \in T_\alpha$  priradíme hodnotu  $f(x) = u(T_\alpha)$ .

Každé kladné racionálne číslo  $q$  je perióda funkcie  $f$ , pretože pre ľubovoľné  $x \in \mathbb{R}$  je  $x \sim (x + q)$ , čiže  $x$  a  $x + q$  sú prvky z tej istej triedy  $T_\alpha$  a teda  $f(x) = f(x + q)$ . Z toho vyplýva, že funkcia  $f$  je periodická bez základnej periódy.

Jej obor hodnôt  $\mathcal{R}(f) = \bigcup_{\alpha \in A} \{u(T_\alpha)\}$  je nespočítateľné zjednotenie navzájom rôznych jednoprvkových množín, teda  $\mathcal{R}(f)$  je nespočítateľná.

Môžeme sa presvedčiť, že  $f$  nie je kľukatá v žiadnom bode a teda nepopiera Vetu 1.1. Platí totiž, že pre ľubovoľné  $\alpha \in A$  je trieda  $T_\alpha$  hustá, pretože sa jedná o množinu  $u(T_\alpha) + \mathbb{Q} = \{u(T_\alpha) + q : q \in \mathbb{Q}\}$ .

To znamená, že každá neprázdna otvorená množina  $U \subseteq \mathbb{R}$  má neprázdny prienik s  $T_\alpha$  pre každé  $\alpha \in A$ . Teda  $U$  obsahuje prvok z každej z tried  $T_\alpha$ , čo znamená, že na množine  $U$  nadobúda funkcia  $f$  všetky svoje hodnoty. Potom ale  $f$  nie je kľukatá v žiadnom bode.

## 2 Vlastnosti základnej zovšeobecnenej periódy

Definujeme pojem p-homeomorfizmu rovnako ako je uvedený v článku [Kupka, 2007] a spomenieme niektoré jeho vlastnosti, ktoré sú podrobnejšie uvedené v [Rusin, 2010].

Nech  $X$  je topologický priestor. Nech funkcia  $f: X \rightarrow X$  je homeomorfizmus a nech platí, že ku každému kompaktnému  $C \subseteq X$  existuje  $N \in \mathbb{N}$  také, že  $\forall n > N: f^n(C) \cap C = \emptyset$ . Potom sa funkcia  $f$  nazýva p-homeomorfizmus.

Z definície je zrejmé, že p-homeomorfizmus nemá pevné body, t.j. body  $x \in X$  také, že  $f(x) = x$ .

Ďalej platí, že ku každému p-homeomorfizmu existuje inverz a je tiež p-homeomorfizmom.

Pre funkcie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  máme navyše veľmi jednoduchú charakterizáciu. Funkcia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je p-homeomorfizmus práve vtedy, keď je to rastúca spojité bijekcia bez pevných bodov. Navyše pre takúto  $f$  platí buď  $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) > x$  alebo  $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) < x$ .

Pomocou tejto charakterizácie sa dá ukázať, že ak  $f(x) > x$  pre všetky  $x \in \mathbb{R}$ , potom pre  $k \in \mathbb{Z}$  je priradenie  $k \mapsto f^k(x)$  rastúca funkcia, ktorá je

zdola a zhora neohraničená, pričom  $f^k$  chápeme ako  $k$ -tú iteráciu funkcie  $f$ , ak  $k > 0$ ; identitu, ak  $k = 0$ ;  $(-k)$ -tú iteráciu funkcie  $f^{-1}$ , ak  $k < 0$ .

Pomocou p-homeomorfizmu sme schopní definovať zovšeobecnene periodickú funkciu.

Nech  $X$  je topologický priestor a  $Y$  je neprázdna množina. Funkciu  $F: X \rightarrow Y$  nazývame zovšeobecnene periodickou, ak existuje p-homeomorfizmus  $f: X \rightarrow X$ , taký, že  $\forall x \in X: F(x) = F(f(x))$ . Hovoríme tiež, že funkcia  $F$  je periodická podľa p-homeomorfizmu  $f$ .

Uvažujme ako možno zovšeobecníť pojem základnej periódy pre zovšeobecnene periodické funkcie. Nech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcia so základnou periódou  $p$ . Nech  $q$  je perióda funkcie  $f$ . Potom  $q = np$  pre nejaké  $n \in \mathbb{Z}$ . To znamená, že funkcia  $f$  je periodická podľa p-homeomorfizmov  $g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  daných  $g_1(x) = x + p$ ,  $g_2(x) = x + np$ .

Pre  $x \in \mathbb{R}$  sú hodnoty funkcie  $f$  v bodoch  $\dots, g_1^{-1}(x), x, g_1(x), g_1(g_1(x)), \dots$  rovnaké.

Prirodzene sa nám núka možnosť zaviesť reláciu ekvivalencie na  $\mathbb{R}$  takto:  $x \sim_1 y$  ak  $y = g_1^k(x)$  pre nejaké  $k \in \mathbb{Z}$ . Potom môžeme hovoriť, že funkcia  $f$  je konštantná na množine  $[x]_{\sim_1} = \{y \in \mathbb{R} : x \sim_1 y\}$ , t.j. na triede prvku  $x$  v relácii  $\sim_1$ , pre každé  $x \in \mathbb{R}$ .

Ľahko vidno, že ak zavedieme reláciu  $\sim_2$  prislúchajúcu p-homeomorfizmu  $g_2$  predpisom  $x \sim_2 y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y = g_2^k(x)$ , tak triedy ekvivalencií  $[x]_{\sim_2}$  budú podmnožiny tried  $[x]_{\sim_1}$ .

Inými slovami rozklad  $\mathbb{R}$  prislúchajúci relácii  $\sim_2$  je zjemnením rozkladu prislúchajúceho  $\sim_1$ . A to je práve tá vlastnosť vďaka ktorej vieme dokázať, že ak je funkcia periodická s periódou  $p$ , potom je periodická aj s periódou  $np$  pre každé  $n \in \mathbb{N}$ . Tieto úvahy naznačujú akým smerom sa budeme ďalej uberať pre zavádzaní analogických pojmov vo všeobecnom prípade.

**Def.2.1.** Nech  $X$  je topologický priestor. Nech  $f: X \rightarrow X$  je p-homeomorfizmus. Nech  $\sim_f$  je relácia ekvivalencie na  $X$  daná predpisom  $x \sim_f y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y = f^k(x)$ . Triedu prvku  $x$  v relácii  $\sim_f$  označme  $[x]_f$ . Táto relácia ekvivalencie určuje rozklad  $\{[x]_f : x \in X\}$  množiny  $X$ , ktorý označíme  $\Pi_f$ .

Nech  $X$  je lokálne kompaktný Hausdorffovský priestor a  $f: X \rightarrow X$  je  $p$ -homeomorfizmus. Potom pre každé  $x \in X$  trieda  $[x]_f$  nemá hromadné body.

Predpokladajme, že  $[x]_f$  má hromadný bod  $y \in X$ . Priestor  $X$  je lokálne kompaktný, zvolme preto otvorené okolie  $U$  bodu  $y$ , také, že  $\bar{U}$  je kompaktné. Keďže  $y \in \overline{[x]_f}$ , tak existuje  $x_1 \in U \cap [x]_f$ . Navyše platí  $x_1 \neq y$ . Pretože  $X$  je Hausdorffovský, existuje otvorené okolie  $V_1$  bodu  $y$ , že  $x_1 \notin V_1$ . Potom otvorená množina  $U_1 := V_1 \cap U$  je okolie  $y$ , ktoré je podmnožinou  $U$  a neobsahuje  $x_1$ . To znamená, že existuje  $x_2 \in U_1 \cap [x]_f$  také, že  $x_2 \neq y$  a navyše  $x_2 \neq x_1$ . Nájďme otvorené okolie  $V_2$  bodu  $y$  také, že  $x_1, x_2 \notin V_2$  a položime  $U_2 := V_2 \cap U$ . Potom  $U_2$  je otvorené okolie  $y$ , ktoré je podmnožinou  $U$  a neobsahuje  $x_1, x_2$ . Opakovaním tohto procesu dostávame postupnosť  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  navzájom rôznych bodov z množiny  $U \cap [x]_f$ , ktorá je podmnožinou kompaktnu  $\bar{U}$ .

Pre  $n = 1, 2, 3, \dots$  je  $x_1 \sim_f x_n$  a teda existujú  $k_n \in \mathbb{Z}$  také, že  $x_n = f^{k_n}(x_1)$ . Keďže  $x_n \neq x_m$  pre  $n \neq m$ , tak aj  $k_n \neq k_m$  pre  $n \neq m$ . Z toho plynie, že množina  $\{k_n : n \in \mathbb{N}\}$  je nekonečná. Keďže navyše  $k_1 = 0$ , tak množina  $K := \{|k_n| : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$  je podmnožina prirodzených čísel a je tiež nekonečná.

Ukážeme, že pre každé  $k \in K$  je splnené  $f^k(\bar{U}) \cap \bar{U} \neq \emptyset$ . Nech  $k \in K$ . Potom existuje  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  také, že  $k = |k_n|$ . Keďže  $x_n = f^{k_n}(x_1)$ , tak buď  $x_n = f^{|k_n|}(x_1)$  alebo  $x_1 = f^{|k_n|}(x_n)$ . S využitím  $x_1, x_n \in \bar{U}$  dostávame, že aspoň jedno z  $x_1, x_n$  patrí  $f^k(\bar{U})$ . Lenže  $\bar{U}$  je kompaktné a  $K$  je nekonečná podmnožina prirodzených čísel  $k$ , takých, že  $f^k(\bar{U}) \cap \bar{U} \neq \emptyset$ . Ale to je spor s tým, že  $f$  je  $p$ -homeomorfizmus.

**Def.2.2.** Nech  $X$  je topologický priestor. Nech  $f: X \rightarrow X$  a  $g: X \rightarrow X$  sú  $p$ -homeomorfizmy. Budeme hovoriť, že  $f$  je zjemnením  $g$  ak  $\Pi_g$  je zjemnením  $\Pi_f$ , t.j. pre každé  $A \in \Pi_g$  existuje  $B \in \Pi_f$  také, že  $A \subseteq B$ . Budeme značiť  $f \preceq g$ . Takto definovaná relácia  $\preceq$  je predusporiadanie.

Reflexivita a tranzitivita relácie  $\preceq$  vyplýva z reflexivity a tranzitivity relácie zjemnenia na systéme všetkých rozkladov. Ako však ukazuje nasledujúca lema, táto relácia nie je antisymetrická, pretože napríklad  $f \preceq f^{-1}$  a aj  $f^{-1} \preceq f$ .

**Lema2.1.** Nech  $X$  je topologický priestor,  $f: X \rightarrow X$  je  $p$ -homeomorfizmus a  $k \neq 0$  je celé číslo. Potom  $f \preceq f^k$ .

*Dôkaz.* Najskôr dokážeme, že funkcia  $f^k$  je naozaj  $p$ -homeomorfizmus, ak  $k > 0$ . Je zrejmé, že  $f^k$  je homeomorfizmus  $X$  na seba. Nech  $C \subseteq X$  je kompaktné. Potom existuje  $N \in \mathbb{N}$  také, že  $\forall n > N: f^n(C) \cap C = \emptyset$ . Nech  $M$  je horná celá časť čísla  $\frac{N}{k} > 0$ . Potom pre ľubovoľné  $m > M$  je  $km > N$  a teda  $f^{km}(C) \cap C = \emptyset$ . Lenže to znamená, že sme našli prirodzené  $M$ , pre ktoré je splnené  $\forall m > M: (f^k)^m(C) \cap C = \emptyset$ . Tým pádom  $f^k$  je  $p$ -homeomorfizmus. V prípade, že  $k < 0$ , funkcia  $f^k$  je inverzná funkcia k  $p$ -homeomorfizmu  $(f^{-k})^{-1}$  a je teda tiež  $p$ -homeomorfizmus. Teraz stačí overiť, že rozklad  $\Pi_{f^k}$  je zjemnenie  $\Pi_f$ . Ukážeme, že pre ľubovoľné  $x \in X$  je  $[x]_{f^k}$  podmnožina  $[x]_f$ . Nech  $y \in [x]_{f^k}$ . Potom  $y = (f^k)^l(x)$  pre nejaké  $l \in \mathbb{Z}$ , ale to znamená, že  $y = f^{kl}(x)$ , pričom  $kl \in \mathbb{Z}$ , a teda  $y \in [x]_f$ . Q.E.D.

Pojem zjemnenia  $p$ -homeomorfizmu si môžeme ilustrovať na nasledujúcom príklade.

Uvažujme funkciu  $F(x) = \sin x^3$ . Táto funkcia je periodická podľa  $p$ -homeomorfizmov  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2\pi}$  a  $g(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4\pi}$ . Aby sme ich vedeli porovnať potrebujeme určiť rozklady  $\Pi_f$  a  $\Pi_g$ .

Vezmime si pevné  $x \in \mathbb{R}$ . Indukciou sa ľahko presvedčíme o tom, že  $f^k(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2k\pi}$  a  $g^k(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4k\pi}$ . To znamená, že pre triedy prvku  $x$  máme vyjadrenia

$$[x]_f = \{\sqrt[3]{x^3 + 2k\pi} : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$[x]_g = \{\sqrt[3]{x^3 + 4k\pi} : k \in \mathbb{Z}\}$$

Napríklad špeciálne pre nulu dostávame

$$[0]_f = \{\dots - \sqrt[3]{4\pi}, -\sqrt[3]{2\pi}, 0, \sqrt[3]{2\pi}, \sqrt[3]{4\pi} \dots\}$$

$$[0]_g = \{\dots - \sqrt[3]{8\pi}, -\sqrt[3]{4\pi}, 0, \sqrt[3]{4\pi}, \sqrt[3]{8\pi} \dots\}$$

Je vidieť, že pre každé  $x \in \mathbb{R}$  je  $[x]_g \subseteq [x]_f$ , to ale znamená, že každá množina v rozklade  $\Pi_g$  je obsiahnutá v niektorej množine rozkladu  $\Pi_f$  a tým pádom je rozklad  $\Pi_g$  zjemnením rozkladu  $\Pi_f$ , čo podľa definície znamená  $f \preceq g$ .

Ako sa presvedčíme v nasledujúcej vete, tvrdenie Lemy2.1 sa dá obrátiť ak  $X = \mathbb{R}$ .

**Veta2.1.** *Nech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je  $p$ -homeomorfizmus a nech  $g \preceq f$ . Potom existuje celé číslo  $k \neq 0$ , také, že  $f = g^k$ .*

*Dôkaz.* Najskôr si všimnime, že ak  $g \preceq f$ , potom rovnako platí  $g \preceq f^{-1}$ ,  $g^{-1} \preceq f$  a  $g^{-1} \preceq f^{-1}$  na základe tranzitivity relácie  $\preceq$  a lemy2.1. Rovnako tvrdenie vety, t.j existencia celočíselného  $k \neq 0$  sa neporuší, ak v rovnosti  $f = g^k$  zameníme  $f$  za  $f^{-1}$ , respektíve  $g$  za  $g^{-1}$ . To znamená, že ak túto vetu dokážeme pre vybranú dvojicu funkcií z množiny  $\{[f, g], [f^{-1}, g], [f, g^{-1}], [f^{-1}, g^{-1}]\}$ , tak bude platiť pre všetky dvojice. Z vlastností reálneho  $p$ -homeomorfizmu vyplýva, že jeho graf alebo graf jeho inverzu leží nad priamkou  $y = x$ . Vieme vybrať našu dvojicu tak, aby to bolo spnené pre oba  $p$ -homeomorfizmy. Táto úvaha nám dovoľuje spraviť nasledujúci predpoklad bez ujmy na všeobecnosti.

Predpokladajme, že platí  $f(x) > x$  a  $g(x) > x$  pre všetky  $x \in \mathbb{R}$ . To znamená, že zobrazenia  $k \mapsto f^k(x)$  a  $k \mapsto g^k(x)$  definujú rastúce funkcie na množine  $\mathbb{Z}$ .

Rozklad  $\Pi_f$  je zjemnením rozkladu  $\Pi_g$ . Uvažujme pevné  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Potom máme, že  $x_0 \in [x_0]_f \in \Pi_f$  a existuje množina  $A \in \Pi_g$ , že  $[x_0]_f \subseteq A$ . Teda  $x_0 \in A$ , čo znamená, že  $A = [x_0]_g$ . Máme vzťah  $[x_0]_f \subseteq [x_0]_g$ . To znamená, že  $f(x_0) \in [x_0]_g$ . Keďže  $f(x_0) \neq x_0$ , tak existuje celé číslo  $k \neq 0$  tak, že  $f(x_0) = g^k(x_0)$ .

Ukážeme indukciou, že pre všetky  $n \in \mathbb{N}_0$  platí  $f(g^n(x_0)) = g^{n+k}(x_0)$ . Máme zaručenú platnosť pre  $n = 0$ . Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky nezáporné  $n < N$ . Potom pre prirodzené  $N$  máme nerovnosť  $f(g^N(x_0)) > f(g^n(x_0))$ , lebo  $f$  je rastúca. Lenže podľa rovnakého argumentu ako hore  $f(g^N(x_0)) \in [x_0]_g$ . Z toho vyplýva  $f(g^N(x_0)) \geq g^{N+k}(x_0)$ . Sporom dokážeme, že nastáva rovnosť. Ak by to neplatilo, potom  $g^N(x_0) > f^{-1}(g^{N+k}(x_0))$ . Ale  $f^{-1}(g^{N+k}(x_0)) \in [x_0]_g$ , preto  $f^{-1}(g^{N+k}(x_0)) = g^m(x_0)$  pre nejaké  $m \in \mathbb{Z}$ . Potom zrejme  $m < N$  a keďže  $f(g^m(x_0)) \neq g^{N+k}(x_0)$  pre všetky nezáporné  $n < N$ , tak nutne  $m < 0$ . Dostaneme  $g^{N+k}(x_0) = f(g^m(x_0)) < f(x_0) = g^k(x_0)$ . Spor s tým, že zobrazenie  $k \mapsto g^k(x)$  je rastúce.

Analogicky indukciou dokážeme, že pre všetky  $n \in \mathbb{Z}^-$  platí  $f(g^n(x_0)) = g^{n+k}(x_0)$ . Tým pádom máme  $\forall n \in \mathbb{Z}: f(g^n(x_0)) = g^{n+k}(x_0)$ , čo znamená  $\forall x \in [x_0]_g: f(x) = g^k(x)$ .

Vezmime ľubovoľné  $y \in \mathbb{R} \setminus [x_0]_g$ . Potom existuje  $x_1 \in [x_0]_g$  také, že  $x_1 < y < g(x_1)$ , pretože  $[x_0]_g$  je neohraničená. Z rastúčnosti funkcie  $f$  máme  $f(x_1) < f(y) < f(g(x_1))$  a z toho, čo sme doposiaľ dokázali dostávame  $g^k(x_1) < f(y) < g^{k+1}(x_1)$ . Z rovnakých úvah ako na začiatku  $f(y) \in [y]_g$  a preto existuje  $h \neq 0$ , že  $f(y) = g^h(y)$ . Tým pádom  $g^h(x_1) < f(y) < g^{h+1}(x_1)$ . Z čoho dostaneme  $g^h(x_1) < g^{k+1}(x_1)$  a  $g^k(x_1) < g^{h+1}(x_1)$  a následne  $k - 1 < h < k + 1$ . Teda  $h = k$ , čo znamená  $f(y) = g^k(y)$ . Q.E.D.

Aplikáciou tejto vety na náš príklad periód  $f, g$  funkcie  $F(x) = \sin x^3$  pre ktoré sme ukázali vzťah  $f \preceq g$  dostaneme, že musí existovať nenulové celé číslo  $k$ , také, že  $g$  je  $k$ -tá iterácia  $f$ .

Lahko vidno, že naozaj  $g = f^2$ .

**Lema2.2.** *Nech  $F: X \rightarrow Y$  je funkcia periodická podľa  $p$ -homeomorfizmu  $f$  a nech  $f \preceq g$ . Potom je  $F$  periodická podľa  $g$ .*

*Dôkaz.* Nech  $x \in X$ . Potom  $g(x) \in [x]_g$  z definície. Keďže  $f \preceq g$ , tak existuje  $A \in \Pi_f$ , taká, že  $[x]_g \subseteq A$ . To znamená, že  $\{x, g(x)\} \subseteq A$ . Lenže  $A \in \Pi_f$  a  $F$  je periodická podľa  $f$ , preto je  $F$  konštantná na  $A$ , teda  $F(x) = F(g(x))$ . Q.E.D.

**Dôsledok.** *Nech  $F: X \rightarrow Y$  je funkcia periodická podľa  $p$ -homeomorfizmu  $f$ . Nech  $k \neq 0$  je celé číslo. Potom je  $F$  periodická podľa  $f^k$ .*

Definujme teraz prirodzeným spôsobom základnú zovšeobecnenú periódu a pozrime sa aké dôsledky budú mať predošlé tvrdenia v tomto kontexte.

**Def.2.3.** *Nech  $F: X \rightarrow Y$  je zovšeobecnene periodická funkcia. Ak existuje  $p$ -homeomorfizmus  $f: X \rightarrow X$  taký, že:*

i)  $F$  je periodická podľa  $p$ -homeomorfizmu  $f$

ii) ak je  $F$  periodická podľa  $p$ -homeomorfizmu  $g$  takého, že  $g \preceq f$ , potom  $f \preceq g$



hovoríme, že  $f$  je základná zovšeobecnená perióda funkcie  $F$ . Ak neexistuje také  $f$ , hovoríme, že  $F$  nemá základnú zovšeobecnenú periódu.

Na rozdiel od množiny všetkých periód na ktorej sme mali definovanú totálne usporiadanú množinu reálnych čísel, množina všetkých zovšeobecnených periód je vybavená len predusporiadaním. Preto sme nemohli v druhej podmienke definície požadovať aby  $g \preceq f$  implikovalo  $f = g$ . To zároveň znamená, že zovšeobecnene periodická funkcia  $F: X \rightarrow Y$  môže mať viac rôznych základných zovšeobecnených periód.

Ak sa vrátíme k nášmu príkladu zovšeobecnene periodickej funkcie  $F(x) = \sin x^3$ , mohli by sme tušiť, že  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2\pi}$  je jej základná zovšeobecnená perióda.

Uvažujme  $p$ -homeomorfizmus  $g$  taký, že  $g \preceq f$  a  $F$  je periodická podľa  $g$ . Podľa Vety2.1 potom existuje  $k \neq 0$ , také, že  $f = g^k$ . Špeciálne pre nulu  $\sqrt[3]{2\pi} = f(0) = g^k(0)$ . Lenže z periodicity musí byť hodnota  $F$  v bodoch  $0$  a  $g(0)$  rovnaká a keďže  $F(0) = 0$  tak  $g(0)$  je nulový bod funkcie  $F(x) = \sin x^3$ . Preto  $g(0) = \sqrt[3]{2n\pi}$  pre nejaké celé číslo  $n$ . Rovnakými úvahami ako v dôkaze Vety2.1 dospejeme k tomu, že  $g^k(0) = \sqrt[3]{2kn\pi}$ , z čoho vyplýva  $1 = kn$ . Keďže  $k, n$  sú celé tak jediné možnosti sú  $k = 1$  a  $k = -1$ . Preto  $g = f$  alebo  $g = f^{-1}$  a v oboch prípadoch je splnené, že  $f \preceq g$ .

Tým pádom  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2\pi}$  je naozaj základná zovšeobecnená perióda, ale takisto aj jej inverz  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2\pi}$ .

Naším cieľom je teraz dokázať zovšeobecnú verziu Vety1.1. Na to ale budeme potrebovať jedno pomocné tvrdenie.

**Lema2.3.** (Veta6.1. [Rusin, 2010]) *Nech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcia periodická podľa  $p$ -homeomorfizmu  $g$  a nech pre nejaké  $\alpha \in \mathbb{R}$  je  $I$  uzavretý interval s krajnými bodmi  $\alpha, g(\alpha)$ . Ak je funkcia  $f$  ohraničená konštantou  $K$  na intervale  $I$ , potom je ohraničená touto konštantou na celom  $\mathbb{R}$ .*

**Veta2.2.** *Nech  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je zovšeobecnene periodická funkcia bez základnej zovšeobecnenej periódy a nech je spojitá. Potom je  $F$  konštantná.*

*Dôkaz.* Uvažujme ľubovoľnú zovšeobecnú periódu  $f$  funkcie  $F$ . Bez ujmy na všeobecnosti, nech  $f(x) > x$  pre všetky  $x \in \mathbb{R}$ . Keďže  $F$  nemá základnú zovšeobecnú periódu, tak je periodická podľa nejakého  $p$ -homeomorfizmu  $g$ , takého, že  $g \preceq f$  a zároveň neplatí  $f \preceq g$ . Podľa Vety2.1 potom nutne  $f = g^k$ , pričom bez ujmy na všeobecnosti môžeme teraz predpokladať, že  $k > 0$ . Navyše neplatí  $f \preceq g$ , preto  $k \geq 2$ .

Celú úvahu môžeme zopakovať ľubovoľne veľa krát a tým dostaneme postupnosť  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  zovšeobecnených periód takú, že  $f = (g_1)^{k_0}$  a pre každé  $n$  platí  $g_n = (g_{n+1})^{k_n}$ , kde  $k_n$  sú celé čísla a  $k_n \geq 2$ .

Uvažujme pevné  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Z doterajších zistení vyplýva, že  $[x_0]_f \subset [x_0]_{g_1} \subset \dots \subset [x_0]_{g_n}$ . Navyše z kladnosti  $k_n$  a predpokladu  $f(x) > x$  vyplýva, že aj všetky  $g_n$  spĺňajú  $g_n(x) > x$ . Keďže  $f = (g_n)^{k_0 k_1 \dots k_{n-1}}$  tak uzavretý interval  $[x_0, f(x_0)]$  obsahuje  $k_0 k_1 \dots k_{n-1} + 1$  bodov triedy  $[x_0]_{g_n}$ .

Označme  $[x_0]_\infty$  zjednotenie množín  $[x_0]_{g_n}$  cez všetky  $n \in \mathbb{N}$ . Prienik  $[x_0]_\infty$  s uzavretým intervalom  $[x_0, f(x_0)]$  je nekonečná množina. Z kompaktnosti tohto intervalu vyplýva, že  $[x_0]_\infty$  má hromadný bod. Označme ho  $x_1$ .

Nech  $\varepsilon > 0$  je ľubovoľné. Potom zo spojitosti  $F$  a topológie na  $\mathbb{R}$  vyplýva, že existuje súvislé okolie  $U$  bodu  $x_1$  také, že  $F(U) \subseteq (F(x_1) - \varepsilon, F(x_1) + \varepsilon)$ . Množina  $U$  obsahuje nejaké  $y, z \in [x_0]_\infty$ , pretože  $x_1$  je hromadný bod  $[x_0]_\infty$ . Potom ale  $y, z \in [x_0]_{g_n}$  pre nejaké  $n$ .

Nech  $y < z$ . Potom  $z = (g_n)^K(y)$  pre nejaké  $K \in \mathbb{N}$ . Tým pádom interval  $[y, g_n(y)]$  ktorý je obsiahnutý v  $[y, z]$  je podmnožina  $U$ , lebo  $U$  obsahuje  $y, z$  a je súvislá. Funkcia  $|F(x) - F(x_1)|$  je na intervale  $[y, g_n(y)]$  ohraničená konštantou  $\varepsilon$  a je periodická podľa  $p$ -homeomorfizmu  $g_n$ . Podľa Lemy2.3 potom platí  $|F(x) - F(x_1)| < \varepsilon$  na celom  $\mathbb{R}$ . Lenže je ľubovoľné, preto nutne  $\forall x \in \mathbb{R}: F(x) = F(x_1)$ .

Q.E.D.

## Použitá literatúra

- [Borsík, Doboš, Repický,1999/2000] Borsík J., Doboš J., Repický M. (1999/2000), Sums of quasicontinuous functions with closed graphs. *Real Analysis Exchange* Vol. 25(2) s. 679-690
- [Kupka, 2007] Kupka I. (2007), Invariance and periodicity. *Demonstratio Mathematica*, Vol. 40, No. 2 s. 457-464
- [Rusin, 2010] Rusin T. (2010), Charakterizácia zovšeobecnených periód.

# Minkowského priestor a hyperbolická geometria (rozšírený abstrakt)

Matúš Ždanský<sup>1\*</sup>

Školiteľ: Pavel Chalmovianský<sup>2†</sup>

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

V tomto článku sa zaoberáme pseudo-euklidovskými priestormi, špeciálne Minkowského priestorom a jeho geometriou – hyperbolickou geometriou.

Článok sa začína uvažovaním euklidovského vektorového priestoru a skalárneho súčinu, pomocou ktorého je možné si na ňom zdefinovať metriku. Ak v definícii euklidovskej metriky nebudeme požadovať pozitívnu definitnosť jej kvadratickej formy, dostaneme následne *pseudo-euklidovskú* metriku, ktorá nám bude definovať pseudo-euklidovský vektorový priestor. Pseudo-euklidovský skalárny súčin je potom definovaný ako

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^p x^i y^i - \sum_{i=p+1}^n x^i y^i. \quad (1)$$

Prípad, v ktorom  $p = 1$ , nazývame Minkowského priestorom. Špeciálne sa v článku venujeme 4-rozmernému Minkowského priestoru – časopriestoru zo špeciálnej teórie relativity [Einstein, 1920]. Ukážeme si jeho základné vlastnosti, zavedieme si na ňom chronologické usporiadanie, ktoré nám hovorí o plynutí času tak, ako ho subjektívne vníma pozorovateľ, a širšie sa venujeme izometriám časopriestoru - Lorentzovým transformáciám [Dubrovin and Fomenko, 1992]. Konkrétne sa venujeme skracovaniu dĺžky a dilatácii času, pomocou ktorých si dokážeme konštantnosť a maximálnosť rýchlosti svetla.

Druhá časť článku opisuje hyperbolickú geometriu [Hilbert, 1950]. Zaoberáme sa vzťahmi priamok, úsečiek a bodov, ktoré si ilustrujeme dvomi z modelov hyperbolickej geometrie - Kleinovým a Poincarého modelom. Oba modely vznikajú ako priemet z  $n$ -rozmerného Minkowského priestoru do  $(n - 1)$ -rozmerného euklidovského priestoru, kde sa na nich znázornené geometrické objekty nachádzajú vnútri otvoreného kruhu [Berger, 1987]. Kleinov model je pre nás zaujímavý svojou projektívnosťou, teda zachovaním krivostí, zatiaľ čo Poincarého model spĺňa

vlastnosť konformity - zachovania veľkostí uhlov. Na týchto si ilustrujeme zavedenie pojmu uhlového defektu trojuholníka a ukážeme si, že obsah trojuholníka je jeho násobkom [Coxeter, 1969]. Na záver sa v článku venujeme vo všeobecnosti  $n$ -rozmerným pseudo-sférickým súradniciam, ktoré nám slúžia na parametrizáciu hyperboloidov.

Výsledkom článku je zhrnutie a odvodenie základných poznatkov o Minkowského priestore, ukázanie jeho spojitosti s hyperbolickou geometriou a ilustrácia niektorých jej vlastností.

*Keľúčové slová:* Minkowského priestor, špeciálna teória relativity, hyperbolická geometria.

## Literatúra

- [Berger, 1987] Berger, M. (1987). *Geometry 2*. Springer.
- [Coxeter, 1969] Coxeter (1969). *Introduction to Geometry*. John Wiley & Sons, Inc.
- [Dubrovin and Fomenko, 1992] Dubrovin, B. and Fomenko, A. (1992). *Modern Geometry - Methods and Applications*. Springer.
- [Einstein, 1920] Einstein, A. (1920). *Relativity: The Special and General Theory*. Methuen & Co Ltd.
- [Hilbert, 1950] Hilbert, D. (1950). *Foundations of Geometry*. The Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois.
- [Stein, 1968] Stein, H. (1968). *On Einstein-Minkowski Space-Time*. Journal of Philosophy.

\*matuszdansky@gmail.com

†Pavel.Chalmoviansky@fmph.uniba.sk

# Odhad odvodu daní z rodinných účtov

Beata Drobná  
Školiteľ: Richard Kollár

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Cieľom práce je vytvorenie odhadu odvedených daní a popis a analýza navrhutej metodiky, ktorá využíva dva spôsoby disagregácie dát. Jedným je prechod od domácností k jednotlivcom, keďže dáta nie sú zadávané pre samostatné osoby, a druhým je prienik dvoch rôznych typov delení osôb. V práci je uvedený aj samotný odhad odvedených daní a poplatkov pre vybrané skupiny osôb z dát Rodinných účtov z roku 2007.

**Kľúčové slová:** disagregácia dát, odhad daní, rodinné účty, prienik kritérií, metóda RAS, metóda Entrop

## 1 Úvod

Každý občan ročne odvedie štátu istú sumu peňazí, či už vo forme daní alebo iných poplatkov. Málomktorý má však prehľad o tom koľko reálne štátu za daný rok prispel. Keďže dane a poplatky, ktoré napokon končia v pokladnici našej krajiny, sú často súčasťou cien tovarov, či služieb, ich hodnotu si zriedkakedy uvedomujeme. Cieľom tejto práce je vytvoriť metodiku pre výpočet odhadu daní a poplatkov a následne ju použiť, pričom budeme pracovať s dátami z rodinných účtov, ktoré sú každoročne zverejňované Štatistickým úradom Slovenskej republiky. Kvôli dostupnosti sme pracovali s dátami z roku 2007.

**Existujúce prieskumy.** Na Slovensku každoročne vytvára odhad odvedených daní občanmi nadácia F.A.Hayeka, ktorá vypočítava Deň daňovej slobody pre priemerného občana. Naším cieľom bolo vytvoriť odhad o niečo presnejší v tom, že odvedené dane vypočítame pre konkrétnejšie skupiny osôb.

**Metodika.** Metodika, ktorú sme vytvorili sa venuje dvom problémom. Jedným z nich je prechod od domácností

k jednotlivcom. Informácie z rodinných účtov hovoria o príjmoch a výdavkoch domácností. My by sme však chceli vytvoriť odhad pre skupiny jednotlivcov. Vzniká nám tu problém predeterminovaného system lineárnych rovníc. Na jeho riešenie sme použili metódu najmenších štvorcov s vážením a Tichonovovou regularizáciou.

**Prienik kritérií.** Druhým problémom, ktorému sme sa v tejto práci venovali je prienik kritérií delenia daňovníkov. Rozhodli sme sa, že spresníme odhad odvedených daní tým, že vytvoríme konkrétnejšie definované skupiny. Riešili sme teda problém, kedy sme poznali údaje pre dve rôzne delenia daňovníkov a potrebovali sme zistiť ich prienik. Išlo o opačnú situáciu ako pri prechode na jednotlivcov, teda o riešenie systému malého počtu rovníc o viacerých neznámych. V tomto prípade sme pri riešení použili metódu RAS (v tomto prípade ekvivalentnú s metódou Entrop).

Výsledky získané danou metodikou sme napokon analyzovali a porovnávali s reálnymi dátami.

**Odhad odvedených daní.** Nakoniec, keď sme získali všetky potrebné dáta, sme vytvorili odhady odvedených daní pre vybrané sledované skupiny osôb.

## 2 Existujúce prieskumy

**Deň daňovej slobody.** Asi najznámejšou štúdiou na Slovensku, ktorá sa zaoberá odhadom daňového zaťaženia občana je výpočet Dňa daňovej slobody. S myšlienkou výpočtu Dňa daňovej slobody prišiel v roku 1948 floridský podnikateľ Dallas Hostetler. V posledných rokoch ho už robia organizácie vo viacerých krajinách sveta. Na Slovensku ho od roku 1999 zisťuje Nadácia F. A. Hayeka. Deň daňovej slobody vyjadruje to, koľko dní v roku „pracujeme na štát“ a koľko „na seba“, teda do ktorého dňa roku dáva priemerný občan celý svoj zárobok štátu. Výpočet je založený na makroekonomickom prístupe, zistením celkového daňového zaťaženia.

$$= \frac{\text{celkové daňové zaťaženie}}{\text{HDP}} \times 100$$

*konsolidované výdavky verejnej správy*

Celkové daňové zaťaženie je teda dané v percentách. Výpočet dňa daňovej slobody je odhad týkajúci sa priemerného občana.

**Mikroekonomický prístup.** Okrem samotného výpočtu Dňa daňovej slobody Nadácia F. A. Hayeka pripája k danej štúdiu aj mikroekonomický prístup k problematike daňového zaťaženia občana. Je to výpočet podielu čistého príjmu občana na mzdové náklady firmy. Pod čistým príjmom rozumieme príjem po zaplatení odvodov a dane z príjmov, taktiež je braná vo výpočte do úvahy DPH. Mzdové náklady firmy, ktoré sú použité pri výpočte daňového zaťaženia priemerného občana, sú rovné disponibilnému príjmu, ktorý daný občan zarobí a tej časti povinných odvodov, ktoré za zamestnanca platí zamestnávateľ. V roku 2008 bol hľadaný podiel rovný 0,474, teda čistý príjem občana bol 47,4% z celkových mzdových nákladov zamestnávateľa. Pri tomto výpočte Nadácia F. A. Hayeka uvažovala situáciu priemerného bezdetného daňovníka, ktorý nemá nepracujúcu manželku. Reálne daňové zaťaženie občana však závisí aj od počtu detí a aj od toho, či je zamestnaný, nezamestnaný alebo na dôchodku\*.

**Český výskum.** Ďalší výskum v tejto oblasti zhrňa česká štúdia s názvom „Who pays taxes and who gets benefits in the Czech Republic“, ktorú napísal Ondřej Schneider. Výskum sa venoval odhadu daňového zaťaženia a benefitov občanov z rôznych príjmových skupín. V štúdiu však nie je spísaná metodika analýz iba ich výsledky. Tie poukazujú na veľkú rozdielnosť vo výške daní medzi rôznymi príjmovými skupinami. [1].

### 3 Rodinné účty

Pre náš odhad daňového zaťaženia sme použili prierezové dáta z roku 2007. Konkrétne ide o rodinné účty, ktoré zverejňuje Štatistický

\* Zdroje: Ján Solík, Martin Chren: Deň daňovej slobody sa posunul na 22. mája, Dostupné na internete: [http://www.hayek.sk/images/stories/PDF/DDS\\_2007.pdf](http://www.hayek.sk/images/stories/PDF/DDS_2007.pdf), 1.6.2010  
Martin Chren, Nadácia F.A.Hayeka, súkromná komunikácia (2010)

úrad Slovenskej republiky. Obsahujú prehľad príjmov a výdavkov súkromných domácností za daný rok. Všetky dáta sú udávané v slovenských korunách na osobu. Údaje získal Štatistický úrad od 4 698 náhodne vybraných domácností z celkového počtu oslovených 6 330. V prípade delenia domácností podľa typu obce štruktúra domácností v jednotlivých krajoch zodpovedala reálnej štruktúre†.

**Štruktúra použitých dát.** V Tabuľke č.1 vidíme delenie domácností, pre ktoré sú dostupné jednotlivé údaje o výdavkoch a príjmoch.

Tabuľka č.1: Delenie domácností

podľa...	na	
ekon. postavenia prednostu domácnosti v zamestnaní	zamestnanec	
	samostatne zárobkovo činný	
	dôchodca	
	iný	
ekonomickej aktivity prednostu domácnosti	ekonomicky aktívny	pracujúci nezamestnaný
	ekonomicky neaktívny	starobný dôchodca
		iný
počtu ekonomickej aktívnych členov	0	
	1	
	2	
	3 a viac	
typu domácnosti	bez nezaopatrených detí	1 dospelý
		2 dospelí
		3 a viac
	s nezaopatrenými deťmi	1 dospelý
		2 dospelí
		3 a viac
počtu nezaopatrených detí	bez detí	
	s deťmi	1
		2
		3 a viac
typu obce	krajské mesto	
	iné mesto	
	iná obec	
príjmovej skupiny	prvých 25%	
	druhých 25%	
	tretích 25%	
	štvrtých 25%	

† Zdroje: Štatistický úrad Slovenskej republiky: Príjmy, výdavky a spotreba súkromných domácností SR (2007)  
Štatistický úrad Slovenskej republiky: Rodinné účty Slovenskej republiky za rok 2007

## 4 Metodika delenia a plán práce

Základné skupiny, pre ktoré zisťujeme odhad celkového daňového zaťaženia, sú **ekonomicky aktívni, závislé deti, dôchodcovia a iní**, kde v tomto prípade medzi iných patria osoby, ktoré nepracujú a nepatria ani do jednej zo zvyšných troch skupín. Do tejto skupiny patria napríklad invalidní dôchodcovia alebo matky v domácnosti. Skupina je veľmi rôznorodá, aj výdavky a príjmy týchto osôb sú nejednotné. Vybrali sme si však práve tieto skupiny preto, lebo delenie členov domácností v rodinných účtoch je vytvorené na základe týchto typov osôb. Táto informácia nám umožňuje zistenie údajov pre dané typy osôb jednotlivo a nie v rámci rodiny.

Okrem týchto základných skupín vytvoríme odhad daňového zaťaženia aj pre viac špecifikované skupiny, ako napríklad pre ekonomicky aktívne osoby žijúce v krajskom meste, inom meste alebo inej obci. Pôjde vlastne o prienik dvoch delení daňovníkov<sup>‡</sup>.

## 5 Prechod od domácností k jednotlivcom

Cieľom našej práce je získať odhad daňového zaťaženia jednotlivca. Konkrétne chceme z informácií o domácnostiach získať údaje pre ekonomicky aktívnych, závislé deti, dôchodcov a ostatných.

### 5.1 Popis metodiky

Pri riešení problému využijeme údaje o domácnostiach, ktoré sú delené podľa počtu ekonomicky aktívnych členov a podľa typu domácnosti (viď *Tabuľka č.1*). Máme teda k dispozícii údaje pre jedenásť typov domácností, šesť z delenia podľa typu domácnosti, štyri z delenia podľa počtu ekonomicky aktívnych členov a jedenástou domácnosťou je priemerná domácnosť, ktorá nie je bližšie špecifikovaná. Tieto domácnosti si označíme číslami od 1 po 11. Okrem údajov

<sup>‡</sup> Zdroj: Štatistický úrad Slovenskej republiky: Príjmy, výdavky a spotreba súkromných domácností SR (2007)

o príjmoch a výdavkoch o každej domácnosti vieme z koľkých ekonomicky aktívnych, detí, dôchodcov a iných sa priemerne skladá. Tieto skupiny označíme číslami 1 až 4. Potom pre každú skupinu definujeme  $x_{ij}$  ako priemerný počet členov zo skupiny  $j$  v domácnosti typu  $i$ .

Vyberieme si jednu položku, napríklad výdavky na vzdelávanie, a chceme zistiť z výdavkov na vzdelávanie daných jedenástich typov domácností, aké sú výdavky na vzdelávanie ekonomicky aktívnych, závislých detí, dôchodcov a ostatných. Výdavky závislých detí sú reálne samozrejme výdavkami ich rodičov alebo poručníkov, ale chceme zistiť akú daň zaplatí rodič na výdavkoch svojho dieťaťa. Budeme brať teda tieto výdavky oddelene od ostatných, ktoré rodič má a uvažovať ich ako výdavky priamo dieťaťa. Výdavky  $i$ -teho typu domácnosti na vzdelávanie označíme  $d_i$ . Naše neznáme, teda výdavky na vzdelávanie jednotlivých typov jednotlivcov si označíme  $a_j$ , kde  $j = 1, 2, 3, 4$ . Vieme, že pre  $i = 1, 2, \dots, 11$  platí:

$$x_{i1}a_1 + x_{i2}a_2 + x_{i3}a_3 + x_{i4}a_4 = d_i.$$

Týmto získavame sústavu jedenástich lineárnych rovníc o štyroch neznámych. V maticovom tvare je zapíšeme nasledovne

$$Xa = d.$$

**Predeterminovanosť.** Takáto sústava pravdepodobne nebude mať presné riešenie, keďže sme sa snažili vybrať také domácnosti, ktoré spolu súvisia, čo najmenej, aby sme zachytili čo najviac informácií. Nehľadáme teda presné riešenie, hľadáme také, ktoré čo najviac vyhovuje týmto rovniciam. Za optimálne sme zobrali to, ktoré sme dostali váženou metódou najmenších štvorcov, kde sme ako váhy použili početnosť rodín daného typu na Slovensku. Pri výpočte sme predpokladali, že pre  $j = 1, 2, 3, 4$  platí  $a_j \geq 0$ , konkrétne teda hľadáme vektor  $a$ , ktorý rieši úlohu

$$\min_{a \geq 0} \|\tilde{X}a - \tilde{d}\|,$$

kde uvažujeme Euklidovskú normu a  $\tilde{X}$  a  $\tilde{d}$  predstavujú maticu  $X$  a vektor  $d$  pre násobené váhami.

Pre optimálne  $\hat{a}$  vypočítame relatívnu chybu pre každý typ domácnosti, okrem tých, ktoré sme neuvažovali z dôvodu nedôveryhodnosti dát.

$$\varepsilon_i = \frac{\tilde{X}_i \hat{a} - \tilde{d}_i}{\tilde{d}_i},$$

$\tilde{X}_i$  označuje  $i$ -ty riadok matice  $\tilde{X}$ .

## 5.2 Eliminácia chyby

V prípade, že je relatívna chyba nášho odhadu  $\hat{a}$  pre niektorý typ domácnosti príliš vysoká, chceme túto chybu eliminovať a to buď vytvorením osobitného odhadu pre daný typ rodiny alebo opravou spoločného odhadu  $\hat{a}$ .

**Zmena váh a relaxácia.** Prvou možnosťou je teda vytvorenie nového odhadu pre danú „chybovú“ domácnosť a to konkrétne zmenou váh. Pri prechode k jednotlivcom používame ako váhy frekvenciu výskytu daného typu domácnosti. Keďže hľadáme čo najlepší odhad pre konkrétnu kategóriu, na čo však potrebujeme minimálne štyri typy domácnosti, aby sme mohli pracovať so štyrmi rovnicami o štyroch neznámych, ponecháme vo výpočte pôvodné rovnice, pre presnejší odhad, zmeníme iba ich dôležitosť. Chceli by sme teda v tomto prípade váhy upraviť podľa toho ako veľmi je daná kategória podobná tej odhadovanej. Podobnosť kategórií určujeme podľa zloženia jej členov.

Druhým krokom eliminácie chyby týmto spôsobom je oprava pôvodných dát. Keďže bola relatívna chyba pre danú domácnosť taká vysoká, môžeme predpokladať, že konkrétny údaj, pri ktorom chyba nastala nie je celkom správny a je možné že došlo k istým nezrovnalostiam pri jeho zisťovaní. Na opravu dát použijeme metódu relaxácie, čo konkrétne znamená opätovné riešenie sústavy metódou najmenších štvorcov s tým, že pridáme do sústavy nezáporné pomocné premenné, ktoré umožnia úpravu danej chybnjej položky.

Označme si  $y$  a  $z$  pomocné premenné, s ktorými budeme pracovať. Predpokladáme  $y \geq 0$  a  $z \geq 0$ . Do pôvodnej sústavy pridáme rovnice

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ z &= 0, \end{aligned}$$

a  $k$ -tu opravovanú rovnicu sústavy zmeníme na rovnicu v tvare

$$x_{k1}a_1 + x_{k2}a_2 + x_{k3}a_3 + x_{k4}a_4 = d_k + y - z.$$

Tým sa vlastne upravená položka  $\tilde{d}_k$  prispôbi danej sústave tak, aby chyba v  $k$ -tej rovnici bola čo najmenšia. Táto úprava však nebude veľká práve vďaka prvým dvom pridaným rovniciam. Ako už bolo vyššie spomenuté túto sústavu taktiež riešime váženou metódou najmenších štvorcov, pričom uvažujeme váhy odvodené z podobnosti typov domácností.

### Tichonovova regularizácia.

Problémom našej úlohy hľadania optimálneho riešenia systému  $\tilde{X}a = \tilde{d}$  je zlá podmienenosť matice  $\tilde{X}$ . Tento problém nastáva z toho dôvodu, že v domácnostiach je veľmi málo členov zo skupiny ostatných a teda ich priemerné početnosti sa pohybujú do hodnoty 0,4 na jednu rodinu. Pri práci s maticou s malými zložkami prípadne s jej inverziou môžu nastať chyby.

Rozhodli sme sa riešiť tento problém Tichonovovou regularizáciou. Metóda rieši systém  $\tilde{X}a = \tilde{d}$  s neznámym vektorom a predpokladá, že matica  $\tilde{X}$  je zle podmienená. Matica je veľosti  $11 \times 4$ . Riešenie spočíva v minimalizácii

$$\min_{a \geq 0} \|\tilde{X}a - \tilde{d}\|^2 + \|\Gamma a\|^2,$$

pričom  $\Gamma: R^4 \rightarrow R^1$  je vhodne zvolená Tichonovova matica. Vo väčšine prípadov sa matica volí ako identická, my však použijeme pre našu úlohu inú. Z dôvodov očakávanej podobnosti výdavkov dôchodcov a ostatných, pridáme k pôvodným rovniciam podmienku v tvare

$$a_3 - a_4 = 0.$$

Pridanej rovnici stanovíme pevnú váhu 0,5, kým váhy ostatných rovníc ponecháme rovnaké ako v pôvodnom riešení, teda v závislosti od výskytu daných typov rodín. Takáto zmena systému zodpovedá regularizácii maticou  $\Gamma = (0 \ 0 \ 1 \ -1)$ .

Bez ohraničenia  $a \geq 0$  je dané riešenie tohto problému

$$\hat{a} = (\tilde{X}^T \tilde{X} + \Gamma^T \Gamma)^{-1} \tilde{X}^T \tilde{d}.$$

V prípade podmienky  $a \geq 0$  sme použili funkciu *lsqnonneg* implementovanú v programe MATLAB [2], [3], [6].

## 6 Výsledky disagregácie na jednotlivcov

Uvedenú metodiku sme aplikovali na vybrané položky z rodinných účtov, ktoré sme považovali za relevantné pri odhade odvedených daní. Nasledujúce tabuľky obsahujú konkrétne výsledné odhady položiek pre jednotlivcov a ich prípadné opravy.

Tabuľka č.2: Výsledné príjmy a výdavky jednotlivcov

v Sk na osobu a rok	ekon. aktívny	závislé dieťa	dôchodca	ostatný
<b>Prehľad príjmov</b>				
Hrubé príjmy z prac. činnosti	155,130.0	0.0	0.0	0.0
Príjmy z vlastného podnikania	24,280.0	0.0	0.0	0.0
Starobné dôchodky	2,050.0	0.0	103,420.0	0.0
Iné dôchodky	2,331.0	0.0	10,683.0	20,310.0
Dávky v chorobe	750.0	0.0	0.0	0.0
Podpora v nezamestnanosti	233.1	0.0	0.0	0.0
Dávky sociálnej pomoci	481.0	0.0	583.4	3,616.4
Peňažná pomoc rodinám s deťmi	0.0	13,670.0	0.0	0.0
Iné sociálne príjmy	376.1	111.5	1,399.3	1,563.5
Príspevky zamestnávateľov na stravovanie	4,420.0	0.0	0.0	0.0
Naturálne príjmy	2,308.6	2,122.8	2,921.8	2,509.7
<b>Celkový prehľad výdavkov</b>				
Potraviny a nealkoholické nápoje	24,921.0	17,134.0	33,903.0	23,527.0
Alkohol a tabak	3,876.3	913.8	3,181.4	3,946.2
Odievanie a obuv	7,140.7	6,132.7	4,088.3	4,458.0
Bývanie, voda, elektrina, plyn a iné palivá	18,760.0	14,882.0	37,400.0	29,407.0
Nábytok, údržba bytu	5,894.5	2,082.5	7,604.8	7,727.6
pred Tichonovovou regularizáciou	5,868.0	1,492.0	6,838.0	12,998.0
Zdravotníctvo	2,154.9	1,449.0	5,622.9	3,535.0
Doprava	9,741.0	10,981.0	7,044.0	8,903.0
Pošta a telekomunikácie	6,405.0	3,974.0	4,389.1	7,020.8
Rekreácia a kultúra	7,591.0	7,676.8	6,304.0	6,398.2
pred Tichonovovou regularizáciou	7,573.0	7,217.0	5,713.0	10,460.0
Vzdelávanie	244.9	2,264.9	229.4	0.0
Hotely, kaviarne, reštaurácie	8,121.1	3,947.2	1,257.4	0.0
Rozličné tovary a služby	9,504.0	6,474.0	5,751.0	11,546.0

Ostatné hrubé výdavky	38,978.0	18,580.0	9,776.0	31,245.0
Naturálne výdavky	2,820.7	1,994.2	4,121.6	1,765.4
<b>Alkohol a tabak</b>				
Destiláty	572.4	318.2	763.0	744.9
pred Tichonovovou regularizáciou	575.1	402.9	872.5	0.0
(litre)	2.4	1.4	3.4	3.3
pred Tichonovovou regularizáciou	2.4	1.7	3.8	0.0
Vino	383.3	286.5	605.5	74.2
(litre)	5.5	3.7	9.4	0.8
Pivo	679.0	125.2	657.5	480.5
(litre)	27.5	3.9	27.6	20.4
Cigarety	2,220.0	318.6	1,306.0	1,352.5
pred Tichonovovou regularizáciou	2,211.1	91.8	1,014.2	3,356.9
(kusy)	782.7	103.7	473.2	488.9
pred Tichonovovou regularizáciou	779.7	27.2	374.7	1,165.1
<b>Výdavky za zdravotníctvo</b>				
lieky na recept	641.9	287.5	3,352.6	541.5
Iné zdrav. tovary	46.9	6.4	84.5	131.6
Terap. prístroje a zariadenia	340.6	60.7	211.5	359.1
Služby lekárov	69.8	26.1	53.0	62.0
Služby zubných lekárov	522.1	205.7	609.6	619.5
pred Tichonovovou regularizáciou	520.9	156.2	549.7	1,041.5
<b>Výdavky za dopravu</b>				
Pohonné hmoty a mazadlá	5,288.7	2,655.2	1,973.8	3,256.6
<b>Výdavky za poštu a telekomunikácie</b>				
Poštové služby	64.5	35.9	152.5	62.8
<b>Výdavky za rekreáciu a kultúru</b>				
Tel. a rozhlas. koncesie	815.2	795.9	1,402.9	1,423.6
pred Tichonovovou regularizáciou	835.9	652.3	1,249.4	2,401.9



<b>Ostatné hrubé peňažné výdavky</b>				
Dane	11,048.0	4,319.0	1,200.0	403.0
Platby zdrav. Poisťovniam, Soc. poisťovni	18,988.0	4,150.0	860.0	0.0
Peňažné dary	650.3	0.0	3,418.7	1,016.7
Ostatné platby	444.1	109.6	567.9	577.4
pred Tichonovovou regularizáciou	442.9	62.0	509.4	987.5
Splatené pôžičky a úvery	6,096.4	9,642.8	2,401.9	4,416.3

## 7 Prienik kritérií delenia daňovníkov

V predchádzajúcej kapitole sa nám podarilo získať z dát pre domácnosti informácie pre jednotlivé osoby. Vieme teda aké príjmy a výdavky má priemerný ekonomicky aktívny, závislý dieťa, dôchodca a iný. Z rodinných účtov vieme zistiť príjmy a výdavky domácností pre rôzne delenia rodín (viď *Tabuľka č.1*). Napríklad aj pre domácnosti v krajských mestách, iných mestách a iných obciach. Chceli by sme teraz vytvoriť prienik informácií, ktoré máme a získať z nich dáta pre ekonomicky aktívneho, závislé dieťa, dôchodcu a iného žijúceho v krajskom meste, inom meste a inej obci. Túto úlohu budeme riešiť metódou RAS.

### 7.1 Metóda RAS

Metóda RAS rieši častý problém prieniku kritérií. Konkrétnou úlohou tejto metódy je nájsť prvky neznámej matice

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & \dots & y_{mn} \end{pmatrix},$$

o ktorej vieme

$$\sum_{j=1}^n y_{ij} = b_i^r, \sum_{i=1}^m y_{ij} = b_j^c.$$

Pričom hodnoty  $b_i^r$  a  $b_j^c$  pre každé  $i$  a  $j$  poznáme. Okrem týchto hodnôt potrebujeme ešte vstupnú maticu  $U$ . Metóda potom hľadá maticu  $Y$  tak, aby spĺňala už spomenuté podmienky a zároveň aby bola čo najbližšie k matici  $U$ . Vzdialenosť matíc je v tomto prípade meraná relatívnou entropiou. RAS metóda teda minimalizuje entropiu, ktorú vieme napísať ako  $E_U(Y) = \sum_{k=1}^K y_k \ln \left( \frac{y_k}{u_k} \right)$ .

Algoritmus je iteračným procesom, ktorý začína v počiatočnej matici  $U$ . Každá iterácia sa skladá z dvoch krokov. Prvým krokom je posun matice  $Y$  pomocou podmienok pre jej stĺpce,

$$y_{ij}^{t+1} = \frac{y_{ij}^t b_j^c}{\sum_{r=1}^m y_{rj}^t},$$

a druhým je zopakovanie procesu s podmienkami pre riadky,

$$y_{ij}^{t+1} = \frac{y_{ij}^t b_i^r}{\sum_{s=1}^n y_{is}^t}.$$

Takýmto postupom sa teda dostaneme až k výslednej matici  $Y$ , pre ktorú bude relatívna entropia optimálna. Metóda RAS je v prípade takýchto ohraničení na riadky a stĺpce ekvivalentná s metódou Entrop, ktorej sa podrobne venuje práca "Entropy Optimizing Methods for the Estimation of Tables". Metodám optimalizácie entropie sa tiež podrobnejšie venuje diplomová práca "Maximum Entropy Econometrics" [4], [5], [8].

**Výber počiatočnej matice.** Keďže sa prvky počiatočnej matice nachádzajú v účelovej funkcii a, ako sme už spomenuli, táto funkcia predstavuje vzdialenosť medzi počiatočnou maticou a maticou  $Y$  je zrejme výber tejto matice pre optimálny výsledok dôležitý. Avšak voľba vstupnej matice  $U$  nie je jednoduchá. Rozhodli sme sa, že jednotlivé prvky matice budeme určovať v takých pomeroch, aké predpokladáme pre výsledné hodnoty týchto prvkov.

### 7.2 Metóda RAS aplikovaná na našu problematiku

Cieľom použitia metódy RAS je v našom prípade zistiť informácie o príjmoch a výdavkoch ekonomicky aktívnych, závislých detí, dôchodcov a ostatných žijúcich v krajských mestách, iných mestách alebo iných obciach. Máme informácie o spomenutých jednotlivých skupinách osôb a o domácnostiach fungujúcich v daných druhoch obcí. Je teda potrebné pretransformovať tento problém na úlohu riešiteľnú metódou RAS. Budeme pracovať s úlohou v tvare

	krajské mesto	iné mesto	iná obec	Súčet
ekonomicky aktívni	$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	$b_1^r = \sum_{j=1}^3 y_{1j}$
závislé deti	$y_{21}$	$y_{22}$	$y_{23}$	$b_2^r = \sum_{j=1}^3 y_{2j}$
dôchodcovia	$y_{31}$	$y_{32}$	$y_{33}$	$b_3^r = \sum_{j=1}^3 y_{3j}$
ostatní	$y_{41}$	$y_{42}$	$y_{43}$	$b_4^r = \sum_{j=1}^3 y_{4j}$
súčet	$b_1^c = \sum_{i=1}^4 y_{i1}$	$b_2^c = \sum_{i=1}^4 y_{i2}$	$b_3^c = \sum_{i=1}^4 y_{i3}$	

kde  $y_{ij}$  by mali predstavovať hodnoty danej skúmanej položky (napríklad iné sociálne príjmy alebo výdavky na alkoholické nápoje a iné) pre skupinu osôb  $i$  žijúcu v obci typu  $j$ . Problém však nastáva v tom, že nepoznáme súčty  $b_j^c$  pre jednotlivých ekonomicky aktívnych, závislé deti, dôchodcov alebo iných žijúcich v obciach typu  $j$ . Poznáme iba súčty pre celé domácnosti v týchto obciach. Definujeme teda  $b_j^c$  ako súčet skúmanej položky pre všetky sledované rodiny v rodinných účtoch žijúce v obciach typu  $j$ . To teda znamená, že  $y_{ij}$  je daná skúmaná položka (výdavok alebo príjem) pre počet osôb typu  $i$  žijúcich v domácnostiach v obciach typu  $j$ . Z toho potom vyplýva, že súčty  $b_i^r$  sú súčtami položiek pre všetky osoby typu  $i$  zahrnuté v pozorovaných rodinách v rodinných účtoch. Aby sme lepšie pochopili definície vyššie uvedených údajov pozrieme sa na problém konkrétnejšie.

Označíme si  $h_j$  ako množstvo skúmanej položky (príjmov alebo výdavkov) v domácnosti typu  $j$ , pričom hodnota je uvedená v korunách na osobu. Jednotlivým typom domácností si priradíme index  $j$ , pre domácnosti z krajského mesta bude platiť  $j=1$ , z iného mesta  $j=2$  a z inej obce  $j=3$ . Potrebujeme pozmeniť informácie, ktoré máme tak, aby sme z nich dostali úlohu, ktorú vieme riešiť metódou RAS. Urobíme to na základe definícií, ktoré sme uviedli v predošlom odseku. Platí teda, že

$$b_j^c = n_j \times h_j \times p_j,$$

kde  $n_j$  predstavuje priemerný počet členov v jednej domácnosti typu  $j$  a  $p_j$  označuje počet sledovaných domácností typu  $j$ .

$$b_i^r = \bar{n} \times a_i \times \bar{p},$$

pričom  $\bar{n}$  je priemerný počet členov v priemernej domácnosti, ktorá nie je bližšie špecifikovaná,  $a_i$  je hodnota sledovanej položky pre osoby typu  $i$ . Sú to teda tie hodnoty, ktoré sme zisťovali v kapitole 5 *Prechod od domácností k jednotlivcom*. A napokon  $\bar{p}$  označuje celkový počet sledovaných domácností. Keďže máme definované súčty riadkov a stĺpcov matice takýmto spôsobom, jednotlivé prvky matice  $y_{ij}$  vlastne nevyjadrujú hodnotu skúmanej položky na jedného ekonomicky aktívneho, závislé dieťa, dôchodcu, či ostatného v určitom type obce, ale ich hodnotu na toľko ekonomicky aktívnych, závislých detí atď., koľko ich žije v priemerných rodinách daných typov. My sa však zaujíame o údaje na jednu osobu zo spomenutých skupín, preto prvky výslednej matice, ktorú potrebujeme budú vyzeráť nasledovne

$$\tilde{y}_{ij} = \frac{y_{ij}}{n_{ij}p_j},$$

$n_{ij}$  reprezentuje počet osôb typu  $i$  v domácnosti  $j$ . V tomto prípade samozrejme ani prvky počítateľnej matice  $U$  nehovoria o jednotlivcoch, ale o viacerých ekonomicky aktívnych alebo iných. To by nám však jej určovanie sťažilo, preto sme sa rozhodli voliť počítateľnú maticu  $\tilde{U}$ , pre ktorú platí to isté ako pre maticu  $\tilde{Y}$ ,

$$u_{ij} = \tilde{u}_{ij} \times n_{ij} \times p_j.$$

Môžeme teda určiť maticu  $\tilde{U}$  pre jednotlivcov a následne ju prepočítame na počítateľnú maticu, ktorou začneme iteračný proces metódy RAS. Metódu sme naprogramovali v programe MATLAB.

## 8 Výsledky prienikov delení

Metódu RAS sme použili na každú vybranú položku. Pri výpočte sme využívali dáta uvedené v *Tabuľke č.2*. V *Tabuľke č. 3* sú výsledky vybraných položiek. Kompletná tabuľka je uvedená v mojej bakalárskej práci.

Tabuľka č.3: Výsledné príjmy a výdavky jednotlivcov žijúcich v krajských mestách

v roku 2007				
v Sk na osobu a rok				
	ekon. aktívny	závislé dieťa	dôchodca	ostatný
<b>Prehľad príjmov</b>				
Hrubé príjmy z pracovnej činnosti	186,140.0	0.0	0.0	0.0
Pprijmy z vlastného podnikania	27,554.0	0.0	0.0	0.0
Naturálne príjmy	1,550.3	1,437.9	2,088.3	1,764.1
<b>Prehľad výdavkov</b>				
Potraviny a nealkoholické nápoje	27,286.0	18,741.0	37,548.0	25,882.0
Odievanie a obuv	8,463.9	7,438.4	4,946.3	5,411.7
Bývanie, voda, elektrina, plyn	22,335.0	17,718.0	45,618.0	37,074.0
Nábytok, údržba bytu	9,042.0	2,886.0	12,249.0	12,419.0
Destiláty (litre)	2.3	1.5	3.1	3.0
Pivo (litre)	27.1	4.4	26.9	20.3
Cigarety (kusy)	881.4	133.1	568.6	576.5
lieky na recept	615.1	237.6	3,410.2	523.5

## 9 Odhad odvodu dane pre jednotlivé skupiny

Z výsledkov uvedených v predchádzajúcich kapitolách dopočítame samotný odhad odvedených daní pre jednotlivé sledované skupiny ľudí. Pri výpočte nebudeme uvažovať niektoré platby štátu, ako napríklad miestne dane alebo clá, keďže väčšina týchto platieb sa vzťahuje na informácie, ktoré nie sú zahrnuté v rodinných účtoch. Odhad týchto platieb by sa dal urobiť makroskopicky na jedného človeka v priemere, ale vo výpočte sme ho nepoužili. Odhad odvedených daní a poplatkov, ktorý sme vytvorili bude teda zahŕňať odvody, daň z príjmu, DPH, spotrebné dane a televízne a rozhlasové koncesionárske poplatky. V *Tabuľke č.4* sme uviedli jednotlivé údaje

o výdavkoch a príjmoch a dane alebo poplatky, ktoré sa za danú položku platia štátu. Zároveň sme vytvorili značenie jednotlivých položiek kvôli prehľadnosti výpočtu.

Tabuľka č.4: Príjmy, výdavky a dane, ktoré sa z nich odvádzajú<sup>§</sup> [7]

	Prehľad príjmov	daň
<b>A</b>	Hrubé príjmy z pracovnej činnosti	daň z príjmu, odvody
<b>B</b>	Prijmy z vlastného podnikania	daň z príjmu, odvody
<b>C</b>	Starobné dôchodky, Iné dôchodky, Dávky v chorobe, Podpora v nezamestnanosti, Dávky sociálnej pomoci, Pomoc rodinám s deťmi, iné sociálne príjmy	nezdaňuje sa
<b>D</b>	Naturálne príjmy	daň z príjmu
	<b>Celkový prehľad výdavkov</b>	
<b>E</b>	Potraviny a nealkoholické nápoje, Odievanie a obuv, Bývanie, voda, elektrina, plyn, Nábytok, údržba bytu, Hotely, kaviarne a reštaurácie, Rozličné tovary a služby, Naturálne výdavky	DPH
<b>F</b>	Doprava	DPH, spotrebná daň
<b>G</b>	Pošta a telekomunikácie	DPH, nezdanené
<b>H</b>	Rekreácia a kultúra	DPH, televízne a rozhlasové koncesie
<b>I</b>	Ostatné hrubé výdavky	DPH, nezdanené
	<b>Alkohol a tabak</b>	
<b>J</b>	Destiláty (litre)	spotrebná daň
<b>K</b>	Víno (litre)	spotrebná daň
<b>L</b>	Pivo (litre)	spotrebná daň
<b>M</b>	Cigarety (kusy)	spotrebná daň

<sup>§</sup> Zdroje: Daň z pridanej hodnoty

Dostupné na internete:

<http://www.msponline.sk/content/da%20C5%88-z-pridanej-hodnoty>, 31.5.2010

Štatistický úrad Slovenskej republiky:

Priemerné ceny pohonných látok v SR v roku 2007

Dostupné na internete:

<http://portal.statistics.sk/showdoc.do?docid=5648>, 31.5.2010

		daň
	<b>Výdavky za zdravotníctvo</b>	
<b>N</b>	lieky na recept, Iné zdravotnícke tovary	znižena sadzba DPH (10%)
	<b>Výdavky za dopravu</b>	
<b>O</b>	Pohonné hmoty a mazadlá	spotrebná daň
	<b>Výdavky za poštu a telekomunikácie</b>	
<b>P</b>	Poštové služby	nezdaňuje sa
	<b>Výdavky za rekreáciu a kultúru</b>	
<b>R</b>	Televízne a rozhlasové koncesie	
	<b>Ostatné hrubé peňažné výdavky</b>	
<b>S</b>	Dane, Platby zdrav. a Soc. poisťovní, Peňažné dary, Ostatné platby, Splatené pôžičky a úvery	nezdaňuje sa

Pri výpočte dane sme zaviedli isté zovšeobecnenia. Konkrétne sme uvažovali, že tvrdý alkohol je 40 percentný. Taktiež sme všetky vína pre výpočet dane brali ako šumivé a o pive sme predpokladali, že obsahuje 10% mladiny. Posledným zovšeobením bol predpoklad priemernej ceny pohonných hmôt za rok 2007, uvažovali sme hodnotu 39 Sk. Konkrétny postup výpočtu odhadu dane je uvedený v *Tabuľke č.5*.

Pri výpočte odvodov by sme mali brať do úvahy minimálny a maximálny vymeriavací základ, v prípade, že naše príjmy presiahnu alebo budú nižšie ako tieto hodnoty. Keďže medzi ekonomicky aktívnymi sú zamestnanci, ale aj SZČO, príjmy, ktoré pre túto skupinu uvažujeme sú z oboch týchto činností. Teda aj odvody budeme počítat' oddelene pre tieto dva druhy príjmov. V takomto prípade však bude príjem zo samostatne zárobkovej činnosti nižší ako minimálny vymeriavací základ. Napriek tomu pri výpočte odvodov budeme uvažovať vymeriavací základ vo výške príjmu, keďže jeho zárobok zahrnutý v našich výpočtoch nie je plnohodnotný.

Tabuľka č.5: Postup výpočtu odhadu dane

<b>T</b>	odvody zamestnanca	$A \times (0.014 + 0.04 + 0.03 + 0.01 + 0.04)$
<b>U</b>	odvody SZČO	$B \times (0.044 + 0.18 + 0.06 + 0.0475 + 0.14)$
<b>V</b>	daň z príjmu	$(A + B + D - T - U - 19.2 \times 4,980) \times 0.19$

<b>X</b>	základ DPH – doprava	F - O
<b>Y</b>	základ DPH - pošta a telekom.	G - P
<b>Z</b>	základ DPH - rekreácia a kultúra	H - R
<b>AA</b>	základ DPH - ostatné výdavky	I - S
<b>AB</b>	základ DPH – iné	E
<b>AC</b>	DPH zákl. sadzba	$(X + Y + Z + AA + AB) \times 0.19$
<b>AD</b>	DPH zníž. sadzba	$N \times 0.19$
<b>AE</b>	Spotr. daň z liehu	$J \times (0.4 \times 28,300)/100$
<b>AF</b>	Spotr. daň z vína	$K \times 2,400/100$
<b>AG</b>	Spotr. daň z piva	$L \times (10 \times 50)/100$
<b>AH</b>	Spotr. daň z cigariet	$M \times 1.1$
<b>AI</b>	Spotr. daň z minerálnych	$O \times 16,750/(39 \times 1,000)$
	dane a poplatky spolu	$T + U + V + AC + AD + AE + AF + AG + AH + AI + R$

Podľa tohto postupu sme teda vypočítali odhad odvedených daní priemerných ekonomicky aktívnych, závislých detí, dôchodcov a ostatných, ktorý je uvedený v *Tabuľke č.6*. Taktiež sme odhadli dane a poplatky, ktoré zaplatia dané skupiny v krajských mestách, iných mestách a iných obciach. Odhad odvedených daní pre osoby žijúce v krajských mestách sú uvedené v *Tabuľke č. 7*. Ostatné výsledky sú k dispozícii v mojej bakalárskej práci.

Tabuľka č.6: Odhad odvedenej dane sledovaných skupín

	ekon. aktívny	závislé dieťa	dôchodca	ostatný
odvody zamestnanca	20,787.4	0.0	0.0	0.0
odvody SZČO	11,448.0	0.0	0.0	0.0
daň z príjmu	10,234.8	0.0	0.0	0.0
základ DPH - doprava	4,452.3	8,325.8	5,070.2	5,646.4
základ DPH - pošta a telekom.	6,340.5	3,938.1	4,236.6	6,958.0
základ DPH – rekreácia kult.	6,775.8	6,880.9	4,901.1	4,974.6
základ DPH - ostatné výdavky	1,751.2	358.6	1,327.5	24,831.6
základ DPH - iné	77,162.0	52,646.6	94,126.1	78,431.0
DPH zákl. sadzba	18,331.5	13,708.5	20,835.7	22,959.9
DPH zníž. sadzba	102.9	35.5	364.9	103.2
Spotr. daň z liehu	273.0	154.6	379.2	370.1

## 10 Analýza výsledkov

V nasledujúcej kapitole by sme sa chceli venovať analýze našich výsledkov a ich porovnaniu s reálnymi dátami. Údaje, ktoré sme zistili, sú vypočítané z agregovaných rodinných účtov. Štatistický úrad SR nám však poskytol aj disagregované dáta, teda príjmy a výdaje každej sledovanej domácnosti. Spravili sme porovnanie disagregovaných dát s našimi odhadmi pre vybrané položky príjmov a výdajov domácností v krajských mestách. Sledovaných domácností v krajských mestách je k dispozícii 1080. Pre každú domácnosť osobitne vypočítame nami odhadované údaje v závislosti od počtu a typu jej členov. Pre jednoduchosť môžeme postup analýzy uviesť na príklade výdavkov domácnosti za potraviny. Z výsledkov v *Tabuľke č. 13* vypočítame náš odhad výšky týchto výdavkov pre každú sledovanú rodinu. Teda pre  $i = 1, 2, \dots, 1080$  zistíme, že

$$\bar{d}_i = x_{i1}a_1 + x_{i2}a_2 + x_{i3}a_3 + x_{i4}a_4,$$

kde  $a_j$  označuje náš odhad výdavkov na potraviny skupiny jednotlivcov typu  $j$  (ekonomicky aktívni, závislé deti, dôchodcovia a iní) a  $x_{ij}$  označuje ich početnosť v  $i$ -tej domácnosti. Tieto údaje potom porovnáme s reálnymi hodnotami výdajov daných domácností, ktoré si označíme  $d_i$ . Pre každé  $i = 1, 2, \dots, 1080$  zistíme relatívnu chybu nášho odhadu a taktiež relatívnu chybu odhadu priemerom, ktorý je uvedený v agregovaných rodinných účtoch. Označíme ho  $\bar{d}$ . Tento odhad je samozrejme pre každú domácnosť rovnaký:

$$\tilde{\varepsilon}_i = \frac{d_i - \bar{d}_i}{d_i} \quad \text{a} \quad \bar{\varepsilon}_i = \frac{d_i - \bar{d}}{d_i}.$$

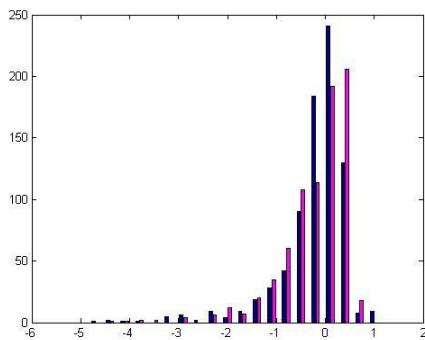
Relatívne chyby následne vykreslíme do histogramu. Okrem relatívnych chýb sme zisťovali aj disperziu absolútnych chýb oboch odhadov. Na nasledujúcich obrázkoch sú vykreslené histogramy relatívnych chýb, čierna farba znázorňuje chyby nášho odhadu, sivá relatívne chyby priemeru. Vybrali sme niekoľko položiek z príjmov a výdajov, ktoré najviac ovplyvňujú výslednú hodnotu odvádzaných daní.

	ekon. aktívny	závislé dieťa	dôchodca	ostatný
Spotr. daň z vína	131.9	89.8	225.3	19.2
Spotr. daň z piva	137.5	19.3	138.2	101.8
Spotr. daň z cigariet	861.0	114.0	520.5	537.8
Spotr. daň z min. olejov	2,271.4	1,140.4	847.7	1,398.7
Televízne a rozhlasové koncesie	815.2	795.9	1,402.9	1,423.6
dane a poplatky spolu	65,394.7	16,057.9	24,714.4	26,914.1

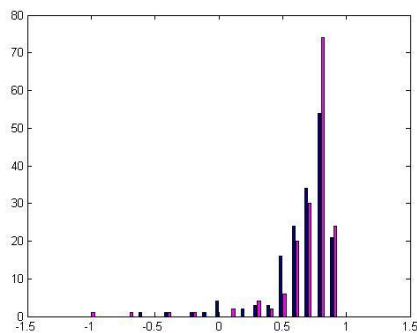
Tabuľka č.7: Odhad odvedenej dane sledovaných skupín v krajských mestách

	ekon. aktívny	závislé dieťa	dôchodca	ostatný
odvody zamestnanca	24,942.8	0.0	0.0	0.0
odvody SZČO	12,991.7	0.0	0.0	0.0
daň z príjmu	15,521.8	0.0	0.0	0.0
základ DPH - doprava	6,312.1	10,918.4	8,907.3	9,693.1
základ DPH - pošta a telekom.	7,514.6	5,086.9	5,311.9	8,126.2
základ DPH - rekreácia a kultúra	10,402.4	10,140.5	7,726.6	7,916.2
základ DPH - ostatné výdavky	858.3	2,193.2	3,363.0	30,554.5
základ DPH - iné	89,662.0	60,622.9	112,281.5	96,279.5
DPH zákl. sadzba	21,802.4	16,902.8	26,142.2	28,988.2
DPH zníž. sadzba	104.5	31.2	373.5	106.6
Spotr. daň z liehu	264.2	164.8	345.8	343.0
Spotr. daň z vína	143.4	111.3	249.9	24.5
Spotr. daň z piva	135.3	21.9	134.5	101.4
Spotr. daň z cigariet	969.5	146.4	625.4	634.2
Spotr. daň z piva	135.3	21.9	134.5	101.4
Spotr. daň z cigariet	969.5	146.4	625.4	634.2
Spotr. daň z min. olejov	2,495.7	1,365.6	988.6	1,514.3
Televízne a rozhlasové koncesie	1233.60	1228.50	2246.40	2231.80
dane a poplatky spolu	80,605.0	19,605.0	31,106.3	33,944.0

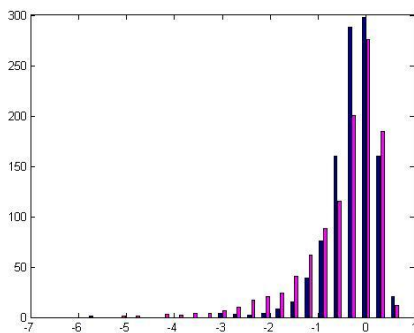
Obrázok č.1: Relatívne chyby – príjmy zo zamestnania



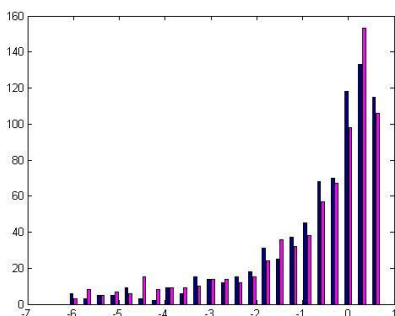
Obrázok č.2: Relatívne chyby – príjmy z vlastného podnikania



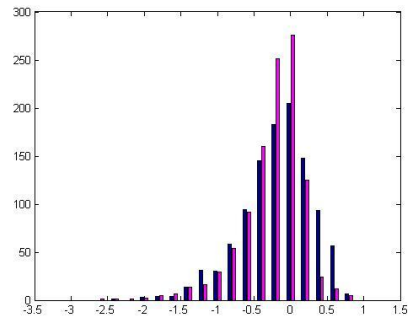
Obrázok č.3: Relatívne chyby – výdavky na potraviny



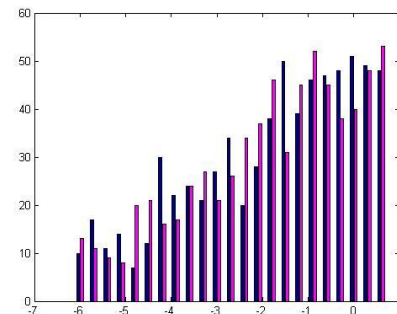
Obrázok č.4: Relatívne chyby – výdavky na odevy



Obrázok č.5: Relatívne chyby – výdavky na bývanie



Obrázok č.6: Relatívne chyby – výdavky na nábytok



V prípade príjmov zo zamestnania, výdavkov na potraviny a na odevy vidíme, že pre relatívne chyby bližšie nule stúpa početnosť našich odhadov s takouto chybovosťou. Aj v porovnaní s relatívnymi chybami priemeru vidíme, že histogram našich odhadov sa v okolí nuly pohybuje v o niečo vyšších hodnotách. Lepší výsledok oproti priemeru podporuje tiež disperzia chýb týchto položiek, ktorá bola vo všetkých troch prípadoch nižšia pre náš odhad. Histogram príjmov z vlastného podnikania nasvedčuje tomu, že oba odhady predpokladali nižšie reálne hodnoty. Tento problém sa vyskytol z toho dôvodu, že väčšina pracujúcich má príjem zo zamestnania a príjem z vlastného podnikania je buď veľmi malý alebo nulový. Druhou menšou skupinou pracujúcich sú tí, ktorých jediným príjmom je príjem z vlastného podnikania. Avšak priemer aj naše odhady, ktoré vychádzajú z priemerných hodnôt pre jednotlivcov, túto situáciu nevedia dobre modelovať. Na histograme však vidieť, že aj napriek vyšším chybám pri väčšine domácností, predsa len vo všeobecnosti chybovosť nášho odhadu vyzerá byť menšia ako chybovosť priemeru. Túto teóriu podporuje aj jeho menšia disperzia. V prípade výdavkov na nábytok sú oba odhady veľmi nepresné, čo je spôsobené tým, že

výdavky na nábytok sú v rozpočte domácností iba výnimočné. Výdavky na bývanie boli zase lepšie odhadnuté priemerom ako našim odhadom, čo môže byť spôsobené tým, že takýto druh výdavkov nie je priamo naviazaný na počet a typ členov domácnosti. Vidíme teda, že naša metóda najlepšie odhaduje položky, ktoré závisia od jednotlivých členov domácnosti a ak je daný príjem alebo výdaj pravidelný.

## Záver

Vytvorili sme teda odhady odvedených daní a poplatkov štátu pre vybrané skupiny. Najmä sme však zostavili metodiku, pomocou ktorej sa vieme dopracovať k približným hodnotám príjmov a výdavkov rôznych skupín.

Riešenie prechodu od domácností k jednotlivcom nám umožňuje využiť dáta z rodinných účtov aj pre samostatné osoby. Podarilo sa nám aj zmenšiť chybovosť tohto prechodu metódami uvedenými v kapitole 5.3 *Eliminácia chyby*, teda konkrétne metódou relaxácie a použitím podobných kategórií a taktiež Tichonovovou regularizáciou. Tieto metódy nie sú náročné na realizáciu, keďže sú všetky založené na metóde najmenších štvorcov, čo je v prípade väčšieho množstva položiek veľmi výhodné.

Zaujímavým bolo použitie metódy RAS, keďže problémy prienikov kritérií sú časté a ich riešenie nie je triviálne. Hoci je metóda závislá od počiatocnej matice, ktorú si zvolíme, v prípade jej chybnéj voľby sa neodkloní od výsledku úplne a predsa len sa snaží k nemu čo najviac priblížiť. Je však pravda, že presný odhad by sme metódou RAS zrejme dosiahli iba v prípade, že by sa nám podarilo určiť počiatocnú maticu s takmer zhodnými pomermi medzi prvkami, aké sú aj v hľadanej výslednej matici. To je však, hlavne v prípade prevodu množstva položiek, málo pravdepodobné. Výhodou tejto metódy je na druhej strane možnosť ovplyvniť výsledné prvky matice práve voľbou tej počiatocnej. Môžeme sa takto dobre dopracovať k logickému odhadu.

Celkovo metodika zisťovania odhadov príjmov a výdajov jednotlivcov z konkrétnych typov domácností veľmi dobre odhaduje reálne dáta najmä v prípade položiek závislých od jednotlivcov, ktorí sú súčasťou domácností. V ostatných prípadoch sú odhady získané touto

metodikou podobne dobré ako je priemer danej položky.

Pri samotnom odhade odvedených daní si môžeme všimnúť, že napríklad v krajskom meste ekonomicky aktívna osoba minie približne 36% svojho ročného hrubého príjmu na zaplatenie daní alebo poplatkov štátu. Toto platí v prípade, že uvažujeme len jej výdavky a príjmy. Ak by sme brali do úvahy aj závislé dieťa, ktoré vlastne živí ekonomicky aktívny, navýšila by sa jeho daň o ďalších 8,7% z celkového ročného hrubého príjmu. Pri vyššie uvedených výsledkoch neuvažujeme miestne dane a clá, ktoré predstavujú ďalšie príspevky štátu od občanov. .

## Referencie

- [1] Schneider, Ondrej, Who Pays Taxes and Who Gets Benefits in the Czech Republic. Prague Economic Papers No. 2005/3. Available at SSRN: 837904
- [2] Tychonov, A. N., V. Y. Arsenin: Solution of Ill-posed Problems, (1977) Washington: Winston & Sons. ISBN 0-470-99124-0
- [3] Heinz W. Engl, Martin Hanke, Andreas Neubauer, Regularization of inverse problems, Kluwer Academic Publishers 2000.
- [4] Uwe Blien, Friedrich Graef: Entropy Optimizing Methods for the Estimation of Tables, in: Balderjahn et al. (1998): "Classification, Data Analysis and Data Highways", Proceedings of the 21st Annual Conference of the Gesellschaft für Klassifikation, Berlin etc.: Springer: 3-15
- [5] Robert A. McDougall: Entropy Theory and RAS are Friends, (1999) GTAP Working Paper No. 06. Available at IDEAS: <http://ideas.repec.org/p/gta/workpp/300.html>
- [6] Lawson, C.L. and R.J. Hanson: Solving Least Squares Problems, (1974) Prentice-Hall, Chapter 23, p. 161.
- [7] Zákon č. 222/2004 Z.z. o dani z pridanej hodnoty
- [8] Ďuraš J.: Maximum Entropy Econometrics. Diplomová práca. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky (2002)

# Numerické modelovanie optimálneho riadenia

Jozef Minár<sup>1\*</sup>  
Školiteľ: Jozef Kačur<sup>†</sup>

Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48  
Bratislava

$$\dot{y}(t) = v_y(t) = v(t) \sin \varphi(t), \quad (3)$$

## Abstrakt

V práci skúmame optimálne riadenie rakety. V prvej kapitole odvodzujeme jednoduchý model rakety s riadením krídelkami a palivom a formulujeme úlohy pre tento model. V druhej a tretej kapitole odvodzujeme iteračnú schému vhodnú na riešenie týchto úloh. Vo štvrtnej kapitole túto schému testujeme.

**Kľúčové slová:** optimálne riadenie, diferenciál, let rakety

## 1 Matematický model letu rakety

Let rakety sa dá odvodiť zo základných fyzikálnych zákonov. Majme zavedený dvojrozmerný súradnicový systém so stredom v bode  $[0,0]$ . Nech tento bod je zároveň aj štartovacím bodom rakety, ktorej polohu v čase  $t$  budú popisovať stavové premenné  $x(t)$ ,  $y(t)$ . Nech ďalej premenné  $v(t)$ ,  $\varphi(t)$  a  $m(t)$  popisujú nominálnu rýchlosť rakety, uhol medzi vektorom rýchlosti rakety  $v(t)$  a osou  $x$  a hmotnosť rakety v čase  $t$ . Začiatocný stav rakety popisujú začiatocné podmienky:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = 0, \\ y(0) &= y_0 = 0, \\ v(0) &= v_0 > 0, \\ \varphi(0) &= \varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ m(0) &= m_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Platia nasledujúce fyzikálne zákony (definícia rýchlosti a druhý Newtonov zákon):

$$\dot{x}(t) = v_x(t) = v(t) \cos \varphi(t), \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(m(t)v(t)) = F(t). \quad (4)$$

Derivovaním vzťahov (2), (3) a využitím goniometrických identít získame:

$$\dot{v}(t) = \dot{x}(t) \cos \varphi(t) + \dot{y}(t) \sin \varphi(t), \quad (5)$$

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{y}(t) \frac{\cos \varphi(t)}{v(t)} - \dot{x}(t) \frac{\sin \varphi(t)}{v(t)}. \quad (6)$$

Budeme uvažovať štyri sily pôsobiace na raketu. Prvou uvažovanou silou je gravitačná sila  $F_g$  pôsobiaca v smere opačnom ku smeru osi  $y$ , ktorá má veľkosť ( $g$  je gravitačné zrýchlenie):

$$F_g(t) = m(t)g. \quad (7)$$

Druhou uvažovanou silou je ťahová sila motora  $T$  pôsobiaca v smere letu rakety. Tretia uvažovaná sila bude odporová sila prostredia  $F_r$ , ktorá pôsobí proti smeru letu rakety a má veľkosť:

$$F_r(t) = \frac{1}{2} c \rho s(t) v(t)^2, \quad (8)$$

kde  $c$  je konštanta vyjadrujúca koeficient ťahu,  $\rho$  je hustota vzduchu a  $s(t)$  je prierez rakety v čase  $t$ . Posledná uvažovaná sila bude nadnášanie, resp. pokles pod vplyvom krídeliek v smere opačnom k smeru osi  $y$ :

$$F_k(t) = \kappa_n s_0 \sin(2\varphi(t)) v(t)^2 \quad (9)$$

Rozložením sily pozdĺž osi  $x$  a osi  $y$ , využitím vzorca (4) a následnou úpravou získame vyjadrenia  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ , dosadením ktorých do (5) a (6) získame konečnú rovnicu pre  $\dot{v}$  a  $\dot{\varphi}$ . Budeme uvažovať lineárnu závislosť medzi ťahovou silou  $T(t)$  a deriváciou hmotnosti  $\dot{m}(t)$ :

$$\dot{m}(t) = -aT(t). \quad (10)$$

\* minar8@gmail.com

† jozef.kacur@fmph.uniba.sk



Úplný systém obyčajných diferenciálnych rovníc preto vyzerá:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{1}{m} \left[ T - \frac{1}{2} c \rho s_0 (1 + \kappa \sin u) v^2 + \right. \\ & \left. a T v + \kappa_n s_0 \sin(2u) v^2 \sin \varphi \right] - g \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{m} \kappa_n s_0 \sin(2u) v \cos \varphi - \frac{g \cos \varphi}{v} \\ \dot{x} &= v \cos \varphi \\ \dot{y} &= v \sin \varphi \\ \dot{m} &= -a T \\ u &\in [0, \pi], T \in [0, T_{max}] \end{aligned} \quad (11)$$

V ďalších kapitolách budeme riešiť úlohy na optimálne riadenie s týmto systémom, kde funkcie  $u$  a  $T$  sú riadenie. Budeme riešiť tieto tri optimalizačné úlohy:

$$\max_{\substack{y(t_f)=0 \\ m(t_f) \geq m_r}} J_1 = x(t_f) \quad (12)$$

$$\min_{\substack{x(t_f)=x_f \\ y(t_f)=y_f \\ m(t_f) \geq m_r}} J_2 = t_f \quad (13)$$

$$\min_{m(t_f) \geq m_r} J_3 = (x(t_f) - x_f)^2 + (y(t_f) - y_f)^2 \quad (14)$$

Prvá z úloh je úloha maximálneho doletu rakety. Druhá úloha je úloha doletu rakety do bodu  $(x_f, y_f)$  v čo najkratšom čase. Tretia úloha je čo najbližší dolet rakety k bodu  $(x_f, y_f)$  v zmysle Euklidovskej vzdialenosti.

## 2 Gradientná metóda

V tejto kapitole odvodíme nástroj, pomocou ktorého prakticky budeme vedieť iteratívne riešiť úlohy, ktoré sme si zadefinovali. Pôjde o metódu, ktorá nie je založená na podmienkach optimality. Metódu odvodíme pre nasledovné všeobecné zadanie úlohy. Budeme postupovať podobne, ako v práci [1], strana 71.

Budeme predpokladať, že máme zadanú diferenciálnu rovnicu s riadením  $u: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  a odozvou  $x: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  v tvare:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), \\ x_i(0) &= x_{i,0}, \quad \text{pre } i \in M_1, \\ x_i(t_f) &= x_{i,f}, \quad \text{pre } i \in M_2, \end{aligned} \quad (15)$$

kde  $M_1, M_2 \in \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\})$ , pričom  $M_1$  definuje množinu indexov odozvy s pevnou začiatočnou hodnotou a  $M_2$  definuje množinu indexov odozvy s pevnou koncovou hodnotou. Budeme ďalej predpokladať, že konečný čas  $t_f$  nie je pevne daný a teda je to voľná premenná.

Budeme tiež predpokladať, že riadenie nie je nijako ohraničené (na rozdiel od našej úlohy). Vidíme, že odozva  $x$  je jednoznačne určená riadením  $u$ , svojimi voľnými začiatočnými hodnotami a konečným časom  $t_f$ . Preto voľné začiatočné hodnoty funkcie  $x$  spolu s riadením  $u$  a hodnotou  $t_f$  budeme nazývať širším riadením systému (15). Ak odozva  $x$  určená širším riadením bude spĺňať aj podmienky na hodnoty v bode  $t_f$ , nazveme toto širšie riadenie prípustným. Našou úlohou bude minimalizovať účelovú funkciu v tvare:

$$J = \phi[x(t_f), t_f] + \int_0^{t_f} L(x, u, t) dt. \quad (16)$$

Nakoľko máme hodnoty  $x_i(t_f)$  fixne dané pre  $i \in M_2$ , budeme predpokladať, že funkcia  $\phi$  nezávisí od týchto parametrov. Princíp riešenia tejto úlohy bude spočívať v tom, že skonštruujeme algoritmus, ktorý z prípustného širšieho riadenia, ktoré nie je lokálne optimálne vygeneruje iné prípustné širšie riadenie, v ktorom bude účelová funkcia mať menšiu hodnotu. Prepíšme si najskôr funkciu  $J$  do tvaru:

$$J = \phi[x(t_f), t_f] + \int_0^{t_f} [L(x, u, t) + \lambda^T(t) f(x(t), u(t), t) - \lambda^T(t) \dot{x}(t)] dt. \quad (17)$$

Zjavne sme funkciu  $J$  nezmenili pre ľubovoľnú funkciu  $\lambda: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , keďže  $x$  spĺňa (4). Zvoľme funkciu  $\lambda$  takto:

$$\dot{\lambda}^{(j)} = - \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right)^T - \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \lambda^{(j)}, \quad (18)$$

$$\lambda_j^{(j)}(t_f) = \begin{cases} 0, & \text{ak } j \in M_2, \\ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)_{t=t_f}, & \text{ak } j \notin M_2. \end{cases} \quad (19)$$

Vyjadríme diferenciál  $J$  pri zmene  $x, u$ , a  $t_f$ :

$$\begin{aligned} dJ &= \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} dt_f + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \right)_{t=t_f} + (L)_{t=t_f} dt_f \\ &+ \int_0^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial x} + (\dot{\lambda}^{(j)})^T \frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta x + \right. \\ & \left. \left( \frac{\partial L}{\partial u} + (\dot{\lambda}^{(j)})^T \frac{\partial f}{\partial u} \right) \delta u - (\dot{\lambda}^{(j)})^T \delta \dot{x} \right] dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Integráciou  $\lambda^T \delta \dot{x}$  pomocou per partes, linearizáciou člena  $\delta x(t_f)$  a využitím vzťahov (18) a (19) dostaneme relatívne jednoduchý tvar diferenciálu funkcie  $J$  vzhľadom na  $dt_f, \delta x(0)$  a  $\delta u$ .

$$\begin{aligned} dJ &= \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + L + f^T \lambda^{(j)} \right)_{t=t_f} dt_f + \\ & [\lambda^{(j)}(0)]^T \delta x(0) + \int_0^{t_f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial u} + [\lambda^{(j)}]^T \frac{\partial f}{\partial u} \right\} \delta u dt. \end{aligned} \quad (21)$$

Pozrime sa teraz na zmenu v konečných hodnotách  $x_i(t_f)$ , pre  $i \in M_2$ . Zistíme ju tak, že doterajší postup opakujeme pre účelovú funkciu v tvare:

$$\begin{aligned} J^{(i)} &= x_i(t_f), \\ \phi[x(t_f), t_f] &= x_i(t_f), \\ L(x, u, t) &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Po dosadení takto zvolenej účelovej funkcie do (6) a (19) dostávame:

$$\dot{\lambda}^{(i)} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \lambda^{(i)}, \quad (23)$$

$$\lambda_j^{(i)}(t_f) = \begin{cases} 0, & \text{ak } j \neq i, \\ 1, & \text{ak } j = i. \end{cases} \quad (24)$$

Následne dosadením (23) a (24) do (21) :

$$\begin{aligned} dx_i(t_f) &= [f_i]_{t=t_f} dt_f \\ &+ [\lambda^{(i)}(0)]^T \delta x(0) \\ &+ \int_0^{t_f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial u} + [\lambda^{(i)}]^T \frac{\partial f}{\partial u} \right\} \delta u dt. \end{aligned} \quad (25)$$

Tieto využijeme na to, aby sme zabezpečili, že bude platiť  $dx_i(t_f) = 0$ , a teda nové širšie riadenie v prípade dostatočne malej zmeny bude takmer prípustné. Vynásobíme pre každé  $i \in M_2$  rovnosť (25) zatiaľ neurčenou premennou  $v_i$  a pričítame to všetko k rovnosti (21) :

$$\begin{aligned} dJ + \sum_{i \in M_2} v_i dx_i(t_f) &= \\ &\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + L + f^T \lambda^{(j)} + \sum_{i \in M_2} v_i f_i \right)_{t=t_f} dt_f + \\ &\left\{ [\lambda^{(j)}(0)]^T + \sum_{i \in M_2} v_i [\lambda^{(i)}(0)]^T \right\} \delta x(0) + \\ &\int_0^{t_f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial u} + [\lambda^{(j)} + \sum_{i \in M_2} v_i \lambda^{(i)}]^T \frac{\partial f}{\partial u} \right\} \delta u dt. \end{aligned} \quad (26)$$

Teraz môžeme zvoliť tvar zmeny širšieho riadenia nasledovne:

$$dt_f = -k_1 \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + L + f^T \lambda^{(j)} + \sum_{i \in M_2} v_i f_i \right\}_{t=t_f}, \quad (27)$$

$$\delta u = -k_2 \times \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial u} \right)^T + \frac{\partial f^T}{\partial u} (\lambda^{(j)} + \sum_{i \in M_2} v_i \lambda^{(i)}) \right], \quad (28)$$

$$\delta x(0) = -k_3 \times \left\{ \lambda^{(j)}(0) + \sum_{i \in M_2} v_i \lambda^{(i)}(0) \right\}, \quad (29)$$

kde  $k_1 \in \mathbb{R}$ ,  $k_2 \in \mathbb{R}^m$ ,  $k_3 \in \mathbb{R}^n$  sú vo všetkých zložkách nezáporné, binárna operácia  $\times: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  znamená násobenie vektorov po zložkách a

$$(k_3)_i = 0 \text{ pre } i \in M_1. \quad (30)$$

Dosadením (27), (28) a (29) do (26) získame vzťah:

$$\begin{aligned} dJ + \sum_{i \in M_2} v_i dx_i(t_f) &= \\ &-k_1 \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + L + f^T \lambda^{(j)} + \sum_{i \in M_2} v_i f_i \right\}_{t=t_f}^2 \\ &- \int_0^{t_f} \sum_{\theta=1}^m \left\{ (k_2)_\theta \left[ \frac{\partial L}{\partial u} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\partial f^T}{\partial u} \left( \lambda^{(j)} + \sum_{i \in M_2} v_i \lambda^{(i)} \right) \right] \right\}^2 dt \\ &- \sum_{\theta \in M_1} (k_3)_\theta \left\{ [\lambda^{(j)}(0)]^T \right. \\ &+ \left. \sum_{i \in M_2} v_i [\lambda^{(i)}(0)]^T \right\}^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Aby vyššie uvedený vzťah vyjadroval zmenu vo funkcii  $J$  a aby sme zabezpečili, že porušenie prípustnosti nového širšieho riadenia bude až druhého rádu potrebujeme, aby vo vzťahu (25) vyšla na pravej strane 0. To zabezpečíme dosadením vzťahov (27), (28) a (29) do vzťahu (25) :

$$\begin{aligned} dx_i(t_f) &= -k_1 \left\{ f_i \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + L + f^T \lambda^{(j)} + \right. \right. \\ &\left. \left. \sum_{j \in M_2} v_j f_j \right] \right\}_{t=t_f} \\ &- \int_0^{t_f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial u} + [\lambda^{(i)}]^T \frac{\partial f}{\partial u} \right\} \left\{ k_2 \times \right. \\ &\left. \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial u} \right)^T + \frac{\partial f^T}{\partial u} (\lambda^{(j)} + \sum_{j \in M_2} v_j \lambda^{(j)}) \right] \right\} dt \\ &- [\lambda^{(i)}(0)]^T \left\{ k_3 \times [\lambda^{(j)}(0) + \sum_{j \in M_2} v_j \lambda^{(j)}(0)] \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

Položením 0 na ľavú stranu získame lineárny systém  $|M_2|$  rovníc o  $|M_2|$  premenných  $v_i$ , ktorého riešenie zapíšeme ako:

$$\begin{aligned} v &= -[k_1 S + \sum_{\theta=1}^m (k_2)_\theta Q^{(\theta)} + \sum_{\theta \in M_1} (k_3)_\theta R^{(\theta)}]^{-1} \\ &\left( k_1 r + \sum_{\theta=1}^m (k_2)_\theta g^{(\theta)} + \sum_{\theta \in M_1} (k_3)_\theta d^{(\theta)} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

kde:

$$S_{ij} = (f_i f_j)_{t=t_f}, \quad (34)$$

$$Q_{ij}^{(\theta)} = \int_0^{t_f} [\lambda^{(i)}]^T \frac{\partial f}{\partial u_\theta} \frac{\partial f}{\partial u_\theta} \lambda^{(j)} dt, \quad (35)$$

$$R_{ij}^{(\theta)} = \lambda_\theta^{(i)}(0) \lambda_\theta^{(j)}(0), \quad (36)$$

$$r_i = \left\{ f_i \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + L + f^T \lambda^{(j)} \right] \right\}_{t=t_f}, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} g_i^{(\theta)} &= \int_0^{t_f} [\lambda^{(i)}]^T \frac{\partial f}{\partial u_\theta} \\ &\left[ \left( \frac{\partial L}{\partial u_\theta} \right)^T + \frac{\partial f^T}{\partial u_\theta} \lambda^{(j)} \right] dt, \end{aligned} \quad (38)$$

$$d_i^{(\theta)} = \lambda_\theta^{(i)}(0)\lambda_\theta^{(j)}(0). \quad (39)$$

Budeme genericky predpokladať, že inverzná matica vo vzťahu (33) existuje. Našli sme teda hodnotu  $v$ , vďaka ktorej získame vo vzťahu (31) na ľavej strane  $dJ$ . A teda pre dostatočne malé  $k_1, k_2, k_3$  získame nové, takmer prípustné širšie riadenie, ktoré bude v prípade, že aspoň jeden koeficient  $(k_i)_\theta$  pri nenulovej druhej mocnине je nenulový, lepšie ako pôvodné širšie riadenie v zmysle hodnoty účelovej funkcie  $J$ .

Prvým podstatným problémom tejto metódy je, že vyžaduje nemať obmedzenia na riadenie  $u$ , čo pri našom probléme máme. Naše riadenie sa skladá z dvoch zložiek  $u, T$ , ktoré sú ohraničené. Tento problém obídeme pomocou substitúcie pre riadenie:

$$u(t) = \frac{\pi}{2}(1 + \sin \tilde{u}(t)) \quad (40)$$

$$T(t) = \frac{T_{max}}{2}(1 + \sin \tilde{T}(t)) \quad (41)$$

Riadenie  $\tilde{u}, \tilde{T}$  sú už voľné funkcie, a teda sa dá použiť algoritmus. Problémom je to, že vzťah (28) sa dá po použití substitúcie (40) prepísať ako:

$$\delta u = -k_2 \times \frac{du}{d\tilde{u}} \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial u} \right)^T + \frac{\partial f^T}{\partial u} (\lambda^{(j)} + \sum_{i \in M_2} v_i \lambda^{(i)}) \right], \quad (42)$$

z čoho vyplýva:

$$\frac{du}{d\tilde{u}} = 0 \Leftrightarrow \tilde{u} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow u \in \{0, \pi\} \quad (43)$$

Obdobný vzťah platí pre  $T$ , a teda ak riadenie je v nejakom bode na hranici, ostane tam aj v každej ďalšej iterácii.

Prvým dôsledkom pri numerickom riešení úlohy je nutnosť voliť štartovnú iteráciu v každom bode z vnútra množiny, do ktorej riadenie patrí. Ďalej sa ukazuje, že vzhľadom na približné riešenie úlohy na počítači sa iterácia riadenia v nejakom bode nedostane z ničoho nič na hranicu. Totiž aj v prípadoch, keď optimum leží na hranici, tak iterácie riadenia k nemu presne skonvergujú až po mnohých iteráciách. Reálne sa ale môže stať to, že sa iterácia riadenia v nejakom bode, v ktorom nemá optimum na hranici, dostane do blízkosti hranice a bude trvať mnoho iterácií, kým sa odtiaľ dostane preč.

Druhý závažný problém je, že položením 0 na ľavú stranu (32) sme zabezpečili prípustnosť širšieho riadenia (s toleranciou nejakej odchýlky) iba lokálne, teda pre dostatočne malé koeficienty  $k$ . Preto v prípade použitia tohto algoritmu

budeme musieť neustále overovať mieru splnenia koncových podmienok.

Alternatívny spôsob splnenia koncových podmienok v novej iterácii širšieho riadenia je, že zavedieme funkciu

$$F(v) = \begin{pmatrix} x_{i_1}(t_f) \\ \vdots \\ x_{i_{|M_2|}}(t_f) \end{pmatrix}, \quad (44)$$

kde

$$\{i_1, \dots, i_{|M_2|}\} = M_2.$$

$F$  je funkcia  $\mathbb{R}^{|M_2|} \rightarrow \mathbb{R}^{|M_2|}$ , pre ktorú platí, že ak boli zvolené dostatočne malé koeficienty  $k$ , tak pre  $v^*$  vypočítané pomocou (33) má zložky vektora blízke 0. Môžeme preto pre pevné koeficienty  $k$  numericky hľadať nulový bod  $F$  so štartovacou iteráciou  $v^*$ . Použitím takéhoto  $v$  neporušíme koncové podmienky na odozvu.

Nevýhodou tohto alternatívneho postupu je v prvom rade to, že výrazne predlžuje čas potrebný na výpočet jednej iterácie. Pri počítačovej realizácii tohto algoritmu totiž výrazne najviac času zaberá numerický výpočet diferenciálnej rovnice, ktorý sa pri hľadaní nulového bodu  $F$  musí zopakovať veľa krát pre každú voľbu koeficientov  $k$ . Ďalšia nevýhoda je, že vo vzťahu (26) na ľavej strane nezmiznú členy s  $dx_i(t_f)$  a teda nemáme zabezpečenú zápornosť diferenciálu pre zvolený smer zmeny  $x(0), u$  a  $t_f$ . Na druhej strane, keďže sme zabezpečili pre novú iteráciu  $x_i(t_f) = 0$  a to isté platí pre pôvodnú iteráciu, môžeme očakávať, že  $dx_i(t_f)$  bude malé.

Obidva tieto spôsoby budeme testovať v praktických príkladoch na rakete.

### 3 Numerické riešenie našich úloh

Keďže analytické riešenie úloh (12), (13) a (14) nevieme presne vypočítať, riešime ich numericky. Nakoľko pri týchto úlohách je dosť problematická podmienka nerovnosti na  $m(t_f)$ , pri praktickom riešení ich riešime buď s podmienkou rovnosti, alebo bez podmienky na hmotnosť.

Úlohu riešime v dvoch fázach. V prvej fáze minimalizujeme pomocný funkcionál, ktorý zabezpečí prípustnosť širšieho riadenia. Ten vyzerá pre naše úlohy v prípade rovnosti na konečnú hmotnosť takto:

$$\min \vartheta_1 = \left( \frac{m(t_f) - m_r}{m_r} \right)^2 + \left( \frac{y(t_f)}{x(t_f)} \right)^2. \quad (45)$$

$$\min \vartheta_2 = \left( \frac{x(t_f) - x_f}{x_f} \right)^2 + \left( \frac{y(t_f) - y_f}{y_f} \right)^2 + \left( \frac{m(t_f) - m_r}{m_r} \right)^2, \quad (46)$$

$$\min \vartheta_3 = \left( \frac{m(t_f) - m_r}{m_r} \right)^2. \quad (47)$$

A v prípade voľnosti konečnej hmotnosti takto:

$$\min \bar{\vartheta}_1 = \left( \frac{y(t_f)}{x(t_f)} \right)^2, \quad (48)$$

$$\min \bar{\vartheta}_2 = \left( \frac{x(t_f) - x_f}{x_f} \right)^2 + \left( \frac{y(t_f) - y_f}{y_f} \right)^2, \quad (49)$$

$$\min \bar{\vartheta}_3 = 0. \quad (50)$$

Funkcionál minimalizujeme opakovaným aplikovaním postupu uvedeného v predchádzajúcej kapitole. Koeficienty  $k$  hľadáme pomocou numerických algoritmov na nájdenie minima funkcie. Poznamenajme ešte, že v prvej fáze máme  $M_2 = \emptyset$ , teda systém (33) vôbec neriešime a neexistuje tu preto rozdiel medzi dvoma alternatívami výpočtu  $v$ . Keď s prvou fázou dosiahneme dostatočne malú hodnotu účelovej funkcie (teda dostatočnú presnosť, nech požadovaná úroveň presnosti je  $\epsilon$ ) tak spustíme druhú fázu.

V prípade aplikácie druhej varianty voľby  $v$  spĺňajúceho (44) nám stačí opakovane aplikovať náš algoritmus pre optimálne parametre  $k$  a tak sa k prvej fáze už nemusíme vracaf.

V prípade aplikácie prvej varianty voľby  $v$  podľa (33) postupujeme nasledovne. Koeficienty  $k$  volíme opäť optimálne, ale len z tých, ktoré nezvýšia hodnotu funkcionálu z prvej fázy nad vopred danú hodnotu (napríklad  $2\epsilon$ ). Zároveň po každej iterácii skontrolujeme, či sa hodnota funkcionálu z prvej fázy nezväčšila nad požadovanú úroveň ( $\epsilon$ ). Ak zistíme, že sa zvýšila, tak sa vrátíme k prvej fáze, ktorú modifikujeme nasledujúcou požiadavkou (aby sa dosiahnutá hodnota účelovej funkcie nezmenila aspoň v zmysle diferenciálu):

$$dJ = 0 \quad (51)$$

Všetky úvahy z 2. kapitoly sa dajú zopakovať s touto podmienkou namiesto podmienok  $dx_i = 0$  a výsledné vzorce sú (účelová funkcia je funkcia  $\vartheta$  z prvej fázy):

$$dt_f = -k_1 \left\{ \frac{\partial \phi_\vartheta}{\partial t} + L_\vartheta + f^T \lambda^{(\vartheta)} + v \left( \frac{\partial \phi_J}{\partial t} + L_J + f^T \lambda^{(J)} \right) \right\}_{t=t_f}, \quad (52)$$

$$\delta u = -k_2 \times \left[ \left( \frac{\partial L_\vartheta}{\partial u} \right)^T + v \left( \frac{\partial L_J}{\partial u} \right)^T + \frac{\partial f^T}{\partial u} (\lambda^{(\vartheta)} + v \lambda^{(J)}) \right], \quad (53)$$

$$\delta x(0) = -k_3 \times \{ \lambda^{(\vartheta)}(0) + v \lambda^{(J)}(0) \}, \quad (54)$$

$$v = - \left[ k_1 S + \sum_{\theta=1}^m (k_2)_\theta Q^{(\theta)} + \sum_{\theta \in M_1} (k_3)_\theta R^{(\theta)} \right]^{-1} (k_1 r + \sum_{\theta=1}^m (k_2)_\theta g^{(\theta)} + \sum_{\theta \in M_1} (k_3)_\theta d^{(\theta)}), \quad (55)$$

kde:

$$S = \left( \frac{\partial \phi_J}{\partial t} + L_J + f^T \lambda^{(J)} \right)_{t=t_f}^2, \quad (56)$$

$$Q^{(\theta)} = \int_0^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial L_J}{\partial u_\theta} \right) + [\lambda^{(J)}]^T \frac{\partial f}{\partial u_\theta} \right]^2 dt, \quad (57)$$

$$R^{(\theta)} = [\lambda_\theta^{(J)}(0)]^2, \quad (58)$$

$$r = \left\{ \left[ \frac{\partial \phi_J}{\partial t} + L_J + f^T \lambda^{(J)} \right] \left[ \frac{\partial \phi_\vartheta}{\partial t} + L_\vartheta + f^T \lambda^{(\vartheta)} \right] \right\}_{t=t_f}, \quad (59)$$

$$g^{(\theta)} = \int_0^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial L_J}{\partial u_\theta} \right) + [\lambda^{(J)}]^T \frac{\partial f}{\partial u_\theta} \right] \cdot \left[ \left( \frac{\partial L_\vartheta}{\partial u_\theta} \right) + \frac{\partial f^T}{\partial u_\theta} \lambda^{(\vartheta)} \right] dt, \quad (60)$$

$$d^{(\theta)} = \lambda_\theta^{(J)}(0) \lambda_\theta^{(\vartheta)}(0). \quad (61)$$

Poznamenáme, že v prípade riešenia problému minimalizácie času (ako v účelovej funkcii (13) pre problém čo najkratšieho doletu do bodu), podmienka (51) je ekvivalentná s podmienkou  $dt_f = 0$ , a teda pri optimalizácii účelovej funkcie  $\vartheta$  účelovú funkciu  $J$  nemeníme.

Samotný algoritmus, ktorý sme vykonávali v MATLABe sa skladá z nasledujúcich krokov:

1. Urob gradientný krok pre pomocnú úlohu (napr.(45), (46) alebo(47)).
2. Ak účelová hodnota funkcie pomocnej úlohy je väčšia ako  $\epsilon_1$ , choď na 1.
3. Ak uplynul vopred stanovený čas, skonči.
4. Urob gradientný krok pre hlavnú úlohu (napr.(12), (13), (14)).
5. Ak hodnota účelovej funkcie pomocnej úlohy je menšia ako  $\epsilon_2$ , choď na 3.
6. Urob gradientný krok pre modifikovanú pomocnú úlohu.
7. Ak hodnota účelovej funkcie pomocnej úlohy je menšia ako  $\epsilon_2$ , choď na 3.
8. Choď na 6.

Gradientný krok znamená vykonanie tohto algoritmu:

1. Vypočítaj numericky pomocou MATLABovskej funkcie ode45  $\lambda^{(0)}, \lambda^{(i)}$  podľa (18), (19), (23) a (24).
2. Vypočítaj matice a vektory podľa (34) až (39).
3. Zvoľ „optimálne“  $k$  pomocou MATLABovskej funkcie fminsearch, aplikovanej na hodnotu účelovej funkcie získanej nasledujúcimi krokmi:
4. Vypočítaj  $v$  podľa vzťahu (33)
5. Ak sme vopred zvolili presné splnenie koncových podmienok, vypočítaj  $v$  pomocou funkcie fsolve, aplikovanej na:

$$\sum_{i \in M_2} (x_i(t_f) - x_{i,f})^2, \quad (62)$$

kde  $x_i(t_f)$  získame nasledujúcimi krokmi:

6. Vypočítame nové  $u$  pomocou (28)
7. Vypočítame nové  $t_f$  pomocou (27) a redefinujeme uzlové body:

$$t = \{nh : nh < t_f, n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{t_f\}. \quad (63)$$

Ak  $dt_f > 0$ , rozšírime  $u$  na nový interval tak, že položíme:

$$u(t) = u(t_f^{\text{staré}}), \quad \text{pre } t > t_f^{\text{staré}}. \quad (64)$$

8. Vypočítame nové  $x(0)$  pomocou (29).
9. MATLABovskou funkciou ode45 vypočítame nové  $x$  a následne hodnotu účelovej funkcie.

## 4 Numerické experimenty

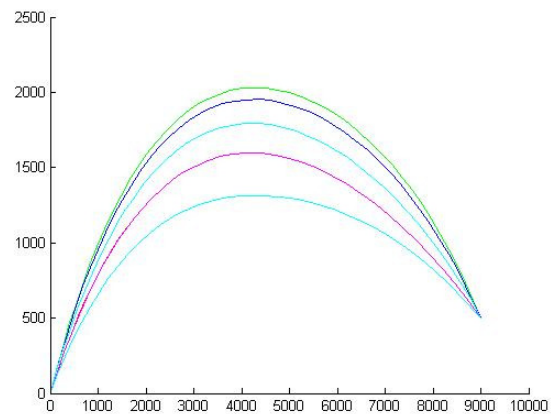
V tejto kapitole uvedieme výsledky numerických experimentov, ktoré sme robili v MATLABe. Pri všetkých tu uvedených pokusoch volíme v systéme (11) konštanty takto:

$$c\rho = 0,001, s_0 = 0,1, \kappa = 2, \quad (65)$$

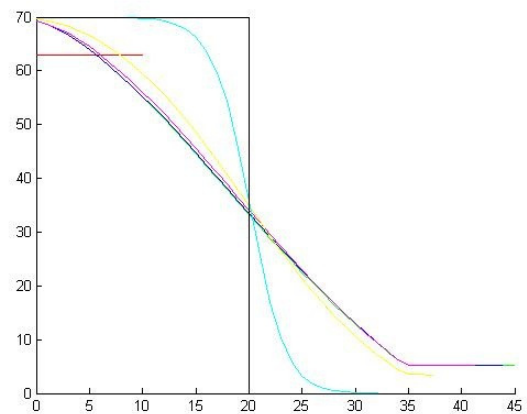
$$\kappa_n = \frac{1}{3000}, a = 0,1.$$

Prvý experiment je riešením úlohy na prelet bodom pre zadané súradnice bodu preletu  $x_p = 9000$  a  $y_p = 500$ , začiatočnú rýchlosť  $v(0) = 200$ , začiatočnú hmotnosť  $m_0 = 200$ , minimálnu hmotnosť (hmotnosť rakety bez paliva)  $m_r = 60$ . Premenná  $\alpha(0)$  patrí tiež do širšieho riadenia. Vzhľadom na dostatočnú vzdialenosť medzi štartom rakety a bodom, kam chceme doletieť, sme hľadali riešenie spĺňajúce  $m(t_f) = m_r = 60$ . Pri použití prvej varianty voľby  $v$  zo vzťahu (33) vyzerala trajektória pre

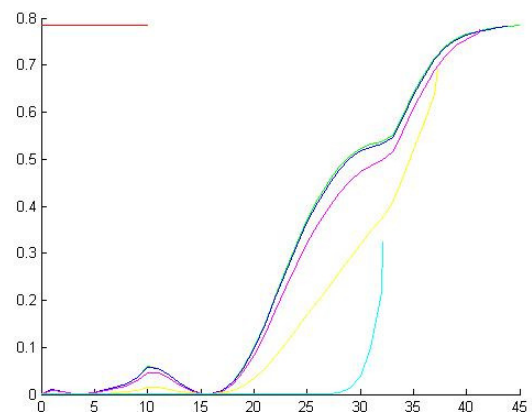
vybrané iterácie nasledovne:



Graf č. 1: 0. iterácia – červená čiara, 1. iterácia - zelená čiara, 4. iterácia – modrá čiara, 11. iterácia - purpurová čiara, 24. iterácia - žltá čiara, 51. iterácia – belasá čiara



Graf č. 2: riadenie  $T$  pre jednotlivé iterácie, farby označujú rovnaké iterácie ako v grafe č. 1. A graf riadiacej funkcie  $U$  vyzeral:



Graf č. 3: riadenie  $U$  pre jednotlivé iterácie, farby označujú rovnaké iterácie ako v grafe č. 1.

Nakoľko sa z experimentov zdalo, že pre takúto úlohu bude optimálne riadenie tvaru:

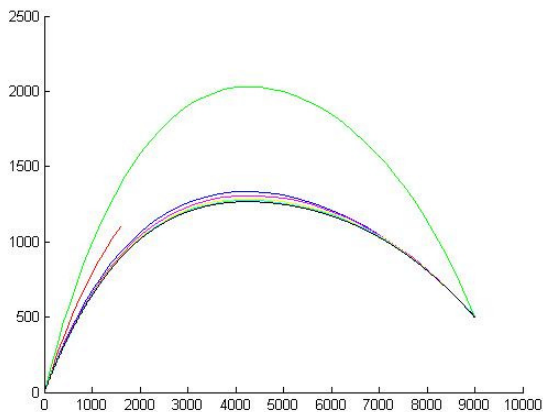
$$u(t) \equiv 0, \\ T(t) = \begin{cases} T_{max}, & \text{ak } t < \frac{m(0)-m_r}{aT_{max}} \\ 0, & \text{ak } t > \frac{m(0)-m_r}{aT_{max}} \end{cases} \quad (66)$$

zahrnuli sme do grafov čiernou farbou aj výsledok takéhoto riadenia s numericky nájdeným optimálnym  $\alpha(0)$ . Experiment sme zastavili po jednej hodine čo bolo po 50. iterácii (1. iterácia je výsledkom prvej fázy, teda pre druhú fázu je to v skutočnosti 0. iterácia). Uvádzame ešte tabuľku s hodnotami účelovej funkcie pre jednotlivé iterácie:

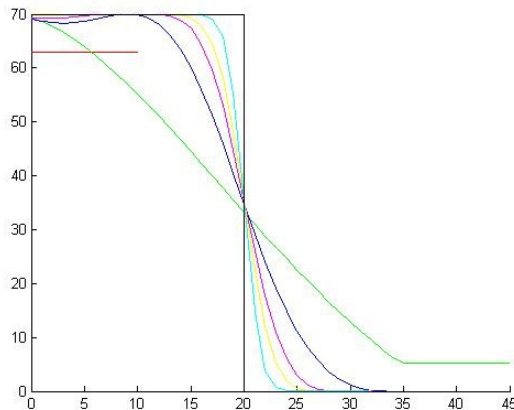
Číslo iterácie	Hodnota $t_f$ (zaokrúhlená na 4 desatinné miesta)
0.	10 – toto ale nie je prípustné riešenie
1.	44,9704
4.	43,8333
11.	41,2648
24.	37,3150
51.	32,1309
Riadenie (66)	31,5747

Tabuľka č. 1: hodnoty účelovej funkcie pre vybrané iterácie

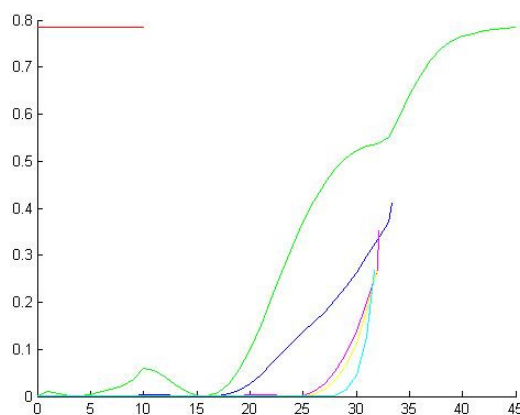
Ten istý experiment sme urobili pre druhú variantu voľby  $v$  (zo vzťahu (44)) a dostali sme pre jednotlivé iterácie takéto trajektórie:



Graf č. 4: 0. iterácia – červená čiara, 1. iterácia – zelená čiara, 2. iterácia – modrá čiara, 3. iterácia – purpurová čiara, 4. iterácia – žltá čiara, 6. iterácia – belásá čiara



Graf č. 5: riadenie  $T$  pre jednotlivé iterácie, farby označujú rovnaké iterácie ako v grafe č. 4



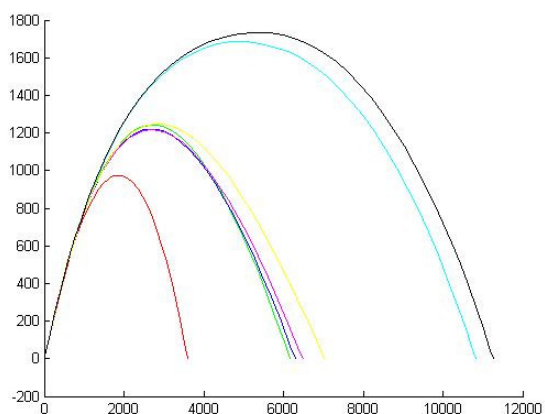
Graf č. 6: riadenie  $U$  pre jednotlivé iterácie, farby označujú rovnaké iterácie ako v grafe č. 4

Opäť čiernou farbou vykresľujeme výsledok pre riadenie (66) s optimálnym  $\alpha(0)$ . Experiment sme zastavili po jednej hodine, teda po 5. iterácii. Tabuľka s hodnotami účelovej funkcie je:

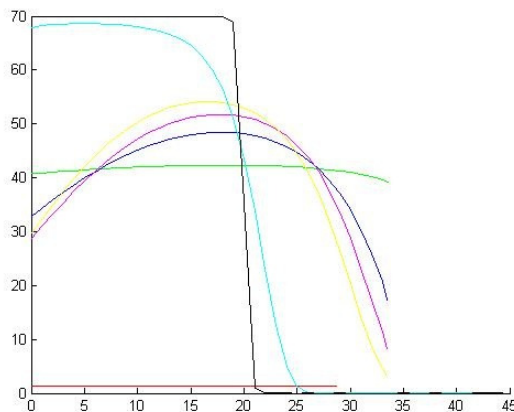
Číslo iterácie	Hodnota $t_f$ (zaokrúhlená na 4 desatinné miesta)
0.	10 – toto ale nie je prípustné riešenie
1.	44,9704
2.	33,3603
3.	32,1696
4.	31,8670
6.	31,6733
Riadenie (66)	31,5747

Tabuľka č. 2: hodnoty účelovej funkcie pre vybrané iterácie

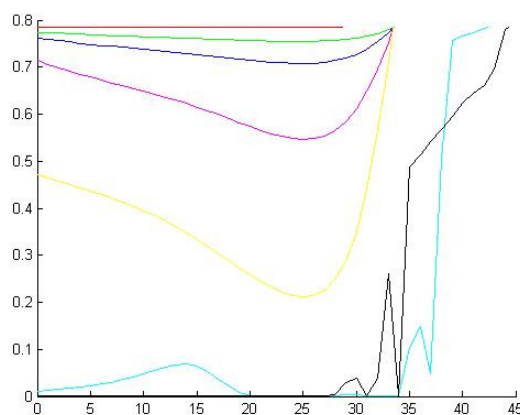
Druhý experiment je riešením úlohy na maximálny dolet rakety pre zadanú začiatočnú rýchlosť  $v(0) = 200$ , začiatočnú hmotnosť  $m_0 = 200$ , minimálnu hmotnosť (hmotnosť rakety bez paliva)  $m_r = 60$  a pevne zadaný začiatočný uhol  $\alpha(0) = \frac{\pi}{4}$ . Vzhľadom na dostatočnú začiatočnú rýchlosť rakety sme hľadali riešenie spĺňajúce  $m(t_f) = m_r = 60$ . Poznamenáme, že pre tieto konkrétne hodnoty sa nám podarilo nájsť riešenie aj cez splnenie Pontrjaginových podmienok optimality. Hodnota účelovej funkcie pre toto riešenie bola 11310. Využili sme tvar Pontrjaginových podmienok uvedených v [2] na strane 29 a podmienky transversality na strane 58. Poznamenáme, že algoritmus, ktorý sme na základe týchto podmienok vytvorili nefungoval univerzálne, na rozdiel od gradientnej metódy, nakoľko potreboval dodať štartovací bod z veľmi malého okolia hľadaného riešenia. Preto tento algoritmus v tejto práci ani bližšie nepopisujeme. Pri použití prvej varianty voľby  $v$  zo vzťahu (33) vyzerala trajektória pre vybrané iterácie nasledovne:



Graf č. 7: 0. iterácia – červená čiara, 1. iterácia - zelená čiara, 3. iterácia – modrá čiara, 8. iterácia - purpurová čiara, 19. iterácia - žltá čiara, 52. iterácia – belásá čiara, 82. iterácia – čierna čiara



Graf č. 8: riadenie  $T$  pre jednotlivé iterácie, farby označujú rovnaké iterácie ako v grafe č. 7



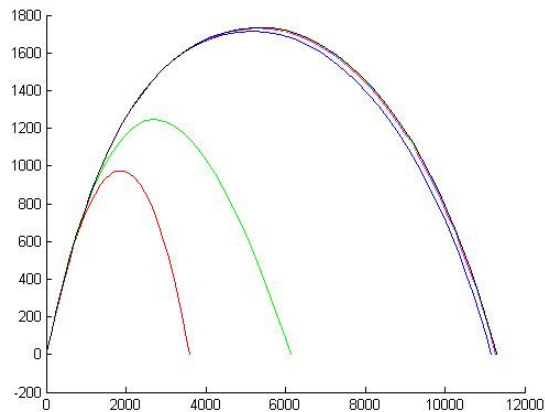
Graf č. 9: riadenie  $U$  pre jednotlivé iterácie, farby označujú rovnaké iterácie ako v grafe č. 7

Na grafe č. 9 vidno, že nastal problém, o ktorom sme písali, že môže nastať pri použití substitúcie (40) Proces by síce po dlhšom čase konvergoval, ale problematická hodnota sa posúva preč z okolia 0 len pomaly. Experiment sme zastavili po jednej hodine čo bolo po 81. iterácii. Uvádžame ešte tabuľku s hodnotami účelovej funkcie pre jednotlivé iterácie:

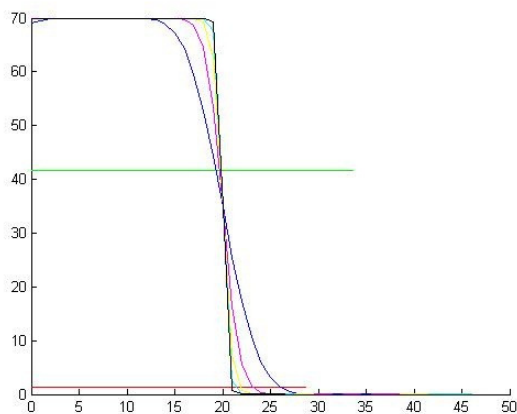
Číslo iterácie	Hodnota $x(t_f)$ (zaokrúhľená na celé čísla)
0.	3599
1.	6168
3.	6296
8.	6485
19.	7027
52.	10834
82.	11260

Tabuľka č. 3: hodnoty účelovej funkcie pre vybrané iterácie

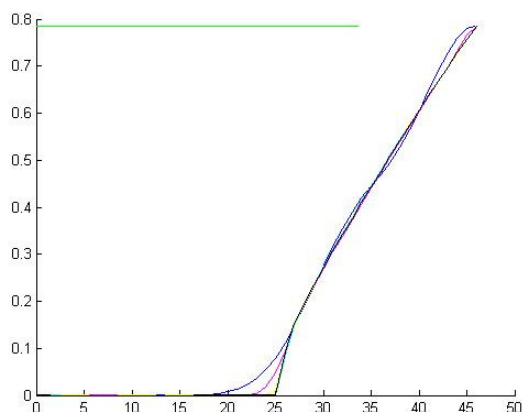
Ten istý experiment sme urobili pre druhú variantu voľby  $v$  (zo vzťahu (44)) a dostali sme pre jednotlivé iterácie takéto trajektórie:



Graf č. 10: 0. iterácia – červená čiara, 2. iterácia - zelená čiara, 5. iterácia – modrá čiara, 9. iterácia - purpurová čiara, 15. iterácia - žltá čiara, 22. iterácia – belasá čiara, 30. iterácia – čierna čiara



Graf č. 11: riadenie  $T$  pre jednotlivé iterácie, farby označujú rovnaké iterácie ako v grafe č. 10



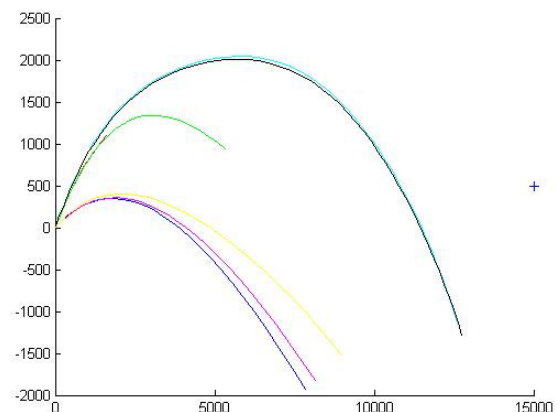
Graf č. 12: riadenie  $U$  pre jednotlivé iterácie, farby označujú rovnaké iterácie ako v grafe č. 10

Experiment sme zastavili po jednej hodine, tj. po 29. iterácii. Tabuľka s hodnotami účelovej funkcie je:

Číslo iterácie	Hodnota $x(t_f)$
0.	3599
2.	6137
5.	11167
9.	11276
15.	11296
22.	11303
30.	11305

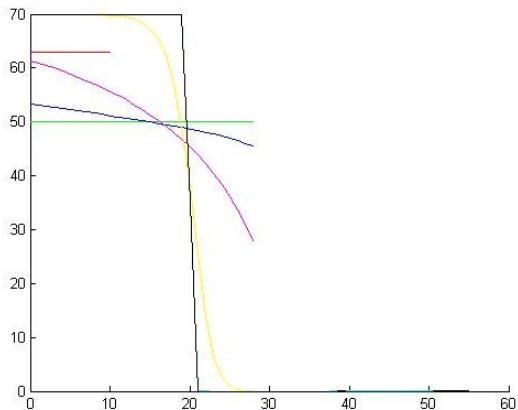
Tabuľka č. 4: hodnoty účelovej funkcie pre vybrané iterácie

Tretí experiment je riešením úlohy na najbližší prelet rakety okolo zadaného bodu so súradnicami  $x_f = 15000, y_f = 500$ . Máme zadanú začiatočnú rýchlosť  $v(0) = 200$ , začiatočnú hmotnosť  $m_0 = 200$ , minimálnu hmotnosť (hmotnosť rakety bez paliva)  $m_r = 60$ . Začiatočný uhol  $\alpha(0)$  patrí do širšieho riadenia. Opäť sa ukazuje vhodné hľadať riešenia spĺňajúce  $m(t_f) = m_r = 60$ . Pri použití prvej varianty voľby  $v$  zo vzťahu (33) vyzerala trajektória pre vybrané iterácie nasledovne:

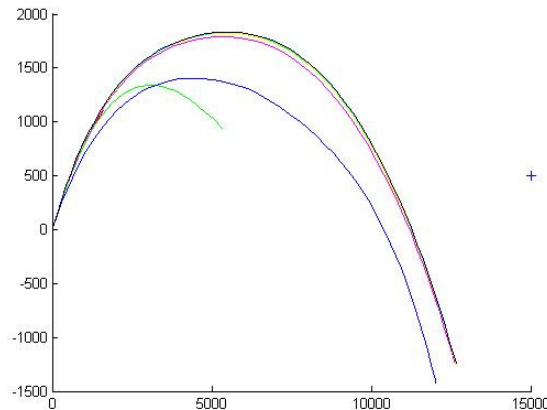


Graf č. 13: 0. iterácia – červená čiara, 1. iterácia - zelená čiara, 7. iterácia – modrá čiara, 19. iterácia - purpurová čiara, 49. iterácia - žltá čiara, 99. iterácia – belasá čiara, 187. iterácia – čierna čiara

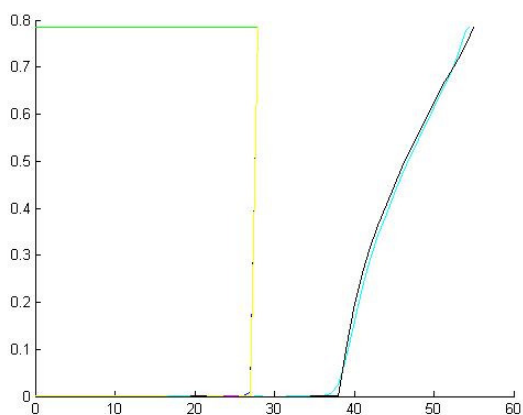




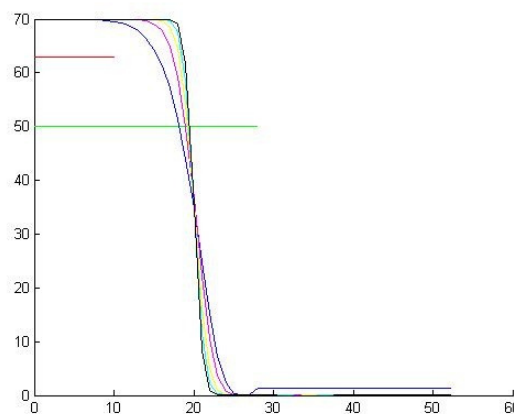
Graf č. 14: riadenie  $Q$  pre jednotlivé iterácie, farby označujú rovnaké iterácie ako v grafe č. 13



Graf č. 16: 0. iterácia – červená čiara, 1. iterácia - zelená čiara, 3. iterácia – modrá čiara, 5. iterácia - purpurová čiara, 8. iterácia - žltá čiara, 11. iterácia – belasá čiara, 14. iterácia – čierna čiara



Graf č. 15: riadenie  $U$  pre jednotlivé iterácie, farby označujú rovnaké iterácie ako v grafe č. 13

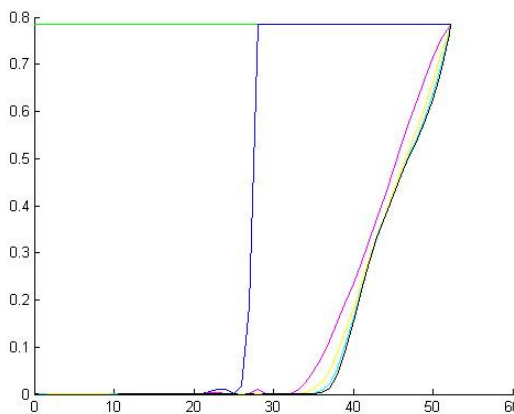


Graf č. 17: riadenie  $Q$  pre jednotlivé iterácie, farby označujú rovnaké iterácie ako v grafe č. 16

Experiment sme zastavili po jednej hodine čo bolo po 79. iterácii. Uvádzame ešte tabuľku s hodnotami účelovej funkcie pre jednotlivé iterácie:

Číslo iterácie	Hodnota
	$\sqrt{(x(t_f) - x_f)^2 + (y(t_f) - y_f)^2}$ (zaokrúhlená na celé čísla)
0.	13415
1.	9676
7.	7555
19.	7233
49.	6355
99.	2885
187.	2875

Tabuľka č. 5: hodnoty účelovej funkcie pre vybrané iterácie



Graf č. 18: riadenie  $U$  pre jednotlivé iterácie, farby označujú rovnaké iterácie ako v grafe č. 16

Ten istý experiment sme urobili pre druhú variantu voľby  $v$  (zo vzťahu (44)) a dostali sme pre jednotlivé iterácie takúto trajektórie:

Experiment sme zastavili po jednej hodine, tj. po 13. iterácii. Tabuľka s hodnotami účelovej funkcie je:

Číslo iterácie	Hodnota
	$\sqrt{(x(t_f) - x_f)^2 + (y(t_f) - y_f)^2}$ (zaokrúhlená na celé čísla)
0.	13415
1.	9676
3.	3540
5.	2950
8.	2926
11.	2918
14.	2915

Tabuľka č. 6: hodnoty účelovej funkcie pre vybrané iterácie

## 5 Záver

V tejto práci sme navrhli a vyskúšali dva varianty hľadania optimálneho riadenia rakety. Prakticky sme ich vyskúšali na troch rôznych úlohách, kde sme preukázali uspokojivé výsledky. V prvej úlohe sme mali dokonca možnosť porovnať výsledky, ktoré sme dostali našimi metódami s výsledkom ktorý vznikol z „presného“ riadenia  $u$  a  $T$  a numericky vypočítaného  $\alpha(0)$ .

Porovnaním dvoch rôznych metód, ktoré sme v tejto práci používali, nedostaneme na základe tejto práce odpoveď, ktorá je lepšia. Ďalšie metódy by mohli vzniknúť alternatívnym prístupom k problému ohraničenia riadiacich funkcií, ktorý sme my obišli substitúciou. Bolo by možné zmenu riadiacich funkcií zrezávať tak, aby nevybehli z ohraničenia, alebo by sa dala využiť kvázi-bariérová metóda na účelovú funkciu.

## Referencie

- [1] Arthur E. Bryson, Jr., Yu-Chi Ho, *Applied Optimal Control*, Taylor & Francis Group, 1975
- [2] L. S. Pontrjagin, V. G. Bolfanskij, R. V. Gamkrelidze, J. F. Miščenko: *Matematická teorie optimálnych procesů*, SNTL, Praha 1964, preložil Jiří Vaniček.

# Riešiteľnosť obyčajných diferenciálnych rovníc druhého rádu s nelineárnymi okrajovými podmienkami

Sámuel Peres<sup>1\*</sup>

Školiteľ: Marek Fila<sup>1†</sup>

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

**Abstrakt:** Príspevok sa zaoberá existenciou a multiplicitou kladných riešení nelineárnych obyčajných diferenciálnych rovníc druhého rádu s nelineárnymi okrajovými podmienkami. Rozširuje predtým známe výsledky na väčšiu množinu parametrov. Hlavným nástrojom je zobrazenie dostrelu, ktorého priebeh je v práci podrobne skúmaný.

*Keľúčové slová:* obyčajná diferenciálna rovnica druhého rádu, nelineárna okrajová podmienka, existencia kladných riešení, zobrazenie dostrelu

## 1 Úvod

Skúmame existenciu a počet kladných riešení istého druhu okrajovej úlohy pre obyčajné diferenciálne rovnice druhého rádu, pričom nelinearita vystupuje aj v rovnici, aj v okrajových podmienkach. Konkrétne ide o úlohu

$$\begin{cases} u''(x) = au^p(x), & x \in (-l, l), \\ u'(\pm l) = \pm u^q(\pm l), \end{cases} \quad (1)$$

kde  $p, q \in \mathbb{R}$  a  $a, l > 0$  sú parametre, okrajové podmienky sú teda symetrické a obidve nelinearity sú mocninové.

Naším základným zdrojom je článok [Chipot et al., 1991], v ktorom autori študovali aj viacrozmernú verziu úlohy (1):

$$\begin{cases} \Delta u(x) = au^p(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = u^q(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

kde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  je ohraničená oblasť,  $n$  je jednotkový vektor vonkajšej normály k  $\partial\Omega$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . V prvom rade sa pritom zaujímali o globálnu existenciu a ohraničenosť, resp. explóziu (blow-up) kladných riešení prí-

slušnej parabolickej úlohy

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - au^p, & \text{v } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = u^q, & \text{v } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0, & \text{v } \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (2)$$

kde  $u_0 : \bar{\Omega} \rightarrow [0, \infty)$ , no obmedzili sa na  $p, q > 1$ .

Výsledky spomenutého článku boli rozšírené mnohými smermi. V [Quittner, 1993] bolo vyšetrené správanie kladných riešení úlohy (2) pre všetky  $p, q > 1$ , v [Chipot and Quittner, 2004] sa uvažovali aj riešenia meniace znamienko pre  $p, q > 1$  a  $u_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  – vtedy sa  $u^p$ , resp.  $u^q$  v úlohe (2) nahradia výrazmi  $|u|^{p-1}u$ , resp.  $|u|^{q-1}u$ . V článkoch [Leung and Zhang, 1998], resp. [Rodríguez-Bernal and Tajdine, 2001] sa zas skúmali kladné riešenia, resp. riešenia meniace znamienko parabolickej úlohy so všeobecnými nelinearitami  $f(u)$ ,  $g(u)$  namiesto  $au^p$ ,  $u^q$ . Poznatky o eliptických úlohách s nelineárnymi okrajovými podmienkami sú zhrnuté v [Rossi, 2005].

V tomto príspevku sa však sústreďíme jedine na úlohu (1) (teda na eliptickú úlohu s  $N = 1$ ) a naším cieľom je odvodenie výsledkov pre ľubovoľné  $p, q \in \mathbb{R}$ . Použijeme pritom tú istú metódu, ktorá je obsiahnutá v Odseku 3 (zaoberajúcom sa prípadom  $N = 1$ ) článku [Chipot et al., 1991]: Po uvažovaní vhodnej začiatkovej úlohy zavedieme funkciu  $L$ , resp. funkcie  $L_1$  a  $L_2$ , tzv. zobrazenia dostrelu, ktorých priebeh priamo určuje počet riešení okrajovej úlohy (1), vystačíme teda s prostriedkami reálnej analýzy.

Vyšetriť priebeh zobrazení dostrelu však nie je až také jednoduché, lebo v ich predpise vystupuje nevlastný integrál s premennou v hornej hranici, ktorý závisí od parametra  $p$ , no nedá sa vypočítať pre skoro žiadne  $p$ . Okrem toho ich predpis obsahuje aj funkciu danú implicitne, ktorá sa dá explicitne vypočítať tiež len pre špeciálnu voľbu parametrov  $p, q$ .

Budeme používať obvyklé asymptotické značenia: Ak  $f, g$  sú funkcie definované v nejakom prstenco-

\*peres@fmph.uniba.sk

†fila@fmph.uniba.sk

vom okolí bodu  $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , tak

$$f(x) \sim g(x), x \rightarrow a \quad \text{znamená} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

$$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a \quad \text{znamená} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Poznamenajme ešte, že dôkaz Lemy 7 neuvedieme celý, dôkazy všetkých Liem Odseku 7 dokonca úplne vynecháme. Lemy 12, 13, 14 a 15 sa dokazujú dosť jednoducho, a to rovnakým postupom ako v citovanom článku [Chipot et al., 1991] pre  $p > 1$ . Dôkazy Liem 7 a 17 by však spolu zaberali desiatky strán a budú obsiahnuté v článku, ktorý plánuje autor publikovať o tejto téme.

## 2 Súvis so začiatočnou úlohou

V tomto odseku budeme skúmať začiatočnú úlohu (3). Pre jej riešenia odvodíme Vetu 1, ktorá nám umožňuje vyjadriť riešenia okrajovej úlohy (1) pomocou riešení úlohy (3), pričom kl'účovú rolu hrá množina  $\mathcal{B}$  (Definícia 1 a Lema 1). V poslednej leme preto nájdeme jej charakterizáciu pomocou riešení rovnice  $\mathcal{F}(m, \cdot) = 0$  (viď (6)), ktorú podrobne preskúmame v Odseku 3.

Ak  $u$  je kladným riešením (1), tak  $u'(-l) < 0 < u'(l)$ , preto  $u$  má stacionárny bod  $x_0 \in (-l, l)$ . Funkcia  $u(\cdot + x_0)$  teda vyhovuje začiatočnej úlohe

$$\begin{cases} u'' = au^p, \\ u(0) = m, \\ u'(0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

pre nejaké  $m > 0$ . V nasledujúcej vete preto zhrnieme známe poznatky o riešiteľnosti tejto úlohy. Stručný dôkaz pre  $p, q > 1$  sa dá nájsť v citovanom článku. Pre podrobný dôkaz príslušného tvrdenia o začiatočnej úlohe so všeobecnou pravou stranou  $f(u)$ , kde  $f \in C([m, \infty), \mathbb{R})$ ,  $f(m) > 0$  viď [Peres, 2009, Veta 2.1 a Poznámka 2.2 (i), (ii)].

**Veta 1** (pre  $p, q > 1$  viď [Chipot et al., 1991, str. 53–54]). *Nech  $m, a > 0$ ,  $p \in \mathbb{R}$ . Potom začiatočná úloha (3) má jediné riešenie. Budeme ho označovať  $u_{m,p,a}$  a jeho definičný obor  $(-\Lambda_{m,p,a}, \Lambda_{m,p,a})$ , pričom*

$$\Lambda_{m,p,a} = \begin{cases} \frac{m^{\frac{1-p}{2}}}{\sqrt{2a}} \int_1^\infty \sqrt{\frac{p+1}{V^{p+1}-1}} dV < \infty, & p > 1, \\ \infty, & p \leq 1. \end{cases}$$

*Riešenie  $u_{m,p,a}$  je párne, rýdzokonvexné, zhora neohraničené a splňa*

$$|x| = \frac{m^{\frac{1-p}{2}}}{\sqrt{2a}} I_p \left( \frac{u_{m,p,a}(x)}{m} \right), \quad x \in (-\Lambda, \Lambda), \quad (4)$$

*kde  $\Lambda := \Lambda_{m,p,a}$  a funkcia  $I_p : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  je definovaná predpisom*

$$I_p(y) = \begin{cases} \int_1^y \sqrt{\frac{p+1}{V^{p+1}-1}} dV, & p \neq -1, \\ \int_1^y \frac{dV}{\sqrt{\ln V}}, & p = -1. \end{cases}$$

*Nakoniec pre  $x \in (-\Lambda, \Lambda)$  je*

$$|u'_{m,p,a}(x)| = \begin{cases} \sqrt{\frac{2a}{p+1} (u_{m,p,a}^{p+1}(x) - m^{p+1})}, & p \neq -1, \\ \sqrt{2a (\ln u_{m,p,a}(x) - \ln m)}, & p = -1. \end{cases} \quad (5)$$

**Definícia 1.** *Nech  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Položme*

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}(p, q, a) := \{(m, l) \in (0, \infty) \times (0, \infty) : l < \Lambda_{m,p,a}, u'_{m,p,a}(l) = u_{m,p,a}^q(l)\}.$$

*Ďalej pre dané  $l > 0$  označme  $\mathcal{S}(l) = \mathcal{S}(l; p, q, a)$ , resp.  $\mathcal{N}(l) = \mathcal{N}(l; p, q, a)$  množinu všetkých kladných symetrických, resp. kladných nesymetrických riešení úlohy (1).*

Platnosť nasledujúcej lemy je zrejhmá.

**Lema 1** ([Chipot et al., 1991, str. 53–54]). *Pre ľubovoľné  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $a, l > 0$  platí:*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(l) &= \{u_{m,p,a}|_{[-l,l]} : (m, l) \in \mathcal{B}\}, \\ \mathcal{N}(l) &= \{u_{m,p,a}(\cdot - \frac{l_1-l_2}{2})|_{[-l,l]} : \\ &\quad (m, l_1), (m, l_2) \in \mathcal{B}, l_1 \neq l_2, l_1 + l_2 = 2l\}. \end{aligned}$$

**Lema 2** (pre  $p, q > 1$  viď [Chipot et al., 1991, str. 54–55]). *Nech  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Potom pre ľubovoľné  $m, l > 0$  sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(i)  $(m, l) \in \mathcal{B}$ ,

(ii) rovnica

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{F}(m, x) := \mathcal{F}_{p,q,a}(m, x) \\ &:= \begin{cases} \frac{x^{2q}}{2a} - \frac{x^{p+1}}{p+1} + \frac{m^{p+1}}{p+1}, & p \neq -1, \\ \frac{x^{2q}}{2a} - \ln x + \ln m, & p = -1 \end{cases} \quad (6) \end{aligned}$$

o neznámej  $x$  má nejaké riešenie  $R > m$  a platí:

$$l = \frac{m^{\frac{1-p}{2}}}{\sqrt{2a}} I_p \left( \frac{R}{m} \right).$$

*Dôkaz.* Implikácie (i)  $\implies$  (ii) a (ii)  $\implies$  (i) sa dokazujú v podstate rovnako, preto odvodíme len prvú z nich:

Tvrdenie  $(m, l) \in \mathcal{B}$  znamená, že  $m, l \in (0, \infty)$ ,  $l < \Lambda$  a  $u'_{m,p,a}(l) = u''_{m,p,a}(l)$ . Z toho však podľa Vety 1 vyplýva, že

$$u''_{m,p,a}(l) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2a}{p+1} (u_{m,p,a}^{p+1}(l) - m^{p+1})}, & p \neq -1, \\ \sqrt{2a (\ln u_{m,p,a}(l) - \ln m)}, & p = -1. \end{cases}$$

Stačí teda označiť  $u_{m,p,a}(l) =: R > m$  a brať do úvahy vzorec (4) pre  $x = l$ .  $\square$

### 3 Zavedenie zobrazení dostreľu

Z Lemy 2 už vieme, že medzi množinou  $\mathcal{B}(p, q, a)$  a rovnicou  $\mathcal{F}_{p,q,a}(m, x) = 0$  o neznámej  $x$  je úzky vzťah. V prvej leme tohto odseku preto zistíme počet riešení rovnice v závislosti od  $p, q, a, m$ . Z toho priamo dostaneme aj jednoduchý výsledok o neexistencii riešení úlohy (1) pre isté  $p, q, a, l$  (Veta 2). No uvidíme aj to, že  $\mathcal{B}$  je grafom najviac dvoch funkcií. To nás vedie k definícii zobrazenia dostreľu a na konci odseku odvodíme aj rôzne s ním súvisiace vzorce.

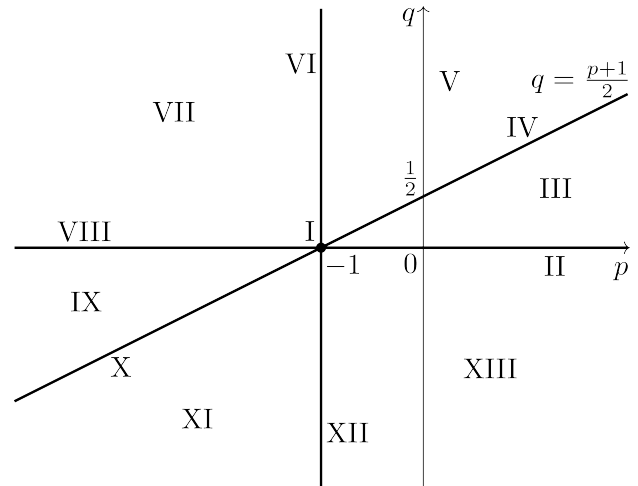
Funkcia  $\mathcal{F}(m, \cdot)$  má očividne odlišný priebeh pre  $p > -1$ ,  $p = -1$  a  $p < -1$ , takisto aj pre  $q > 0$ ,  $q = 0$  a  $q < 0$ . Záleží aj na tom, ktorý z exponentov  $2q, p+1$  je väčší. Musíme preto rozlíšiť trinásť prípadov, ktoré sú znázornené na Obrázku 1.

**Lema 3** (pre  $p, q > 1$  vid' [Chipot et al., 1991, dôkazy Liem 3.1 a 3.2, str. 57–58]). *Nech  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $a, m > 0$ . Funkcia  $\mathcal{F}(m, \cdot)$  má najviac dva nulové body a všetky ležia v intervale  $(m, \infty)$ . Budeme ich označovať  $R_{p,q,a}(m) =: R(m)$ , ak má len jeden, resp.  $R_{1;p,q,a}(m) =: R_1(m)$  a  $R_{2;p,q,a}(m) =: R_2(m)$ , ak ich má dva, pričom  $R_1(m) < R_2(m)$ .*

*Ďalej zaved' me označenie*

$$M := M_{p,q,a} := \begin{cases} \left( \frac{2q-p-1}{2q} \right)^{\frac{1}{p+1}} \left( \frac{a}{q} \right)^{\frac{1}{2q-p-1}}, & \text{(V, VII),} \\ \left( \frac{a}{e^q} \right)^{\frac{1}{2q}}, & \text{(VI),} \\ \left( -\frac{p+1}{2a} \right)^{\frac{1}{p+1}}, & \text{(VIII).} \end{cases}$$

*Pre počet nulových bodov platí:*



Obr. 1: Prípady I až XIII.

- (i) Ak  $q < 0$  alebo  $q < \frac{p+1}{2}$  alebo  $p = -1$ ,  $q = 0$  (I–III, IX–XIII), tak  $\mathcal{F}(m, \cdot)$  má jeden nulový bod pre ľubovoľné  $m > 0$ , pričom  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(m, R(m)) < 0$ . Navyše pre  $p > -1$ ,  $0 < q < \frac{p+1}{2}$  (III) platí:

$$R(m) > \left( \frac{a}{q} \right)^{\frac{1}{2q-p-1}}. \quad (7)$$

- (ii) Ak  $p > -1$ ,  $q = \frac{p+1}{2}$  (IV), tak  $\mathcal{F}(m, \cdot)$  má jeden nulový bod pre  $q < a$  a žiaden pre  $q \geq a$ . Pritom  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(m, R(m)) < 0$ .
- (iii) Ak  $p < -1$ ,  $q = 0$  (VIII), tak  $\mathcal{F}(m, \cdot)$  má jeden nulový bod pre  $m < M$  a žiaden pre  $m \geq M$ . Pritom  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(m, R(m)) < 0$ .
- (iv) Ak  $q > 0$  a zároveň  $q > \frac{p+1}{2}$  (V–VII), tak  $\mathcal{F}(m, \cdot)$  má dva nulové body pre  $m < M$ , jeden pre  $m = M$  a žiaden pre  $m > M$ . Pritom

$$R_1(m) < \underbrace{\left( \frac{a}{q} \right)^{\frac{1}{2q-p-1}}}_{=R(M)} < R_2(m) \quad (8)$$

$$a \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(m, R_1(m)) < 0, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(m, R_2(m)) > 0, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(M, R(M)) = 0.$$

*Navyše platí:*

$$R(m) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2a} m}, & \text{(I),} \\ \left( m^{p+1} + \frac{p+1}{2a} \right)^{\frac{1}{p+1}}, & \text{(II, VIII),} \\ \left( \frac{2a}{2a-p-1} \right)^{\frac{1}{p+1}} m, & \text{(IV, X).} \end{cases}$$

	$\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{F}(m, x)$	monotónnosť na $(0, \infty)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{F}(m, x)$
I. $p = -1, q = 0$	$\infty$	klesá	$-\infty$
II. $p > -1, q = 0$	$\frac{1}{2a} + \frac{m^{p+1}}{p+1} > 0$		
III. $p > -1, 0 < q < \frac{p+1}{2}$	$\frac{m^{p+1}}{p+1} > 0$	rastie na $(0, (\frac{a}{q})^{\frac{1}{2q-p-1}}]$ , klesá na $[(\frac{a}{q})^{\frac{1}{2q-p-1}}, \infty)$	$-\infty$ , ak $q < a$ , $\frac{m^{p+1}}{p+1} > 0$ , ak $q = a$ , $\infty$ , ak $q > a$
IV. $p > -1, q = \frac{p+1}{2}$		klesá, ak $q < a$ , je konštantné, ak $q = a$ , rastie, ak $q > a$	
V. $p > -1, q > \frac{p+1}{2}$	$\infty$	klesá na $(0, (\frac{a}{q})^{\frac{1}{2q-p-1}}]$ , rastie na $[(\frac{a}{q})^{\frac{1}{2q-p-1}}, \infty)$	$\infty$
VI. $p = -1, q > 0$			
VII. $p < -1, q > 0$			
VIII. $p < -1, q = 0$	$\infty$	klesá	$\frac{1}{2a} + \frac{m^{p+1}}{p+1} > 0$ , ak $m > M$ , $= 0$ , ak $m = M$ , $< 0$ , ak $m < M$
IX. $p < -1, \frac{p+1}{2} < q < 0$			
X. $p < -1, q = \frac{p+1}{2}$			$\frac{m^{p+1}}{p+1} < 0$
XI. $p < -1, q < \frac{p+1}{2}$			
XII. $p = -1, q < 0$			$-\infty$
XIII. $p > -1, q < 0$			

Tabuľka 1: Priebeh funkcie  $\mathcal{F}(m, \cdot)$ .

*Dôkaz.* Vyšetrením priebehu funkcie  $\mathcal{F}(m, \cdot)$  získame údaje zhrnuté v Tabuľke 1. Tieto údaje stačia na určenie počtu nulových bodov funkcie  $\mathcal{F}(m, \cdot)$  v prípadoch I–IV a VIII–XIII a na overenie nerovnosti (7).

V prípadoch V–VII má  $\mathcal{F}(m, \cdot)$  jediné lokálne minimum, ktorého hodnotu nie je ťažké vypočítať. Dva nulové body má preto vtedy a len vtedy, keď toto minimum je záporné, čo nastane práve pre  $m < M$ . Ďalej pre  $m = M$  má jeden a pre  $m > M$  žiaden. Zrejme platí aj (8).

Dokážme ešte, že všetky nulové body funkcie  $\mathcal{F}(m, \cdot)$  sú väčšie ako  $m$ . V prípadoch I–IV a VIII–XIII to zaručuje samotný fakt, že  $\mathcal{F}(m, m) = m^{2q}/2a > 0$  pre  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $a, m > 0$ . V prípadoch V a

VII pre  $m \leq M$  treba brať do úvahy aj to, že

$$m \leq M < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2q-p-1}},$$

podobne v prípade VI.

Nakoniec rovnica (6) je v prípade I, resp. v prípadoch II, VIII, IV, X lineárna v  $\ln x$ , resp. v  $x^{p+1}$ , preto nie je problém nájsť jej explicitné riešenia.  $\square$

Všimnime si, že množina parametrov  $p, q > 1$  vyšetrených v [Chipot et al., 1991] tvorí súčasť iba troch prípadov III–V, ktoré spolu zahŕňajú  $p > -1$ ,  $q > 0$ .

Teraz uvedieme jednoduchý dôsledok Lemy 3 o neexistencii nesymetrických, resp. symetrických riešení úlohy (1) a následne zavedieme zobrazenia dostreľu.

**Veta 2.** Nech  $p \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ .

- (i) Ak  $q \leq 0$  alebo  $q \leq \frac{p+1}{2}$  (I–IV a VIII–XIII), tak pre každé  $l > 0$  je  $\mathcal{N}(l) = \emptyset$ .
- (ii) Ak  $p > -1$ ,  $q = \frac{p+1}{2} \geq a$  (IV), tak pre každé  $l > 0$  je  $\mathcal{S}(l) = \emptyset$ .

**Definícia 2.** Nech  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Položme

$$L(m) := L_{p,q,a}(m) := \frac{m^{\frac{1-p}{2}}}{\sqrt{2a}} I_p \left( \frac{R_{p,q,a}(m)}{m} \right)$$

pre každé také  $m$ , pre ktoré je  $R_{p,q,a}(m)$  definované. Analogicky zavedieme aj  $L_{1;p,q,a}(m) := L_1(m)$  a  $L_{2;p,q,a}(m) := L_2(m)$ . Funkcie  $L$ ,  $L_1$  a  $L_2$  nazývame **zobrazenia dostrelu** (po anglicky *time maps*).

Riešenia úlohy (1) sú podľa Lemy 1 určené množinou  $\mathcal{B}$ . Tá je zas podľa Liem 2 a 3 zjednotením grafov funkcií  $L$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  (pričom samozrejme nie všetky musia mať neprázdny definičný obor pre dané  $p$ ,  $q$ ,  $a$ ). Lemu 1 preto môžeme preformulovať takto:

**Lema 4.** Pre ľubovoľné  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $a, l > 0$  platí:

$$\mathcal{S}(l) = \left\{ u_{m,p,a} \Big|_{[-l,l]} : l \in \{L(m), L_1(m), L_2(m)\} \right\},$$

$$\mathcal{N}(l) = \begin{cases} \left\{ u_{m,p,a} \left( \cdot \pm \frac{L_2(m) - L_1(m)}{2} \right) \Big|_{[-l,l]} \right. & \text{(V–VII),} \\ \left. : L_1(m) + L_2(m) = 2l \right\}, & \\ \emptyset, & \text{inak.} \end{cases}$$

Počet kladných symetrických riešení úlohy (1) pre dané  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $a, l > 0$  je teda

$$|\mathcal{S}(l)| = \left| \left\{ m > 0 : l \in \{L(m), L_1(m), L_2(m)\} \right\} \right|.$$

K určeniu tohto čísla musíme nájsť limitu funkcií  $L$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  v hraničných bodoch ich definičného oboru, ďalej intervaly, na ktorých sú rýdzomonotónne, a nakoniec aj odhadnúť ich prípadné lokálne extrémny. Pre nesymetrické riešenia musíme to isté vykonať s  $L_1 + L_2$ , keď že

$$|\mathcal{N}(l)| = 2 \left| \left\{ m > 0 : L_1(m) + L_2(m) = 2l \right\} \right|,$$

ak  $q > 0$  a  $q > \frac{p+1}{2}$  (V–VII). Preto teraz odvodíme vzorec na derivovanie zobrazení dostrelu a iných funkcií, ktoré budeme v ďalšom potrebovať.

**Lema 5** (pre  $p, q > 1$  vid' [Chipot et al., 1991, dôkaz Vety 3.1 a Lemy 3.5]). *Majme  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Nech*

$\mathcal{R}$  je jedna z funkcií  $R$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  a nech jeho definičným oborom je interval  $I$ . Označme  $\mathcal{L}$  príslušnú funkciu z  $L$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ . Potom  $\mathcal{R}, \mathcal{L} \in C^\infty(I)$  a pre  $m \in I$  platí:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'(m) &= -\frac{m^p}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(m, \mathcal{R}(m))} \\ &= \left( \frac{m}{\mathcal{R}(m)} \right)^p \frac{1}{1 - \frac{q}{a} \mathcal{R}^{2q-p-1}(m)}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\left( \frac{\mathcal{R}(m)}{m} \right)' = \frac{2q-p-1}{2am^{p+2}} \mathcal{R}^{2q}(m) \mathcal{R}'(m), \quad (10)$$

$$\left( I_p \left( \frac{\mathcal{R}(m)}{m} \right) \right)' = \frac{2q-p-1}{\sqrt{2a}} m^{\frac{p-3}{2}} \frac{\mathcal{R}^{q-p}(m)}{1 - \frac{q}{a} \mathcal{R}^{2q-p-1}(m)}, \quad (11)$$

$$\mathcal{L}'(m) = \frac{1-p}{2m} \mathcal{L}(m) + \frac{2q-p-1}{2am^{p+1}} \mathcal{R}^q(m) \mathcal{R}'(m), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}''(m) &= -\frac{p+1}{2m} \mathcal{L}'(m) + \frac{2q-p-1}{2am^{\frac{p+1}{2}}} \\ &\quad \cdot \left( (q-1) \frac{q}{a} \mathcal{R}^{2q-p-1}(m) + q-p \right) \\ &\quad \cdot \mathcal{R}^{q+p-1}(m) (\mathcal{R}'(m))^3. \end{aligned} \quad (13)$$

*Dôkaz.* Je vidieť, že  $\mathcal{F} \in C^\infty((0, \infty) \times (0, \infty))$ , pričom

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(m, x) &= x^p \left( \frac{q}{a} x^{2q-p-1} - 1 \right), \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial m}(m, x) &= m^p. \end{aligned}$$

Zvoľme ľubovoľné  $m_0 \in I$  a položme  $x_0 := \mathcal{R}(m_0)$ . Podľa Lemy 3 je  $\mathcal{F}(m_0, x_0) = 0$  a  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(m_0, x_0) \neq 0$ . Veta o implicitnej funkcii preto zaručuje, že v okolí bodu  $(m_0, x_0)$  je rovnosť  $\mathcal{F}(m, x) = 0$  ekvivalentná  $x = r(m)$ , kde  $r$  je nejaká  $C^\infty$ -funkcia. V prípadoch I–IV, VIII–XIII sú však riešenia rovnice  $\mathcal{F}(m, x) = 0$  dané ako  $x = R(m)$ , preto  $\mathcal{R} = R$  je totožné s  $r$  v okolí bodu  $m_0$ . V prípadoch V–VII máme dve možnosti: Ak  $\mathcal{R} = R_1$ , tak

$$(m_0, x_0) \in (0, M) \times \left( 0, \left( \frac{a}{q} \right)^{\frac{1}{2q-p-1}} \right) =: J$$

a pretože všetky riešenia rovnice  $\mathcal{F}(m, x) = 0$  v  $J$  sú dané ako  $x = R_1(m)$ , tak  $\mathcal{R} = R_1 = r$  v okolí bodu  $m_0$ . Podobne je to aj pre  $\mathcal{R} = R_2$ . (Možnosť  $\mathcal{R} = R$  sme vylúčili, lebo definičným oborom  $R$  nie je interval.) Teda každopádne  $\mathcal{R} \in C^\infty(I)$  a  $\mathcal{R}'$  spĺňa rovnosť (9). Z nej môžeme odvodiť, že

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mathcal{R}(m)}{m} \right)' &= \left( \frac{1}{m} - \frac{\mathcal{R}(m)}{m^2 \mathcal{R}'(m)} \right) \mathcal{R}'(m) \\ &= \frac{m^{p+1} - \mathcal{R}^{p+1}(m) + \frac{q}{a} \mathcal{R}^{2q}(m)}{m^{p+2}} \mathcal{R}'(m). \end{aligned}$$

Vzorec (10) preto očividne platí pre  $p = -1$ . V prípade  $p \neq -1$  si ešte treba uvedomiť, že

$$m^{p+1} - \mathcal{R}^{p+1}(m) = -\frac{p+1}{2a} \mathcal{R}^{2q}(m).$$

Poslednú rovnosť použijeme aj pri odvodení ďalšieho vzorca pre  $p \neq 1$ :

$$\begin{aligned} \left( I_p \left( \frac{\mathcal{R}(m)}{m} \right) \right)' &= \sqrt{\frac{(p+1)m^{p+1}}{\mathcal{R}^{p+1}(m) - m^{p+1}}} \left( \frac{\mathcal{R}(m)}{m} \right)' \\ &= \frac{\sqrt{2am^{p+1}}}{\mathcal{R}^q(m)} \left( \frac{\mathcal{R}(m)}{m} \right)'. \end{aligned}$$

Rovnaký vzorec dostaneme aj pre  $p = -1$ . Vďaka (10) preto pre ľubovoľné  $p \in \mathbb{R}$  je

$$\left( I_p \left( \frac{\mathcal{R}(m)}{m} \right) \right)' = \frac{2q-p-1}{\sqrt{2am^{\frac{p+3}{2}}}} \mathcal{R}^q(m) \mathcal{R}'(m), \quad (14)$$

čo vedie k vzorcu (11).

Zaoberajme sa teraz funkciou  $\mathcal{L}$ . Jej  $C^\infty$ -hladkosť je dôsledkom  $C^\infty$ -hladkosti  $\mathcal{R}$  a  $I_p$ . Derivovaním dostaneme, že

$$\mathcal{L}'(m) = \frac{1-p}{2} \frac{\mathcal{L}(m)}{m} + \frac{m^{\frac{1-p}{2}}}{\sqrt{2a}} \left( I_p \left( \frac{\mathcal{R}(m)}{m} \right) \right)',$$

čo spolu so (14) dáva rovnosť (12). Vyjmime z jej pravej strany  $\frac{1}{2m}$  a derivujme ju:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}''(m) \\ &= -\frac{1}{2m^2} 2m \mathcal{L}'(m) + \frac{1}{2m} \left[ (1-p) \mathcal{L}'(m) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2q-p-1}{a} \mathcal{R}'(m) \left( \frac{(q-p) \mathcal{R}^{q-p-1}(m) (1-\frac{q}{a} \mathcal{R}^{2q-p-1}(m))}{(1-\frac{q}{a} \mathcal{R}^{2q-p-1}(m))^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathcal{R}^{q-p}(m) \frac{q}{a} (2q-p-1) \mathcal{R}^{2q-p-2}(m)}{(1-\frac{q}{a} \mathcal{R}^{2q-p-1}(m))^2} \right] \\ &= -\frac{p+1}{2m} \mathcal{L}'(m) + \frac{2q-p-1}{2am} \mathcal{R}'(m) \mathcal{R}^{q-p-1}(m) \\ &\quad \cdot (q-p + (-q-p) + (2q-p-1) \frac{q}{a} \mathcal{R}^{2q-p-1}(m)) \\ &\quad \cdot \left( \left( \frac{\mathcal{R}(m)}{m} \right)^p \mathcal{R}'(m) \right)^2. \end{aligned}$$

Tým sme overili aj platnosť vzorca (13).  $\square$

## 4 Vlastnosti funkcie $I_p$

Prvá, jednoduchá lema tohto odseku zadáva podmienku ohraničenosti funkcie  $I_p$  a prvý člen asymptotického rozvoja  $I_p(y)$  pre  $y \rightarrow 1$ , a bude potrebná

pri vyšetrení prípadov II a V. Druhá lema (s asymptotickým rozvojom pre  $y \rightarrow \infty$ ) je však veľmi komplikovaná, ale nezaobídeme sa bez nej v prípadoch III (ktorý je už autorom vyšetrený, no príslušné výsledky v tomto príspevku neprezentujeme) a V.

**Lema 6** (pre  $p > 1$  vid' [Chipot et al., 1991, dôkaz Vety 3.1 a Lemy 3.3]). *Pre ľubovoľné  $p \in \mathbb{R}$  je*

$$\lim_{y \rightarrow \infty} I_p(y) \begin{cases} < \infty, & p > 1, \\ = \infty, & p \leq 1, \end{cases}$$

$$I_p(y) \sim 2\sqrt{y-1}, \quad y \rightarrow 1.$$

*Dôkaz.* Prvé tvrdenie je vlastne súčasťou dôkazu Vety 1. Vyšetrite preto správanie  $I_p$  v okolí 1. Pre  $p \neq -1$  je

$$\frac{y^{p+1} - 1}{p+1} = y - 1 + o(y-1), \quad y \rightarrow 1$$

(použili sme Maclaurinov polynóm funkcie  $x \mapsto (1+x)^{p+1}$ ), na základe l'Hospitalovho pravidla preto

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{I_p(y)}{2\sqrt{y-1}} &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\frac{p+1}{y^{p+1}-1}}}{\frac{1}{\sqrt{y-1}}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{\frac{y-1}{y-1+o(y-1)}} = 1. \end{aligned}$$

Rovnakým postupom sa to dá overiť aj pre  $p = 1$ .  $\square$

**Definícia 3.** *Pre ľubovoľné  $s \geq 0$  položme*

$$p_s := -\frac{2s-1}{2s+1}.$$

Teda

$$\begin{aligned} \{p_n\}_{n=0}^\infty &= (1, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{7}, \dots), \\ \{p_{n+\frac{1}{2}}\}_{n=0}^\infty &= (0, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \dots). \end{aligned}$$

**Lema 7.** *Pre  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  a  $p \in (-1, \infty) \setminus \{p_k\}$  položme*

$$\begin{aligned} b_k(p) &:= \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{2}{(2k+1)(p-p_k)} \\ &= \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{\frac{p-1}{2} + k(p+1)} \end{aligned}$$

a pre  $p > -1$  položme

$$B_p := \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ p_k \neq p}} b_k(p).$$

Potom pre  $y \rightarrow \infty$  platí:



(i) ak  $p > 1$ , tak

$$\frac{I_p(y)}{\sqrt{p+1}} = B_p + o(1),$$

(ii) ak  $p_{n+1} < p < p_n$  pre nejaké  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , tak

$$\frac{I_p(y)}{\sqrt{p+1}} = \sum_{k=0}^n \underbrace{(-b_k(p))}_{>0} y^{\underbrace{\frac{1-p}{2}-k(p+1)}_{>0}} + B_p + o(1),$$

(iii) ak  $p = p_n$  pre nejaké  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , tak

$$\begin{aligned} \frac{I_p(y)}{\sqrt{p+1}} &= \sum_{k=0}^{n-1} (-b_k(p)) y^{\frac{1-p}{2}-k(p+1)} \\ &\quad + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \ln y + B_p + o(1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{2n+1}{2(n-k)} y^{\frac{2(n-k)}{2n+1}} \\ &\quad + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \ln y + B_p + o(1). \end{aligned}$$

Funkcia  $p \mapsto B_p$  je na každom z intervalov  $(p_0, \infty)$ ,  $(p_1, p_0)$ ,  $(p_2, p_1)$ , ... triedy  $C^\infty$  a na každom z nich klesá, pričom

$$\lim_{p \rightarrow p_0+} B_p = \infty, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} B_p = 0$$

a pre každé  $n \in \mathbb{N}$  platí:

$$\lim_{p \rightarrow p_{n+1}+} B_p = \infty, \quad B_{p_{n+1/2}} = 0, \quad \lim_{p \rightarrow p_n-} B_p = -\infty.$$

*Dôkaz (náčrt).* Majme  $p > -1$  a  $y > 1$ . Substitúcia  $V := v^{-1/(p+1)}$  dáva:

$$\frac{I_p(y)}{\sqrt{p+1}} = \frac{1}{p+1} \int_{1/y^{p+1}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-v}} v^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}} dv.$$

Aproximovaním funkcie  $v \mapsto 1/\sqrt{1-v} =: \varphi(v)$  jej Maclaurinovým polynómom stupňa  $n$  (jeho zvyšok označíme  $R_n$ ) dostaneme vzorec

$$\frac{I_p(y)}{\sqrt{p+1}} = \sum_{k=0}^n a_{k,p}(y) + \tilde{R}_{n,p}(y),$$

kde

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{n,p}(y) &= \frac{1}{p+1} \int_{1/y^{p+1}}^1 R_n(v) v^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}} dv, \\ a_{k,p}(y) &= \begin{cases} b_k(p) \left(1 - y^{\frac{1-p}{2}-k(p+1)}\right), & p \neq p_k, \\ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \ln y, & p = p_k. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Jadrom dôkazu je odvodenie rovnosti

$$\frac{I_p(y)}{\sqrt{p+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,p}(y). \quad (16)$$

Stačilo by, keby Maclaurinov rad funkcie  $\varphi$  konvergoval rovnomerne na  $[1/y^{p+1}, 1]$ , lebo potom by sme mohli v

$$\frac{I_p(y)}{\sqrt{p+1}} = \frac{1}{p+1} \int_{1/y^{p+1}}^1 \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} v^{k-\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}} \right) dv$$

vymeniť poradie integrovania a sumácie. Lenže  $\lim_{v \rightarrow 1-} \varphi(v) = \infty$ , preto daný Maclaurinov rad diverguje v 1.

Musíme preto vyjadriť  $R_n$  pomocou Taylorovej vety o zvyšku a nájsť tak vhodný horný odhad pre  $\tilde{R}_{n,p}$  na  $(1, \infty)$ . (Dolný odhad  $\tilde{R}_{n,p} > 0$  dostaneme triviálne z toho, že  $R_n > 0$  na  $(0, 1)$ .) Veľmi prekvapivé však je, že aj Lagrangeov, aj Cauchyho tvar zvyšku dáva úplne nepoužiteľný odhad. Preto ich zovšeobecníme: Zvolíme ľubovoľné  $\alpha > 0$  a dokážeme, že ak  $a < x$ ,  $f \in C^n([a, x])$  a  $f$  je  $(n+1)$ -krát diferencovateľné na  $(a, x)$ , tak pre zvyšok  $R_n$  Taylorovho polynómu stupňa  $n$  funkcie  $f$  v bode  $a$  platí:

$$R_n(x) = \frac{(1-\theta)^{n+1-\alpha}}{\alpha n!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)) \cdot (x-a)^{n+1}$$

pre nejaké  $\theta \in (0, 1)$ . Zjavne  $\alpha = n+1$  dáva Lagrangeov,  $\alpha = 1$  zas Cauchyho tvar zvyšku.

Najprv odhadneme  $R_n(x)$  (pre  $f = \varphi$ ,  $0 = a < x < 1$ ) zhora nezávisle od  $\theta$ . Potom to použijeme na získanie horného odhadu pre  $\tilde{R}_{n,p}(y)$ :

$$\tilde{R}_{n,p}(y) \leq \bar{R}_{n,p,\alpha} \quad \text{pre } y \in (1, \infty).$$

Najdlhšou časťou dôkazu je práve odvodenie týchto odhadov. Uvidíme, že je  $\bar{R}_{n,p,\alpha} < \infty$  práve pre  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ . Nakoniec dokážeme, že pre ľubovoľné  $p > -1$  a  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{R}_{n,p,\alpha} = 0$ , čo potvrdzuje platnosť (16). Konvergencia radu je dokonca rovnomerná vzhľadom na  $y \in [1, \infty)$ , čo hrá významnú rolu v ďalšej časti dôkazu.

Teraz už môžeme odvodiť asymptotický rozvoj  $I_p(y)$  pre  $y \rightarrow \infty$ . Budeme pritom potrebovať, že

$$\lim_{y \rightarrow \infty} a_{k,p}(y) = \begin{cases} b_k(p), & p > p_k, \\ \infty, & p \leq p_k. \end{cases} \quad (17)$$

Majme najprv  $p > 1$ , t. j.  $p > p_n$  pre všetky  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Vďaka (17) a rovnomernej konvergencii

radu v rovnosti (16) platí:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{I_p(y)}{\sqrt{p+1}} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,p}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} a_{k,p}(y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k(p) = B_p. \end{aligned}$$

Dostali sme tak tvrdenie (i).

Zvoľme teraz  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  a  $p \in (p_{n+1}, p_n]$ . Opäť použijeme (17) a rovnomernú konvergenciu radu v (16), aby sme odvodili:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \frac{I_p(y)}{\sqrt{p+1}} - \sum_{k=0}^n a_{k,p}(y) \right) &= \lim_{y \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{k,p}(y) \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k(p). \end{aligned}$$

Ekvivalentne:

$$\frac{I_p(y)}{\sqrt{p+1}} = \sum_{k=0}^n a_{k,p}(y) + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k(p) + o(1)$$

pre  $y \rightarrow \infty$ . Jednoduchou úpravou (vid' (15)) dostaneme z tejto rovnosti asymptotický rozvoj nachádzajúci sa v tvrdeniach (ii) a (iii).

Zostáva ešte vyšetriť vlastnosti funkcie  $p \mapsto B_p$ . Klesajúcosť na intervaloch  $(p_0, \infty)$ ,  $(p_1, p_0)$ ,  $(p_2, p_1)$ , ... vyplýva priamo z klesajúcosťi funkcií  $b_k$  na týchto intervaloch.

Dokážme teraz, že  $(p \mapsto B_p) \in C^\infty((-1, \infty) \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \{p_n\})$ . Vychádzame z  $C^\infty$ -hladkosti funkcií  $b_k$ . Ak zvolíme ľubovoľné  $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  a  $[\alpha, \beta] \subseteq (p_n, \infty)$ , tak pomocou Weierstraßovho kritéria môžeme overiť, že rad  $\sum_{k=n}^{\infty} (b_k)^{(m)}$  konverguje rovnomerne na  $[\alpha, \beta]$ , takže ho možno derivovať člen po člene. Súčet radu  $\sum_{k=n}^{\infty} b_k$  tak patrí do triedy  $C^\infty([\alpha, \beta])$ , čiže aj do  $C^\infty((p_n, \infty))$ , z čoho vyplýva  $C^\infty$ -hladkosť funkcie  $p \mapsto B_p$  na  $(-1, \infty) \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \{p_n\}$ .

Jej jednostranné limity v  $p_0, p_1, \dots$  sa nájdu ľahko. Tie – spolu so spojitosťou a klesajúcosťou na  $(p_{n+1}, p_n)$  – zaručujú existenciu jediného takého bodu  $p_n^* \in (p_{n+1}, p_n)$ , že  $B_{p_n^*} = 0$ . To, že práve  $p_n^* = p_{n+1/2}$ , overujeme tak, že vypočítame integrál  $I_{p_{n+1/2}}(y)$  pre  $y > 1$  použitím substitúcie  $V := v^{n+1}$  a porovnáme jeho asymptotický rozvoj s rozvojom z tvrdenia (ii).

Nakoniec  $\lim_{p \rightarrow \infty} B_p$  nájdeme tak, že využijeme rovnomernú konvergenciu radu  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  na  $(\alpha, \infty)$  pre  $\alpha > 1$ , a tak vymeníme poradie limity a sumácie.  $\square$

## 5 Prípád I: $p = -1, q = 0$

Tento prípad je najjednoduchší, z Lemy 3 totiž priamo vyplýva, že

$$L(m) = \frac{m}{\sqrt{2a}} I_{-1} \left( e^{\frac{1}{2a}} \right), \quad m > 0.$$

Čiže zobrazenie dostrely určujúce vzťah medzi  $m = u(0)$  a  $l$  pre  $u \in \mathcal{S}(l)$  je lineárne. Dosadením do Lemy 4 tak získame nasledujúcu vetu:

**Veta 3.** *Nech  $p = -1, q = 0, a > 0$ . Potom pre ľubovoľné  $l > 0$  platí:*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(l) &= \left\{ u_{m,-1,a}|_{[-l,l]} : m = \frac{\sqrt{2a}}{I_{-1}(e^{\frac{1}{2a}})} l \right\}, \\ \mathcal{N}(l) &= \emptyset. \end{aligned}$$

## 6 Prípád II: $p > -1, q = 0$

V tomto odseku zodpovieme otázku riešiteľnosti úlohy (1) v prípade II nájdením  $\lim_{m \rightarrow 0} L(m)$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} L(m)$  a dokázaním monotónnosti  $L$ . Najprv ale zhrňme tie vlastnosti funkcie  $R$ , ktoré v ďalších lemach použijeme. Pre  $m \rightarrow \infty$  uvedieme prvé dva členy asymptotického rozvoja  $R(m)$  – dôvod toho bude jasný z dôkazu Lemy 10.

**Lema 8.** *Nech  $p > -1, q = 0, a > 0$ . Potom  $R' > 0$  na  $(0, \infty)$  a*

$$\lim_{m \rightarrow 0} R(m) = \left( \frac{p+1}{2a} \right)^{\frac{1}{p+1}},$$

$$R(m) = m \left( 1 + \frac{1}{2am^{p+1}} + o\left( \frac{1}{m^{p+1}} \right) \right), \quad m \rightarrow \infty.$$

*Dôkaz.* Pretože podľa Lemy 3 (i) je  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(m, R(m)) < 0$  pre  $m > 0$ , tak v zmysle Lemy 5 je  $R' > 0$  na  $(0, \infty)$ . Lema 3 však dáva aj explicitný vzorec

$$R(m) = \left( m^{p+1} + \frac{p+1}{2a} \right)^{\frac{1}{p+1}} = m \left( 1 + \frac{p+1}{2am^{p+1}} \right)^{\frac{1}{p+1}}$$

pre  $m > 0$ , z ktorého ihneď dostaneme  $\lim_{m \rightarrow 0} R(m)$  a pomocou Maclaurinovho polynómu funkcie  $x \mapsto (1+x)^{1/(p+1)}$  aj asymptotický rozvoj  $R(m)$  pre  $m \rightarrow \infty$ .  $\square$

V nasledujúcich dvoch lemach opíšeme správanie zobrazenia dostrely v okolí 0 a  $\infty$ . Obidve lemy sa dajú dokázať aj použitím l'Hospitalovho pravidla, aj pomocou asymptotického rozvoja  $I_p(y)$ .

**Lema 9.** *Nech  $p > -1$ ,  $q = 0$ ,  $a > 0$ . Potom*

$$\lim_{m \rightarrow 0} L(m) = \begin{cases} \infty, & p \geq 1, \\ \frac{2}{1-p} \left(\frac{p+1}{2a}\right)^{\frac{1}{p+1}} & p \in (-1, 1). \\ =: L_{p,0,a}(0) =: L(0), \end{cases}$$

*Dôkaz.* Pre  $p > 1$  a  $p = 1$  možno nájsť limitu

$$\lim_{m \rightarrow 0} L(m) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{m^{\frac{1-p}{2}}}{\sqrt{2a}} I_p \left( \frac{R(m)}{m} \right)$$

dosadením (viď Lema 8 a 6). V prípade  $p \in (-1, 1)$  ide o limitu typu " $0 \cdot \infty$ ", ktorú vyrátame pomocou l'Hospitalovho pravidla a Lemy 5:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow 0} L(m) &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{I_p \left( \frac{R(m)}{m} \right)}{\sqrt{2am}^{\frac{p-1}{2}}} \\ &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{-\frac{p+1}{\sqrt{2a}} m^{\frac{p-3}{2}} R^{-p}(m)}{\sqrt{2a}^{\frac{p-1}{2}} m^{\frac{p-3}{2}}} \\ &= \frac{2}{1-p} \cdot \frac{p+1}{2a} \lim_{m \rightarrow 0} R^{-p}(m). \end{aligned}$$

K dokončeniu dôkazu stačí opätovne použiť Lemu 8.  $\square$

**Lema 10.** *Nech  $p > -1$ ,  $q = 0$ ,  $a > 0$ . Potom*

$$L(m) \sim \frac{1}{am^p}, \quad m \rightarrow \infty,$$

teda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L(m) = \begin{cases} 0, & p > 0, \\ \frac{1}{a}, & p = 0, \\ \infty, & p \in (-1, 0). \end{cases}$$

*Dôkaz.* Podľa Liem 8 a 6 je

$$L(m) = \frac{m^{\frac{1-p}{2}}}{\sqrt{2a}} I_p \left( \frac{R(m)}{m} \right) \sim \frac{m^{\frac{1-p}{2}}}{\sqrt{2a}} \cdot 2 \sqrt{\frac{R(m)}{m} - 1}$$

pre  $m \rightarrow \infty$ , pričom

$$\frac{R(m)}{m} - 1 \sim \frac{1}{2am^{p+1}}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Spájaním týchto dvoch vzťahov dostaneme tvrdenie lemy. Je vidieť aj to, že sme naozaj potrebovali prvé dva členy asymptotického rozvoja  $R(m)$  pre  $m \rightarrow \infty$ .  $\square$

Teraz už môžeme vyšetriť zobrazenie dostrely na monotónnosť.

**Lema 11.** *Nech  $p > -1$ ,  $q = 0$ ,  $a > 0$ . Potom*

- (i) ak  $p > 0$ , tak  $L' < 0$  na  $(0, \infty)$ ,
- (ii) ak  $p = 0$ , tak  $L \equiv \frac{1}{a}$  na  $(0, \infty)$ ,
- (iii) ak  $-1 < p < 0$ , tak  $L' > 0$  na  $(0, \infty)$ .

*Dôkaz.*

- (i) Uvažujme najprv  $p > 0$ . Podľa Lemy 5 je

$$L'(m) = -\frac{1}{2m} \left( (p-1)L(m) + \frac{p+1}{aR^p(m)} \right),$$

prípád  $p \geq 1$  je teda jasný. Nech preto  $0 < p < 1$ . Ak má  $L$  nejaký stacionárny bod  $m > 0$ , tak podľa Liem 5 a 8 platí:

$$L''(m) = \frac{p+1}{2am^{2p+1}} pR^{p-1}(m)(R'(m))^3 > 0,$$

čiže ide o bod ostrého lokálneho minima. Preto  $L$  buď nemá stacionárny bod alebo má práve jeden, v ktorom nadobúda svoje globálne minimum. Druhá možnosť je však v rozpore so skutočnosťou, že  $\lim_{m \rightarrow \infty} L(m) = 0$  (Lema 10).

- (ii) Pre  $p = 0$  dáva Lema 3 vzorec  $R(m) = m + \frac{1}{2a}$ , teda

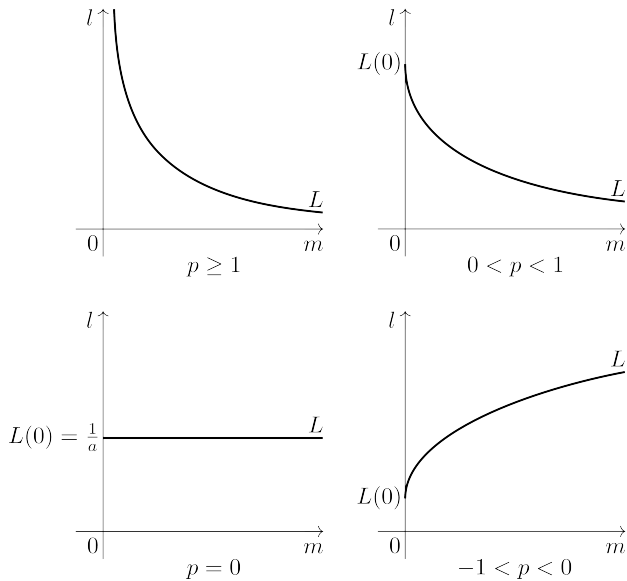
$$\begin{aligned} L(m) &= \sqrt{\frac{m}{2a}} \int_1^{1+\frac{1}{2am}} \frac{dV}{\sqrt{V-1}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2a}} \cdot 2 \frac{1}{\sqrt{2am}} = \frac{1}{a}, \quad m > 0. \end{aligned}$$

- (iii) Nakoniec majme  $p \in (-1, 0)$  a postupujme podobne ako pre  $p \in (0, 1)$ . Funkcia  $L$  teraz nadobúda v každom svojom stacionárnom bode ostré lokálne maximum, na druhej strane však  $\lim_{m \rightarrow \infty} L(m) = \infty$ , zostáva teda len možnosť  $L' > 0$  na  $(0, \infty)$ .  $\square$

Z výsledkov posledných troch liem (ktoré sme zhrnuli na Obrázku 2) dostaneme použitím Lemy 4 nasledujúcu vetu o riešiteľnosti okrajovej úlohy (1).

**Veta 4.** *Nech  $p > -1$ ,  $q = 0$ ,  $a, l > 0$ . Potom  $\mathcal{N}(l) = \emptyset$  a pre kladné symetrické riešenia (d'alej v tejto vete už iba riešenia) úlohy (1) platí:*

- (i) Ak  $p \geq 1$ , tak (1) má práve jedno riešenie pre každé  $l > 0$ , pričom zobrazenie  $l \mapsto \min u = u(0)$  je klesajúca bijekcia  $(0, \infty)$  na  $(0, \infty)$ .



Obr. 2: Vzťah medzi  $m = u(0)$  a  $l$  pre  $u \in \mathcal{S}(l)$ ,  $p > -1$ ,  $q = 0$ ,  $a > 0$  (prípád II) podľa Liem 9, 10 a 11.

- (ii) Ak  $0 < p < 1$ , tak (1) má práve jedno riešenie pre každé  $l \in (0, L(0))$ , pričom zobrazenie  $l \mapsto \min u = u(0)$  je klesajúca bijekcia  $(0, L(0))$  na  $(0, \infty)$ . Pre iné  $l$  úloha (1) nemá riešenie.
- (iii) Ak  $p = 0$ , tak (1) má riešenie jedine pre  $l = \frac{1}{a}$ , konkrétne

$$\mathcal{S}\left(\frac{1}{a}\right) = \left\{ x \mapsto \frac{a}{2}x^2 + m : m > 0 \right\}.$$

- (iv) Ak  $-1 < p < 0$ , tak (1) má práve jedno riešenie pre každé  $l \in (L(0), \infty)$ , pričom zobrazenie  $l \mapsto \min u = u(0)$  je rastúca bijekcia  $(L(0), \infty)$  na  $(0, \infty)$ . Pre iné  $l$  úloha (1) nemá riešenie.

## 7 Prípád V: $p > -1$ , $q > \frac{p+1}{2}$

V prípade V máme podľa Lemy 3 zobrazenia  $L_1 < L_2$  definované na  $(0, M)$  a  $L$  definované na  $\{M\}$ . V tomto odseku opíšeme ich priebeh a všetky tvrdenia uvádzame bez dôkazu. Dôkazy Liem 12, 13, 14 a 15 pre  $p > -1$ ,  $q > \frac{p+1}{2}$  sa ničím nelíšia od dôkazu príslušných tvrdení pre  $p > 1$ ,  $q > \frac{p+1}{2}$ , ktoré nájde čitateľ v [Chipot et al., 1991]. Lemy 13, 14, resp. 16 sa dokazujú rovnakým postupom ako Lemy 10, 11, resp. 9. Dôkaz Lemy 17 pre  $p \in (-1, 1)$  je však mimoriadne zložitý a dlhý a okrem iného sa v ňom používa Lema 7 na získanie druhého členu asymptotického rozvoja  $L_2(m)$  pre  $m \rightarrow 0$  (prvým členom je

$L_2(0)$  z Lemy 16), ktorý má až osem rôznych predpisov v závislosti od hodnôt  $p$  a  $q$ . No ešte ťažšie je dokázať, že hraničný prípad (iii) je určený spojitou krivkou vyjadriteľnou v tvare  $q = q^*(p)$ .

**Lema 12** (pre  $p > 1$  vid' [Chipot et al., 1991, Lema 3.1]). *Nech  $p > -1$ ,  $q > \frac{p+1}{2}$ ,  $a > 0$ . Potom*

$$\lim_{m \rightarrow M} L_i(m) = L(M)$$

pre  $i = 1, 2$ .

**Lema 13** (pre  $p > 1$  vid' [Chipot et al., 1991, Lema 3.3]). *Nech  $p > -1$ ,  $q > \frac{p+1}{2}$ ,  $a > 0$ . Potom*

$$L_1(m) \sim \frac{m^{q-p}}{a}, \quad m \rightarrow 0,$$

teda

$$\lim_{m \rightarrow 0} L_1(m) = \begin{cases} 0, & q > p, \\ \frac{1}{a}, & q = p, \\ \infty, & q < p. \end{cases}$$

**Definícia 4.** *Pre*

$$(p, q) \in \left\{ (p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (p > 1, \frac{p+1}{2} < q < p) \text{ alebo } (-1 < p < -\frac{1}{3}, \frac{p+1}{2} < q < -p) \right\}$$

položme

$$\begin{aligned} \bar{m} &:= \bar{m}_{p,q,a} \\ &:= \left( \frac{(2q-p-1)(p+q)}{2q(q-1)} \right)^{\frac{1}{p+1}} \left( \frac{(p-q)a}{(q-1)q} \right)^{\frac{1}{2q-p-1}}. \end{aligned}$$

**Lema 14** (pre  $p > 1$  vid' [Chipot et al., 1991, Lemy 3.2 a 3.5]). *Nech  $p > -1$ ,  $q > \frac{p+1}{2}$ ,  $a > 0$ . Potom*

(i) ak  $q \geq p$ , tak  $L'_1 > 0$  na  $(0, M)$ ,

(ii) ak  $q < p$ , tak existuje také  $m_0 \in [\bar{m}, M)$ , že

$$L'_1 < 0 \text{ na } (0, m_0), \quad L'_1 > 0 \text{ na } (m_0, M).$$

**Lema 15** (pre  $p > 1$  vid' [Chipot et al., 1991, Lema 3.4]). *Nech  $p > -1$ ,  $q > \frac{p+1}{2}$ ,  $a > 0$ . Potom*

$$\lim_{m \rightarrow M} L'_1(m) = \infty, \quad \lim_{m \rightarrow M} L'_2(m) = -\infty.$$

**Lema 16** (pre  $p > 1$  vid' [Chipot et al., 1991, Lema 3.3]). *Nech  $p > -1$ ,  $q > \frac{p+1}{2}$ ,  $a > 0$ . Potom*

$$\lim_{m \rightarrow 0} L_2(m) = \begin{cases} \infty, & p \geq 1, \\ \frac{2}{1-p} \left( \frac{p+1}{2a} \right)^{\frac{q-1}{2q-p-1}}, & p \in (-1, 1). \end{cases} =: L_{2;p,q,a}(0) =: L_2(0),$$

**Lema 17.** *Nech  $p > -1$ ,  $q > \frac{p+1}{2}$ ,  $a > 0$ . Potom existuje taká spojitá funkcia  $q^* : (-1, -\frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ , že  $\frac{p+1}{2} < q^*(p) < -p$  pre  $p \in (-1, -\frac{1}{2})$ ,*

$$\lim_{p \rightarrow -1} q^*(p) \in (0, 1), \quad \lim_{p \rightarrow -1/2} q^*(p) = \frac{1}{2}$$

a platí:

- (i) *Ak  $p \geq 0$  alebo  $-\frac{1}{2} \leq p < -\frac{1}{3}$  a  $q \leq -p$  alebo  $p < -\frac{1}{2}$  a  $q < q^*(p)$ , tak*

$$L'_2 < 0 \text{ na } (0, M).$$

- (ii) *Ak  $-\frac{1}{2} \leq p < 0$  a  $q > -p$  alebo  $p < -\frac{1}{2}$  a  $q \geq -p$ , tak  $L_2$  má jeden stacionárny bod  $m_2 \in (0, M)$ , pričom*

$$L'_2 > 0 \text{ na } (0, m_2), \quad L'_2 < 0 \text{ na } (m_2, M).$$

- (iii) *Ak  $p < -\frac{1}{2}$  a  $q = q^*(p)$ , tak  $\bar{m}$  je stacionárnym bodom  $L_2$ , pričom*

$$L'_2 < 0 \text{ na } (0, \bar{m}), \quad L'_2 < 0 \text{ na } (\bar{m}, M).$$

- (iv) *Ak  $p < -\frac{1}{2}$  a  $q^*(p) < q < -p$ , tak  $L_2$  má dva stacionárne body  $m_1, m_2$ , pričom  $m_1 < \bar{m} < m_2$ ,*

$$L'_2 < 0 \text{ na } (0, m_1), \quad L'_2 > 0 \text{ na } (m_1, m_2), \\ L'_2 < 0 \text{ na } (m_2, M).$$

Podľa numerických výpočtov je  $q^*$  pravdepodobne klesajúce, konkávne a  $\lim_{p \rightarrow -1} q^*(p) \approx 0,728$ .

Výsledky Liem tohto odseku stačia na určenie počtu symetrických riešení úlohy (1) v prípade V v závislosti od  $p, q, a, l$  (viď Lemu 4) s výnimkou možnosti  $-1 < p < -\frac{1}{2}$ ,  $q^*(p) < q < -p$ , treba totiž ešte zistiť, pre aké  $p, q$  je  $L_2(0) > L_2(m_2)$ . Vzhľadom na tvrdenia (ii) a (iii) Lemy 17 je možné očakávať, že táto oblasť je rozdelená spojitou krivkou na tri množiny, pričom pre  $(p, q)$  ležiace na krivke je  $L_2(0) = L_2(m_2)$ , nad ňou je  $L_2(0) < L_2(m_2)$  a pod ňou  $L_2(0) > L_2(m_2)$ . Táto otázka bude predmetom ďalšieho výskumu.

Pripájame ešte Obrázok 3 s bifurkačnými diagramami, na základe ktorých si môže čitateľ sformulovať vetu analogickú k Vete 4.

Otázka monotónnosti  $L_1 + L_2$  (čo súvisí s nesymetrickými riešeniami) zatiaľ nie je úplne zodpovedaná.

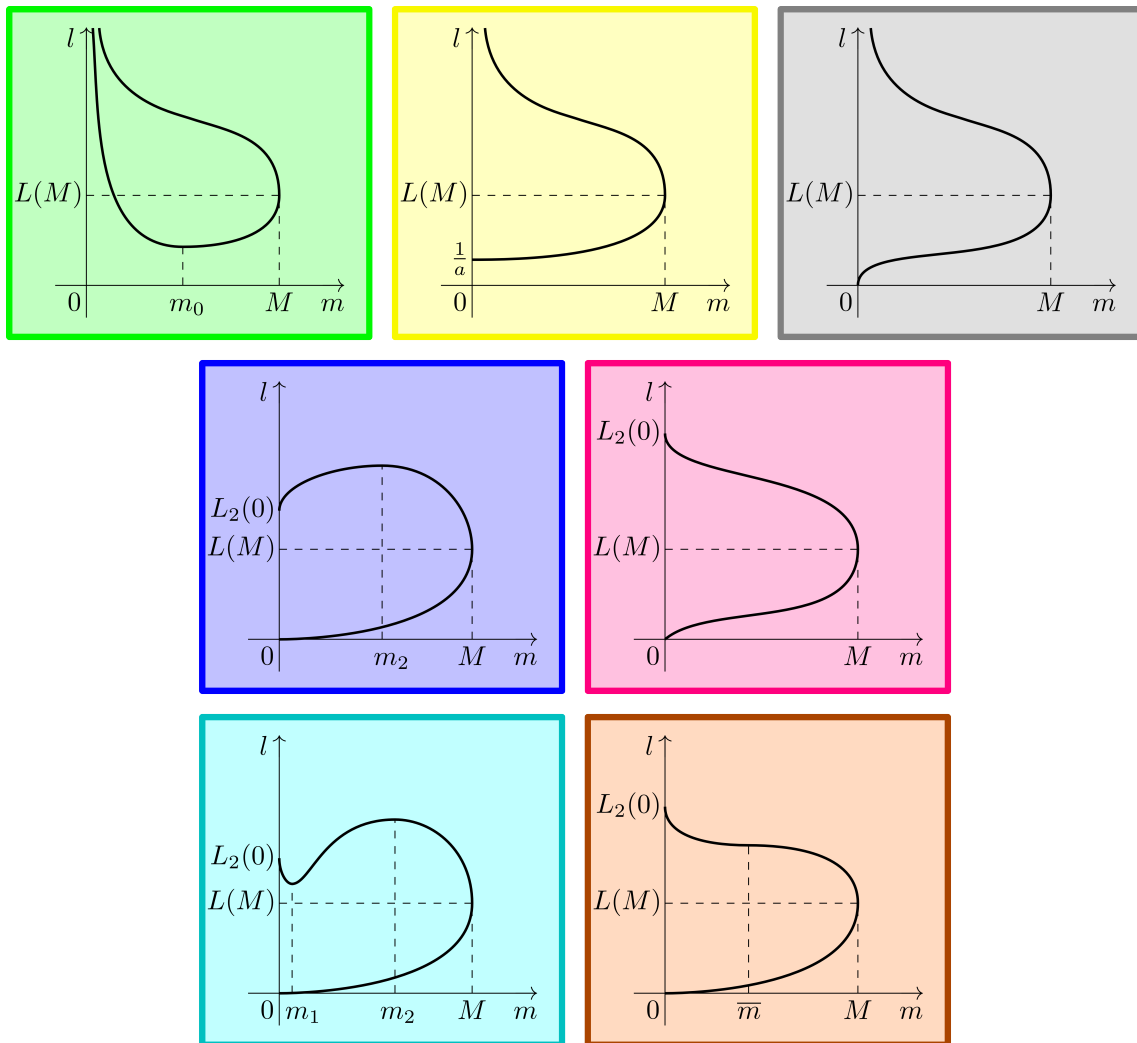
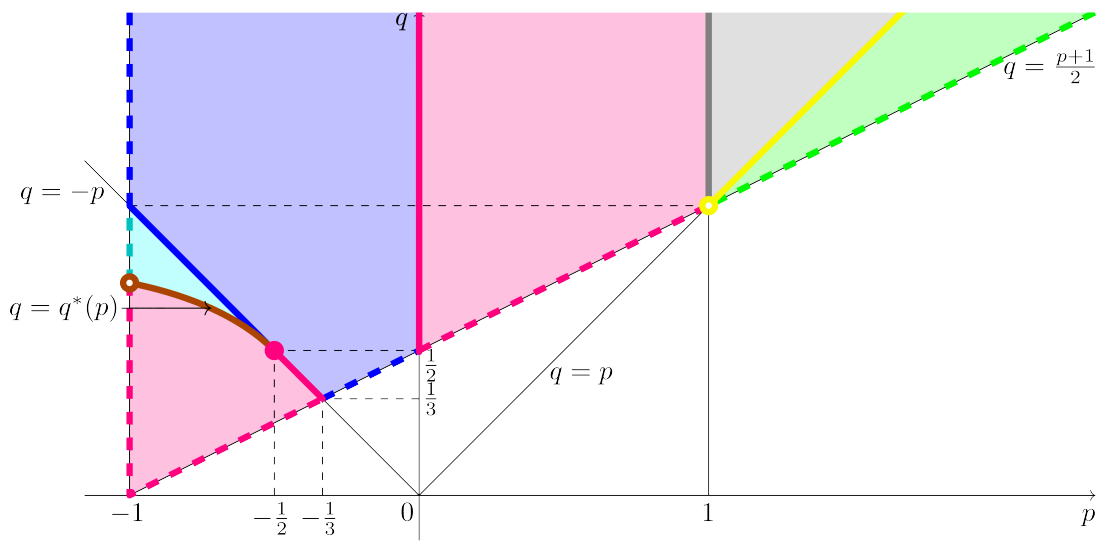
## Pod'akovanie

Som veľmi vd'ачný môjmu školiteľovi, prof. RNDr. Marekovi Filovi, DrSc. za to, že našiel pre mňa túto tému a ďakujem mu aj za jeho ochotu a pomoc poskytnutú pri písaní tejto práce.

Tento výskum bol podporený Agentúrou pre vedu a výskum v rámci projektu APVV-0414-07.

## Literatúra

- [Chipot et al., 1991] Chipot, M., Fila, M., and Quittner, P. (1991). Stationary solutions, blow up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 60:471–476.
- [Chipot and Quittner, 2004] Chipot, M. and Quittner, P. (2004). Equilibria, connecting orbits and a priori bounds for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 16:91–138.
- [Leung and Zhang, 1998] Leung, A. W. and Zhang, Q. (1998). Reaction diffusion equations with non-linear boundary conditions, blowup and steady states. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 17:1593–1617.
- [Peres, 2009] Peres, S. (2009). Riešiteľnosť Dirichletovej okrajovej úlohy pre nelineárne obyčajné diferenciálne rovnice druhého rádu. Master's thesis, Univerzita Komenského v Bratislave.
- [Quittner, 1993] Quittner, P. (1993). On global existence and stationary solutions for two classes of semilinear parabolic problems. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 34:105–124.
- [Rodríguez-Bernal and Tajdine, 2001] Rodríguez-Bernal, A. and Tajdine, A. (2001). Nonlinear balance for reaction-diffusion equations under nonlinear boundary conditions: dissipativity and blow-up. *Journal of Differential Equations*, 169:332–372.
- [Rossi, 2005] Rossi, J. D. (2005). *Chipot, M. and Quittner, P. (eds.). Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations*, chapter 5: Elliptic problems with nonlinear boundary conditions and the Sobolev trace theorem, pages 311–406. Elsevier, Amsterdam.



Obr. 3: Vzťah medzi  $m = u(0)$  a  $l$  pre  $u \in \mathcal{S}(l)$ ,  $p > -1$ ,  $q > \frac{p+1}{2}$ ,  $a > 0$  (prípád V) podľa Liem 12, 13, 14, 15, 16 a 17.

# Optimalita akciových indexov 2011

Igor Vilček<sup>1\*</sup>

Školiteľ: Katarína Bod'ová<sup>1†</sup>

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Aim of this paper is to recognize investment opportunities in stock indices. It focuses on two problems. The first is the implementation and the use of a modified Markowitz model in personal financial asset management. The model is revised and modified to fit into current behavior of stock markets. All models, analysis and back-tests throughout the work are presented in context with European's most traditional stock index EuroStoxx 50. The second goal of this work is to construct a sub-portfolio of stocks included in EuroStoxx 50, which most credibly tracks the original index. This is achieved by cluster analysis, more specifically, the method known as partitioning around medoids.

**Kľúčové slová:** stock indices, EuroStoxx 50, portfolio optimization, asset management, Markowitz risk-free asset model, cluster analysis, partitioning around medoids, index tracking.

## 1 Úvod

Dnešný finančný svet ponúka nespočetné množstvo investičných možností. V nich je pre bežného človeka, ako aj pre profesionálneho investora, ktorého primárnym záujmom je zhodnotiť svoju investíciu lepšie ako nízko úročeným bankovým vkladom, čoraz náročnejšie sa zorientovať. Na trhu rastie množstvo uvádzaných derivátov, avšak mnohé majú spoločné črty - sú naviazané na akcie, resp. na akciové indexy.

Vo všeobecnosti ale indexy nedosahujú takú vysokú návratnosť, ako niektoré vhodne vybrané podportfóliá akcií indexu, a to aj pri porovnateľnom riziku (volatilitate), akou sa vyznačuje samotný index. Objektom môjho skúmania je hlavný európsky akciový index - EuroStoxx 50. Zameriavam sa na hľadanie investičných príležitostí v zložkách tohto indexu, teda spôsob, ako môže investor čo najviac zhodnotiť

svoju investíciu nie priamo kúpou aktíva založeného na celom indexe, ale investovaním do jeho vhodne navážených jednotlivých zložiek.

Investičné príležitosti nachádzam riešením dvoch fundamentálnych problémov:

- Hľadanie portfólia zloženého z tých istých akcií, ktoré sú obsiahnuté v akciovom indexe EuroStoxx 50, ale s lepším investičným potenciálom.
- Replikácia indexu s využitím redukovaného počtu akcií.

V prvom probléme skúmam Markowitzovu teóriu portfólia [Markowitz, 1952]. Jedným z cieľov je poukázať na slabiny a nedostatky analyzovaného Markowitzovho modelu portfólia (prípady, v ktorých model nemožno využiť) a navrhnúť jeho možné modifikácie. Ďalej ukazujem, že takto modifikovaný model dokáže často prekonať zhodnotenie indexu.

V druhom probléme vyšetrujem zredukovanie množiny akcií obsiahnutých v EuroStoxx 50 na čo najreprezentatívnejšiu skupinu - podportfólio, čím sa dosiahne redukcia transakčných nákladov. Snažím sa rozpoznať štruktúru indexu a na základe tejto analýzy následne konštruujem reprezentatívne podportfólio. Pomocou „datamining“ techniky - clustrovej analýzy [Kaufman and Rousseeuw, 1990] zistujem, aký počet akcií je potrebné vybrať, aby z nich zložené portfólio čo najpresnejšie replikovalo vývoj celého indexu.

Zvolené investičné stratégie, ako aj nájdené podportfóliá, testujem na historických dátach a spätne analyzujem.

## 2 Akciové indexy

Akciové indexy sú umelo vytvorené portfóliá zložené z konkrétnych akciových titulov. Sú konštruované za účelom vytvorenia akýchsi ukazovateľov - indikátorov pohybov daného trhu, ku ktorému možno kompozičné akcie priradiť. Jednotlivé akcie majú v indexoch svoje vopred určené (kladné) váhy a samotný index teda odráža ich súhrnný vývoj.

\*igor99@chello.sk

†katarina.bodova@fmph.uniba.sk

## 2.1 Váženie indexov

Rozlišujeme 3 základné druhy indexov podľa metódy váženía jednotlivých komponentov:

- Vážené na základe trhovej kapitalizácie spoločností.
- Vážené na základe trhovej ceny akcií.
- Vážené na základe fundamentálnych faktorov.

Pričom trhovía kapitalizácia v danom čase  $t$  je definovaná ako:

$$MC_t = P_t \cdot n_t, \quad (1)$$

$P_t$  - cena akcie,

$n_t$  - počet akcií danej spoločnosti.

Následne ak označíme  $ff$  percento z celkového počtu akcií, ktoré nie sú v držbe strategických investorov, vol'ná trhovía kapitalizácia je definovaná:

$$FFMC_t = MC_t \cdot ff_t. \quad (2)$$

## 2.2 Dáta

V práci som ako podkladové historické dáta, rovnako ako aj dáta na testovanie stratégií, použil reálne burzové dáta.<sup>1</sup> Pre odlišnosť v počte obchodných dní boli niektoré obchodné dni z dát vynechané. V práci som tiež využíval dva typy dát - denné a týždenné (resp. 5-denné) zatváracie ceny akcií.

Ako bezrizikový výnos som zvolil výnos do splatnosti ( $YTM$ ) nemeckého bezkupónového štátneho dlhopisu, s maturitou korešpondujúcou s dĺžkou konkrétneho investičného horizontu.<sup>2</sup>

Pre nedostupnosť verejne prístupných dát som bol z práce nútený vynechať niektoré spoločnosti. V modeloch pre roky 2009-2010 teda uvažujem index zložený z 49 akcií, pre obdobie 2006-2010 predpokladám 45 akciových titulov a pre 2003-2007 42 akcií. Tiež som sa obmedzil len na tituly z aktuálneho (k decembru 2010) zloženia EuroStoxx 50.<sup>3</sup>

Reálny index je totiž dlhodobo ročne, s početnými výnimkami aj počas roka, revidovaný a prevažovaný. Jedná sa ale o verejne nedostupné údaje. V práci budem v sekcii zaoberajúcej sa hľadáním reprezentatívneho podportfólia teda skutočné naváženie a rozloženie komponentov len odhadovať a snažiť sa čo najviac priblížiť reálnemu.

<sup>1</sup><http://www.uk.finance.yahoo.com>

<sup>2</sup><http://www.bloomberg.com>

<sup>3</sup><http://www.stoxx.com>

## 3 Markowitzov model s bezrizikovým aktívom

Markowitzov model ([Markowitz, 1952], [Merton, 1970]) slúži na nájdenie optimálnej množiny akcií, resp. optimálnych váh pre jednotlivé akcie v investorovom portfóliu. K základnému nástroju, ktorý model využíva patrí *mean-variance* analýza, t.j. teória maximalizácie výnosu a minimalizácie rizika. Zameriava sa na maximalizáciu pomeru výnos/riziko.

Základný model bez bezrizikového aktíva umožňuje pomocou kvadratickej konvexnej optimalizácie vypočítať tzv. efektívnu hranicu - množinu efektívnych investičných stratégií. Investor si už len zvolí výšku očakávaného výnosu a k nemu sa podľa efektívnej hranice priradia optimálne váhy komponentov v portfóliu. Tento spôsob dokáže na základe historických dát minimalizovať riziko pri zadanom požadovanom výnose, avšak nezohľadňuje maximalizáciu pomeru výnos/riziko.

Rozšírený Markowitzov model s bezrizikovým aktívom však už práve spomínanú úlohu rieši. Investor v ňom alokuje svoje prostriedky do bezrizikového aktíva a do akciovej zložky. Akciová zložka sa volí ako bod z efektívnej hranice (t.j. určitá kombinácia jednotlivých akcií portfólia), ktorý v kombinácii s bezrizikovou investíciou poskytuje najvyšší pomer výnosu (očisteného o výnos bezrizikového aktíva) k riziku (volatilita). Bod sa nájde pomocou skonstruovania dotyčnice k efektívnej hranici z bodu výnosu bezrizikového aktíva.

### Predpoklady:

- existencia bezrizikového aktíva s fixným výnosom a množiny rizikových aktív,
- výnosy aktív sú lineárne nezávislé,
- existujú aspoň 2 aktíva, pre ktoré sú očakávané výnosy rôzne veľké,
- je možné kúpiť/požičať si ľubovoľné množstvo bezrizikového aj rizikových aktív,
- predaje na krátko (short sales) sú povolené,
- investor sleduje iba výnos a volatilitu investície
- investor svoju výplatu definuje ako súčet denných výnosov investície.



### 3.1 Jadro modelu

Ak definujeme  $P_t^i$  cenu akcie spoločnosti  $i$  v čase  $t$ , tak očakávané výnosy v modeli sú určené na základe bodových odhadov momentov<sup>4</sup> získaných z historických dát.

Historická návratnosť je výberová štatistika definovaná vzťahmi:

$$\bar{r}^i = \frac{\sum_{t=1}^n r_t^i}{n}, \quad \text{kde} \quad r_t^i = \frac{P_t^i - P_{t-1}^i}{P_{t-1}^i}, \quad (3)$$

pričom  $i$ , je  $i$ -ty cenný papier a  $t$  je daná časová jednotka.

Na základe nich odhady pre volatilitu a kovarianciu z historických dát – historická volatilita, resp. výberová smerodajná odchýlka výnosov ( $\hat{\sigma}_i$ ), výberová kovariancia výnosov aktív ( $\hat{\sigma}_{ij}$ ) a Pearsonov výberový korelačný koeficient ( $\hat{\rho}_{ij}$ ) sú definované ako:

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (r_t^i - \bar{r}^i)^2}{n-1}}, \quad (4)$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^n (r_t^i - \bar{r}^i)(r_t^j - \bar{r}^j)}{n-1}, \quad (5)$$

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^n (r_t^i - \bar{r}^i)(r_t^j - \bar{r}^j)}{\sqrt{\sum_{t=1}^n (r_t^i - \bar{r}^i)^2} \sqrt{\sum_{t=1}^n (r_t^j - \bar{r}^j)^2}}. \quad (6)$$

Z toho výberová variančno–kovariančná matica  $\Sigma$ , resp. výberová korelačná matica  $\rho$ :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11} & \dots & \hat{\sigma}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_{n1} & \dots & \hat{\sigma}_{nn} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\sigma}_{11}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{11}}\sqrt{\hat{\sigma}_{11}}} & \dots & \frac{\hat{\sigma}_{1n}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{11}}\sqrt{\hat{\sigma}_{nn}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\hat{\sigma}_{n1}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{nn}}\sqrt{\hat{\sigma}_{11}}} & \dots & \frac{\hat{\sigma}_{nn}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{nn}}\sqrt{\hat{\sigma}_{nn}}} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Nech  $\sigma_p^2$  predstavuje disperziu portfólia,  $\sigma_{ij}$  výberovú kovarianciu aktív,  $w_i$  váhu  $i$ -tej zložky,  $\bar{r}^i$  očakávaný výnos  $i$ -teho aktíva a  $r_E$  investorov očakávaný výnos portfólia.

Rovnica efektívnej hranice je následne odvodená na základe úlohy kvadratickej konvexnej optimalizácie

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} \sigma_p^2 &= \min_w \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}, \\ \sum_{i=1}^n \bar{r}^i &= r_E, \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Riešením tohto problému je hyperbola daná vzťahom:<sup>5</sup>

$$\sigma = \sqrt{ar^2 + br + c}, \quad (10)$$

kde  $a, b, c$  sú jednoznačne určené očakávanými výnosmi akcií a prvkami inverznej variančno–kovariančnej matice (detaily v [Merton, 1970]).

Pričom pod efektívnou sa myslí „vrchná“ časť hyperboly (nad jej vrcholom, ilustrácia na Obr. 1)

### 3.2 Existencia dotýčnice k efektívnej hranici a prípad zlyhania

Markowitzov model s bezrizikovým aktívom umožňuje riešiť problém voľby optimálneho portfólia len ak dotýčnica existuje. Neošetruje prípad, v ktorom (napr. kvôli nedostatočnej výkonnosti jednotlivých aktív) nemožno dotýčnicu k efektívnej hranici skonstruovať.

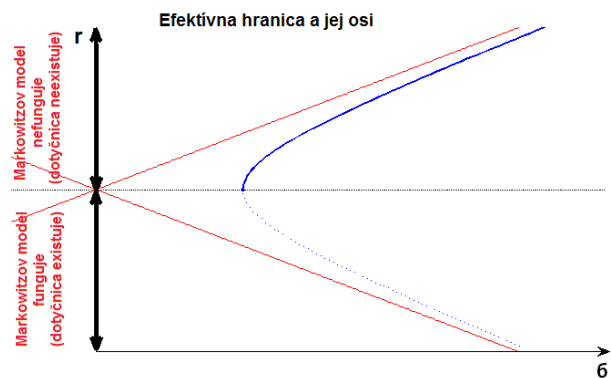
Predpokladajme, že sa pohybujeme v rovine  $(\sigma, r)$ , kde  $\sigma$  korešponduje s horizontálnou osou a  $r$  s vertikálnou. Označme  $r_V$  vrchol hyperboly (10) a  $r_f$  výnos bezrizikového aktíva.

Rozlišujeme 2 základné situácie:

1. **Existencia** dotýčnice z bodu bezrizikového aktíva  $(0, r_f)$  k efektívnej hranici danej (10). Nastáva, ak  $r_V > r_f$ , resp.  $\frac{-b}{2a} > r_f$  (Obr. 1 pre  $r_f$  v dolnej polrovine). Keďže vrchol hyperboly (10) je identický s bodom minima kvadratickej funkcie  $ar^2 + br + c$ , tak hodnota  $r_V$  je rovná  $r_V = \frac{-b}{2a}$ .
2. **Neexistencia** dotýčnice z bodu bezrizikového aktíva  $(0, r_f)$  k efektívnej hranici - ak  $\frac{-b}{2a} \leq r_f$  (Obr. 1 pre  $r_f$  v hornej polrovine). Pre tento prípad je nutné Markowitzov model s bezrizikovým aktívom špeciálne ošetriť.

<sup>4</sup>Odhadmi parametrov pre vstupy do modelu v mojej práci sú aritmetický priemer pre výnosnosť a výberová disperzia (resp. smerodajná odchýlka) pre volatilitu. Pre iné odhady výnosov, disperzie a korelácie pozri napr. v [Elton et al., 2010].

<sup>5</sup>Podrobné odvodenie rovnice efektívnej hranice možno nájsť v [Merton, 1970]



Obr. 1: Schematické vyobrazenie existencie dotyčnice k efektívnej hranici

V prípade existencie teda poznáme aj konkrétny tvar rovnice dotyčnice:

$$r = k\sigma + r_f,$$

kde  $k$  je koeficient získaný z riešenia sústavy 3 rovníc o 3 neznámych  $(r_D, \sigma_D, k)$ :

$$\begin{aligned} r_D &= \sqrt{\frac{\sigma_D^2 - c}{a} + \frac{-b^2}{4a^2}} - \frac{b}{2a}, \\ k &= \frac{\partial(\sqrt{\frac{\sigma_D^2 - c}{a} + \frac{-b^2}{4a^2}} - \frac{b}{2a})}{\partial \sigma_D}, \\ r_D &= k\sigma_D + r_f. \end{aligned} \quad (11)$$

### 3.3 Aplikácia modelu

V tejto časti volím investičnú stratégiu v závislosti od rôznych trhových situácií. Pri praktickej aplikácii modelu som nútený vykonať niekoľko pozmeňujúcich úprav. Ako už bolo spomenuté, v reálnom svete nemusí byť najvyšší pomer  $\frac{r-r_f}{\sigma}$  (teda náš dotyčnicový dotykový bod) vždy explicitne vypočítateľný. Dôvodom je už spomínaná neexistencia dotyčnice k efektívnej hranici. Pre tento prípad je nutné nájsť alternatívny spôsob voľby akciovej zložky. V práci preto zavádzam koncept stropu pre volatilitu, na základe ktorého sa volí optimálny bod, ak dotykový bod neexistuje.

V modifikovanom modeli môžu nastať 2 situácie:

- je možné zostrojiť dotyčnicu k efektívnej hranici na základe historických trhových dát (scenár 1),

- nie je možné zostrojiť dotyčnicu k efektívnej hranici na základe historických trhových dát (scenár 2).

#### Scenár 1

V tomto prípade volíme akciovú zložku portfólia podľa (11), ako portfólio  $(r_D, \sigma_D)$  zodpovedajúce nájdenému dotykovému bodu k efektívnej hranici. Investor teda podľa ním stanovenej výšky požadovaného výnosu alokuje svoje prostriedky v rámci akciovej zložky portfólia do akcií s váhami prislúchajúcimi dotykovému bodu.

#### Scenár 2

Ak nemožno zostrojiť dotyčnicu, nevieme nájsť bod s najvyšším pomerom  $\frac{r-r_f}{\sigma}$ . Je teda rýdzo na voľbe investora, resp. zostavovateľa a modelu, akú stratégiu zvolí. Uvedená situácia sa zvykne modelovať napr. použitím funkcie užitočnosti. Avšak istým variantom práve pre funkciu užitočnosti je mnou použitý princíp maximálnej volatility (zvolenej investorom). V práci som daný prípad ošetril nasledovne:

- stanoví sa hranica maximálnej možnej volatility dotykového bodu, tzv. *volatility cap*,  $\sigma_{VC}$ ,
- hodnota výnosu a volatilita prislúchajúca volatility cap sa použije v modeli ako akciová zložka namiesto neexistujúceho dotykového bodu.

Súradnice optimálneho bodu (pre  $a, b$  zo vzťahu (10) a  $r_f$  definované v odseku 3.2):

$$r^* = \begin{cases} r_D, \text{ t.j. rieš. (11),} & \text{ak } \frac{-b}{2a} > r_f, \\ \sqrt{\frac{\sigma_{VC}^2 - c}{a} + \frac{-b^2}{4a^2}} - \frac{b}{2a}, & \text{ak } \frac{-b}{2a} \leq r_f, \end{cases} \quad (12)$$

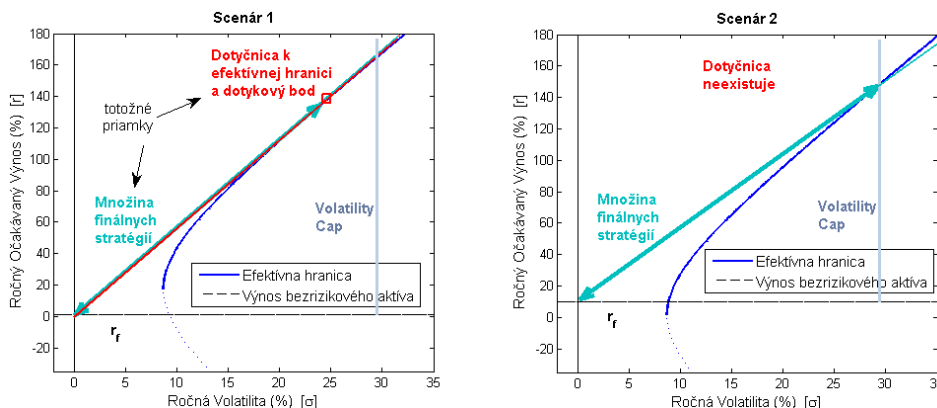
$$\sigma^* = \begin{cases} \sigma_D, \text{ t.j. rieš. (11),} & \text{ak } \frac{-b}{2a} > r_f, \\ \sigma_{VC}, & \text{ak } \frac{-b}{2a} \leq r_f. \end{cases} \quad (13)$$

#### 3.3.1 Výpočet váh pre akcie v optimálnom bode na efektívnej hranici

Ak definujeme  $w_k$  váhu  $k$ -teho aktíva v rámci efektívneho portfólia, ďalej označíme  $\alpha = r^*$  (t.j. očakávaný výnos akciovej zložky portfólia vypočítaný zo vzťahu (12)),  $\alpha_j = \bar{r}^j$  z (3) a  $v_{kj}$  príslušný prvok inverznej matice ku kovariančnej matici z (7), tak v modeli vypočítame váhu aktíva  $w_k$  (v zvolenom optimálnom bode (13),(12)) zo vzťahu:

$$w_k = \frac{\alpha \sum_{j=1}^m v_{kj}(C\alpha_j - A) + \sum_{j=1}^m v_{kj}(B - A\alpha_j)}{D}, \quad (14)$$

kde  $A, B, C, D$  sú opäť jednoznačne determinované hodnotami  $v_{kj}$  a  $\alpha_j$  (podrobné odvodenie v [Merton, 1970]).



Obr. 2: Schéma modifikovaného modelu

### 3.3.2 Obmedzenie rizika

V praxi je nevyhnutné obmedziť riziko, ktorému bude investor vystavený. Váhy vypočítané z (14) totiž nie sú ničím ohraničené. Tým je investor v prípade trhových výkyvov vystavený obrovskému riziku. Rizikový prípad nastáva najmä ak sa dotykový bod nachádza na veľmi vysokých úrovniach volatility (príklad pre konkrétne hodnoty váh na Obr. 3).

Obmedzenie váh pre akciové komponenty realizujem pomocou kvadratickeho programovania, a to nasledovným algoritmom.

Riešenie pre optimálny vektor váh  $w$  (akciovej zložky), ktorého prvkami sú  $w_k$  (ak existuje):<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \min f(\hat{\sigma}) &= \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \hat{\sigma}_{ij}, \\ \sum_{i=1}^n \bar{r}^i &= r^*, \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1, \\ w_L &\leq w_i \leq w_U, \end{aligned} \tag{15}$$

- $\hat{\sigma}_{ij}$  - výberová kovariancia aktív z (7),
- $\bar{r}^i$  - očakávaný výnos  $i$ -teho aktíva z (3),
- $r^*$  - z (12) nájdený bod optim. výnosu,
- $w_L, w_U$  - dolné a horné váhové ohraňenie.

Takto sa síce zvýši volatility investície oproti nájdenému optimálnemu bodu z efektívnej hranice, resp. oproti volatility cap (záleží od (13)) - avšak získame požadované váhové ohraňenie. Navyše, ako

<sup>6</sup>V prípade, že je uvedená optimalizačná úloha neprípustná, v práci volím váhy bez ohraňením.

ukazujú konkrétne experimenty s dátami, po zavedení ohraňení typicky dochádza iba k nebadateľnej zmene vo veľkosti  $\sigma^*$ .

Ukážka časti matice váh pre akcie vo vzdialenom dotykovom bode

	1. váženie	2. váženie	3. váženie	...
Akcia č. 1	-0.65397	-47.32796	-15.49219	...
Akcia č. 2	0.34370	38.18170	2.18355	...
Akcia č. 3	0.73640	25.50747	3.76955	...
Akcia č. 4	0.88526	56.21521	13.83507	...
Akcia č. 5	0.21584	10.66930	6.85202	...
Akcia č. 6	0.15251	21.74807	4.52214	...
Akcia č. 7	0.40768	0.83833	1.16928	...
Akcia č. 8	-0.13715	-6.06188	2.11019	...
Akcia č. 9	-0.07486	-12.43418	0.81413	...
...	...	...	...	...

Obr. 3: Váhy akcií pre stratégiu 11 rebalancovaní v rokoch 2009-2010

V konečnom dôsledku sa teda historická volatility investície, a aj to iba pre prípady extrémne vysokého výnosu, o málo zhorší, avšak investor bude lepšie chránený pred prípadnými budúcimi výraznými fluktuáciami hodnoty investície (znázornenými napr. na Obr. 3) a ušetrí na transakčných nákladoch.

### 3.3.3 Konečné rozloženie investície

Nech  $x$  je váha v bezrizikovom aktíve,  $r_f$  nech predstavuje jeho výnos,  $r_p$  investorom požadovaný výnos a  $r^*$  optimálny výnos z (15), potom

$$x \cdot r_f + (1 - x) \cdot r^* = r_p. \tag{16}$$

Váha v bezrizikovom aktíve:

$$x = \frac{r_P - r_f}{r_f - r^*}, \quad (17)$$

a váha v rizikovom aktíve predstavuje  $(1 - x)$ .

### 3.3.4 Nerovnosť medzi skutočným výnosom a výnosom vstupujúcim do modelu

Uvažujme hypotetický, zjednodušený príklad. Investujeme jednorázovo 100€ na dobu 4 dní do akcie A. Tabuľka 1 popisuje vývoj investície z pohľadu investora a tiež zhodnotenie, ako ho vníma model.

Deň	$P_A$	NAV	$r_D$	$r_S$
0	10	100	0%	0%
1	12	120	+20%	+20%
2	11	110	-8.33%	+10%
3	13	130	+18.18%	+30%
4	11	110.7	-14.85%	+10.7%
Spolu	10.7	110.7	+15%	+10.7%

Tabuľka 1: Príklad skutočného výnosu

$P_A$  - cena akcie A,  
 $NAV$  - hodnota investície,  
 $r_D$  - denný výnos,  
 $r_S$  - skutočný, naakumulovaný výnos.

Očakávaný denný výnos akcie sa v tomto príklade rovná  $\bar{r} = \frac{\sum_{t=1}^4 r_t}{4} = \frac{15}{4}\% = 3.75\%$ . Naproti tomu sa ale v skutočnosti akcia zhodnotila počas 4 dní len o 10.7%. Ak by si teda investor stanovil požadovaný 4-denný výnos investície na úrovni 15%, výstupom z modelu by bola alokácia všetkých prostriedkov do akcie A a žiadnych prostriedkov do dlhopisu. Súčet denných výnosov by dosiahol požadovanú hodnotu 15%, tá sa ale líši od skutočného zhodnotenia investície.

Očakávané výnosy akcií vstupujúce do (9) sú v (3) počítané na základe denných výnosov. Požadovaný výnos vstupujúci do modelu preto treba brať iba informatívne. Jeho výšku je možné prispôbiť skutočnému výnosu na základe mnohonásobných historických testov (kalibrácie).

## 3.4 Rebalancovanie investície

V práci uvažujem a skúmam aj vplyv rôzneho rebalancovania, t.j. prevažovania, investičného portfólia

na výnos a volatilitu investície na sledovanom investičnom horizonte.

Algoritmus rebalancovania prebieha nasledovne:

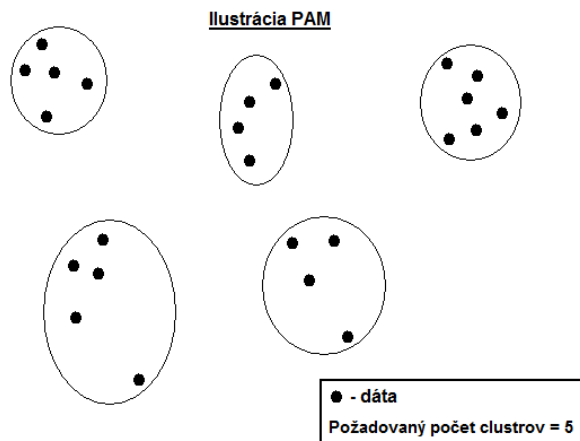
- Na začiatku sa stanoví celkový počet rebalancovaní (z ktorého je následne odvodená rebalančná perióda) v rámci investičného horizontu; pričom minimálny počet je 1, t.j. váženie iba na začiatku, tesne pred vstupeňím do investičného horizontu (prípád korešpondujúci so situáciou bez rebalancovania).
- V každom bode (časovom okamihu) prevažovania prebieha celý proces tvorby efektívnej hranice a rozloženia investície medzi jednotlivé akcie EuroStoxxu a bezrizikový cenný papier, popísaný v sekcii 3.3
- Historickými dátami vstupujúcimi do Markowitzovho modelu pri každom rebalancovaní sú vždy najaktuálnejšie dostupné dáta, teda historické dátové okno sa vždy posúva až po posledný známy deň pred novým rebalancovaním.

## 4 Clustrová analýza

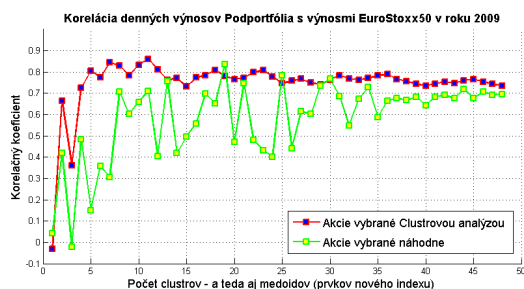
Základným účelom clustrovej (zhlukovej) analýzy je roztriedenie veľkého množstva dát do skupín na základe spoločných črt, a tým zníženie dimenzie úlohy. V práci s mojimi dátami využívam tzv. deliacu metódu PAM - *Partitioning Around Medoids* (odvodili Kauffman a Rousseeuw, [Kauffman and Rousseeuw, 1990]). V kontexte s mojím problémom totiž potrebujem zhlukovú analýzu použiť nielen na zadelenie dát (akcií) do menších skupín, ale aj na nájdenie reprezentantov výsledných skupín.

Metóda Clustrovej analýzy PAM umožňuje získať hľadané podskupiny akcií vrátane reprezentatívnych titulov. Roztriedi dáta do vopred určeného počtu clustrov tak, aby si prvky v rámci clustra boli čo najpodobnejšie a naopak, aby clustre navzájom boli čo najodlišnejšie. A najmä, každému clustru priradí vedúci prvok, tzv. centroid, resp. medoid.

Konečný počet clustrov ale nie je vopred známy (a je práve jedným z objektov môjho skúmania). Preto volím ako vstupy do PAM rôzne počty clustrov a aplikujem analýzu senzitivity novovytvoreného podportfólia (vid' Obr. 5, metodika voľby vid' ďalej v texte). Obr. 5 ukazuje, že clustrová analýza dokáže už pri počte 5 akcií vytvoriť vysoko korelujúce (a teda vie-



Obr. 4: Ilustrácia fungovania PAM pre vstupný počet 5 skupín (clustrov)



Obr. 5: Korelácia EuroStoxx 50 s navoleným podportfóliom pre rôzne počty clustrov

rohodné) podportfólio. Je zaujímavé, že korelačný koeficient nekonverguje k 1 pri veľkom počte clustrov, nakoľko využívam zjednodušujúce predpoklady (vynechané spoločnosti, váhy odlišné oproti reálnym). Konvergencia korelačného koeficientu tiež nemusí byť monotónna. Clustrová analýza totiž nemusí nutne vybrať akcie, ktoré budú v spojení viac korelovať s reálnym indexom. Ako medoidy vyberá „najcentrálnejšie“ umiestnené prvky v rámci clustrov, môže sa teda stať, že niekedy je aj menší počet clustrov vhodnejší a zvýšenie tohto počtu výsledok napopak zdeformuje.

#### 4.1 Metodika konštrukcie podportfólia

Výsledné medoidy z clustrovej analýzy je v rámci konštruovaného podportfólia možné navážiť ekvivalentne, na základe trhovej kapitalizácie alebo s využitím optimalizácie.

Ak označíme  $w_{eq}$  váhy v ekvivalentne váženom

portfóliu,  $w_{FFMC}$  váhy v portfóliu na základe trhovej kapitalizácie, a  $w_{LS}$  váhy získané optimalizáciou,  $k$  počet clustrov,  $m$  počet akcií a  $FFMC_i$  kapitalizáciu (buď  $i$ -tého medoidu alebo celého clustra spadajúceho pod medoid), tak výsledné váženie pre  $i$ -ty prvok portfólia možno zapísať ako

$$w_{eq}^i = \frac{1}{k},$$

$$w_{FFMC}^i = \frac{FFMC^i}{\sum_{i=1}^m FFMC^i},$$

$$w_{LS} = \arg \min_{w \in W} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sum_{t=1}^n (R_t^T \cdot w - I_t)^2} \right\},$$

$$W = \{w \in R^n \mid \sum_{i=1}^m w_i = 1 \wedge 0 \leq w_i \leq u\},$$

kde:

- $u$  - horné ohraničenie pre váhy (v záujme zachovania diverzifikácie),
- $I_{n \times 1}$  - vektor, časový rad výnosov indexu,  $I = (r_1^I, r_2^I, \dots, r_n^I)$ ,  $r^I$  definované v (3),
- $R_{t1 \times m}^T$  -  $t$ -ty riadok matice  $R$ , ktorej riadky tvoria časové rady výnosov zvolených akcií a stĺpce predstavujú dáta pre jednotlivé akcie:

$$R = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_1^2 & \dots & r_1^m \\ r_2^1 & r_2^2 & \dots & r_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n^1 & r_n^2 & \dots & r_n^m \end{pmatrix}.$$

#### 4.2 Použité optimalizačné metódy

V práci som využíval nasledovné metódy:

- Optimalizáciu metódou najmenších štvorcov som realizoval s využitím funkcie LSQNLIN, ktorá je súčasťou softvéru MATLAB.
- Kvadratickú optimalizáciu som realizoval cez funkciu QUADPROG v tom istom softvéri.
- Na výpočty metódy partitioning around medoids som využil funkciu PAM zakomponovanú v softvéri R.
- Vývoj investičných stratégií som sledoval prostredníctvom vlastných, naprogramovaných funkcií v softvéri MATLAB.

## 5 Charakteristiky výkonnosti portfólia

Označme:

- $NAV_i$  - čistá hodnota aktív (investície) v čase  $i$ ,
- $y$  - dĺžka investičného horizontu v rokoch,
- $\bar{r}^P$  - stredná hodnota výnosov portfólia odhadnutá aritmetickým priemerom,
- $r_f$  - p.a. výnos bezrizikového aktíva.

Kumulovaný výnos investície (portfólia) za celý investičný horizont dĺžky  $t$  v %:

$$r_t^P = 100 \cdot [(1 + r_1^P)(1 + r_2^P) \dots (1 + r_t^P) - 1], \quad \text{kde}$$

$$r_i^P = \frac{NAV_i - NAV_{i-1}}{NAV_{i-1}}.$$

Kumulovaný výnos investície (portfólia) za celý investičný horizont dĺžky  $t$  v % p.a.:

$$r_P^* = \frac{r_t^P}{y}.$$

Výberová volatilita výnosov investície počas celého investičného horizontu v % p.a.:

$$\sigma_P = 100 \cdot \sqrt{n-1} \cdot \sqrt{\frac{1}{y} \left( \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (r_t^P - \bar{r}^P)^2}{n-1}} \right)}.$$

Sharpe ratio („Sharpeov pomer“ - viac v [Sharpe, 1994]) - pomerný ukazovateľ výnosnosti k volatilita:<sup>7</sup>

$$S_P = \frac{r_P^* - r_f}{\sigma_P}.$$

Maximum drawdown -  $MDD_P$  (maximálny percentuálny pokles investície) počas investičného horizontu dĺžky  $t$ :

$$V_t = (1 + r_1^P)(1 + r_2^P) \dots (1 + r_t^P),$$

$$M_t = \max_{i \in [1, t]} V_i,$$

$$DD_t = \frac{M_t - V_t}{M_t},$$

$$MDD_P = 100 \cdot \left( \max_{i \in [1, t]} DD_i \right).$$

<sup>7</sup>všetky hodnoty musia byť počítané na rovnakej časovej báze, t.j. všetky sú prepočítané na hodnoty p.a.

## 6 Výsledky

### 6.1 Značenie

- HO - historické obdobie (obdobie z ktorého je počítaná historická návratnosť a volatilita, resp. obdobie z ktorého využijeme historické dáta pre clustrovú analýzu),
- IH - investičný horizont (budúce obdobie na ktorom sa testuje úspešnosť modelov),
- Dáta - typ vstupných dát (denné, resp. 5-denné, t.j. týždenné výnosy),
- $r_f$  - výnos bezrizikového aktíva,
- $r_E$  - investorom požadovaný vstupný výnos do modelu,
- $\sigma_{VC}$  - maximálna povolená volatilita akciovej zložky.

Váhové ohraničenia def. v (15):  $w_L = -2, w_U = 2$ .

( $\sigma_P, \sigma_{VC}, r_f, r_E$  - uvádzané v % p.a.).

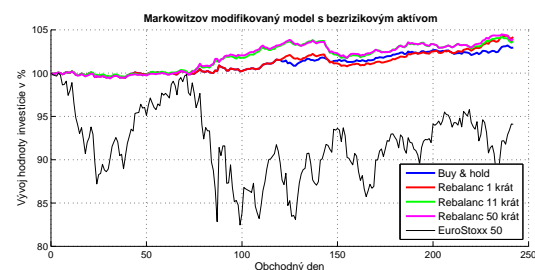
### 6.2 Markowitzov modifikovaný model a investovanie

#### 6.2.1 Kalibrácia požadovaného výnosu

Prípad č. 1

HO	IH	Dáta	$r_f$	$r_E$	$\sigma_{VC}$
2009	2010	denné	0.7%	10%	100%

Tabuľka 2: Vstupy 1



Obr. 6: Vývoj 1-ročnej investície pre vstupný požadovaný výnos 10% p.a.

	$r_P$	$\sigma_P$ (p.a.)	$S_P$	$MDD_P$
EuroStoxx 50	-5.91%	23.12%	-0.29	17.54%
Buy & hold	2.95%	1.95%	1.15	0.73%
1 x rebalanc	4.17%	2.03%	1.71	1.41%
11 x rebalanc	3.70%	2.13%	1.41	2.02%
50 x rebalanc	3.96%	2.16%	1.51	2.00%

Tabuľka 3: Výstupy 1

Ukázalo sa, že požadovaný výnos vo výške 10% je pre model na tomto horizonte zrejme nízky. Nakoľko zostrojenie dotyknice k efektívnej hranici nebolo vždy možné, algoritmus často volil ako akciovú zložku bod zodpovedajúci volatility cap. Tiež v prípade existencie dosahuje dotkový bod tak vysoký výnos, že model napokon často vkladá vysoké váhy práve do bezrizikového aktíva. Tým je vysvetlená nízka volatilita ale i nízky výnos investícií dosiahnutých modelom.

Na druhej strane všetky prípady prekonalí výnos reálneho indexu, a to dokonca s oveľa menšou volatilitou. Ukazovatele  $MDD$  a  $S$  sú takisto suverénne najhoršie pre skutočný index.

#### Prípad č. 2

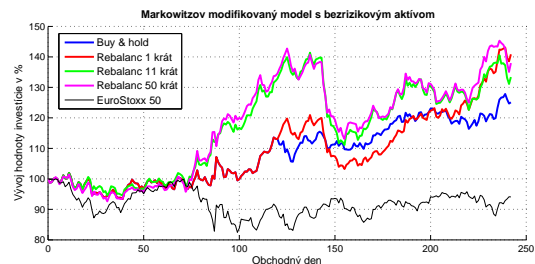
L'ahko si možno všimnúť, že pri zvolenom vstupnom požadovanom výnose 100%<sup>8</sup> sú si grafy tvarovo veľmi podobné, ako v prípade č. 1 - vývoj investície je teda takmer totožný, iba omnoho volatilnejší. Modelom zvolená akciová zložka portfólia totiž na danom investičnom horizonte zostáva rovnaká (konkrétne buď bod prislúchajúci volatility cap alebo dotkový bod k efektívnej hranici). Rozdiel je však vo veľkosti expozície v rizikových aktívach - tá sa zvýšením požadovaného výnosu zväčšila, a tým výrazne zvýšila volatilitu.

HO	IH	Dáta	$r_f$	$r_E$	$\sigma_{VC}$
2009	2010	denné	0.7%	100%	100%

Tabuľka 4: Vstupy 2

Pri porovnateľných hodnotách volatility ale opäť všetky 4 rebalančné Markowitzove stratégie preko-

<sup>8</sup>Požadovaný ročný výnos bol na základe experimentov „ad hoc“ zvolený tak, aby mala investícia porovnateľnú volatilitu denných výnosov ako pozorovaný index EuroStoxx 50, a teda pri podobnej volatilitate bolo možné porovnávať ich výnosy. Keďže nemá zmysel, resp. je nejednoznačné porovnávať výnosy investícií o rôznych volatilitách, vstupné parametre boli zvolené tak, aby bolo možné pozorovať ako sa investícia zhodnotí pri porovnateľnom riziku akým disponuje EuroStoxx 50.



Obr. 7: Vývoj 1-ročnej investície pre vstupný požadovaný výnos 100% p.a.

	$r_P$	$\sigma_P$ (p.a.)	$S_P$	$MDD_P$
EuroStoxx 50	-5.91%	23.12%	-0.29	17.54%
Buy & hold	25.09%	19.85%	1.23	8.41%
1 x rebalanc	40.85%	21.12%	1.90	14.64%
11 x rebalanc	33.39%	22.51%	1.45	21.42%
50 x rebalanc	37.97%	23.01%	1.62	20.79%

Tabuľka 5: Výstupy 2

návajú zhodnotenie pôvodného indexu, a tentokrát veľmi výrazne počas celého investičného horizontu.

Zaujímavým výsledkom mierne popierajúcim logiku je tiež napr. najvyššie zhodnotenie stratégie 1 rebalancovania (realizovaného uprostred investičného horizontu). Zvyšné stratégie, ktoré častejšie modifikovali váhy počas investičného horizontu na základe priebežného vývoja, dopadli naopak horšie. Ukazuje vysvetliteľný nevyspytateľnosťou trhových výkyvov, keď sa napr. pre buy & hold ukázali byť historické dáta vstupujúce do modelu vcelku smerodajné, a s ich pomocou bol dosiahnutý priaznivý výnos, nie výrazne nižší ako pre 50-násobné prevažovanie. Po započítaní transakčných nákladov by sa tak s najväčšou pravdepodobnosťou k sebe zhodnotenia pomocou spomínaných stratégií ešte viac priblížili.

V období rokov 2009 a 2010 sa častejšie rebalancovanie neukázalo byť výrazne efektívnejšie. Vidno napr. minimálny rozdiel medzi 11-násobným a 50-násobným prevažovaním, čo značí, že na zefektívnenie procesu zrejme stačí rebalancovať na mesačnej úrovni a výsledky sú porovnateľné s mnohonásobným prevažovaním.

## 6.2.2 Vplyv rôznych historických období

### Prípad č. 3

Prípad historického obdobia zvoleného ako 2006-2008 som vybral ako názornú ukážku toho, aké dôle-

HO	IH	Dáta	$r_f$	$r_E$	$\sigma_{VC}$
rôzne	09-10	tyždenné	1.2%	35%	100%

Tabuľka 6: Vstupy 3



Obr. 8: Vývoj 1-ročnej investície na základe 3-ročného historického dátového obdobia 2006-2008

žitie je správne vybrať horizont, z ktorého používame historické dáta. Na prvý pohľad sa môže javiť, že zahrnutím väčšieho počtu dát by sme mali dosiahnuť lepšiu aproximáciu trhu. V tomto prípade sa ale 3-ročné historické obdobie ukazuje byť menej vhodné a málo pružné v porovnaní napríklad s ročným historickým obdobím. Ani jedna zo stratégií sa nedokázala prispôbiť „trhovému obratu“ a neprekonal benchmark.



Obr. 9: Vývoj 1-ročnej investície na základe 2-ročného historického dátového obdobia 2007-2008

Tiež ide o dobrý príklad situácie, keď model zlyháva a dosahuje výrazne horšie výsledky oproti reálnemu indexu. Pre 2-ročné historické obdobie sú už straty jednotlivých stratégií menšie, avšak stále ani jedna nedokáže výnosom prekonať EuroStoxx 50. To sa darí až na 1-ročnom období stratégiám buy & hold a 1 rebalancovaniu. Spôsobené to je už spomínanou menšou schopnosťou modelu adaptovať sa na obdobie výrazných trhových výkyvov, ktorými boli trhy postihnuté v období finančnej krízy.



Obr. 10: Vývoj 1-ročnej investície na základe 1-ročného historického dátového obdobia 2008

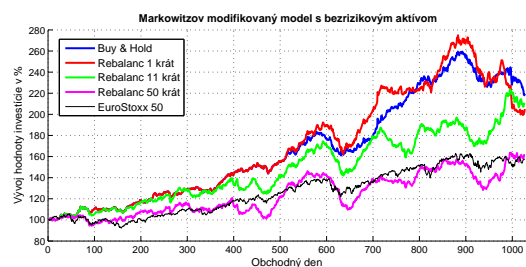
Z grafov tiež možno vyčítať, že so zmenšujúcim sa historickým obdobím klesá volatilita portfólia. Tento fenomén je spôsobený zvyšujúcou sa váhou bezrizikového aktíva v rámci portfólia. Pre kratšie historické obdobie sa často dotýčnica k efektívnej hranici vôbec nedala zostrojiť (viď odsek 3.2) a model priradil nižšie váhy akciovkej zložke.

### 6.2.3 Model za „pekného počasia“

#### Prípad č. 4

HO	IH	Dáta	$r_f$	$r_E$	$\sigma_{VC}$
2003	2004-2007	denné	2%	75% <sup>9</sup>	100%

Tabuľka 7: Vstupy 4



Obr. 11: Vývoj investície na trendovom trhu

V predošlom prípade som sa presvedčil, že Markowitzov model môže v turbulentných obdobiach výrazne zlyhávať. Významnou súčasťou investičnej výbavy sú ale aj tzv. „trendové modely“, t.j. modely fungujúce len na trendových trhoch. Rozhodol som sa preto otestovať úspešnosť Markowitzovho modelu

<sup>9</sup>Pre voľbu vstupného výnosu platí ten istý argument ako v poznámke 8



	$r_P$	$\sigma_P$ (p.a.)	$S_P$	$MDD_P$
EuroStoxx 50	57.27%	14.00%	0.88	12.83%
Buy & hold	119.49%	11.27%	2.47	15.91%
1 x rebalanc	105.05%	12.38%	1.96	27.53%
11 x rebalanc	109.36%	14.05%	1.80	18.62%
50 x rebalanc	61.35%	14.36%	0.93	24.99%

Tabuľka 8: Výstupy 4

počas obdobia jednoznačného rastového trendu rokov 2003-2007.

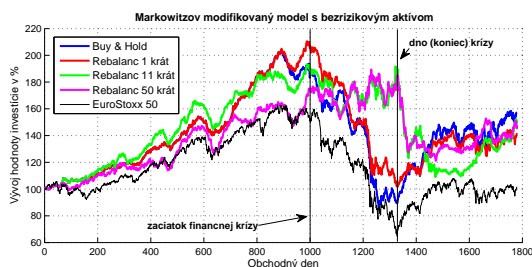
Z výsledkov vidno, že na trendovom trhu dokáže model pri porovnateľnej výške volatility výrazne prekonať výnosnosť indexu. Potvrdila sa tiež anomália najnižšieho zhodnotenia v prípade 50-násobného rebalancovania a najvyššieho pre stratégiu buy & hold. Jav je opäť vysvetliteľný dobrým načasovaním pre voľbu akciových váh v prípade buy & hold, a na druhej strane možno príliš častým zmenám investície v prípade 50-násobného rebalancovania.

#### Prípád č. 5

Pre zaujímavosť ešte uvádzam ako by vyzeralo zhodnotenie investície využitím Markowitzovho modelu založeného na denných dátach, s 1-ročným historickým oknom, počas 7 rokov:

HO	IH	Dáta	$r_f$	$r_E$	$\sigma_{VC}$
2003	2004-2010	denné	3%	50% <sup>10</sup>	100%

Tabuľka 9: Vstupy 5



Obr. 12: Vývoj investície počas 7-ročného horizontu

V tomto prípade je veľmi zaujímavé sledovať správanie sa modelu. Po vypuknutí krízy sa logicky

<sup>10</sup>Pre voľbu vstupného výnosu platí ten istý argument ako v poznámke 8

	$r_P$	$\sigma_P$ (p.a.)	$S_P$	$MDD_P$
EuroStoxx 50	1.50%	30.43%	-0.09	60.29%
Buy & hold	57.10%	22.09%	0.51	57.82%
1 x rebalanc	41.79%	19.40%	0.38	51.68%
11 x rebalanc	51.31%	18.12%	0.54	43.61%
50 x rebalanc	47.47%	16.95%	0.52	36.11%

Tabuľka 10: Výstupy 5

najviac prepadla stratégia bez rebalancovania, prispôbená niekoľko rokov starým dátam. Naopak najlepšie obstáli čerstvo pred krízou rebalancované portfóliá (stratégie 11-násobných a 50-násobných rebalancovaní). Model teda čiastočne zohľadnil trhovú situáciu a dokázal zabrániť prvotnému výraznému prepadu. Ten napokon ale aj tak prišiel, v momente opätovného trhového obratu k rastu.

Je takisto pozoruhodné, že stratégie častého rebalancovania dokázali kolaps finančných trhov úplne „odignorovať“ a udržali si stabilnú výkonnosť aj počas pádu ekonomík. Problém prišiel až počas zvratu trhového vývoja smerom k rastu, ktorý naopak spôsobil dokonca približne 60% pokles uvedených 11- a 50-násobných rebalančných stratégií. To sa dá opäť pripísať slabšej schopnosti modelu prispôbiť sa náhlemu zvratu, ktorý však, ako vidno z vyššie uvedeného príkladu, model v niektorých prípadoch zvláda.

Nepopierateľným výsledkom je ale vo všetkých prípadoch dosiahnuté výrazné zhodnotenie investície a vysoká nadhodnota oproti indexu pri nižších hodnotách volatility.

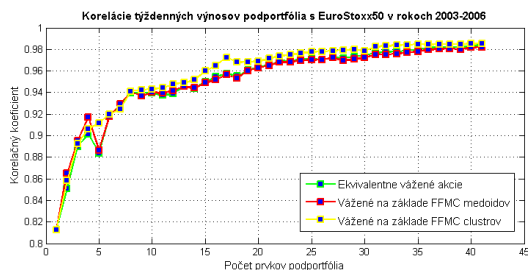
## 7 Tvorba indexového podportfólia

### 7.1 Clustrová analýza a EuroStoxx 50

Clustrová analýza je vykonávaná na základe týždenných dát z rokov 2003-2006. Výsledky analýzy sú prezentované na horizonte rokov 2003-2010.

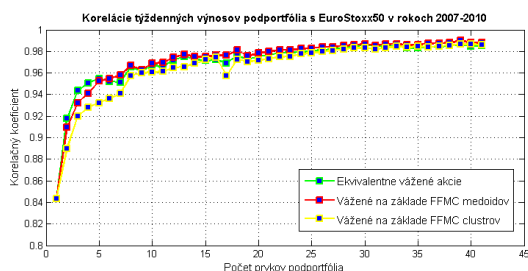
Korelácie týždenných výnosov sú už pre malý počet medoidov veľmi vysoké, zvolením počtu 10 sa v obidvoch pozorovaných obdobiach blížime až k hodnote  $\rho = 0.95$ .

Koreláciu som sa pokúsil ešte zväčšiť pomocou naváženia akcií v rámci podportfólia na základe ich aktuálnej *FFMC* (teda priblížiť sa reálnemu naváženiu indexu). Ako vidno z obrázkov č. 13 a č. 14, zmena vo vážení spôsobila len minoritné zmeny vo



Obr. 13: Korelácia EuroStoxx 50 s navoleným podportfóliom pre rôzne počty clustrov 2003-2006

výslednej korelácií. Tento rozdiel nepokladám za signifikantný. Podportfólio vážené na základe *FFMC* celkových clustrov dokonca v rokoch 2007-2010 korelovalo o niečo horšie. Preto pre lepšiu prehľadnosť v dolevedených analýzach vynechávam prípad vážená akcií cez *FFMC* celkových clustrov.



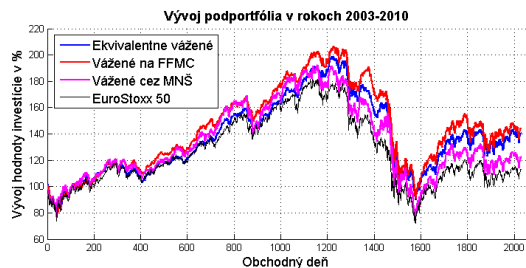
Obr. 14: Korelácia EuroStoxx 50 s navoleným podportfóliom pre rôzne počty clustrov 2007-2010

Zloženie podportfólia pre 10 clustrov: Eni, SAP, France Telecom, Air Liquide, Bayer, Münchener Rückver, Santander, Nokia, Axa a Anheuser Bosch.

Denné ( $\rho^D$ ) výnosy podportfólia a ich korelácie s výnosmi EuroStoxx 50:

$$\rho_{eq}^D = 0.61, \quad \rho_{ff}^D = 0.43, \quad \rho_{LS}^D = 0.9.$$

Korelácia denných výnosov ilustruje úspešnosť MNŠ pri kopírovaní indexu. Ostatné 2 stratégie korelovali na dennej báze menej výrazne, nakoľko sa jedná o veľmi dlhé obdobie (analýza bola vykonávaná v rokoch 2003-2006 a následne počas rokov 2007-2010 bola sledovaná úspešnosť stratégie, pričom vidno, že práve v sledovanom out of the sample období sa začali spomínané dve stratégie od vývoja skutočného indexu líšiť výrazne viac ako MNŠ).



Obr. 15: Podportfólio 10 akcií a jeho vývoj v porovnaní s EuroStoxx 50

## 8 Záver

V práci som ukázal, že aj s využitím klasických, jednoduchých metód ako Markowitzov model portfólia, resp. optimalizácia metódou najmenších štvorcov, je možné prekonať výnosnosť indexu i zredukovať investorove transakčné náklady.

Markowitzov model s bezrizikovým aktívom som upravil tak, aby bol použiteľný za každej trhovej situácie a umožnil znížiť riziko volatility investície, ktorej je investor vystavený. Na základe historických dát a testov sa ukazuje, že takto upravený model dokáže stabilne prekonávať výkonnosť indexu najmä na trendových trhoch. Upravený model sa tiež javí byť najefektívnejší pre stratégie nezahŕňajúce rebalancovanie.

Pomocou clustrovej analýzy a metódy najmenších štvorcov sa mi podarilo nájsť podportfólio akcií, ktoré aj pri výrazne zredukovanom počte zložiek oproti originálnemu indexu so svojim benchmarkom výrazne koreluje a úspešne ho replikuje.

V budúcnosti je možné zapracovať na získaní vierohodnejších odhadov pre očakávané výnosy a riziko vstupujúcich do modelu, ako aj na prispôbení modelu pre kumulatívny vývoj investície.

## Pod'akovanie

Touto cestou chcem pod'akovať mojej vedúcej práce Mgr. Kataríne Boďovej, PhD., za čas, ktorý mi pri vypracovávaní práce venovala, ako aj za odbornú pomoc, cenné rady a pripomienky.

## Literatúra

[Dose and Cincotti, 2005] Dose, C. and Cincotti, S. (2005). Clustering of financial time series with application to index and enhanced-index tracking portfolio.

- Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 355(1):145–151.
- [Elton et al., 2010] Elton, E. J., Gruber, M. J., Brown, S. J., and Goetzmann, W. (2010). *Modern portfolio theory and investment analysis*. John Wiley & Sons, New Jersey.
- [Kaufman and Rousseeuw, 1990] Kaufman, L. and Rousseeuw, P. (1990). *Finding Groups in Data: An Introduction to Cluster Analysis*. John Wiley & Sons, New Jersey.
- [Markowitz, 1952] Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91.
- [Melicherčík et al., 2005] Melicherčík, I., Olšarová, L., and Úradníček, V. (2005). *Kapitoly z finančnej matematiky*. Epos.
- [Merton, 1970] Merton, R. (1970). An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. (Working paper 493-70).
- [Sharpe, 1994] Sharpe, W. F. (1994). The sharpe ratio. *The Journal of Portfolio Management*, 21(1):49–58.
- [Vecer, 2006] Vecer, J. (2006). Maximum drawdown and directional trading. *Risk*, 19(12):88–92.
- [Š. Horáček, 2010] Š. Horáček (2010). Hodnotenie výkonnosti portfólia. Master's thesis, Univerzita Komenského, Bratislava.

# Princíp maxima pre diskkrétne úlohy optimálneho riadenia s nekonečným horizontom (rozšírený abstrakt)

Jakub Beran\*

Školiteľ: Pavel Brunovský†

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

V práci sa zaoberáme možnosťou rozšírenia nutných podmienok optimality pre diskkrétne úlohy optimálneho riadenia na nekonečnom horizonte na úlohy s nie regulárnou maticou dynamickej linearizácie. Za týmto účelom používame nástroje funkcionálnej analýzy. Motivácia pre tento prístup vychádza z článku [Blot and Hayek, 2008], v ktorom bol podobný postup využitý. Výhodou oproti klasickému prístupu, ako je použitý napríklad v [L. Pontryagin, 1962], je fakt, že namiesto štúdia konečnorozmernej úlohy a následného prechodu k jej nekonečnorozmernej verzii, sa priamo zaoberáme nekonečnorozmernou úlohou. Z toho dôvodu predpokladáme, že premenná riadenia  $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots)$ , ako aj stavová premenná  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$ , patria do priestoru  $l_1^k$ , kde  $k$  označuje rozmer príslušnej premennej v jednotlivých časových vrstvách.

Na začiatku práce skúmame nasledovný problém optimálneho riadenia

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{t=0}^{\infty} f(x_t, u_t) \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t \quad \forall t \in \mathbb{N}_0, \quad (2)$$

$$x_0 = \bar{x}, \quad (3)$$

kde  $f \in C^1(X \times U, \mathbb{R})$ ,  $X \subset \mathbb{R}^n$  a  $U \subset \mathbb{R}^m$  sú otvorené množiny,  $x_t \in \text{int } X$ ,  $u_t \in \text{int } U$  pre všetky  $t \in \mathbb{N}_0$ . Nutné podmienky optimality odvodené v tejto časti sumarizuje nasledujúca veta

**Veta 1.** *Predpokladajme, že dvojica  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}})$  je optimálne riešenie úlohy (1)-(3). Nech  $\psi \in l_{\infty}^n$  je riešením adjungovanej rovnice*

$$D_x f(\hat{x}_t, \hat{u}_t) = \psi_{t-1} - A^* \psi_t \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Potom pre všetky  $t \in \mathbb{N}_0$  platí

$$D_u f(\hat{x}_t, \hat{u}_t) = -B^* \psi_t.$$

V takomto prípade nepotrebuje dodat žiadne dodatočné predpoklady na matice  $A$  a  $B$ , teda ani predpoklad regularity.

\* jakuberan@gmail.com

† brunovsky@fmph.uniba.sk

V ďalšej časti práce skúmame zovšeobecnený problém optimálneho riadenia, v ktorom nahradíme stavovú rovnicu (2) rovnicou

$$x_{t+1} = F(x_t, u_t) \quad \forall t \in \mathbb{N}_0, \quad (4)$$

kde  $F \in C^1(X \times U, \mathbb{R}^n)$ . Ak má byť dvojica  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}})$  optimálna, tak účelová funkcia musí klesať v každom smere, v ktorom existuje perturbácia ležiaca v prípustnej množine a začínajúca v bode  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}})$ . Ak označíme  $D_x F(\hat{x}_t, \hat{u}_t) = A_t$ ,  $D_u F(\hat{x}_t, \hat{u}_t) = B_t$  pre všetky  $t \in \mathbb{N}_0$ ,  $(A_0, A_1, \dots) = \tilde{\mathbf{A}}$ ,  $(B_0, B_1, \dots) = \tilde{\mathbf{B}}$ ,  $(I_{n \times n}, 0_{n \times m}) = \iota_0$  a  $\sigma$  ako operátor posunu, tak podmienky, za ktorých existuje takýto smer sumarizuje nasledujúca veta.

**Veta 2.** *Predpokladajme, že jadro zobrazenia  $(\iota_0, (\sigma - \tilde{\mathbf{A}}, -\tilde{\mathbf{B}}))$  má uzavretý komplement. Potom v každom smere  $(\xi, \eta) \in \mathcal{N}(\iota_0, (\sigma - \tilde{\mathbf{A}}, -\tilde{\mathbf{B}}))$  existuje prípustná perturbácia.*

Pomocou predchádzajúcej vety potom vyjadríme nutné podmienky optimality.

**Veta 3.** *Predpokladajme, že dvojica  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}})$  je optimálne riešenie úlohy (1),(4) a (3). Nech  $\psi \in l_{\infty}^n$  je riešením adjungovanej rovnice*

$$D_x f(\hat{x}_t, \hat{u}_t) = \psi_{t-1} - A_t^* \psi_t \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Potom pre všetky  $t \in \mathbb{N}_0$  platí

$$D_u f(\hat{x}_t, \hat{u}_t) = -B_t^* \psi_t.$$

Cieľom ďalšieho výskumu je rozšíriť výsledky na prípad s ohraničeniami na stavovú premennú a na prípad s diskontným faktorom v účelovej funkcii.

## Literatúra

[Blot and Hayek, 2008] Blot, J. and Hayek, N. (2008). Infinite horizon discrete time control problems for bounded processes. *Advances in Difference Equations*, 2008.

[L. Pontryagin, 1962] L. Pontryagin, V. Boltianski, R. G. E. M. (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: Interscience Publishers, Baltimore, MD.

# The New Keynesian Phillips Curve for the Czech Republic (Extended Abstract)

Katarína Danišková<sup>1\*</sup>

Supervisor: Jarko Fidrmuc<sup>12†</sup>

<sup>1</sup> Department of Applied Mathematics and Statistics, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

<sup>2</sup> Zeppelin University, Am Seemooser Horn 20, 88045 Friedrichshafen, Germany

The New Keynesian Phillips Curve (NKPC) is an important part of modern monetary policy models. It describes the relationship between inflation and real marginal costs derived from micro-founded models with rational expectations, sticky prices, and forward looking behaviour. [Galí and Gertler, 1999] enhanced purely forward looking NKPC by the assumption of backward looking subjects coexisting on the market. Final model takes the following form:

$$\pi_t = \gamma_f E_t \pi_{t+1} + \gamma_b \pi_{t-1} + \lambda mc_t^r + \varepsilon_t \quad (1)$$

where the coefficients are functions of the underlying structural parameters

$$\begin{aligned} \gamma_f &\equiv \theta \beta \phi^{-1} \\ \gamma_b &\equiv \omega \phi^{-1} \\ \lambda &\equiv (1 - \beta \theta)(1 - \omega)(1 - \theta) \phi^{-1} \\ \phi &\equiv \theta + \omega [1 - \theta(1 - \beta)] \end{aligned}$$

Variable  $\pi_t$  denotes inflation represented by core inflation and  $mc_t^r$  is real marginal costs replaced by real unit labour costs or output gap. Parameter  $(1 - \theta)$  expresses periodicity of price adjustment,  $(1 - \omega)$  is percentage of backward looking subjects on the market and  $\beta$  is the discount factor.

We estimate the NKPC for the Czech Republic between 1996 and 2009. We show that the estimation method Generalized Method of Moments (GMM) poses the problem of weak instruments leading to the biased estimates. In turn, the Full Information Maximum Likelihood (FIML) is robust and yields significant estimates of structural parameters implying a strong forward looking behaviour.

The FIML estimator belongs to the class of full information methods. Specification requires multiple-equation model formed by a complete system of simultaneous equations which are formulated for each endogenous variable.

Our approach follows [Menyhárt, 2008] and [J. Fuhrer, 1995]. System is formed by equation (1) and a vector autoregressive model (VAR) containing the endogenous variables collected in a  $K$  - dimensional vector  $\mathbf{z}_t$  defined as

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{c} + \mathbf{M}(L)\mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{m}(L)\pi_{t-1} + \xi_t$$

where  $\mathbf{M}(L) = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1 L + \mathbf{M}_2 L^2 + \dots + \mathbf{M}_I L^I$ ,  $\mathbf{m}(L) = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 L + \mathbf{m}_2 L^2 + \dots + \mathbf{m}_I L^I$ ,  $I$  represents the number of lags and  $L$  is the lag operator.  $\mathbf{M}_i$  and  $\mathbf{m}_i$  are  $K \times K$  matrices of coefficients and  $\xi_t$  is a vector of residuals. Our set of endogenous variables includes real unit labour costs, output gap and real exchange rate. We also consider three different lag lengths for each specification.

Forward looking behaviour in FIML approach receives less weight comparing to GMM estimates. The estimated coefficient varies from 0.580 to 0.617 and it is highly significant. Real activity is correctly signed in some specifications, but the coefficients are generally low or even insignificant. This implies that the NKPC is flat for the Czech Republic. More encouraging results can be found in the estimated structural parameters, which are highly significant. The share of subjects with constant prices is estimated at 0.8 on average and the average duration of constant prices varies around 7 quarters.

## References

- [Galí and Gertler, 1999] Galí, J. and Gertler, M. (1999). Inflation dynamics: A structural econometric analysis. *Journal of Monetary Economics*, 44:195–222.
- [J. Fuhrer, 1995] J. Fuhrer, G. Moore, S. S. (1995). Estimating the linear-quadratic inventory model: Maximum likelihood versus generalized method of moments. *Journal of Monetary Economics*, 35:115–157.
- [Menyhárt, 2008] Menyhárt, B. (2008). Estimating the hungarian new-keynesian phillips curve. *Acta Oeconomica*, 58(3):295–318.

\*katarina.daniskova@gmail.com

†Jarko.Fidrmuc@lrz.uni-muenchen.de

# Planning of experiments for a nonautonomous Ornstein-Uhlenbeck process (Extended Abstract)

Vladimír Lacko\*

Supervisor: Radoslav Harman†

Department of Applied Mathematics and Statistics, FMPH CU, Mlynská dolina 842 48 Bratislava

## Introduction

The model under consideration takes the form

$$dX_t = \kappa(\bar{X} - X_t)dt + \sigma(t)dW_t, \quad X_0 \text{ is unknown.} \quad (1)$$

Here,  $X_0$  and  $\bar{X}$  are unknown initial point and asymptotic expectation, while  $\kappa$  is a known constant and  $\sigma(\cdot) : \langle 0, \infty \rangle \mapsto \langle 0, \infty \rangle$  is (up to a multiple constant) known deterministic and continuous volatility function. The process can be observed at  $n$  distinct times in the experimental domain  $[T_*, T^*]$ ,  $0 < T_* < T^*$ .

The parameter  $\kappa$  and function  $\sigma(t)$  are usually given by the properties of the material and environment. For instance, if  $X_t$  describes a velocity of a particle,  $\kappa$  depends on friction and  $\sigma(t)$  depends on the friction and temperature (which is a time-dependent function).

*Notation:*  $\mathcal{T}_n = \{(t_1, \dots, t_n)' \mid T_* \leq t_1 < \dots < t_n \leq T^*\}$  is the set of all  $n$ -point design,  $\overline{\mathcal{T}}_n$  is the closure of  $\mathcal{T}_n$ ,  $\mathcal{T}_n(\tilde{t}) = \{\tau \in \mathcal{T}_n \mid t_1 = \tilde{t}\}$

## Main results

For a given design  $\tau \in \mathcal{T}_n$ , the observations of (1) satisfy the linear regression model  $\mathbf{X}_\tau = \mathbf{F}(\tau)\theta + \varepsilon_\tau$ , where  $\mathbf{F}(\tau) = (\mathbf{e}^{-\kappa\tau}, \mathbf{1}_n - \mathbf{e}^{-\kappa\tau})$  is the design matrix,  $\theta = (X_0, \bar{X})'$  is the vector of unknown parameters, and  $\varepsilon_\tau = (\varepsilon_{t_1}, \dots, \varepsilon_{t_n})'$  is a vector of random errors such that  $\mathbb{E}[\varepsilon_\tau] = \mathbf{0}_n$  and  $\text{Var}[\varepsilon_\tau] = \Sigma(\tau)$ . The vector of random errors is not necessarily gaussian, anyway the WLSE is BLUE.

**Lemma 1.** *The  $ij$ th element,  $i \leq j$ , of the variance-covariance matrix  $\Sigma(\tau)$  has the form*

$$\begin{aligned} \{\Sigma(\tau)\}_{ij} &= u(t_i)v(t_j), \text{ where} \\ u(t_i) &= e^{-\kappa t_i} \int_0^{t_i} e^{2\kappa v} \sigma^2(v) dv \text{ and} \\ v(t_j) &= e^{-\kappa t_j}. \end{aligned}$$

**Lemma 2.** *The variance-covariance matrix  $\Sigma(\tau)$  is positive definite for any  $\tau \in \mathcal{T}_n$ ,  $n \geq 2$ .*

The information matrix for the linear regression model is [Harman and Štulajter, 2009]

$$\mathbf{M}(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{e^{-2\kappa t_1}}{D(t_1)} & \frac{e^{-\kappa t_1}(1-e^{-\kappa t_1})}{D(t_1)} \\ \frac{e^{-\kappa t_1}(1-e^{-\kappa t_1})}{D(t_1)} & \frac{(1-e^{-\kappa t_1})^2}{D(t_1)} + \mathcal{C}(\tau) \end{pmatrix},$$

where  $\mathcal{C}(\tau) = \sum_{i=2}^n \frac{(e^{\kappa t_i} - e^{\kappa t_{i-1}})^2}{e^{2\kappa t_i} D(t_i) - e^{2\kappa t_{i-1}} D(t_{i-1})} = \sum_{i=2}^n \frac{(e^{\kappa t_i} - e^{\kappa t_{i-1}})^2}{\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{2\kappa v} \sigma^2(v) dv}$ . Clearly, for a fixed  $t_1^*$ , it follows from the Loewner isotonicity of the information criteria [Pukelsheim, 1993] that the other design points solve the problem  $\max_{t_2, \dots, t_n, \tau \in \mathcal{T}_n} \mathcal{C}(t_1^*, t_2, \dots, t_n)$ .

**Lemma 3.** *Let  $n \geq 3$  and  $\tau_0 = t_n \mathbf{1}_n$ . Then there exists  $\tau \in \overline{\mathcal{T}}_n$  with  $t_1 < t_n$  such that  $\mathbf{M}(\tau_1) \succcurlyeq \mathbf{M}(\tau_0)$ .*

**Theorem 1.** *For the model (1) there always exists a (feasible) optimal  $n$ -point design.*

**Theorem 2.** *If  $\sigma(t)$  is nonincreasing, then  $t_n^* = T^*$ .*

For an observation of the full trajectory on experimental domain we have an asymptotic information matrix:

$$\mathbf{M}_\infty = \begin{pmatrix} \frac{e^{-2\kappa T_*}}{D(T_*)} & \frac{e^{-\kappa T_*}(1-e^{-\kappa T_*})}{D(T_*)} \\ \frac{e^{-\kappa T_*}(1-e^{-\kappa T_*})}{D(T_*)} & \frac{(1-e^{-\kappa T_*})^2}{D(T_*)} + \kappa^2 \int_{T_*}^{T^*} \frac{dv}{\sigma^2(v)} \end{pmatrix}.$$

## References

- [Harman and Štulajter, 2009] Harman, R. and Štulajter, F. (2009). Optimality of Equidistant Sampling Designs for a Nonstationary Ornstein-Uhlenbeck Process. In *Proceedings of the 6th St. Petersburg Workshop on Simulation*, pages 1097–1101.
- [Pukelsheim, 1993] Pukelsheim, F. (1993). *Optimal Design of Experiments*. John Wiley & Sons.

\*lackovladimir@gmail.com

†harman@fmph.uniba.sk

# Performance Evaluation of Priority Rules in Job Scheduling with Abandonments (Extended Abstract)

Vladimír Novák<sup>1\*</sup>

Supervisor: Peter Jacko<sup>2†</sup>

<sup>1</sup> Faculty of Mathematics, Physics and Informatics,  
 Comenius University, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava, Slovakia

<sup>2</sup> Basque Center for Applied Mathematics, 481 70 Bilbao, Spain

In our work we investigate the Whittle's index policy derivation framework in the Markov decision process environment. We focus on model for multi-class job scheduling of users with abandonment, with the objective of minimizing the total holding costs and abandonment penalties, proposed in [Ayesta et al., 2011].

User abandonment has a very negative impact from the performance point of view. Abandonments motivate the study of queueing-theoretic models, but as a consequence of the complexity, the problem of how to schedule impatient users is not completely understood.

For the case with many users in a system we use recent results from the multi-armed restless bandits approach and derive a modified version of AJN index rule (proposed in [Ayesta et al., 2011]) for non-idling system.

The time-average version of the non-idling AJN index,

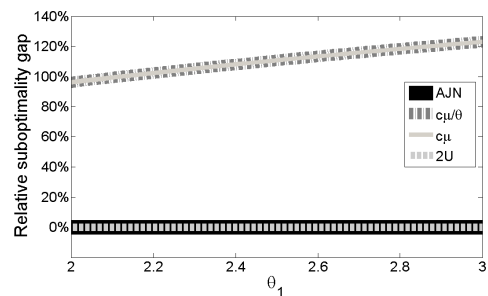
$$v_{k,1}^{\text{AJN}} := \begin{cases} \frac{c_k(\mu_k - \theta_k) + d_k \theta_k \mu_k}{\theta_k}, & \text{if } v_k^{1U} \geq 0 \\ \frac{c_k(\mu_k - \theta_k) + d_k \theta_k \mu_k}{\mu_k}, & \text{if } v_k^{1U} < 0 \end{cases}$$

where

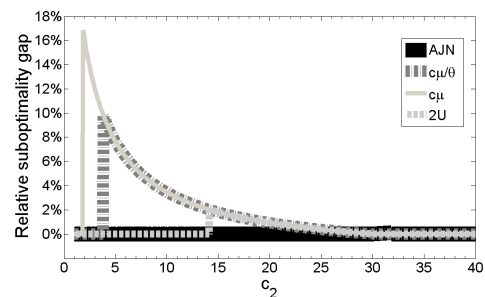
$$v_k^{1U} := c_k(\mu_k - \theta_k) + d_k \theta_k \mu_k.$$

Main part of our work consists of an exhaustive study of numerical experiments for idling and non-idling system, in which we compare AJN index rule with the  $c\mu$ -rule, which is well-known to be optimal in system without abandonments, both with and without arrivals, and with  $c\mu/\theta$ -rule that was recently shown to be asymptotically optimal in a multi-server system with overload conditions and with abandonments. This computational study suggest that our rule

is almost always superior or equivalent to the other rules, and it is often optimal. AJN's biggest improvement (more than 100%) is when it is optimal to idle:



One of the often observed cases:



We also report on an asymptotic behavior investigation of AJN-rule. Based on proof of  $c\mu/\theta$ -rule asymptotic optimality [Atar et al., 2010], we propose and show that AJN is asymptotically optimal in a multi-server system with the overload conditions.

## References

- [Atar et al., 2010] Atar, R., Giat, C., and Shimkin, N. (2010). The  $c\mu/\theta$  rule for many-server queues with abandonment. *Operations Research*, 58(5):1427-1439.
- [Ayesta et al., 2011] Ayesta, U., Jacko, P., and Novak, V. (2011). A nearly-optimal index rule for scheduling of users with abandonment. In *Proceedings of IEEE INFOCOM 2011*, pages 2835-2843.

\*novakvlado@gmail.com

†jacko@bcamath.org

# Convergence model of interest rate (Extended Abstract)

Zuzana Zíková\*

Supervisor: Beáta Stehlíková†

Department of Applied Mathematics and Statistics, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics,  
Comenius University, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, Slovakia

Term structure models explain the relation between the time to maturity of a discount bond and its present price. In two-factor models we study two different factors and their mutual dependence. The convergence model explains the evolution of interest rate in connection with the adoption of Euro currency. The first model of this kind was proposed in [2]. The volatilities of both the domestic and European short rates are constant. In our paper we deal with two-factor convergence model of the interest rate of Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders type, where we assume the volatilities proportional to the power of the short rates, the analogy of one-factor models. Two-factor model for the domestic short rate  $r_d$  and European short rate  $r_e$  under the risk-neutral measure is given by

$$\begin{aligned}dr_d &= (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e)dt + \sigma_d r_d^{\gamma_d} dW_d \\dr_e &= (b_1 + b_2 r_e)dt + \sigma_e r_e^{\gamma_e} dW_e\end{aligned}$$

$$\text{Cov}[dW_d, dW_e] = \rho dt.$$

The bond price  $P(r_d, r_e, \tau)$  with maturity  $\tau$  satisfies the partial differential equation

$$\begin{aligned}-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) \frac{\partial P}{\partial r_d} + (b_1 + b_2 r_e) \frac{\partial P}{\partial r_e} \\+ \frac{\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} + \frac{\sigma_e^2 r_e^{2\gamma_e}}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} \\+ \rho \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e r_e^{\gamma_e} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d \partial r_e} - r_d P = 0\end{aligned}$$

which holds for  $r_d, r_e > 0, \tau \in (0, T)$ , and the initial condition  $P(r_d, r_e, 0) = 1$  for  $r_d, r_e > 0$ . For Vasicek ( $\gamma_d = \gamma_e = 0$ ) and Cox-Ingersoll-Ross ( $\gamma_d = \gamma_e = \frac{1}{2}$ ) type model with  $\rho = 0$  are closed form solutions derived in [2] and [3]. Taking the solution for Vasicek model corresponding to same drift functions and correlation and substituting its constant volatilities by instantaneous volatilities  $\sigma_d r_d^{\gamma_d}$  and  $\sigma_e r_e^{\gamma_e}$  we obtain an approximation of the solution. We count accuracy of

this approximation. Using the approach of [4], we show that the difference of logarithms of the exact solution and proposed approximation is of the order  $O(\tau^4)$ . Finally, we show the possibility of computing an extra term to the original approximation, which leads to an approximation of higher accuracy, i. e.  $O(\tau^6)$ .

Our next aim is to suggest an algorithm for calibration of the model using our approximation formula, test it on the simulated data and present the results from the real market data.

## References

1. Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. and Sanders, A.:1992, The volatility of short-term interest rates: an empirical comparison of alternative models of the term structures of interest rates, *Journal of Finance* 47, p. 1209-1227
2. Corzo, Schwartz: 2000, Convergence within the European Union: Evidence from Interest Rates, *Economic Notes* 29, p. 243-268
3. Lacko, V.: 2010, Two-Factor Convergence Model Of Cox-Ingersoll-Ross Type, Master's Thesis
4. Stehlíková, B., Ševčovič, D.: 2009, Approximate formula for pricing zero-coupon bonds and their asymptotic analysis, *International Journal of Numerical Analysis and Modeling* 6(2), p. 274-283
5. Stehlíková, B.: Approximate formula for the bond price based on the Vasicek model, preprint

\*zuzkazz@gmail.com

†stehlikova@pc2.iam.fmph.uniba.sk



# Štúdium fázových prechodov DNA aptaméru citlivého na ochratoxín

Ivana Karpišová

Školiteľ: Tibor Hianik

Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Biosenzory na báze DNA aptamérov sú v súčasnosti často používané na detekciu nanomolárnych koncentrácií rôznych látok. Jeden z kľúčových parametrov pri vývoji takéhoto biosenzora je práve špecifická štruktúra DNA aptaméra, ktorá zabezpečuje afinitnú reakciu s látkou, pre ktorú je tento aptamér vyvinutý. Nielen prítomnosť tejto štruktúry ale aj jej stabilita je predmetom skúmania mnohých výskumných skupín. Cieľom je aplikovať vyvinuté biosenzory do praxe a tým uľahčiť detekciu napríklad škodlivých látok. Jeden takýto senzor na detekciu ochratoxínu A (OTA) vyskytujúceho sa v obilninách je predmetom dlhodobého výskumu (Lamberti a spol. 2011). V našej práci sme sa zamerali na potvrdenie stability štruktúry, ktorá zabezpečuje naviazanie OTA na aptamér a pomocou spektrofotometrie sme sledovali zmenu absorpcie s meniacou sa teplotou. Porovnávali sme fázové prechody aptaméra s a bez prítomnosti OTA.

**Keywords:** ochratoxín A, DNA aptaméry, spektrofotometria, absorbanca, G-kvadruplex

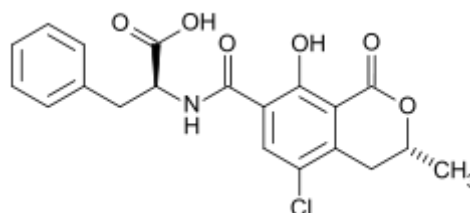
## 1 Úvod

DNA aptaméry sú jednovláknové oligonukleotidy s vysokou afinitou k špecifickým molekulám (Ellington a Szostak, 1990). V tejto práci sme sa venovali štúdiu fázových prechodov rozpletania G-kvadruplexovej štruktúry aptaméra citlivého na detekciu ochratoxínu A (OTA). Doteraz sa publikovalo veľa vedeckých prác o rôznych metódach štúdia stability tejto štruktúry. Metódou kruhového dichroizmu bola preskúmaná G-kvadruplexová štruktúra so špecifickým väzobným miestom pre trombín v prítomnosti  $K^+$  a  $Na^+$  iónov (Poniková a spol. 2008). Existuje ďalej nasimulované formovanie tejto štruktúry v prítomnosti polyetylén glykolu pri nízkych teplotách (Nagatoishi a spol. 2007). Aptaméry študované v tejto práci boli použité na tvorbu akustického biosenzora citlivého na OTA (Lamberti a spol. 2011). Ako metódu na zisťovanie stability tohto aptaméra sme zvolili spektrofotometriu. Je to metóda, ktorou sa dajú získať informácie o štruktúre

a stabilite aptaméra na základe merania absorpcie kvánt svetla bázami. Práve preto sme sa rozhodli preskúmať túto štruktúru v prítomnosti 5mM  $CaCl_2$  a OTA a tak získať predstavu o interakciách, ktoré prebiehajú na povrchu vyvíjaného biosenzora.

### 1.1 Ochratoxín

Ochratoxín A (OTA) patrí medzi významné mykotoxíny. Bol objavený a chemicky charakterizovaný pri testovaní toxigenity kmeňov vláknitých mikroskopických húb *Aspergillus ochraceus* v Juhoafrickej republike v roku 1965.

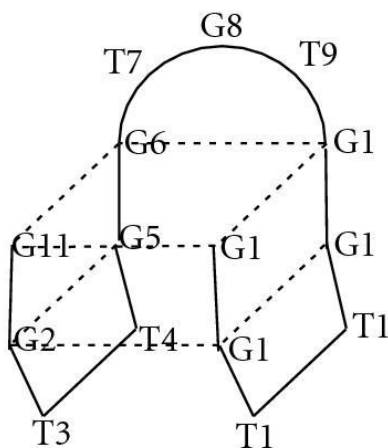


Obr.1 Chemická štruktúra ochratoxínu A.

Bežne sa vyskytuje počas uskladňovania cereálií, kávy, kakaa, sušeného ovocia atď. Môže sa taktiež vyskytovať v krvi a obličkách zvierat, ktoré boli kŕmené kontaminovanou potravou. Počas vylučovania OTA u človeka predstavuje asi 35 dní. Po orálnom požití v potravinách je pomaly absorbovaný v hornej časti tenkého čreva. OTA sa správa ako kumulatívny jed s rýchlou absorpciou a s pomalým vylučovaním. V organizme je prenášaný krvnou cestou. Hlavnými miestami zadržiavania sú obličky a pečeň. Rozsah poškodenia obličiek závisí od dávky, dĺžky expozície a akumulácie. IARC (medzinárodná agentúra pre výskum rakoviny) FAO/WHO klasifikuje OTA ako možný karcinogén (skupiny 2B) pre človeka. V priebehu 50. rokov bolo v niektorých oblastiach Bulharska, Juhoslávie a Rumunska dokázané fatálne ochorenie obličiek u človeka, ktoré bolo pomenované ako „Balkánska endemická nefropatia“. V týchto oblastiach bola zistená vyššia kontaminácia potravín OTA v porovnaní s nepostihnutými oblasťami. Povolené hodnoty OTA (**Regulation (EC) No 123/2005 of 26 January 2005**) sa pohybujú od 10  $\mu\text{g}/\text{kg}$  u instantnej kávy alebo sušených hrozienok po 2  $\mu\text{g}/\text{kg}$  pri víne, hrozňových džúsoch a podobne.

## 1.2 Aptaméry

DNA aptaméry sú jednovláknové oligonukleotidy s vysokou afinitou k špecifickým molekulám (Ellington a Szostak, 1990). Aptaméry sa vyrábajú metódou SELEX (Evolution of Ligands by EXponential enrichment) systematický vývin ligandov pomocou exponenciálneho obohatenia, po ktorej sú vybrané sekvencie schopné viazať malé molekuly, proteíny, nukleové kyseliny alebo dokonca bunky, tkanivá a organizmy. V našom experimente sme pracovali s aptamérmi s vysokou afinitou k OTA. Väzbu sprostredkovala špecifická štruktúra, do ktorej sa aptamér samovoľne usporiadal pretože sekvencie nukleových kyselín bohaté na guanínové nukleotidy sú schopné vytvárať vyššie organizované štruktúry nazývané G-kvadruplexy (tiež známe ako  $G_4$ -DNA). Pozostávajú zo štorcovo usporiadaných guanínov stabilizovaných Hoogstenovými vodíkovými väzbami.



Obr.2 Schematická štruktúra G-kvadruplexu.

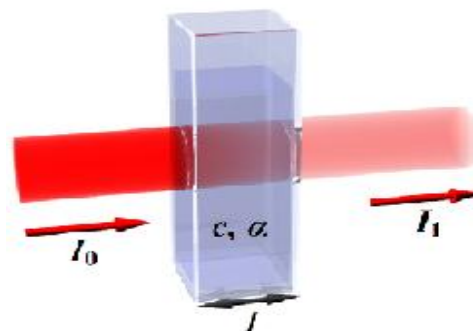
Princíp metódy, ktorú sme použili je hlbšie skrytý v absorpcii UV žiarenia purínovými a pirimidínovými aromatickými zložkami prítomného aptaméru.

## 2 Spektrofotometria

Ultrafialová-viditeľná spektroskopia alebo ultrafialová-viditeľná spektrofotometria (UV-VIS) odkazuje na absorpčnú spektroskopiu alebo reflektčnú spektroskopiu vo viditeľnom spektre. To znamená, že na meranie sa používa viditeľné a príslušné svetlo (blízke UV a IR). Žiarenie, ktoré sa dodá vzorke je ňou čiastočne pohltené, odrazené alebo ďalej vyvolá emisiu žiarenia. Skúmané látky môžu byť v plynnom, kvapalnom alebo tuhom stave (pokiaľ sú transparentné) umiestnené v plastovej alebo kremennej kyvete. Na obrázku 3 vidíme monochromatický svetelný lúč dopadajúci na stenu

kyvety s výkonom  $P_0$  a následne vychádzajúci lúč s výkonom  $P$ .

V prípade využitia monochromatického svetelného zdroja sa svetlo vo vzorke absorbuje a na základe



Obr.3 Prechod monochromatického lúča kyvetou.

*Lambert-Beerovho vzťahu* (1.1) je absorpcia úmerná hrúbke látky a koncentrácii.

$$A = c \cdot l \cdot \varepsilon = -\log_{10} I/I_0 \quad 1.1$$

kde  $\varepsilon$  extinkčný koeficient ( $\text{dm}^3 \times \text{mol}^{-1} \times \text{cm}^{-1}$ ),  $c$  koncentrácia ( $\text{mol} \times \text{dm}^{-3}$ ),  $l$  hrúbka kyvety = optická dráha (cm),  $I_0$  intenzita dopadajúceho svetla, Intenzita svetla, ktoré prešlo cez kyvetu. Aby sme látku mohli skúmať touto metódou musia byť splnené niektoré predpoklady. Nesmie dochádzať k rozptylu žiarenia ani k fluorescencii vzorky, ďalej index lomu látky musí byť počas merania stále rovnaký a absorbovaná energia sa musí meniť na tepelnú energiu, ktorá sa následne uvoľňuje len kolíznymi deaktiváciami.

### 2.1 Absorbčné spektrum oligonukleotidov

DNA je tvorené A,G,C,T bázami, ktoré prispievajú k celkovému absorbčnému spektru. Najviac pritom absorbujú heterocyklické puríny A,G a menej pyrimidíny C,T. Do absorpcie neprispieva len primárna štruktúra vzorky ale dôležité je aj priestorové usporiadanie, ktoré aptamér nadobúda. Maximum absorpcie DNA je pri vlnovej dĺžke 260 nm, avšak pokiaľ potrebujeme pozorovať rozpletanie G-kvadruplexu výhodnejšie je použiť 297 nm vlnovú dĺžku pri, ktorej pozorujeme tzv. hypochrómny efekt, t.j. znižovanie absorpcie pri denaturácii DNA.

### 3 Materiály a metódy

#### 3.1 Aptaméry

DNA aptaméry, ktoré sme skúmali boli od firmy Thermo Fischer Scientific (Ulm, Nemecko). Poradie nukleotidov bolo rovnaké ako pri príprave biosenzora použitého na meranie akustickou metódou (Lamberti a spol. 2011) 5'-GATCGGGTGTGGGTGGCGTAAAGGGAGCATCGGACSTTTTTTTTTTTTTTTT-3' na 5' konci bola pripevnená SH skupina, ktorá v danom prípade sťažovala degradáciu aptaméra nukleázami. Aptaméry sme rozpustili v TE tlmivom roztoku (10 mM TRIS, 1 mM EDTA, pH 7.5), na koncentráciu 100  $\mu$ M. V meraniach sme použili 10  $\mu$ M koncentrácie aptamérov v pufrí (120 mM NaCl, 5 mM KCl, 10 mM HEPES, pH = 7.0).

Po rozriedení na výslednú koncentráciu sme ešte pridali  $\text{CaCl}_2$  aby sme v roztoku dosiahli 5 mM koncentráciu vápnikových iónov, bez ktorých nenastáva väzba OTA s aptamérom. Takto pripravené roztoky sme zmrazili a pred každým meraním sme jednu vzorku rozmrazili. Na usporiadanie reťazca do špecifickej priestorovej štruktúry sme aptaméry najskôr denaturovali pri 100 °C (po dobu 5 minút) a následne sme ich nechali samovoľne ochladiť na izbovú teplotu (23 °C).

#### 3.2 Ochratoxín

Ochratoxín A, využívaný v experimentoch bol od firmy Sigma-Aldrich (USA). Rozpustený na zásobný roztok bol v takom istom pracovnom tlmivom roztoku ako použité DNA aptaméry.

#### 3.3 Spektrofotometria

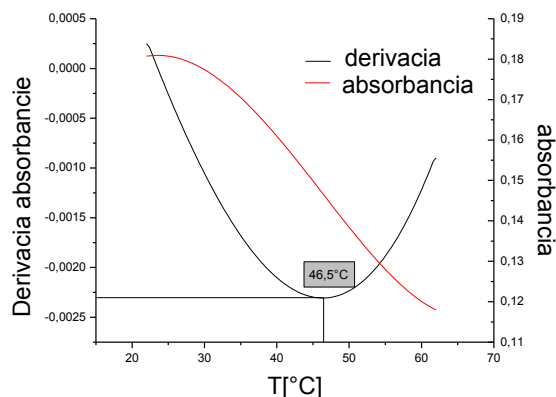
Meranie prebiehalo na UV/VIS spektrofotometri Shimadzu 1700 a teplota bola kontrolovaná TCC (Temperature Controlled Cell) (rozsah 7-70°C) termostatom. Oba prístroje sú od firmy Shimadzu (Japonsko). Využívali sme absorpčný mód tohto prístroja s vlnovou dĺžkou  $\lambda=297\text{nm}$ , čo je štandardne používaná vlnová dĺžka na pozorovanie hypochrómneho efektu u aptamérou s G-kvadruplexovou štruktúrou. Spektrofotometer sa ovládal cez počítačový program UV Probe a termostat sa nastavoval manuálne. Počas merania sme mohli pozorovať krivku zmeny absorpcie v čase. Používali sme plastové 70  $\mu$ l kyvety od firmy Plastibrand (Nemecko).

#### 3.4 Spôsob merania absorpcie

Po spustení prístroja bolo treba zmerať absorpciu pozadia a tak pomocou kyvety naplnenej destilovanou vodou určiť "baseline". Keďže chceme odstrániť akékoľvek vplyvy tlmivého roztoku na meranú absorpciu, nastavili sme tzv. AutoZero, kde sme zmerali absorpciu čistého tlmivého roztoku, aký sme použili na prípravu vzorky. Termostat ochladil vzorku na 20°C a po 10 minútach sme začali teplotu zvyšovať s rýchlosťou 1°C / min a zaznamenávať krivku absorpcie. Teplotu sme zvyšovali do 70°C. Vzorku sme potom ochladili na 20°C.

### 4 Výsledky a diskusia

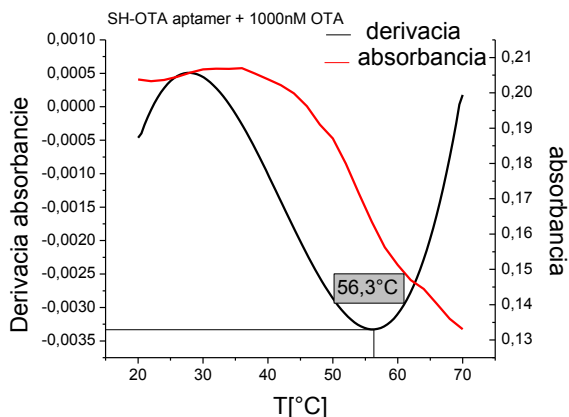
Cieľom experimentov bolo sledovať fázový prechod G-kvadruplexovej štruktúry použitého aptaméra. Pozorovali sme preto zmeny absorpcie pri 297 nm. Pri tejto vlnovej dĺžke je pozorovaný



hypochrómny efekt pri denaturácii kvadruplexu. Ako sme uviedli vyššie, tento efekt spočíva v znížení absorpcie s rastom teploty.

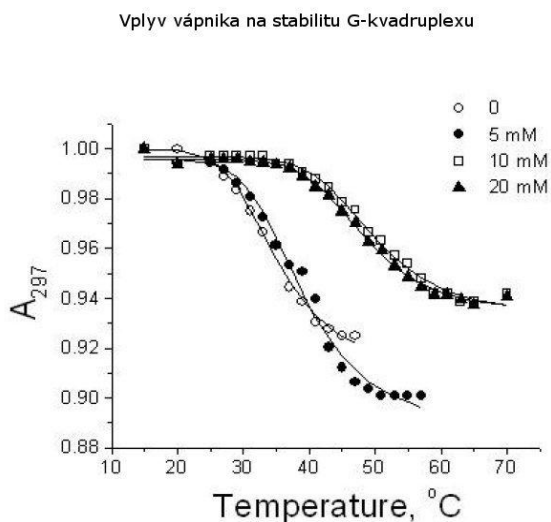
Obr.4 Spracovaná krivka absorpcie SH-OTA aptamérov bez OTA.

Výsledky sme porovnávali s výsledkami získanými v práci Lamberti a spol. (2011). (Obr.6), kde sa zamerali na skúmanie stability tohto aptaméra v závislosti od koncentrácie  $\text{CaCl}_2$ . Spravili sme dve série meraní. Každé meranie sme opakovali 3 krát. Najskôr sme zmerali závislosť absorpcie od teploty pre aptamér v tlmivom roztoku obsahujúcom s 5 mM vápnika a následne sme pridali OTA v koncentrácii 1  $\mu$ M.



Obr.5 Spracovaná krivka absorpcie SH-OTA aptamérov s 1000nM OTA.

Získané krivky sme najskôr museli vyhladiť, ofitovať a potom upraviť ako prvú deriváciu ofitovanej krivky. Zo získanej derivácie sme odčítaním polohy minima získali hodnotu teploty topenia G-kvadruplexovej štruktúry. Táto teplota je určená ako stav, v ktorom sa nachádza roztok práve vtedy, keď je polovica aptamérov ešte v pôvodnej štruktúre a druhá polovica je už rozpletená. Na obrázku 4 je znázornená spracovaná krivka topenia aptamérov bez pridania OTA.



Obr.6 Závislosť normalizovanej absorpcie od teploty. (obrázok bol použitý s povolením autorov: Lamberti a spol. (2011))

Spracovaním všetkých (z každej série 3) kriviek takýmto spôsobom sme získali teploty fázového prechodu, ktoré sme následne spriemerovali. Výsledky sú uvedené v tabuľke 1.

	SH-OTA	SH-OTA + 1 $\mu$ M OTA
TEPLOTA TOPENIA	(51,4 $\pm$ 4,3) $^{\circ}$ C	(54,2 $\pm$ 2,5) $^{\circ}$ C

Tab. 1 Teploty topenia G-kvadruplexovej štruktúry aptaméru afinitného k OTA.

Z tabuľky vidieť, že prítomnosť ochratoxínu spôsobila mierne zvýšenie teploty topenia G-kvadruplexu. Štandardná odchýlka aptaméru bez prítomnosti toxínu je však príliš veľká na to, aby sme mohli tvrdiť o signifikantnej zmene. Výsledky získané sledovaním vplyvu CaCl<sub>2</sub> spôsobili významnejšie zmeny teploty topenia tohto aptaméru. Vplyv OTA mal minimálny, prakticky zanedbateľný, vplyv na fázový prechod G-kvadruplexovej štruktúry.

## Literatúra

Ellington, A.D., Szostak, J.W. (1990):

In vitro selection of RNA molecules that bind specific ligands, *Nature* 346, 818-822.

Lamberti, I., Mosiallo, L., Hianik, T. (2011): Development of thickness shear mode biosensor based on DNA aptamers for detection ochratoxin A. *Chemical Sensors*, v tlači

Poniková, S., Antalík, M., Hianik, T. (2008):

A circular dichroism study of the stability of guanine quadruplexes of thrombin DNA aptamers at the presence of K<sup>+</sup> and Na<sup>+</sup> ions. *Gen. Physiol. Biophys.*, 27, 271-277

Nagatoishi S., Tanaka Y., Tsumoto K. (2007): Circular dichroism spectra demonstrate formation of the thrombin-binding DNA aptamer G-quadruplex under stabilizing-cation deficient conditions. *Biochem. Biophys. Res. Commun.*, 352, 812-817

# Zmeny v aktivite enzýmu $\text{Ca}^{2+}$ -ATPázy pri chronickom ochorení obličiek (CKD)

Marcela Morvová\*  
Školiteľ: Libuša Šikurová†

Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Chronické ochorenie obličiek (CKD) je spojené so zvýšenou intracelulárnou koncentráciou voľného cytoplazmatického vápnika ( $[\text{Ca}^{2+}]_i$ ). Predpokladá sa, že je za to zodpovedná znížená aktivita enzýmu  $\text{Ca}^{2+}$ -ATPázy. Na overenie tejto hypotézy sme zmerali aktivitu tohto enzýmu skupine 15 pacientov s CKD a 31 kontrolných dobrovoľníkov. Zistili sme významný pokles aktivity enzýmu  $\text{Ca}^{2+}$ -ATPázy cytoplazmatickej membrány ľudských erytrocytov u pacientov s chronickým ochorením obličiek v 2. a 3. štádiu v porovnaní s kontrolnou skupinou zdravých dobrovoľníkov.

**Kľúčové slová:** aktivita  $\text{Ca}^{2+}$ -ATPázy, chronické ochorenie obličiek

## 1 Úvod

Chronické ochorenie obličiek (CKD) sa vyznačuje progresívnou stratou obličkových funkcií behom mesiacov, resp. rokov. Je známym faktom, že intracelulárna koncentrácia voľného cytoplazmatického vápnika ( $[\text{Ca}^{2+}]_i$ ) je pri tomto ochorení zvýšená [Gaftér et al., 1989]. Kým krátkodobé zvýšenie  $[\text{Ca}^{2+}]_i$  je fyziologickým dejom a nevyhnutným signálom pri regulácii bunkových procesov, dlhodobé zvýšenie môže viesť k nezvratnému poškodeniu bunkových funkcií a štruktúr. Zmeny metabolizmu vápnika na bunkovej úrovni môžu byť spôsobené: zmenou funkčnosti vápnikových kanálov, zmenou ich expresie alebo zníženou aktivitou  $\text{Ca}^{2+}$ -ATPázy [Lajdová et al., 2009].  $\text{Ca}^{2+}$ -ATPáza je transportný proteín, nachádzajúci sa v cytoplazmatickej membráne bunky, zodpovedný za aktívny transport vápnika z bunky.

Viacere štúdie dokazujú, že najmä pri terminálnych štádiách CKD je znížená aktivita  $\text{Ca}^{2+}$ -ATPázy jedným z faktorov zodpovedných za zvýšenie  $[\text{Ca}^{2+}]_i$  [Gaftér et al., 1989], [Spieker et al., 1993]. Tiež u detí v 2. – 4. štádiu CKD bola zistená znížená aktivita  $\text{Ca}^{2+}$ -ATPázy [Polak-Jonkisz et al., 2010].

V našej práci sme sa zamerali na sledovanie zmien v aktivite  $\text{Ca}^{2+}$ -ATPázy pri dospelých pacientoch v skorších štádiách, konkrétne v 2. – 3. štádiu CKD.

## 2 Materiál a metódy

### 2.1 Pacienti

Skupina CKD bola tvorená 15 pacientmi s vekom  $62,3 \pm 12,2$  (mean  $\pm$  SD), pomer mužov k ženám bol 11:3. Kontrolná skupina bola zložená z 31 subjektov, s priemerným vekom  $52,7 \pm 13,8$ , pomer mužov k ženám bol 16:15. Pacienti neboli liečení vit. D.

Ako biologický materiál sme využili vzorku ľudskej krvi, ktorá nám bola poskytnutá z Laboratória experimentálnej a klinickej biochémie Slovenskej zdravotníckej univerzity v Bratislave. Krv bola odoberaná do skúmaviek s heparínom, následne bola oddelená plazma, leukocyty aj trombocyty a masa erytrocytov bola využitá na túto prácu.

### 2.2 Meranie

Pracovné médium využité pri meraní aktivity enzýmu  $\text{Ca}^{2+}$ -ATPázy pozostávalo zo: 100 mmol/l TRIS (2 – amino – 2 – hydroxymetyl – propán – 1,3 – diol), 80 mmol/l KCl, 3 mmol/l  $\text{MgCl}_2$ , 0,2 mmol/l EDTA (kyselina etyléndiamintetraoctová), 1 mmol/l ouabaín oktahydrát. Hodnota pH 7,4 bola doladená pomocou HCl. V jednom z médií sa nachádza a v druhom sa nenachádza 5 mmol/l  $\text{CaCl}_2$ .

Na izoláciu membrán bola použitá štandardná metóda Hanahana a Ekholmovej [Hanahan, 1974]. K vyizolovaným membránam sme pridali pracovné médium a po dodaní ATP prebiehala reakcia pri 37°C 60 min. Následne sme reakciu zastavili pridaním TCA (kyselina trichloroctová). Kolorimetrickou metódou, s využitím UV-VIS spektrofotometra Shimadzu UV-1700, sme stanovili množstvo anorganického fosfátu ( $\text{P}_i$ ), ktoré vzniklo štiepením ATP pri prechode iónov vápnika.

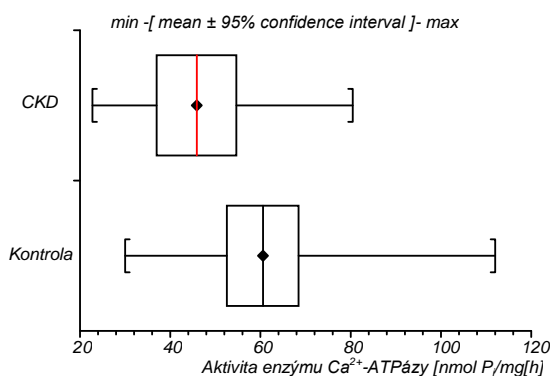
\* morvova@gmail.com

† sikurova@fmph.uniba.sk

Aktivitu  $\text{Ca}^{2+}$ -ATPázy sme stanovili ako rozdiel v médiu obsahujúcom vápnik a v médiu bez vápnika ako  $\text{nmol P}_i$  na  $\text{mg}$  proteínu za hodinu. Bielkoviny sme stanovili Lowryho metódou [Lowry, 1951].

### 3 Výsledky

Priemerná hodnota aktivity enzýmu  $\text{Ca}^{2+}$ -ATPázy pre skupinu pacientov s chronickým ochorením obličiek bola ( $45,86 \pm 15,99$ )  $\text{nmol P}_i/\text{mg/h}$ , pre kontrolnú skupinu bola ( $60,50 \pm 21,65$ )  $\text{nmol P}_i/\text{mg/h}$ . Výsledky uvádzame ako  $\text{mean} \pm \text{SD}$ . Pre štatistické porovnanie stredných hodnôt aktivity enzýmu  $\text{Ca}^{2+}$ -ATPázy medzi skupinami sme overili normálne rozdelenie dát pomocou Shapiro - Wilk W testu. Daný test neodhalil žiadny náznak nenormálneho rozdelenia dát. Tým pádom sme na porovnanie stredných hodnôt aktivity enzýmu  $\text{Ca}^{2+}$ -ATPázy medzi skupinami mohli použiť Studentov nepárový t – test ( $P = 0,0248 < 0,05$ ).



**Graf 1** Krabicový diagram porovnávajúci strednú hodnotu aktivity  $\text{Ca}^{2+}$ -ATPázy v kontrolnej skupine a v CKD.

Stredná hodnota s 95 % intervalom spoľahlivosti predstavuje odhad skutočného priemeru danej skupiny (populácie).

### 4 Záver

Na základe porovnania stredných hodnôt, dochádzame k záveru, že sme zistili významný pokles aktivity enzýmu  $\text{Ca}^{2+}$ -ATPázy cytoplazmatickej membrány ľudských erytrocytov u pacientov s chronickým ochorením obličiek v 2. a 3 štádiu oproti kontrolnej skupine zdravých dobrovoľníkov.

### Biibliografické odkazy

- [Gaftar et al., 1989] Gaftar, U. et al. (1989). Red blood cell calcium homeostasis in patients with end-stage renal disease. *Journal of Laboratory and Clinical Medicine*, 114(3): 222-231.
- [Lajdová et al., 2009] Lajdová, I. et al. (2009). Intracellular calcium homeostasis in patients

with early stages of chronic kidney disease: effects of vitamin D3 supplementation. *Nephrology Dialysis Transplantation.*, 24(11): 3376-3381.

- [Lowry, 1951] Lowry, O. H. et al. (1951). Protein measurement with the Folin phenol reagent. *Journal of Biological Chemistry.*, 193(1): 265-275.
- [Polak-Jonkisz et al., 2010] Polak-Jonkisz, D. et al. (2010). The endogenous modulators of  $\text{Ca}^{2+}$ - $\text{Mg}^{2+}$ -dependent ATPase in children with chronic kidney disease (CKD). *Nephrology Dialysis Transplantation.*, 25(2): 438-444.
- [Spieker et al., 1993] Spieker, C. et al. (1993).  $\text{Ca}^{2+}$ ATPase activity in essential and renal hypertension. *Clinical and Experimental Hypertension.*, 15(1): 143-152.

# Porovnanie priameho a nepriameho pôsobenia nízko-teplotnej atmosférickej plazmy na bakteriálne kultúry

Michal Pelach<sup>1\*</sup>

Školiteľ: Zdenko Machala<sup>2†</sup>

<sup>1</sup> Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

<sup>2</sup> Katedra astronómie, fyziky zeme a meteorológie FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Práca skúma hlavné podiely prispievajúce k inaktivácii baktérii na agarových povrchoch v závislosti od rôznych metód opracovania baktérii – *S. typhimurium* (G-) nízko-teplotnou atmosférickou plazmou.

V experimentoch sme použili dva základné prístupy opracovania vzoriek plazmou – priamu a nepriamu expozíciu. Tým sa oddelili dva najzákladnejšie faktory plazmy – nabité častice a reaktívne neutrálne častice, ktoré sú najviac diskutované z hľadiska podielu schopnosti inaktivácie baktérii. [Dobrynin D. et al 2009, H Ayan et al 2009] Následne sme porovnali ich jednotlivé príspevky k dekontaminácii exponovaných vzoriek.

**Keywords:** *S. typhimurium*, atmosférická plazma, priama a nepriama expozícia, elektrické výboje, bio-dekontaminácia

## 1 Úvod

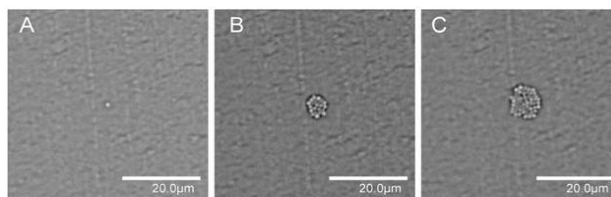
Nízko-teplotná plazma generovaná elektrickými výbojmi vo vzduchu pri atmosférickom tlaku je pôvodcom mnohých reakcií, ktoré vyúsťujú k celému radu produktov schopných interagovať s bunkovými štruktúrami. Podstatným parametrom, ktorý vystihuje nerovnovážnu plazmu, sú vysokoenergetické elektróny a ich malá hmotnosť voči molekulám plynu. Tieto elektróny iniciujú disociácie, ionizácie a excitácie rôznych druhov pri súčasnom zachovaní nízkej teploty výboja. Takáto charakteristika zabezpečuje vznik viacerých účinných činiteľov a oproti ostatným konvenčným metódam pôsobí širokospektrálne, čo je aj hlavná výhoda využitia plazmy v rámci bio-dekontaminácie.

### 1.1 Baktérie – tvorba kolónií

Baktérie, patria medzi najrýchlejšie sa množiace organizmy. Ak ich vložíme do tuhého alebo polotuhého živného média, v ktorom sú

zabezpečené všetky podmienky k fungovaniu organizmu dochádza k rastu. Rast je u bakteriálnej bunky popisovaný z hľadiska jej počtu skôr ako veľkosti. Keďže zvýšenie hmoty bunky smeruje k vytvoreniu dcérskej bunky. Dcérska bunka sa vytvára približne po zdvojnásobení veľkosti bunky nastáva exponenciálny rast a po určitom čase je počet buniek taký veľký, že ich je možné pozorovať voľným okom - vzniká kolónia.

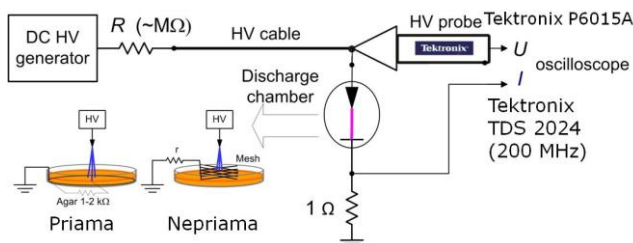
Každá jedna bunka tak vytvorí jednu kolóniu a reprezentuje jednu kolónio tvornú jednotku (CFU – colony forming unit), počet životaschopných buniek je ľahko vyhodnotiteľný, keďže iba živá bunka je schopná vytvoriť kolóniu



Obr. 1. Tvorba kolónie z jednej bakteriálnej bunky.

## 2 Experimentálna sústava

Experimentálne zariadenie na generovanie jednosmerných elektrických výbojov pozostáva z vysokonapäťového zdroja. Na zaznamenávanie voltampérových charakteristík výbojov bol použitý osciloskop Tektronix TDS 2024, vysokonapäťová sonda Tektronix P6015A, 1 Ohm odpor na meranie



Obr. 2. Schéma experimentálnej sústavy

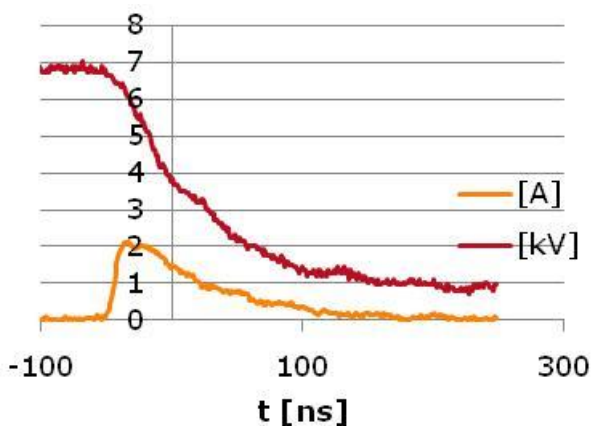
\* mrkvicka@aaa.sk

† safarova@bbb.sk

prúdu prispôsobený na 50 Ohm koaxiálny kábel, dvojice elektród hrot rovina.

## 2.1 Parametre výbojov

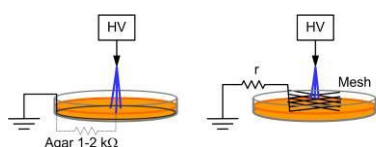
V experimente sme použili jeden typ výboja – prechodovú iskru v kladnej polarite (TS+). Tento pulzný režim iskrového výboja je charakterizovaný vysokým výkonom vo veľmi krátkom čase trvania pulzu (100 ns) s relatívne nízkymi hodnotami teploty vzduchu v iskre  $\sim 550 \pm 100$  K. [Machala, Z. et al. 2008]. Prúdové pulzy v kladnej prechodovej iskre dosahujú amplitúdu 2 – 3 A, s frekvenciou opakovania 1- 2 kHz a stredným výkonom  $\sim 2$  W. V kladnej prechodovej iskre sú prítomné z nabitých častíc  $O_2^-, e^-$  a neutrálnych reaktívnych častíc  $N_2^*(C,B)$ , OH, H, N, O,  $O_3$ . [Machala Z. et al, 2008.]



Graf 1. Vývoj prúdového pulzu prechodovej iskry

## 3 Priebeh experimentu

Bakteriálne vzorky *S. typhimurium* boli kultiváciou, cez noc v živnom bujóne, namnožené a následne rozriedené na požadovanú hodnotu. Baktérie boli inokulované na agarové živné médium v Petriho miske, rozstreté po celom povrchu s výslednou koncentráciou  $10^5$ - $10^4$  a následne priamo a nepriamo opracované. Čas expozície bol stanovený na 5, 10, 15, 60 s. Po expozícii boli Petriho misky vložené do termostatu a kultivované 12 h.

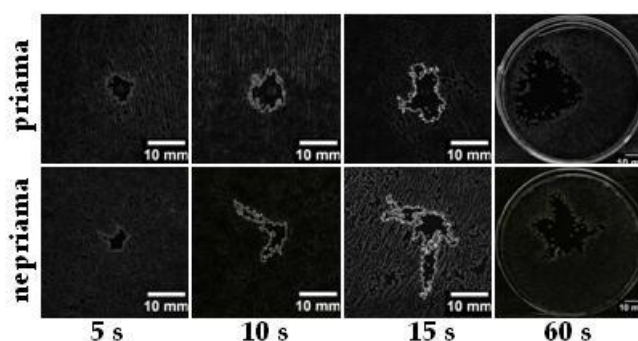


Obr. 3 Konfigurácia experimentálnej sústavy, z ľava: priama expozícia; zprava: nepriama expozícia

Priama expozícia zabezpečuje doručenie nabitých aj neutrálnych častíc na povrch agaru. Agar tu pôsobí ako uzemnená elektróda.

Pri nepriamej expozícii nabité častice nedosahujú na povrch vzorky s bakteriálnou kultúrou pretože sú odvádzané uzemnenou mriežkou nad povrchom agaru.

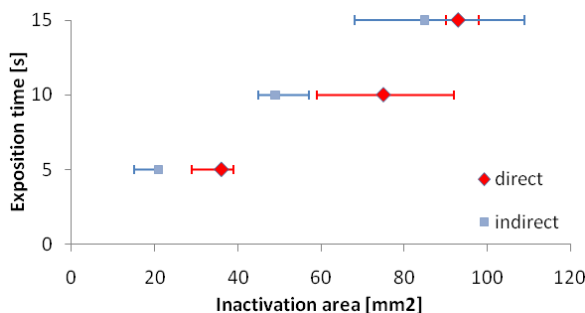
Koncentrácia aktívnych častíc bola zabezpečená rovnakými parametrami výbojov pri oboch metódach expozície osciloskopickými meraniami. Petriho misky sme odfoťili digitálnym fotoaparátom a v softvéri ImageJ určili rozsah inaktivovanej plochy. Kalibráciou pixlov sme získali veľkosť plochy v  $mm^2$ . Inaktivácia baktérii bola určená ich neschopnosťou deliť sa a tým tvoriť kolónie. Inaktivovaná plocha sa preto javí ako čierna škvrna na bielom pozadí bakteriálnych kolónii. Týmto spôsobom kvantitatívne a kvalitatívne analyzujeme výsledky experimentu.



Obr. 2 Pôsobenie priamej a nepriamej expozície na vzorky *S. typhimurium*.

## 4 Výsledky a diskusia

Výsledky ukazujú, že priama expozícia má väčší efekt ako nepriama expozícia. Napriek tomu sa pre malé časy expozície ukázalo, že nepriama expozícia má nezanedbateľný efekt pôsobenia na bakteriálne kultúry. Podobné výsledky sme dosiahli v predchádzajúcich meraniach, kde sme použili 1 -2 minútové expozičné časy. Preto môžeme tvrdiť, že neutrálne reaktívne častice zohrávajú nezanedbateľnú úlohu v inaktivácii bakteriálnych vzoriek na agarových povrchoch aj pri veľmi krátkych časoch expozície (5-15 s).



Graf 2. Veľkosť inaktivovanej plochy so s prvým a tretím kvartilom nameraných dát pre rôzne časy expozície.



## Acknowledgements

Výskum sponzorovaný slovenskou grantovou agentúrou VEGA 1/0668/11 a 1/0711/09, a agentúrou na podporu výskumu a vývoja APVV SK-CZ-0179-09 and SK-FR-0038-09.

Ďakujeme Doc. Ivete Waczulíkovej PhD. za štatistickú analýzu

## Referencie

[Ayan H. et al, 2009] J. Phys. D: Appl. Phys. 42 125202,

[Dobrynin D., 2009] New J. of Physics. 11 115020,  
[Machala Z. et al, 2008.] IEEE Trans. Plasma Science. 36 918,

[Hiroyuki Y. et al. 2010] Appl. Environ. Microbiology. 76 16

## *In vivo* $^{31}\text{P}$ MRS v pečeni na 7T: Stanovenie $T_1$ relaxačných časov

Michal Považan<sup>1\*</sup>    Martin Tkačov<sup>1†</sup>  
Školiteľ: Marek Chmelík<sup>2‡</sup>

<sup>1</sup> Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

<sup>2</sup> MR Centrum Excelentnosti, Oddelenie Rádiológie, Medicínska Univerzita Viedeň, Rakúsko

### Abstrakt

*In vivo* magnetická rezonančná spektroskopia (MRS) je veľmi nádejnou neinvazívnou technikou, ktorej výstupom je informácia o metabolitoch z pomerne presne vymedzenej oblasti tela. V tejto práci sme odmerali longitudinálne relaxačné časy  $T_1$   $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  adenosíntrifosfátu ( $\alpha$ -ATP,  $\beta$ -ATP,  $\gamma$ -ATP), fosfatidylcholínu (PC), fosfatidyletanolamínu (PE), glycerolfosfatidylcholínu (GPC), glycerolfosfatidyletanolamínu (GPE) a anorganického fosfátu ( $P_i$ ) v pečeni metódou inversion recovery (IR) deviatim zdravým dobrovoľníkom, pomocou lokalizovanej fosforovej ( $^{31}\text{P}$ ) MRS ultra-vysokého poľa (7 Tesla). Na lokalizáciu signálu bola okrem senzitivného profilu povrchovej cievky použitá metóda jednorozmernej image selected *in vivo* spectroscopy (1D ISIS). 1D ISIS protokol bol otestovaný *in vitro* na fantóme porovnaním nelokalizovaného IR experimentu a 1D ISIS lokalizovaného IR experimentu. Oba experimenty viedli k porovnateľným  $T_1$  relaxačným časom fosfokreatínu (PCr),  $T_{1\_nelok} = 3359$  ms (3283; 3435) vs  $T_{1\_lok} = 3330$  ms (2918; 3556). Kvalita 1D ISIS lokalizácie bola experimentálne stanovená: selektivita  $E_{sel} = 81,63\%$ , potlačenie signálu  $E_{sup} = 97,57\%$  a kontaminácia  $K = 35,83\%$ .

*In vivo* meranie bolo rozdelené na meranie rýchlo relaxujúcich metabolitov ( $\alpha$ -ATP,  $\beta$ -ATP,  $\gamma$ -ATP,  $P_i$ ) a pomaly relaxujúcich metabolitov (ostatné).  $^{31}\text{P}$  spektrá boli upravené a kvantifikované pomocou regresie v časovej doméne algoritmom AMARES. Výsledné relaxačné časy  $T_1$  (priemer  $\pm$  smerodajná odchýlka):  $\alpha$ -ATP -  $0,46$  s  $\pm$   $0,07$ s,  $\beta$ -ATP -  $0,56$  s  $\pm$   $0,07$  s,  $\gamma$ -ATP -  $0,50$  s  $\pm$   $0,08$  s, PC -  $3,74$  s  $\pm$   $1,31$  s, PE -  $4,41$  s  $\pm$   $1,55$  s, GPC -  $5,94$  s  $\pm$   $1,73$  s, GPE -  $6,19$  s  $\pm$   $0,91$  s,  $P_i$  -  $0,70$  s  $\pm$   $0,33$ s. Namerané relaxačné časy sú esenciálnou informáciou pre optimalizovanie ďalších *in vivo*  $^{31}\text{P}$  MRS meraní v ľudskej pečeni.

**Kľúčové slová:** fosfor, magneticko-rezonančná spektroskopia, pečeň, fantóm, relaxačný čas  $T_1$ , 7 Tesla, inversion recovery, metódy lokalizácie

### 1 Teória

Hoci najväčšie *in vivo* využitie princípov jadrovej magnetickej rezonancie v medicíne je naďalej takzvané zobrazovanie pomocou magnetickej rezonancie (magnetic resonance imaging, MRI), veľmi nádejnou a rýchlo sa rozvíjajúcou technikou je práve *in vivo* magnetická rezonančná spektroskopia (magnetic resonance spectroscopy, MRS). Vývoj tejto neinvazívnej vyšetrovacej metódy, ktorej výstupom nie je priamo obraz tkaniva prípadne orgánu, ale dodatočná metabolická informácia z pomerne presne ohraničenej oblasti, bol spočiatku limitovaný množstvom faktorov, ako sú nízky pomer signál šum (SNR), spôsobený nízkou koncentráciou metabolitov *in vivo* a využívaním celotelových MR tomografov s magnetickým poľom  $B_0 \leq 1\text{T}$ , nehomogenita vzorky, fyziologické pohyby, veľké počty rôznych makromolekúl, ktoré prispievajú k zložitosti spektra a kontaminácia z tkanív a orgánov nachádzajúcich sa v blízkosti meraného objemu. Magnetická rezonančná *in vivo* spektroskopia je uskutočňovaná väčšinou na rovnakých prístrojoch ako klinické MRI s indukciou magnetického poľa typicky 1,5T. MRS je použiteľná pre každé jadro, ktoré má nenulový magnetický moment. Pre *in vivo* aplikácie, sú metabolicky najatraktívnejšími atómami, ktoré spĺňajú túto podmienku vodík ( $^1\text{H}$ ), uhlík ( $^{13}\text{C}$ ), fosfor ( $^{31}\text{P}$ ) a sodík ( $^{23}\text{Na}$ ) [de Graaf, 2007].

Fosforová ( $^{31}\text{P}$ ) magnetická rezonančná spektroskopia (MRS) je účinným nástrojom pre skúmanie fyziologických aj patologických metabolických procesov *in vivo*. Orgánmi záujmu sú predovšetkým mozog, kostrové svaly, srdce a pečeň, ktorých metabolity nám môžu poskytnúť množstvo informácií. Význam ultra-vysokého poľa (ultra high-field MRS), ako napríklad 7 T, je

\* michal.povazan@gmail.com

† tkacov.martin@gmail.com

‡ marek.chmelik@meduniwien.ac.at

predovšetkým vo zvýšení senzitivity (vyšší pomer signál/šum) a zlepšení spektrálneho rozlíšenia [Bogner et al., 2009]. Pri optimalizácii parametrov pre spektroskopické protokoly ako sú TE (echo time, čas echa) a TR (repetition time, opakovací čas) je esenciálne poznať predovšetkým relaxačné časy T<sub>1</sub> a T<sub>2</sub> (potrebné napríklad pre absolútnu kvantifikáciu metabolitov v tkanive [Chmelik et al., 2008], [Bogner et al., 2009]). Relaxačné časy sú rozdielne nielen pre jednotlivé metabolity, ale líšia sa aj v závislosti od indukcie magnetického poľa B<sub>0</sub> [Freeman, 2003], [de Graaf, 2007]. Preto existuje primárna potreba merania relaxačných časov pri prechodoch na vyššie polia. Rozdiely v relaxačných časoch sú dané rôznymi mechanizmami relaxácie. V prípade <sup>1</sup>H-MRS je najpodstatnejší príspevok z tzv. dipól-dipólovej interakcie vyplývajúcej z Bloembergen-Purcell-Pound teórie [de Graaf, 2007]. Z toho dôvodu sa T<sub>1</sub> relaxačné časy s narastajúcim B<sub>0</sub> u <sup>1</sup>H-MRS predlžujú [Krššák et al., 2004]. Naopak u <sup>31</sup>P-MRS súperia o najväčší príspevok anizotropia chemického posunu (CSA) a dipolárna relaxácia. Na rozdiel od dipolárnej interakcie, príspevok CSA je úmerný gyromagnetickému pomeru (γ), druhej mocnине magnetickej indukcie (B<sub>0</sub><sup>2</sup>), asymetrii tieniaceho faktora (σ) a korelačného času (τ<sub>c</sub>) [Evelhoch et al., 1985], [de Graaf, 2007]. Preto je tento príspevok pri vyšších poliach nezanedbateľný.

V súčasnosti je na celom svete iba málo 7T celotelových systémov, približne 30, ktoré slúžia predovšetkým vo výskumnej sfére. K ich malému rozšíreniu a vzácnosti prispievajú predovšetkým vyššie obstarávacie náklady keďže sa jedná o pomerne novú technológiu. Aj kvôli tomu existuje k danej téme iba obmedzený počet článkov a publikácií. Relaxačné časy T<sub>1</sub> *in vivo* v pečeni boli odmerané iba na nižších poliach napr. 3T [Bottomley et al., 1994], [Schmid et al., 2008], u vyšších polí (1.9-, 4.7-, 8.5-T) boli stanovené iba u zvieracích štúdií. [Evelhoch et al., 1985]

V tejto práci sme mali za cieľ overenie meracieho protokolu pomocou takzvaného lokalizačného fantómu *in vitro* a stanovenie relaxačných časov T<sub>1</sub> fosforových metabolitov v ľudskej pečeni na 7T MR systéme pomocou metódy inversion recovery (IR), s použitím jednorozmernej lokalizovanej MR spektroskopie s následným porovnaním nameraných dát s výsledkami z nižších polí prípadne so zvieracími štúdiami. Pri stanovovaní rozdielov v relaxačných časoch a kvalite spektrálneho rozlíšenia je potrebné porovnávať výsledky nadobudnuté rovnakými technikami na podobnom hardvéri. To umožní spojiť porovnanie rozdielov vo výsledkoch s rôznymi možnosťami relaxácie ako CSA alebo dipolárna interakcia pri rôznych indukciách poľa [Bogner et al., 2009].

## 1.1 Fosforové metabolity a spektrum

Fosforové spektrum môže nájsť klinické uplatnenie predovšetkým pre jeho dobrú citlivosť (7% relatívna citlivosť oproti <sup>1</sup>H), 100% zastúpení izotopu v tkanivách, dobrému spektrálnemu rozlíšeniu a hlavne vďaka prítomnosti jeho metabolitov v množstve *in vivo* metabolických procesov, ako aj možnosti určenia intracelulárneho pH (chemický posun fosforových metabolitov je citlivý na fyziologické parametre ako pH alebo koncentrácia horčičku). V spektre fosforu pri pH 7,2 a úplnej horčikovej komplexácii rozoznávame tieto píky: za vnútornú referenciu bol zvolený fosfokreatín (PCr, 0 ppm), rezonanciu ATP rozoznávame na -7.52 ppm (α), -16.26 ppm (β) a -2.48 ppm (γ), anorganický fosfát (Pi) na 5,02 ppm. Pri vhodných podmienkach, prípadne vo vyššom magnetickom poli rozoznávame fosfomonoestery (PME), pozostávajúce z fosforyletanolamínu a fosforylcholínu a fosfodiesteru (PDE) pozostávajúce z glycerol 3 fosforyletanolamínu a glycerol 3 fosforylcholínu [de Graaf, 2007]. Vo fosforovom spektre sa dajú merať aj píky nikotín amid dehydrogenáza (NADH) pri -8.2 ppm, uridín difosfoglukóza (UDPG) pri -9.74 ppm a fosfoenolpyruvát (PEP) pri 2.1 ppm.

## 1.2 Relaxačné časy T<sub>1</sub> a T<sub>2</sub>

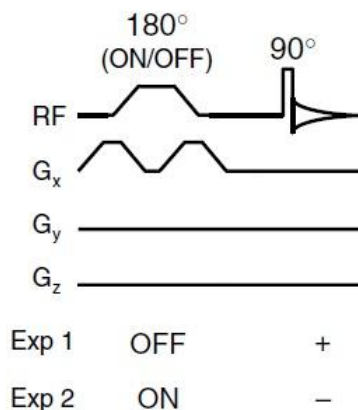
Podstatou všetkých MR experimentov je zmena stavu sústavy jadier s nenulovými magnetickým momentami z rovnovážneho stavu do energeticky bohatšieho stavu. Okrem toho magnetické momenty jadier vykonávajú precesný pohyb s rovnakou fázou, čo predstavuje určitú formu usporiadanosti sústavy. Zo základných termodynamických zákonov vyplýva, že sústava má tendenciu samovoľne prechádzať zo stavu s vyššou energiou do stavu s nižšou energiou a zo stavu s vyššou mierou usporiadanosti do stavu s nižšou mierou usporiadanosti. Sústava jadier prechádza do stavu s nižšou energiou mechanizmami, nazývanými súhrnným pojmom relaxácia. Prechod sústavy zo stavu s vyššou energiou do stavu rovnovážneho, ktorému zodpovedá nižšia energia, sa nazýva spinovo-mriežková (longitudinálna) relaxácia charakterizovaná spinovo-mriežkovým relaxačným časom T<sub>1</sub>. Pri tomto prechode dochádza k premene časti energie jadier s magnetickým momentom na rozličné iné formy energie, hlavne na tepelnú energiu reprezentovanú translačnými, rotačnými a vibračnými pohybmi molekúl a ich častí. Tieto označujeme súhrnne ako mriežka. Stratu koherencie alebo ináč usporiadanosti mikroskopických zložiek transverzálnej magnetizácie a tým jej postupný zánik nazývame spinovo-spinovou (transverzálnou)

relaxáciou charakterizovanou spinovo-spinovým relaxačným časom  $T_2$ . Zistenie relaxačných časov a predovšetkým spinovo-mriežkového času  $T_1$  skúmaného tkaniva je nutnosťou, dôležitou pri optimalizácii všetkých nasledujúcich spektroskopických meraní a pre stanovenie meracieho protokolu. Téma tohto článku bola vybraná s ohľadom na fakt, že existujúcej literatúry je nedostatok a žiadna vedecká skupina sa zatiaľ nezaoberala meraním *in vivo*  $T_1$  relaxačných časov fosforových metabolitov u človeka v pečeni.

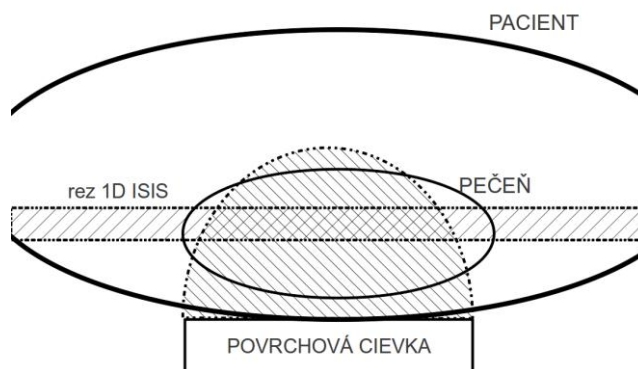
## 2 Metodika

### 2.1 Lokalizácia $^{31}\text{P}$ MRS v pečeni

Pre uplatnenie MR spektroskopie v klinickej praxi má nezastupiteľnú úlohu zaznamenanie NMR spektier z ohraničenej oblasti tela pacienta respektíve z častí jeho orgánov a tkanív, ktoré vykazujú určitú patológiu ako tumory, lézie, alebo sú zaujímavé po metabolickej stránke. Lokalizácia býva v súčasnosti dosiahnutá kombináciou vhodných vlastností rádiofrekvenčnej (RF) cievky, špecifických sekvencií RF pulzov a gradientových magnetických polí. V ideálnom prípade by lokalizácia poskytla signál z presne ohraničenej štruktúry bez straty signálu alebo kontaminácie z okolia. V reálnych podmienkach v dôsledku vlastností prístrojovej funkcie (point spread function) MR systémov a predovšetkým samotných vlastností lokalizačných techník môže byť miera kontaminácie a straty signálu rôzna. Väčšina lokalizačných techník výrazne závisí od  $T_1$  a  $T_2$  relaxácie, preto sú tieto techniky odlišné pre  $^1\text{H}$ -MRS a  $^{31}\text{P}$ -MRS (fosforové jadrá majú dlhšie  $T_1$  relaxačné časy a naopak kratšie  $T_2$  relaxačné časy). Medzi najpoužívanejšie metódy v posledných rokoch patria tie, ktoré sú založené na statických gradientoch poľa (podobne ako kódovanie polohy u MRI). Rozoznávame techniky na lokalizáciu jedného objemu (single voxel) a lokalizáciu viacerých objemov (multi voxel). Zatiaľčo u  $^1\text{H}$ -MRS medzi single voxel techniky patria stimulated echo acquisition mode (STEAM) a point resolved spectroscopy (PRESS), v prípade  $^{31}\text{P}$ -MRS je metódou voľby tzv. image selected *in vivo* spectroscopy (ISIS) [Keevil, 2006]. 3D ISIS sekvencia zahŕňa tri frekvenčne selektívne inverzné pulzy v prítomnosti troch ortogonálnych gradientov magnetického poľa. Inverzné pulzy sú zapínané alebo vypínané v závislosti na kódujúcej schéme sčítaním a odčítaním samostatných skenov získame signál z vybratej oblasti [de Graaf, 2007]. Obrázok č.1 zobrazuje 1D ISIS schému použitú v tejto práci na lokalizovanie signálu z pečene (Obr.2).



Obr. č. 1 - [de Graaf, 2007] – 1D ISIS, pozostávajúci z dvoch experimentov (Exp 1 a Exp 2). RF – radiofrekvencný pulz, tvorí ho  $180^\circ$  pulz, ktorý je v Exp 1 vypnutý a v Exp 2 zapnutý a  $90^\circ$  pulz,  $G_x$ ,  $G_y$ ,  $G_z$  – gradientové pulzy



Obr. č. 2 - . Lokalizácia signálu v pečeni dosiahnutá kombináciou vhodných vlastností rádiofrekvenčnej (RF) povrchovej cievky a metódy 1D ISIS.

### 2.2 Inversion recovery a meranie $T_1$

Na meranie relaxačných časov  $T_1$  slúži hlavne metóda inversion recovery. Ak reprezentujeme Boltzmannov rozdeľovací zákon vektorom magnetizácie s orientáciou do smeru osi  $+Z$  v rotačnej súradnicovej sústave, tento môžeme preklopiť do osi  $-Z$  pomocou  $180^\circ$  RF pulzu, čo znamená, že malý nadbytok častíc so spinom dole preklopíme do stavu so spinom hore, čím dosiahneme „inverziu“ populácie spinov. Toto je nestabilná situácia a preto populácia invertovaných spinov relaxuje naspäť do základného stavu rýchlosťou závislou od spinovo-mriežkovej relaxácie [Freeman, 2003]. Metóda inversion recovery pozostáva z dvoch RF pulzov a dvoch časov.

180° - τ - 90° - snímanie

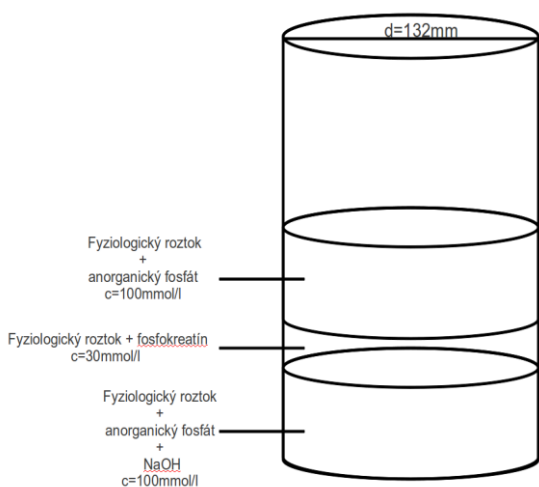
Po dlhom opakovanom čase TR (repetition time), minimálne 5-násobok T<sub>1</sub>, je longitudinálna magnetizácia preklopená 180° pulzom. Magnetizácia sa pomaly vracia do pôvodného stavu počas času TI (inversion time, niekedy označovaný aj τ), po ktorom je sklopená do tranzverzálnej roviny 90° pulzom a zaznamenaná. Pre intenzitu NMR signálu potom platí vzťah (vzorec č. 1):

$$M_0 - M_\tau = 2M_0 e^{-\tau/T_1}$$

vzorec č. 1 – M<sub>0</sub> – rovnovážna magnetizácia, M<sub>τ</sub> – magnetizácia v čase τ, τ – relaxačná doba

### 3 Experimentálna časť

Pred samotným experimentom sme skúmali, či lokalizácia signálu nejakým spôsobom ovplyvňuje výsledky a zároveň sme určovali celkovú kvalitu lokalizovaných 1D rezov. K tomu sme využili trojkomorový fantóm (Obr. č. 3).



Obr. č. 3 – Lokalizačný fantóm (popis vid' text)

Fantóm bol valcového tvaru z nemagnetického materiálu. V dvoch vonkajších komorách sa nachádzal fyziologický roztok zmiešaný s anorganickým fosfátom (c=100mmol/l). V komore bližšej ku cievke sa navyše nachádzal hydroxid sodný kvôli zmene pH celej komory. Zmenené pH viedlo ku zmene rezonančnej frekvencie a teda aj polohy signálov v spektre. V prostrednej, nami skúmanej časti, sa nachádzal fyziologický roztok zmiešaný s fosfokreatínom (c=30mmol/l). Fantóm sme zaznamenali lokalizovanou aj nelokalizovanou metódou. Pre lokalizovanú spektroskopiu sme použili rovnakú variantu ISIS ako v neskorších meraniach u dobrovoľníkov. Kvalitu lokalizácie

popisujú nasledujúce parametre: selection efficiency (E<sub>sel</sub>), efektívna hodnota vyjadrujúca koľko signálu bolo zameraných práve v rámci nami vybraného objemu (ideálne 100%), suppression efficiency (E<sub>sup</sub>), efektívna hodnota vyjadrujúca účinnosť potlačenia nežiaduceho signálu a kontaminácia (K), hodnota ktorá vyjadruje podiel získaného signálu z okolitého tkaniva, okolo vybraného objemu (ideálne 0%). Tieto parametre vyjadrujú celkovú kvalitu rezov generovaných jednotlivými pulzmi. Tieto parametre sa vypočítajú podľa vzťahov:

$$E_{sel} = \left( \frac{[S_{mid}]_{loc}}{[S_{mid}]_{unloc}} \right) \times 100\%$$

vzorec č. 2

$$E_{sup} = \left( 1 - \frac{([S_{out\_l}]_{loc} + [S_{out\_r}]_{loc})}{([S_{out\_l}]_{unloc} + [S_{out\_r}]_{unloc})} \right) \times 100\%$$

vzorec č. 3

$$K = \left( \frac{([S_{out\_l}]_{loc} + [S_{out\_r}]_{loc})}{([S_{out\_l}]_{loc} + [S_{out\_r}]_{loc} + [S_{mid}]_{loc})} \right) \times 100\%$$

vzorec č. 4

Kde jednotlivé parametre sú získané z NMR spektier nameraných lokalizovanou aj nelokalizovanou metódou [Keevil et al., 1990].

Dáta boli namerané z 9 zdravých dobrovoľníkov na 7T MR systéme (Magnetom, Siemens, Erlangen Germany). použitím povrchovej, dvojito naladenej cievky (<sup>1</sup>H/<sup>31</sup>P) s geometriou o priemere 10cm (RAPID Biomedical, Columbus, OH). <sup>31</sup>P kanál bol naladený na 120,3 MHz. Dobrovoľníci boli umiestnení v polohe ležmo na boku, so stredom povrchovej cievky pod úrovňou posledného rebra. Počas celého merania mali zostať relaxovaní a bez pohybu.

Na začiatku merania bola homogenita statického magnetického poľa doladená štandardou procedúrou (lokalizovaný shimming) v ručne zvolenej oblasti pečeneového tkaniva tak aby vybraný objem nezasahoval do hrudných svalov. Objem nášho záujmu bol obmedzený rozmermi a hranicami citlivosti cievky. Na základe protónových lokalizačných obrázkov, bol meraný 30 mm rez takmer rovnobežný s cievkou. Výsledný skúmaný objem bol guľový rez s polomerom 40 mm a výškou 30 mm (150 ml).

T<sub>1</sub> relaxačné časy boli merané pomocou varianty ISIS sekvencie s použitím adiabatického inverzného pulzu a použitím 8 inverzných časov (TI). TI boli vybrané tak, aby namerané dáta boli rovnomerne

rozložené na relaxačnej krivke. Meranie sme rozdelili pre meranie rýchlo relaxujúcich metabolitov a pomaly relaxujúcich metabolitov, preto máme dve sady TI. (SHORT TI: 20, 50, 100, 300, 500, 700, 1000 a 2000 ms, TR=3s; LONG TI: 100, 500, 1000, 3000, 5000, 7000, 10000 a 20000 ms, TR=20s; spektrálna šírka 5000 Hz; 1024 bodov, 5 priemerov). Na inverziu bol použitý adiabatický inverzný pulz WURST (trvanie: 3 ms) sekvencia po čase TI pokračovala 1D ISIS lokalizáciou: Inverzný GOIA pulz (trvanie: 5ms) a obdĺžnikový excitačný pulz (trvanie: 300  $\mu$ s). Pri našom meraní bola rezonančná frekvencia nastavená raz na oblasť ATP a druhýkrát na oblasť PME-Pi-PDE. Excitačný pulz generoval  $90^\circ$  sklápací uhol vo vzdialenosti 3-5 cm od cievky pre zosilnenie lokalizovaného signálu. (Obr. 2) Namerané dáta (free induction decay - FID) boli spracované pomocou programu jMRUI (verzia 4.0). Analýza spektra pozostávala zo zarovnania a nastavenia PCr píku na 0 ppm a prípravy na regresiu dát. Relatívne amplitúdy fosforových metabolitov boli stanovené pomocou AMARES regresného algoritmu s odhadovanými počiatočnými hodnotami a s prior knowledge, ktorý používal Lorentziansky model.

## 4 Výsledky a diskusia

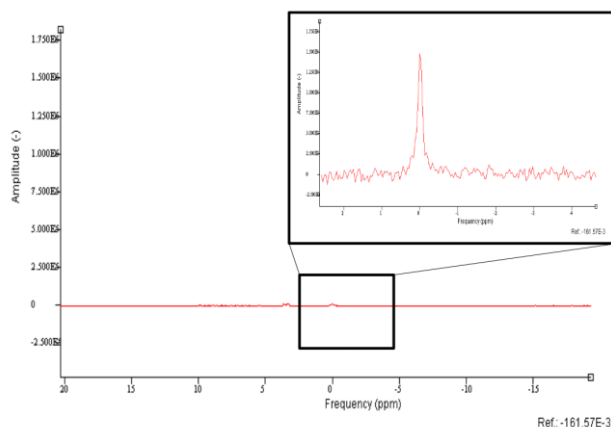
Z relatívnych amplitúd nameraných spektier na obrázkoch 5 a 6 s použitím vzorcov 2 - 4 sme boli schopný vypočítať parametre pre lokalizovanú spektroskopiu 1D ISIS s použitím adiabatického inverzného pulzu, ktoré sa nachádzajú v tabuľke. [Tab.1]

**Tab. 1**

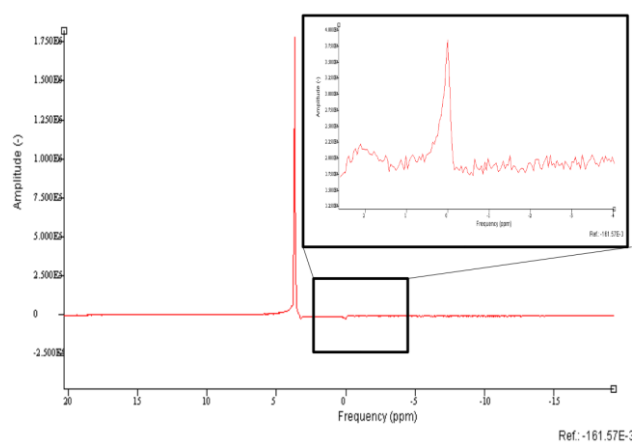
Esel [%]	Esup [%]	K [%]
81.63	97.57	35.83

Intenzita signálov v okrajových objemoch fantómu bola tak veľká, že aj napriek takmer 98% potlačeniu signálu z týchto objemov pomocou ISIS, zostávajúce 2% signálu stačia na 36% kontamináciu signálu zo skúmanej oblasti. Je to spôsobené veľkým nepomerom signálov medzi skúmaným objemom a okrajovými objemami fantómu. V tomto prípade ide o veľký extrém, ktorý ďaleko presahuje rozdiely medzi skúmanými oblasťami a ich nežiaducim okolím v živých sústavách. Experiment bol takto úmyselne nastavený, aby sme mohli demonštrovať účinnosť lokalizovanej spektroskopie metódou ISIS.

Z nameraných spektier fantómu (obr. 6 a 7, regresné krivky 8 a 9) sme vypočítali relaxačný čas PCr pri použití



Obr. č. 5 – Lokalizované  $^{31}\text{P}$  spektrum fantómu, vo výreze je signál fosfokreatínu (jmrui)

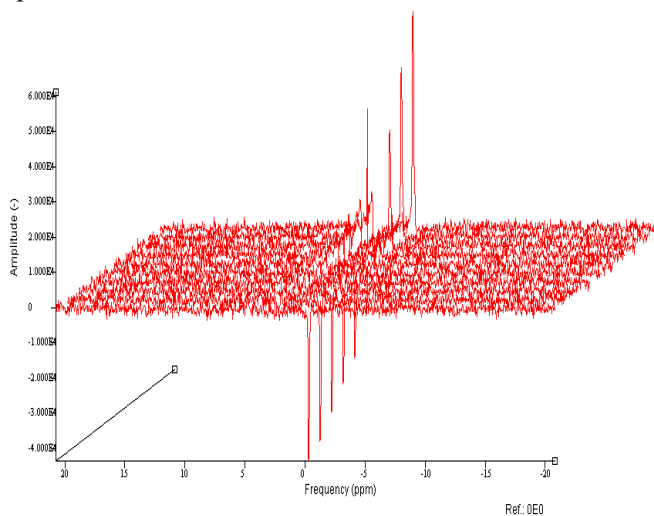


Obr. č. 6 – Nelokalizované  $^{31}\text{P}$  spektrum fantómu, vo výreze je signál fosfokreatínu (jmrui)

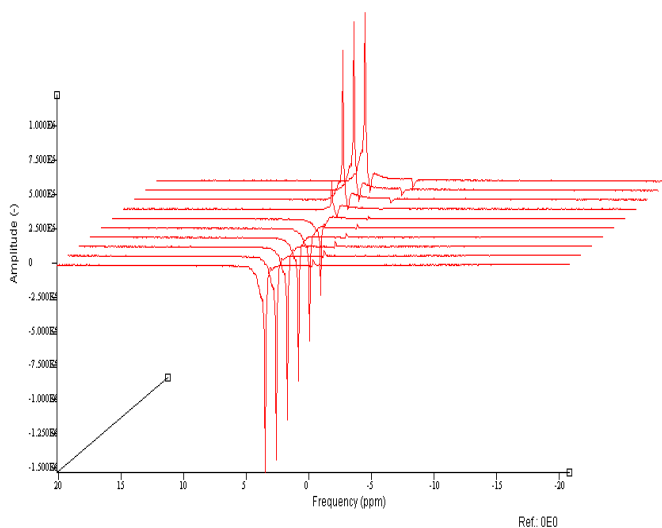
nelokalizovanej spektroskopie ( $T_1 = 3359$  ms (3283; 3435)) a následne aj pri použití lokalizovanej spektroskopie ( $T_1 = 3330$  ms (2918; 3556)). Relaxačné časy s použitím oboch metód sa nachádzajú nie len v intervale spoľahlivosti oboch meraní, ale celkovo sú takmer identické. Cieľom tohto experimentu bolo dokázať, že lokalizovaná metóda vedie k rovnakým  $T_1$  relaxačným časom.

Všetky experimenty s fantómom smerovali k nameraniu a vypočítaniu relaxačných časov metabolitov v pečeni a porovnaní výsledkov s predchádzajúcimi meraniami na nižších poliach a so zvieracími štúdiami. Vyhodnotenie výsledkov bolo sťažené nedostatkom súvisiacich publikácií a preto bola potrebná opatrnosť pri stanovovaní záverov. Kvantifikácia pečňových spektier je náročná, keďže v oblasti od 0 po 8 ppm má rezonančnú frekvenciu viacero metabolitov, niektoré vo forme dubletov, ktoré sa môžu čiastočne prekrývať. Veľkou výhodou ultra-vysokého poľa je zvýšený pomer signál/šum a lepšie spektrálne rozlíšenie (menšie prekrývanie píkov), čo umožnilo použitie regresie v časovej doméne algoritmom AMARES. Dobrá lokalizácia bola základom celej práce, pretože svalové tkanivo má metabolicky aj

magneticky rozdielne vlastnosti od nami meraného pečňového



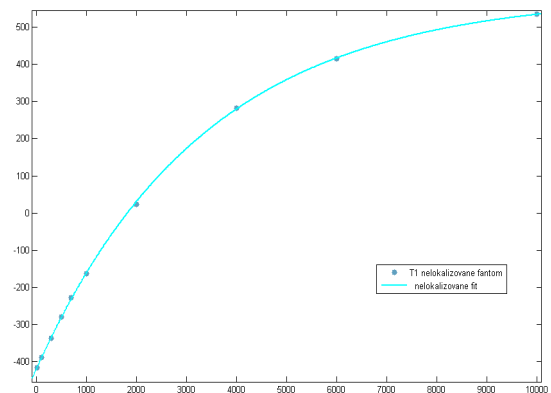
Obr. č. 7 – IR spektrá získané pomocou lokalizovanej metódy. (prvé spektrum je invertované, posledné normálne) (jmrui)



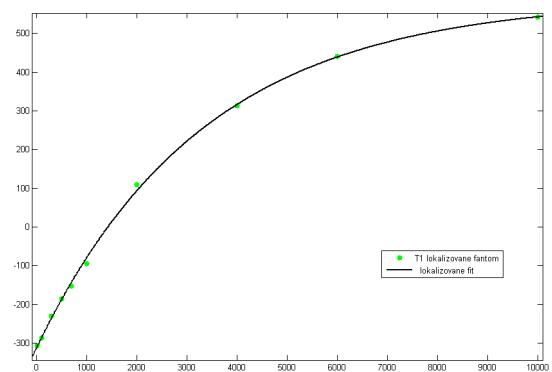
Obr. č. 8 – IR spektrá získané pomocou nelokalizovanej metódy. (jmrui)

tkaniva. Kontamináciu je jednoduché sledovať pomocou signálu PCr, ktorý sa nachádza len vo svaloch. 1D ISIS lokalizácia umožnila výbornú špecifickosť a vysoký pomer signál/šum. U žiadneho dobrovoľníka nebola zistená natoľko výrazná kontaminácia, že by musel byť vyradený z experimentu. Fosforové spektrá boli zaznamenávané kontinuálne, pretože ak by sme brali ohľad na pohyb dýchacích svalov, neprímerane by to predĺžilo merací čas dobrovoľníkov, ktorý bol takto približne 40 – 50 minút. Pohyb pečene proti cievke bol obmedzený polohou dobrovoľníkov (poloha pečene na cievke). Pohyb pečene paralelne s cievkou mohol rozšíriť spektrálne čiary a zmeniť ich tvar na gaussovský.

Efekt týchto pohybov na výsledky sa neukázal byť významný. Relaxačné časy všetkých metabolitov ako aj ich priemery sú prehľadne zobrazené v tabuľke. [Tab.2]



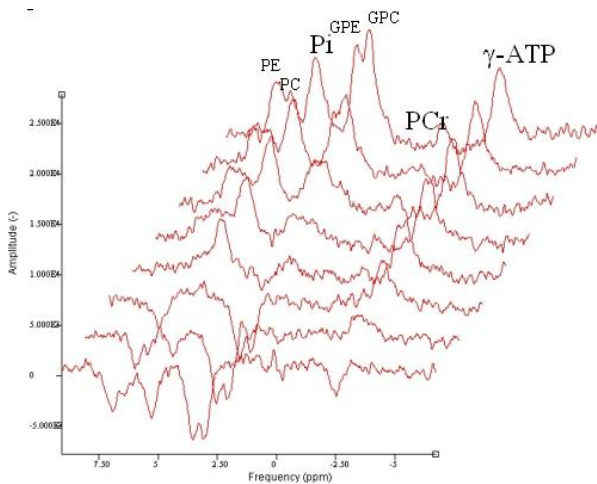
9 – Regresná krivka relatívnych amplitúd  $^{31}\text{P}$  metabolitov pre nelokalizované spektrum fantómu, ako regresná funkcia bol použitý vzorec 1 (Matlab)



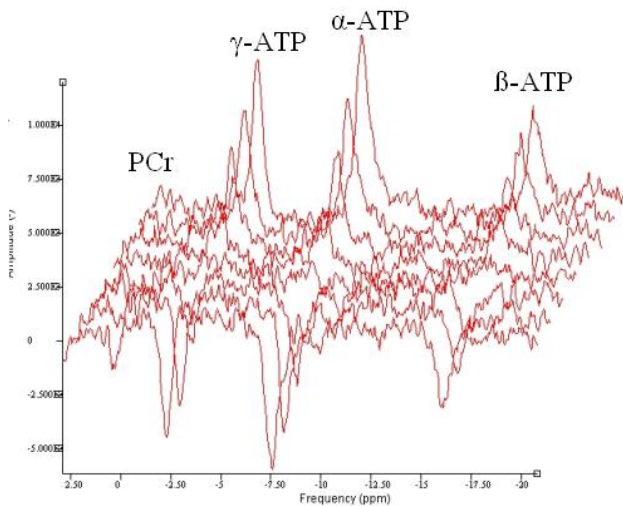
Obr. č. 10 – Regresné krivky relatívnych amplitúd  $^{31}\text{P}$  metabolitov pre lokalizované spektrum fantómu, ako regresná funkcia bol použitý vzorec 1 (Matlab)

Krátke relaxačné časy metabolitov ako ATP a  $\text{P}_i$  v pečeni sú porovnateľné s relaxačnými časmi na nižších poliach. V prípade dlhších relaxačných časov sa do popredia dostávajú rôzne vplyvy prostredia, uplatňujú sa viaceré mechanizmy relaxácie. Veľmi dôležitá je predovšetkým individuálna koncentrácia paramagnetických látok v pečeni u každého dobrovoľníka, čo spôsobuje mierne väčšie rozdiely medzi jednotlivými nameranými výsledkami. Naša práca sa opiera hlavne o štúdiu [Evelhoch et al. 1985], kde nebola dokázaná štatisticky významná zmena v  $T_1$  relaxačných časoch fosforových metabolitov pečene potkana pri 1,9 T, 4,7 T a 8,5 T, na rozdiel od významného poklesu v prípade mozgu a svalov a ďalej s prácou [Schmid et al., 2008], ktorá sa zaoberala meraním fosforových metabolitov v

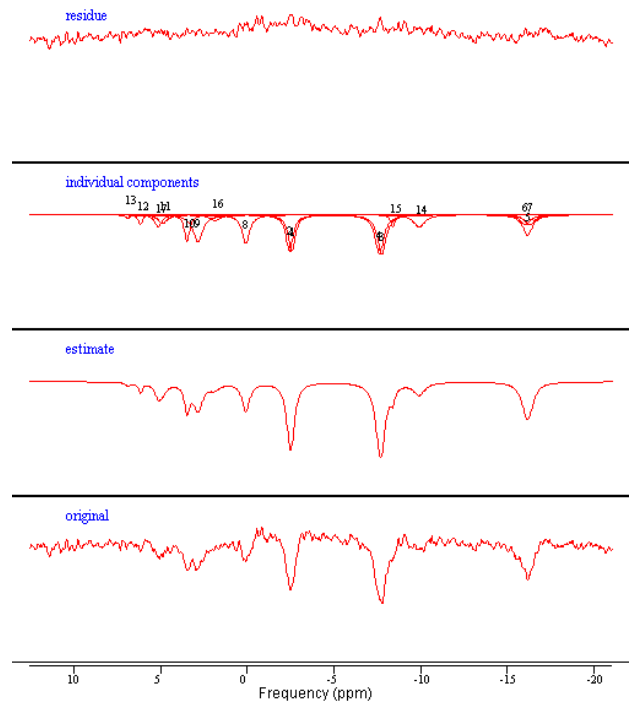
pečeni u ľudských dobrovoľníkov na 3T prístroji. Odlišné výsledky v prípade relaxačných časov mozgu, svalu a pečene sa dávajú do súvisu s prítomnosťou spomínaných paramagnetických látok v pečeni, ktoré tak sú hlavným mechanizmom relaxácie v tomto tkanive. Preto sme vychádzali z predpokladu, že naše namerané dáta sa budú zhodovať s nameranými dátami z prístrojov so slabšou indukciou magnetického poľa. Výsledky v prípade metabolitov s krátkym relaxačným časom kam okrem ATP patrí aj anorganický fosfát  $P_i$ , sa



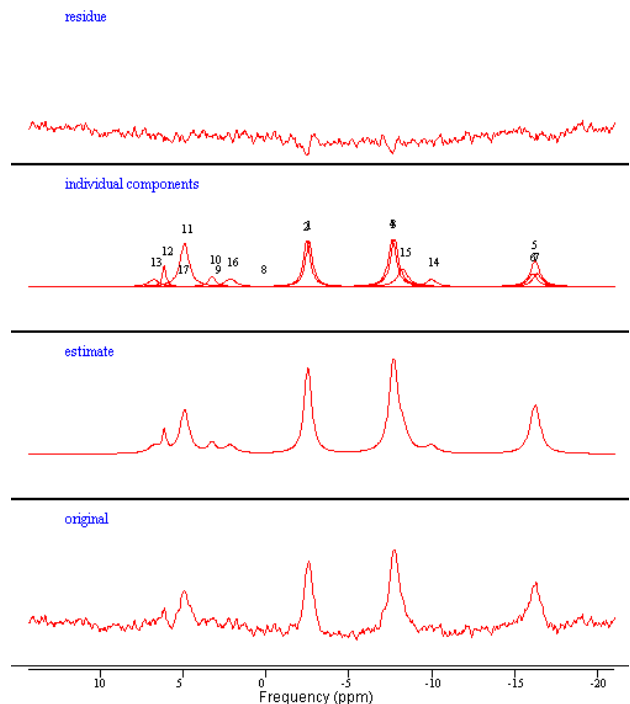
Obr. č. 11 – Dobrovoľník – všetkých 8 signálov metabolitov s dlhými relaxačnými časmi (jmruj)



Obr. č. 12 – Dobrovoľník – všetkých 8 signálov metabolitov s krátkymi relaxačnými časmi (jmruj)

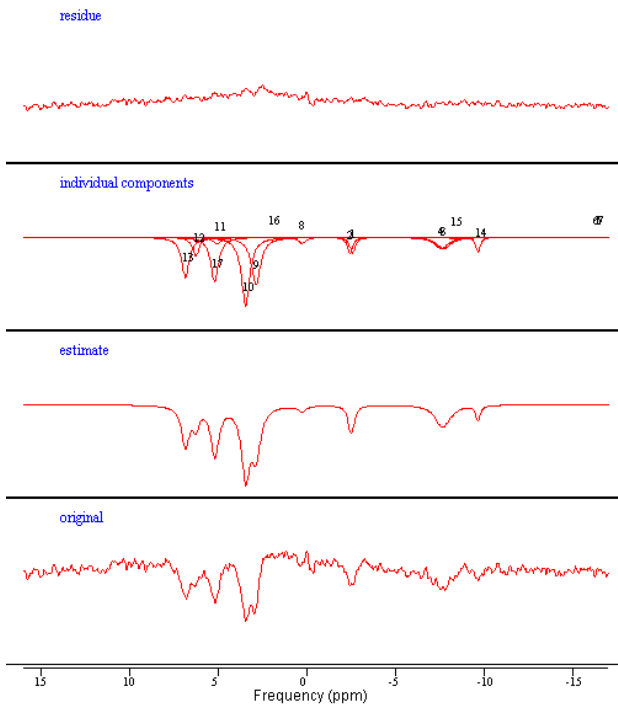


Obr. č. 13 – Dobrovoľník – Residuum, individuálne píky, regresia a spektrum krátkych relaxačných časov s použitím AMARES - prvý meraný signál v čase 20 ms. (jmruj)

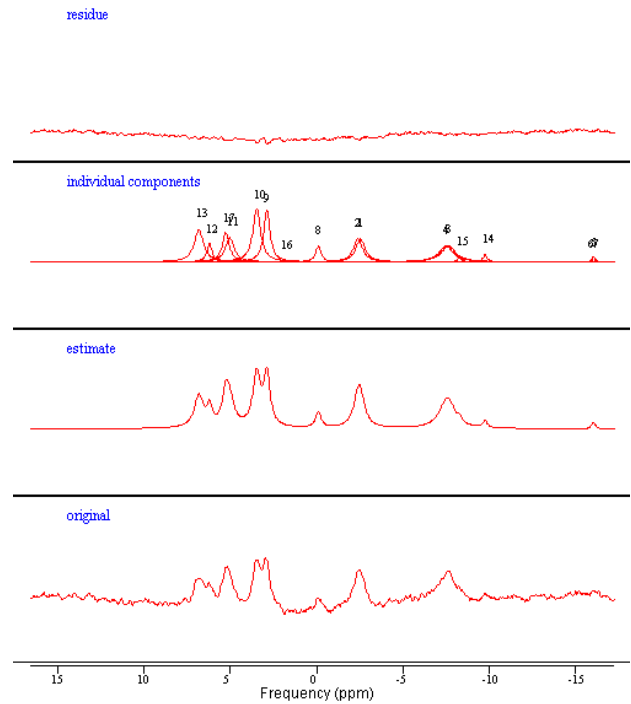


Obr. č. 14 – Dobrovoľník – Residuum, individuálne píky, regresia a spektrum krátkych relaxačných časov s použitím AMARES - posledný meraný signál v čase 2000 ms. (jmruj)





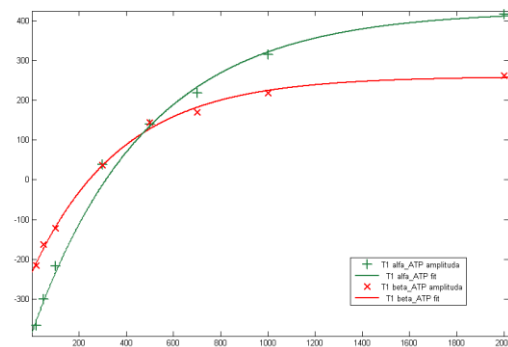
Obr. č. 15 – Dobrovoľník – Residuum, individuálne píky, regresia a spektrum dlhých relaxačných časov s použitím AMARES - prvý meraný signál v čase 100 ms. (jmruj)



Obr. č. 16 – Dobrovoľník – Residuum, individuálne píky, regresia a spektrum dlhých relaxačných časov s použitím AMARES - posledný meraný signál v čase 20000 ms. (jmruj)

zhodovali v rámci štandardnej chyby, pričom rozdiel medzi výsledkami porovnaných prác nebol väčší ako 100 ms. Aj samotné hodnoty u jednotlivých probandov sa pohybovali v približne rovnakých číslach o čom svedčí aj menšia štandardná chyba... Napriek tomu, že v prípade metabolitov s dlhými relaxačnými časmi sú rozdiely medzi našimi a dosiaľ zverejnenými výsledkami väčšie, výrazná odchýlka nastala iba v prípade metabolitu PC. U tohto metabolitu je vidieť aj veľmi veľká štandardná chyba, čo svedčí o pomerne veľkej rozdielnosti výsledkov. Celkovo môžeme konštatovať, že pôvodný predpoklad zachovania relaxačných časov v rôzne silných magnetických poliach v prípade pečene sme potvrdili a v tomto prípade platí analógia so zvieracími experimentami.

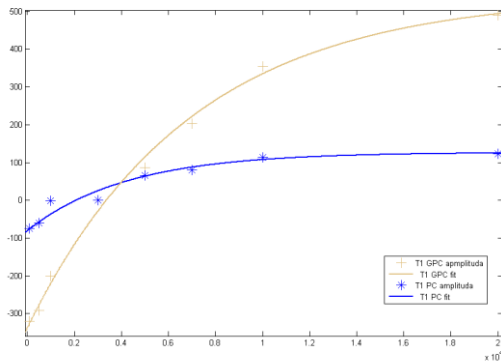
Tieto výsledky bolo nevyhnutné potvrdiť, pretože táto analógia nie vždy platí, ako sa ukázalo v iných experimentoch. [Forbes et al., 2009]



Obr. č. 17 – Dobrovoľník – regresná krivka  $\alpha$ -ATP (matlab)

Tab. 2

Subject	$\gamma$ -ATP	$\beta$ -ATP	$\alpha$ -ATP	GPC	GPE	PC	PE	Pi
1	0,37	0,49	0,40	5,79	5,11	2,57	4,69	0,32
2	0,64	0,63	0,48	6,49	6,51	5,70	4,39	0,68
3	0,52	0,61	0,59	7,27	5,75	3,96	5,21	0,50
4	0,50	0,60	0,50	5,56	5,73	2,01	3,88	0,77
5	0,50	0,49	0,38	6,93	6,91	4,21	5,77	1,08
6	0,55	0,67	0,44	5,85	7,53	5,48	1,26	0,66
7	0,41	0,55	0,46	8,12	6,59	2,69	-	0,46
8	0,48	0,45	0,53	1,99	6,82	4,28	-	0,47
9	0,52	0,58	0,39	5,47	4,76	2,78	5,68	1,36
<b>Priemer</b>								
$\pm$ SD	0,50 $\pm$ 0,08	0,56 $\pm$ 0,07	0,46 $\pm$ 0,07	5,94 $\pm$ 1,73	6,19 $\pm$ 0,91	3,74 $\pm$ 1,31	4,41 $\pm$ 1,55	0,70 $\pm$ 0,33
95% CI	0,45 - 0,55	0,51 - 0,61	0,42 - 0,51	4,81 - 7,07	5,60 - 6,78	2,88 - 4,60	3,40 - 5,42	0,48 - 0,92



Obr. č. 18 – Dobrovoľník – regresná krivky GPC a PC (matlab)

## 5 Záver

V našej práci sme použili rýchlu lokalizáciu s vysokým podielom signál/šum (SNR) u ktorej sme dokázali, že relaxačné časy sú rovnaké ako v prípade nelokalizovanej metódy. Zároveň sme určili efektívnosť tejto metódy lokalizácie. To nám umožnilo zmerať relaxačné časy fosforových metabolitov pečene u ľudí na 7T, ktoré sa kvôli blízkej prítomnosti svalového tkaniva s použitím nelokalizovanej metódy zmerať nedajú. Namerané relaxačné časy sú esenciálnou informáciou pre optimalizovanie ďalších *in vivo*  $^{31}\text{P}$  MRS meraní v ľudskej pečeni na 7T. Tieto výsledky, a rovnako aj postup merania, môžu byť v budúcnosti použité ako porovnávací štandard pre ďalší výskum chorôb a abnormalít pečene.

## Literatúra

- [Bogner et al., 2009] Bogner, W., Chmelik, M., Schmid, A.I., Moser, E., Trattnig, S., Gruber, S. (2009). Assessment of  $^{31}\text{P}$  Relaxation Times in the Human Calf Muscle: A Comparison between 3 T and 7 T *In vivo*. In *Magnetic Resonance in Medicine* 62:574–582
- [Bottomley et al., 1994] Bottomley, P.A., Ouwerkerk, R., (1994) Optimum Flip-Angles for Exciting NMR with Uncertain T1 Values. In *Magnetic Resonance in Medicine* 32:137–141
- [Chmelik, 2008] Chmelik, M., Schmid, A. I., Gruber, S., Szendroedi, J., Krššák, M., Trattnig, S., Moser, E., Roden, M. (2008). Three-Dimensional High-Resolution Magnetic Resonance Spectroscopic Imaging for Absolute Quantification of  $^{31}\text{P}$  Metabolites in Human Liver. In *Magnetic Resonance in Medicine* 60:796–802
- [de Graaf, 2007] de Graaf, R. A., *In vivo* NMR Spectroscopy, Second edition. Chichester: John Wiley and Sons, 2007. ISBN 978-0-470-02670-0
- [Evelhoch et al., 1985] Evelhoch, J. L., Ewy, C. S., Siegfried, B. A., Ackerman, J. J. H., Rice, D. W., Briggs, R.W. (1985)  $^{31}\text{P}$  Spin-Lattice Relaxation Times and Resonance Linewidths of Rat Tissue *in vivo*: Dependence upon the Static Magnetic Field Strength. In *Magnetic Resonance in Medicine* 2:410-417
- [Forbes et al., 2009] Forbes S. C., Slade J. M., Francis R. M., Meyer R. A., (2009) Comparison of oxidative capacity among leg muscles in humans using gated  $^{31}\text{P}$  2-D chemical shift imaging. In *NMR in Biomedicine* 22:1063-1071
- [Freeman, 2003] Freeman, R., *Magnetic Resonance in Chemistry and Medicine*. New York: Oxford University Press, 2003. ISBN 0-19-926225-X
- [Keevil, 2006] Keevil, S. F., (2006) Spatial localization in nuclear magnetic resonance spectroscopy. In *Physics in Medicine and Biology* 51: R579–R636
- [Keevil et al., 1990] Keevil, S. F., Porter, D. A., Smith, M. A. (1990) A method for characterising localisation techniques in volume selected nuclear magnetic resonance spectroscopy. In *Physics in Medicine and Biology* 35: 821
- [Krššák et al., 2004] Krššák, M, Mlynarik V, Meyerspeer M, Moser E, Roden M. (2004) H-1 NMR relaxation times of skeletal muscle metabolites at 3 T. In *Magnetic Resonance Materials in Physics, Biology and Medicine*, 6:155–159
- [Schmid et al., 2008] Schmid, A. I., Chmelik, M., Szendroedi, J., Krššák, M., Brehm, A., Moser, E., Roden, M. (2008). Quantitative ATP synthesis in human liver measured by localized  $^{31}\text{P}$  spectroscopy using the magnetization transfer experiment. In *NMR in Biomedicine* 2008; 21: 437–443

# Bio-dekontaminácia zubných povrchov a dutín pomocou DC korónových výbojov

Zuzana Šipoldová<sup>1\*</sup>

Školiteľ: Zdenko Machala<sup>2†</sup>

<sup>1</sup> Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava,

<sup>2</sup> Katedra astronómie, fyzika Zeme a meteorológie, FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

**Abstrakt:** Dekontaminácia povrchov nerovnovážnou plazmou elektrických výbojov má veľký význam, pretože nedochádza k degradácii materiálu ako to býva u konvenčných metód (suché teplo, autokláv). Takúto metódu je možné využiť na bio-dekontamináciu ľudských tkanív, zamorených vôd, medicínskych nástrojov i pomôcok, plastových obalov potravín, ba dokonca aj samotných potravín.

V našej práci sme sa zamerali na aplikáciu nerovnovážnej plazmy pri atmosférickom tlaku na bio-dekontamináciu bakteriálnych spór *Bacillus cereus* a *Streptococcus* biofilmov na drsnom povrchu a v dutinách extrahovaných ľudských zubov.

Naším cieľom bolo testovať hlavne účinky kladného a záporného korónového výboja na spóry baktérií alebo biofilmy a následne vyhodnotiť účinnosť dezinfekcie v závislosti od parametrov výboja.

Podarilo sa nám dokázať, že nízkoteplotná plazma funguje ako prostriedok na dekontamináciu zubov od spór aj biofilmov, a teda predstavuje zaujímavú alternatívu k chemickým a mechanickým metódam, ktoré sa používajú v stomatológii.

*Kľúčové slová:* bio-dekontaminácia povrchov, zuby, nerovnovážna plazma pri atmosférickom tlaku, korónový výboj, spóry baktérie, bakteriálny biofilm

## 1 Teoretický úvod

Naša práca je interdisciplinárna, stretáva sa v nej fyzika plazmy, mikrobiológia a z časti aj stomatológia. Aby aj nezainteresovaný čitateľ pochopil predmet práce, v prvej časti si priblížime tieto vedné a klinické oblasti.

### 1.1 Plazma a jej generácia

Plazma je vlastne ionizovaný plyn, v ktorom sme zvyšovali počet ionizovaných častíc, až nastala po-

larizácia plynu. Tento plyn je navonok elektricky neutrálny, až na miesta v blízkosti elektród.

Plazma sa dá generovať dvoma spôsobmi. Prvý je zahriať plyn na vysokú teplotu, pri ktorej nastáva termická ionizácia. Druhý spôsob, ktorý používame aj my, využíva elektrické výboje. Takto vznikajúca plazma nie je v rovnovážnom stave. [Martišoviš, 2004]

*Nízkoteplotná (nerovnovážna) plazma* je charakterizovaná vysokou teplotou elektrónov  $T_e$  a nízkou teplotou plynu  $T_g$ , ktorý je zložený z ťažkých častíc: atómov, molekúl a iónov ( $T_e \gg T_g$ ). V extrémnom prípade môže teplota elektrónov dosiahnuť 20000 K, zatiaľ čo teplota plynu zostáva blízka izbovej teplote. [Becker et al., 2005]

#### 1.1.1 Vznik výboja

Generácia plazmy pomocou elektrického výboja využíva vznik elektrického poľa v plazme pri prechode prúdu.

Ak si predstavíme výbojku ako uzavretú banku s dvoma elektródami na konci, ktoré sú napojené na zdroj jednosmerného napätia, tak na začiatku sú v banke len primárne elektróny. Pri zvyšovaní napätia na elektródach, sú primárne elektróny urýchľované a schopné ionizovať molekuly plynu, pričom vznikajú ďalšie elektróny, proces sa opakuje. Vytvára sa elektrónová lavína.

Po dosiahnutí prierazu sa medzi elektródami rozvinie výboj, ktorého charakter závisí od tlaku plynu a jeho zloženia, ale hlavne od tvaru elektród a vlastností zdroja napätia. Elektrickým prúdom sa do výboja neustále dodáva energia, ktorá sa z neho odvádza do okolia vo forme tepla a svetla. Rozoznávame tri základné druhy výbojov: korónový, tlecí a oblúkový. [Martišoviš, 2004]

#### 1.1.2 Korónový výboj

Koróna môže existovať iba v nehomogénnom elektrickom poli pri tlakoch vyšších ako je 1 kPa. Ne-

\* sipoldovaz@gmail.com

† machala@fmph.uniba.sk

homogénne pole vytvárame tak, že charakteristická veľkosť jednej z elektród je oveľa menšia než medzielektrodová vzdialenosť. Tú elektródu potom nazývame *korónujúca elektróda*. Podľa polarít korónujúcej elektródy rozoznávame: kladnú a zápornú korónu. [Martišovič, 2004]

**Kladná koróna** začína výbojom, ktorý je viditeľný voľným okom a nazýva sa *burst koróna*. Prechádza do *streamerovej koróny*, ktorej režim nie je stabilný a emituje silné elektromagnetické žiarenie. Tento režim sa prejavuje viacerými tenkými, krátko žijúcimi a opakujúcimi sa prúdovými vláknami (streamermi), ktoré začínajú na špičke hrotu. Je to priamy predchodca iskry. [Becker et al., 2005]

**Záporná koróna:** Pre začiatočnú fázu výboja negatívnej koróny v geometrii hrot-rovina sú charakteristické nestále pravidelné prúdové impulzy - *Trichelove pulzy*. Frekvencia Trichelových pulzov lineárne rastie so zvyšovaním privádzaného napätia, až na úroveň niekoľko MHz. [Becker et al., 2005]

### 1.1.3 Prechodová iskra

Prechodová iskra je nový typ výboja, ktorý sa z hľadiska charakteru nachádza niekde medzi streamerom a iskrou. Má pulzný charakter s krátkymi (do 100 ns) pulzmi, s vysokou amplitúdou (rádovo 1 A) a frekvenciami niekoľko kHz.

Počas prechodu streameru do iskry v streamerovom kanáli teplota plynu rastie a zároveň sa znižuje jeho hustota, čo prispieva k nárastu redukovaného poľa E/N. V dôsledku opakovaného prechodu iskry sa časť energie odovzdáva plynu, ktorý sa zahrieva. Teplota plynu meraná pri prechodovej iskre bola pri rovinatej elektróde ponorenej vo vode okolo  $550 \pm 100$  K. [Machala et al., 2008]

## 1.2 Baktérie

Baktérie sú typickým predstaviteľom prokaryotických organizmov. Patria medzi najmenšie organizmy a ich zvyčajný priemer je od 0,5 do  $2 \mu\text{m}$ . Jednotlivé druhy baktérií sa od seba môžu líšiť v ultraštruktúre a v chemickom zložení, preto je nemožné opísať typickú baktériu.

### 1.2.1 Stavba bakteriálnej bunky

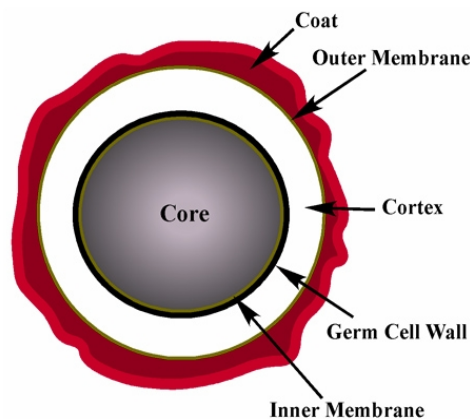
Každá bakteriálna bunka obsahuje štruktúry, ako bunková stena, cytoplazmatická membrána, cyto-

plazma, ribozómy a nukleoid. U niektorých baktérií môžeme pozorovať aj iné štruktúry, organely: puzdro, bičiky (u pohyblivých baktérií), fimbrie (pili u Gram-negatívnych baktérií), inklúzie a endospóry. [Petrovičová and Šimkovičová, 2004, Singleton, 2004]

### 1.2.2 Spóry

Niektoré rody Grampozitívnych baktérií (*Clostridium* a *Bacillus*) môžu za určitých, pre rast a množenie nepriaznivých, podmienok pretvoriť svoju vegetatívnu a fyziologicky aktívnu bunku v bunku pokojovú (dormantnú), ktorá je charakterizovaná minimálnym až nulovým metabolizmom s extrémnou odolnosťou k prostrediu. Takáto forma baktérií sa volá spóra alebo endospóra, pretože vzniká vnútri bunky.

Tvar, veľkosť a uloženie spór sú typické pre rôzne druhy baktérií, čo možno využiť na ich identifikáciu. Spóry sú väčšinou oválne, alebo okrúhle. [Petrovičová and Šimkovičová, 2004]



Obr. 1: Schématický obrázok stavby spóry [Angert, 2010]

**Stavba spóry** Charakteristickou vlastnosťou spór je takmer nulový obsah voľnej vody a vysoká odolnosť voči teplote. Vnútorou vrstvou obklopujúcou genóm (nukleoid) je cytoplazmatická membrána. Nad ňou je vrstva peptidoglykánu zhodného s peptidoglykánom vegetatívnej bunky. Potom je hrubá vrstva nazývaná kortex, ktorý je tvorený špeciálnym peptidoglykánom.

*Kortex* je nositeľom extrémnej odolnosti spóry voči mechanickým a iným účinkom prostredia. Je obklopený vonkajšou membránou pochádzajúcou z cy-

toplazmatickej membrány pôvodnej bunky, nad ktorou sa nachádza *plášť* spóry. Ten sa skladá z proteínov bohatých na cysteín a z hydrofóbných aminokyselín. Plášť je nositeľom rezistencie spór voči chemikáliám, ultrafialovému a ionizujúcemu žiareniu. Na povrchu spóry môže byť exospórium, čo je membrána zložená z lipidov a proteínov. (Obr: 1)

Spóry sú mimoriadne termorezistentné, inaktivujú sa suchým teplom iba pri vysokých teplotách (160 – 180° po dobu 2 hodín), parou pod tlakom (autoklávaním) aplikovanou pri 121° počas 30 minút. Spóry sú odolné aj voči dezinfekčným prostriedkom, chemikáliám, farbivám, extrémom teploty, mechanickému poškodeniu a voči vyschnutiu. [Petrovičová and Šimkovičová, 2004, Singleton, 2004]

### 1.2.3 Biofilmy

Biofilm je zhluk mikroorganizmov, v ktorom bunky adherujú jedna na druhú a na povrchy. Tieto adherujúce bunky sú často vložené do extracelulárneho polyméru (ang. *extracellular polymeric substance - EPS*), ktorý sa skladá z extracelulárnej DNA, proteínov a polysacharidov. Táto hmota ich pripevňuje k povrchu a chráni bunky pred vonkajšími podmienkami.

Najväčší problém s biofilmami baktérií, oproti planktonickej forme baktérií<sup>1</sup> je ich vysoká odolnosť voči nepriaznivým podmienkam, ako je teplo, nedostatok živín a vody, extrémne pH, koncentrované roztoky solí, antibiotiká a dezinfekčné prostriedky. Ak náhle sa na povrchu vytvorí biofilm, obvykle je ho veľmi ťažké úplne odstrániť konvenčnými metódami čistenia.

Princíp viazania sa baktérií na povrch nie je celkom vysvetlený, hlavne kvôli tomu, že rôzne druhy baktérií sú schopné naväzovať sa na veľké množstvo povrchov s odlišnými vlastnosťami. Významnú úlohu v tomto naväzovaní majú van der Waalsove sily, elektrostatické interakcie a hydrofilné-hydrofóbne interakcie, a štruktúry ako pili.

Zloženie biofilmu môže veľmi variovať, obvykle však obsahuje okolo 90% vody. Po vysušení biofilmu 50% z tohto dehydrovaného materiálu organická hmota, ktorá zvyčajne obsahuje okolo 10<sup>6</sup> až 10<sup>8</sup> <sup>2</sup>CFU/cm<sup>2</sup>. Medzi rody baktérií, ktoré nachá-

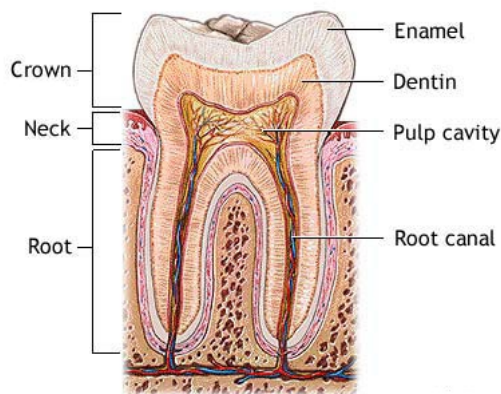
<sup>1</sup> voľne vznášajúca sa forma baktérií

<sup>2</sup>CFU = Colony-forming unit. Každá žijúca baktéria umiestnená na vrstvu agaru sa bude deliť a vytvorí kolóniu. Každá bak-

dzame v biofilmoch patria *Pseudomonas*, *Streptococcus*, *Salmonella*, *Listeria*, *Bacillus*, *Corynebacterium*, *Staphylococcus* a *Escherichia* [Erben, 2010].

### 1.2.4 Zuby, normálna mikroflóra úst, zubný plak a liečba kazov

Každý **zub** má korunku, krčok a koreň. Korunka je pokrytá sklovinou (lat. *enamelum*), krčok zuba je chránený d'asnom a na povrchu koreňa sa nachádza cement (lat. *cementum*). Pod sklovinou a cementom sa je pórovitá hmota, ktorá ohraničuje zubnú dutinu (lat. *cavitas dentis*), nazýva sa zubovina (lat. *dentium*). Zubná dutina prechádza v koreni do koreňového kanálika (lat. *cervix dentis*), celý tento priestor vyplňa zubná dreň (lat. *pulpa dentis*). Nachádzajú sa tu tiež cievy na nervy. [Black, 2004]



Obr. 2: Schématický obrázok stavby zuba [Voorhees, 2011]

Hoci je sklovina najtvrdšou hmotou tela, môže byť napadnutá kyselinami a enzýmami, ktoré produkujú baktérie. Mikroorganizmy môžu infikovať aj d'asná, vytvorit' ložisko infekcie medzi d'asnom a zubom a šíriť sa na dolu ležiacu kosť.

Populácia **ústnej mikroflóry** je slabo prebádaná, hoci poznáme viac ako 400 druhov baktérií, ktoré sa tam vyskytujú. Výskum sa zameriava hlavne na také kmene a druhy, ktoré sú zodpovedné za poškodzovanie zubov a infekcie d'asiem.

Zubný povrch je dobrým podkladom, na ktorom baktérie a kvasinky môžu vytvorit' **zubný povlak**, pokrývajúci zub nad sliznicou. Formovanie povlaku nie je chorobou, ale je prvým krokom k poškodeniu a oslabeniu skloviny a ku vzniku zápalov d'asiem. Na jej tvorbe sa podieľajú hlavne viridujúce streptokoky

téria prezentuje jednu CFU. [Black, 2004]

(*S. mutans*, *S. sanguis* a *S. mitior*), laktobacili, a neškôr aj anaeróbne nesporeujúce baktérie.

Plak sa tvorí tak, že kladne nabité proteíny v slinách začnú adherovať na negatívne nabitý povrch skloviny a tvoria film (ang. *pellicle*). Koky a niektoré filamentózne baktérie z normálnej flóry sa viažu na novo vytvorený film. Tieto mikroorganizmy hydrolyzujú sacharózu, glukózu a fruktózu, vytvárajú kyseliny, klesá pH v povlaku, narušuje sa povrch zuba.

**Zubné kazy** sú liečené tak, že sa odstráni poškodené tkanivo a vzniknutá diera sa vyplní kompozitnými výplňami - akrylátovými živcami, cementami alebo amalgámom. Ako prevencia vzniku zubného kazu sa používa fluór, pretože znižuje rozpustnosť skloviny inhibíciou demineralizácie a urýchľovaním jej remineralizácie. Existuje veľa techník, ktoré napomáhajú znižovaniu rizika vzniku zubného kazu. [Erben, 2010, J. Vaško, 1994]

### 1.3 Interakcia plazmy s bunkou

Podrobne sa budeme zaoberať účinkami nízkoteplotnej plazmy pri atmosférickom tlaku na biologické systémy. Všetky úlohy jednotlivých činiteľov sú ešte stále predmetom skúmania, hlavne úloha nabitých častíc, radikálov a ultrafialového žiarenia.

Primárnym terčom priameho pôsobenia plazmy sú bunkové povrchy, fosfolipidové u eukaryotických a polysacharidové u prokaryotických buniek. Po prekonaní membrány nastupujú biochemické mechanizmy. Napríklad sa formuje malondialdehyd, ktorý sa zúčastňuje na ireverzibilnom poškodení DNA baktérií.

Dôležitú úlohu v chemickom pôsobení na bunku má aj prostredie, v ktorom sa nachádza, a to hlavne množstvo vody ktoré ju obklopuje. Zistilo sa, že dekontaminácia suchých organizmov je málo účinná, ale ani efekt veľkého množstva vody nie je dostatočný. Najefektívnejším spôsobom dekontaminácie je navlhčiť organizmus malým množstvom vody. Inhibíciu alebo kontrolu nad pôsobením plazmy na bunku môžeme zabezpečiť napr. pridaním antioxidantov do bunky, alebo jej okolia. [Dobrynin et al., 2009]

Keďže naša práca nie je zameraná na určovanie toxicity jednotlivých častí plazmy, dovolíme si uviesť pár článkov, v ktorých sa v prípade záujmu o tejto téme môžete dozvedieť viac: [Dobrynin et al., 2009, Laroussi and Leipold, 2004, Xu et al., 2007]

### 1.4 Využitie plazmy na dekontamináciu spór a biofilmov

V našej práci sme nadviazali na mnohé experimenty vykonané na KAFZM UK v spolupráci s KJFB UK ale hlavne na práce vykonané v laboratóriách vo svete. V tejto časti chceme zhrnúť hlavné objavy v oblasti dekontaminácie biofilmov a spór plazmou.

Prvá zmienka o plazme, použitej ako sterilizujúce médium, bola v patente Menashiho z roku 1968, ktorý zostrojil prístroj používajúci RF pole na získanie argónovej plazmy pri atmosférickom tlaku. Týmto prístrojom vytváral vnútri fl'aštičky výboj a tak sterilizoval jej vnútorný povrch. V priebehu niekoľkých sekúnd dokázal vysterilizovať povrch s viac ako  $10^6$  spórami. V tomto prípade však bolo hlavným biocídnym činiteľom teplo.

Rok pred tým Boucher spozoroval, že niektoré typy plynov (napr.  $CO_2$ ) sú efektívnejšie pri ničení bakteriálnych spór. Tiež ukázal, že spóry namočené aspoň hodinu vo vode sa dajú ľahšie zničiť. [Moisan et al., 2001]

Niektoré spóry baktérií ako napr. *Bacillus atrophaeus* sú rezistentné aj na konvenčne používanú sterilizáciu s použitím  $H_2O_2$ . V práci [Raballand et al., 2008] zistili, že plazmovým zdrojom iónov sa dá tento odolný kmeň zničiť, ale len opakovanou expozíciou.

V práci [Heise et al., 2004] sa zaoberajú dekontamináciou PET plôch veľkosti  $10 \times 10$  cm, pomocou dielektrického bariérového výboja. Ako kontamináciu používajú spóry *Bacillus subtilis*, ktorých poškodenie výbojom mohlo byť viditeľné aj pod rastrovacím elektrónovým mikroskopom. Pomocou tohto typu výboja sa im podarilo znížiť počet žijúcich baktérií o päť rádov.

V jednej z najnovších prác [Koban et al., 2010] zaoberajúcej sa dekontamináciou 48 hodinových biofilmov sa používal dielektrický bariérový výboj a plazmový jet (tryska). Použitým organizmom bola *Candida albicans*, ktorá ľahko tvorí biofilm a spôsobuje zápaly v okolí zubných implantátov. Tieto biofilmy boli tvorené na titánových doštičkách alebo na mikrotitračných platničkách. Pri dekontaminácii plazmovým jetom sa používali vzácne plyny a to hlavne argón (aj zmes s  $O_2$ ). Podarilo sa im pri rôznych podmienkach dosiahnuť redukciu bakteriálnej populácie o 1 - 5 rádov, čo je viac ako chemikálie, ktoré sa zvyčajne používajú u zubárov (CHX - chlorhexidín diglukonát a NaOCl).

V ďalšej práci [Sladek et al., 2007] tiež porovnávali účinok plazmy pri prítomnosti CHX a glukózy v médiu. V tomto prípade sa pomocou zariadenia „plasma needle“ dekontaminovali 24 hodinové biofilmy *S. mutans*, ktoré rástli na podložných sklíčkach.

Veľkou výzvou pre lekárov aj pre dekontamináciu plazmou sú koreňové kanáliky zubov, keďže majú dĺžku niekoľko cm a šírku niečo okolo 1 mm. Medzi baktérie, ktoré spôsobujú infekciu kanáliku patrí aj *Enterococcus faecalis*. V práci [Lu et al., 2009] použili na dekontamináciu plazmový jet, ktorý ústl z injekčnej ihly. Ku kompletnej sterilizácii neprišlo, ale podarilo sa im znížiť počet baktérií o 2 rády.

Medzi ďalšie možnosti štúdia patrí schopnosť nízko-plotnej plazmy bieliť zuby. V článku [Lee et al., 2009] sa ukázalo, že použitie plazmy s prípravkom s obsahom  $H_2O_2$ , zlepšuje účinnosť bieleňia o tri body na belostnej stupnici zubov. Pri bieleňí sa pozorovala aj účinnosť odstránenia organických zvyškov a produkcia hydroxylových radikálov.

## 2 Experimentálna časť

Na bio-dekontamináciu spór (*Bacillus cereus*) a biofilmov (streptokoky z normálnej flóry úst) na povrchoch zubov sme používali korónový výboj a to jeho kladnú aj zápornú polaritu a vyskúšali sme aj prechodovú iskru. Pri zápornej polarite koróny sme rozoznávali dva režimy, Trichelove pulzy a režim konštantného prúdu, pri kladnej polarite sme používali streamerovú korónu.

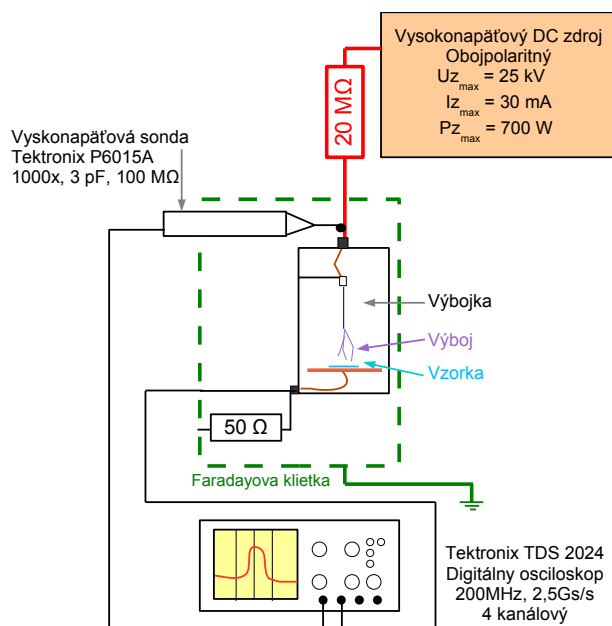
### 2.1 Experimentálne zariadenie

Zariadenie na tvorbu elektrických výbojov pozostávalo zo zdroja vysokého napätia, výbojky umiestnenej vo Faradayovej klietke, vysokonapäťovej sondy *Tektronix P6015A* a štvorkanálového digitálneho osciloskopu *Tektronix TDS 2024*. (Obr. 3)

**Zdroj vysokého napätia** obsahuje pole 24 jednotlivých rezistorov, každý s odporom 820 k $\Omega$ . Pre náš korónový výboj sme využívali také zapojenie, že ich sériovým zapojením sme dostali odpor 20 M $\Omega$ . Zdroj je obojpolaritný, takže pri prechode z kladnej koróny na zápornú stačilo zdroj prepólovať.

**Výbojka:** Výbojové zariadenie pozostávalo z injekčnej ihly, ako vysokonapäťovej a medenej platničky ako nízkonapäťovej elektródy. Rozmery a cha-

rakter týchto dvoch elektród spĺňajú podmienky na tvorbu nízko-plotnej nerovnovážnej plazmy.



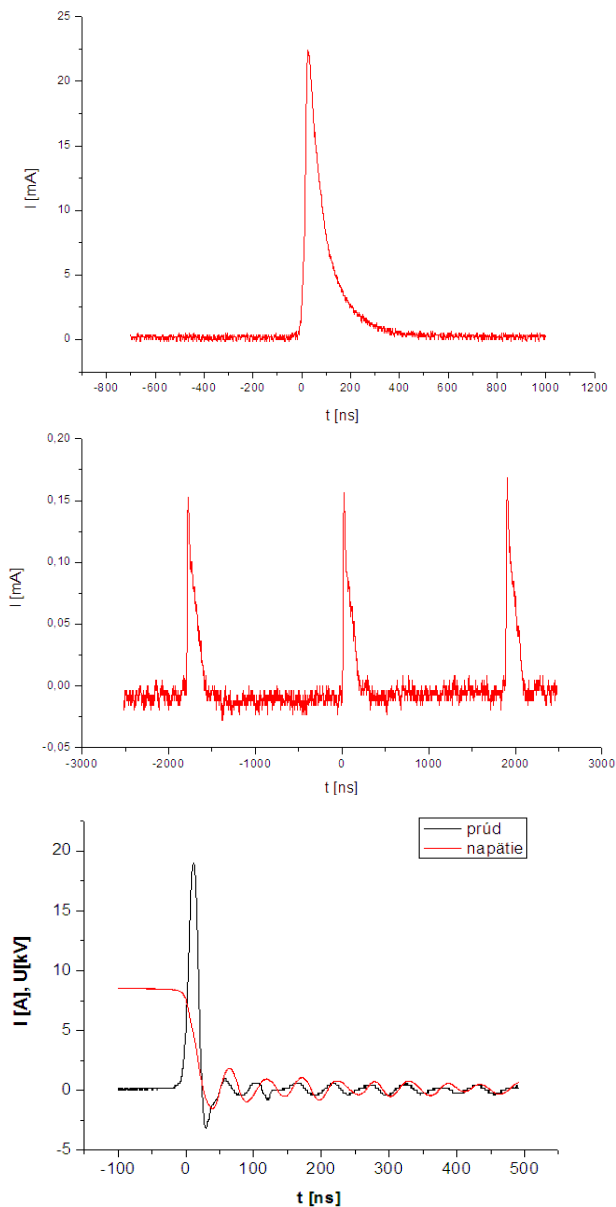
Obr. 3: Schématické zobrazenie použitej aparatúry pre korónu

### 2.2 Použité výboje

Všeobecnú charakteristiku výbojov sme uviedli v častiach 1.1.2, 1.1.3. Tu bližšie charakterizujeme použité výboje a ich parametre.

Zdrojom napätia sme do obvodu dodávali vysoké napätie. Elektrické parametre sme zaznamenávali na digitálnom osciloskope *Tektronix TDS 2024*, na ktorý boli napojené vysokonapäťová sonda *Tektronix P6015A* (1000x, 3 pF, 100 M $\Omega$ ), ktorou sme merali napätie a 50 $\Omega$  uzemnený rezistor napojený na koaxiálny kábel, ktorým sme zisťovali prúd korónového výboja. Vo výboji prechodovej iskry to bol odpor 1  $\Omega$ , prispôbený na 50  $\Omega$  koaxiálny kábel.

Pri kladnej koróne sme do výboja dodávali vysoké napätie  $\sim 6$  kV, vzniknuté prúdové pulzy mali maximálnu amplitúdu 30 mA a frekvenciu okolo 20 kHz. Trichelove pulzy zápornej polarite sme vytvárali pripojením korónujúcej elektródy na napätie 4 - 5 kV, amplitúdy prúdových pulzov sa pohybovali do maxima 0,7 mA a frekvencia pulzov bola okolo 500 kHz. Pri prechodovej iskre, napätie ktoré sme do systému dodávali malo maximálnu hodnotu 12 kV, prúd ktorý vznikal dosahoval hodnoty až 17 A s frekvenciou  $\sim 1$  kHz.



**Obr. 4:** Hore: osciloskopický záznam priebehu prúdu kladnej koróny:  $U = 11,6\text{kV}$ ,  $f = 11,4\text{kHz}$ ,  $I_{max} = 23\text{mA}$ . V strede: osciloskopický záznam Trichelových pulzov:  $U = 6,88\text{kV}$ ,  $f = 553,6\text{kHz}$ ,  $I_{max} = 0,17\text{mA}$ . Dole: osciloskopický záznam prechodovej iskry:  $U = 8,8\text{kV}$ ,  $f = 2\text{kHz}$ .

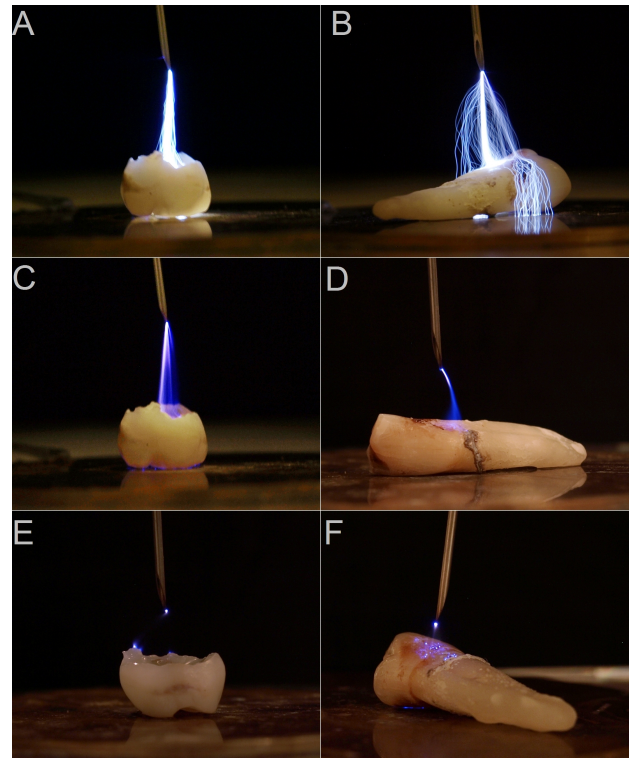
### 2.3 Príprava experimentu

Na zabezpečenie sterility a dezinfekcie prostredia, nástrojov a vzoriek sme používali rôzne metódy:

- suché teplo: sterilizácia laboratórneho skla v teplovzdušnej elektrickej rúre *Fagor*. Použitá teplota  $T = 175^\circ\text{C}$ , tlak  $p = 1\text{ atm}$  a doba sterilizácie  $t = 120\text{ min}$ .
- vlhkým teplom (autoklávom): pomocou tlakového hrnca *Solinger* sme sterilizovali živné

pôdy, destilovanú vodu, špičky na pipetovanie, skúmavky, guľôčky na rozotieranie suspenzie spór a baktérií.  $T = 120^\circ\text{C}$ ,  $p = 1,2\text{ atm}$  a  $t = 35\text{ min}$ .

- plameňom: na sterilizáciu pinziet a elektród.
- UV lampou: UV C – lampa Philips G 30T8, ( $\lambda = 254\text{ nm}$ ,  $P_{UV C} = 11,2\text{ W}$ ), pomocou ktorej sme dezinfikovali vzduch v digestore.
- peroxid vodíka: 3 % na dezinfikovanie zubných vzoriek.



**Obr. 5:** Fotografie používaných výbojov na zuboch. Prvý riadok (A, B) prechodová iskra, druhý riadok (C, D) kladná streamerová koróna, tretí riadok (E, F) záporné Trichelove pulzy. Prvý stĺpec - stolička mliečného chrupu, druhý stĺpec - očný zub dospelého chrupu. (Expozičné časy fotografií [s]: A 1/2; B 1/1,6; C 1/2; D 2; E 1,3; F 2,5)

### 2.4 Pracovný postup

**Príprava vzoriek:** Na testovanie účinkov výboja sme používali extrahované zuby<sup>3</sup>, ktoré sme dezinfikovali v 3% peroxide vodíka. Keďže sme dekontaminovali aj spóry baktérií aj biofilmy, príprava vzoriek sa pre ne líšila.

Dobre premiešanú suspenziu spór *Bacillus cereus* (s obsahom približne  $10^6$  až  $10^7$  CFU) sme kvapkali

<sup>3</sup>Zuby boli získané od pacientov MUDr. Oľgy Šipoldovej



na zuby v objeme 20  $\mu\text{l}$  a okamžite, za vlhka, sme ich aj dekontaminovali.

Pri streptokokových biofilmoch<sup>4</sup> trvala príprava o deň dlhšie. Najskôr sme si pripravili „Overnight“ kultúru, ktorú sme kultivovali približne 16 h pri teplote 35°C. Nasledujúci deň sme si v skúmavkách za pomoci tejto kultúry pripravili na zuboch 24 hodinový biofilm.

**Opracovanie vzoriek vo výboji:** Na sterilnú medenú platničku, ktorá tvorila raz katódu a raz anódu, sme sterilnou pinzetou kládli pripravené vzorky. Tie sme nechávali opracovávať výbojom 5 min, 3 min, alebo 1,5 min. Počas tejto doby sme si zaznamenali hodnoty napätia, prúdu a frekvencie. Výboju vystavenú vzorku sme po okamžite vložili do sterilnej skúmavky s fyziologickým roztokom. Takto sme postupovali pri každej vzorke len sme menili parametre výboja.

**Príprava vzoriek na kultiváciu:** Vzorky v skúmavkách sme vložili na 16 min do ultrazvukovej čističky, aby sa spóry a biofilm odlúčili zo vzoriek. Na zabezpečenie homogenity vzorky sme použili *Vortex Classic*. Z každej vzorky vo fyziologickom roztoku sme odobrali trikrát 30  $\mu\text{l}$  a naočkovali ich do pripravených Petriho misiek. Aby sme mali s čím porovnávať naše výsledky, pripravili sme si aj referenčné vzorky, ktoré neboli vystavené účinkom výboja a tiež sme ich nechali vykultivovať. Pre zabezpečenie optimálnych podmienok pre baktérie sme Petriho misky na noc vložili do teplovzdušnej elektrickej rúry *Fagor* a nastavili teplotu 35°C.

## 2.5 Vyhodnocovanie výsledkov

Pomocou počítadla kolónií sme na jednotlivých miskách zráali množstvo vyrastených kolónií. Porovnali sme ich s počtom CFU na referenčných miskách.

Po vyčíslení výsledkov kultivácie nasledovala ďalšia etapa spracovania výsledkov. Účinnosť pôsobiacého výboja sme počítali z počtu CFU na vzorke k počtu na referenčnej podľa vzťahu:

$$\eta\% = 100 - \frac{CFU}{CFU_{ref}} 100 \quad (1)$$

Z nameraných dát o vývoji prúdu a napätia v čase a frekvencie pulzov sme vyrátali *stredný výkon* výboja:

$$P_{str} = \frac{1}{T} \int_0^T UI dt = f \int_0^T UI dt \quad (2)$$

kde T je perióda a f je frekvencia pulzov nameraných osciloskopom. Z takto vypočítaného výkonu sme potom určovali *spotrebovanú energiu* tak, že sme  $P_{str}$  vynásobili časom pôsobenia výboja.

Ďalšou dôležitou veličinou, ktorá dobre charakterizuje dekontaminačné účinky výboja a zároveň jeho energetickú a časovú náročnosť je *E-value*. E-value je počet Jouleov na mililiter opracovanej suspenzie potrebný na 90% (1 log) redukciu bakteriálnej populácie [Machala et al., 2009].

$$E_{value} = \frac{E}{\log_{10} \left( \frac{CFU_{ref}}{CFU} \right)} \quad (3)$$

E je v našom prípade energia [J] spotrebovaná výbojom pričom zo vzorky vyrástol uvedený počet CFU.

Štatistické spracovanie dát sme uskutočnili pomocou programu OriginPro 7.5 a Microsoft Office Excel 2003. Normálne rozdelenie nameraných súborov hodnôt, pre jednotlivé parametre výbojov, sme overili pomocou Shapiro-Wilk testu normality. Všetky súbory prešli týmto testom pre hladinu významnosti  $p = 0,05$ . Na porovnanie jednotlivých typov výboja sme použili t-test, pričom nulovou hypotézou bolo, že metódy sú rovnako účinné. Ak sa nulová hypotéza potvrdila na viac ako 10%, brali sme rozdiel súborov ako štatisticky nevýznamný.

## 3 Výsledky a diskusia

### 3.1 Výsledky merania s použitím spór

Pri dekontaminácii spór *Bacillus cereus* na povrchoch zubov sme používali medzielektrodovú vzdialenosť 5 mm. Využívali sme hlavne dva výboje kladnú streamerovú korónu a záporné Trichelove pulzy, pri expozičných časoch 3 a 5 min. V jednej sérii merania sme použili aj prechodovú iskrú. Mediány výsledkov a ich IQR<sup>5</sup> sa nachádzajú v tabuľke 1 a na grafe na Obr. 6 je medián aj s 1. a 3. kvartilom.

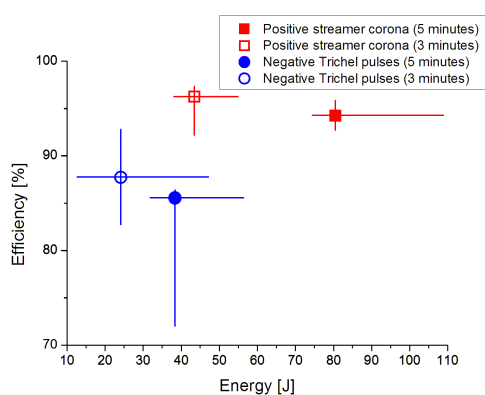
V tabuľke 1 neuvádzame výsledky z merania prechodovej iskry, hoci sme zistili silné baktericídne účinky, tento typ výboja nie je vhodný na použitie pri dlhších expozičných - dochádza k sčernaniu zubnej skloviny.

<sup>4</sup>Flóra zubného plaku bola získaná od 3 dobrovoľníkov, následne boli Streptokoky vykultivované na agare, ktorý je pre ne selektívny. Baktérie rodu *Streptococcus* boli namnožené z kolónií selektívneho agaru.

<sup>5</sup>IQR = interquartile range, rozdiel medzi 3. a 1. kvartilom

**Tabuľka 1:** Výsledky merania so spórmi na zuboch s použitím kladnej a zápornej koróny. V tabuľke sú uvedené mediány veličín a IQR pri čase expozície 5 a 3 minúty

Kladná koróna	5 min		3 min	
Počet meraní	5	IQR	6	IQR
E spotreba [J]	80,56	3,17	43,48	5,17
$\eta\%$	94,24	42,01	96,24	32,19
E-value [J]	83,37	34,45	26,69	16,98
Záporná koróna	5 min		3 min	
Počet meraní	5	IQR	7	IQR
E spotreba [J]	38,38	24,58	24,18	10,12
$\eta\%$	85,56	14,39	87,73	22,43
E-value [J]	47,94	24,58	27,10	34,57



**Obr. 6:** Graf závislosti účinnosti dekontaminácie od spotrebovanej energie pri použití spór. Na grafe sú znázornené mediány s 1. a 3. kvartilom.

Z grafu na Obr. 6 vidíme a podľa výsledkov t-testu môžeme povedať, že nie sú štatisticky významné rozdiely medzi účinnosťami pre expozičné časy 3 a 5 minút pre jednotlivé výboje. Jediný významný rozdiel je medzi energetickou spotrebou sme našli pri expozičnom čase 5 minút, kde môžeme povedať, že kladná koróna má významne vyššiu spotrebu energie oproti zápornej koróne. Záverom je, že kladná koróna nemá štatisticky významne lepšiu účinnosť ako záporná koróna.

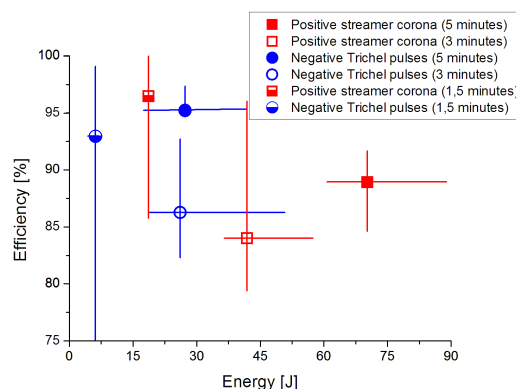
### 3.2 Výsledky merania s použitím Streptokokového biofilmu

Pri dekontaminácii biofilmov *Streptokokov* na zubných povrchoch sme nastavovali medzielektrodovú vzdialenosť 5 mm. Používali sme hlavne dva výboje: kladnú streamerovú korónu a záporné Triche-

love pulzy, pri expozičných časoch 3, 5 a 1,5 min. Mediány výsledkov a ich IQR sa nachádzajú v tabuľke 2 a na grafe na Obr. 7 je medián aj s 1. a 3. kvartilom.

**Tabuľka 2:** Výsledky merania so *Streptokokovými* biofilmami na zuboch s použitím kladnej a zápornej koróny. V tabuľke sú uvedené mediány veličín a IQR pri čase expozície 5, 3 a 1,5 minúty

K. k.	5 min		3 min		1,5 min	
P. m.	7	IQR	7	IQR	8	IQR
E [J]	70,26	35,6	41,9	20,94	18,65	2,27
$\eta\%$	88,94	7,03	84	16,59	94,48	14,21
E-v. [J]	75,04	67,78	59,89	32,91	15,27	13,6
Z. k.	5 min		3 min		1,5 min	
P. m.	7	IQR	6	IQR	8	IQR
E [J]	27,29	24,06	26,14	31,39	6,18	2,64
$\eta\%$	95,23	2,69	85,25	10,44	92,95	33,88
E-v. [J]	18,38	15,39	30,12	51,13	8,88	11,20



**Obr. 7:** Graf závislosti účinnosti dekontaminácie od spotrebovanej energie pri použití biofilmov. Na grafe sú znázornené mediány s 1. a 3. kvartilom.

Výsledky t-testu, ktoré môžeme vidieť aj voľným okom na Obr. 7 sú nasledovné. Pri hodnotení energetickej spotreby sme našli štatistický rozdiel medzi kladnou a zápornou korónou len pri expozičnom čase 5 a 1,5 minúty. Štatisticky významný rozdiel účinnosti pre rôzne polarities koróny sme mali len pre čas expozície 5 minút. Vyššia účinnosť ničenia baktérií záporných Trichelových pulzov oproti kladnej koróne sa prejavila až pri expozičnom čase 5 minút.

### 3.3 Diskusia

V tejto časti by sme chceli zhrnúť a porovnať výsledky použitia výbojov na spóry baktérie a biofilmy.

Pre oba prípady môžeme povedať, že kladná koróna pri rovnakých expozičných časoch má vyššiu spotrebu energie ako Trichelove pulzy, aj keď niekedy tieto rozdiely nie sú veľké. V prípade spór sa nám javila účinnosť kladnej koróny lepšia, naopak pri dekontaminácii biofilmov sme pozorovali v dvoch prípadoch z troch mierny pokles účinnosti pre tento výboj.

Pri dekontaminácii biofilmov v porovnaní so spórmi sa nám podarilo o trochu znížiť spotrebu energie, hlavne pri najdlhšom expozičnom čase, pričom účinnosť vzrástla.

V pokusoch použité zariadenie by sa po úpravách geometrie elektród dalo použiť aj v klinickej praxi. V práci [Kong et al., 2009] je na obrázku schéma zapojenia elektród plazmového jetu, obdobné zapojenie by sa dalo dosiahnuť aj v prípade nášho výboja.

## 4 Záver

V tejto práci sme skúmali účinky kladnej a zápornej koróny na spóry baktérie *Bacillus cereus* a biofilmy tvorené kmeňom *Streptococcus*, ktoré sa nachádzali na povrchu extrahovaných zubov.

Podarilo sa nám overiť fakt, že korónový výboj funguje ako prostriedok na dekontamináciu zubov od spór aj biofilmov, a teda predstavuje zaujímavú alternatívu k chemickým a mechanickým metódam, ktoré sa používajú v stomatológii.

Pomocou kultivačných stanovení a štatistického testovania sa nám zatiaľ nepodarilo odhaliť najúčinnjšiu a najmenej energeticky náročnú metódu, toto ešte bude predmetom ďalšieho výskumu.

## Acknowledgments

Touto cestou sa chcem poďakovať môjmu školiteľovi Doc. RNDr. Zdenkovi Machalovi, PhD. za jeho odborné vedenie, cenné rady a pripomienky pri písaní práce.

Výskum bol podporený Slovenskou grantovou agentúrou VEGA 1/0668/11 a Agentúrou pre podporu Výskumu a Vývoja APVV SK-CZ-0179-09 a SK-FR-0038-09.

## Literatúra

[Angert, 2010] Angert, E. (01.02.2010). Cornell university. <http://www.micro.cornell.edu/cals/>

- micro/research/labs/angert-lab/images.
- [Becker et al., 2005] Becker, K. H., Kogelschatz, U., Schoenbach, K. H., and Barker, R. J. (2005). *Non-Equilibrium Air Plasmas at Atmospheric Pressure*. Institute of Physics Publishing, London, UK.
- [Black, 2004] Black, J. G. (2004). *Microbiology: principles and explorations*. Wiley, Hoboken, NJ.
- [Dobrynin et al., 2009] Dobrynin, D., Fridman, G., Fridman, G., and Fridman, A. (2009). Physical and biological mechanisms of direct plasma interaction with living tissue. *N J Physics*, 11.
- [Erben, 2010] Erben, D. (2010). *Inhibition of biofilm formation on water filters*. diplomová práca, Prírodovedecká fakulta, Masarykova Univerzita, Brno.
- [Heise et al., 2004] Heise, M., Neff, W., O.Franken, Muranyi, P., and Wunderlich, J. (2004). Sterilization of polymer foils with dielectric barrier discharges at atmospheric pressure. *Plasmas and Polymers*, 9:23–33.
- [J. Vaško, 1994] J. Vaško, e. a. (1994). *Stomatológia*. Osveta, Prešov.
- [Koban et al., 2010] Koban, I., Matthes, R., Hübner, N.-O., Welk, A., Meisel, P., Holtfreter, B., Sietmann, R., Kindel, E., Weltmann, K.-D., Kramer, A., and Kocher, T. (2010). Treatment of *Candida albicans* biofilms with low-temperature plasma induced by dielectric barrier discharge and atmospheric pressure plasma jet. *N J Phys*, 12.
- [Kong et al., 2009] Kong, M. G., Kroesen, G., Morfill, G., Nosenko, T., Shimizu, T., van Dijk, J., and Zimmermann, J. L. (2009). Plasma medicine: an introductory review. *N J Phys*, 11.
- [Laroussi and Leipold, 2004] Laroussi, M. and Leipold, F. (2004). Evaluation of the roles of reactive species, heat and uv radiation in the inactivation of bacterial cells by air plasmas at atmospheric pressure. *Int J Mass Spectrom*, 233:81–86.
- [Lee et al., 2009] Lee, H. W., Kim, G. J., Kim, J. M., Park, J. K., Lee, J. K., and Kim, G. C. (2009). Tooth bleaching with nonthermal atmospheric pressure plasma. *J Endodont*, 35:587–591.
- [Lu et al., 2009] Lu, X., Cao, Y., Yang, P., Xiong, Q., Xiong, Z., Xian, Y., and Pan, Y. (2009). An rc plasma device for sterilization of root canal of teeth. *IEEE Trans Plasma Sci*, 37:668–673.
- [Machala et al., 2009] Machala, Z., Jedlovský, I., Chládková, L., Pongráč, B., Giertl, D., Janda, M., Šikurová, L., and Polčic, P. (2009). Dc discharges in atmospheric air for bio-decontamination - spectroscopic methods for mechanism identification. *Eur Phys J D*, 54:195–204.
- [Machala et al., 2008] Machala, Z., Jedlovský, I., and Martšovitš, V. (2008). Dc discharges in atmospheric air and their transitions. *IEEE T Plasma Sci*, 36:918–919.
- [Martišovitš, 2004] Martišovitš, V. (2004). *Základy fyziky*

plazmy. Univerzita Komenského, Bratislava.

- [Moisan et al., 2001] Moisan, M., Barbeau, J., Moreau, S., Pelletier, J., Tabrizian, M., and Yahia, L. (2001). Low-temperature sterilization using gas plasmas: a review of the experiments and an analysis of the inactivation mechanisms. *Int J Pharm*, 226:1–21.
- [Petrovičová and Šimkovičová, 2004] Petrovičová, A. and Šimkovičová, M. (2004). *Všeobecná mikrobiológia*. Herba, Bratislava, SR.
- [Raballand et al., 2008] Raballand, V., Benedikt, J., Wunderlich, J., and von Keudell, A. (2008). Inactivation of bacillus atrophaeus and of aspergillus niger using beams of argon ions, of oxygen molecules and of oxygen atoms. *J Phys D: App Phys*, 41(115207).
- [Rossi et al., 2006] Rossi, F., Kylián, O., and Hasiwa, M. (2006). Decontamination of surfaces by low pressure plasma discharges. *Plasma Processes and Polymers*, 3:431–442.
- [Singleton, 2004] Singleton, P. (2004). *Bacteria in Biology, Biotechnology and Medicine*. Wiley, Hoboken, NJ.
- [Sladek et al., 2007] Sladek, R., Filoche, S., Sissons, C., and Stoffels, E. (2007). Treatment of *Streptococcus mutans* biofilms with a nonthermal atmospheric plasma. *Lett Appl Microbiol*, 45:318–323.
- [Voorhees, 2011] Voorhees, B. W. V. (04.04.2011). Health guide. <http://healthguide.howstuffworks.com/tooth-anatomy-picture-a.htm>.
- [Xu et al., 2007] Xu, L., Nonaka, H., Zhou, H. Y., Ogino, A., Nagata, T., Koide, Y., Nanko, S., Kurawaki, I., and Nagatsu, M. (2007). Characteristics of surface-wave plasma with air-simulated  $n_2 - o_2$  gas mixture for low-temperature sterilization. *J Phys D: App Phys*, 40:803–808.

# Štúdium fyzikálnych vlastností dvojvrstvových lipidových membrán modifikovaných kalixarénmi

Veronika Šubjaková  
Školiteľ: Tibor Hianik

Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina F1, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Dvojvrstvové lipidové membrány (BLM) sú vhodným modelom biomembrán. V práci sme vytvorili model receptorovej membrány pozostávajúcej z fosfolipidu difytanoylfosfatidylcholinu, cholesterolu a dvoch druhov tiakalixarénov s rôznou dĺžkou alifatických reťazcov citlivých na ióny chlóru. BLM sme vytvorili na okrúhlym otvore (priemer 0.7 mm) v stene cely z Teflónu. Pomocou elektrostričnej metódy sme zmerali elektrickú kapacitu, modul pružnosti v smere kolmom k ploche BLM a koeficient dynamickej viskozity v závislosti od koncentrácie kalixarénov v lipidovej dvojvrstve. BLM sme tvorili v elektrolyte obsahujúcom ióny chlóru ako aj bez týchto iónov. Zistili sme, že s rastom obsahu kalixarénov vzrastá modul pružnosti aj koeficient dynamickej viskozity BLM. Tento rast závisí od toho či je membrána tvorená v elektrolyte obsahujúcom ióny KCl alebo NaF. V prípade kalixarénu obsahujúceho hydrofóbne reťazce sme študovali vodivosť BLM modifikovaných týmto kalixarénom. Nezistili sme žiadne výrazné rozdiely vo vodivosti BLM v závislosti od obsahu kalixarénu. Je možné že tento kalixarén netvorí iónové kanály v lipidovej dvojvrstve.

**Kľúčové slová:** dvojvrstvové lipidové membrány, kalixarény, elektrostričcia, vodivosť

## 1 Úvod

Biologické membrány sú dôležitou súčasťou buniek. Okrem toho, že ich chránia, zároveň sú bránou, ktorá prepúšťa potrebné, či odvádza nepotrebné látky pre ich správne fungovanie. Obsahujú množstvo iónových kanálov, púmp tvorených molekulami proteínov, ktoré svojou selektivitou zabezpečujú transport špecifických látok. Taktiež sa v nej nachádzajú receptory, vďaka ktorým dokáže komunikovať s okolím a odpovedať na rôzne podnety. Práve štúdium mechanizmov prenosu látok pomocou iónových kanálov je v záujme vedcov, pretože tieto princípy môžu

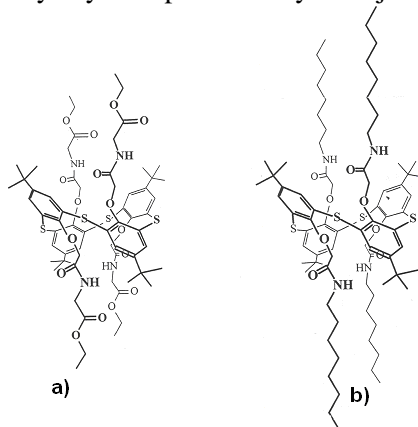
pomôcť k vývoju rôznych liečiv, ako napríklad antibiotík.

Obklopuje nás množstvo baktérií, niektoré majú veľký význam v metabolizme živín a často vstupujú do obojstranne prospešných vzťahov s inými organizmami. Niektoré baktérie však spôsobujú rôzne infekcie. Práve pomocou antibiotík sa ich snažíme zneškodniť, prípadne aspoň spomaliť ich rast. Baktérie si často vytvárajú rezistenciu voči prírodných antibiotikám a to tak, že produkujú enzýmy ( $\beta$ -laktamázy, acetyltransferázy, fosforylázy, adenylázy), ktoré ich inaktivujú. Vedci sa preto snažia syntetizovať umelé antibiotiká, napríklad vo forme iónových kanálov voči ktorým by baktérie nedokázali vyvinúť rezistenciu. Práve kalixarény by mohli slúžiť k vytvoreniu takýchto kanálov, ktoré by sa mohli ďalej používať pri výrobe liečiv. U kalixarénov môže byť problémom ich zabudovanie do biomembrán ako aj prípadná toxicita pre ľudský organizmus. K skúmaniu vlastností membrán modifikovaných kalixarénmi môže slúžiť ako model dvojvrstvová lipidová membrána (BLM, z angl. bilayer lipid membrane). BLM sú tvorené na okrúhlym otvore (priemer 0.1-1 mm) v stene cely z Teflónu. Túto metódu vyvinul Mueller a spol [1].

Kalixarény sú makrocyclické aromatické molekuly, ktoré vznikajú premostením fenolov prostredníctvom aldehydových skupín.[2] Číslo [n] udáva počet aromatických fenolových cyklov. Najčastejšie sa používajú kalixarény so 4, 6 a 8 cyklami, označovanými napr. kalix[4]arén. Vytvorí sa molekula v tvare kruhu s dutinou uprostred. Jej tvar pripomína čašu, práve preto ich názov pochádza z latinského slova „calix“, t.j. čaša alebo kalich.[3]. Kalixarény sa vyznačujú širokým horným okrajom, centrálnym medzikružím, ktoré prechádza do dolného úzkeho okraja. Boli syntetizované makrocycly s podjednotkami takými ako pyrol a resorcín.[4]. Týmto spôsobom sa vytvárajú kalixarény s rôznymi vlastnosťami. Vďaka hydrofóbnej dutine, formovanej fenolovými jednotkami, sa kalixarény môžu používať na detekciu kovových iónov, biomakromolekúl a iných častíc. Okrem toho, jednoduchá zmena bočných skupín vedie k vytvoreniu kalixarénov s vysokou

afinitou pre špecifické častice.[5]. Ich zabudovanie do BLM pomocou uhl'ovodíkových reťazcov vedie k využitiu kalixarénov na vývoj biosenzorov, prípadne iónových kanálov.

Hoci boli syntetizované hlavne kalixarény tvoriace kanály na prenos katiónov sodíka a draslíka, podarilo sa syntetizovať aj kalixarény, tvoriace kanály selektívne pre anióny chlóru, ktoré by mohli byť využité pri liečbe cystickej fibrózy.



**Obr.1.:** Chemická štruktúra a) calixu 1 b) calixu 2

Sidorov a spol. [6] sa zaoberali iónovými kanálmi tvorenými kalix[4]arénmi tetrabutylamid a tetrametylamid, ktoré viažu HCl. Tetrametylamid v prítomnosti HCl tvorí kanály naplnené vodou a chlóróm. Tetrabutylamid formuje iónové kanály v lipidových dvojvrstvách, vykazujú selektivitu pre  $\text{Cl}^-/\text{SO}_4^{2-}$ . [5,9]. Izzo a spol. [7] študovali transport chloridových aniónov vytvorením ionofóru na prenos týchto dôležitých častíc pre náš organizmus. Práve takýmto ionofórom by mohol byť kalix[4]arén. Boli navrhnuté dva symetrické kalix[4]arény, obsahujúce polárne spermidinové reťazce a lipofilnú kalixarénovú kostru, jeden kalixarén bol obohatený nepolárnou benzyloxymetylovou a druhý metylovou skupinou. Iónoforová aktivita zlúčenín bola vyšetovaná pomocou fluorescenčnej metódy. Prvá zlúčenina sa vyznačovala silnou ionoforovou aktivitou, pH gradient vytvorený na lipozómoch, do ktorých boli kalixarény zabudované (prítok  $\text{OH}^-$  a odtok  $\text{H}^+$ ) sa vybil po 15 minútach. Podobne to bolo aj u druhej zlúčeniny. Prvá sa tak správala v prítomnosti 1% a druhá v prítomnosti 3% ionofóru. Získaný výsledok vykazoval halogénový transport a nízku transmembránovú vodivosť aniónov ( $\text{ClO}_4^-$ ,  $\text{NO}_3^-$ ,  $\text{SO}_4^{2-}$ ). Jin [8] zabudoval kalix[4]arén modifikovaný fotocitlivou skupinou do BLM zo sójového lecitínu. BLM bola tvorená na okrúhlom otvore (priemer 0.2 mm) v cele z Teflónu. Zistil, že kalixarén funguje ako prenášač iónov sodíka. S rastom koncentrácie

kalixarénu v elektrolyte dochádzalo k rastu membránového prúdu. Napríklad pri koncentrácii 8  $\mu\text{M}$  kalixarénu v elektrolyte po oboch stranách membrány a pri privedení na membránu potenciálu 100 mV prúd dosahoval hodnoty 50 pA, čo zodpovedá vodivosti  $5 \times 10^{-10} \Omega^{-1}$ . Vodivosť BLM modifikovaných kalixarénmi citlivými na dopamín bola študovaná v prácach Nikolelisa a spol. [4] a nedávno aj v diplomovej práci Osypčákovej [9]. Ukázalo sa, že dopamín môže indukovať rast vodivosti membrán. Kanály selektívne pre ióny chlóru tvorené kalixarénmi doposiaľ neboli pomocou BLM preskúvané. V našej nedávnej práci sme ukázali, že takéto kalixarény môžu byť zabudované do BLM [10]. V tejto práci sme sa zamerali na štúdium vplyvu vybraných kalixarénov na mechanické a elektrické vlastnosti membrán.

## 2 Materiály a metódy

### 2.1 Príprava BLM

Najprv sme si pripravili zásobné roztoky lipidov a kalixarénov v chloroforme, ktoré sme uskladňovali v mrazničke. Ako pufor sme použili 0.1 M KCl + 50 mM HEPES, ktorého pH bolo v oblasti 5-6. pH pufru sme ustanovili pomocou pH metra Radelkis (Maďarsko) dodaním malého množstva HCl alebo KOH. Pufor bol uskladnený v chladničke a po týždni sme si vždy pripravili nový roztok.

Dvojvrstvové lipidové membrány (BLM) sme vytvárali na okrúhlom otvore o priemere 0.7 mm v stene, ktorá rozdeľovala celu z Teflónu na dva rovnaké objemy (približne 3.5 ml), podľa metódy navrhutej Mueller a spol. [1]. BLM sme pripravovali z roztoku lipidov 1,2-difytanoylfosfatidylcholinu (DPhPC) a cholesterolu (Avanti Polar Lipids, USA) v hmotnostnom pomere 4:1. Tento pomer bol zvolený na základe toho, aby bola zabezpečená stabilita membrány a zároveň aby BLM nebola príliš tuhá, pretože prítomnosť cholesterolu znižuje tekutosť membrány a spôsobuje jej pevnosť [11].

Pri príprave lipidového roztoku sme postupovali nasledovne. Navážili sme asi 1 mg cholesterolu do skúmavky a pridali príslušné množstvo DPhPC, ktorý bol rozpustený v chloroforme v koncentrácii 100 mg/ml. Potom sme chloroform odparili pomocou vákuovej výevy. Po odparení sme pridali organické rozpúšťadlo n-heptán tak, aby lipidová zložka bola v koncentrácii 20 mg/ml. Po rozpustení, sme pomocou sklenenej pipety naniesli tenkú vrstvu pripraveného roztoku

okolo otvoru. Formovanie BLM sme pozorovali pomocou stereomikroskopu. Pred nanosením lipidového roztoku sme celu dôkladne umyli a vysušili. Následne sme do oboch častí cely pridali 3 ml pufri.

Pri príprave membrán so zabudovanými kalixarénmi sme ešte pred odparením chloroformu z roztoku lipidov a cholesterolu pridali potrebné množstvo kalixarénu, ktorý bol rozpustený v chloroforme v koncentrácii 5 mg/ml, prípadne 10 mg/ml. Kalixarény sme pripravovali v rôznych molárnych pomeroch voči lipidovej zložke (cholesterolu a DPhPC) a to 1:100, 1:50, 1:30, 1:20 a 1:10. Pracovali sme s kalixarénmi citlivými na ióny chlóru, ktoré sme získali z Univerzity v Kazani (Tatarstan, Ruská Federácia) (Obr. 1). Po odparení sme pridali n-heptán. Do koncentrácie 20 mg/ml sme okrem hmotnosti lipidovej zložky započítali aj hmotnosť kalixarénu. Ďalej sme postupovali rovnako ako pri príprave BLM uvedených vyššie. Pri BLM s kalixarénmi selektívnymi na ióny chlóru sme ich vytvárali aj v pufri pripraveného z 0.1 M NaF + 50 mM HEPES aby sme mohli porovnať vlastnosti BLM v prítomnosti a bez prítomnosti iónov chlóru.

Pri meraní sme používali dve elektródy z Ag/AgCl umiestnených do sklenených trubičiek naplnených agarovým gélom. Pochlórovanie Ag elektród sme spravili tak, že sme ich najskôr poriadne očistili brusným papierom. Potom sme si pripravili 25 ml 0.1 M HCl. Ag drôtik sme pripojili ku kladnému pólu zdroja, platínovú elektródu ku kladnému vstupu ampérmetra a ten na zem zdroja. Zo zdroja sme priviedli také napätie, aby elektródami preteká prúd 10  $\mu$ A počas 0.5 hodiny. Takto pripravené elektródy sme ponorili do agarového gélu obsahujúceho 1 M KCl. Agarový gél sa nachádzal v tenkých sklenených trubičkách o priemere 3 mm.

## 2.2 Štúdium fyzikálnych vlastností BLM pomocou elektrosktrikčnej metódy registráciou vyšších harmonických prúdov

Elektrosktrikcia je vlastnosť nevodičov, dielektrík, meniť svoj tvar a objem, mechanicky sa deformovať, pod vplyvom elektrického poľa.

Privedením striedavého elektrického napätia  $U = U_0 \sin(\omega t)$  s amplitúdou  $U_0 = 50$  mV s frekvenciou  $f = 1000$  Hz (podľa metódy Hianika a Passechnicka [11] na membránu pomocou dvoch Ag/AgCl elektród ponorených do elektrolytu v cele dochádza k jej stlačeniu. Tlak vyvolaný napätím

pôsobí kolmo na povrch membrány a zapríčiňuje zmenu jej hrúbky. Podiel tlaku,  $p$ , a relatívnej zmeny hrúbky,  $\Delta h/h$ , určuje modul pružnosti v smere kolmom k ploche membrány

$$E_{\perp} = -\frac{P}{\frac{\Delta h}{h}} \quad (1)$$

Membránu považujeme za doskový kondenzátor, ktorého dosky tvoria hydrofilné hlavičky lipidov spolu s elektrolytom a hydrofóbna časť predstavuje dielektrikum. Jej kapacita je daná vzťahom

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{h} = C_s S \quad (2)$$

kde  $\epsilon_0 = 8.55 \times 10^{-12}$  F/m, permitivita vákua,  $\epsilon$  je relatívna permitivita dielektrika, čiže hydrofóbna časť,  $S$  je plocha membrány a  $C_s$  je špecifická kapacita BLM.

Keďže kapacita  $C$  je nelineárnou funkciou napätia ( $C = C_0(1 + \alpha U^2)$ ,  $C_0$  je kapacita pre  $U_0 = 0$  a  $\alpha$  je koeficient elektrosktrikcie), na membráne sa generujú vyššie harmonické prúdy, vďaka ktorým dokážeme určiť niektoré fyzikálne vlastnosti membrán. Podrobné odvodenia sú v práci [11]. Pomocou merania amplitúd harmonických prúdov a fázového posunu,  $\varphi$ , možno určiť elektrickú

kapacitu  $C = \frac{A_1}{\omega U_0}$ , kde  $A_1$  je prvá harmonická

prúdu,  $\omega = 2\pi f$  je kruhová frekvencia,

modul pružnosti  $E_{\perp} = \frac{3 C_s U_0^2 A_1}{4 h A_3}$ , kde  $A_3$  je

tretia harmonická prúdu,

koeficient dynamickej viskozity  $\eta = \frac{E_{\perp} \sin \varphi}{2\pi f}$ , kde

$\varphi$  je fázový posun, ktorý odráža vlastnosti viskoelastické vlastnosti membrány. A taktiež je možné určiť povrchový membránový potenciál

$$U_1 = \frac{1}{4} U_0 \frac{A_2}{A_3} \quad [11].$$

## 2.3 Meranie vodivosti

Vodivosť BLM sme merali pomocou programovateľného elektrometra Keithley 6512 (USA) pripojeného k IBM PC prostredníctvom A/D prevodníka KPC-488.2AT. Na BLM sme priviedli konštantný potenciál  $U = 50$  mV z externého zdroja napätia prostredníctvom Ag/AgCl elektród. Merali sme prúd  $i$  pretekajúci cez BLM, z ktorého sme určili vodivosť pomocou vzťahu:

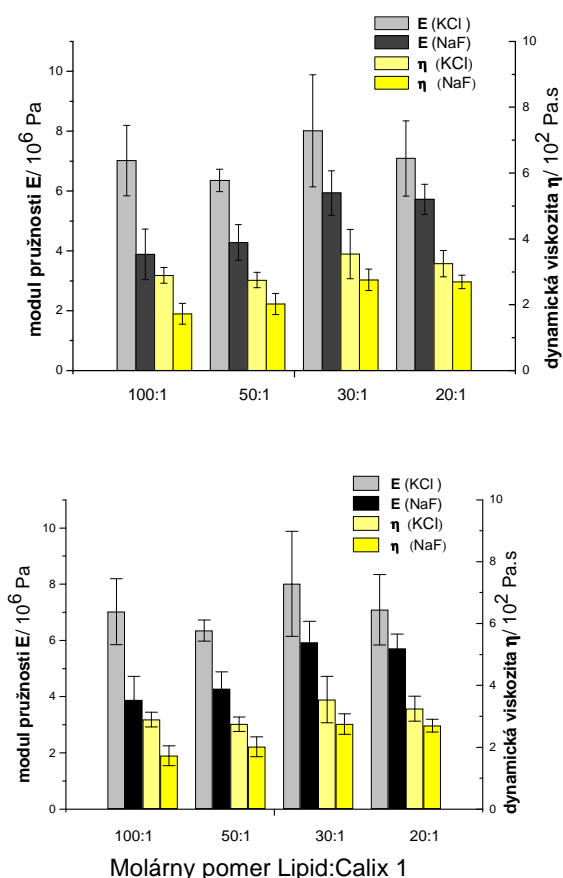
$g=i/U$  [11].

Merali sme kinetiku prúdu počas formovania BLM s rôznym obsahom kalixarénov v roztokoch 0.1 M KCl + 50 mM HEPES, pH 5-6 a 0.1 M NaF + 50 mM HEPES, pH 5-6) Experimenty boli vykonané pri teplote  $20\pm 1$  °C.

### 3 Výsledky a diskusia

#### 3.1 Mechanické vlastnosti BLM v závislosti od obsahu kalixarénov

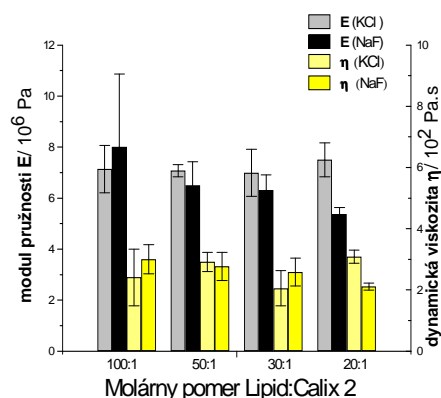
BLM sme vytvárali podľa postupu uvedeného v časti 2.1 a fyzikálne vlastnosti sme študovali pomocou elektrostrikčnej metódy opísanej v časti 2.2. Študovali sme ako sa mení modul pružnosti v



**Obr. 2.:** Porovnanie modulu pružnosti v smere kolmom k ploche membrány a koeficientu dynamickej viskozity od molárneho pomeru Lipid:Kalixarén pre calix 1 v pufrí obsahujúceho KCl alebo NaF

Pre BLM so zabudovaným calixom 1 v pufrí s obsahom KCl sú výsledky merania modulu pružnosti a koeficientu dynamickej viskozity uvedené na obr. 2. Odhliahnuc od pomeru 50:1, modul pružnosti aj dynamická viskozita narastajú s rastom obsahu kalixarénu. V pufrí s obsahom NaF

tiež študované veličiny narastajú so zvyšujúcim sa obsahom calixu 1 v BLM, ale ich hodnoty boli menšie v porovnaní s BLM s calixom 1 v pufrí s obsahom KCl. Pre BLM s obsahom calixu 2 sú výsledky uvedené na obr. 3. Porovnanie skúmaných veličín ukazuje pre BLM s calixom 2 pre prostredie obsahujúce (KCl) a neobsahujúce (NaF) chloridové anióny, že okrem pomeru 100:1, je modul pružnosti aj dynamická viskozita vyššia v prostredí s prítomnosťou chloridových aniónov. Avšak porovnanie výsledkov pre calix 1 a 2 ukazuje, že vplyv chloridových iónov na calix 1 je výraznejší v porovnaní s calix 2, V prípade calix 2 bol dokonca koeficient dynamickej viskozity BLM vyšší v prítomnosti NaF v porovnaní s KCl. Teda efekt chloridových iónov bol v tomto prípade opačný v porovnaní s calix 1. Je možné, že v dôsledku hydrofóbných reťazcov v calix 2 tento kalixarén vôbec nemusí tvoriť vodivé póry v BLM. Pre overenie tohto predpokladu sme zmerali vodivosť BLM obsahujúcich calix 2 v rôznych molárnych pomeroch.



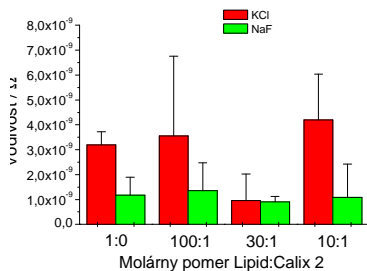
**Obr. 3.:** Porovnanie modulu pružnosti v smere kolmom k ploche membrány a koeficientu dynamickej viskozity od molárneho pomeru Lipid:Kalixarén pre calix 2 v pufrí obsahujúceho KCl alebo NaF

#### 3.2 Meranie vodivosti BLM

Pre calix 2 sme študovali aj vodivosť BLM s rôznym obsahom kalixarénu. Podobne ako pri elektrostrikcii, aj tu sme porovnali vodivosť BLM v 20. minúte, kedy kinetika zmien prúdu bola ustálená. Na obr. 4 je uvedený stĺpcový diagram vodivosti BLM v závislosti od rôzneho molárneho pomeru calix 2 a pre pufrí obsahujúci KCl a NaF. Vidieť, že vodivosť sa v závislosti od obsahu kalixarénu signifikantne nelíšia. Nižšia vodivosť pre NaF môže byť spôsobená rozdielnou pohyblivosťou iónov. Je pravdepodobné, že tento kalixarén netvorí v BLM iónové kanály. Pravdepodobne dlhé



alifatické reťazce predstavujú veľkú energetickú bariéru pre vstup iónov.



**Obr. 4.:** Porovnanie vodivosti BLM pre rôzne molárne pomery Lipid:Kalixarén pre calix 2 v pufrí obsahujúceho KCl alebo NaF

## Záver

V našej práci sme sa zaoberali štúdiom fyzikálnych vlastností (modulu pružnosti v smere kolmom na povrch membrány, koeficientu dynamickej viskozity a elektrickej kapacity) BLM bez obsahu kalixarénov a s ich obsahom, ktoré majú vytvárať iónové kanály, v závislosti od času a taktiež od ich obsahu v BLM voči lipidovej zložke. Využili sme pri tom elektrostrikčnú metódu. BLM boli stabilné pre všetky pomery.

Prítomnosť kalixarénov v BLM spôsobovala rast modulu pružnosti a koeficientu dynamickej viskozity pri všetkých kalixarénoch. V prípade calixu 1 sme pozorovali menšie hodnoty modulu pružnosti a dynamickej viskozity pre BLM tvorené v elektrolyte obsahujúcom NaF v porovnaní s KCl. V prípade calixu 2 boli tieto rozdiely menej výrazné a v prípade koeficientu dynamickej viskozity sme, naopak pre NaF pozorovali rast tejto veličiny. Vodivosti BLM s rôznym obsahom calixu 2 sa významne nelíšili. Nepozorovali sme taktiež výrazné rozdiely vo vodivosti BLM obsahujúce tento kalixarén a tvorené v elektrolyte obsahujúcom NaF a KCl. Je možné, že calix 2 netvorí v BLM iónové kanály. V ďalšej práci sa zameriame na analýzu vodivosti BLM obsahujúcej calix 1.

## Použitá literatúra

[1] P. Mueller, D.O. Rudin, H.T. Tien, W.C. Wescott: reconstitution of cell membrane structures in vitro and its transformation into an excitable system. *Nature* 194 (1962) 979-980.  
 [2] R. Ludwig, T.K. Dzung: Calixarene-based molecules for cation recognition, *Sensors*, 2 (2002) 397-416.

[3] P. Vitovič: Štúdium mechanizmov interakcií monovrstiev vytvorených na rozhraní voda-vzduch s biomolekulami, Dizertačná práca, FMFI UK, Bratislava 2006.

[4] D. P. Nikolelis, S.S.E. Petropoulou, E. Pergel, K. Toth: *Electroanalysis*, 14 (2002) 783-789.

[5] P. Vitovič, D.P. Nikolelis, T. Hianik: Study of calix[4]resorcinarene-dopamine complexation in mixed phospholipid monolayers formed at the air-water interface, *Biochim. Biophys. Acta-Biomembranes*, 1758 (2006) 1852-1861.

[6] V. Sidorov, F.W. Kotch, G. Abrakhmanova, R. Mizani, J-C. Fettinger, J.T. Davis: Ion channel formation from a calix[4]arene amid that binds HCl, *J. Am. Chem. Soc.* 124 (2002) 2267-2278.

[7] I. Izzo, S. Licen, N. Maulucci, G. Autore, S. Marzocco, P. Tecilla, F. de Riccardis: Cationic calix[4]arenes as anion-selective ionophores, *Chemical Communications* 26 (2008) 2986-2988

[8] T. Jin: Calixarene-based photoresponsive ion carrier for the control of Na<sup>+</sup> flux across a lipid bilayer membrane by visible light, *Materials Letters* 61 (2007) 805-808.

[9] L. Osypčáková: Štúdium mechanizmov interakcie dopamínu s kalixarénmi zabudovanými do lipidovej dvojvrstvy, Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava 2010.

[10] V. Šubjaková: Iónové kanály v membránach tvorené kalixarénmi, Bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava 2010.

[11] T. Hianik, V.I. Passechnik: Bilayer lipid membranes; Structure and mechanical properties; Kluwer Academic Publishers; Dordrecht 1995.

Internet:

<http://www.antibiotika.sk/>

# Bio-dekontaminácia vody pomocou DC výbojov a skúmanie mechanizmov pôsobenia nerovnovážnej plazmy na bakteriálne bunky

Barbora Tarabová<sup>1\*</sup>

Školiteľ: Zdenko Machala<sup>2†</sup>  
Libuša Šikurová<sup>1‡</sup>

<sup>1</sup>Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

<sup>2</sup>Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

V práci sme sa zaoberali pôsobením a účinkami nízko-teplotnej nerovnovážnej plazmy generovanej pri atmosférickom tlaku elektrickými výbojmi na Gram pozitívne (G+) bakteriálne bunky *Bacillus cereus*. Na opracovanie sme použili korónový a iskrový výboj v zapojení pri oboch polaritách.

Biodekontaminačný účinok výbojov je vyhodnotený prostredníctvom parametra účinnosti. Najväčší biodekontaminačný efekt na *B. cereus* mali iskrové výboje. Voľné radikály vznikajúce v takejto plazme poškodzujú biologické membrány buniek. Mieru oxidačného poškodenia membránových lipidov u opracovaných bakteriálnych buniek sme stanovovali pomocou TBA testu. Zistili sme zvýšený nárast koncentrácie reakčných produktov kyseliny tiobarbiturovej *c(TBARS)* a teda zvýšené poškodenie membrán po opracovaní plazmou voči referenčnej vzorke. Výnimkou bola vzorka opracovaná kladným korónovým výbojom, kde nebol rozdiel signifikantný. Spotrebovanú energiu v jednotlivých výbojoch na dosiahnutie tej, ktorej účinnosti sme vyhodnotili pomocou parametra *E-value*. Najviac energie bolo dodanej do iskrových výbojov, ktoré mali ale zároveň najvyššiu účinnosť a najvyšší nárast *c(TBARS)*.

**Kľúčové slová:** elektrické výboje, nízko-teplotná nerovnovážna plazma, mikroorganizmy, oxidačný stres, voľné radikály, bio-dekontaminácia, TBARS

## 1 Teoretická časť

Keďže je cieľom tejto práce skúmať účinky a mechanizmy pôsobenia plazmy generovanej DC výbojmi na Gram pozitívnu baktériu *Bacillus cereus*, tak si v nasledujúcej časti charakterizujeme a priblížime tieto pojmy.

### 1.1 Základné charakteristiky plazmy

Plazma je označovaná ako štvrté skupenstvo hmoty. Zriedkavo sa s ňou môžeme stretnúť v prírode v podobe blesku počas búrok. V súčasnosti ju najviac využívame v spotrebnej elektronike a vo výbojkách.

Plazmou sa označuje vnútorná časť elektrického výboja, na ktorú nemajú vplyv steny a elektródy výbojky. Je to vlastne ionizovaný plyn (obsahuje nabitú aj neutrálne častice), ktorý sa správa navonok kvázineutrálne, ale jeho priestorový náboj nemôžeme zanedbať.

Nízko-teplotná plazma je charakterizovaná vysokou teplotou elektrónov  $T_e$  a pomerne nízkou teplotou plynu  $T_g$  (atómy a molekuly neutrálneho plynu, kladné ióny). V určitých prípadoch môže teplota elektrónov dosiahnuť teploty až 20 000 K, pričom teplota plynu ostáva blízka izbovej teplote. [Martišovič, 2006; Becker et al., 2005]

#### 1.1.1 Generácia plazmy

Existujú dva možné spôsoby generácie plazmy. Prvým je termická ionizácia, kedy ohrievame plyn na vysoké teploty (niekoľko tisíc K). Druhý spôsob, ktorý je bežnejší pre prax, využíva na generáciu plazmy elektrické výboje. Takto generovaná plazma je nerovnovážna (nenachádza sa v rovnovážnom

\* barborica@gmail.com

† machala@fmph.uniba.sk

‡ sikuroval@gmail.com

stave, nemôžeme jej vlastnosti opísať pomocou termodynamiky).

Ak máme výbojku tvorenú z dvoch elektród, pripojených na vysoké napätie v plyne, ktorý je neutrálny a neobsahuje nabité častice, nachádzajú sa v ňom ale elektróny, ktoré vznikajú pôsobením vonkajších vplyvov ako je kozmické žiarenie, rádioaktívne žiarenie použitých materiálov. Ak dosiahneme zapal'ovacie napätie, tieto tzv. primárne elektróny získavajú v elektrickom poli energiu na ionizáciu molekúl plynu. V plyne vzniká elektrónová lavína, plyn sa ionizuje a vzniká vodivý kanál výboja. Výboj môže existovať iba vďaka toku elektrického prúdu cez prostredie výboja. Preto je potrebné neustále dopĺňať energiu, ktorá sa odvádza do okolia. Pri prerušení prúdu výboj rýchlo zanikne a nabité častice pri vzájomných zrážkach rekombinujú.

Charakter výboja závisí od zloženia a tlaku plynu, tvaru elektród, vlastností zdroja napätia a frekvencie. Podľa typu napájacieho napätia poznáme jednosmerné (DC) a striedavé (AC) alebo pulzné výboje. [Martišovits, 2006]

### 1.1.2 Korónový výboj

Tento typ výboja môže existovať iba v nehomogénnych elektrických poliach a je dôležité aby bol tlak väčší ako 1 kPa. Nehomogénnosť poľa dosiahneme tak, že jedna z elektród je zaostrená a má malý polomer krivosti, ktorý je oveľa menší ako medzielektródová vzdialenosť. Táto elektróda sa nazýva korónujúca elektróda a oblasť ionizácie je viazaná len na oblasť tejto elektródy.

Podľa zapojenia polarít korónujúcej elektródy rozlišujeme kladnú a zápornú korónu. [Martišovits, 2006]

**Kladná koróna:** Pri zvyšovaní napätia výboj prechádza cez jednotlivé charakteristické režimy. Na začiatku to je najprv tzv. burst pulse corona, ktorá prechádza ďalej do streamerovej koróny. Pri ďalšom zvyšovaní napätia sa zjavuje tlecia koróna, ktorá môže prejsť až do iného druhu výboja - iskry. [Becker et al., 2005]

**Streamerova koróna (SC)** je charakteristická malými prúdovými pulzmi streamerov (prúdové vlákna) do 10 mA s frekvenciou opakovania 1é-30 kHz. Výbojové napätie ostáva približne konštantné. SC generuje veľmi chladnú plazmu (~300 K). [Machala et al., 2009]

### 1.1.3 Prechodový iskrový výboj

**Transient spark (TS)** je relatívne nový typ iskrového výboja. Vzniká priamo z korónového výboja pri zvyšovaní napätia na elektróde. Vytvára sa vodivý kanál, zvyšuje sa ionizácia až dôjde k prierazu do iskry. Charakteristické sú silné prúdové pulzy (~ A), ktoré sú sprevádzané prudkým poklesom napätia. Doba trvania pulzu je veľmi krátka 10-100 ns. Frekvencia pulzov je 0,5-5 kHz.

Produkovaná plazma je pomerne chladná (~ 500 - 1500 K), pretože počas trvania pulzu nestihne dôjsť k termickej relaxácii a tým významnému ohrevu. [Machala et al., 2009]

## 1.2 Mikroorganizmy

Baktérie patria do ríše Prokaryota. Sú to jednobunkové organizmy schopné samostatnej existencie, čomu musí byť prispôsobená ich vonkajšia aj vnútorná štruktúra.

Väčšina baktérií má priemer bunky 0,5 - 2  $\mu\text{m}$ , pričom vieme, že bakteriálne bunky majú širokú škálu tvarov. Poznáme bunky guľovité (koky), tyčinkovité (bacily alebo tyčinky), ovoidné (kokobacily), špirálovité (spirochéty a spirilly), ohnuté tyčinky (vibriá). Mnoho druhov baktérií sa pri ich delení neoddelí úplne a tak vznikajú zoskupenia ako diplokoky, streptokoky, stafylokoky, diplobacily, streptobacily, atď. [Black, 2005]

### 1.2.1 Stavba bakteriálnej bunky

Prokaryotická bunka je podstatne jednoduchšia ako eukaryotická. Vnútorné prostredie každej takejto bunky tvorí cytoplazma, ktorú tvorí voda a rôzne rozpustené substancie. Nachádzajú sa v nej hlavne aj rôzne bunkové organely ako sú ribozómy (môžu vytvárať polyribozómy, umožňujú syntézu proteínov), granuly a vezikuly obsahujúce rôzne substancie, nukleoid (postáčaná a poskladaná DNA), môžu obsahovať aj plazmidy. Cytoplazma je uzatvorená v cytoplazmatickej (bunkovej) membráne. Nad membránou sa nachádza bunková stena. V niektorých prípadoch sa vyskytuje ešte obal - kapsula alebo slizová vrstva, prípadne ďalšie štruktúry ako pilli, fimbrie alebo bičík umožňujúci pohyb.

### 1.2.2 Cytoplazmatická membrána

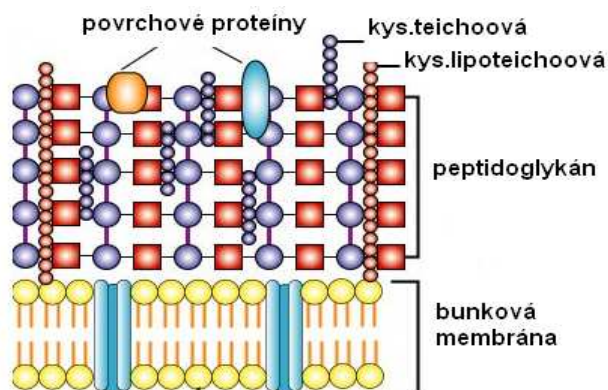
Je hrubá asi 7-8 nm a tvorí hranicu medzi bunkou a jej okolím. Skladá sa z lipidov (70%) a proteínov (30%). Lipidy vytvárajú bimolekulovú lipidovú dvojvrstvu. Hlavný lipid membrány je fosfoglycerol (patrí medzi fosfolipidy). Fosfolipidy sú orientované tak, že nepolárne reťazce mastných kyselín, ktoré sú hydrofóbne, sú orientované dovnútra dvojvrstvy. Membránové lipidy sa nachádzajú v „tekutom stave“. Pomedzi lipidy sú roztrúsené proteíny. Integrálné proteíny sú včlenené do membrány, prechádzajú ňou. Vytvárajú póry alebo kanály umožňujúce prechod rôznych látok do bunky a z nej. Periférne bielkoviny sa nachádzajú hlavne na vnútornej strane membrány. Sú to hlavne enzýmy (enzýmy na syntézu ATP, bunkovej steny, enzýmy dýchacieho reťazca).

### 1.2.3 Bunková stena

Slúži na ochranu bunky pred poškodením, osmotickou lýzou, určuje tvar samotnej bunky.

Môže mať rôznu hrúbku, štruktúru a zloženie. Rozlišujeme bunkovú stenu Gram pozitívnych (G+) a Gram negatívnych (G-) baktérií. V našich experimentoch sme ako modelový organizmus využívali *B. cereus*, ktorý patrí medzi G+ baktérie.

**Bunková stena G+ baktérií** (obr. 1) je relatívne hrubá (30-100 nm). Nasadá tesne na cytoplazmatickú membránu. 60-80 % tvorí tuhý polymér peptidoglykán nazývaný mureín. Peptidoglykán pozostáva z lineárnych reťazcov, ktoré sú popretkávané krátkymi peptidmi a spolu vytvárajú trojdimenzionálnu sieťovitú štruktúru. Na peptidoglykán sa kovalentne naväzuje ešte kyselina teichoová a lipoteichoová. Tieto kyseliny pozostávajú z glycerolu, fosfátu a alkoholu ribitolu. Vytvárajú polyméry, ktoré prechádzajú hlavne vonkajšou časťou bunkovej steny a vyčnievajú na povrchu. [Black, 2005; Singleton, 2005]



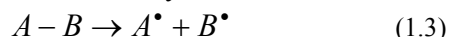
**Obr. 1** Štruktúra bunkovej steny G+ baktérií nasadajúcej na bunkovú membránu

### 1.3 Voľné radikály a ich pôsobenie na biologické membrány

Voľný radikál môžeme vo všeobecnosti definovať ako prvok (molekulu) schopný nezávislej existencie, ktorý obsahuje jeden alebo viac nespárených elektrónov. Radikály vo všeobecnosti vznikajú, keď atóm (molekula) stratí jeden elektrón (oxidácia) alebo jeden elektrón prijme (redukcia).



Spôsob vzniku radikálov je aj homolytické štiepenie kovalentných väzieb, kedy si každý z fragmentov molekuly ponechá jeden elektrón z elektrónového páru zúčastňujúceho sa väzby.



Významné radikály sú reaktívne formy odvodené od kyslíka (ROS). Patrí sem superoxidový radikál  $O_2^{\bullet-}$ , hydroxylový radikál  $OH^{\bullet}$ , hydroperoxylový radikál  $OH_2^{\bullet-}$ , alkoxylové  $RO^{\bullet}$  a peroxylové  $RO_2^{\bullet}$  radikály. Reaktívne môžu byť aj tzv. neradikálové formy, ktoré nemajú nespárené

elektróny ( peroxid vodíka  $H_2O_2$ , ozón  $O_3$ , singletový kyslík  $O_2^1\Delta$ ). Ďalej sú to reaktívne formy odvodené od dusíka (RNS) - medzi formy odvodené od nitroxidu  $NO^{\bullet}$  patria nitroperoxid  $NOO^{\bullet}$ , nitrózoperoxid  $ONOO^{\bullet}$ , peroxyinitritový anión  $ONOO^{-}$ . [Halliwell, Gutteridge, 2000]

#### 1.3.1 Oxidačný stres

Oxidačný stres môžeme definovať ako prevahu produkcie ROS a RNS foriem nad ochrannými antioxidantami, pričom táto prevaha má za následok poškodenie buniek.

**Mechanizmus poškodenia cieľových buniek - peroxidácia lipidov** je oxidačné poškodenie polynenasýtených lipidov, ktoré obsahujú polynenasýtené mastné kyseliny (PUFAs). Fluidita bunkovej membrány je závislá na množstve polynenasýtených a nenasýtených reťazcov, ktoré znižujú bod topenia vnútornej časti membrány. Preto poškodenie PUFAs vedie k zníženiu membránovej fluidity, ktorá je podstatná pre normálnu funkciu bunkových membrán. Peroxidácia lipidov je rozvetvená reakcia voľných radikálov. Iniciuje sa účinkom akéhokoľvek faktora, ktorý má dostatočný potenciál vytrhnúť vodíkový atóm z metylénovej skupiny ( $-CH_2-$ ). V mechanizme peroxidácie rozoznávame tieto fázy: iniciácia, propagácia, rozvetvenie a terminácia. Vznikajú radikály  $LO^{\bullet}$ ,  $LOO^{\bullet}$  a  $^{\bullet}OH$  ( $L$  označuje lipid), ktoré môžu vstupovať do reakcií s novými molekulami lipidov. Ukončenie reakcií nastáva vzájomnou rekombináciou lipidových radikálov. Za primárne produkty peroxidácie sa považujú lipidové peroxidy. Nie sú však veľmi stále a najmä v prítomnosti iónov prechodných kovov (Fe, Cu) sa môžu ďalej rozkladať. Tak vznikajú rôzne sekundárne produkty lipoperoxidácie. Mnohé z nich sú biologicky aktívne látky. Najviac opísaný je sekundárny produkt lipoperoxidácie malondialdehyd (MDA). MDA slúži ako biologický marker peroxidácie lipidov a môžeme ho stanovovať pomocou TBA testu. [Halliwell, Gutteridge, 1999; Ďuračková et al., 2006]

#### 1.3.2 Plazma a voľné radikály

Plazma vznikajúca v elektrických výbojoch je silno nerovnovážna a preto je bohatým zdrojom veľkého počtu reaktívnych častíc. Vznikajú v plazme početnými vzájomnými zrážkami, ktoré spôsobujú buď disociáciu alebo excitáciu okolitých molekúl a tak cez rad reakcií vznikajú ďalšie reaktívne častice. V plazme generovanej vo vzduchu vznikajú predovšetkým reaktívne formy odvodené od kyslíka (ROS), ale aj dusíka (RNS) ako je napr.

superoxidový radikál  $O_2^{\bullet-}$ , peroxid vodíka  $H_2O_2$ , ozón  $O_3$ , singletový kyslík, nitroxid  $NO^{\bullet}$  a  $NO_2^{\bullet}$ . [Laroussi, 2005]

Prítomnosť a zastúpenie reaktívnych prvkov v plazme nami použitých elektrických výbojov boli zistené pomocou optickej emisnej spektroskopie cez oblasť UV žiarenia (380 - 200 nm), oblasť viditeľného žiarenia (780 - 380 nm) a oblasť blízkeho infračerveného žiarenia (0,3 - 780 nm). [Machala et al., 2009]

Vo výbojoch použitých v experimente sa vyskytujú  $OH$ ,  $NO$  a  $H$ ,  $O$  a  $N$  radikály v rôznej miere. Elektróny s najvyššou energiou sa nachádzajú práve v iskrovom výboji. Kyslíkové radikály môžu reagovať so vzdušným kyslíkom  $O_2$  a formovať ozón  $O_3$ . [Machala et al., 2007]

#### 1.4 Mechanizmy interakcie plazmy s bunkou

Vlastnosti nerovnovážnej plazmy generovanej vo vzduchu pri atmosférickom tlaku v procesoch sterilizácie a bio-dekontaminácie sú predmetom mnohých experimentov a pozorovaní. Plazma pôsobí na bakteriálne bunky viacerými mechanizmami. Zároveň však vieme, že bakteriálna bunka môže byť inaktivovaná jedným zo štyroch známych faktorov.

UV žiarenie: UV žiarenie spôsobuje dimerizáciu tymínových báz v DNA, čo navodzuje inhibíciu replikácie DNA a následne smrť bunky. Optimálny efekt má rozmedzie vlnových dĺžok 220-280 nm a dávka niekoľko  $mW/cm^2$ . [Laroussi, Leipold, 2003]. Spektroskopickým meraním sa však zistilo, že nerovnovážna plazma pri atmosférickom tlaku zvyčajne neemituje UV žiarenie s  $\lambda < 285$  nm vo významnej miere. Ďalej sa zistilo, že jeho plošná hustota je v rozsahu vlnových dĺžok 200 - 300 nm menšia ako  $50 \mu W/cm^2$ . [Laroussi, 2005].

Teplota: Vysoká teplota sa využíva bežne na sterilizáciu, pretože má na bakteriálne bunky inaktivačný účinok. Sterilizácia vlhkým teplom je vo všeobecnosti účinnejšia. Veľmi vysoké teploty môžu spôsobiť, že sa zníži alebo úplne zastaví metabolická aktivita bakteriálnych buniek a následne sa bunka prestáva deliť. Vysoká teplota ovplyvňuje aj fluiditu biologických membrán. Experimentálne bola zameraná aj priemerná teplota plazmy v jednosmerných elektrických výbojoch využívaných v experimente.

$$\text{Koróna: } T_g = (350 \pm 100) \text{K}$$

$$\text{Iskra: } T_g = (550 \pm 100) \text{K}$$

Sú to teploty namerané priamo v cca 0,1 mm tenkom výbojovom kanáli. Teplota sa však odovzdáva hlavne do plynu a pri pôsobení na bunky

vo vode sa vplyv tepla ukazuje málo významný. [Machala et al., 2007]

Reaktívne častice: Reaktívne častice odvodené od kyslíka (ROS) a dusíka (RNS) vznikajú hlavne v plazme vytvorenej zo vzduchu. Na hodnotenie miery oxidačného poškodenia používame nárast koncentrácie produktov peroxidácie lipidov. Experimentálne sa dokázalo, že vo výbojoch vytvorených vo vzduchu sa tvorí veľké množstvo ROS a takéto výboje majú silné germicídne účinky. [Lu, 2008]. Ozón  $O_3$ , ktorý patrí medzi ROS významne ovplyvňuje bunkové dýchanie a tým urýchľuje bunkovú smrť. [Laroussi, 2000].  $OH$  radikál je významný v prípade vlhkého plynu alebo média.

Nabité častice: V plazme sa ako nabité častice nachádzajú pomalé ióny a vysokoenergetické elektróny. Nabité častice sa zhromažďujú na povrchu membrán, akumuláciou svojich nábojov vytvárajú elektrické pole. Ak je náboj dosť veľký, môže vyvolať na povrchu membrán ťažné sily. Tie narušia integritu membrán, spôsobia v nich trhliny. Dochádza k tzv. elektroporácii. Takéto poškodenie je najpravdepodobnejšie u Gram negatívnych baktérií, pretože majú nepravidelný povrch s malými polomerami krivosti. [Laroussi, 2004].

## 2 Experimentálna časť

V tejto časti sa budeme venovať samostatnému priebehu pokusov a podmienkam, v ktorých boli vykonávané. V experimentoch sme využívali streamerovú korónu a prechodovú iskrú v kladnej polarite na generovanie nízko-temperatúrne nerovnovážnej plazmy vo vzduchu pri atmosférickom tlaku. Touto plazmou sme upravovali bakteriálne bunky suspendované vo fyziologickom roztoku (0,85% roztok NaCl) pretekajúcom konštantným prietokom cez výboje. Opracované vzorky boli vyhodnocované štandardnými technikami termostatickej kultivácie a technikami počítania CFU (Colony Forming Units). Keďže podstatou práce bolo zisťovanie miery oxidačného poškodenia lipidových membrán, upravované vzorky boli preto podrobené aj TBA testu. Na porovnanie mechanizmu účinku plazmy a UV svetla boli bakteriálne bunky vystavené UV svetlu.

### 2.1 Experimentálne zariadenie a nastavenia

Zdroj vysokého napätia: produkuje jednosmerné (DC) napätie, obojpolaritný. Obsahuje rezistorové pole s 24 rezistormi  $R_1$ - $R_{24}$ , každý rezistor má  $R = 0,82 \text{ M}\Omega$ . Pomocou prepojovacích mostíkov je možné nastaviť rôzne hodnoty predradeného odporu podľa potreby experimentu. V našom prípade  $R(SC) = 20 \text{ M}\Omega$ ,  $R(TS) = 6,6 \text{ M}\Omega$ .

Vysokonapäťová sonda (VN) Tektronix P6015A, 1000x, 3pF, 100 M $\Omega$

Digitálny osciloskop Tektronix TDS 2024, 200 MHz, 2,5 Gs/s, 4 kanálový

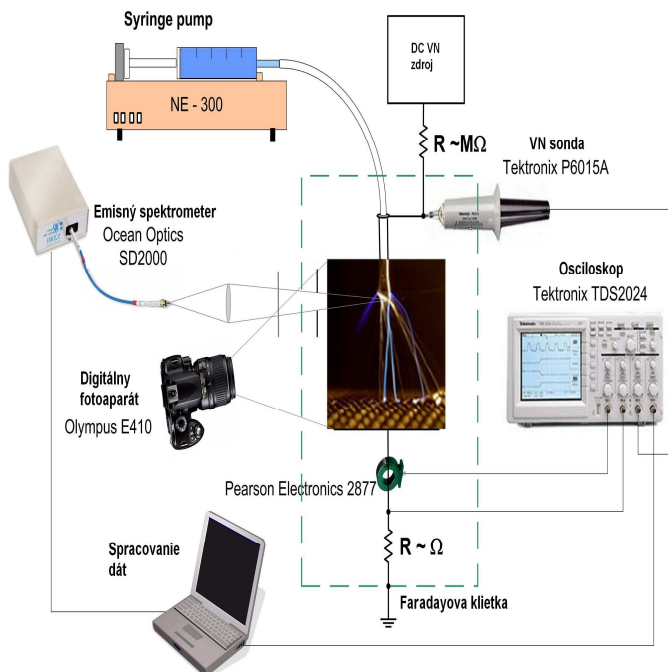
Faradayova klietka: odčistenie rušivých vplyvov okolia na výboj a výboja na okolie.

Injekčná pumpa SyringePump NE-300: umožňuje nastaviť rýchlosť prietoku roztoku.

Emisný spektrometer Ocean Optics SD2000: použitý na meranie emisných spektier oboch výbojov v predchádzajúcich experimentoch [Machala et al. 2007]

Výbojové zariadenie: je tvorené dutou injekčnou ihlou, ktorá spĺňa funkciu vysokonapäťovej elektródy a vďaka malému polomeru krivosti vytvára nehomogénne elektrické pole. Ako nízkonapäťová elektróda je použitá nerezová mriežka. Také usporiadanie sa označuje ako tzv. point-to-plane geometry. Bakteriálny roztok je umiestnený v striekačke uchytenej v pumpe a vháňaný cez hadičku na ihlu. Dutá ihla, ktorej špička je špeciálne zrezaná, nám umožňuje, že opracovávaná vzorka preteká priamo cez aktívnu oblasť výbojov. Opracovaná vzorka je zachytávaná do sterilnej Petriho misky, ktorá je umiestnená pod mriežkou.

Nastavenia: - medzielektródová vzdialenosť 10 mm  
- rýchlosť prietoku roztoku cez oblasť výboja Q = 0,5 ml/min



**Obr. 2** Schéma zapojenia experimentálnej aparatúry

### 2.1.1 Parametre DC výbojov

Pomocou štvorkanálového osciloskopu Tektronix TDS 2024 sme zaznamenávali charakteristický časový priebeh prúdu a napätia výbojov. Napätie  $U$  bolo merané VN sondou Tektronix P6015A. Prúd bol v korónovom výboji meraný na 50  $\Omega$  odpore.

V prechodovom iskrovom výboji to bol odpor 1  $\Omega$ , prispôbený na 50  $\Omega$  koaxiálny kábel. Dôležité bolo, aby bol výboj vo Faradayovej klietke, ktorá slúžila na odstránenie rušivých frekvencií z a do okolia.

Dôležitým parametrom výboja z hľadiska jeho účinnosti je výkon daného výboja. Streamerová koróna a prechodová iskra sú pulzné výboje. Stredný výkon pulzných výbojov možno vypočítať z osciloskopických záznamov podľa vzťahu

$$P_{str} = \frac{1}{T} \int_0^T UI dt = f \int_0^T UI dt, \quad (2.1)$$

kde je  $T$  perióda a  $f$  frekvencia pulzov nameraná osciloskopicky. Ak si uvedomíme, že prúd v relaxačnej dobe (v dobe mimo priebehu pulzu) je  $I = 0$  (to znamená, že aj  $UI = 0$ ), potom nám stačí počítať integrál v čase doby trvania pulzu ( $0 - T_p$ )

$$P_{str} = f \int_0^{T_p} UI dt + f \int_{T_p}^T UI dt \quad (2.2)$$

### Priemerné parametre výbojov

SC:  $U_{mean} \sim 6-7$  kV,  $I_{max} \sim 10-15$  mA,  $f \sim 0.5-1.5$  kHz

TS:  $U_{mean} \sim 9-12$  kV,  $U_{max} \sim 11-15$  kV,  $I_{max} \sim 18-27$  A,  $f \sim 0.9-1.4$  kHz

## 2.2 Práca s biologickým materiálom

V experimentoch používaný *Bacillus cereus* patrí do rodu *Bacillus*, kde zaraďujeme aeróbne sporujúce G<sup>+</sup> paličky. Vzorka pochádza z Prírodovedeckej fakulty UK. Je skladovaný v roztoku vo forme spór pri teplote 4°C. V experimentoch sme pracovali so živou formou *B. cereus*, nie so spórmi. Je to nenáročný mikroorganizmus, rastie veľmi dobre na bežných kultivačných pôdach.

### 2.2.1 Príprava vzorky

Počas práce s mikrobiologickým materiálom bolo potrebné zabezpečiť dostatočne sterilné prostredie a sterilné pomôcky.

Sterilizácia suchým teplom ( $T = 175$  °C,  $t = 120$  min,  $p = 1$  atm) sme použili na sterilizáciu laboratórneho skla. Na sterilizáciu sme využili teplovzdušnú rúru (Fagor).

Sterilizácia vlhkým teplom ( $T = 120$  °C,  $t = 40$  min,  $p = 1,2$  atm). Vlhkým teplom sme sterilizovali živné pôdy, fyziologický roztok, sklenené guľôčky na rozotieranie, sklenené banky, špičky, skúmavky, striekačku, hadičku. Na sterilizáciu sme využili tlakový hrniec (Solingen).

Sterilizácia v plameni: V plameni plynového kahana sme sterilizovali kovové predmety ako pinzety, kovovú mriežku, ihlu, ktoré boli použité počas experimentu viackrát.

Priprava „overnight“ kultúry: Odoberieme pipetou 50  $\mu$ l z roztoku so spórami *B.cereus* a naočkujeme ich do kadičky so živným bujónom, ktorý je vytemperovaný na laboratórnu teplotu. Následne necháme takto pripravenú kultúru trepať za prístupu vzduchu pri teplote 37 °C počas 18-20 hodín. Baktérie sa rozmnožia a koncentrácia je veľmi vysoká. Je potrebné ju upraviť na koncentráciu  $\sim 10^7$ - $10^8$  buniek/ml. Na úpravu využijeme tzv. McFarlandovú zákalovú stupnicu. Je to nepriama metóda, kde sa turbidimetricky porovnáva zákal vytvorený bunkami v tekutom prostredí so zákalom síranu bárnateho. Overnight kultúru zriedime vo fyziologickom roztoku na požadovanú koncentráciu, ktorú môžeme následne spracovať.

## 2.3 Postup

Opracovanie v elektrickom výboji: Striekačku s bakteriálnou suspenziou umiestnime do pumpy. Opracovanú vzorku zachytávame do sterilnej Petriho misky.

Nastavenia: -medzielektródová vzdialenosť  $d = 10$ - $8$  mm

- rýchlosť prietoku roztoku baktérií cez oblasť výboja je  $Q = 0,5$  ml/min

Osvetlenie vzorky UV svetlom: Vzorku s rovnakou koncentráciou sme pre porovnanie inaktivačných účinkov vystavili UV žiareniu (UV). Vzorku s objemom 4 ml v Petriho miske s priemerom 8 cm sme umiestnili do vzdialenosti 10 cm od UV lampy na dobu 30 s. Ako zdroj UV žiarenia sme použili germicídnu UV C lampu Phillips G 30T8 s  $\lambda = 254$  nm a  $P = 30$  W.

Všetky opracované vzorky boli vysiate na Petriho misky.

Meranie pH a vodivosti: Merali sme pH a mernú vodivosť vzorky pred opracovaním a ihneď po opracovaní.

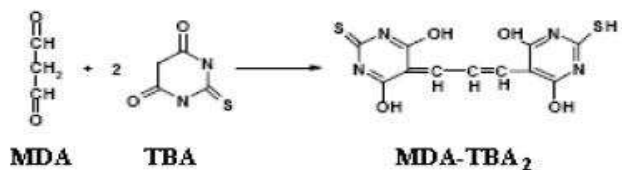
### 2.3.1 Vyhodnocovanie prežívania baktérií

Všetky vzorky boli po opracovaní výbojom alebo UV svetlom vysiate na Petriho misky s agarom aj s referenčnou vzorkou. Pri práci s baktériami sme postupovali podľa štandardných postupov. Každé vzorky prislúchali 3 vysiate misky. Vysiate Petriho misky sme dali inkubovať v reverznej polohe na dobu cca. 18 - 20 hodín pri teplote 37 °C. Po inkubácii boli na miskách kolónie viditeľné voľným okom (CFU - colony forming unit). Spočítali sme ich manuálne pomocou elektronického počítadla (Bel-Arts Product). Keďže každej vzorky prislúchali 3 misky, počet CFU pre príslušnú vzorku sme určili vždy ako aritmetický priemer 3 hodnôt. Z počtu vyrastených kolónií  $k$  vypočítame späť koncentráciu referenčnej a opracovaných vzoriek na 1 ml roztoku podľa

vzťahu  $N_0 = k \cdot 50 \cdot r$  buniek/ml (referenčná vzorka),  $N = k \cdot 50 \cdot r$  buniek/ml (opracovaná vzorka), kde  $k$  je počet CFU a  $r$  je príslušné riedenie.

### 2.3.2 Meranie lipoperoxidácie TBA testom

Princíp metódy: Podstatou merania miery oxidačného poškodenia biomembrán je reakcia sekundárneho produktu lipoperoxidácie malondialdehydu (MDA) a kyseliny tiobarbiturovej. Reakcia prebieha pri vysokej teplote 90 - 100 °C a vzniká farebný produkt MDA-TBA<sub>2</sub>, ktorý má absorpčné maximum pri  $\lambda = 532$  nm. [Cayman chemicals, 2010]



Obr. 3 Reakcia vzniku MDA-TBA<sub>2</sub>

#### Použité prístroje:

- spektrofotometer PharmaSpec UV-1700, Shimadzu (parametre prístroja: rozsah vlnových dĺžok: 190 – 1100 nm, presnosť nastavenia vlnovej dĺžky:  $\pm 0,1$  nm, fotometrická presnosť:  $\pm 0,5$  nm)
- centrifúga UNIVERSAL 320 R s chladením, Hettich Zentrifugen
- magnetická miešačka s ohrevom RH basic 2, IKA
- trepačka MS 2, IKA
- analytické váhy AE200, Mettler

Postup: 1 ml vzorky zmiešame s 3 ml 10 % kyseliny trichlóroctovej, ktorá slúži na vyzrážanie vzorky počas 5 minútového trepania v trepačke. Ďalej vzorku treba nechať stáť 10 min pri teplote 4 °C. Potom nasleduje centrifugácia počas 15 min. pri otáčkach 12 000/min, aby sa odstredil nepotrebný bunkový materiál na dno centrifugačnej skúmavky. Zo vzniknutého supernatantu odoberieme 1,5 ml a zmiešame ho s 1,5 ml 0,7 % TBA v sklenej skúmavke a zahrievame roztok na 100 °C počas 15 min. za prístupu vzduchu. Po ukončení zahrievania chladne vzorka 15 min pri izbovej teplote (21 - 21 °C). TBA testu podrobíme každú opracovanú vzorku.

Potom vzorku prelejeme do kyvety a zmeriame absorpčné spektrum v rozsahu vlnových dĺžok 460–700 nm. Do porovnávacej kyvety dáme redestilovanú vodu. Z nameraného spektra určíme pre každú vzorku rozdiel absorbancií

$\Delta A = A_{532} - A_{600}$ , ktorý vypočítame, ak od absorbancie pri 532 nm odčítame absorbanciu pozadia pri 600 nm. [Hrnčiarová et al., 2005]

### 2.3.3 Štatistické vyhodnotenie výsledkov

Na otestovanie normálneho rozdelenia dát každého nameraného parametra pre každú experimentálnu skupinu sme použili parametrický Shapiro-Wilkov test. Pretože boli namerané údaje nesymetricky rozdelené, vyhodnotili sme ich pomocou mediánu a horného a dolného medzikvartilového rozpätia. Tieto údaje sme získali aplikovaním popisnej štatistiky na dáta. Na porovnanie nameraných rozdielov absorbancií u SC a TS vzorky voči REF vzorke bol použitý neparametrický Kruskal-Wallisov test. Následne sme vykonali analýzu rozptylu dát pomocou Conover-Inmanovho testu pre viacnásobné porovnávanie. Na porovnanie UV vzorky voči REF vzorke sme použili Mann-Whitneyov test. Všetky štatistické testy boli vykonané pre hladinu spoľahlivosti  $\alpha = 5\%$ . Na grafické a štatistické spracovanie nameraných výsledkov bol použitý softvér Microsoft Excel 2003, Origin 7.5 a StatsDirect 2.7.2.

## 3 Výsledky a diskusia

### 3.1 Účinnosť výbojov

Účinnosť jednotlivých typov výbojov sme použili ako parameter hodnotiaci inaktivačný efekt daných výbojov. Podľa postupu opísaného v časti 2.3.1 sme určili koncentráciu bakteriálnych suspenzií. Z vypočítaných koncentrácií môžeme určiť inaktivačný efekt daného typu výboja cez parameter účinnosti  $\eta$  [%]. Vypočítame ho podľa vzťahu :

$$\eta = 100 \cdot \left( 1 - \frac{N}{N_0} \right), \quad (3.1)$$

kde  $N$  je koncentrácia prežívajúcich buniek v opracovanej vzorke a  $N_0$  je koncentrácia buniek v referenčnej vzorke. Účinnosti pre TS, SC a UV sú vyhodnotené prostredníctvom mediánu, horného a dolného kvartil (Obr. 4). Porovnaním oboch výbojov vidíme, že TS má vyššiu účinnosť (medián 99,68 %) ako SC výboj (medián 81,26 %). V grafe môžeme vidieť pre porovnanie aj účinnosť, ktorú sme dosiahli opracovávaním bakteriálnej suspenzie UV žiarením. Jeho účinnosť bola 99,96 % (medián).

### 3.2 TBA test

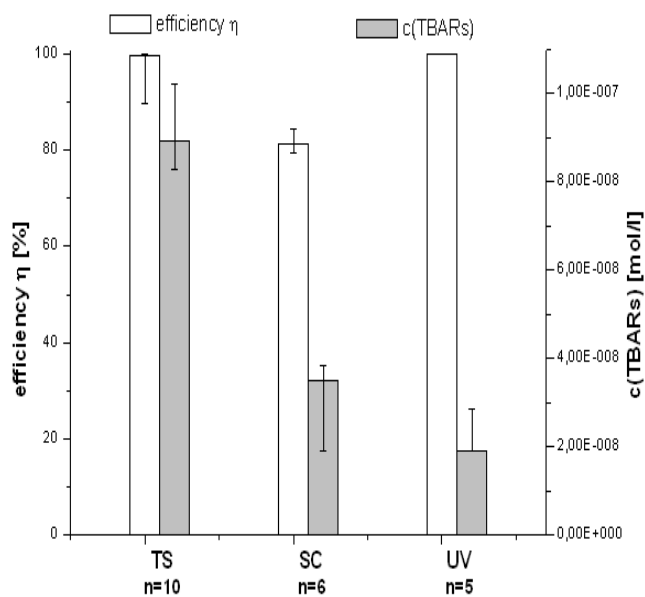
Mieru peroxidácie sme určovali pomocou TBA testu, ktorý sme vykonali podľa postupu v kapitole 2.3.2. Absorbancia je vlastne logaritmus pomeru intenzity svetla vstupujúceho svetla  $I_0$  k intenzite transmitovaného svetla opúšťajúceho farebnú vrstvu  $I$ . Vzťah medzi absorpciou žiarenia, hrúbkou farebnej vrstvy a koncentráciou roztoku vyjadruje Lambert-Beerov zákon,

$$I = I_0 \cdot 10^{-\varepsilon c d} \quad (3.2)$$

kde  $I_0$  je intenzita svetelného zväzku dopadajúceho na kyvetu [ $\text{W}/\text{m}^2$ ],  $I$  je intenzita prepusteného svetelného zväzku,  $\varepsilon$  je molový absorpčný koeficient [ $\text{mol}^{-1} \cdot \text{l} \cdot \text{cm}^{-1}$ ],  $c$  koncentrácia skúmanej látky [ $\text{mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ] a  $d$  je hrúbka kyvety [ $\text{cm}$ ]. V našom prípade je  $d=1\text{cm}$  a  $\varepsilon = 1,57 \cdot 10^5 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{l} \cdot \text{cm}^{-1}$ . Logaritmovaním dostaneme vzťah pre absorbanciu

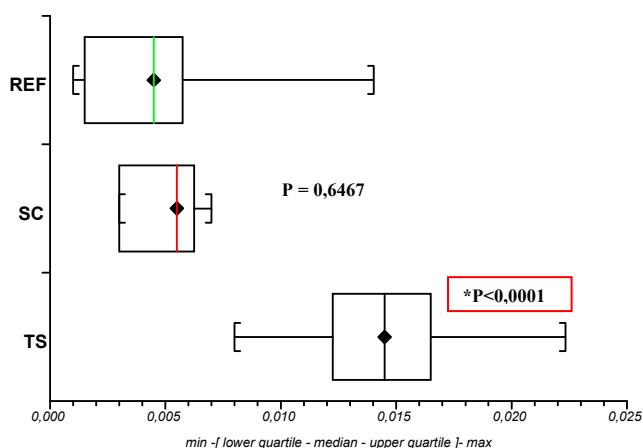
$$A = \varepsilon \cdot c \cdot d, \quad (3.3)$$

z ktorého vieme vyjadriť vzťah pre výpočet koncentrácie MDA. Porovnávali sme zmeny nameraných hodnôt rozdielu absorbancie u výbojov voči referenčnej vzorke. Údaje sme vyhodnotili pomocou krabicových diagramov mediánom, medzikvartilovým rozpätím a extrémami (Obr.5 a 6). Zo štatistickej analýzy vyplýva signifikantná zmena  $\Delta A$  u vzorky opracovanej TS výbojom voči neopracovanej referenčnej, u vzorky opracovanej kladným korónovým výbojom sa neukazuje signifikantná zmena. U vzorky opracovanej UV svetlom nebola zistená žiadna signifikantná zmena.

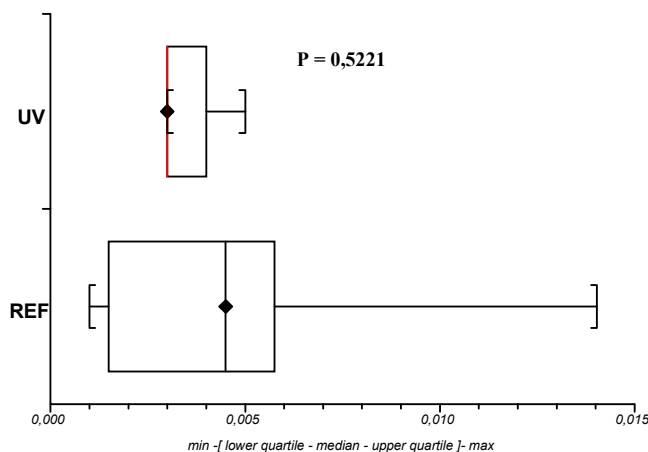


**Obr. 4** Porovnanie inaktivačného efektu a  $\Delta c(\text{TBARS})$  pre TS, SC a UV. (medián, 1. a 3. kvartil, n je počet meraní)





Obr. 5 Porovnanie SC a TS voči referencii.



Obr. 6 Porovnanie UV voči referencii

Keďže kyselina tiobarbiturová reaguje aj s inými oxidačnými produktmi, je vhodnejšie hodnotiť mieru lipoperoxidácie koncentráciou  $c(TBARS)$  - reakčné produkty kyseliny tiobarbiturovej (Tiobarbituric Acid Reactive Substances). Na Obr. 4 je graficky zobrazené porovnanie medzi účinnosťou a koncentráciou  $c(TBARS)$ , ktoré vznikli opracovaním vzorky výbojom.

### 3.3 Vodivosť a pH

Zistené pH a merná vodivosť  $\gamma$  bakteriálneho roztoku pred opracovaním výbojom bolo:

$pH_0 \sim 7$

$\gamma_0 \sim 7$  mS/cm

Pri meraní po opracovaní vzorky plazmou sme zaznamenali pokles pH a zvýšenie vodivosti:

- pre TS  $pH_1 \sim 4$

$\gamma_1 \sim 8,5$  mS/cm

- pre SC  $pH_1 \sim 6$

$\gamma_1 \sim 7,5$  mS/cm

### 3.4 Spotreba energie výbojov

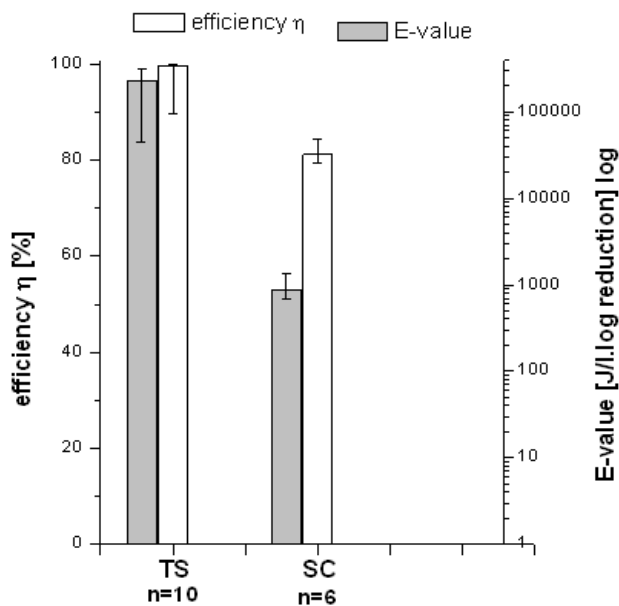
Jedným z hlavných parametrov výbojov bol  $P_{str}$ . Počítali sme ho podľa vzťahu 2.1 v kapitole 2.1.1 z osciloskopických záznamov priebehu prúdu a napätia v čase. Významnejší je však pre nás relatívne nový parameter E-value. E-value vysvetľuje vzťah medzi spotrebovanou energiou a dosiahnutou účinnosťou. Má jednotku [J/l.log reduction] a predstavuje množstvo spotrebovanej energie v J na opracovanie 1l bakteriálneho roztoku, aby sme dosiahli redukciu počtu baktérií o jeden rád (o 1 log). Vypočítame ju podľa vzťahu :

$$E - value = \frac{P_{str}}{Q \cdot \log \frac{N_0}{N}}, \quad (3.4)$$

kde  $P_{str}$  je výkon [W],  $Q$  je rýchlosť prietoku vzorky cez výboj [l/s],  $N_0$  je koncentrácia buniek v referenčnej vzorke a  $N$  je koncentrácia buniek v opracovanej vzorke. Na Obr. 7 môžeme vidieť porovnanie účinnosti výbojov a nimi spotrebovanej energie na dosiahnutie danej účinnosti.

### 3.5 Diskusia

Dekontaminačný efekt: V experimentoch sme pozorovali dekontaminačný efekt elektrických výbojov (SC a TS) na Gram pozitívne bunky *Bacillus cereus*. Zároveň sme pre porovnanie skúmali aj dekontaminačný efekt spôsobený germicídnym UV svetlom. Z výsledkov vidíme, že UV svetlo má najvyššiu účinnosť (99,96 %). Vieme však, že UV svetlo pôsobí na bakteriálne bunky iným



Obr. 7 Porovnanie inaktivačného efektu a hodnoty E-value pre TS a SC. (medián, 1. a 3. kvartil, n je počet meraní)

mechanizmom ako nerovnovážna plazma. Oba výboje majú pomerne vysokú účinnosť (SC 81,26%), pričom inaktivačný efekt prechodovej iskry (99,68 %) je porovnateľný s UV svetlom. Keď sa pozrieme na koncentrácie vzoriek po opracovaní výbojmi a referenčnej vzorky, môžeme vidieť, že iskrové výboje znížili koncentráciu baktérií o 3 logaritmické rády. Naproti tomu korónové výboje znížili koncentráciu baktérií po opracovaní vždy maximálne o 1 log rád.

Ako sme už spomínali, takéto zapojenie výbojového zariadenia (point-to-plane geometry) nám umožňuje, že opracovávaná suspenzia prechádza priamo cez aktívnu oblasť výbojov. Zároveň môžeme pozorovať počas výbojov efekt tzv. elektrického rozprašovania. Kvapky vznikajúce na hrote ihly so zvyšovaním napätia znižujú svoj objem. Príčinou je, že zvyšovaním napätia sa zvyšuje aj intenzita elektrického poľa, čo má za následok pokles povrchového napätia v roztoku a nabité kvapky sa vzájomne odpudzujú. Rozprašovanie by malo mať pozitívny efekt na suspenziu pretekajúcu výbojom, pretože by mala byť viac vystavená účinkom výboja.

Slabší dekontaminačný efekt u korónového výboja môže byť spôsobený tým, že je oblasť ionizácie viazaná len na okolie hrotu ihly a tiež nižší výkon.

Miera oxidačného poškodenia buniek výbojmi: V mnohých experimentoch bolo dokázané, že nerovnovážna plazma generovaná elektrickými výbojmi vo vzduchu, je bohatým zdrojom rôznych reaktívnych častíc, hlavne ROS a RNS.

V tomto prípade sme mali taktiež na porovnanie vzorku, ktorá bola opracovaná UV svetlom. Zistili sme, že vo vzorke opracovanej UV svetlom nedošlo k významnému zvýšeniu nárastu  $c(TBARS)$  voči neopracovanej referenčnej vzorke. Znamená to, že mechanizmus, ktorým pôsobí UV svetlo na bunky, nepoškodzuje bunkové membrány natoľko, aby toto poškodenie bolo zodpovedné v hlavnej miere na odumretí bunky.

Na obr. 4 môžeme vidieť, že nárast  $c(TBARS)$  spôsobený pôsobením iskrového výboja je zhruba trojnásobne vyšší ako pôsobením korónového výboja. Vyšší nárast  $c(TBARS)$  v iskrových výbojoch pravdepodobne súvisí s tým, že práve v nich bolo optickou emisnou spektroskopiou namerané vyššie množstvo radikálov, najmä atomárnych (O, N, H). Ďalej je potrebné si uvedomiť určitý vzťah medzi účinnosťou a koncentráciou  $c(TBARS)$ . Z grafu vidíme, že čím je väčšia účinnosť výboja, tým viac rastie aj koncentrácia  $c(TBARS)$ . Rozdiel nárastu  $c(TBARS)$  spôsobený účinkami kladného korónového výboja

nebol významný voči referencii, ale aj napriek tomu má tento typ výboja pomerne vysokú účinnosť. Z toho vyplýva, že tu pravdepodobne pôsobia aj iné mechanizmy, ktoré zohrávajú väčšiu úlohu v inaktivácii, než je oxidačné poškodenie. Mohli by to byť dlho žijúce nenabité častice, ktoré sa nezachytávajú na kovovej mriežke a môžu pôsobiť na suspenziu v Petriho miske počas celej doby opracovávaní.

Radikály vznikajúce vo vzduchu pôsobia dekontaminačne na bakteriálne bunky. Vo kvapalnom médiu počas opracovávaní plazmou prebiehajú rôzne chemické reakcie. Vo vodnom prostredí vznikajú taktiež voľné radikály ako napr. peroxid vodíka, ktorého koncentráciu vieme zmerať. Môžeme predpokladať, že tieto voľné radikály taktiež pôsobia dekontaminačne na bakteriálne bunky.

Energia spotrebovaná na dekontamináciu: Zistili sme, že prechodová iskra má najvyšší dekontaminačný účinok a zároveň je tu najvyšší nárast  $c(TBARS)$ . Zároveň je však energeticky náročnejšia ako streamerová koróna. Hodnoty E-value: TS - 231.07 J/l.log reduction, SC - 1.32 J/l.log reduction.

Vodivosť a pH suspenzie: Zaznamenali sme zmenu pH a vodivosti bakteriálnej suspenzie po opracovaní elektrickými výbojmi - pokles pH a zvýšenie vodivosti. Znamená to, že v opracovanej vode prebiehajú určité reakcie, ktoré menia tieto veličiny. Práve týmto smerom, zistiť, aké reakcie tu prebiehajú, čo sa konkrétne deje vo vode po opracovaní výbojmi a aký dopad to môže mať na bakteriálne bunky, sa uberajú naše ďalšie experimenty.

## 4 Záver

V práci sme sa zaoberali experimentálnym skúmaním pôsobenia nerovnovážnej nízkoteplotnej plazmy na bakteriálne bunky *Bacillus cereus*. Na opracovávanie buniek sme použili kladný iskrový a kladný korónový výboj vo vzduchu, oba generujú nízkoteplotnú plazmu. Sledovali sme mieru dekontaminačného efektu po opracovaní vzorky jednotlivými výbojmi. Vyhodnocovali sme ju cez parameter účinnosti  $\eta$  [%]. Najväčšia účinnosť sme dosiahli pri iskrovom výboji, ktorý znížil pôvodnú koncentráciu baktérií až o tri log rády.

Nerovnovážna plazma vo vzduchu je bohatým zdrojom kyslíkových reaktívnych častíc, hlavne voľných radikálov. Pôsobením reaktívnych častíc na biologické membrány dochádza k ich oxidačnému poškodeniu. Následkom týchto

poškodení nastáva smrť bunky. Preto sme sledovali aj mieru oxidačného poškodenia, na čo sme využili TBA test. Zistili sme signifikantný nárast koncentrácie  $c(TBARS)$  vo vzorke opracovanej kladnou prechodovou iskrou voči referenčnej vzorke. Pri kladnej koróne nebola dokázaná signifikantná zmena. Ďalej so zvyšujúcou sa účinnosťou stúpala aj miera oxidačného poškodenia. Znamená to, že pôsobenie reaktívnych častíc a voľných radikálov zohráva dôležitú úlohu pri inaktivačnom procese pôsobiacich výbojov. Zároveň však vidíme, že pri inaktivačnom mechanizme korónových výbojov (hlavne kladnej koróny) musia pôsobiť aj iné mechanizmy, ktoré ešte nie sú preskúmané. Vysoká účinnosť a miera oxidačného poškodenia spôsobeného iskrovým výbojom súvisí so skutočnosťou, že práve iskrový výboj je vysoko nerovnovážny a obsahuje vysokoenergetické elektróny, ktorých účinkami vzniká množstvo reaktívnych častíc.

Z energetického hľadiska pri iskrovom výboji platí, že čím je väčšia účinnosť, tým viac energie spotrebujeme. Zaujímavý je kladný korónový výboj, ktorý pri veľmi nízkom výkone dosahuje pomerne vysoké hodnoty účinnosti.

## Pod'akovanie

Touto cestou sa chcem poďakovať doc. RNDr. Zdenkovi Machalovi a prof. RNDr. Libuši Šikurovej za odborné vedenie a cenné pripomienky počas experimentov.

Výskum podporený Slovenskou grantovou agentúrou VEGA 1/0668/11 a Agentúrou pre podporu výskumu a vývoja APVV SK-CZ-0179-09 and SK-FR-0038-09.

## Literatúra

- [Becker et al, 2005] Becker, K. H., Kogelschatz, U., Schoenbach, K.H. and Barber, R.J. (2005). *Non-equilibrium Air Plasmas at Atmospheric Pressure*. Institute of Physics Publishing, London, UK
- [Black, 2004] Black, J.G. (2004). *Microbiology: principal and explorations*. Wiley, Hoboken, NJ
- [Cayman Chemical, 2010] Cayman Chemical. TBARS Assay KIT. [cit. 25.5.2010] <<http://www.caymanchem.com/app/template/Product.vm/catalog/10009055/tab/description/a/z>>
- [Ďuračková et al., 2006] Ďuračková, Z., Čársky, J., Hrnčiarová, M., Jakuš, V., Liptáková, A., Országhová, Z., Vozár, I. (2006) *Lekárska chémia a biochémia*. Vydavateľstvo UK, Bratislava
- [Halliwell, Gutteridge, 2000] Halliwell, B., Gutteridge, J.M. (2000). *Free Radicals in Biology and Medicine 3<sup>rd</sup> ed.* Thompson Press, London
- [Hrnčiarová et al., 2005] Hrnčiarová, M., Ďuračková, Z., Garaiová, I., Jakuš, V., Liptáková, A., Muchová, J., Országhová, Z. (2005). *Lekárska chémia. Laboratórna časť*. Vydavateľstvo UK, Bratislava
- [Laroussi, 2000] Laroussi, M., Alexeff, I., Kang, W. (2000). Biological decontamination by nonthermal plasmas. *IEEE Transactions on Plasma Science*. 28:184-188
- [Laroussi, 2002] Laroussi, M. (2002a) Nonthermal Decontamination of Biological Media by Atmospheric-Pressure Plasmas: Review, Analysis and Prospects. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 30:1409-1415
- [Laroussi, Leipold, 2003] Laroussi, M., Leipold, F. (2003). Evaluation of the roles of reactive species, heat and UV radiation in the inactivation of bacterial cells by air plasmas at atmospheric pressure. *International Journal of Mass Spectroscopy*, 233:81-86
- [Laroussi, 2005] Laroussi, M., (2005). Low Temperature Plasma-Based Sterilization: Overview and State-of-the-Art. *Plasma processes and Polymers*. 2:391-400
- [Lu, 2008] Lu Xp. Et al. (2008). The roles of the various plasma agents in the inactivation of bacteria. *Journal of applied physics*, 104, no.5
- [Machala et al., 2007] Machala, Z. et al. (2007). Emission spectroscopy of atmospheric pressure plasmas for biomedical and environmental applications. *Journal of Molecular Spectroscopy*, 243:194-201
- [Machala, 2009] Machala, Z., Jedlovský, I., Chládeková, L., Pongráč, B., Giertl, D., Janda, M., Šikurová, L., Polčic, P. (2009). DC Discharges in atmospheric air for bio-decontamination – spectroscopic methods for mechanism identification. *The European Physic Journal D*, 54:195-204
- [Machala, 2010] Machala, Z. et al (2010). Plasma agents in bio-decontamination by dc discharges in atmospheric air. *The European Physic Journal D*, 43
- [Martišovič, 2006] Martišovič, V. (2006). *Základy fyziky plazmy*. Vydavateľstvo UK, Bratislava
- [Singleton, 2005] Singleton, P. (2005). *Bacteria in Biology, Biotechnology and Medicine 6<sup>th</sup> edition*. Wiley, Hoboken, NJ

# Štúdium interakcie cytochrómu c s unilamelárnymi lipozómami modifikovanými kalix[6]arénom

Veronika Vargová  
Školiteľ: Tibor Hianik, Zuzana Garaiová

Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

V práci sme študovali interakciu cytochrómu c s unilamelárnymi lipozómami (ULL) zloženými z dimyristoylphosphatidylcholínu (DMPC) a obsahujúcimi kalix[6]arén (CX). Zmeny veľkosti lipozómov sme sledovali metódou dynamického rozptylu svetla a zmeny zeta potenciálu laserovou dopplerovou velocimetriou. Lipozómy s obsahom 10 mol% CX boli v priemere 1.5 krát väčšie v porovnaní s nemodifikovanými ULL. Rast veľkosti lipozómov sa sprevádzal poklesom zeta potenciálu do záporných hodnôt, čo je spôsobené záporne nabitými karboxylovými skupinami polárnej oblasti CX. Interakcia cytochrómu c (cyt c) s CX čiastočne neutralizovala záporný zeta potenciál.

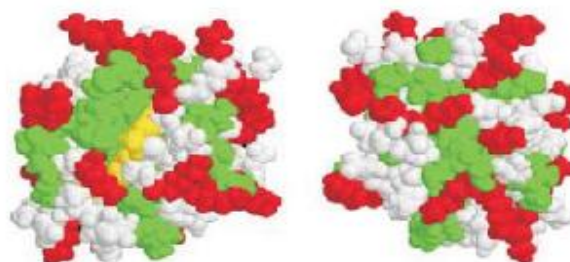
**Kľúčové slová:** cytochróm c, kalixarén, unilamelárne lipozómy, zeta potenciál

## 1 Úvod

### 1.1 Cytochróm c

Cytochróm c (cyt c) (Obr.1) je malý hémový proteín (molekulárna hmotnosť 12,4 kDa) lokalizovaný na vonkajšej strane vnútornej membrány mitochondrií. Cyt c zohráva kľúčovú úlohu v dýchacom reťazci mitochondrie, kde účinkuje ako prenášač elektrónov medzi enzýmami cytochróm c reduktázou a cytochróm c oxidázou [Bernad a spol. 2004]. Cyt c je taktiež dôležitý pri aktivácii apoptózy (programovanej bunkovej smrti). Uvoľnenie cyt c z mitochondrie do cytozolu spúšťa apoptózu, ktorá cez aktiváciu kaspázového systému vedie k vytvoreniu apoptozómu [Green, 2005].

Cyt c pozostáva z jedného polypeptidového reťazca, ktorý obsahuje 104 aminokyselín kovalentne viazaných k hémovej skupine. Hém je pokrytý pevne naviazanými postrannými hydrofóbnymi reťazcami. Na povrchu cyt c sa nachádza 19 kladne nabitých postranných reťazcov lyzínu a 2 tiež kladne nabité reťazce arginínu, čo určuje jeho pozitívny náboj.

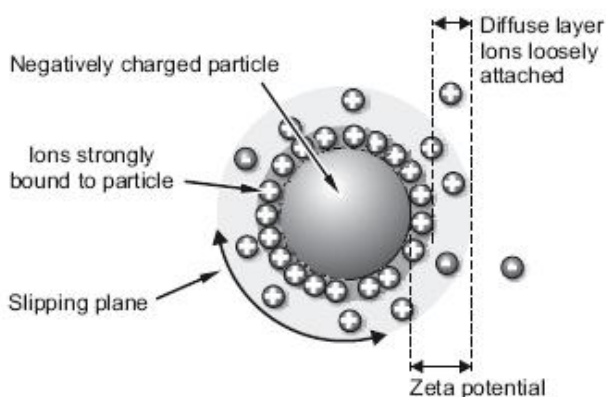


Obr.1: Model molekuly cytochrómu c vytvorený pomocou programu RASMOL. Lyzínové a arginínove zvyšky sú znázornené červenou a hydrofóbne zvyšky zelenou. Žltá farba pri pohľade spredu označuje umiestnenie železa [Bernad a spol. 2004].

Predpokladá sa, že práve väzba cyt c s membránou mitochondrie zabezpečuje realizáciu oboch spomínaných procesov (prenos elektrónov, apoptózu). Podstata a špecifickosť interakcie medzi cyt c a lipidmi je preto dlhý čas subjekt rozsiahleho výskumu [Kirat a spol.,2009, Salamon a spol.,1996, Trusova a spol.,2010]. Interakcia medzi cyt c a negatívne nabitými membránami má elektrostatickú povahu. Cyt c je však schopný interagovať s fosfolipidmi aj cez hydrofóbne sily. [Kirat a spol., 2009].

## 1.2 Zeta potenciál

Náboj na povrchu častice priťahuje ióny s opačným nábojom, čo spôsobuje zvýšenie koncentrácie týchto iónov v oblasti obklopujúcej časticu. Okolo nabitej častice teda existuje tekutá vrstva zložená z dvoch oblastí: vnútorná oblasť, nazývaná aj Sternova vrstva, kde sú ióny pevne viazané a vonkajšia difúzna oblasť, v ktorej sú ióny len málo pripútané (Obr.2). Vo vnútri difúznej vrstvy je pomyselná hranica, kde ióny a častice tvoria stabilné jednotky. Keď sa častica pohybuje, ióny vo vnútri tejto hranice sa pohybujú s ňou, avšak ióny spoza tejto hranice neputujú s časticou. Táto hranica sa nazýva "slipping plane" a potenciál, ktorý existuje na tejto hranici poznáme ako zeta potenciál (potenciál medzi povrchom častice a rozptýlenou tekutinou). Hodnota zeta potenciálu indikuje potenciálovú stabilitu koloidného systému.



Obr.2: Schematické znázornenie negatívne nabitej častice obklopanej tekutou vrstvou s rozptýlenými iónmi (Manual prístroja Zeta Sizer Nano, www.malvern.com).

Zeta potenciál môžeme určiť pomocou merania rýchlosti častíc. Rýchlosť častíc v elektrickom poli je často označovaná ako elektroforetická pohyblivosť, ktorá je podľa Henryho rovnice (1) priamoúmerná zeta potenciálu [Malvern, 2004].

$$U_E = \frac{2\varepsilon Z f(ka)}{3h} \quad (1)$$

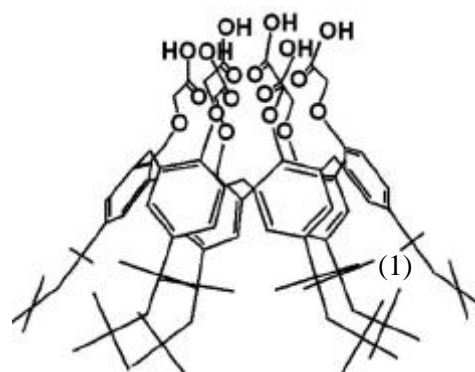
- $Z$  : zeta potenciál
- $U_E$  : elektroforetická pohyblivosť
- $\varepsilon$  : dielektrická konštanta
- $h$  : viskozita
- $f(ka)$ : Henryho funkcia

## 1.3 Kalixarény

Kalix[n]arény sú makrocyclické aromatické molekuly, ktoré vznikajú pri syntéze fenolov a aldehydov, kde [n] zodpovedá počtu fenolových aromatických kruhov v molekule. Fenolové podjednotky sú premostené cez metylové skupiny. Výsledkom takejto syntézy je vytvorenie molekuly v tvare kruhu s dutinou uprostred, čo vytvára charakteristickú kalichovú štruktúru [Ludwig a spol., 2002].

Kalixarény možno použiť ako vychytávače iónov z prostredia, napríklad iónov alkalických katiónov [Zhang a spol., 2000]. Kalixarény sú schopné v lipidovej dvojvrstve vytvárať iónové kanály [Sidorov a spol., 2002]. Z prostredia môžu vychytávať aj malé organické biomolekuly ako adrenalin, dopamin alebo eferin [Nikolelis a spol., 2002,2004]. Nami študovaný kalixarén kalix[6]arén derivát karboxylovej kyseliny ( $[6]CH_2COOH$ ) (Obr.3) dokáže tvoriť komplex s cyt c. Tento kalixarén má ideálnu veľkosť kavity a symetriu pre uchytenie kladne nabitej amino skupiny ( $-NH_3^+$ ). Navyše karboxylová skupina kalixarénu interaguje s  $NH_3^+$  skupinou cyt c. [Oshima a spol., 2002].

Na základe tejto interakcie bol vyvinutý aj biosenzor na detekciu cyt c. Biosenzor bol vytvorený na báze sBLM (membrána na pevnom povrchu). Membrána bola vytvorená zo zmesi sójového lecitínu (SBPC) a kalix[6]arénu ( $[6]CH_2COOH$ ) na zlatej elektróde predtým pokrytej pomocou oktandekantiolu (ODT) metódou fúzie lipozómov. Tento senzor slúži ako vysoko senzitivný a selektívny biosenzor pre detekciu cyt c s limitom detekcie (LOD) 10 nM. [Moshin a spol.,2011]



Obr.3: Molekulová štruktúra tOct[6]CH<sub>2</sub>COOH [Oshima a spol., 2002]

## 2 Materiál a metódy

### 2.1 Použité chemikálie

Všetky použité chemikálie boli komerčne dostupné s vysokou čistotou: 1,2-sn-glycero dimyristoylphosphatidylcholine (DMPC) bol zakúpený od Avanti Polar Lipids Inc. (USA), cyt c z hovädzieho srdca bol dodaný od Sigma-Aldrich (USA). Kalix[6]arén derivát karboxylovej kyseliny ( $^{14}\text{C}$ CH<sub>2</sub>COOH) (CX) bol dar od Dr. T. Oshima (Univerzita Miyazaki, Japonsko) a syntetizovaný podľa postupu opísaného v predošlej práci [Ohto a spol., 1995]. Fosfátový pufr (Phosphate buffered saline, (PBS)), pH 7.4, bol pripravený rozpustením tablety (Sigma Aldrich) v deionizovanej vode (ELIX 5, Millipore, USA). Fosfatidová kyselina (Phosphatidic acid, PA) bola zakúpená od Sigma-Aldrich

### 2.2 Príprava unilamelárnych lipozómov

Unilamelárne lipozómy boli pripravené metódou extrúzie [MacDonald a spol., 2011]. Najskôr sa malé množstvo DMPC (približne 10 mg) rozpustilo v chloroforme v nádobe s okrúhlym dnom. V prípade modifikovaných lipozómov sa pridal kalixarén rozpustený v chloroforme (zásobný roztok 10 mg/ml) aby sa získali rôzne molárne koncentrácie (1, 3, 10 mol %). Roztok lipidu sa vysušil pomocou dusíka tak, aby sa na dne nádoby vytvoril tenký lipidový film. Tento lipidový film bol hydratovaný pomocou PBS. Výsledná koncentrácia lipozómov bola 4 mg/ml. Proces hydratacie viedol k vytvoreniu multilamelárnych lipozómov (MLL). Roztok bol následne extrudovaný 25 krát použitím extrúdera Avanti Polar Lipids (USA) cez polykarbonátové filtre (Milipore polycarbonate filters) o veľkosti pórov 100 nm.

### 2.3 Priebeh merania

Meranie veľkosti a zeta potenciálu sa vykonávalo pomocou prístroja Zeta Sizer Nanoseries (Malvern Instruments Ltd. ). Všetky experimenty prebiehali pri teplote 20°C alebo 28°C. Pri meraní veľkosti sa používala polystyrénová cela (Disposable polystyrene DTS0012), do ktorej sme napipetovali 1ml roztoku lipozómov (koncentrácia 4 mg/ml). Postupne sa do cely pridával rôzny objem cyt c rozpusteného v PBS, tak aby jeho výsledná koncentrácia v cele bola 0.03, 0.3, 1, 60 a 120  $\mu\text{M}$ . Po každom dodaní cyt c sa vzorka inkubovala 10 minút. Pri meraní zeta potenciálu sa postupovalo podobne ako v prípade merania veľkosti. Koncentrácia vzorky však bola 10 krát menšia, teda

výsledná koncentrácia bola 0,4 mg/ml. Na meranie sa používala cela Capillary cell (DTS1060).

### 2.4 Štatistické spracovanie výsledkov

Pre porovnanie rozdielov medzi jednotlivými skupinami dát sme použili parametrický test ANOVA one way. Set dát pozostával z troch nezávislých meraní. Hladina významnosti  $\alpha = 0,05$ . Štatistické spracovanie výsledkov sme urobili pomocou softvéru StatsDirect 2.6.1 (StatsDirect Ltd., Cheshire). Grafické spracovanie výsledkov sme vykonali softvérom MS Excel 7.0 (Microsoft) a Origin (Microcal Inc, USA).

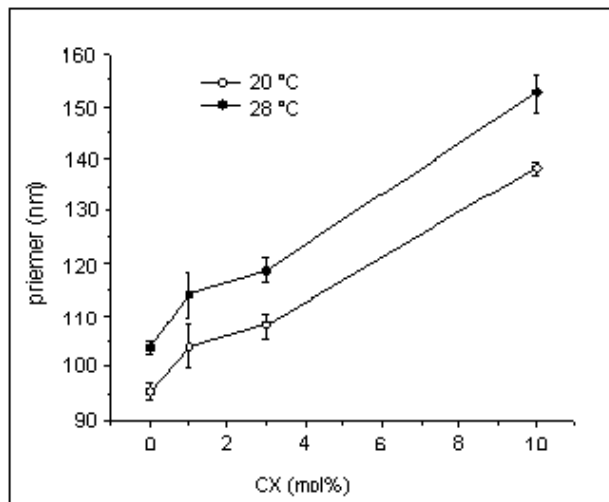
## 3 Výsledky a diskusia

V prvej sérii experimentov sme analyzovali veľkosť a zeta potenciál ultramelárnych lipozómov (ULL) z čistého DMPC a potom s rôznym obsahom CX. Ďalej sme študovali efekt cyt c na vlastnosti lipozómov obsahujúcich 10 mol% CX.

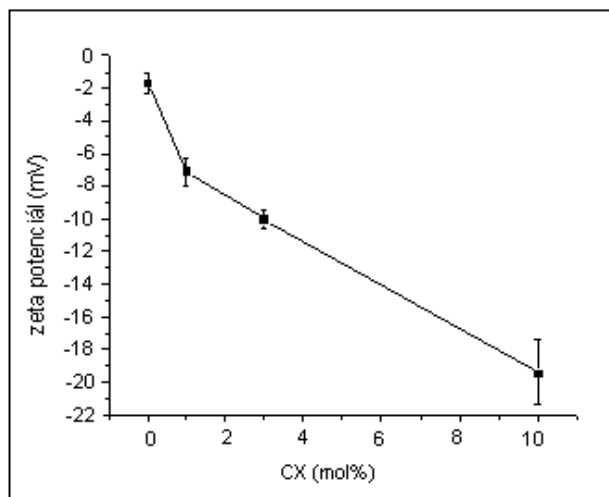
Priemerné veľkosti ULL v závislosti od molárnej koncentrácie kalixarénu sú znázornené na Obr.4. Priemerné veľkosti boli študované pri teplote pod (20°C) a nad (28°C) hlavného fázového prechodu DMPC z gélu do tekuto-kryštalického stavu. Priemerná veľkosť čistého DMPC v stave gélu lipidovej dvojvrstvy bola  $95.4 \pm 1.8$  nm, čo zodpovedá priemeru pórov polykarbonátového filtra používaného pri extrúzii. Priemerná veľkosť ULL v tekuto-kryštalickom stave bola  $103.7 \pm 1.2$  nm, čo je signifikantne vyššie ( $p < 0.01$ ) v porovnaní s veľkosťou ULL v stave gélu. Tento efekt je spojený s rastom strednej plochy na molekulu fosfolipidov v tekuto-kryštalickom stave dvojvrstvy, čo súhlasí s experimentami na monovrstvách [Petty, 1996]. S narastajúcim obsahom CX (1, 3, 10 mol%) sa zväčšovala aj veľkosť lipozómov:  $103.96 \pm 4.1$  ( $p < 0.01$ ) nm,  $107.98 \pm 2.5$  nm ( $p < 0.01$ ),  $138.1 \pm 1.33$  nm ( $p < 0.001$ ). Tento jav predpokladá zabudovanie CX do ULL, pretože veľkosť strednej plochy na molekulu CX je väčšia ako u lipidu.

Závislosť zeta potenciálu od molárneho obsahu CX v DMPC ULL je znázornená na Obr.5. Zeta potenciál čistého DMPC je mierne negatívny  $-1.72 \pm 0.65$  mV, čo odráža zwitteriónovú povahu polárnej hlavičky lipidu. Z grafu môžeme vidieť, že so vzrastajúcou molárnou koncentráciou CX zeta potenciál prechádza do zápornejších hodnôt. Pri najväčšom molárnom zastúpení CX (10 mol%) dosiahne zeta potenciál výrazne negatívnu hodnotu  $-19.4 \pm 2,02$  mV v porovnaní s čistým DMPC

( $p < 0.001$ ). Toto správanie je zapríčinené negatívne nabitými karboxylovými skupinami zabudovaných CX.



Obr.4: Graf závislosti veľkosti ULL DMPC od mol% CX.

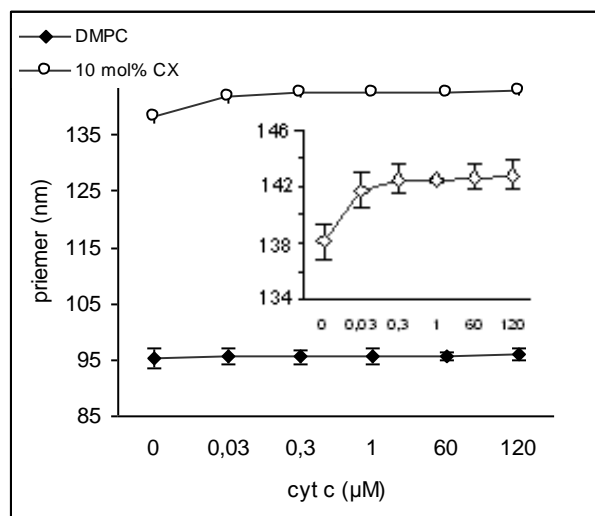


Obr.5: Graf závislosti zeta potenciálu od mol% CX.

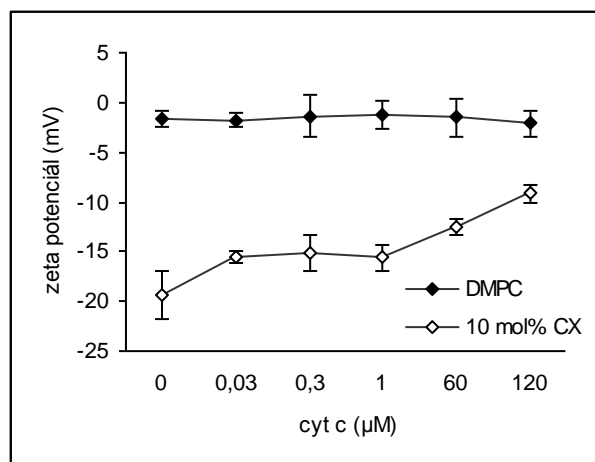
Ďalej sme študovali interakciu cyt c s ULL z čistého DMPC a s ULL, ktoré obsahovali 10 mol% CX ( $T = 20^\circ\text{C}$ ) (Obr.6). Cyt c neovplyvnil veľkosť ULL DMPC. Lipozómy s obsahom 10 mol% CX zväčšili svoju priemernú veľkosť so vzrastom koncentrácie cyt c už pri  $0.03 \mu\text{M}$  ( $p < 0.001$ ). Pri koncentrácii  $0.3 \mu\text{M}$  vzrástla veľkosť lipozómov na hodnotu  $142.5 \pm 0.98 \text{ nm}$  ( $p < 0.001$ ), vyššie koncentrácie cyt c túto hodnotu ďalej signifikantne nemenili, čo môže súvisieť s nasýtením CX.

Zeta potenciál ULL DMPC modifikovaných CX sa menil signifikantne už pri koncentrácii  $0.03 \mu\text{M}$  ( $p < 0.05$ ) (Obr.7). Koncentrácia  $0.3 \mu\text{M}$  cyt c bola podobne ako pri meraniach veľkostí zlomová, potenciál mal tendenciu ustáliť sa (okolo  $-15 \text{ mV}$ ).

Opätovné zvýšenie hodnôt potenciálu bolo zaznamenané pri vysokých koncentráciách cyt c ( $60 \mu\text{M}$ ,  $120 \mu\text{M}$ ). Prvá fáza nárastu potenciálu je dôsledkom kladného náboja cyt c, ktorý kompenzoval negatívny náboj lipozómov. Pozitívne nabitý cyt c sa pravdepodobne zabudoval pomocou aminoskupiny lyzínu do kavity CX. Nárast potenciálu zaznamenaný v druhej fáze bol pravdepodobne spôsobený vysokou koncentráciou cyt c, ktorý sa už nemohol naviazať na CX z dôvodu ich nasýtenia. Zeta potenciál čistých ULL DMPC sa s pridávaním cyt c nemenil ( $p > 0.05$ ).

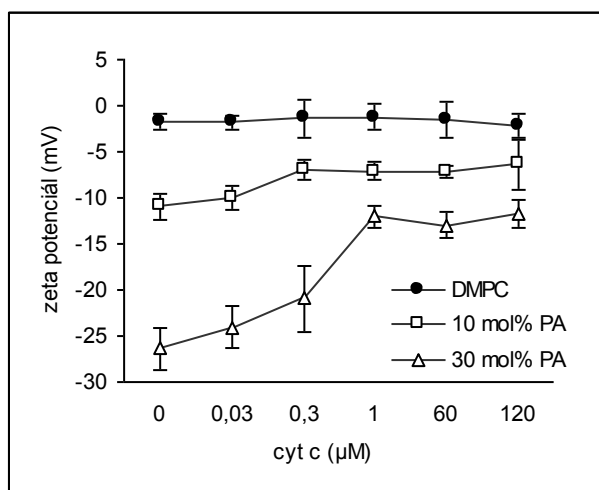


Obr.6: Graf závislosti veľkosti ULL DMPC s obsahom 10 mol% CX od koncentrácie cyt c. Vložený graf znázorňuje podrobnejšie závislosť priemeru lipozómov od koncentrácie cyt c pre lipozómy obsahujúce 10 mol% CX.



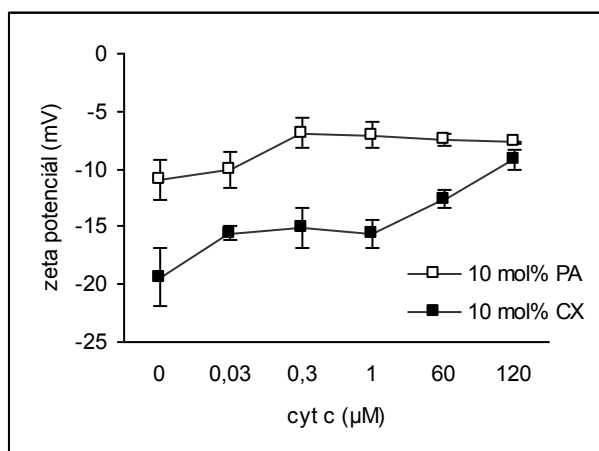
Obr.7: Graf závislosti zeta potenciálu ULL DMPC s obsahom 10 mol% CX od koncentrácie cyt c.

V ďalšej fáze experimentov sme ULL DMPC modifikovali fosfatidovou kyselinou PA v molárnych koncentráciách 10 a 30 mol%. Táto modifikácia nemala signifikantný vplyv na veľkosť lipozómov, rovnako ako pridávanie cyt c (výsledky nie sú uvedené). PA však spôsobila zmenu v zeta potenciáli. S vyšším obsahom PA, sa stával zeta potenciál negatívnejším, čo je zapríčinené negatívnym nábojom PA. Negatívny náboj lipozómov s obsahom PA sa prejavil i v interakcii s cyt c. So vzrastom koncentrácie cyt c potenciál vzrastal (Obr.8).



Obr.8: Graf závislosti zeta potenciálu ULL DMPC s obsahom PA 10 a 30 mol% od koncentrácie cyt c.

V porovnaní PA (10 mol%) s CX (10 mol%) sme výraznejší vzrast potenciálu zaznamenali v prospech CX (Obr.9). Súvisí to pravdepodobne s výraznejším záporným nábojom lipozómov modifikovaných CX.



Obr. 9: Graf závislosti zeta potenciálu ULL DMPC s obsahom 10 mol% PA a 10 mol% CX od koncentrácie cyt c.

## 4 Záver

V práci sme zistili, že metódy dynamického rozptylu svetla a laserovej dopplerovej velocimetrie sú vhodné na štúdium vplyvu kalixarénov na veľkosť a zeta potenciál ULL. Zistili sme, že s narastajúcim obsahom CX narastala aj priemerná veľkosť lipozómov. Zeta potenciál vplyvom CX prechádzal do negatívnejších hodnôt. Prítomnosť cyt c kompenzovala negatívny zeta potenciál lipozómov. Veľkosť lipozómov s 10 mol% CX signifikantne vzrástla už pri 0.03 μM cyt c. Zabudovanie fosfatidovej kyseliny PA do ULL neovplyvnila veľkosť lipozómov. Negatívny náboj PA spôsobil posun zeta potenciálu do zápornejších hodnôt.

## 5 Literatúra

Bernad, S., Ollerich, S., Soulomane, T., Noinville, S., Baron, M., Paternostre, M., Lecomte, S. (2004). Interaction of horse heart and thermus thermophilus type c cytochromes with phospholipid vesicles and hydrophobic surfaces. *Biophys. J.* 86, 3863 – 3872.

Green, D.R. (2005). Apoptotic pathways: Ten minutes to dead. *Cell* 121, 671-674.

Kirat, K., Morandat, S. (2011). Cytochrome c provokes the weakening of zwitterionic membranes as measured by force spectroscopy. *Colloids and Surfaces B: Biointerfaces* 82, 111-117.

Ludwig, R., Dzung, T.K. (2002). Calixarene-Based Molecules for Cation Recognition. *Sensors* 2, 397.

MacDonald, R.C, MacDonald, R.I., Menco, B.P.M., Takeshita, K., Subbarao, N.K., Hu, L. (1991). Small-volume extrusion apparatus for preparation of large, unilamellar vesicles. *Biochim. Biophys. Acta* 1061, 297-303.

Mohsin, M.A., Banica, F.G., Oshima, T., Hianik, T. (2011). Electrochemical impedance spectroscopy for assessing the recognition of cytochrome c by immobilized calixarenes. *Electroanalysis*, 1-7.

Nikolelis, D.P., Petropoulou, S.S.E., Pergel, E., Toth, K. (2002). Biosensors for the rapid detection of dopamine using bilayer lipid membranes (BLMs) with incorporated calix[4]resorcinarene receptor. *Electroanalysis* 14, 783 – 789.



Nikolelis, D. P., Drivelos, D.A., Simantiraki, M.G., Koinis, S. (2004). An optical spot test for the detection of dopamine in human urine using stabilized in air lipid films. *Anal. Chem.* 76, 2174 – 2180.

Ohto, K., Yano, M., Inoue, K., Yamamoto, T., Goto M., Nakashio, F., Shinkai, S., Nagasaki, T. (1995). Solvent Extraction of Trivalent Rare Earth Metal Ions with Carboxylate Derivatives of Calixarenes *Anal. Sci.* 11, 893-902.

Oshima, T., Goto, M., Furusaki, S. (2002). Extraction behavior of amino acids by calix[6]arene carboxylic acid derivative. *J. Inclus. Phenom.* 43, 77–86.

Petty, M.C. (1996). Langmuir-Blodgett films and introduction, *Cambridge University Press NY*.

Salamon, Z., Gordon, T. (1996). Surface plasmon resonance studies of complex formation between cytochrome c and bovine cytochrome c oxidase incorporated into a supported planar lipid bilayer. 1. Binding of cytochrome c to cardiolipin/phosphatidylcholine membranes in the absence of oxidase. *Biophysical J.* 71, 848-857.

Sidrov, V., Kotch, F.W., Abrakhmanova, G., Mizani, R., Fetting, J.C., Davis, J.T. (2002). Ion channel formation from a calix[4]arene amid that binds HCl. *Journal of American Chemical Society* 124, 2267-2278.

Trusova, V.M., Gorbenko, G.P., Molotkovsky, J.G., Kinnunen, P.K.J. (2010). Cytochrome c-Lipid Interactions: New Insights from Resonance Energy Transfer. *Biophysical J.* 99, 1754-1763.

Zhang, Y.L., Shen, H.X., Liu, Y., Zhang, C.X., Chen, L.X. (2000). Salt-bridge supported bilayer lipid membrane modified with Calix[n]arenes as alkali cation sensors. *Analytical Letters* 33, 831-845.

# Plazmou iniciované povrchové očkovanie netkaných textílií v kvapalnej fáze

Ondrej Bogár\*

Školiteľ: Dušan Kováčik†

Katedra experimentálnej fyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Netkané polypropylénové textílie si našli svoje uplatnenie v širokom spektre priemyselných aplikácií. Pre účely mnohých aplikácií je ale potrebné pôvodne hydrofóbny povrch modifikovať a dosiahnuť povrch hydrofilný alebo povrch s presne definovanými funkčnými skupinami. Jednou z metód modifikácie je očkovanie kyseliny akrylovej v kvapalnej fáze. Využili sme aktiváciu povrchu plazmou generovanou dielektrickým bariérovým výbojom. Zmeny na povrchu netkanej textílie sme analyzovali meraním času priesaku, povrchového napätia a analýzou FTIR. Výsledky sme porovnali s ostatnými postupmi nanášania kyseliny akrylovej na polymérne materiály aktivované plazmou.

**Kľúčové slová:** polypropylénová netkaná textília, kyselina akrylová, povrchové očkovanie, kvapalná fáza, dielektrický bariérový výboj, plazma

## 1 Úvod

Polypropylénové netkané textílie (PP NT) majú výrazné uplatnenie v širokom spektre priemyselných odvetví a aplikácií. Využívajú sa v textilnom, elektrotechnickom, stavebnom, automobilovom priemysle. Svoje uplatnenie našli aj pri výrobe zdravotníckeho materiálu a výrobkov osobnej hygieny. Vynikajú nízkou výrobnou cenou a jednoduchým spracovaním. Majú vysokú mechanickú odolnosť a sú odolné voči väčšine kyselín a organických rozpúšťadiel. Sú dobrý elektrický aj tepelný izolant.

Nevýhodou PP NT v mnohých aplikáciách je ich nízka povrchová energia, z čoho vyplýva hydrofóbny povrch (problematická vyfarbitelnosť a potlač). Chemická odolnosť polypropylénu sa prejavuje pri problematickom nanášaní iných látok a funkčných skupín na povrch PP netkaných textílií (modifikácia pre medicínske účely, separátory a materiály s vysokou pridanou hodnotou).

Konvenčná metóda zvýšenia povrchovej energie a adhézie využíva chemickú „mokrú“ cestu. Využíva ťažko rozložiteľné a toxické látky. V čase zelených technológií je tendencia chemickú „mokrú“ cestu nahradiť. Ako dobrý alternatívny spôsob sa ukazuje opracovanie alebo aktivácia polypropylénových netkaných textílií plazmou. Neizotermická difúzna plazma generovaná pri atmosférickom tlaku sa ukazuje ako perspektívny nástroj na úpravu polymérov [Meiners et al., 1998], [Kostov et al., 2010], [Kováčik, 2006], [Geßner et al., 2004], [Wavhal and Fisher, 2002], [Kubincová, 2009].

### 1.1 Difúzny koplanárny povrchový bariérový výboj

Dielektrické bariérové výboje sú vhodným zdrojom plazmy pri atmosférickom tlaku. Generujú teplotne nerovnovážnu plazmu, kde ióny nemajú dost energie na deštrukciu opracovanej vzorky ale elektrónová teplota je postačujúca na opracovanie povrchu vzorky. Polymér vystavený účinku plazmy je v takomto prípade opracovaný do hĺbky niekoľko 100 Å [Chan, Ko and Hiraoka, 1996]. Energetické elektróny iniciujú vznik excitovaných, metastabilných častíc a voľných radikálov, ktoré sú potrebné v procese plazmovej aktivácie povrchu [Xueji Xu, 1992], [Wagner et al., 2003]. Pre homogénne opracovanie je však potrebná makroskopicky homogénna oblasť difúznej plazmy s vysokou hustotou energie.

Z tohto pohľadu možno hodnotiť ako úspech úsilie pracovnej skupiny prof. Černáka, ktorej sa podarilo vyvinúť unikátny zdroj takejto difúznej plazmy, ktorý bol pomenovaný ako DCSBD (Diffuse Coplanar Surface Barrier Discharge) [Černák et al., 2002], [Černák et al., 2008]. Plazma generovaná týmto výbojom horí v tenkej vrstve (0,3 mm) na povrchu keramickej ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) platničky. Jej difúzny charakter sa zachováva aj pri vyšších výkonoch, kde s jeho zvyšujúcou sa hodnotou makroskopicky homogénna plazma pokrýva celú plochu platničky. Vysoká hustota energie tejto tenkej vrstvy plazmy umožňuje kratšie časy

\* bugymir@gmail.com.sk

† kovacik@fmph.uniba.sk

opracovania oproti ostatným druhom dielektrických bariérových výbojov. Plošná hustota výkonu dosahuje až  $5,2 \text{ W/cm}^2$ , čo zodpovedá objemovej hustote výkonu  $100 \text{ W/cm}^3$  [Kováčik, 2006].

## 1.2 Očkovanie

Na vytvorenie hydrofilného povrchu PP textílie ho treba modifikovať a vytvoriť na ňom polárne skupiny. Pre potreby následnej úpravy povrchu, nanášaním ďalšej vrstvy presne definovaných látok, je potrebné vytvoriť na povrchu aktívne miesta, na ktoré sa nanášajú materiál chemicky naviaže. Kyselina akrylová ( $\text{C}_2\text{H}_3\text{COOH}$ ) (AAc) obsahuje funkčnú karboxylovú skupinu, ktorá spĺňa obidve požiadavky. Očkovaním kyseliny akrylovej prostredníctvom rôznych fyzikálnych procesov sa zaoberali viaceré pracovné skupiny [Osada and Iriyama, 1984], [Černáková et al., 2005], [Kato et al., 2003].

Pri povrchovom očkovaní s využitím plazmy sú bežné tri postupy:

- Očkovanie v plynnej fáze
- Očkovanie v kvapalnej fáze
- Plazmová polymerizácia

V našej pracovnej skupine sme skúmali všetky tri spôsoby očkovania s využitím DCSBD výboja [Bogar, 2010], [Masaryk, 2009]. V diskusii zhrnieme ich výhody a nevýhody a ich účinnosť v procese očkovania kyseliny akrylovej pomocou DCSBD na polypropylénové netkané textílie.

## 2 Experiment

### 2.1 Materiály

Ako substrát sme využívali PP netkanú textíliu od firmy Pegas Nonwovens s.r.o., Znojmo, ČR. Jedná sa o tenkú textíliu s plošnou hustotou  $18 \text{ g/m}^2$ , ktorá bola vyrobená metódou spunbond. Povrchové napätie vzorky sme určili na  $39 \text{ mN/m}$  a čas priesaku  $36,96 \pm 14 \text{ s}$ . Vzorky samotnej textílie sa vyznačovali značnou nehomogenitou, čomu nasvedčuje vysoká hodnota priemernej odchýlky určenia času priesaku. Kyselina akrylová použitá v procese očkovania bola dodaná firmou Sigma-Aldrych. Ako jej stabilizátor bol použitý hydrochinónmonometyléter v množstve  $180\text{--}200 \text{ ppm}$ .

### 2.2 Očkovanie v kvapalnej fáze

Očkovanie v kvapalnej fáze má najbližšie k pôvodne používanej chemickej mokrej ceste

úpravy PP NT. Zaradením plazmovej aktivácie vylúčime z procesu agresívne chemické činidlá a aj odpad z nich vzniknutý [Černáková et al., 2005].

Chemické reakcie na povrchu textílií počas procesu očkovania prebiehajú radikálovým mechanizmom. Plazma generuje na povrchu aktívne miesta. Pre výboj horiaci vo vzduchu sú typické peroxy-radikály. Tie neskôr vystupujú ako reaktívny prvok pri naväzovaní monopolyméru [Seto et al., 1999]. Prítomnosť peroxy-skupín a radikálový mechanizmus očkovania potvrdzujú aj EPR merania v [Černáková et al., 2005].



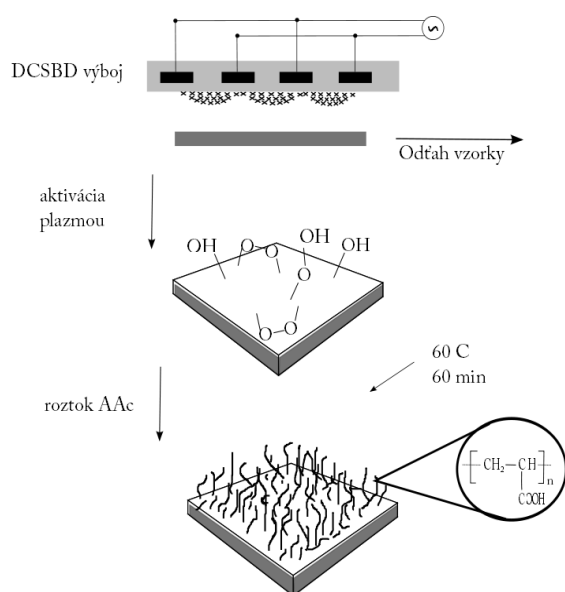
Obr. 1: Plazmové zariadenie ZUP 200. Pohľad na ovládací panel a DCSBD výbojku.

Plazmové opracovanie vzoriek PP NT sme vykonávali prostredníctvom zariadenia na kontinuálnu úpravu textilných materiálov ZUP 200. (Obr. 1) Zariadenie bolo vyvinuté v spolupráci Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave a VÚTCH-CHEMITEX spol. s.r.o., Žilina. Využíva DCSBD výbojku na generovanie nízkoteplotnej plazmy pri atmosférickom tlaku. Výkon dodávaný do plazmy  $400 \text{ W}$  (príkon výbojky  $500 \text{ W}$ ) bol počas plazmovej úpravy konštantný a menili sme rýchlosť posunu vzorky, čím sa menila doba aktivácie povrchu plazmou.

Študované vzorky PP NT boli značne porézne, s nie dobre definovanou hrúbkou a hustotou. Ich maximálna hrúbka nepresahovala  $0,4 \text{ mm}$ . Zo skúsenosti z predchádzajúcich experimentov vieme, že hoci bola vzorka vystavená účinkom plazmy len na jednej strane, bola rovnako opracovaná plazmou z oboch strán na väčšine povrchu. Vzorka sa nachádzala následne  $10 \text{ minút}$  voľne v atmosférickom vzduchu pri teplote  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Za tento čas sa vykonali potrebné referenčné analýzy a pripravilo sa samotné očkovanie. Bol pripravený  $20\%$  roztok kyseliny akrylovej v destilovanej vode. Do Erlenmayerovej banky s objemom  $250 \text{ ml}$  bola

vložená textília a zaliata 50 ml roztoku AAC. Banku sme 5 minút prebublávali dusíkom (technická čistota 4.0) s prietokom 5 l/min. Prietok bol regulovaný prietokomerom RED-Y Compact, kalibrovaným na dusík. Dusík vytlačal z objemu banky kyslík, ktorý brzdí chemické naväzovanie monopolyméru. Po prebublávaní bola banka uzavretá uzáverom s GL závitom.

Banky boli následne vložené do vodného kúpeľa s teplotou 70 °C na dobu 60 min. Každých 5 minút bol roztok v nich premiešaný. Experimentálne sme zistili, že pri teplote kúpeľa 70 °C je teplota roztoku v banke 60 °C. (Obr. 2) Po skončení očkovania boli vzorky 3 minúty pláchané v destilovanej vode s teplotou 40 °C a následne voľne na vzduchu 24 hodín sušené.



**Obr. 2: Proces očkovania AAC na PP NT po aktivácii jej povrchu DCSBD plazmou.**

Na tomto mieste stručne spomeniem aj priebeh ďalších experimentov, s ktorými sme porovnávali naše výsledky. Vo všetkých prípadoch bol použitý rovnaký zdroj plazmy a rovnaká netkaná textília.

### 2.3 Očkovanie v plynnej fáze

Vzorka aktivovaná plazmou na zariadení ZUP 200 bola vložená do exikátora. Po odčerpaní vzduchu bola do exikátora napustená pracovná dusíková atmosféra obohatená o pary kyseliny akrylovej. V exikátore sa držiaval mierny podtlak voči okoliu. Pre rôzne časy opracovania sa vzorka očkovala v pracovnej atmosfére 30 minút. Podrobnejší opis výsledkov a postupu čitateľ nájde v citovanej práci [Bogar, 2010].

### 2.4 Plazmová polymerizácia

Na plazmovú polymerizáciu sa ako zdroj plazmy využila DCSBD výbojka zabudovaná do samostatnej komory reaktora. Plazma horela priamo v pracovnej atmosfére dusíka obohateného o pary kyseliny akrylovej. Opracovávaná textília bola následne privedená do priameho kontaktu s plazmou DCSBD výboja na dobu 5 s [Masaryk, 2009].

### 2.5 Analýza povrchu

Na určenie hydrofilnosti povrchu modifikovanej vzorky PP NT využijeme *test merania času priesaku*. Vzorka sa položí na vrstvu 5 filtračných papierov (Hollingsworth & Vose). Následne je zaťažená blokom plexiskla (500 g) s otvorom o ploche 85 mm<sup>2</sup>. Do otvoru nalejeme 5ml 9%-ného vodného roztoku NaCl (fyziologický roztok). Elektrickými stopkami (s presnosťou 0,01 s) meriame čas, za ktorý pretečie celý objemu roztoku cez meranú vzorku. Za hodnotu času priesaku pre danú vzorku sme zobrali aritmetický priemer z piatich meraní. Minimálny merateľný čas priesaku je 3,0±0,5 s, čo je čas priesaku roztoku cez vrstvu 5 filtračných papierov bez vloženej vzorky. Priemyslom požadovaný čas priesaku pre hydrofilné materiály je <5 s.

Hodnotu povrchového napätia (povrchovej energie) sme určili metódou CWST. Na vzorku sme kvapli 10 kvapiek referenčného roztoku s presne definovaným povrchovým napätím a sledovali sme, či aspoň 9 z 10 kvapiek zmáča alebo nezmáča povrch vzorky. Sériou testov sme určili roztok, ktorý zmáča a roztok, ktorý nezmáča povrch študovanej vzorky. Priemerná hodnota povrchového napätia zmáčavého a nezmáčavého roztoku určuje hodnotu povrchového napätia vzorky.

*Hmotnostný prírastok* sme definovali ako:

$$w_g (\%) = \frac{m_g - m_0}{m_0} \cdot 100 \quad (1)$$

$m_0$  je hmotnosť vzorky pred očkovaním po opracovaní plazmou,  $m_g$  je hmotnosť vzorky po očkovaní a vysušení na vzduchu.

*FTIR analýza* opracovanej a očkovanej vzorky bola vykonaná ATR-FTIR metódou na zariadení Bruker (Vector 22) s ZnSe kryštálom. Nastavenie prístroja bolo 20/20 scanov s rozlíšením 4 cm<sup>-1</sup>.

Pre využitie v priemysle je dôležitá aj vyfarbiteľnosť opracovanej vzorky. *Test vyfarbiteľnosti* sme realizovali vodným

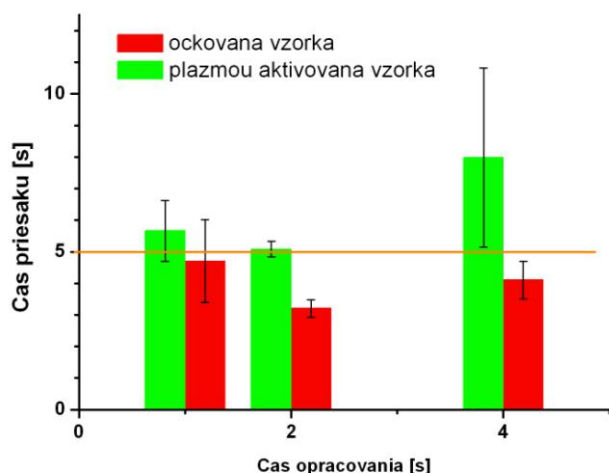
roztokom metylén modrej, pričom sa sledovala adhézia vodou riediteľnej farby na povrchu netkanej textílie. Vzorka textílie bola vložená do roztoku s teplotou 90 °C na 30 min. Po uplynutí stanoveného času boli vzorky vypláchané v destilovanej vode izbovej teploty a vysušené medzi dvomi filtračnými papiermi.

### 3 Výsledky a diskusia

#### 3.1 Očkovanie v kvapalnej fáze

V prvej fáze experimentu sme optimalizovali aparaturu, postup a podmienky očkovania pre dosiahnutie čo najlepších výsledkov. [Obr. 3] [Obr. 4] Ako smerodajný nám slúžil test času priesaku. Kvalitu vzoriek sme sledovali pre čas opracovania plazmou 1 s, 2 s, 4 s.

Pri referenčnej vzorke, očkovanej bez prebublávania dusíkom, pri čase opracovania 2 s sa čas priesaku mierne zhoršil a hmotnostný prírastok



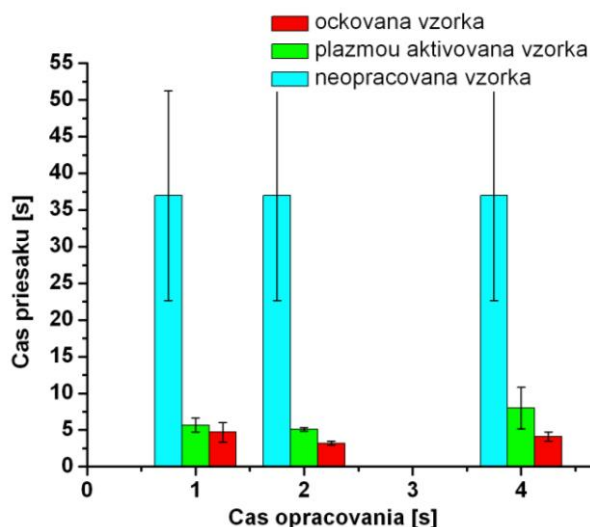
Obr. 3: Čas priesaku očkovanej PP NT v porovnaní s plazmou aktivovanou vzorkou. Čas priesaku <5 s je priemyslom požadovaná hodnota pre hydrofilnú úpravu PP NT.

bol na úrovni nepresnosti merania.

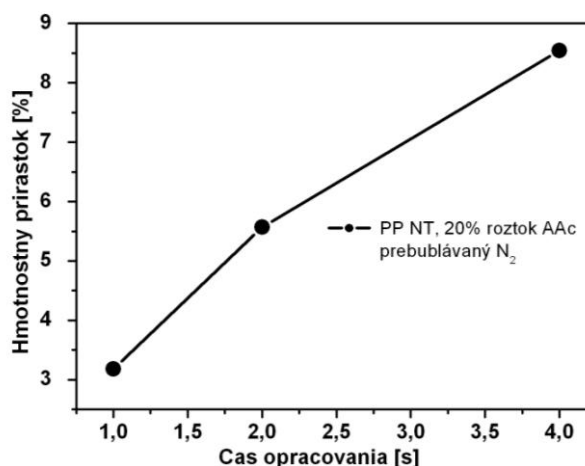
Vidíme, že po naočkovaní vrstvy kyseliny akrylovej sa zlepšil čas priesaku a zmenšil sa jeho rozptyl. Zmenšenie rozptylu indikuje, že čas priesaku je menej závislý na štruktúre textílie. Hmotnostný prírastok naočkovanej vrstvy AAC vykazoval nárast s rastúcim časom opracovania plazmou tak, ako to zobrazuje graf na Obr. 5.

Vyskúšali sme aj očkovanie 100% roztokom kyseliny akrylovej. Pre 20% roztok AAC sme na prebublávanie použili namiesto dusíka argón. Čas opracovanie pre tieto pozmenené podmienky bol 2s. V prvom prípade bol 20%-tný roztok AAC prebublávaný namiesto dusíka argónom. Ako

inertný plyn s vyššou hmotnosťou ako N<sub>2</sub>, dokáže vytlačil kyslík z objemu banky.



Obr. 4: Čas priesaku očkovanej PP NT v porovnaní s plazmou aktivovanou vzorkou a neopracovanou PP NT.



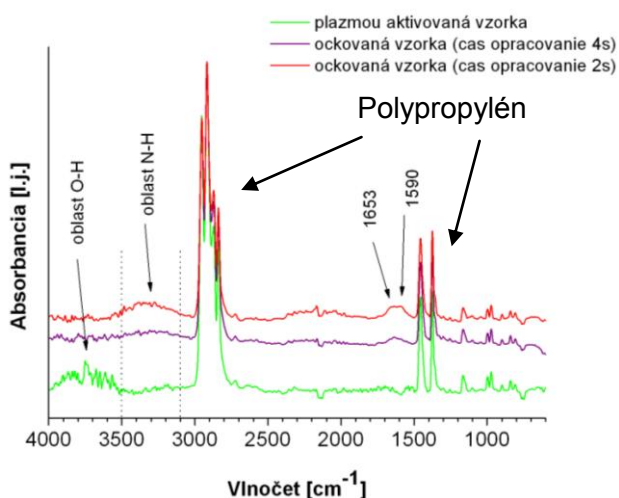
Obr. 5: Hmotnostný prírastok PP NT po procese očkovania AAC uskutočneného po rôznom čase aktivácie povrchu plazmou.

Očakávali sme však zmeny v chemizme reakcie, čo sa malo odraziť na výsledkoch FTIR analýzy. V druhom prípade sme použili 100%-tný roztok AAC a prebublávali ho dusíkom. Hmotnostný prírastok sa výrazne zvýšil. Čas priesaku ale ostal na porovnateľnej úrovni ako pri 20 % AAC.

Analýzou ATR-FTIR hľadáme čiary v absorbnom spektre, pomocou ktorých vieme určiť prítomnosť monoméru kyseliny akrylovej: väzba O-H 3900 cm<sup>-1</sup> až 2800 cm<sup>-1</sup>, C-H 2945 cm<sup>-1</sup>, C-O 1160 cm<sup>-1</sup> až 1234 cm<sup>-1</sup> CH<sub>2</sub> na 2990 cm<sup>-1</sup>, najvýznamnejšia čiara C=O sa nachádza na vlnočte 1715 cm<sup>-1</sup>. [Milata, Segľa and Brezová, 2008]. Keďže chemická reakcia prebieha v dusíkovej atmosfére,

môže dôjsť aj k vzniku akrylamidov. V tomto prípade sa čiary posunú smerom k nižšiemu kmitočtu, čo je spôsobené menšou elektronegativitou dusíka naviazaného v molekule oproti elektronegativite kyslíka. Preto sa čiara vibrácie väzby C=O posunie na hodnotu  $1640\text{ cm}^{-1}$  až  $1690\text{ cm}^{-1}$ . Nové čiary vzniknú pre  $\text{NH}_2$  na  $1550\text{ cm}^{-1}$  až  $1560\text{ cm}^{-1}$ .

Na Obr. 6 vidíme porovnanie spektier nameraných na opracovanej vzorke a na očkovaných PP NT. Na len plazmou opracovanej vzorke vidno čiary v oblasti prislúchajúcej skupine OH. Tie môžeme priradiť vzniknutým peroxy-skupinám alebo vzdušnej vlhkosti, ktorá sa na ne naviazala.



**Obr. 6:** FTIR spectrum pre plazmou aktivovanú vzorku, AAc očkovanú vzorku (čas opracovania 4 s), AAc očkovanú vzorku (čas opracovania 2 s).

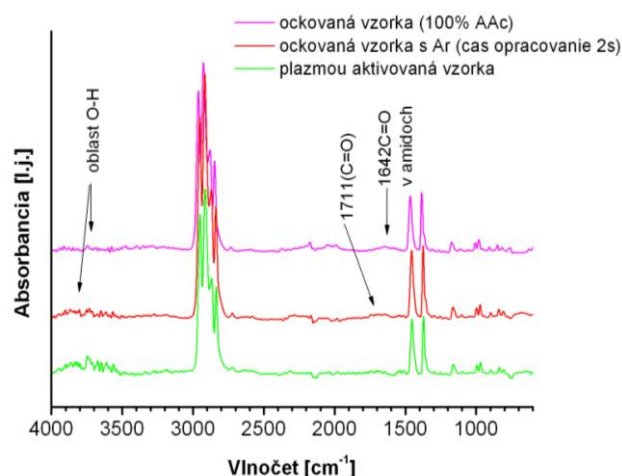
V spektre očkovaných vzoriek tieto čiary absentujú na svojich pôvodných miestach. Z toho usudzujeme, že zanikli chemickým naviazaním iných látok. Môžeme však pozorovať čiary v intervale  $3100\text{ cm}^{-1}$  až  $3500\text{ cm}^{-1}$ , ktoré môžeme priradiť väzbe N-H. Tá nám indikuje prítomnosť amidov. Amidy tiež obsahujú polárnu skupinu, preto sú zodpovedné za hydrofilný charakter povrchu vzorky. Oproti karboxylovej skupine je ich dipólový moment menší a teda aj polárnosť väzby v tejto skupine je nižšia. Čiary  $1653\text{ cm}^{-1}$  a  $1590\text{ cm}^{-1}$  môžeme priradiť C=O väzbe. Nevieme ju však priradiť konkrétnej zlúčenine. Očakávame preto, že na povrchu netkanej textílie je naviazaná kyselina akrylová aj amid kyseliny akrylovej.

Analýze FTIR boli podrobené aj vzorky, ktoré boli v 20% roztoku AAc prebublávané argónom a vzorky očkované v 100% roztoku AAc.

V spektre vzorky prebublávanej argónom (Obr. 7) absentovali čiary, ktoré by sme mohli priradiť amidom. Tento fakt podporuje hypotézu, že pri prebublávaní dusíkom vzniká na povrchu PP NT

akrylamid. V spektre vzorky, pripravenej očkovaním v 100% roztoku AAc po predchádzajúcom prebublávaní dusíkom opäť vidíme posunutie čiar C=O smerom k nižšiemu vlnočtom. Vzhľadom na vysoký hmotnostný prírastok by sme očakávali zvýšenie intenzity čiar C=O, to však nepozorujeme. Táto skutočnosť naznačuje dve možné vysvetlenia.

Výrazný podiel štruktúry textílie a jej nehomogenity nevieme potlačiť kvalitou a hrúbkou naočkovanej vrstvy. Druhá možnosť je, že k naviazaniu väčšej hmotnosti AAc nedošlo na celej aktívnej ploche PP NT.



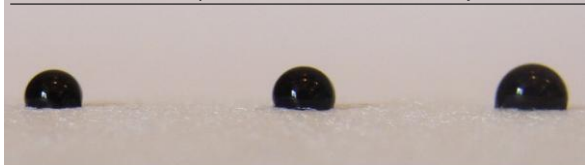
**Obr. 7 :** FTIR spectrum pre očkovanú vzorku s 100% AAc, očkovanú vzorku prebublávanú Ar a plazmou aktivovanú vzorku.

Povrchové napätie vzoriek sa po aktivácii plazmou a aj po očkovaní zvýšilo. V tabuľke (Tab. 1) prikladám hodnoty povrchového napätia vzoriek, ktoré vykazovali najlepšie časy priesaku.

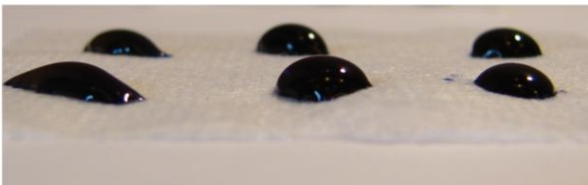
Vzorka	Povrchové napätie
Neopracovaná textília	39 mN/m
čas opr. 1 s	81,2 mN/m
čas opr. 2 s	87,6 mN/m
čas opr. 4 s	90,2 mN/m
čas opr. 1 s, 20% AAc, $\text{N}_2$	92 mN/m
čas opr. 2 s, 20% AAc, $\text{N}_2$	94 mN/m
čas opr. 4 s, 20% AAc, $\text{N}_2$	94 mN/m

**Tabuľka 1:** Hodnoty povrchového napätia textílie pred modifikáciou a po modifikácii pri rôznych podmienkach.

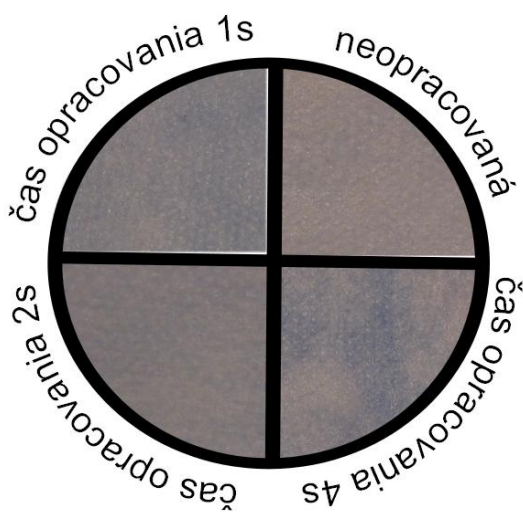
Neopracovaná PP NT je charakteristická svojim hydrofóbnym povrchom. Kontaktný uhol je očividne väčší ako  $90^\circ$  (Obr.8). Po aktivácii plazmou (čas opracovania 2 s) a následnom očkovaní kyseliny akrylovej sa zvýšila hodnota povrchovej energie vzorky. Povrch nadobúda hydrofilný charakter a kontaktný uhol je menší ako  $90^\circ$  (Obr.9).



Obr. 8: Kvapky metylén modrej na pôvodnom hydrofóbnom povrchu PP NT.



Obr. 9: Kvapky metylén modrej na hydrofilnom povrchu modifikovanej PP NT po naočkovaní AAC.



Obr. 10: Test vyfarbiteľnosti. Porovnanie vzoriek opracovaných plazmou s naočkovanou AAC a neopravenou vzorkou.

Test vyfarbiteľnosti potvrdil prítomnosť polárnych skupín na povrchu textílie. Vodný roztok metylén modrej zafarbil opracované vzorky na pohľad lepšie ako neopracovanú textíliu. Vyfarbiteľnosť nám zároveň poukazuje na nehomogenitu textílie.

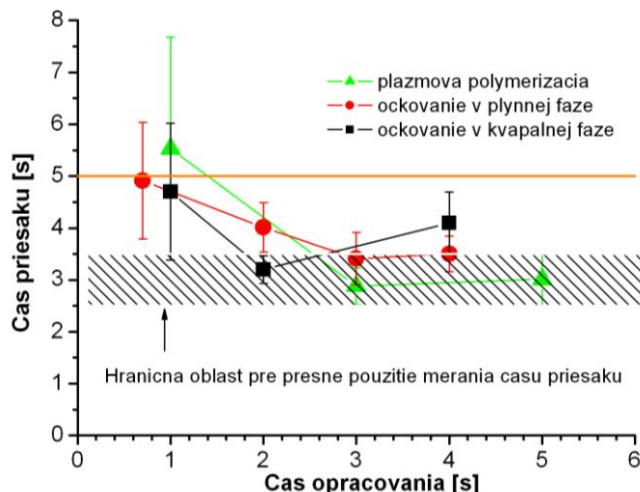
Fotky vyfarbených vzoriek (Obr. 10) boli robené za rovnakého osvetlenia a nastavenia fotoaparátu a z rovnakého uhlu. Textília je čiastočne priehľadná, preto je pri fotení podložená bielym papierom.

### 3.2 Porovnanie spôsobu očkovania AAC na PP NT aktivovanú plazmou DCSBD výboja

Z pohľadu reakcií prebiehajúcich počas procesu očkovania, je očkovanie v plynnej fáze porovnateľné s očkovaním v kvapalnej fáze. Rozdielne je len médium, z ktorého sa naväzuje monomér.

V prípade plynnej fázy pracujeme s menšími koncentraciami monoméru. Veľký vplyv má v tomto prípade laboratórna teplota, ktorá určuje tlak nasýtených pár AAC. Hmotnostné prírastky neboli zmerateľné a naočkovanie vrstvy AAC dokazoval len čas priesaku pod 5 s a hodnoty povrchového napätia vyššieho ako 80 mN/m. Analýzou FTIR sme väzbu C=O na vlnochte 1710  $\text{cm}^{-1}$  našli až pri čase opracovania plazmou 30 s. Predpokladáme, že naočkovaná vrstva má hrúbku len niekoľko stoviek nanometrov [Černáková et al., 2005].

Obr. 11 zobrazuje porovnanie času priesaku pre optimalizované parametre jednotlivých metód očkovania AAC na polypropylénovú netkanú textíliu. Vo všetkých prípadoch bola použitá textília



Obr. 11: Porovnanie času priesaku pre jednotlivé metódy nanášania AAC na povrch PP NT.

s plošnou hustotou 18  $\text{g/m}^2$  a zdrojom plazmy bola DCSBD výbojka. Z grafu (Obr. 11) vidíme tendenciu zlepšovania času priesaku s rastúcim časom opracovania. Pre časy opracovania > 3 s sa už pohybujeme na okraji presnosti samotnej metódy, lebo čas priesaku je porovnateľný s časom priesaku len cez vrstvu 5-tich filtračných papierov.

Pre plazmou modifikované textílie je dôležitá stálosť vzoriek a potlačenie starnutia hydrofilnej úpravy (ageing effect) [Carrino, Polini and Sorretino 2004], [Kubincová, 2009].

Pre prípad očkovania AAC v kvapalnej fáze sme sledovali vzorky len po uplynutí času 1 týždeň. Čas priesaku ostal nezmenený a vzorky boli odložené na ďalšie starnutie. Vrstva vytvorená plazmovou polymerizáciou vykazuje stálosť aj po 2 týždňoch

[Masaryk, 2009]. V prípade očkovania v plynnej fáze vzorka podliehala starnutiu [Bogár, 2010].

K príprave vzoriek s vysokou pridanou hodnotou si môžeme vybrať jednu z troch už vyššie diskutovaných metód. Pomocou každej z nich vieme dosiahnuť aktiváciu a následnú post-úpravu povrchu polymérnej textílie. Výsledky sa budú samozrejme líšiť v závislosti od substrátu, jeho chemického zloženia a morfológie.

### 3.2.1 Výhody a nevýhody jednotlivých metód

Zhrniem výhody a nevýhody jednotlivých metód, ktoré sme odsledovali pri prácach našej výskumnej skupiny. Prehľadne sú zobrazené v Tab. 2.

V prípade očkovania v plynnej fáze a plazmovej polymerizácie je potrebná výveva a zariadenie na odčerpávanie a napúšťanie pracovného plynu. Veľký plyný odpad vzniká kvôli potrebe zavzdušniť aparáturu pri výmene vzorky. V oboch prípadoch prúdia napúšťacím zariadením aj pary kyseliny akrylovej, ktoré sa v ňom usádzajú. Preto pri zmene očkovaného monoméru treba prečistiť napúšťacie zariadenie.

Plazmová polymerizácia sa podľa výsledkov času priesaku a starnutia javí ako veľmi efektívny spôsob očkovania. Nedostatkom je depozícia polymérnej vrstvy aj na výbojke DCSBD. V blízkej budúcnosti sa pokúsime nájsť také parametre procesu polymerizácie, pri ktorých by dochádzalo k jej samočisteniu.

## 4 Záver

V práci sme sa venovali očkovaniu kyseliny akrylovej na povrch polypropylénovej netkanej textílie. Textília bola pred očkovaním aktivovaná plazmou DCSBD výboja. Test času priesaku a aj meranie povrchového napätia preukázali hydrofilný charakter povrchu vzorky po očkovaní. Analýzou FTIR sme overili zmenu funkčných skupín a výskyt väzieb C=O na povrchu vzorky, ktoré môžeme priradiť karboxylovej alebo amidovej skupine. Už pri čase aktivácie plazmou 2 s sme dosiahli čas priesaku pod 5 s pre vzorky následne očkované AAc. Meranie hmotnostného prírastku vzorky po očkovaní ukázalo dobré výsledky. Dosiahli sme väčšie prírastky ako pri očkovaní v plynnej fáze alebo pri plazmovej polymerizácii pri rovnakých podmienkach. Nepodarilo sa nám ale zabezpečiť homogénnu úpravu a čas priesaku je do značnej miery stále ovplyvnený štruktúrou textílie.

V práci sme tiež zhrnuli tri zaužívané postupy očkovania monomérov na plazmou aktivovaný

povrch polymérov. Porovnali sme ich využitie na očkovanie kyseliny akrylovej na netkané textílie.

Plazmová polymerizácia	Očkovanie v plynnej fáze	Očkovanie v kvapalnej fáze	Starnutie	Plyný odpad	Iný odpad	Hydrofilná úprava	Hmotnostný prírastok	Čas priesaku	Povrchové napätie
nie	áno	nie		nie	opakované použítie* roztoku	áno	8,5	< 5s	94 mN/m
áno	áno	nie		nie	zanišovanie elektrod	áno	nemerateľný	< 5s	85,5 mN/m
							nemerateľný	< 5s	> 103,8 mN/m

**Tabuľka 2: Porovnanie parametrov procesu očkovania a výsledkov dosiahnutých jednotlivými typmi povrchovej úpravy plazmou aktivovanej PP NT.**

\* hypotéza, ktorá sa experimentálne overí. Keďže nedošlo k vzniku homopolyméru v roztoku predpokladáme, že obsahuje ešte dostatok monoméru na naviazanie sa na ďalšiu vzorku.

## Referencie

[Bogár, 2010] Bogár O., (2009). Hydrofilná úprava polymérnych materiálov plazmou iniciovaným



povrchovým očkovaním v plynnej fáze., Bakalárska práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava, Slovenská republika

[Carrino, Polini and Sorrentino 2004] Carrino, L., Polini, W., Sorrentino, L., 2004. Ageing time of wettability on polypropylene surfaces processed by cold plasma. *Journal of Materials Processing Technology.*, 10:19 - 525.

[Černák et al., 2002] Černák, M., Šimor, M., Ráhel, J., Vojtek, P., Brablec, A., (2002). Atmospheric-pressure diffuse coplanar surface discharge for surface treatments. *Applied physics letters*, 81: 2716 -2718.

[Černák et al., 2008] Černák, M., Černáková, E., Hudec, I., Kováčik, D., Zahoranová, A., (2008). Difuse coplanar surface barrier discharge and its applications for in-line processing of low-addedvalue materials. HAKONE XI, Oleron Island, 2008

[Černáková et al., 2005] Černáková, E., Kováčik, D., Zahoranová, A., Černák, M., Mazúr, M., (2005). Surface Modification of Polypropylene Non-Woven Fabrics by Atmospheric-Pressure Plasma Activation Followed by Acrylic Acid Grafting. *Plasma Chemistry and Plasma Processing.*, 25: 427 - 437.

[Geßner et al., 2004] Geßner, C., Bartels, V., Betker, T., Matucha, U., Penache, C., Klages, C.-P., (2004). Surface modification for biomedical purposes utilizing dielectric barrier discharges at atmospheric pressure, *Thin Solid Films* 459, 118 - 121

[Chan, Ko and Hiraoka 1996] Chan, C.-M., Ko, T.-M., Hiraoka, H., (1996), Polymer surface modification by plasmas and photons. *Surface Science Reports* 24: 1-54.

[Kato et al., 2003]: Kato, K., Uchida, E., Kang, E.-T., Uyama, Y., Ikada, Y., (2003). Polymer surface with graft chains, *Nuclear Instruments and Methods in Prog. Polym. Sci.* 28 , 209 - 259

[Kostov et al., 2010] Kostov, K.G., dos Santos, A.L.R., Honda, R.Y., Nascente, P.A.P., Kayama, M.E., Algatti, M.A., Mota, R.P., (2010). Treatment of PET and PU polymers by atmospheric pressure plasma generated in dielectric barrier discharge in air, *Surface & Coatings Technology* 204 3064 - 3068.

[Kováčik, 2006] Kováčik, D., (2006). Surface Modificatin of Polymer Materials by Atmospheric-Pressure Plasma Induced Grafting, Dizertačná práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky,

Univerzita Komenského, Bratislava, Slovenská republika, 125 - 136.

[Kubincová, 2009] Kubincová, J., (2009). Štúdium základných vlastností dielektrických bariérových výbojov a možnosti ich aplikácií oblasti povrchových úprav polypropylénových netkaných textílií., Diplomová práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava, Slovenská republika

[Masaryk, 2009] Masaryk R., (2009). Povrchová úprava polymérnych materiálov plazmovou polymerizáciou., Bakalárska práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava, Slovenská republika

[Meiners et al., 1998] Meiners S., Salge J.G.H., Prinz E., Forster F., (1998). Surface modification of polymer materials by transient gas discharges at atmospheric pressure, *Surface and Coatings Technology* 98, 11 - 21.

[Milata, Segľa and Brezová, 2008] Aplikovaná molekulová spektroskopia, Milata, V., Segľa, P., Brezová, V., ISBN: 978-80-227-2960-4

[Osada and Iriyama , 1984] Osada, Y., Iriyama, Y. (1984). Plasma-initiated graft polymerization of water-soluble vinyl monomers onto hydrophobic films and its application to metal ion adsorbing films. *Thin Solid Film.*, 119:197 - 202.

[Wagner et al., 2003] Wagner, H.-E., Brandenburg, R., Kozlov, K.V., Sonnenfeld, A., Michel, P., Behnke, J.F (2003). The barrier discharge: basic properties and applications to surface treatment. *Vacuum*, 71: 417 - 436.

[Wavhal and Fisher, 2002] Wavhal, D. S., Fisher, E.R., (2002). Hydrophilic modification of polyethersulfone membranes by low temperature plasma-induced graft polymerization, *Journal of Membrane Science* 209, 255 - 269.

[Xueji Xu, 1992] Xueji, Xu., (1992). Dielectric barrier discharge - properties and applications, *Thin Solid Films.* 390: 237 - 242.

# Analýza pohybu motorky, špeciálne jazdy na zadnom kolese

Samuel Kováčik<sup>1\*</sup>

Školiteľ: Martin Mojžiš<sup>1†</sup>

Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky, Oddelenie teoretickej fyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

**Abstrakt:** Pohyb motorky (špeciálne na zadnom kolese) je veľmi bežný jav. Aj vďaka tomu<sup>1</sup> je jeho fyzikálne uchopenie zaujímavé a poučné. V prvej časti predkladanej práce uvedieme fyzikálny model pohybu motorky. V druhej časti práce sa pomocou tohto modelu pozrieme na pohyb motorky idúcej iba na zadnom kolese.

*KLúčové slová:* Motorka, jazda na zadnom kolese, klasická mechanika

## Úvod

Základná predstava motorky je taká, že ide o trup, na ktorý sú pripojené dve kolesá, pričom to zadné je poháňané motorom. Táto predstava je správna, ale nedostatočná ak chceme zodpovedať aj na tie najjednoduchšie otázky ohľadom jej pohybu. Nevieme povedať ako veľmi motorka zrýchľuje a ani nemáme možnosť zistiť, či sa jej kolesá začnú prešmykovať alebo nie. Rovnako nevieme napríklad povedať, ako kedy a či sa dvihne jej predné koleso. Každý už videl motorkára idúceho s motorkou na zadnom kolese. Ako je to možné? V akom uhle sa jeho motorka drží? A prečo sa mu motorka na zadnom kolese ľahšie drží za jazdy ako počas státi? Aby sme vedeli na tieto otázky zodpovedať, potrebujeme fyzikálny model pohybu motorky.

Pohyb motorky je úloha z klasickej mechaniky. Ako to už pri úlohách z klasickej mechaniky býva, ľudia sa často uspokojia s vysvetlením, že sú za tým Newtonove pohybové zákony (čo je samozrejme pravda), ktoré stačí dáko skombinovať dokopy a dostaneme riešenie úlohy (čo je v istom zmysle tiež pravda). Za toto podozrenie sa ľudia bežne nepohnú. Jednoducho povieme, že klasickej mechanike rozumieme, lebo máme Newtonove pohybové rovnice. V skutočnosti je správnejšie povedať, že klasickej mechanike môžeme rozumieť, lebo máme nástroj (Newtonove pohybové rovnice), pomocou ktorého v nej úlohy môžeme riešiť. Ak chceme skúmať spektrálne čiary atómu vodíka, tak je Schrödingerova rovnica nástroj,

vd'aka ktorému túto úlohu môžeme riešiť. Ale potom tú úlohu treba aj reálne zrátať, prejsť si výpočtom a uvidieť kde a vďaka čomu sa objaví známe  $E_n = \frac{E_0}{n^2}$ . Porozumenie daného javu sa objaví až v tejto fáze (a nie pri skonštatovaní, že za to môže Newtonova / Schrödingerova rovnica). Aby sme teda naozaj porozumeli pohybu motorky musíme úlohu vyriešiť od začiatku do konca.

Ešte môže padnúť jedna otázka, a síce taká, či má vôbec zmysel skúmať pohyb motorky. Neobjavíme pri tom nový materiál a ani nezachytíme signály novej fyziky. To je samozrejme pravda. Snahou fyziky resp. fyzikov je porozumieť svetu okolo nás. A z tohto pohľadu má zmysel skúmať aj takúto bežnú úlohu. A okrem toho je to zaujímavé. Cestou treba premyslieť veľa, viac, či menej, dôležitých detailov<sup>2</sup> a je zaujímavé sledovať ako sa postupne buduje pod rukami celý model. Podme sa na to teda pozrieť.

## 1 Rovnice pre pohyb motorky

V tejto časti práce spíšeme rovnice pre pohyb motorky. Budeme pri tom vychádzať z práce [2]. Motorku budeme považovať za niekoľko pevne spojených tuhých telies<sup>3</sup> vykonávajúcich dvojrozmerný pohyb. Základná myšlienka získavania rovníc na opis motorky je taká, že identifikujeme všetky sily (a ich momenty), ktoré pôsobia na motorku a vložíme ich do rovníc známych z klasickej mechaniky. V rámci tohto procesu sa objaví niekoľko miest vyžadujúcich hlbšiu analýzu, ktorá bola vykonaná v rámci práce [2], takže ju tu nebudeme opakovať.

### 1.1 Rovnice pre motorku idúcu na dvoch neprešmykujúcich kolesách

Ak sa koleso (motorky) neprešmykuje, platí medzi jeho kruhovou frekvenciou a rýchlosťou akou sa po-

<sup>2</sup>Všetky sa do tejto práce nemohli dostať. Chýbajúce nájde čitateľ v článku [2].

<sup>3</sup>Motorka sa skladá zo štyroch tuhých telies: Dve kolesá, trup a jazdec. Počas práce budeme motorkára považovať za nehybného a tak spolu s trupom tvoria jedno tuhé teleso.

\*samuel.kovacik@gmail.com

†mojzis@fmph.uniba.sk

<sup>1</sup>Resp. napriek tomu. Ako je komu po chuti.

hybuje jeho stred jednoznačný vzťah  $v = -\omega r^4$ . Úpravou tohto vzťahu a využitím 2. Newtonovho pohybového zákona získame dve rovnice (jednu pre predné a druhú pre zadné koleso)

$$F(t) = -\frac{mM_i(t)r_i}{I_i} \quad (1)$$

kde  $F$  je celková sila pôsobiaca na motorku v horizontálnom smere (viď Obr.1),  $m$  je hmotnosť celého systému (celá motorka aj s jazdcem),  $M_i$  je celkový moment pôsobiaci na dané koleso ( $i = 1, 2$ ),  $I_i$  je moment zotrvačnosti tohoto kolesa a  $r_i$  jeho polomer. Pre momenty síl na prvom kolese platí rovnica

$$M_1(t) = F_1(t)r_1 + N_1(t)\varepsilon \quad (2)$$

kde člen  $N_1\varepsilon$  je za valivé trenie ( $\varepsilon$  je koeficient valivého trenia). Pre zadné koleso platí rovnica

$$M_2(t) = F_2(t)r_2 - M_m(t) + N_2(t)\varepsilon \quad (3)$$

kde  $M_m$  je moment sily dodávaný od motoru motorky<sup>5</sup>, jeho závislosť od času (parametrizáciu) zadáme explicitne<sup>6</sup>.

Pri skúmaní pôsobiacich síl sa budeme na motorku pozerat' zo sústavy pevne spojenej so zemou<sup>7</sup>. Odpor vzduchu zanedbávame<sup>8</sup>. Bez odporu vzduchu máme v stojacej sústave iba dve sily pôsobiace na motorku v horizontálnom smere. Sú to sily pôsobiace v bode dotyku kolies a zeme. Môžeme teda hneď napísať rovnicu

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) \quad (4)$$

V prípade, že ide motorka na oboch kolesách (a neuvažujeme pérovanie, resp. pohyb motorkára) je výška jej ťažiska konštantná, a tak musia byť na ňu pôsobiace vertikálne sily v rovnováhe. Z toho dostávame rovnicu

$$mg = N_1(t) + N_2(t) \quad (5)$$

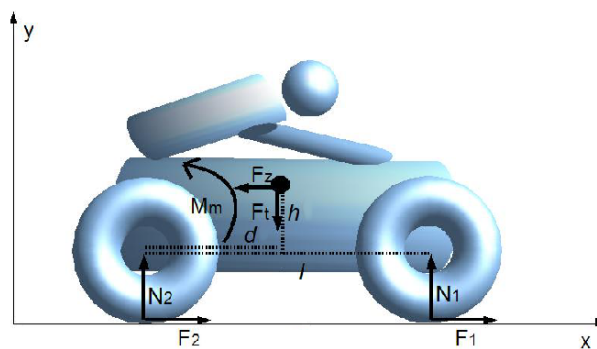
<sup>4</sup>Kladný smer rotácie je proti smeru hodinových ručičiek.

<sup>5</sup>Ak chceme model použiť namiesto motorky pre bicykel, bude  $M_m$  moment sily z pedálovania. Jazda na babete je kombinácia týchto dvoch modelov.

<sup>6</sup>O tom ako výsledky závisia od voľby parametrizácia sa píše v dodatku C2 práce [2].

<sup>7</sup>Samozrejme dostaneme rovnaké výsledky, ako keby sme motorku skúmali v sústave pevne spojenej s ňou. V takej by bolo zrýchlenie motorky nulové, ale zas by pribudol člen za neinerciálnosť tejto sústavy.

<sup>8</sup>To je správne možné len pri nízkych rýchlostiach motorky. My sme model v práci [2] potrebovali na skúmanie prudkého štartu, takže sme si to mohli dovoliť. V prípade, že sa motorka pohybuje väčšou rýchlosťou, treba túto silu do rovníc pridať.



Obr. 1: Znáročenie kl' účových veličín. Čierny bod v strede vyznačuje polohu ťažiska.

kde  $N_i$  je horizontálna sila pôsobiaca na prvom, resp. druhom kolese.

Zatiaľ teda máme 6 rovníc ((1) sú vlastne dve rovnice) a 7 neznámych ( $F, F_i, N_i, M_i; i = 1, 2$ ). Potrebujeme napísať ešte jednu nezávislú rovnicu. Využijeme skutočnosť, že motorka ide na dvoch kolesách a teda sa *neotáča* okolo stredy zadného kolesa. Všetky na motorku pôsobiace momenty síl (vzhľadom na túto os rotácie) musia byť v rovnováhe. Z toho získame poslednú potrebnú rovnicu

$$M_m(t) + \dot{v}(t)mh + N_1(t)l - mgd = 0 \quad (6)$$

Túto rovnicu sme zapísali v sústave pevne spojenej so stredom zadného kolesa motorky, takže sa nám tam objavil člen za neinerciálnosť sústavy  $\dot{v}(t)mh$ .  $h$  a  $d$  sú vertikálna a horizontálna vzdialenosť ťažiska od osi otáčania - stredy zadného kolesa,  $l$  je vzdialenosť stredov kolies, viď. Obr1.

## 1.2 Prešmykujúce sa kolesá

V tejto časti stručne odpovieme na dve otázky. Prvá je, ako zistiť či dané koleso prešmykuje a druhá je, čo sa tým zmení. V bode dotyku kolesa a zeme pôsobí zem na koleso (resp. naopak) horizontálnou silou s veľkosťou  $|F_i|$ . V tom istom bode pôsobí normálová sila o veľkosti  $|N_i|$ . Ako je známe, k prešmykovaniu dôjde, ak prekročí horizontálna sila istú hranicu, presnejšie ak  $|F_i| \geq \mu_i|N_i|$ , kde  $\mu_i$  je koeficient statického trenia na danom kolese. Platnosť modelu "motorka na dvoch neprešmykujúcich kolesách" je teda podmienená platnosťou nerovnosti  $|F_i| < \mu_i|N_i|$  na každom z kolies (toto treba počas výpočtov v tomto modeli kontrolovať).

V prípade, že dôjde k prekročeniu spomínanej hranice, koleso sa začne prešmykovať. Čo sa tým zmení?

V prvom rade prídeme na danom kolese o rovnicu (1), keďže pri prešmykujúcom kolese nie je jednoznačný vzťah medzi kruhovou frekvenciou jeho otáčania a rýchlosťou, s akou sa pohybuje jeho stred. Naš systém rovníc teda vyzerá byť neúplný. Našťastie pri šmykovom pohybe získame novú rovnicu, tzv. rovnicu šmykového trenia (platí iba pre prešmykujúce sa kolesá)

$$F_i = \mu_{si} N_i \quad (7)$$

kde  $\mu_{si}$  je koeficient šmykového trenia na danom kolese.

### 1.3 Jazda na jednom kolese

Ďalší stav, do ktorého sa môže motorka dostať, je jazda na jednom kolese. Ak sme začínali s motorokou idúcou na dvoch kolesách, ako zistíme, že sa nám jedno z nich zdvihlo<sup>9</sup>? Tak, že normálová sila, ktorá na neho pôsobí klesne na nulu. Ak takéto niečo nastane, musíme prejsť na model motorky idúcej na jednom kolese.

Hlavným rozdielom oproti jazde na dvoch kolesách je nový stupeň voľnosti  $\varphi$ , teda uhol o ktorý je motorka zdvihnutá<sup>10</sup>. Inými slovami, pri jazde na zadnom kolese sa mení horizontálna a vertikálna poloha ťažiska. Zapísane (z pohľadu systému pevne spojeného so zemou) to vyzerá takto

$$y(t) = y_k(t) + \lambda \sin(\varphi(t)) \quad (8)$$

kde  $\lambda$  je vzdialenosť ťažiska a stredu zadného kolesa a  $y_k = r$  je výška stredu zadného kolesa od zeme (čo je vlastne polomer zadného kolesa).

$$x(t) = x_k(t) + \lambda \cos(\varphi(t)) \quad (9)$$

$x$  je horizontálna poloha ťažiska motorky a  $x_k$  je poloha stredu jej zadného kolesa. V prípade pohybu na dvoch kolesách platilo  $\varphi = \text{const}$ <sup>11</sup>, a tak sme tieto vzťahy nikde nevyužili (derivácie zrušila konštanty). Aké rovnice platia pre motorku idúcu na zadnom kolese? Rovnica (1) sa nijako nezmení, rovnako ju môžeme napísať aj pre jedno (neprešmykujúce<sup>12</sup>) ko-

<sup>9</sup>Spravidla sa zdvíha predné koleso motorky. K zdvihnutiu zadného kolesa bežne dôjde len pri prudkom brzdení predným kolesom. Ďalej budeme uvažovať už len možnosť, že je zdvihnuté práve predné koleso.

<sup>10</sup>Presnejšie to je uhol medzi horizontálnou rovinou a spojnicou ťažiska a stredu zadného kolesa.

<sup>11</sup>A teda  $h = \lambda \sin(\text{const})$ ,  $d = \lambda \cos(\text{const})$

<sup>12</sup>Prešmykovanie by sa vybavilo rovnako ako v prípade jazdy na dvoch kolesách.

leso

$$F(t) = -\frac{mM(t)r}{I} \quad (10)$$

pričom momenty síl pôsobiace na koleso sú rovnaké ako pri jazde na dvoch kolesách. Oproti jazde na dvoch kolesách už ale neplatí, že by sa výška ťažiska nemenila a tak platí mierne zložitejšia podoba rovnice  $F_y = m\ddot{y}$

$$N(t) - mg = m(\lambda \cos(\varphi(t))\ddot{\varphi}(t) - \lambda \sin(\varphi(t))\dot{\varphi}^2(t)) \quad (11)$$

členy na pravej strane sú nám známe (priemety vertikálneho a odstredivého zrýchlenia). Rovnice pre horizontálne sily sa oproti jazde na dvoch kolesách skomplikujú obdobne

$$F(t) = m(\ddot{x}_k(t) - \lambda \dot{\varphi}^2(t)\cos(\varphi(t)) - \lambda \ddot{\varphi}(t)\sin(\varphi(t))) \quad (12)$$

kde spoznáваме členy podobne ako v minulej rovnici. Už nám chýba iba rovnica zadávajúca časový vývoj pre  $\varphi$ . Je to rovnica pre momenty síl (vzhľadom na os otáčania)

$$I_m \ddot{\varphi}(t) = M_m(t) + \lambda m \ddot{x}_k(t) \sin(\varphi(t)) - \lambda mg \cos(\varphi(t)) \quad (13)$$

kde  $I_m$  označuje moment zotrvačnosti celej motorky.

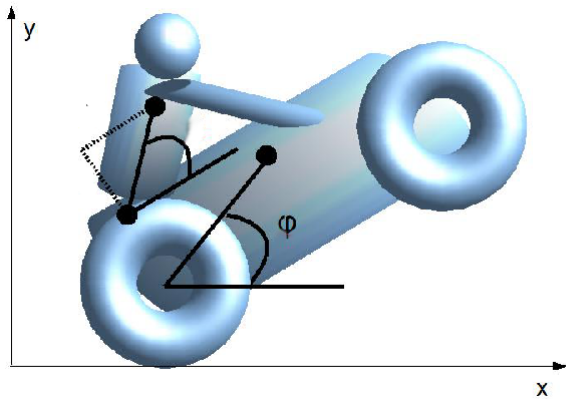
### 1.4 Rozšírenie modelu o pohyblivého jazdca

V úvode sme spomenuli, že budeme uvažovať iba nehybného motorkára. V tejto sekcii len stručne naznačíme ako sa dá do teórie zakomponovať pohyblivý jazdec. Motorkára budeme uvažovať ako pevné teleso pripojené k motorke v jednom bode, pričom sa okolo tohto bodu môže otáčať. Od jeho polohy bude závisieť poloha ťažiska systému motorka a motorkár a závislosť tejto polohy od času vnesie do rovníc ďalšiu dynamiku.

Týmto máme ukončenú analýzu rôznych druhov pohybu motorky. Viac detailov a riešenia nájdených rovníc nájde čitateľ v práci [2].

## 2 Motorka idúca na zadnom kolese

V tejto časti (alebo ešte lepšie po prečítaní práce [2]) by sme mali mať jasnú predstavu o tom akými rovnicami opisujeme rôzny pohyb motorky, aké veličiny v nich vystupujú a ktoré z nich si máme kedy všimnúť. Máme hotový fyzikálny model, takže



Obr. 2: Znáznornenie kľúčových veličín pri jazde na zadnom kolese. Čierne body v strede vyznačujú polohu ťažiska motorkára, motorky a bod okolo ktorého sa motorkár otáča.

môžeme preskúmať dáku zaujímavú situáciu. O prešmykovaní či dvíhaní kolies je toho napísaného dosť v práci [2], ďalším zaujímavým javom je jazda na zadnom kolese.

Jedným z dôvodov, prečo je zaujímavé sa jej venovať je skutočnosť, že sa jej venoval aj článok [1] publikovaný v *European Journal of Physics*. Nie je zaujímavý z dôvodu, že by sme si chceli porovnať výsledky, ale z dôvodu, že model použitý v ich práci považujeme za nesprávny a chceli by sme ho poopraviť. Jeho chyba spočíva v tom, že nemá súvislosť medzi momentom sily dodávaným od motoru a zrýchlením motorky. V článku v podstate použili jedinú rovnicu, u nás označenú ako (13), pričom moment sily od motora brali ako konštantu a *nezávisle* od toho menili zrýchlenie motorky  $\ddot{x}_k$ . Než sa pozrieme na motorku idúcu na zadnom kolese v rámci nášho modelu, zhrňme, aké výsledky môžeme očakávať na základe "experimentov"<sup>13</sup>. Prvou, najviac známou, ale a priori nie úplne jasnou skutočnosťou je to, že sa vôbec dá ísť na zadnom kolese (pri konštantnom uhle  $\varphi$ ) dostatočne dlhý čas. Druhým pozorovaním je to, že jazda na zadnom kolese sa deje pri rôznych (konštantných) uhloch  $\varphi$ . Niekedy (keď ide pomaly) je motorka zdvihnutá veľmi, inokedy (keď ide rýchlo) je uhol  $\varphi$  citeľne menší. Tretie, menej dôležité pozorovanie je také, že je jednoduchšie sa na zadnom kolese udržať za jazdy, ako na mieste.

<sup>13</sup>Teda pozorovaní rôznych motorkárov idúcich na zadnom kolese. Na odporúčanie rôznych špecifik stačia aj videá motorkárov voľne dostupné na internete

## 2.1 Uhol $\varphi_0$ motorky idúcej na zadnom kolese

Motorka môže ísť na zadnom kolese rôzne. Môže sa len na chvíľku dvihnúť a hneď padnúť, prípadne sa môže prudko preklopiť dozadu. Nás ale zaujíma taký prípad, keď ide motorkár *bez* zrýchlenia dlhšiu dobu s motorkou zdvihnutou o *konštantný* uhol (treba motorku držať v správnom uhle a moment od motoru na dákej konkrétnej hodnote). Takúto jazdu budeme označovať konštantne dvihnutá motorka. Zapísané matematicky

$$\ddot{x}_k(t) = 0, \dot{x}_k(t) = \text{const} \quad (14)$$

$$\varphi(t) = \text{const}, \dot{\varphi}(t) = 0, \ddot{\varphi}(t) = 0 \quad (15)$$

Pozrime sa, ako sa v takomto prípade zjednodušia rovnice (10)-(13). Získame tieto 4 rovnice (postupne z rovníc (11), (12), (10), (13))

$$N = mg \quad (16)$$

$$F = 0 \quad (17)$$

$$0 = M_m - rF - N\varepsilon = M_m - N\varepsilon = M_m - mg\varepsilon \quad (18)$$

$$0 = M_m - mg\lambda \cos(\varphi) \quad (19)$$

rovnice (18) a (19) nám dávajú dve očakávané (a aj tak zaujímavé) podmienky pre uhol a moment motoru konštantne dvihnutej motorky. Podmienky vyzerajú nasledovne

$$M_m = mg\varepsilon \quad (20)$$

$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \quad (21)$$

Tieto rovnice bohužiaľ správne neopisujú realitu. Ak si totiž uvedomíme, že  $\varepsilon \approx 1\text{cm}$  a  $\lambda \approx 1\text{m}$  dostaneme  $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$ . To by znamenalo, že na jazdu na zadnom kolese by motorka musela byť zdvihnutá až do úplne vertikálnej polohy. V realite to tak býva iba v prípade, že ide motorkár veľmi pomaly (prípadne ide na bicykli). Pri vyšších rýchlostiach ide motorka konštantne na zadnom kolese pri uhle  $\varphi \approx \frac{\pi}{3}$ . Prečo náš model neopisuje správne realitu? Dôvod je taký, že sme v úvode zanedbali odpor vzduchu. Pri nízkych

rýchlostiach to nerobí rozdiel, pri vyšších rýchlostiach to robí rozdiel úplne kľúčový. Dorobme teda do našich rovníc odpor vzduchu a pozrime sa, či dostaneme očakávaný výsledok, teda  $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$  pre pomaly sa pohybujúce motorky a  $\varphi \approx \frac{\pi}{3}$  pre rýchlo sa pohybujúce motorky.

Skôr než sa do toho pustíme, musíme si vyjasniť jednu vec. Odpor vzduchu je veľmi komplikovaný jav<sup>14</sup>. Preto sa to nebudeme snažiť robiť najpresnejšie ako sa dá. Odpor vzduchu bude pre nás dáka sila, ktorá závisí od štvorca rýchlosti motorky a veľkosť ramena jej pôsobenia je rádovo 1 meter<sup>15</sup>. Rovnica (16) sa nezmení, rovnica (17) sa zmení na<sup>16</sup>

$$F = Fv = \kappa(\dot{x}_k(t))^2 \quad (22)$$

kde  $\kappa = \frac{1}{2}\rho AC$ , kde  $\rho$  je hustota vzduchu,  $A$  je priečna plocha motorky (s motorkárom) a  $C$  je konštanta závisiaca od tvaru motorky. Rovnica (18) prejde na rovnicu

$$M_m = mg\varepsilon + F_v r \quad (23)$$

a rovnica (19) prejde na rovnicu

$$0 = M_m - mg\lambda \cos(\varphi) + M_v \quad (24)$$

kde  $M_v = F_v \tilde{\lambda}$  je moment sily odporu vzduchu. Veľkosť ramena sily  $\tilde{\lambda}$  v skutočnosti dáko (nám neznámo) závisí od  $\varphi$ . Pri presnosti s akou riešime túto úlohu ho budeme brať konštantné, keďže aj tak nemáme ambíciu získať úplne presný výsledok, len ukázať charakter výsledkov, ktoré vyplývajú z nášho modelu. Podmienky pre  $M_m$  a  $\varphi_0$  teda dostaneme nasledovné

$$M_m = mg\varepsilon + F_v r \quad (25)$$

a následne

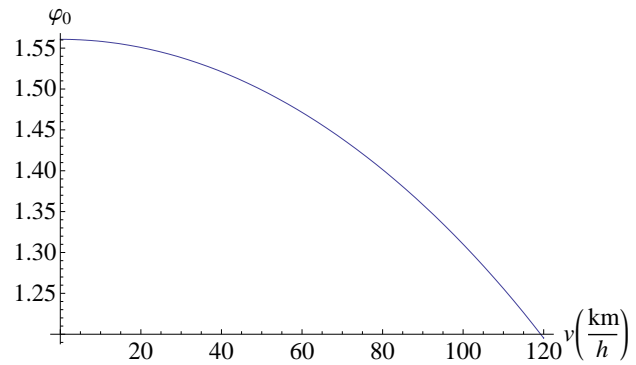
$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{mg\varepsilon + F_v(r + \tilde{\lambda})}{mg\lambda}\right) \quad (26)$$

kde  $\tilde{\lambda}$  je spomínaná veľkosť ramena sily odporu vzduchu. Závislosť  $\varphi_0(v)$  je znázornená na Obr.3. Znovu pripomínáme, že v rámci presnosti, s akou sme odpor vzduchu zaviedli, netreba brať výsledky úplne presne (približne sú ale také, ako sme očakávali a vykazujú správanie známe z experimentov), ide nám len o závislosť  $\varphi_0 \propto \arccos(a_0^2 + a_1^2 v^2)$ .

<sup>14</sup>Z takého dôvodu sme ho do modelu pôvodne nevložili.

<sup>15</sup>S tým, že reálne závisí od  $\varphi$ . My ho budeme brať konštantný, čo je aspoň v malom rozsahu uhlu  $\varphi$  rozumný predpoklad.

<sup>16</sup>Smer sily odporu vzduchu je opačný ako rýchlosť motorky.



Obr. 3: Závislosť uhla pri ktorom môže motorka vykonávať konštantnú jazdu na zadnom kolese od jej rýchlosti.

## 2.2 Stabilita motorky idúcej na zadnom kolese

Už teda vieme povedať v akom uhle a pri akom momente dokáže ísť motorka konštantne na zadnom kolese. Čo sa stane, ak sa motorka z tejto polohy jemne vychýli? V práci [1] sa tvrdí, že v takomto prípade stačí motorkárovi jemne zrýchliť resp. spomaliť a tým pád motorky zastaví. Udržať motorku v konštantnom uhle takýmto spôsobom by ale vyžadovalo veľmi (až nemožne) jemnú prácu so zrýchlením motorky. Takéto niečo považujeme za nereálne, a teda nesprávne vysvetlenie toho, ako sa motorka udržiava na zadnom kolese. Pozrime sa na tento problém v našom modeli. V ideálnom prípade by to mohlo fungovať tak, že je poloha v uhle  $\varphi_0$  stabilná. Podme to skúsiť overiť. Zoberme rovnice<sup>17</sup> (aj s odporom vzduchu) a zvolme počiatočnú podmienku  $\varphi(t = 0s) = \varphi_0 \pm 0.01$ , čo znamená, že sa motorka jemne vychýli z konštantnej polohy jedným alebo druhým smerom. Numericky získame z rovníc časové vývoje na Obr.4 a Obr.5.

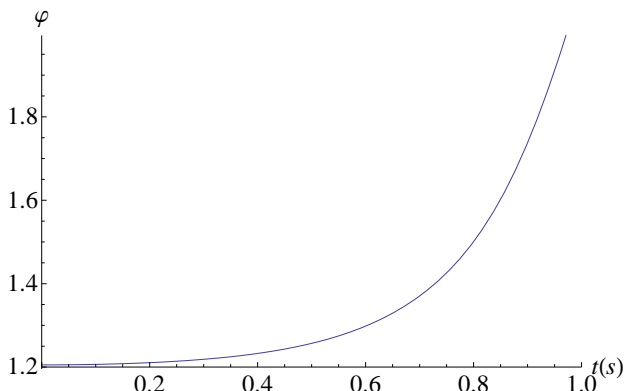
Čo je z týchto závislostí vidieť? Za prvé, že  $\varphi_0$  nie je stabilná poloha<sup>18</sup>. Ak by bola, po malom vychýlení by sa uhol vrátil späť do hodnoty  $\varphi_0$ . Za druhé

<sup>17</sup>Parametre motorky použijeme pri výpočtoch rovnaké ako v [2] a  $v = 120 \frac{km}{h}$ ,  $\kappa = 0.3 \frac{Ns^2}{m^2}$ ,  $\tilde{\lambda} = 1m$ .

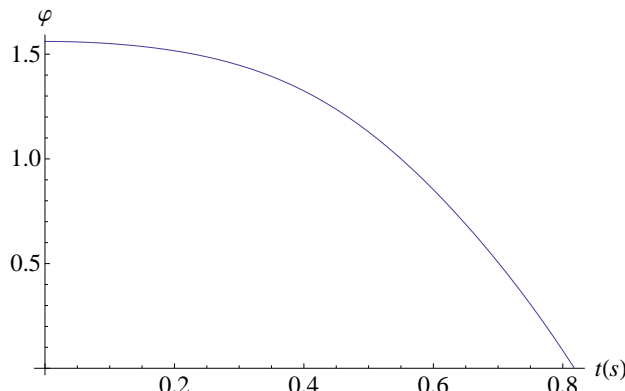
<sup>18</sup>K tomuto zisteniu sa dá dôjsť aj analyticky, bez numerického riešenia rovníc. Riešme takúto úlohu: Položíme motorku do danej polohy s nulovou uhlovou rýchlosťou. Aké uhlové zrýchlenie pocíti uje? Analyticky sa dopracujeme k vzťahu

$$\ddot{\varphi} = \frac{M + \frac{m\lambda \sin(\varphi)}{l+r} (M - F_v r - \varepsilon mg) - mg\lambda \cos(\varphi) + M_v}{I_m - \frac{m\lambda \sin(\varphi)}{l+r}} (\lambda r m \sin(\varphi) - \varepsilon m \lambda \cos(\varphi))$$

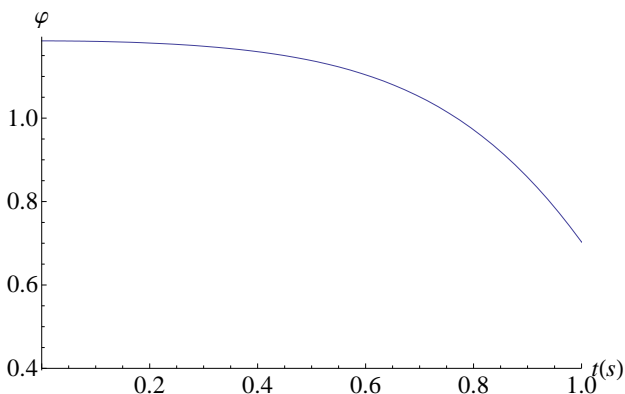
. Ak by mala byť poloha  $\varphi_0$  stabilná, mala by byť lokálnym minimom takejto funkcie. Môžeme sa presvedčiť, že ním nie je.



Obr. 4: Časový vývoj uhla o ktorý je zdvihnutá idúca motorka ( $v = 120 \frac{km}{h}$ ) ak sme ju mierne vychýlili z konštantnej polohy  $\varphi_0$  smerom nahor.



Obr. 6: Časový vývoj uhla o ktorý je zdvihnutá stojaca motorka ak sme ju mierne vychýlili z polohy  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ .



Obr. 5: Časový vývoj uhla o ktorý je zdvihnutá idúca motorka ( $v = 120 \frac{km}{h}$ ) ak sme ju mierne vychýlili z konštantnej polohy  $\varphi_0$  smerom nadol.

je vidno, že z malého vychýlenia pokračuje motorka k väčšiemu vychýleniu zo začiatku veľmi *pomaly*. Motorkár má teda dostatok času, aby prácou svalov mierne (čo v danom prípade stačí) presunul ťažisko, a tým vrátil motorku do pôvodnej polohy. Jemné balansovanie pomocou svalov je vec úplne bežná. Balansovanie pomocou zrýchľovania resp. spomalovania je náročné (a veľmi hrubé) a môže slúžiť akurát vtedy, ak sa motorka výrazne vychýli z danej polohy.

### 2.3 Porovnanie stojacej a idúcej motorky

Už sme si teda ujasnili, v akom uhle môže ísť motorka konštantne na zadnom kolese, a vďaka čomu ju v tejto polohe dokáže motorkár dlho udržať. Vysvetáva ešte jedna zaujímavá otázka a síce, či je ľahšie držať sa na zadnom kolese za jazdy ako pri státi na mieste. Ak chceme stáť na zadnom kolese pri nulovej

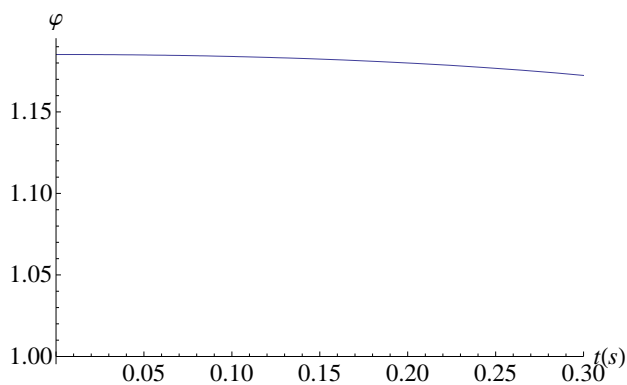
rychlosti, musíme byť v uhle  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , čo je pri bežnej konštrukcii motorky relatívne komplikované. Na druhej strane pri jazde na zadnom kolese pri vyššej rýchlosti je síce motorka stále dosť zdvihnutá ( $\varphi \approx \frac{\pi}{3}$ ), ale motorkár na nej môže sedieť. To by bol ergonomický argument. Existuje ale podozrenie, že pri jazde na zadnom kolese sa padá dopredu (teda predné kolese dopadne na zem) pomalšie, ako v prípade, že sa motorka nepohybuje, nastavíme ju do statickej polohy a potom jemne vychýlime. Máme všetky rovnice, ktoré na overenie takéhoto podozrenia potrebujeme, takže ho môžeme ľahko overiť. Zoberme motorku ktorá stojí, teda  $\dot{x}_k = v = 0 \frac{m}{s}$  a teda podľa (26)  $\varphi_0 = \arccos(\frac{0}{\lambda}) = \frac{\pi}{2}$ <sup>19</sup>. Jemne ju vychýlime z jej statickej (ako sme sa presvedčili nie stabilnej) polohy, teda zoberieme  $\varphi(t = 0s) = \varphi_0 - 0.01$  a pozrieme sa, ako z tejto polohy padá.

Ako vidíme na Obr.6, padne stojaca motorka za kratší čas o väčší uhol. Čiže naozaj to vyšlo tak, že idúca motorka padá zo statickej polohy (jazda pri konštantnom uhle a nulovom zrýchlení) pomalšie ako stojaca motorka. Pre možnosť udržať motorku v takomto stave je kľúčový priebeh  $\varphi$  v okolí uhlu  $\varphi_0$ . Z Obr.6 vidíme, že aj stojaca motorka sa dá v takejto polohe udržať (uhol sa najprv mení len veľmi pomaly). Správne by sme ale nemali porovnávať celé krivky na Obr.5 a Obr.6, ale len okolia uhlu  $\varphi_0$ <sup>20</sup>. Pozrime sa teda na dané priebehy iba v tomto okolí (Obr.7 a Obr.8).

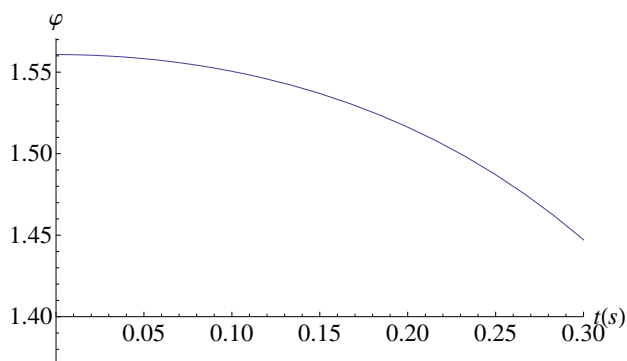
Ako vidíme, aj v malom okolí uhla  $\varphi_0$ , ktoré je kľúčové pre možnosť udržať motorku na jednom ko-

<sup>19</sup>Pri státi je koeficient valivého trenia  $\varepsilon = 0$

<sup>20</sup>To je pre otázku udržateľnosti rozhodujúce.



Obr. 7: Časový vývoj uhla o ktorý je zdvihnutá idúca motorka ( $v = 120 \frac{km}{h}$ ) ak sme ju mierne vychýlili z konštantnej polohy  $\varphi_0$  smerom nadol.



Obr. 8: Časový vývoj uhla o ktorý je zdvihnutá stojaca motorka ak sme ju mierne vychýlili z polohy  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ .

lese, je citel'ný rozdiel medzi stojacou a idúcou motorkou, takže môžeme vysloviť záver, že idúcu motorku udržíme na jednom kolese *ľahšie* ako stojacu.

## Diskusia

Pomocou modelu pre pohyb motorky vypracovaného v [2] sme skúmali vlastnosti jazdy motorky idúcej na zadnom kolese, pričom sme sa sústredili na zaujímavý prípad, kedy sa nezrýchľujúca motorka pohybuje s konštantne dvihnutým kolesom. Stručne zhrnieme dosiahnuté výsledky. Na začiatku sme vypočítali uhol, pri ktorom sa motorka takto môže pohybovať a zistili sme jeho kľúčovú závislosť od rýchlosti motorky (kvôli odporu vzduchu). Následne sme overili otázku, či je takáto poloha stabilná. Zistili sme (numericky a v poznámke pod čiarou náznakom aj analyticky), že takáto poloha stabilnou nie je. Ďalej sme zistili, že aj tak sa v tej polohe môže motorka

udržať, keďže po vychýlení z tejto polohy motorka padá (resp. preklápa sa) zo začiatku iba veľmi pomaly a tak má motorkár možnosť prácou svalov presunúť ťažisko a znovu nadobudnúť rovnováhu. Na záver sme ešte preskúmali, či je jazda na zadnom kolese jednoduchšia ako státie na zadnom kolese, čo sa ukázalo ako pravdivé.

Kým sa v rovniciach zanedbávalo pôsobenie vzduchu (čo je dobre možné len pri malých rýchlostiach motorky) boli rovnice presné a hlavná nepresnosť výpočtov sa skrývala v určovaní parametroch motorky. Presné pridanie pôsobenia vzduchu je niekde na hranici medzi ťažkým a nemožným. Preto sme sa v prípadoch, kde hral odpor vzduchu nezanedbateľnú úlohu uspokojili so skúmaním charakteru riešení (a nie presných výsledkov). Na porozumenie toho ako jazda na zadnom kolese funguje to stačí. Ak by sme potrebovali dákomu motorkárovi nadiktovať presné hodnoty, podľa ktorých má ísť na zadnom kolese, potrebovali by sme poznať pôsobenie vzduchu oveľa presnejšie.

## Pod'akovanie

Na záver by som sa rád pod'akoval svojmu školiteľovi Martinovi Mojžišovi za zadanie zaujímavej témy bakalárskej práce<sup>21</sup> a následné diskusie, ktoré aj po jej napísaní viedli k riešeniu ďalších zaujímavých úloh (ako napríklad jazda na zadnom kolese). Rovnako by som sa chcel pod'akovať svojim spolužiakom J.Genzorovi a M.Koval'ovi za ochotné prečítanie tohoto textu a ich cenné pripomienky.

## Literatúra

- [1] RUOCCO, A., LUCA, R. de, 2007. "Why does the motorbike feather?" In *European Journal of Physics*, 2007, Vol.28, pp.373378.
- [2] KOVÁČIK, S., 2010. "Kedy sa začne predné koleso motorky dvíhať." bakalárska práca z fyziky na FMFI Univerzity Komenského v Bratislave.

<sup>21</sup>Tak zaujímavej, že sme sa k tejto téme vrátili aj po jej napísaní.



# Dekontaminácia kvasiniek *Candida albicans* pomocou mikrovýbojov generovaných pri atmosférickom tlaku

Ladislav Moravský  
Školiteľ: Gabriel Horváth

Katedra experimentálnej fyziky FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Kvasinky *Candida albicans* spôsobujú pre ľudí nebezpečenstvo infekcie asociované s implantáciou medicínskych pomôcok (katétre, umelé kĺby, chlopne, zubné náhrady atď.). Preto sa v súčasnosti veľký dôraz kladie na inaktiváciu a dekontamináciu kvasinkových biofilmov tvorených na povrchu. V posledných rokoch dekontaminácia povrchov pomocou plazmi získala veľkú pozornosť. Nerovnovážne, tzv. studené plazmy majú široké využitie v oblasti dekontaminácie biofilmov, lebo nedegradujú zdravé bunky. Táto práca sa venuje aplikácii plazmovej ceruzky na inaktiváciu kvasinkových biofilmov. Vlastnosti plazmy boli študované pomocou optickej emisnej spektroskopie (OES). Viability kvasiniek po opracovávaní bola vyhodnotená XTT testom.

**Kľúčové slová:** Mikrovýboj, Plazmová ceruzka, Optická emisná spektroskopia, Kvasinky, XTT test.

## 1 Úvod

Kvasinky rodu *Candida* sú všadeprítomné organizmy, ktoré sú prítomné v pôde, vode, potravinách, na abiotických predmetoch, sú bežnou súčasťou ľudskej mikrobioty. Sú súčasťou normálnej flóry gastrointestinálneho a urogenitálneho traktu, kože a slizníc zvierat a človeka, ich prítomnosť sa dokázala až u 80 % zdravej populácie. Historicky boli druhy tohto rodu označované za nepatogénne saprofyty, iba zriedkavo spôsobujúce ľahšie infekcie [Fidel et al., 1999].

V súčasnosti sú kvasinky rodu *Candida* často izolované ako pôvodcovia humánnych mykóz. Najčastejšie izolovaným druhom, ktorý spôsobuje infekcie, je *C. albicans*. Kvasinky rodu *Candida* sú podmienené patogény. Konverzia z komenzálu na patogén je podmienená zmenou prostredia alebo systémovou poruchou hostiteľa. U zdravých ľudí spôsobuje ľahšie infekcie bežne zvládnuteľné antifungálnou liečbou. Ohrozenú skupinu ale

predstavujú jedinci so zníženou imunitou, ako sú onkologickí a HIV pacienti, diabetici, dlhodobo hospitalizovaní, pacienti po transplantácii, či predčasne narodené deti.

Závažný medicínsky problém v súčasnosti predstavujú infekcie asociované s implantáciou medicínskych pomôcok (katétre, umelé kĺby, chlopne, zubné náhrady atď.), na ktorých kvasinky vytvárajú biofilm. V USA sa ročne implantuje viac ako 45 miliónov rôznych medicínskych pomôcok. Až u 60 % z tejto populácie sa prejaví infekcia spojená práve s implantátom. Kvasinky rodu *Candida* sú zodpovedné za 20 % z nich [Kojic et al., 2004]. Bola popísaná priama korelácia medzi katetrizáciou pacientov a vznikom kandidémie [Tumbarello et al., 2007]

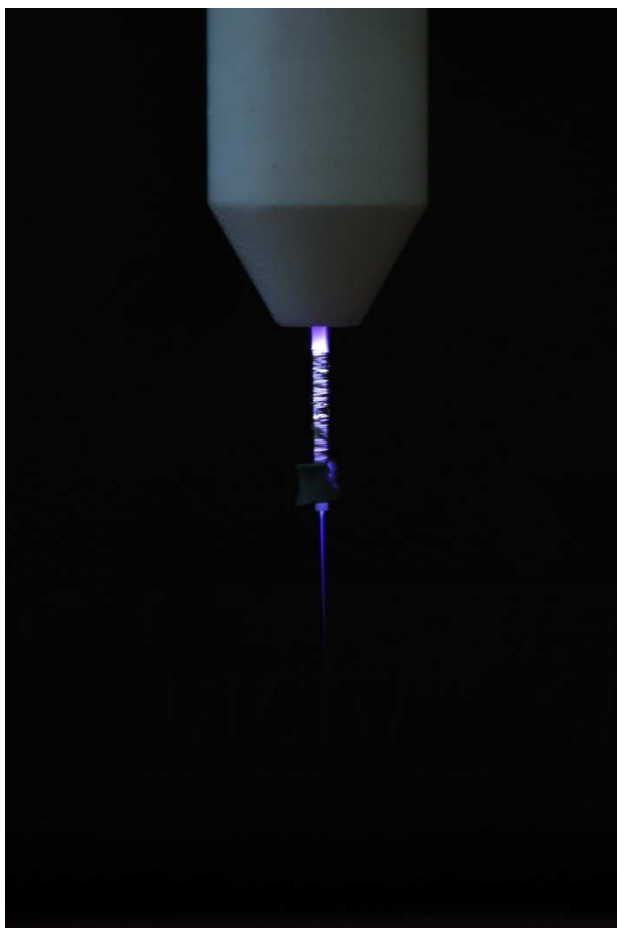
V posledných rokoch aplikácia plazmových pier sa stala populárnou v oblasti biochémie a medicíny. Tento typ plazmy predstavuje nerovnovážnu plazmu, kde teplota elektrónov je rádovo vyššia ako teplota plynu. Keďže koncentrácia elektrónov je o niekoľko rádov nižšia ako koncentrácia molekúl plynu, preto teplota plazmy sa približne môže charakterizovať izbovou teplotou. Táto vlastnosť plazmy sa úspešne využíva v dekontaminácii biofilmov, lebo nedochádza k tepelnej degradácii buniek, totiž tam významnú rolu hrajú radikály, excitované a nabité častice, metastability, ale aj UV žiarenie.

Naša práca je zameraná na aplikáciu plazmového pera pre dekontamináciu kvasinkových biofilmov *Candida albicans* a na štúdium parametrov plazmového lúča.

## 2 Experimentálna časť

### 2.1 Experimentálna aparátúra

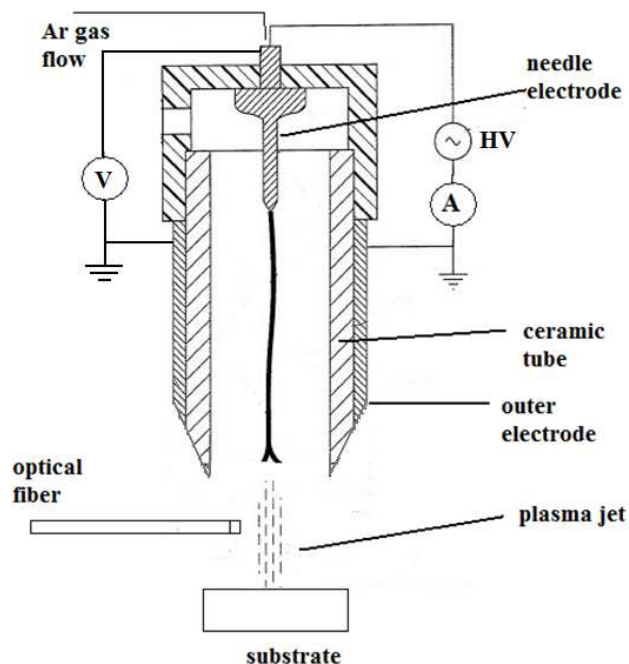
Zdrojom nerovnovážnej plazmy bolo plazmové pero zobrazené na Obr.1. Elektrický výboj bol zapálený v prúdiacom argóne pomocou oscilátora, nízkofrekvenčného zdroja Behringer EP2000 a vysokonapäťového transformátora. Prietoková rýchlosť nosného plynu bola nastavená pomocou regulátora prietoku MKS Instruments v intervale 100-400 sccm. Elektrické parametre výboja boli merané osciloskopom (Tektronix), pomocou vysokonapäťovej (Tektronix P6015A) a prúdovej (Rogowského krúžok) sondy. Napájacie napätie malo sínusový priebeh s amplitúdami od 6 do 8,5 kV.



Obr.1: Plazmové pero pri 7 kV<sub>pk-pk</sub>.

Optické vlastnosti a zloženie plazmového lúča boli študované optickým emisným spektrometrom StellarNet EPP2000-UVN-SR. Optický vlákno spektrometra bolo umiestnené na fixnej vzdialenosti od výfuku plazmového jetu ( $d = 6$  mm). Detailná schéma experimentálnej aparátúry je zobrazená na Obr.2. Vzorky kvasiniek *Candida albicans* boli

prípravené vo forme biofilmov, t.j. adherované bunky boli nanosené na dno umelohmotných jamiek. Plazmový lúč bol nasmerovaný kolmo na dno jamiek. Vzdialenosť lúča od biofilmov bola konštantná,  $d = 10$  mm. Počet analyzovaných jamiek bolo 48, kde každá jamka obsahovala biofilm rovnakej koncentrácie. Doba ožiarenia kvasiniek bola 60 sekúnd pri každej vzorke, pri laboratórnej teplote (300 K) a atmosférickom tlaku. Prietoková rýchlosť plynu bola 100 sccm.



Obr. 2: Schéma experimentálnej aparátúry.

### 2.2 Príprava vzoriek a metóda na analýzu viability kvasiniek

Viabilita buniek sa sledovala spektrofotometricky tzv. XTT testom, ktorý je založený na meraní absorbancie opracovaných vzoriek na 490 nm po pridaní XTT k biofilmu [Kuhn et al., 2003; Hawser, 1996]. Najvyššia absorbancia je u živých biofilmov, lebo táto farebná reakcia (premena XTT na formazán) je založená na fungovaní mitochondriálneho enzýmu. Farba sa mení zo žltej na oranžovú. Takže mŕtve bunky neumožňujú enzymovú reakciu, keďže ich mitochondrie sú mŕtve a farba ostáva nezmenená - žltá. Primárny mechanizmus premeny XTT do formazánu je mitochondrická aktivita kvasiniek [Altman, 1976]. Keďže produkt vo formazáne je rozpustný vo vode, je ľahko merateľný v celulárnych supernatantoch. Taktiež štúdiom

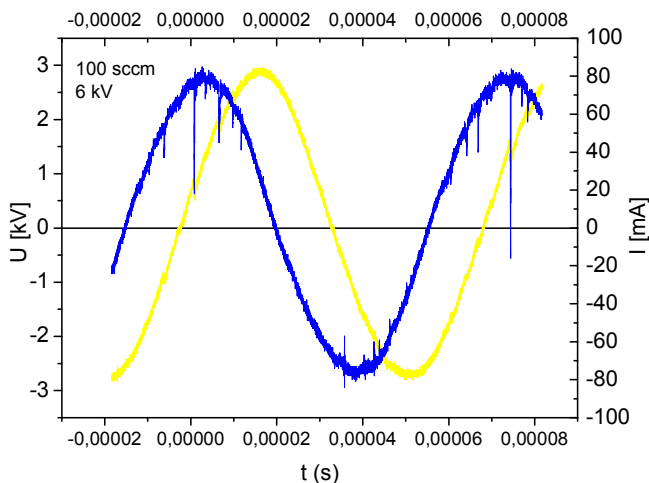
neporušených biovrstiev a adherovaných kvasinkových vrstiev je možné bez porušenia ich štruktúr. Závislosť medzi absorbanciou a počtom živých buniek je lineárna.

V našom experimente biovrstva *Candida albicans* bola pripravená podľa [Li et al., 2003], v tekutom prostredí pri teplote 37 °C. Množstvo uvoľneného formazánu bolo merané ako absorbancia na vlnovej dĺžke 490 nm. V oboch experimentoch, bunky *Candida albicans* produkujú obrovské množstvo formazánu (objaví sa tmavo-oranžová farba). Na druhej strane, plazmou ožiarené bunky produkujú len stopy formazánu ako následok mitochondriálnej inaktivity, preto dekontaminované vzorky majú žltú farbu (Obr. 9).

### 3 Výsledky a diskusia

#### 3.1 Charakterizácia parametrov výboja

Osciloskopom nameraný priebeh napätia a prúdu ukázal že výboj má kapacitívny charakter, t.j. výbojový prúd mešká voči napätiu (Obr.3). Úzke signály vyskytujúce sa na prúdovom profile označujú krátkotrvajúce mikrovýboje v plazme.

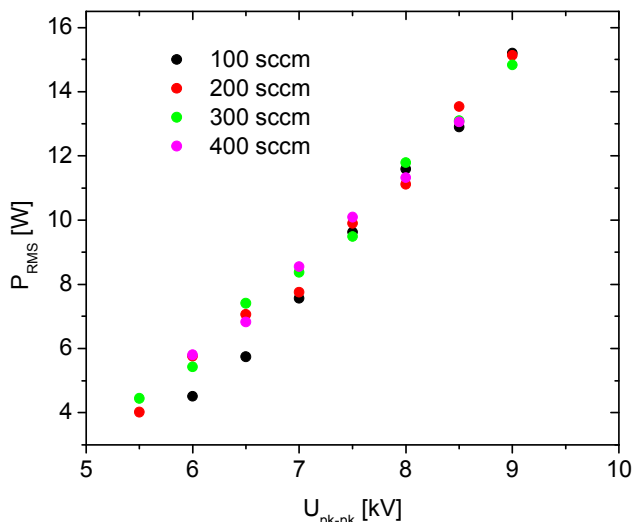


Obr. 3: Priebeh napätia a prúdu nameraný osciloskopom; modré – prúd, žlté – napätie.

Pri konštantnej prietokovej rýchlosti, zvýšenie napätia, spôsobilo nárast výkonu dodávaného do výboja, (Obr.4). Stredný výkon výboja bol vypočítaný pomocou formuly (1):

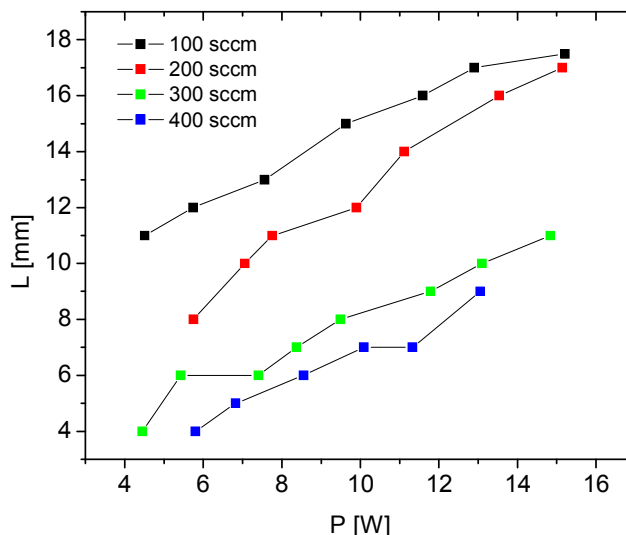
$$P_{str} = f \int_0^T U(t)I(t)dt \quad (1)$$

Kde  $U(t)$  je striedavé napätie naložené na elektródy,  $I(t)$  je výbojový prúd,  $f$  je frekvencia a  $T$  je čas jednej periódy nameraný osciloskopom. Experimenty potvrdili, že prietoková rýchlosť plynu má zanedbateľne malý vplyv na stredný výkon pri vyšších napätiach ako 7 kV.



Obr. 4: Vplyv prietokovej rýchlosti na priebeh stredného výkonu.

Rezonančná frekvencia  $f$  používaná na zapálenie výboja s rastúcim napätím klesala od 15 kHz do 13 kHz. Tento jav sme vysvetlili zvýšením vlastnej kapacity plazmového výboja, ako dôsledok rastúceho výbojového prúdu  $I(t)$ .



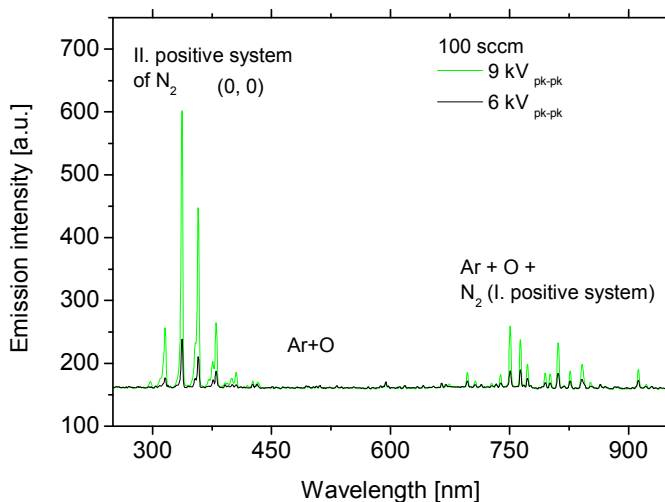
Obr.5: Vplyv stredného výkonu na dĺžku  $L$  viditeľnej oblasti plazmového lúča.

Dĺžka plazmového lúča vzrástla v smere prúdenia lineárne so stredným výkonom výboja

systemu (Obr. 5), kým v priečnom smere dochádzalo len k zanedbateľným zmenám rozmeru. Tento efekt je pravdepodobne spôsobený silnou komplexivitou plazmy, kde z dôvodu vysokej rýchlosti a usmerneného pohybu molekúl plynu dochádza len k slabej priečnej difúzii častíc.

Čo ale nás na prvý pohľad prekvapilo, dĺžka plazmového lúča pri rovnakom výkone sa skracovala rastúcou prietokovou rýchlosťou (Obr. 5). Pri 100 sccm hodnoty dĺžky lúča sa pohybovali v intervale od 11 do 17 mm, ale pri 400 sccm už iba od 4 do 8 mm. Tento kolísavý charakter možno čiastočne vysvetliť pomocou výkonu dodávaného do jednotkového objemu, čo klesá rastúcou rýchlosťou plynu. Na druhej strane, namerané optické emisné spektrá ukazujú silné žiarenie v UV a VIS-NIR oblastiach (Obr. 6); napriek skrakovaniu „viditeľnej časti“ plazmového lúča spektrálna analýza ukázala prítomnosť aktívnych deexcitačných procesov vo výboji.

Bolo zistené intenzívne vyžarovanie molekuly dusíka  $N_2$ , hlavne II. pozitívny systém a slabší I. pozitívny systém, ďalej v spektre bolo identifikovaných niekoľko čiar vyžarovaných atómov argónu Ar a kyslíka O. Najintenzívnejší bol II. pozitívny systém  $N_2$  s prechodom (0,0) na vlnovej dĺžke 337 nm a čiaru argónu Ar na 751 a 765 nm (Obr. 6).

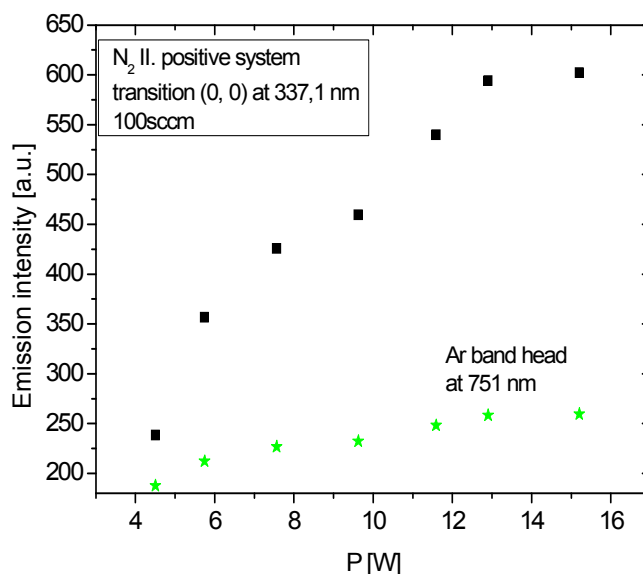


**Obr. 6:** Typické namerané OES spektrá argónovej plazmy vo vzduchu pri rôznych napätiach.

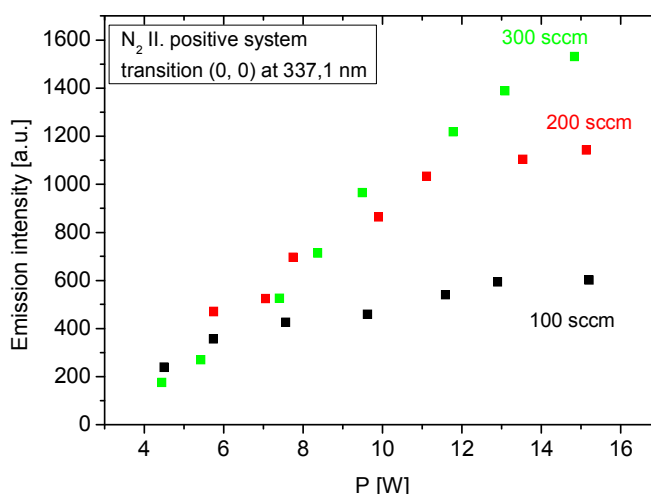
Rastúcim stredným výkonom intenzita menovitých silných čiar  $N_2$  stúpala kvázi-lineárne, avšak nad hodnotou 12W istá saturácia bola pozorovateľná (Obr. 7). Zvýšenie rýchlosti plynu spôsobilo nárast intenzít čiar  $N_2$  (Obr. 8). Ako je vidno na grafe, pod 7W zmena prietokovej rýchlosti plynu mala

zanedbateľný vplyv na intenzitu čiar uvedeného prechodu druhého pozitívneho systému  $N_2$ , ale nad 7W

zvýšenie prietokovej rýchlosti vyvolalo nárast intenzity emisných čiar. Tento jav je následkom stúpajúcej koncentrácie excitovaných a nabitých častíc pri vyšších rýchlostiach, totiž intenzita emisnej čiar je úmerná počtu molekúl daného prechodu. Môžeme preto predpokladať, že distribučná funkcia energií elektrónov sa mení nielen pri zmene výkonu výboja, ale aj pri zmene rýchlosti plynu. Táto hypotéza však potrebuje podrobnejšiu analýzu.



**Obr. 7:** Priebeh intenzity charakteristických čiar  $N_2$  a Ar ako funkcie výkonov dodaných do výboja.

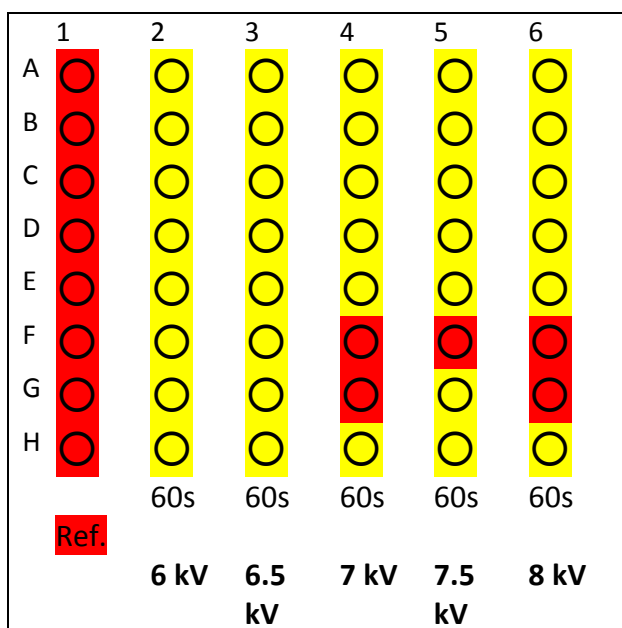


**Obr. 8:** Vplyv prietokovej rýchlosti nosného plynu na priebeh charakteristickej čiar  $N_2$  ako funkcia výkonu.

Na úplné pochopenie sledovaných radiatívnych procesov treba vykonať ďalšie spektroskopické experimenty (kvalitnejším spektrometrom lepšieho rozlíšenia) po celej dĺžke plazmového lúča, ale aj v *post-výbojovej* časti plazmy, kde predbežné testy rovnako ukázali prítomnosť excitovaných častíc. Tu radikály a metastability dusíka a argónu môžu mať dôležitú úlohu v plazmochemických procesoch [Stypczinska et al, 2010]. Kvôli slabému rozlíšeniu OES spektrometra sme nemohli vykonať kvalitnú kvantitatívnu i kvalitatívnu analýzu zloženia plazmy, preto uvedené grafy majú informačný charakter.

### 3.2 Dekontaminácia biofilmov

Adherované biofilmy boli vytvorené vo všetkých jamkách v rovnakých koncentráciách. Každý stĺpec reprezentuje jeden výkon výboja, čas ožiarenia bol 60 s vo všetkých prípadoch, teda pre každý výkon sme mali 8 vzoriek zo štatistických dôvodov. XTT testom zistené výsledky ukázali, že princípálne skoro všetky biofilmy boli inaktivované plazmovým jetom (Obr. 9), aj pri najnižších výkonoch plazmy.

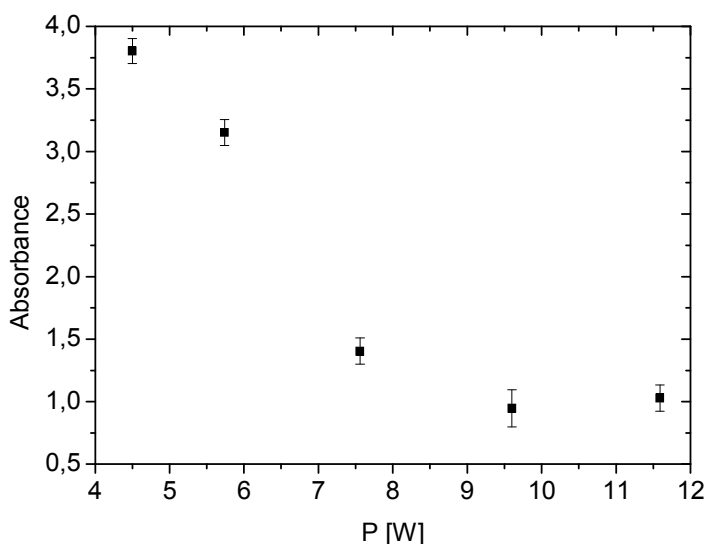


**Obr. 9:** Schéma opracovaných a následne analyzovaných biovrstiev umiestnených v jamkách. Prvý stĺpec reprezentuje referenčné živé bunky (červené), ostatné sú opracované vzorky pri rôznych výkonoch (mŕtve bunky sú označené žltou farbou).

Isté nejasnosti sa objavili len v nameraných absorbanciách opracovaných biofilmov, kde sa v štatistike ukázali veľké krajné chyby (Obr. 10).

Tie sú však spôsobené tým, že prakticky sa nám nepodarilo kultivovať všetky biovrstvy v rovnakých koncentráciách, čo sa ukázalo aj pri analýze

nedotknutých referenčných vzoriek. Najpravdepodobnejšia príčina je ale pokopená v rozmerových rozdieloch medzi plochami plazmového lúča a biofilmu. Kým plocha biovrstvy je okolo 20-25 mm<sup>2</sup>, prierez jetu nepresiahne hodnotu 1mm<sup>2</sup>. Tým pádom povrch kvasiniek nemohol byť opracovaný rovnomerne, lebo lúč bol nasmerovaný na strednú časť biofilmu. XTT testy ale ukázali, že bunky boli mŕtve, čo znamená, že pri dopade lúča na povrch dochádza k nerovnomernej priečnej difúzii na biovrstve. Tie chyby budú vylúčené v ďalších experimentoch, kde plocha biofilmov už bude porovnateľne malá s prierezom plazmového jetu. Na záver môžeme konštatovať, že rastúcim výkonom sa zvyšuje účinnosť dekontaminácie. Zaujímavé sú však výsledky získané pri najnižších výkonoch, kde dĺžka plazmového lúča síce nedosiahol povrch biofilmu, ale napriek tomu dochádzalo k účinnej dekontaminácii. Podrobné zloženie plazmy v tomto *post-výbojovej* časti bude analyzované v ďalších experimentoch.



**Obr. 10:** Stredné hodnoty absorbancií opracovaných vzoriek nameraných XTT testom.

### Záver

Dosiahnuté experimentálne výsledky ukázali, že povrchová aplikácia argónového plazmového pera generovaného pri atmosférickom tlaku je účinná na dekontamináciu kvasinkových biofilmov. Výboj sa javí ako nízkoteplotná plazma plná excitovaných častíc a radikálov, ktoré spôsobujú inaktiváciu kvasinkových buniek *Candida albicans*.

Je však potrebné sa venovať ďalším otázkam plazmovej dekontaminácie a optickej diagnostike plazmového pera aj v *post-výbojovej* časti.

## Pod'akovanie

Touto cestou sa chcem pod'akovať školiteľovi RNDr. Gabrielovi Horváthovi za jeho odborné vedenie, ďalej prof. Štefanovi Matejčíkovi za cenné rady a RNDr. Eve Machovej, PhD. za prípravu a analýzu biofilmov.

## Referencie

- [Altman, 1976] Altman FP, (1976). Tetrazolium salts and formazans. *Prog. Histochem. Cytochem.* 9, 1-56.
- [Fidel et al., 1999] Fidel P. L., Vasquez J. A., Sobel J. D (1999). *Candida glabrata*: Review of Epidemiology, Pathogenesis, and Clinical Disease with Comparison to *C. albicans*. *Clin. Microbiol. Rev.* 1:80-96.
- [Hawser, 1996] Hawser S, (1996). Adhesion of different *Candida* spp. to plastic: XTT formazan determination. *J. Med. Vet. Mycol.* 34, 407-410.
- [Kojic et al., 2004] Kojic E. M., Darouiche R. O. (2004). *Candida* infections of medical devices. *Clin. Microbiol. Rev.* 17:255-267.
- [Kuhn et al., 2003] Kuhn, DM et al., J (2003). *Clin. Microbiol.* 506-508.
- [Li et al., 2003] Li x, Yan Z, Xu J, (2003). Quantitative variation of biofilms among strains in natural populations of *Candida albicans*. *Microbiology* 149, 353-362)
- [Stypczyńska et al., 2010] Agnieszka Stypczyńska, Sylwia Ptasińska, Blagovest Bahnev, Mark Bowden, Nicholas St. J. Braithwaite, Nigel J. Mason (2010). The influence of amino acids on DNA damage induced by cold plasma radiation. *Chemical Physics Letters*, Volume 500, Issues 4-6, 19 p. 313-317.
- [Tumbarello et al., 2007] Tumbarello M., posteraro B., Treccarichi E. M., Fiori B., Rossi M., Porta R., Donati K., Sorda M., Spanu T., Fadda G. Cauda R., Sanguinetti M. (2007). Biofilm production by *Candida* species and inadequate antifungal therapy as predictors of mortality for patients with candidemia. *Journal of Clinical Microbiology*, p. 1843- 1850.

# Štúdium vplyvu vzorky na elektrické parametre plazmy generovanej pomocou DCSBD

Robert Sobota\*

Školiteľ: Anna Zahoranová‡

<sup>1</sup> Katedra experimentálnej fyziky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## 1 Abstrakt

Pri dosahovaní povrchových zmien materiálov sa ponúkajú rôzne metódy. Jednou z možností je využitie rôznych chemických postupov, ktoré sú ale drahé, náročné na čas a zvyšujú ekologickú záťaž prostredia. Európska únia sa postupne snaží obmedziť používanie chemických látok, ktoré by negatívne zasahovali do životného prostredia. Tu sa ukazuje použitie plazmy ako vhodného média na zmenu povrchových vlastností materiálov. Používa sa plazma pri nízkom tlaku, čo však vyžaduje náročné vákuové zariadenia, teda do úvahy treba opäť brať cenu a čas na dosahovanie vákua. Ďalšou možnosťou je využitie plazmy generovanej pri atmosférickom tlaku. V oboch prípadoch požadujeme, aby boli povrchové úpravy pomocou plazmy čo najefektívnejšie a vhodné aj na kontinuálne opracovanie materiálov priamo vo výrobných linkách. V našej predkladanej práci sme sa zamerali na štúdium elektrických parametrov tzv. difúzneho koplánarneho povrchového bariérového výboja - DCSBD (z angl. Diffuse Coplanar Surface Barrier Discharge). Bol overený vplyv vodivosti vzorky na plazmu DCSBD výboja, ako aj vplyv samotného vysokonapäťového (VN) zdroja na výkon dodávaný do plazmy.

**Kľúčové slová:** nízkoteplotná plazma, výboj pri atmosférickom tlaku, elektrické parametre DCSBD výboja

## 2 Úvod

Povrchová úprava materiálov je v súčasnosti bežne používaný spôsob zmeny ich povrchových vlastností na požadované. Zvyčajne ide o zvýšenie povrchovej energie, zlepšenie adhézie, alebo predúprava pred ďalšími postupmi, akými sú lepenie, farbenie

a pod. Vždy hľadáme najekonomickejšiu a najefektívnejšiu cestu. V súčasnosti patria medzi najviac používané materiály sklo, kremík, hliník, drevo. Tieto materiály sú využívané hlavne v mikroelektronike, optoelektronike, v leteckom priemysle, sklárstve, stavebníctve a pod. [1, 2, 3, 4, 5, 7]. Jednou z možností, ako modifikovať povrchové vlastnosti materiálov je pomocou nízkoteplotnej plazmy generovanej pri nízkom tlaku. Takéto „klasické“ riešenie je napríklad použitím tlecieho rf výboja pri nízkom tlaku, ktoré potrebujú zložité vákuové zariadenia. Tento spôsob nie je vždy najefektívnejšou cestou v zmysle zvýšených nárokov na čas a cenu vákuových zariadení a najmä – takéto plazmové systémy nemožno zaradiť priamo do výrobných linky. Ďalšia možnosť je použiť plazmu generovanú pri atmosférickom tlaku, akou je napríklad využitie, už spomínaného difúzneho koplánarneho povrchového bariérového výboja [3]. Pre dosiahnutie požadovanej zmeny vlastností je vždy potrebné určenie najefektívnejších parametrov. Súčasne je nutné overiť vplyv skúmaného materiálu na samotný výboj ako aj to, či má použitý zdroj vplyv na plazmu generovanú pomocou DCSBD.

## 3 Experimentálna časť

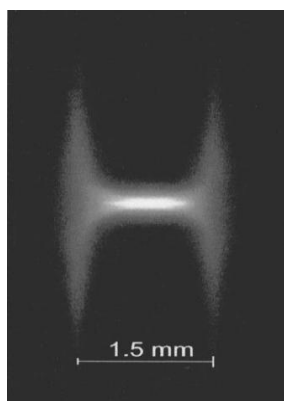
### 3.1 Zdroj nízkoteplotnej plazmy generovanej DCSBD

DCSBD je druh bariérového výboja, ktorý generuje nerovnovážnu nízkoteplotnú plazmu pri atmosférickom tlaku. Konfigurácia výboja pozostáva z niekoľkých paralelných elektród tvorených pásmi striebra, každej s opačnou polaritou vloženou do tenkej dielektrickej vrstvy. Dielektrická vrstva je tvorená keramikou  $Al_2O_3$ . Takáto keramika sa vyznačuje dobrými dielektrickými vlastnosťami, tepelnou vodivosťou a je odolná voči opotrebovaniu. Plazma horí nad

\* robert.sobota007@gmail.com

‡ zahoranova@fmph.uniba.sk

dielektrickou vrstvou a preto nedochádza ku korózii elektród. Výboj je napájaný zdrojmi vysokého napätia s amplitúdou 10 kV a s frekvenciou 16-18 kHz. DCSBD výboj generuje tenkú vrstvu makroskopicky difúzne homogénnej plazmy s veľkou hustotou výkonu pri atmosférickom tlaku. Plazma je tvorená veľkým množstvom mikrovýbojov (obr.1), ktoré sa rýchlo pohybujú na povrchu výbojky a pri zvyšovaní príkonu sa zvyšuje ich počet, až sa plazma stáva homogénna na celom povrchu. Bežne sa používa ako pracovný plyn samotný vzduch, ale takýto typ zdroja plazmy je schopný generovať plazmu napr. v dusíku, dokonca aj v elektronegatívnych plynach akým je kyslík [3]. Výboj je chladený chladiacim okruhom s olejom s veľkou dielektrickou pevnosťou.



Obr.1: Mikrovýboj DCSBD plazmy.

Plazma generovaná DCSBD plazmovým zdrojom bola úspešne otestovaná na aktiváciu a čistenie viacerých druhov povrchov, napríklad netkané textílie, sklo, drevo, hliník [3,4,5,6]. Používaná optimálna vzdialenosť opracovávaného materiálu od povrchu výbojky pri aktivácii je 0,3 - 0,5 mm. V prípade opracovania kovových alebo polovodičových materiálov bolo experimentálne zistené, že dochádza k nabíjaniu vzoriek v plazme a mení sa aj charakter horenia výboja v závislosti od umiestnenia materiálu. Preto je potrebné podrobnejšie preskúmať a stanoviť vplyv umiestnenia vodivej vzorky na elektrické charakteristiky výboja.

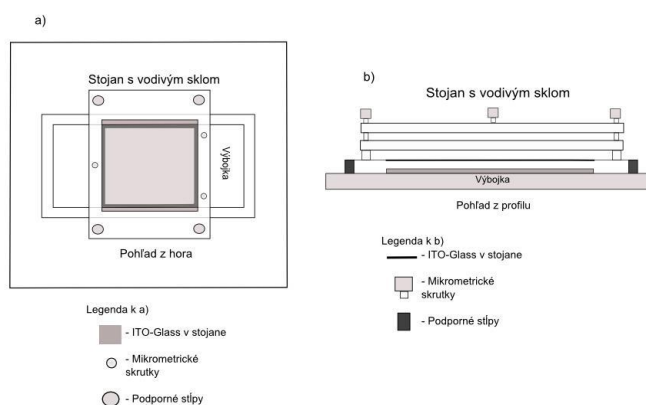
### 3.2 Experimentálna aparátúra a simulácia vodivého materiálu

Experimentálna aparátúra pozostáva z reaktora, kde je pevne umiestnená výbojka DCSBD a stojan s vodivým sklom. Vodivé sklo nám

simuluje opracovávaný vodivý materiál. Vodivé sklo je pokryté 120 nm hrubou vrstvou ITO - Indium Tin Oxide, čo je vrstva oxidu india ( $\text{In}_2\text{O}_3$ ) dopovaná cínom ( $\text{SnO}_2$ ), zvyčajne 90%  $\text{In}_2\text{O}_3$ , 10%  $\text{SnO}_2$  (od firmy VisionTek, Anglicko). Na povrchu skla je tenká ochranná vrstva  $\text{SiO}_2$ , ktorá zabraňuje, aby sa vodivá vrstva poškodzovala časticami plazmy.

Výhoda použitia vodivého skla spočíva v tom, že je priehľadné, a teda umožňuje sledovať vizuálne zmeny v horení plazmy. Vodivé sklo je umiestnené na stojane (obr. 2).

Pre chladiaci a izolačný systém sme použili olej (Midel 7131). Čerpanie chladiaceho média je zabezpečené dvoma čerpadlami pracujúcimi v podtlakovom a pretlakovom režime. Kvôli zabezpečeniu rovinnosti povrchu výbojky sme nastavili hodnoty 4,8 V pre napájanie elektrického čerpadla pracujúceho v pretlaku a 6 V na čerpadle pracujúcom v podtlaku [6].



Obr.2: Schéma stojana pre vodivé sklo.

### 3.3 Meranie elektrických vlastností DCSBD

Pomocou vyšetrenia elektrických charakteristík plazmy môžeme overiť zdroj plazmy z hľadiska efektívnosti využitia odoberaného príkonu a jeho premeny na výkon v plazme. Ak by vzorka našu plazmu neovplyvňovala, tak by sa nemenila ani hodnota dodávaného elektrického výkonu do plazmy v závislosti od odoberaného príkonu zo zdroja, prípadne ani zdroj nebude mať vplyv na výkon dodávaný do plazmy. Straty energie sú spôsobené rôznymi faktormi, ako napr. dôsledok meniaceho sa magnetického poľa v transformátore zdroja, tepelných strát a podobne. Skutočnú hodnotu výkonu zistíme ako strednú hodnotu výkonu podľa vzťahu

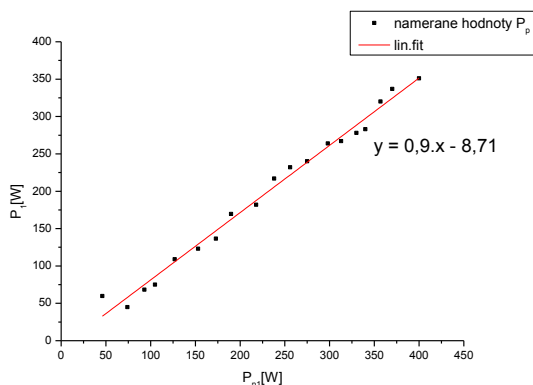


$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) \cdot dt, \quad (1.1)$$

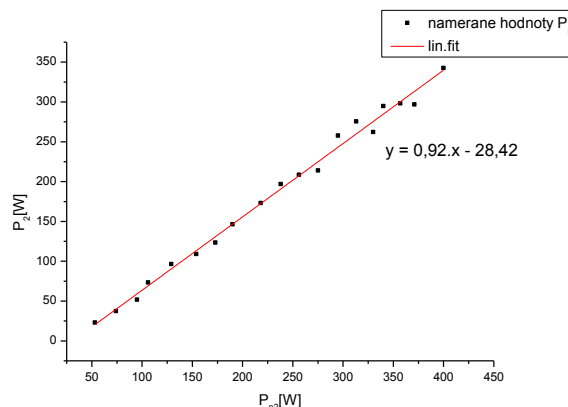
kde  $T$  je perióda,  $u(t)$  je okamžitá hodnota napätia a  $i(t)$  predstavuje hodnotu prúdu. Potrebujeme preto poznať hodnoty prúdu a napätia v každom čase. Na meranie napätia sme použili vysokonapäťové sondy (Tektronix P6015A) s deliacim pomerom 1:1000 a na meranie prúdu sme použili prúdovú sondu (Pearson Electronic, model 4100). Všetky hodnoty prúdov a napätí sledované sondami boli osciloskopicky zaznamenané digitálnym osciloskopom (Tektronix TDS 2024) so šírkou pásma do 200 MHz. Príkion odoberaný zo siete bol meraný pomocou wattmetra (Fktechnics).

### 3.4 Porovnanie rôznych typov zdrojov bez vzorky materiálu

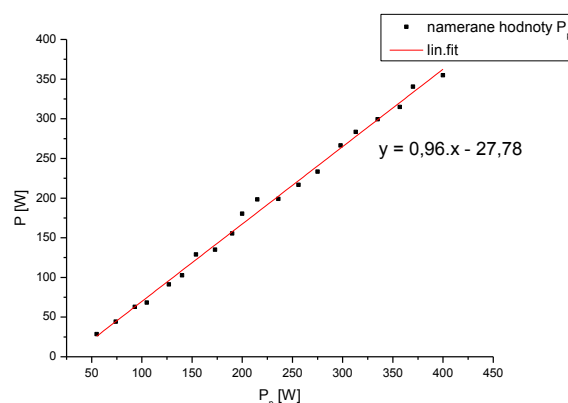
Pri vyšetovaní, či na plazmu pôsobí opracovávaný materiál umiestnený v priamom kontakte s plazmou, je potrebné najskôr overiť účinnosť samotného napájacieho VN zdroja. Použili sme dva zdroje firmy Lifetech a jeden od firmy Kamea. Pomocou napäťových sond a prúdovej sondy sme zosnívali priebehy napätia a prúdu v závislosti od dodávaného príkonu a vyhodnotili ich. Vyhodnotením meraní sa ukázalo, že závislosť výkonu od príkonu dodávaného do plazmy bola vo všetkých overovaných prípadoch rovnaká a teda môžeme tvrdiť, že samotný zdroj by nemal ovplyvňovať plazmu. Na obr. 3,4,5 sú znázornené kalibračné krivky pre jednotlivé VN zdroje napájania.



Obr.3: Kalibračná krivka pre prvý zdroj VN (Lifetech), ako aj lineárny fit cez experimentálne body.



Obr.4: Kalibračná krivka pre druhý zdroj VN (Lifetech), ako aj lineárny fit cez experimentálne body.



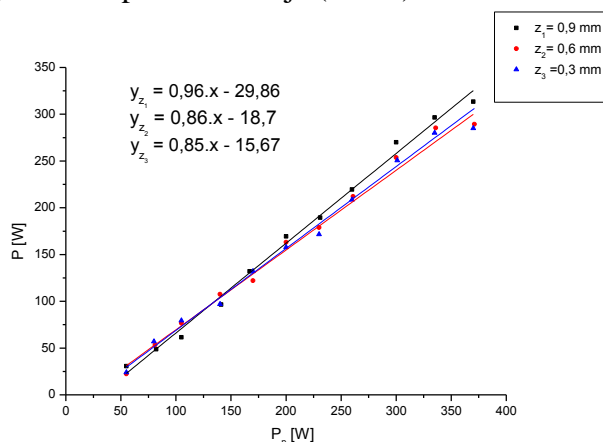
Obr.5: Kalibračná krivka pre druhý zdroj VN (Kamea) ako aj lineárny fit cez experimentálne body.

Hodnoty parametra  $b$  lineárneho fitu funkcií na obr. 3 - 5, ktoré sú v intervale 0,90 - 0,96 znamenajú, že účinnosť premeny elektrickej energie privádzanej zo zdroja do plazmy je vysoká. Ukazuje sa, že takýto druh výboja je vhodný na povrchové úpravy materiálov. Plazma horí v tenkej vrstve, čiže prevažná časť príkonu sa zbytočne nestráca, ale sa využije na zmenu povrchov.

### 3.5 Vplyv vodivej vzorky na horenie DCSBD výboja

V prípade, že v plazme opracovávame vodivý materiál, charakter horenia výboja sa mení v závislosti od vzdialenosti opracovávaného materiálu od povrchu výbojky. Experimentálne zariadenie dovoľovalo umiestniť vodivé sklo, predstavujúce opracovávaný materiál, v troch hodnotách výšok pre  $z = 0,3$  mm,  $0,6$  mm a  $0,9$  mm. Použili sme opäť dva rôzne zdroje (firmy

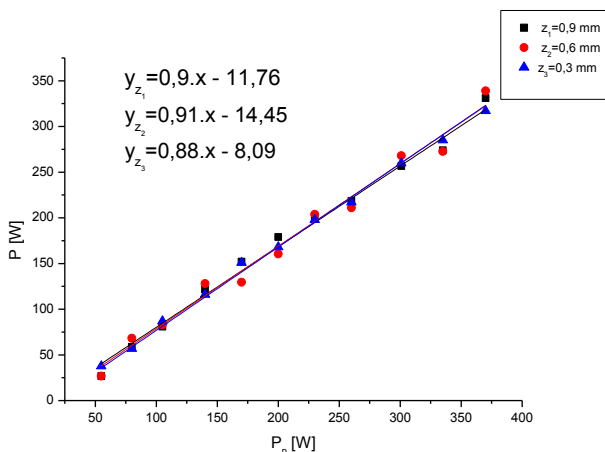
Liftech a firmy Kamea). Použitím rovnakého postupu ako v časti 3.4, sa pre jednotlivé nastavenia výšok určila závislosť dodávaného výkonu od príkonu zdroja (obr. 6).



Obr.6: Kalibračné krivky pre jednotlivé výšky  $z$  so zdrojom firmy Lifotech.

Z porovnania sklonu kalibračných kriviek bez vodivej vzorky (obr. 3) a so vzorkou (obr.6) vidno, že vo výške  $z = 0,9$  mm sa hodnota sklonu krivky blíži k hodnote bez vodivej vzorky opracovávaného materiálu. Pri polohách vodiveho skla vo výške  $z = 0,6$  mm a  $0,3$  mm nadobúda smernica kalibračnej krivky menšie hodnoty, teda časť príkonu sa spotrebuje pravdepodobne na rozvoj plazmy do objemu a taktiež aj na straty spôsobené ohrevom vodivej vzorky.

Pre druhý VN zdroj (Kamea) sme merania zopakovali a spracované závislosti sú vynesené na obr. 7.



Obr.7: Kalibračné krivky pre jednotlivé výšky  $z$  so zdrojom firmy Kamea.

Pri pochopení zmien v charaktere horenia výboja za prítomnosti vodivej vzorky pomôže aj vizualizácia a fotografie horenia výboja pri

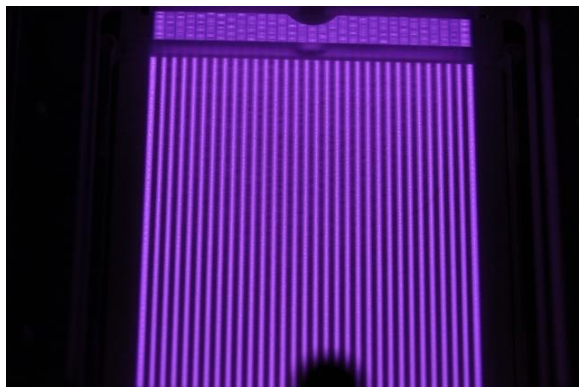
vodivom skle umiestnenom v rôznych výškach  $z$  nad povrchom výbojky (obr. 8 - 11).

Najviac je ovplyvnený charakter horenia výboja pri výške  $z = 0,3$  mm (obr.11), kedy sa výboj správa síce difúzne, ale hodnota dodávaného výkonu v závislosti od príkonu je najmenšia, avšak stále postačujúca z hľadiska efektívnosti využitia dodávanej energie (obr. 6). Pri výške  $z = 0,6$  mm výboj horí skôr medzi elektródami a vodivou vzorkou a má charakter tzv. objemového výboja. Dôkazom je obr. 9 a 10 pri výkone 250 W a 350 W, kde je jasne vidno „retiazkovú“ štruktúru výboja a filamentárnosť vo vertikálnom smere. Pri výške  $z = 0,9$  mm sa vodivá vzorka už len slabšie prejavuje na zmene charakteru horenia výboja a preto aj sklon kalibračnej krivky na obr. 6 je najväčší. Plazma je vodivým sklom ovplyvnená až do výšky  $z = 0,9$  mm avšak hodnota sklonu lineárneho fitu je prakticky rovnaká. Odchýlky od lineárnej závislosti sa prejavujú najviac pre najvyššie hodnoty príkonu, približne od hodnoty 350 W. Vzorka by mala byť umiestnená pri opracovaní v plazme v takej výške, aby na ňu pôsobila homogénna difúzna plazma. Ako vidno z obr. 11, práve výška 0,3 mm je najvhodnejšia na opracovanie materiálu. Pri umiestnení vzorky do vzdialenejšej polohy ako 0,3 mm už má výboj charakter objemového výboja, čo by mohlo poškodiť tenší materiál ako napríklad netkanú textíliu tzv. Pinholing efektom. Pri výške až 0,9 mm by sa plazma nedostala tak efektívne na materiál, kvôli veľkej vzdialenosti. Menšia vzdialenosť ako 0,3 mm by zase bola príliš malá a plazma by bola prakticky „zadusená“.

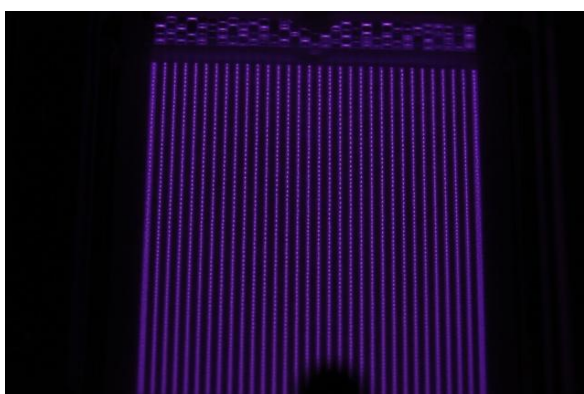
Možno preto povedať, že práve interval vzdialenosti 0,3 mm až 0,6 mm je najvhodnejší.



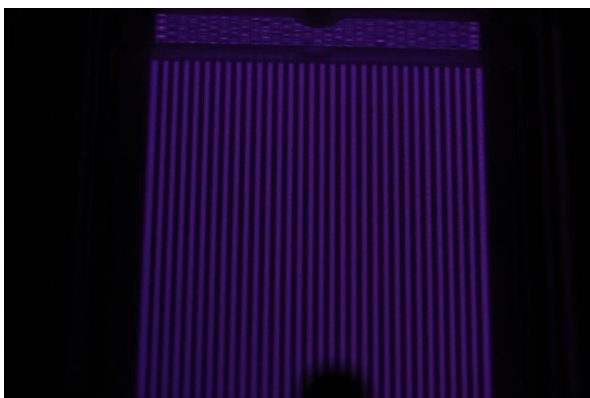
Obr.8: DCSBD výboj s vodivým sklom vo výške  $z = 0,9$  mm pri príkone zdroja 350W.



Obr.9: DCSBD výboj s vodivým sklom vo výške  $z = 0,6$  mm pri príkone zdroja 350W.



Obr.10: DCSBD výboj s vodivým sklom vo výške  $z = 0,6$  mm pri príkone zdroja 250W.



Obr.11: DCSBD výboj s vodivým sklom vo výške  $z = 0,3$  mm pri príkone zdroja 350W.

### 3.5 Priebehy napätia a prúdov

Pri výpočtoch výkonov podľa vzťahu (1.1) sme vychádzali z osciloskopických záznamov okamžitých hodnôt napätí a prúdov. Okamžitá hodnota prúdu je súčtom reálneho prúdu  $i_{real}(t)$ , ktorý tečie výbojkou a kapacitného prúdu v dôsledku dielektrických strát v DCSBD výbojke. Hodnotu reálneho prúdu môžeme dostať pomocou vzťahu

$$i_{real}(t) = i_{exp.}(t) - i_c(t), \quad (1.2)$$

keď za  $i_c$  dosadíme vzťah

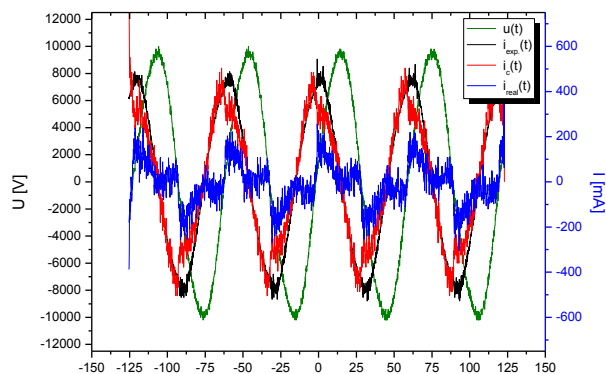
$$i_c(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}, \quad (1.3)$$

pre hodnoty reálneho prúd dostaneme

$$i_{real} = i_{exp.}(t) - C \cdot \frac{du(t)}{dt}, \quad (1.4)$$

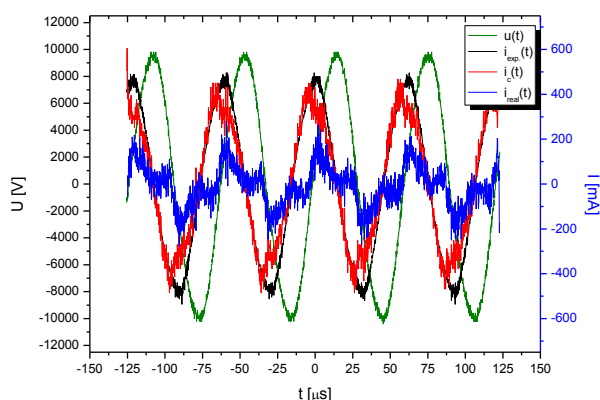
kde  $C$  je kapacita elektród,  $i_{exp.}(t)$  je nameraný okamžitý prúd a  $u(t)$  je okamžitá hodnota napätia.

Jednotlivé zložky sme vyniesli do grafu obr.12, kde sú uvedené okamžité hodnoty  $u(t)$ ,  $i_{exp.}(t)$  nameraného prúdu, kapacitného prúdu  $i_c(t)$  a reálneho prúdu  $i_{real}(t)$  pre výkon 350 W a pri výške  $z = 0,9$  mm so zdrojom firmy Kamea. Kapacita elektródového systému bola odmeraná multimetrom (METEX M-4660M) a jej hodnota je  $C = 378$  pF.

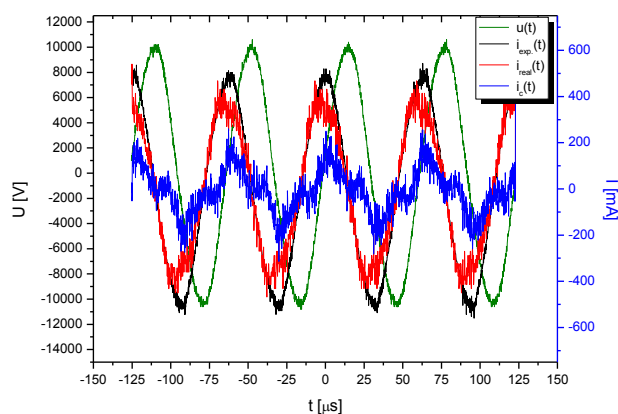


Obr.12: Záznamy hodnôt pre jednotlivé zložky prúdov a napätia pre  $z = 0,9$  mm pri 350 W pre zdroj firmy Kamea.

Analogicky boli vypočítané jednotlivé zložky prúdov a napätí aj pre výšku  $z = 0,6$  mm a  $z = 0,3$  mm pri 350W taktiež pre zdroj firmy Kamea(obr.13,14)



Obr.13: Záznamy hodnôt pre jednotlivé zložky prúdov a napätia pre  $z = 0,6$  mm pri 350 W pre zdroj firmy Kamea.



Obr.14: Záznamy hodnôt pre jednotlivé zložky prúdov a napätia pre  $z = 0,3$  mm pri 350W pre zdroj firmy Kamea.

## 4 Záver

V práci sme sa zamerali na štúdium vplyvu umiestnenia vodivej vzorky na elektrické parametre DCSBD výboja. Porovnali sme vplyv rôznych druhov zdrojov na elektrické vlastnosti horenia výboja, vplyv rôznych výšok opracovávaného vodivého materiálu na tieto charakteristiky a stanovenie najlepšej výšky opracovávaného. Ukázalo sa, že najvhodnejšia a najefektívnejšia hodnota výšky je interval 0,3 mm až 0,6 mm. Pri opracovaní vodivých vzoriek plazmou je vhodné dodržiavať tento interval umiestnenia vzorky, aby účinnosť opracovania bola optimálna.

## Referencie:

- [1] KOGELSCHATZ, U., ELIASSON, B., EGLI, W.: „From ozone generators to flat television screens: history and future potential of dielectric-barrier discharges“. Pure Appl. Chem., Vol. 71, No. 10 (1999), s. 1819 – 1828, (s. 1822).
- [2] WAGNER, E., BRANDENBURG, R., KOZLOV, K.V., SONNENFELD, A., MICHEL, P., BEHNKE, J.F.: „The barrier discharge: basic properties and applications to surface treatment“, Vacuum 71, Science direct, (2002), s.429.
- [3] ŠIMOR, M., RÁHEL, J., VOJTEK, P., ČERNÁK, M.: „Atmospheric-pressure diffuse coplanar surface discharge for surface treatments“, Applied physics letters, Vol. 81, No.15, (2002), s. 2016-2018.
- [4] HOMOLA, T.: „Nanomodifikácia povrchu skla nerovnovážnou plazmou generovanou pri atmosférickom tlaku“ [Diplomová práca], FMFI UK Bratislava 2008,
- [5] BÓNOVÁ, L., BUČEK, A., PLECENIK, T., ZAHORANOVÁ, A., ČERNÁK, M.: „Cleaning of aluminium surface using Diffuse Coplanar Surface Barrier Discharge“, Chem. Listy No. 102 (2008), s. 1452 -1454.
- [6] SOBOTA, R.: „Súčasný trendy využitia nízko-teplotnej plazmy generovanej pri atmosférickom tlaku“ [Bakalárska práca], FMFI Bratislava 2010, s. 30.
- [7] BUČEK, A., HOMOLA, T., ARANYSIOVÁ, M., VELIČ, D., PLECENIK, T. HAVEL, J., ŠTAHEL, P., ZAHORANOVÁ, A.: „Atmospheric pressure nonequilibrium plasma treatment of glass surface“, Chem. Listy, (2008), s. 1459–1462.

# Teoretické štúdium klastrov berýlia a vodíka: $Be_nH_1$

Ivan Sukuba\*

Školiteľ: Ján Urban†

Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

**Abstrakt:** Berýlium je jeden z trojice materiálov (Be, C a W) navrhnutých v projekte ITER ako *the first wall material*. Teoretické štúdium ich vzájomnej interakcie a interakcie s plazmou je cenným zdrojom informácií nielen v prípadoch, keď experimentálne údaje nie sú k dispozícii. V tejto práci sme metódou simulovaného žihania (SA) v Born-Oppenheimerovej molekulovej dynamike (BOMD) na úrovni *Density Functional Theory* skúmali štruktúry  $Be_nH_1$ ,  $n = 2 - 6$ , hľadali ich lokálne minimá a pre nájdené zoptimalizované štruktúry určili celkové účinné prierezy ionizácie elektrónom podľa Binary-Encounter-Bethe (BEB) modelu.

*Keľúčové slová:* berýlium, DFT, the first wall material, optimalizácia štruktúr, simulované žihanie, účinný prierez ionizácie nárazom elektrónu

## 1 Úvod

Štúdium klastrov berýlia a vodíka patrí medzi významné problémy v oblasti *Plasma-wall interakcií*, keďže berýlium sa použije v rámci projektu ITER ako ochranný štít pre prednú stenu reaktora (spolu s wolfrámom a uhlíkom) chrániaci materiály pred účinkami plazmy, teda ich vzájomná interakcia bude dominovať povrchovým procesom. Tieto procesy sa vo veľkej miere skúmajú: študujú sa *ab initio* výpočtami geometrie malých klastrov Be aj W [Dobrodey et al., 2002, Zhanga et al., 2005, Yamaguchi and Murakami, 2005, Allouche, 2009], WC zlúčenin [Marinellia et al., 2007], najčastejšie DFT<sup>1</sup> metódou, použitím MD [Li et al., 2009], tiež adsorpcia vodíka, interakcia s plazmou, *sputtering*, správanie sa tenkých filmov W na C, Be na W a opačne, pod vplyvom plazmy či iných žiarení (deuterium,  $\alpha$ -častice...).

Berýlium je kov s atómovým číslom 4 a elektrónovou štruktúrou  $1s^22s^2$ , preto sa izolovaný správa ako atóm vzácneho plynu. Jeho fyzikálne a chemické

vlastnosti ako vysoká teplota topenia, malá poddajnosť, odolnosť voči korózii alebo nízka absorpcia  $\gamma$ -žiarenia, či nemagnetickosť sa vo veľkej miere využívajú v detektoroch, nukleárných a vesmírnych zariadeniach. Veľkou nevýhodou berýlia je jeho toxicita, ktorá obmedzuje jeho skúmanie. Experimentov je minimum, robí sa najmä Röntgenova difrakcia ([Smith and Johnson, 1988, Linsmeier et al., 2007]). Na druhej strane, teoretický prístup umožňuje bezbarierové štúdium berýlia. Využíva sa pritom aj molekulová dynamika na rôznych úrovňach (BO, Monte-Carlo a iné).

Cieľom tejto práce je nájsť optimálne štruktúry klastrov  $Be_nH_1$ ,  $n = 2 - 6$  a určiť pre ne celkový účinný prierez ionizácie nárazom elektrónu. Použili sme na to prostriedky programového balíčka TURBOMOLE a výsledky porovnali s referenčnou prácou [Mach et al., 2010], kde autori použili programový balíček GAUSSIAN, a ako veľmi vhodnú metódu určili optimalizáciu na MP2 úrovni s bázou 6-31++G(2df,2pd).

## 2 Metódy

### 2.1 Metodika

V tejto práci sme optimalizovali štruktúry klastrov  $Be_nH_1$ ,  $n = 2 - 6$ , využitím molekulovej dynamiky a simulovaného žihania na úrovni DFT. Vychádzali sme z nájdených optimálnych štruktúr z referenčnej práce [Mach et al., 2010]. Tieto štruktúry sme pripravili pre program TURBOMOLE. Následne sme ich optimalizovali simulovaným žiňaním (molekulová dynamika na úrovni DFT s algoritmom SA) s rôznymi parametrami. Pre každú štruktúru bolo urobených 30 optimalizácií. Štruktúry s najnižšou energiou sme následne geometricky zoptimalizovali DFT metódou, určili pre ne celkové účinné prierezy ionizácie nárazom elektrónom. Pre porovnanie výsledkov sme tiež v programe GAUSSIAN určili pre naše štruktúry celkové energie metódou z referenčnej práce.

\*ivan.sukuba@gmail.com

†urban@fmph.uniba.sk

<sup>1</sup>Slovenský názov tejto teórie je metóda funkcionálu hustoty, ale tu sa budeme držať anglického termínu, resp. označeni DFT.

## 2.2 Optimalizovanie

### 2.2.1 Density functional theory - DFT

DFT je metóda riešenia Schrödingerovej rovnice, ktorá sa používa pri štúdiu elektrónovej štruktúry mnohočasticových systémov. Využíva priamo merateľnú hustotu elektrónového náboja  $\rho(\mathbf{r})$ , ktorá je oveľa jednoduchšia ako vlnové funkcie pre daný systém. Celková energia  $\varepsilon$  je potom vyjadrená ako funkcionál tejto hustoty náboja:

$$E[\rho(\mathbf{r})] = \varepsilon \quad (1)$$

Základ teórie stojí na Hohenbergových-Kohnových teorémach [Hohenberg and Kohn, 1964], ktoré dokazujú, že vlastnosti základného stavu mnohočasticového systému s  $N$  elektrónmi a  $3N$  priestorovými súradnicami sú jednoznačne určené hustotou elektrónového náboja  $\rho(\mathbf{r})$  s tromi priestorovými súradnicami. Definujú funkcionál (2), ktorý správna hustota náboja minimalizuje.

$$E[\rho(\mathbf{r})] = \int V_{ext}(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})d\mathbf{r} + F[\rho(\mathbf{r})], \quad (2)$$

kde prvý člen predstavuje interakciu elektrónov s vonkajším potenciálom  $V_{ext}(\mathbf{r})$  (typicky je to Coulombovská interakcia s jadrami atómov),  $F[\rho(\mathbf{r})]$  je sumou kinetickej energie elektrónov a príspevkov od interakcie medzi elektrónmi.

Túto úlohu dovoľujú riešiť Kohnove-Shamove rovnice (7) s podmienkou (8) [Kohn and Sham, 1965], ktoré nahrádzajú neriešiteľný problém mnohočasticového systému interagujúcich elektrónov vo vonkajšom poli systémom neinteragujúcich elektrónov (ako fermióny) s efektívnym potenciálom  $V_{eff}(\mathbf{r})$  (zahrňuje  $V_{ext}(\mathbf{r})$  a efekty Coulomboskej interakcie medzi elektrónmi), ktorý vytvára tú istú hustotu náboja ako daný systém interagujúcich elektrónov. Pre  $F[\rho(\mathbf{r})]$  Kohn a Sham navrhli tento tvar:

$$F[\rho(\mathbf{r})] = E_{KIN}[\rho(\mathbf{r})] + E_H[\rho(\mathbf{r})] + E_{XC}[\rho(\mathbf{r})], \quad (3)$$

kde

$$E_{KIN}[\rho(\mathbf{r})] = \sum_{i=1}^N \int d\mathbf{r} \phi_i^*(\mathbf{r}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \phi_i(\mathbf{r}) \quad (4)$$

je kinetická energia systému neinteragujúcich elektrónov,

$$E_H[\rho(\mathbf{r})] = \frac{e^2}{2} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \frac{\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad (5)$$

je Coulombovská energia medzi elektrónmi (Hartreeho energia) a  $E_{XC}$  je príspevok od výmenno-korelačnej energie (tiež obsahuje aj rozdiel medzi skutočnou kinetickou energiou elektrónov a  $E_{KIN}$ ). Tiež je to jediná neznáma časť v tejto teórii. Potom z (2, 3) dostávame pre efektívny potenciál

$$V_{eff}(\mathbf{r}) = V_{ext}(\mathbf{r}) + e^2 \int d\mathbf{r}_2 \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{\partial E_{XC}[\rho(\mathbf{r})]}{\partial \rho(\mathbf{r})} \quad (6)$$

Konečne, Kohnova-Shamova vlnová funkcia je potom jediný Slaterov determinant konštruovaný zo sady orbitálov  $\phi_i$  s najnižšími energiami (zodpovedajúce riešenia (7)).

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{eff} \right) \phi_i(\mathbf{r}) = \varepsilon_i \phi_i(\mathbf{r}) \quad (7)$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N |\phi_i(\mathbf{r})|^2 \quad (8)$$

Keďže  $E_H$  a  $E_{XC}$  závisia od  $\rho(\mathbf{r})$ , ktorá závisí od  $\phi_i$ , tento problém sa rieši iteratívne: navrhne sa počiatočná hustota náboja, určí sa efektívny potenciál, a rieši sa (7) pre orbitály. Z nich sa určí presnejšia hustota náboja. Tento cyklus sa opakuje pokiaľ sa nedosiahne konvergencia.

Presnosť DFT závisí od výberu vhodného funkcionálu pre  $E_{XC}$ . Najjednoduchší je LDA - *local density approximation* - priblíženie elektrónového plynu, používajú sa aj hybridné ako B3LYP, ktorý kombinuje energiu z Beckeho funkcionálu s energiou z Hartree-Fockovej teórie [Becke, 1993].

### 2.2.2 Molekulová dynamika a simulované žihanie

Molekulová dynamika (MD) je počítačová simulácia pohybu, časového vývoja systému častíc, numerickým riešením pohybových rovníc. Dôležitými pojmami sú Newtonova dynamika, Ergodická hypotéza, potenciál (tiež aj forcie-field), podľa ktorého častice interagujú, numerický algoritmus integrácie (napr. leap-frog alebo Verletov) a Born-Oppenheimerovo priblíženie. Ergodická hypotéza

hovorí, že stredné hodnoty parametrov nejakého procesu cez štatistický súbor a cez čas sú rovnaké. Podstata Born-Oppenheimerovho priblíženia pramení v tom, že elektróny sú  $\sim 2000$ -krát ľahšie ako nukleóny a oveľa rýchlejšie, čiže sa okamžite prispôbujú zmene polohy jadra; takto môžeme rozdeliť vlnovú funkciu systému na elektrónovú a jadrovú časť.

BO MD je *ab initio* prístup v MD ako získať potenciál pre pohybové rovnice. Spočíva v riešení bezčasovej Schrödingerovej rovnice v každom kroku simulácie na určenie elektrónovej štruktúry a súčasnom použití Newtonovej dynamiky pre vývoj systému (pohybu jadier). Trajektória i-tého atómu pohybujúceho sa v potenciálovom poli atómov sa vypočíta integrovaním pohybových rovníc:

$$m\ddot{r} = -\nabla_i \min_{\psi_0} \langle \psi_0 | \mathbf{H}_e | \psi_0 \rangle, \quad (9)$$

hodnoty  $\langle \psi_0 | \mathbf{H}_e | \psi_0 \rangle$  môžeme získať viacerými metódami ako Hartree-Fock, DFT a iné.

Teplota v MD simuláciách dovoľuje prekonávať energetické bariéry. Stav s energiou  $E$  (mikrokanonický súbor) môžeme nájsť s pravdepodobnosťou  $\exp(-E/kT)$  podľa Boltzmannovho rozdelenia. Ak je teplota dostatočne vysoká, systém dosiahne oblasť s vyššou energiou a je schopný prechádzať bariéry. Následným pomalým znižovaním teploty k nule je dobrá šanca, že systém skončí v optimálnom stave - lokálnom minime. Toto je základ pre simulované žhanie SA v MD, kde systém nahrejeme a stabilizujeme na určitej teplote, a následne pomaly, kontrolované chladíme. Teóriu okolo SA rozšírili S. Kirkpatrick [Kirkpatrick et al., 1983] a V. Černý [Černý, 1985].

### 2.2.3 Parametre optimalizácie

Náš set parametrov pre optimalizovanie pozostával z 5 prvkov: čas kroku MD  $\Delta t^2$ , počiatková teplota  $T$  a čas nahriatia  $t_T$ , doba relaxácie systému (čas začiatia SA)  $t_{rel}$  a kvocient  $q$  pre znižovanie teploty pri SA. V programe TURBOMOLE kvocient pre SA určuje ako sa zmení teplota systému po 100 krokoch. Hodnoty parametrov, ktoré sme používali sú v tab. č.1. Pre každý typ klastru sme uskutočnili 30 simulácií, s rôznymi kombináciami vstupných dát. Okrem toho sme používali obmedzenie pre pohyb atómov na

elipsoid s polomerom pre všetky osi 10 Å. Počet krokov jednej optimalizácie sme nastavili na 7000, počas ktorých sa systém priemerne dostal na teplotu 1 – 10 K.

Tabuľka 1: Parametre optimalizácie

$\Delta t [a.u.]$	$T [K]$	$t_T [a.u.]$	$t_{rel} [a.u.]$	$q$
40	500	40	800	0.905
80	1000	80	1200	0.915
10	1500	10	1600	0.955
	2000		2400	0.975

### 2.2.4 Báza a funkcionál

Naše výpočty sme robili v báze *def2-TZVP* [Weigend and Ahlrichs, 2005], ktorá je určená pre program TURBOMOLE. V našej referenčnej práci, a tiež aj pri našich porovnávacích výpočtoch v programe GAUSSIAN sme používali bázu *6-31++G(2df,2pd)* [Petersson et al., 1988]. Ako funkcionál pre DFT sme použili B3LYP [Becke, 1993].

### 2.2.5 Geometrická optimalizácia

Geometrickú optimalizáciu sme robili tiež v programe TURBOMOLE aj GAUSSIAN, DFT metódou. Získané geometrie sme použili na výpočet vstupných dát pre určenie účinných prierezov, z populačnej analýzy v programe GAUSSIAN z Hartree-Fockovej metódy.

## 2.3 Účinný prierez ionizácie nárazom elektrónu

### 2.3.1 The Binary-encounter-Bethe model - BEB

Zrážky elektrónov s atómami môžeme rozdeliť na dve skupiny: slabé (vzdialené) a silné (blízke). Mottova teória [Mott, 1930] opisuje silné zrážky, nie slabé. The Binary-encounter teória rozširuje Mottov účinný prierez tým, že terčovému elektrónu priradí rýchlosť alebo moment hybnosti [Vriens, 1966]. Na druhej strane, Bethe ukázal, že slabé zrážky nastávajú dipólovou interakciou medzi dopadajúcou časticou a terčovým elektrónom [Bethe, 1930]. The Binary-encounter-dipole (BED) model kombinuje obe tieto teórie a odvádza pomery pre silné a slabé zrážky (dipólová časť), pridáva však

<sup>2</sup>80 a.u. = 1.93504000000 fs

aj príspevky od výmeny elektrónov (výmenná časť) [Kim and Rudd, 1994]. BEB model vznikol zjednodušením BED modelu, pre prípady kedy nepoznáme diferenciálnu silu oscilátora, ktorú nahrádza jednoduchými funkciami [Kim and Rudd, 1997]. Výsledný tvar účinného prierezu nárazom elektrónu pre molekulový orbitál (BEB model) je:

$$\sigma_{BEB} = \frac{S}{t+u+1} \left[ \frac{\ln t}{2} \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right) + \left( 1 - \frac{1}{t} \right) - \frac{\ln t}{1+t} \right], \quad (10)$$

kde  $t = T/B$ ,  $u = U/B$ ,  $S = 4\pi a_0^2 N R^2 / B^2$ ,  $a_0 = 0.5292 \text{ \AA}$  je Bohrov polomer,  $R = 13.6057 \text{ eV}$  je Rydbergova konštanta.  $T$  je energia dopadajúcich elektrónov v eV,  $N$ ,  $B$  a  $U$  sú elektrónové obsadzovacie číslo, väzbová energia a stredná kinetická energia orbitálu v eV. Celkový účinný prierez  $\sigma_{TOT}$  určíme sčítaním cez všetky orbitály, ktoré prispievajú k ionizácii. Kim et al. navrhli aj výhodnú formu pre fitovanie celkového účinného prierezu s parametrami  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , vynechaním sumácie cez orbitály, použitím iba samotného  $t$ , definovanom najnižšou väzbovou energiou:

$$\sigma_{fit} = \frac{4\pi a_0^2}{t} \left[ a \ln t + b \left( 1 - \frac{1}{t} \right) + c \frac{\ln t}{1+t} \right], \quad (11)$$

Ak je táto forma nevyhovujúca, môže sa rozšíriť o členy typu  $d_n \frac{\ln t}{(1+t)^n}$ . V našej práci sme využili fit so štyrmi koeficientami, ktorý bol vo všeobecnosti presnejší. Táto teória sa úspešne používa na podobné systémy s výbornou zhodou s experimentálnymi údajmi [Kim and Rudd, 1997, Kim and Rudd, 1994]. Program na výpočet celkového účinného prierezu, ako aj na fitovanie závislosti (11) sme napísali v jazyku FORTRAN 90. Použili sme pritom knižnice na optimalizáciu vytvorené J. Burkardtom [Burkardt, ].

## 3 Výsledky a Diskusia

### 3.1 Geometrie klastrov

Zoptimalizovali sme celkovo 5 štruktúr. Určené celkové energie a stabilizačné energie <sup>3</sup> sú v nasledujúcich tabuľkách č. 2, 3, 4. Geometrie nájdených štruktúr sú v prílohe č.1.

<sup>3</sup>Stabilizačná energia  $\Delta E$  je daná rozdielom celkovej energie klastra  $E_{tot}$  a súčtu energií jednotlivých atómov v klastru  $E_s$ ,  $\Delta E = E_{tot} - E_s$ . Záporné hodnoty znamenajú to, že energia štruktúry je výhodnejšia ako sústava samostatných atómov.

Tabuľka 2: Celková energia zoptimalizovaných štruktúr v jednotkách Hartree ( $= 27.211 \text{ eV}$ ) pri metóde DFT v programe TURBOMOLE (báza def2-TZVP). Stabilizačné energie na atóm v eV.

	$E_{tot}$	$\Delta E/atom(\text{eV})$
$Be_2H_1$	-29.95669318	-1.286
$Be_3H_1$	-44.63696332	-1.115
$Be_4H_1$	-59.38286608	-1.370
$Be_5H_1$	-74.12047306	-1.502
$Be_6H_1$	-88.81820418	-1.442

Tabuľka 3: Celková energia zoptimalizovaných štruktúr v jednotkách Hartree ( $= 27.211 \text{ eV}$ ) pri metóde DFT v programe GAUSSIAN (báza 6-31++G(2df,2pd)). Stabilizačné energie na atóm v eV.

	$E_{tot}$	$\Delta E/atom(\text{eV})$
$Be_2H_1$	-29.98779050	-1.583
$Be_3H_1$	-44.68291200	-1.445
$Be_4H_1$	-59.44272350	-1.714
$Be_5H_1$	-74.19366590	-1.853
$Be_6H_1$	-88.9070918	-1.807

Tabuľka 4: Celková energia zoptimalizovaných referenčných štruktúr v jednotkách Hartree ( $= 27.211 \text{ eV}$ ) pri metóde DFT v programe GAUSSIAN (báza 6-31++G(2df,2pd)). Stabilizačné energie na atóm v eV.

	$E_{tot}$	$\Delta E/atom(\text{eV})$
$Be_2H_1$	-29.98779050	-1.583
$Be_3H_1$	-44.68291200	-1.445
$Be_4H_1$	-59.44272350	-1.714
$Be_5H_1$	-74.19366590	-1.853
$Be_6H_1$	-88.9070838	-1.807

Vidíme, že štruktúry, ktoré sme študovali a optimalizovali v programe TURBOMOLE metódou DFT a MD s optimalizačným algoritmom simulovaného žihania, sú zhodné s našimi referenčnými štruktúrami, ako to ukazujú hodnoty celkových energií pre klastre (porovnaj tabuľky č.3 a č.4). Keďže sme pre každý klastre robili len 30 optimalizácií, je možné, najmä pre väčšie klastre,  $n = 4 - 6$ , že ďalším optimalizovaním,



použitím iných parametrov, pridáme aj k iným lokálnym minimám. Obe spôsoby optimalizácie, ten použitý v tejto práci a ten z referenčnej práce, získali rovnaké štruktúry, a tiež obe ukazujú stabilitu klastrov so zvyšujúcim sa počtom atómov berýlia. Stabilizačné energie na atóm tiež vykazujú tendenciu ku konvergencii pre obe bázy, pričom báza 6-31++G(2df,2pd), ktorá je rozsiahlejšia ako def2-TZVP, dáva nižšie energie v porovnaní s tými, ktoré sme dosiahli v tejto práci.

### 3.2 Účinné prierezy nárazom elektrónu

Na základe vypočítaných údajov väzbových energií, kinetických energií orbitálov a obsadzovacích čísel pre každé lokálne minimum sme určili teoretické hodnoty celkového účinného prierezu  $\sigma_{TOT}$  podľa BEB modelu. Tieto prierezy sme potom fitovali vzťahom (11), hodnoty parametrov sú v Tab. č. 5.

Tabuľka 5: Koeficienty a, b, c, d získané fitovaním vypočítaných údajov pre celkový účinný prierez podľa BEB modelu.

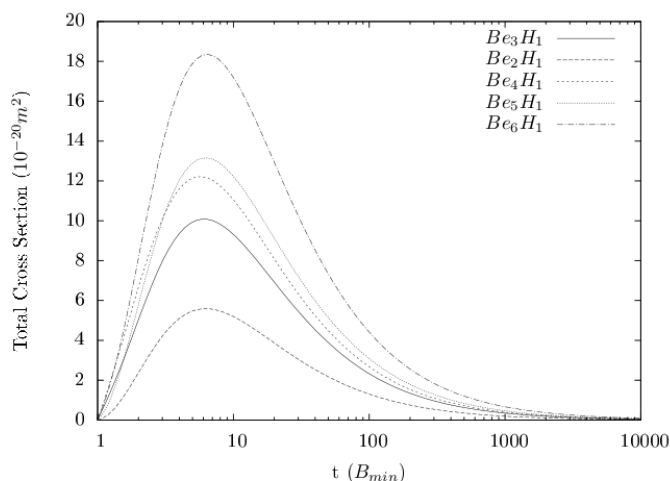
	a	b	c	d
$Be_2H_1$	7.4271	4.2409	-30.8236	15.5951
$Be_3H_1$	13.2211	7.8914	-56.1015	35.2048
$Be_4H_1$	14.8256	10.6368	-61.6062	31.4650
$Be_5H_1$	17.9399	8.3701	-70.9138	39.6368
$Be_6H_1$	25.8956	11.0483	-105.3840	71.2608

Tabuľka 6: Hodnoty minimálnych väzbových energií  $B_{min}$  v eV pre študované klastre

	$Be_2H_1$	$Be_3H_1$	$Be_4H_1$	$Be_5H_1$	$Be_6H_1$
$B_{min}$	7.406	6.465	7.201	7.056	6.273

Graficky znázornené celkové účinné prierezy nájdených lokálnych miním klastrov v závislosti od energie dopadajúceho elektrónu -  $t = T/B_{min}$  sú na Obr. č.1.

Celkové účinné prierezy ionizácie nárazom elektrónu nemôžeme porovnať s experimentálnymi



Obr. 1: Celkové účinné prierezy nárazom ionizácie - súbežný pohľad pre všetky klastre

údajmi, pretože neexistujú. Analýzou týchto údajov môžeme získať cenné teoretické vedomosti. Maximálne účinné prierezy ako vidíme z Obr. č.1 nastávajú pre elektróny s kinetickou energiou okolo 40 – 60 eV, pričom ich hodnoty majú tendenciu klesať zo zvyšujúcim sa počtom atómov berýlia v klastri.

## 4 Záver

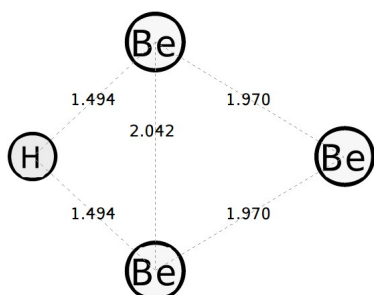
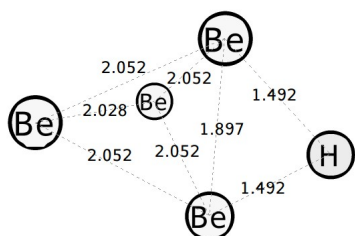
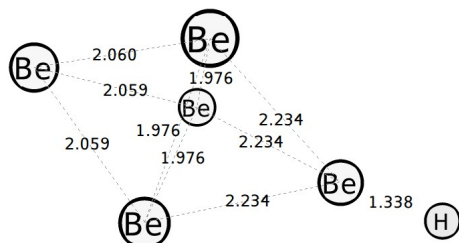
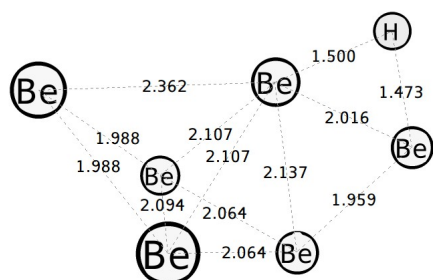
Použitím metód DFT a simulovaného žihania v BO MD sme hľadali lokálne minimá klastrov  $Be_nH_1$ ,  $n = 2 - 6$ , geometricky zoptimalizovali a porovnali z referenčnými štruktúrami. Nájdené štruktúry sú v prílohe č.1. Napriek tomu, že sme nenašli nové lokálne minimá, ukázali sme, že tento spôsob optimalizácie je pre malé klastre účinný, aj keď si nemôžeme byť istí, či sme hľadali dostatočne dlho. V tejto práci sme pre každý klastre robili iba 30 optimalizácií, čo nepostačuje na definitívnu odpoveď o existencii iných lokálnych miním.

Prínosom tejto práce je teoretický výpočet celkových účinných prierezov (Obr. č.1) ionizácie nárazom elektrónom pre nájdené minimá použitím Kimoovej teórie [Kim and Rudd, 1997], ktoré sa v dnešnej dobe ešte nedajú určiť experimentálne kvôli toxicite berýlia a ofitovanie získaných celkových prierezov, určením parametrov a, b, c, a d (Tab. č.5).

## Literatúra

- [tur, ] *TURBOMOLE: Program Package for ab initio Electronic Structure Calculations.*
- [Allouche, 2009] Allouche, A. (2009). Electronic aspects of beryllium–tungsten surface alloying, a density functional approach. *Chemical Physics Letters*, 470:119–122.
- [Becke, 1993] Becke, A. D. (1993). A new mixing of hartree–fock and local density functional theories. *J. Chem. Phys.*, 98:1372–1377.
- [Bethe, 1930] Bethe, H. (1930). Theory of the passage of fast corpuscular rays through matter. *Annalen der Physik*, 5:325–400.
- [Burkardt, ] Burkardt, J. The fortran 90 source code.
- [Dobrodey et al., 2002] Dobrodey, N. V., Streltsov, A. I., and Cederbaum, L. S. (2002). Strong interatomic effects accompanying core ionization of atomic clusters. *Phys. Rev. A*, 65:023203.
- [Hohenberg and Kohn, 1964] Hohenberg, P. and Kohn, W. (1964). Inhomogeneous electron gas. *Phys. Rev.*, 136:B864–B871.
- [Kim and Rudd, 1994] Kim, Y.-K. and Rudd, M. E. (1994). Binary-encounter-dipole model for electron-impact ionization. *Phys. Rev. A*, 50:3954–3967.
- [Kim and Rudd, 1997] Kim, Y.-K. and Rudd, M. E. (1997). Electron-impact total ionization cross sections of ch and  $c_2h_2$ . *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.*, 102:693–695.
- [Kirkpatrick et al., 1983] Kirkpatrick, S., Gelatt, Jr., C. D., and Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598):671–678.
- [Kohn and Sham, 1965] Kohn, W. and Sham, L. J. (1965). Self-consistent equations including exchange and correlation effects. *Phys. Rev.*, 140:A1133–A1138.
- [Li et al., 2009] Li, X.-C., Gao, F., and Lu, G.-H. (2009). Interactions of h with tungsten next term carbide surfaces: An ab initio study. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 267:3197–3199.
- [Linsmeier et al., 2007] Linsmeier, C., Ertla, K., Roth, J., Wiltner, A., Schmid, K., Kost, F., Bhattacharyya, S., Baldwin, M., and Doerner, R. (2007). Binary beryllium–tungsten mixed materials. *Journal of Nuclear Materials*, 363-365:1129–1137.
- [Mach et al., 2010] Mach, P., Urban, J., Probst, M., Horny, L., and Sukuba, I. (2010). Beryllium hydride clusters what theory can contribute. to appear.
- [Marinellia et al., 2007] Marinellia, F., Jelesab, A., and Allouche, A. (2007). Interactions of h with tungsten next term carbide surfaces: An ab initio study. *Surface Science*, 601:578–587.
- [Mott, 1930] Mott, N. (1930). *Proc. R. Soc.*, 126:259.
- [Petersson et al., 1988] Petersson, G. A., A. Bennett, T. G. Tensfeldt, M. A. A.-L. W. A. S., and Mantzaris, J. (1988). A complete basis set model chemistry. i. the total energies of closed-shell atoms and hydrides of the first-row atoms. *J. Chem. Phys.*, 89:2193–2218.
- [Smith and Johnson, 1988] Smith, G. S. and Johnson, Q. C. (1988). The crystal and molecular structure of beryllium hydride. *Solid State Communications*, 67:491–494.
- [Vriens, 1966] Vriens, L. (1966). Binary-encounter electron-atom collision theory. *Phys. Rev.*, 141:88–92.
- [Weigend and Ahlrichs, 2005] Weigend, F. and Ahlrichs, R. (2005). Balanced basis sets of split valence, triple zeta valence and quadruple zeta valence quality for h to rn: Design an assessment of accuracy. *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 7:3297.
- [Yamaguchi and Murakami, 2005] Yamaguchi, W. and Murakami, J. (2005). Geometries of small tungsten clusters. *Chemical Physics*, 316:45–52.
- [Zhanga et al., 2005] Zhanga, X., Dingb, X., Daib, B., and Yang, J. (2005). Density functional theory study of wn (n=2–4). *Journal of Molecular Structure: THEOCHEM*, 757:113–118.
- [Černý, 1985] Černý, V. (1985). Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 45(1):41–51.

## Príloha č.1

(a)  $Be_2H_1$ (b)  $Be_3H_1$ (c)  $Be_4H_1$ (d)  $Be_5H_1$ (e)  $Be_6H_1$ 

Obr. 2: Optimalizované štruktúry

	x	y	z
Be	0.0087571	0.1397456	0.0000000
Be	0.0116275	2.2793770	0.0000000
H	0.0134279	3.6198464	0.0000000

Tabuľka 7: Súradnice  $Be_2H_1$ 

	x	y	z
Be	-1.0211122	0.0000000	-0.5022855
Be	1.0211122	0.0000000	-0.5022855
Be	0.0000000	0.0000000	1.1827037
H	0.0000000	0.0000000	-1.5926739

Tabuľka 8: Súradnice  $Be_3H_1$ 

	x	y	z
Be	0.0000000	0.9485608	0.7038660
Be	-1.0137686	0.0000000	-0.8076427
Be	0.0000000	-0.9485608	0.7038660
Be	1.0137686	0.0000000	-0.8076427
H	0.0000000	0.0000000	1.8557215

Tabuľka 9: Súradnice  $Be_4H_1$ 

	x	y	z
Be	-0.1119497	-1.1322287	-0.1376076
Be	-1.8263277	-0.0001595	-0.0000489
Be	-0.1112002	0.4470502	1.0495364
Be	-0.1117823	0.6856125	-0.9115920
Be	1.8093003	-0.0001280	-0.0001647
H	3.1468499	-0.0013093	-0.0011009

Tabuľka 10: Súradnice  $Be_5H_1$ 

	x	y	z
Be	0.9616927	-0.2933226	0.0000000
Be	0.6029460	2.0417530	0.0000000
Be	-0.5196381	0.7787345	-1.0471613
Be	-0.5196381	0.7787345	1.0471613
Be	0.3691843	-2.2201446	0.0000000
Be	-1.0851472	-0.9071355	0.0000000
H	1.7041466	-1.5970241	0.0000000

Tabuľka 11: Súradnice  $Be_6H_1$

# Stanovenie stratového výkonu v dielektriku DBD výbojov

Zlata Tučeková\*

Školiteľ: Dušan Kováčik\*\*

Katedra experimentálnej fyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Článok pojednáva o štúdiu elektrických vlastností a výkone dodávanom do plazmy, generovanej pomocou povrchového bariérového výboja a difúzneho koplanárneho povrchového bariérového výboja, určením dielektrických strát s využitím fluoridu sírového. Motiváciou tohto úsilia je veľký potenciál využitia nízko-teplotnej plazmy generovanej pomocou bariérových výbojov v priemyselnej nanomodifikácii povrchov rôznych materiálov. Preto je potrebné poznať straty v takýchto dielektrických bariérových výbojoch a účinnosť zdrojov vysokého napätia.

Povrchový dielektrický bariérový výboj (SDBD – Surface Dielectric Barrier Discharge) a difúzny koplanárny povrchový bariérový výboj (DCSBD – Diffuse Coplanar Surface Barrier Discharge) patria k zdrojom silne neizotermickej plazmy, pričom DCSBD generuje makroskopicky homogénnu vrstvu plazmy s vynikajúcimi vlastnosťami, hlavne čo sa týka povrchových úprav rôznych materiálov ako sú napr. sklo, hliník, drevo, či rôzne druhy polymérov (netkané textilie, fólie, kordy). Výhodou takýchto plazmových zdrojov je, že sú schopné generovať plazmu s významným podielom difúznej plazmy bez použitia vákuových zariadení alebo drahých plynov.

**Kľúčové slová:** nízko-teplotná plazma, dielektrické bariérové výboje, povrchový výboj, koplanárny výboj, SF<sub>6</sub>

## 1 Úvod

V priemyselnej výrobe a úprave povrchov sa v súčasnosti stretávame s dôrazom na ekonomizáciu a ekologizáciu zaužívaných postupov.

Pri zavádzaní nových priemyselných zariadení je veľmi dôležitým parametrom funkčnosť, spoľahlivosť a účinnosť používaných zariadení.

Z dôvodu poznania účinnosti vysokonapäťových zdrojov, používaných na napájanie dielektrických bariérových výbojov, je potrebné preštudovať jednotlivé stratové faktory, ktoré sú prítomné pri prevádzke výbojov. Poznanie podielu strát na

príkone VN zdrojov a ich prípadné upravenie a optimalizácia, by mohli zjednodušiť a zvýšiť potenciál využitia rôznych typov dielektrických bariérových výbojov v priemyselnej úprave povrchov veľkého množstva rôznych druhov materiálov.

## 2 Teoretická časť

### 2.1 Fluorid sírový SF<sub>6</sub>

Fluorid sírový (v ďalšom SF<sub>6</sub>) je pri normálnych podmienkach netoxická plyná látka, ktorá je tvorená oktaédrickými molekulami [Černák, 2009]. Táto chemicky inertná látka s vysokou dielektrickou pevnosťou sa využíva vo vysokotlakových transformátoroch ako elektroizolačný plyn, pri leptaní polovodičov, metalurgii, pri výrobe niektorých plastov a pod.

SF<sub>6</sub> má vysoký účinný záchyt voľných elektrónov a patrí k plyným dielektrikám. Priepravné napätie v SF<sub>6</sub> je trojnásobne väčšie ako vo vzduchu pri normálnych podmienkach. Záchyt elektrónov prebieha veľmi efektívne aj pri izbovej teplote [Kúdelčík a Gutten, 2005].

### 2.2 Dielektrické bariérové výboje

Dielektrické bariérové výboje (DBD – Dielectric Barrier Discharges) skonštruoval Siemens už v roku 1857 [Siemens, 1857]. Tento výboj horel v prstencovej medzere medzi dvoma sústrednými sklenenými trubicami. Vo vzduchu, v ktorom výboj horel, sa molekuly kyslíka zmenili na ozón. Začiatkom 20. storočia sa začali využívať DBD na výrobu priemyselných ozonizátorov [Kogelschatz et al., 1999].

Pre DBD je typické rovinné, prípadne cylindrické usporiadanie rovnobežných elektród s dielektrickou vrstvou (zo skla, kremeňa, kremíka a pod.) umiestnenou na jednej alebo oboch elektródach, alebo v priestore medzi nimi. Takéto zariadenia sú napájané pulzným DC alebo AC zdrojom s frekvenciou 100 Hz - 100 kHz kvôli kapacitnému charakteru dielektrického materiálu.

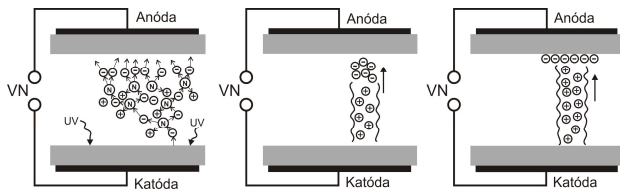
DBD patria k výbojom schopným generovať teplotne nerovnovážnu plazmu pri atmosférickom

\* tucekova.z@gmail.com

\*\*kovacic@fmph.uniba.sk

tlaku. Závisle od experimentálnych podmienok sa v DBD môžu objaviť rôzne typy výbojov.

V DBD dochádza k prerazu plynu skoro simultánne na niekoľkých miestach a mikrovýboje-filamenty vznikajú v niekoľkých krokoch (Obr. 1) [Kogelschatz and Salge, 2001].



Obr. 1: Formovanie filamentu vo výbojovom priestore DBD

V predpreraznej fáze sa na povrchu dielektrika akumulujú elektróny vytvorené UV fotoemisiou. Postupne sa tvorí silné lokálne elektrické pole. Po dosiahnutí kritickej hodnoty poľa nastáva preraz medzi elektródami. Preraznú fázu propagácie náboja vedie vlna ionizácie smerujúca k anóde. Pohybom náboja rastie koncentrácia elektrónov a tvoria sa páry ión-elektrón. Počas fázy presunu náboja vzniká výbojové svetlo a prúdové pulzy mikrovýbojov. Túto fázu charakterizuje akumulácia náboja na dielektrickej vrstve, čím sa kompenzuje externé elektrické pole. Pri zmene polarit napätia prispieva toto pole k elektrickému poľu. V prípade, že je súčet týchto elektrických polí väčší ako prerazné napätie, dochádza k inverznej obnove mikrovýbojov. Dielektrická bariéra limituje množstvo preneseného náboja a v dôsledku rozširovania sa náboja po povrchu dielektrika dochádza k slabnutiu elektrického poľa [Martišovič, 2004].

V DBD sa okrem mikrovýbojov objavuje pri určitých podmienkach difúzna plazma (pri nízkom tlaku, alebo v niektorých plynoch napr. He, Ne a N<sub>2</sub>). Dôležitými parametrami pre vznik difúzneho výboja sú efektívnosť preionizácie, Penningovskej ionizácie metastabilných častíc a primárna ionizácia v slabom elektrickom poli. Niektoré dielektriká sú schopné viazať na svoj povrch dostatočné množstvo náboja. Zmenou polarit elektrického poľa a prekročením prahovej hodnoty napätia, sa z povrchu dielektrika spontánne vylúčia nosiče náboja, ktoré iniciujú vznik difúzneho výboja [Tepper et al., 1998].

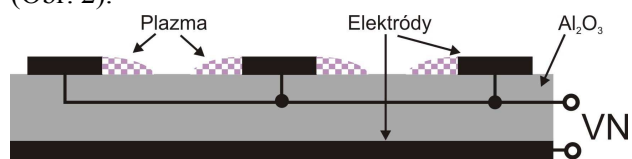
Pre priemyselné procesy homogénnej povrchovej modifikácie rôznych materiálov je žiadané generovanie difúznej plazmy. Vznik difúzneho výboja je podmienený prítomnosťou drahých plynov alebo nízkym tlakom. Potreba vákuových zariadení spojená so zaškoleným personálom zvyšuje náklady a komplikuje jeho priemyselné použitie.

V DBD sa pri filamentárnom režime výboja na povrchu elektród homogénne rozkladá veľké množstvo mikrovýbojov, ktoré sa obnovujú na rovnakom mieste. To je spôsobené pamäťovým

efektom v dôsledku akumulácie zvyškového náboja na povrchu dielektrickej vrstvy. Problém homogenizácie výboja sa dá riešiť naložením vysokého napájacieho napätia pri malej frekvencii, čo spôsobí náhodnú zmenu pozície mikrovýboja, pretože dochádza k homogénnej distribúcii zvyškového náboja na dielektriku [Tepper et al., 1998].

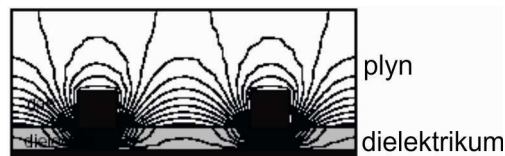
### SDBD - Povrchový dielektrický bariérový výboj

SDBD je generovaný pomocou hrebeňovej elektródy na jednej strane dielektrika (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) a rovinatej indukčnej elektródy, ktorá predstavuje zemiacu elektródu, na druhej strane dielektrika (Obr. 2).



Obr. 2: Konfigurácia elektródového systému umožňujúceho generovanie SDBD

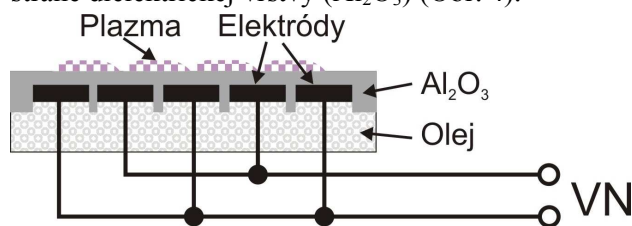
Výboj horí na povrchu dielektrika v podobe filamentov, ktoré horia v priestore medzi jednotlivými páskami hrebeňovej elektródy. K zapáleniu výboja dochádza v mieste stretu dielektrika, elektródy a pracovného plynu, ktoré sa označuje ako trojný bod (triple point). Toto miesto je charakteristické vysokou hodnotou elektrického poľa [Chung et al., 2005]. Zvyšovaním napätia sa zväčšuje plocha pokrytá plazmou.



Obr. 3: Elektrické pole formované elektródovým systémom SDBD

### DCSBD - Difúzny koplánrny povrchový bariérový výboj

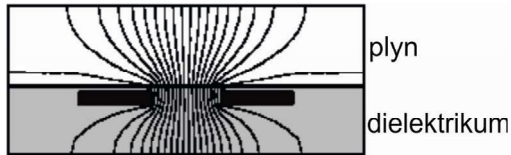
DCSBD je generovaný pomocou systému rovnobežných, pravidelne sa striedajúcich hrebeňových elektród umiestnených na jednej strane dielektrickej vrstvy (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) (Obr. 4).



Obr. 4: Konfigurácia elektródového systému umožňujúceho generovať DCSBD

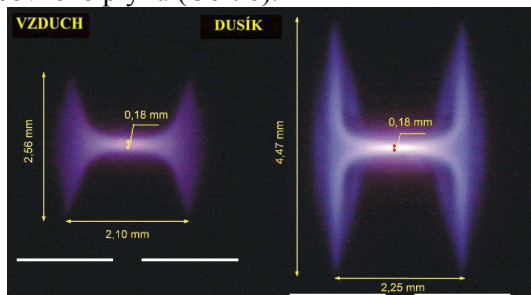
V dôsledku dielektrických strát a zahrievania keramiky horením výboja je potrebné tento systém

spojiť s chladiacim okruhom, v ktorom prúdi syntetický olej s vysokou dielektrickou pevnosťou v priamom kontakte s elektródami. Okrem chladenia chráni systém elektród pred prirazom medzi susednými elektródami a následným znefunkčnením DCSBD.



Obr. 5: Elektrické pole formované elektródovým systémom DCSBD

K zapáleniu výboja dochádza na povrchu dielektrika, pričom počet samostatných výbojov a rýchlosť zmeny ich umiestnenia na povrchu závisí od výkonu napájacieho zdroja. Mikrovýboje DCSBD v tvare písmena H pozostávajú zo streamerovskej plazmy spájajúcej elektródy a z difúznej plazmy kopírujúcej plochu nad jednotlivými elektródami. Veľkosť mikrovýboja a podiel difúznej plazmy závisí od použitého pracovného plynu (Obr. 6).



Obr. 6: Fotografia znázorňujúca mikrovýboj DCSBD (aj s polohou elektród) v rôznych plynoch pri atmosférickom tlaku [Černák et al., 2009]

DCSBD je schopný generovať makroskopicky homogénnu plazmu s vysokým podielom difúznej plazmy a s vysokou hodnotou plošnej a objemovej hustoty výkonu ( $5,2 \text{ W/cm}^2$ ;  $100 \text{ W/cm}^3$ ) pri atmosférickom tlaku [Kováčik, 2006]. Tieto jeho vlastnosti sú veľmi vhodné pre priemyselnú nanomodifikáciu povrchov rôznych materiálov. DCSBD bol úspešne použitý na aktiváciu dreva, netkaných textílií, skla, hliníka, polypropylénových fólií atď. [Bónová et al., 2008, Kubincová, 2007, Buček, 2007, Homola, 2007].

### 3 Experiment

Cieľom experimentálnej časti tejto práce bolo vyšetriť elektrické vlastnosti výbojov SDBD a DCSBD vo vzduchu a v atmosfére obsahujúcej plyn  $\text{SF}_6$ . Vysoký účinný záchyt  $\text{SF}_6$  voľných elektrónov a oddialenie zapálenia výboja umožnilo výpočet reálnych dielektrických strát pre jednotlivé typy výbojov.

### 3.1 Študované plazmové zdroje

Počas jednotlivých experimentálnych meraní sme na generáciu teplotne nerovnovážnej plazmy používali povrchový dielektrický bariérový výboj a difúzny koplánary povrchový bariérový výboj.

SDBD elektródový systém pozostával z 0,8 mm širokých pásov hrebeňovej striebornej elektródy s medzerou 4,2 mm medzi jednotlivými páskami. Hrúbka dielektrickej bariéry  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (96 %) bola 0,5 mm.

DCSBD elektródový systém pozostával z 1 mm širokých pásov hrebeňových strieborných elektród s medzerou 1 mm medzi elektródami. Hrúbka dielektrickej vrstvy  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (96 %) bola 0,5 mm.

Na napájanie bariérových výbojov počas experimentov sme používali VN zdroj *Plasma Power Supply PPS02*, Kamea s.r.o., s frekvenciou  $\sim 18 \text{ kHz}$  a s transformátorom zabezpečujúcim vysoké napätie s amplitúdou  $\sim 10 \text{ kV}$ .

### 3.2 Elektrické vlastnosti

Pri určovaní parametrov horiacej plazmy je veľmi dôležité poznať charakter efektivity napájania bariérových výbojov. Na to, aby sme mohli určiť účinnosť VN zdroja, je potrebné odfiltrovať z údajov o príkone VN zdroja všetky stratové faktory.

Počas napájania a horenia plazmy dochádzalo k stratám energie vo VN zdroji a v transformátore, k tepelným stratám v dôsledku horenia výboja a dielektrickým stratám v DBD.

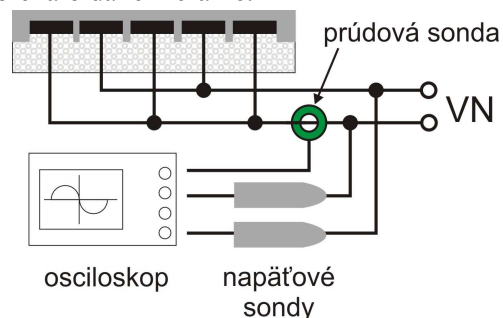
Strednú hodnotu výkonu dodávaného do výbojového systému, ktorý je súčinom zaznamenaného okamžitého prúdu  $I(t)$  a okamžitého napätia  $U(t)$ , sme vypočítali pomocou vzťahu:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T I(t)U(t)dt \quad (1),$$

kde  $T$  je perióda.

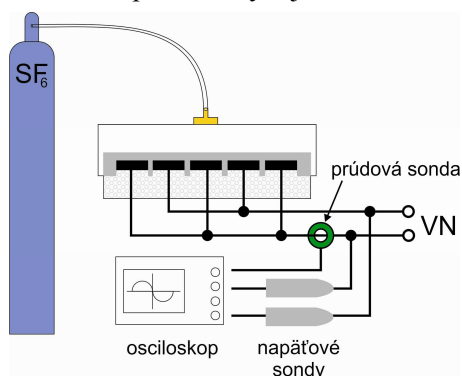
Pri porovnávaní elektrických vlastností SDBD a DCSBD je potrebné poznať okamžitý priebeh prúdu, napätia a hodnotu príkonu zdroja.

Meranie elektrických vlastností v prípade oboch dielektrických bariérových výbojov bolo uskutočnené v závislosti od atmosféry, v ktorej prebiehalo dané meranie.



Obr. 7: Schematické znázornenie zapojenia počas merania elektrických vlastností vo vzduchu

Počas merania prúdových a napät'ových charakteristík vo vzduchu (Obr. 7) sme rozsah príkonu zdroja udávaného wattmetrom volili v rozsahu minimálneho až po prevádzkový príkon napájacieho VN zdroja. V prípade oboch bariérových výbojov bola hodnota minimálneho príkonu určená zapálením výboja.



Obr. 8: Schematické znázornenie zapojenia počas merania elektrických vlastností v atmosfére s SF<sub>6</sub>

Po vyšetrení elektrických vlastností DBD výbojov vo vzduchu sme pripravili experimentálne podmienky na meranie elektrických vlastností v atmosfére obsahujúcej plyn SF<sub>6</sub> (Obr. 8). Tento plyn, využívaný ako plynné dielektrikum, zabráňoval zapáleniu výboja napriek narastaniu napätia VN zdroja. Zvýšenie hodnoty zápalného napätia DBD bolo spôsobené vysokým účinným záchytným voľných elektrónov plynu SF<sub>6</sub>.

Atmosféru obsahujúcu SF<sub>6</sub> sme zabezpečili priložením krytu s objemom 150 ml na povrch keramiky príslušného DBD výboja, do ktorého bol po dobu 15 s napúšťaný plyn s prietokom 10 l/min. Počas celého merania bol prietok SF<sub>6</sub> 1 l/min, kvôli zachovaniu stálych podmienok.

Keďže počas merania prúdu a napätia v atmosfére obsahujúcej plyn SF<sub>6</sub> dielektrický bariérový výboj nehorel, rozsah merania bol daný najnižším nastaviteľným príkonom až po príkon odpovedajúci maximálnej zmerateľnej amplitúde napätia, ktorá bola daná parametrami vysokonapät'ových sond. Nastaviteľnosť najnižšej hodnoty príkonu odpovedala prispôbeniu sa zdroja k rezonančnej frekvencii výbojového systému.

Namerané údaje o priebehu prúdu a napätia boli zaznamenávané digitálnym osciloskopom *TEKTRONIX TDS 2024* so šírkou pásma 200 MHz. Napätie na elektródach snímali vysokonapät'ové sondy *TEKTRONIX P6015A* s deliacim pomerom 1:1000 (Peak to peak ~ 20 kV) a priebeh prúdu bol snímaný sondou *PEARSON ELECTRONIC 4100*. Príkon VN zdroja bol meraný digitálnym *Wattmetrom FKtechnics*. Numerické a grafické spracovanie údajov bolo uskutočnené pomocou programu *OriginPro*.

### 3.3 Určenie dielektrických strát a reálneho výkonu

Počas jednotlivých meraní sme sledovali elektrické vlastnosti výbojov SDBD a DCSBD pri niekoľkých hodnotách príkonu napájacieho VN zdroja v atmosfére so vzduchom. Pomocou vzorca (1) sme vypočítali čiastočný výkon zdroja vo vzduchu  $P_V$ . Obdobne sme osciloskopické meranie uskutočnili v atmosfére s plynom SF<sub>6</sub>, pričom DBD výboj nehorel. Zo vzorca (1) sme následne vypočítali výkon zdroja  $P_{SF_6}$ .

Výkon  $P_V$  predstavoval časť príkonu VN zdroja využitého na horenie plazmy, v ktorom boli ďalej obsiahnuté dielektrické a tepelné straty. Výkon  $P_{SF_6}$  vypočítaný z hodnôt nehoriaceho výboja predstavoval hodnoty strát v dielektriku elektródového systému. Hodnotu reálneho výkonu  $P_R$  sme vypočítali pomocou vzťahu:

$$P_R = P_V(A_U) - P_{SF_6}(A_U) \quad (2),$$

kde  $A_U$  predstavuje hodnotu amplitúdy napätia.

Výber zodpovedajúcich si hodnôt  $P_V$  a  $P_{SF_6}$  bol podmienený porovnaním hodnôt amplitúdy napájacieho napätia. Nezapálenie výboja pri vysokých hodnotách napätia bolo dosiahnuté použitím atmosféry s plynom SF<sub>6</sub>. Vysoký elektrónový záchyt SF<sub>6</sub> zvýšil hodnotu zápalného napätia a umožnil zmeranie vo výpočte (2) porovnateľných hodnôt výkonu.

## 4 Výsledky a diskusia

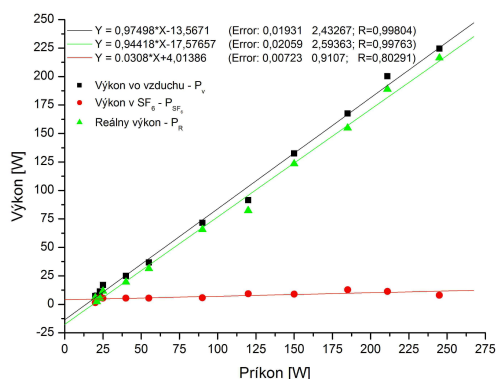
### 4.1 Určenie dielektrických strát v DBD

Analýzou elektrických vlastností SDBD a DCSBD vo vzduchu sme zistili rozdiel v účinnosti použitého zdroja pre obidva typy výbojov. Zmerali sme hodnoty okamžitého prúdu a napätia, a pomocou vzorca (1) sme vypočítali čiastočný výkon zdroja  $P_V$  dodávaný do plazmy v atmosfére so vzduchom.

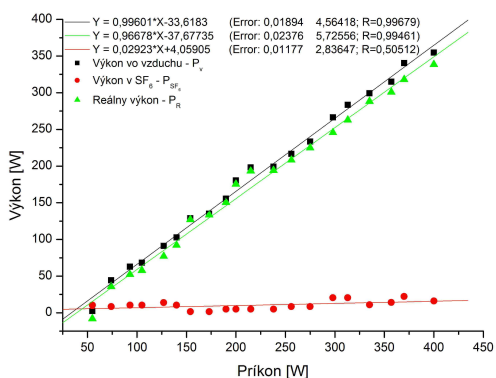
Po tomto meraní sme opätovne uskutočnili experiment v atmosfére obsahujúcej plyn SF<sub>6</sub>. Hodnoty, pri ktorých sme merali priebehy prúdu a napätia na elektródach SDBD a DCSBD, sme vybrali pri nehoriacom výboji tak, aby sme zmerali čiastočný výkon zdroja  $P_{SF_6}$  dodávaný do výbojového systému pred zapálením plazmy. Dôležitým faktorom pri tomto meraní bolo zohľadnenie výšky amplitúdy privádzaného napätia na elektrické kontakty systému. Limitnou hodnotou tohto merania bola pri SDBD hodnota zapálenia výboja v SF<sub>6</sub> a pri DCSBD amplitúda napätia o hodnote 10 kV. Tá bola stanovená z rozsahu napät'ových sond a prierazného napätia 15,6 kV pre syntetický chladiaci olej [Kováčik et al., 2010] používaný ako dielektrické médium. Z hodnôt zosnímaných osciloskopom sme vypočítali hodnoty

čiasťového výkonu  $P_{SF_6}$  zohľadňujúceho dielektrické straty vo výbojovom elemente podľa vzorca (1).

Hodnotu reálneho výkonu sme vypočítali ako rozdiel čiastkového výkonu v atmosfére so vzduchom pri horení výboja a čiastkového výkonu v atmosfére s plynom  $SF_6$  pri nehoriacom výboji podľa (2). Tento výpočet umožnil odčítanie dielektrických strát v systéme SDBD a DCSBD.



Obr. 9: Kalibračné krivky SDBD plazmového zdroja určujúce  $P_V$ ,  $P_{SF_6}$  a  $P_R$  v závislosti od príkonu zdroja



Obr. 10: Kalibračné krivky DCSBD plazmového zdroja určujúce  $P_V$ ,  $P_{SF_6}$  a  $P_R$  v závislosti od príkonu zdroja

Pre študovaný SDBD a DCSBD sme výslednú účinnosť zdroja, ako závislosť reálneho výkonu  $P_r$  neobsahujúceho hodnoty dielektrických strát od príkonu zdroja  $P_z$ , určili metódou najmenších štvorcov nasledovne:

1. SDBD  $P_r = 0,94418 \cdot P_z - 17,57657$
2. DCSBD  $P_r = 0,96678 \cdot P_z - 37,67736$

Tieto kalibračné krivky (Obr. 9 a 10) pre príslušné typy DBD popisujú podiel výkonu privádzaného na elektródy výbojového systému a príkonu zdroja. V danom výsledku boli odfiltrované dielektrické straty vznikajúce v dielektrickej bariére v dôsledku zmeny polarizácie napájaného napätia s vysokou frekvenciou ( $\sim 18$  kHz).

Z nameraných výsledkov vyplýva, že pre oba typy výbojov je podiel dielektrických strát približne rovnaký. Tento výsledok odpovedá tomu, že na

výrobu oboch elektródových systémov bol použitý rovnaký dielektrický materiál. V budúcnosti by bolo zaujímavé zmerať obdobnú závislosť pre rôzne typy geometrií elektródových systémov DCSBD a doplniť týmito poznatkami prácu [Tučeková, 2010].

Tieto hodnoty neudávajú podiel výkonu, ktorý je dodávaný priamo na horenie plazmy, pretože počas horenia výboja dochádza k zahrievaniu elektródového systému a dielektrika. Tento ohrev, ktorý bol v minulosti študovaný v [Tučeková, 2010], a teplo vznikajúce v DBD systéme, ktoré je odvádzané chladiacim olejom, predstavuje ďalšie straty, ktoré budú predmetom ďalšieho skúmania.

## Záver

Z experimentálne nameraných výsledkov možno zhodnotiť, že len malá časť (približne 3%) privádzaného príkonu zdroja sa v DBD spotrebuje na dielektrické straty v elektródovom systéme.

Pre každý typ geometrie DBD elektród a dielektrickej vrstvy je charakteristický iný stratový výkon, ktorý ovplyvňujú faktory:

- chladenie VN zdroja,
- magnetizačné straty v jadre transformátora,
- existencia dielektrických strát,
- tepelné straty vo výbojovom systéme s horiacim výbojom.

Týmto výpočtom boli zohľadnené straty v dielektriku. Straty spôsobené ohrevom sú naďalej obsiahnuté v hodnote výkonu, ktorý môžeme vypočítať pomocou stanovených kalibračných kriviek SDBD a DCSBD.

## References

- [Černák, 2009] Černák J.: Anorganická chémia I, Košice (2009), ISBN 978-80-7097-729-3.
- [Kúdelčík and Gutten, 2005] Kúdelčík J. and Gutten M.: *Analyse of SF<sub>6</sub> properties in encapsulated equipments and its optimal utilization with combination CO<sub>2</sub>*, Acta Electrotechnica et Informatica **2** (5) (2005).
- [Siemens, 1857] W. Siemens: Poggendorffs Ann. Phys. Chem. **102** (1857), 66-122.
- [Kogelschatz et al., 1999] Kogelschatz U., Eliasson B. and Egli W.: *From ozone generators to flat television screens: history and future potential of dielectric-barrier discharges*, Pure Appl. Chem. **71** (10) (1999) 1819-1828.
- [Kogelschatz and Salge, 2001] Kogelschatz U., Salge J.: *High-pressure plasmas: dielectricbarrier and corona discharges properties and technical applications*. In: Pfau S, Schmidt M, Hippler R, Schoenbach KH, editors. *Lectures on plasma physics and plasma technology*. Weinheim/Germany: Wiley Verlag Chemie, (2001), 305.



- [Martišovitš, 2004] Martišovitš V.: *Základy fyziky plazmy*, Bratislava (2004), ISBN 80-223-1983-X.
- [Tepper et al., 1998] Tepper J., Lindmayer M., Salge J.: *Proceedings of the Sixth International Symposium on High Pressure Low Temperature Plasma Chemistry*, HAKONE VI, Cork (Ireland), (1998), 123.
- [Chung et al., 2005] Chung M. S., Choi T. S., Yoon B.-G.: *Theoretical analysis of the field enhancement in a two-dimensional triple junction*. *Appl. Surf. Sci.* **251** (2005) 177-181.
- [Černák et al., 2009] Černák M., Černáková E., Hudec I., Kováčik D., Zahoranová A.: *Diffuse Coplanar Surface Barrier Discharge and its applications for in-line processing of low-added-value materials*, *The European Physical Journal - Applied Physics*, **47** (2) (2009), Art. No. 22806.
- [Kováčik, 2006] Kováčik D.: *Surface Modificatin of Polymer Materials by Atmospheric-Pressure Plasma Induced Grafting*, Dizertačná práca k ukončeniu doktorandského štúdia (2006) 125-136.
- [Bónová et al., 2008] Lucia Bónová, Andrej Buček, Tomáš Pleceník, Anna Zahoranová, Mirko Černák: *Cleaning of aluminium surface using diffuse coplanar surface barrier discharge*, *Chem. Listy* 102(2008),1452–145 .
- [Kubincová, 2007] Jana Kubincová: *Nanomodifikácia povrchu textílií účinkom plazmy generovanej za atmosférického tlaku*, Bakalárska práca (2007).
- [Buček, 2007] Andrej Buček: *Úprava povrchu kremíka a povrchu niektorých oxidov s využitím plazmy koplánárneho povrchového bariérového výboja*, Dizertačná práca, (2007).
- [Homola, 2007] Tomáš Homola: *Nanoštrukturalizácia SiO<sub>2</sub> povrchov nerovnovážnou plazmou generovanou pri atmosférickom tlaku*, Práca ŠVK (2007).
- [Kováčik et. al, 2010] Kováčik D., Tučeková Z., Kubincová J., Zahoranová A., Zahoran M., Černák M., Hnatko M.: *Study of Effects Related to the Continuous Operating Regime of DCSBD*, HAKONE XII. (2010).
- [Tučeková, 2010] Tučeková Z.: *Testovanie spoľahlivosti a životnosti DCSBD výboja v režime nepretržitej prevádzky*, Bakalárska práca, (2010).

# Kryogénne uhlíkové filtre na meranie supravodivých qubitov

Martin Žemlička

Školiteľ: Miroslav Grajcar

Katedra experimentálnej fyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Mikrovlnné filtre na báze vodivého prášku sa používajú pri citlivých meraniach supravodivých nanoštruktúr pri veľmi nízkych teplotách (niekoľko stupňov nad absolútnou nulou). Ich funkcia je hlavne filtrovať napájací jednosmerný prúd od vysokofrekvenčných šumov. Z konštrukčného hľadiska takýto filter tvorí vodič navinutý do cievky kompletne obalený stuhnutou zmesou epoxidového lepidla a vodivého prášku. K cievke sú paralelne na zemiacu časť obalu prikontaktované kondenzátory a na vstup a výstup filtra sú použité SMA konektory. Zapojenie cievky a kondenzátorov do tzv.  $\Pi$ -filtra s cievkou v sériovom smere tvorí dolnofrekvenčný priepust resp. hornofrekvenčnú zádrž. Vysoké frekvencie prechádzajúce vodičom indukujú na vodivých čiastočkách vírivé prúdy. V dôsledku skin efektu potom dochádza k disipácii energie, resp. útlmu týchto frekvencií. Výsledkom je kompaktný filter použiteľný pre merania citlivé na vysoké frekvencie (mikrovlny).

Cieľom tejto práce je experimentálne zistiť najvhodnejšiu konštrukciu práškového filtra pre merania pracujúce s tzv. SQUID-mi (supravodivé kvantové interferometre). Pri takýchto meraniach je dôležité, aby spomínaný útlm pre vysoké frekvencie bol na úrovni šumov meracích zariadení (noise floor  $\sim 100$  dB) aj pri nízkych teplotách. Tiež je dôležité v čo najväčšej miere eliminovať magnetické pole, ktoré takýto filter bude vyžarovať v dôsledku prechodu napájacieho jednosmerného prúdu. Tieto požiadavky sme sa pokúsili dosiahnuť výberom nemagnetického uhlíkového prášku a vhodným vinutím cievky. Na meranie frekvenčnej charakteristiky útlmu filtra sme používali sieťový analyzátor s rozsahom 300kHz – 3GHz.

**Kľúčové slová:** filter, uhlíkový prášok, cievka, magnetické pole, mikrovlny

## 1. Úvod

Od vynájdenia tranzistora v päťdesiatych rokoch dvadsiateho storočia nastal prudký vývoj výpočtovej techniky. Počítačové procesory naberali na výkone a ich veľkosť bola čoraz menšia a

kompaktnejšia. V roku 1965 spoluzakladateľ firmy Intel, Gordon E. Moore na základe empirických poznatkov vyhlásil, že maximum počtu tranzistorov v jednom integrovanom obvode sa bude zdvojnásobovať každé dva roky. Toto empirické pravidlo, známe tiež ako „Mooreov zákon“, bolo postupom času potvrdené a naozaj výkon počítačov narastal exponenciálnou rýchlosťou. Veľkosť počítačových čipov je neustále menšia, vďaka čomu sú zariadenia využívajúce výpočtovú techniku čoraz kompaktnšie a praktickejšie. Zmenšovanie rozmerov elektronických súčiastok má však aj svoje nevýhody. Jednotky klasických integrovaných obvodov využívajú princípy klasickej fyziky. Pri veľmi malých rozmeroch ( $\sim 10^{-9}$  m) ale prestáva platiť klasická fyzika a veľký význam začína nadobúdať kvantová mechanika. Klasické počítače, ktorých základnou jednotkou informácie je bit, už pri týchto rozmeroch nemôžu pracovať.

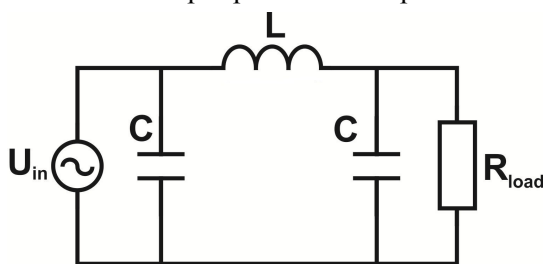
Aby sa ďalej mohol zvyšovať výkon počítačov, je potrebné, aby sa klasický bit nahradil tzv. kvantovým bitom (qubitom), ktorý môže byť v stave 0, 1 alebo v ich ľubovoľnej superpozícii. Zariadenie, ktoré by bolo schopné pracovať s integrovanými obvodmi s kvantovými bitmi sa nazýva kvantový počítač. Takéto počítače by dokázali riešiť úlohy nevyriešiteľné klasickými počítačmi, ako napríklad faktorizáciu veľkých čísel a pod. Na to je však potrebné fyzikálne realizovať dvojhladinový systém (qubit), pri ktorom bude možné vyčítať jeho stav. Jednou z najlepších možností sa javí realizácia supravodivého qubit, pracujúceho na báze toku magnetického poľa (superconducting flux qubit). Pri realizácií sa využíva supravodivý kvantový interferometer (SQUID), ktorého meranie je veľmi citlivé jednak na vysokofrekvenčné signály a jednak na nežiaduce zmeny magnetického poľa. Pri meraniach je teda potrebné použiť mikrovlnné filtre na báze vodivého prášku, ktoré sú schopné utlmiť tieto signály a ktorých analýze a realizácii sa budeme v tejto práci zaoberať. Tieto filtre obsahujú indukčnú cievku, schopnú svojim magnetickým poľom negatívne ovplyvniť meranie. Pri návrhu filtrov teda chceme dosiahnuť okrem čo najvyšších útlmov pre vysokofrekvenčný rozsah aj elimináciu

magnetického poľa vhodným vinutím cievky. Zostrojili sme preto filtre s rôznym vinutím vnútornej cievky a porovnali ich útlmové vlastnosti merané sieťovým analyzérrom. Z nameraných výsledkov sme dospeli k záveru, aká konštrukcia mikrovlnných filtrov je pre vysokofrekvenčné merania najvhodnejšia.

## 2. Teória

### 2.1. $\Pi$ -filter

Takýto frekvenčný filter využíva zapojenie cievok a kondenzátorov. Názov  $\Pi$ -filter je zavedený z dôvodu podoby tohto gréckeho písmena a geometrického tvaru zapojenia súčiastok (obr. 1). Od zapojenia cievok a kondenzátorov závisí, či frekvenčný filter bude v obvode plniť funkciu dolnofrekvenčného alebo hornofrekvenčného priepustu. Cievka v dôsledku svojej induktívnej reaktancie resp. indukcie, ktorej veľkosť je daná vzťahom  $Z_L = \omega L$ , odrazí vysoké frekvencie. Kapacitná reaktancia kondenzátora, resp. kapacitancia je daná vzťahom  $Z_C = 1/(\omega C)$ , čiže tento naopak prepustí vysoké frekvencie. V našom prípade chceme znížiť prechod vysokých frekvencií, preto pri konštrukcii  $\Pi$ -filtra zapojíme cievku sériovo a kondenzátory paralelne, aby vysoké frekvencie boli skratované na uzemnenie filtra. Výsledná schéma takto konštruovaného dolnofrekvenčného priepustu má tvar podľa obr. 1.



Obrázok 1: schéma zapojenia  $\Pi$ -filtra ( $U_{in}$  – vstupné napätie,  $L$  – indukčnosť,  $C$  – kapacita,  $R_{load}$  – výstup signálu)

Pre nás je toto zapojenie dôležité, pretože k cievke obalenej zmesou s uhlíkovým práškom pripojíme paralelne kondenzátory, čím dosiahneme kombináciu práškového vysokofrekvenčného filtra a LC dolnofrekvenčného priepustu. Každá reálna cievka vykazuje prechod pre vysoké frekvencie v dôsledku parazitnej kapacity medzi závitmi cievky. Riešenie tohto problému poskytuje čiastočne vodivý prášok v okolí cievky, ale hlavne rozšírenie závitov cievky. Je teda dôležité pre čo najlepšie útlmové charakteristiky filtra nájsť vhodnú geometriu vinutia cievky.

### 2.2. Disipácia energie

Zo základných poznatkov elektromagnetizmu vieme, že časovo premenlivé magnetické pole má za následok časovo premenlivý magnetický indukčný tok, a to následne indukciu elektrického prúdu. Ak primárnym obvodom so sériovo zapojenou cievkou preteká elektrický prúd, potom v sekundárnom obvode s cievkou bez zdroja bude tiecť prúd, dokým bude prúd v primárnom obvode časovo premenný. Prúd indukovaný v sekundárnom obvode je úmerný tzv. elektromotorickému napätiu

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \text{ kde } \Phi(t) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Tento jav nazývame Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie [1] a pre nás je jeho formulácia dôležitá, aby sme dôkladne pochopili, ako funguje útlm v našom práškovom filtri. Primárnym obvodom v tomto prípade je cievka v tvare solenoidu a sekundárnymi obvody sú jednotlivé čiastočky uhlíkového prášku v epoxidovej zmesi obklopujúcej cievku. Cieľom filtra je utlmiť vysoké frekvencie. Tie v našom filtri spôsobia elektromagnetické vlnenie, ktorého elektrická a magnetická zložka sa harmonicky menia s časom. Dostávame tak časovo premenné magnetické pole a v dôsledku elektromagnetickej indukcie sa na jednotlivých čiastočkách vodivého prášku indukujú vírivé prúdy. Disipáciu energie má za následok povrchový jav (skin efekt) [1] na týchto čiastočkách, ktorý si teraz bližšie objasníme.

Z jednoduchých energetických úvah môžeme očakávať, že elektromagnetická vlna šíriaca sa vo vodivom prostredí je v smere svojho šírenia silne tlmená v dôsledku premeny energie na teplo. Pod účinkom elektromagnetickej vlny budú v izotropnom vodivom prostredí tiecť elektrické prúdy, ktorých hustota  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  je daná ohmovým zákonom

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (4)$$

kde  $\sigma$  je vodivosť prostredia a  $\mathbf{E}$  je elektrické pole vyvolané indukovaným prúdom. Ak je prúd harmonický ( $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r})$ ), pre komplexnú amplitúdu prúdu, je harmonické aj elektrické pole ( $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ ) pre komplexnú amplitúdu intenzity, ktoré tak kopíruje prúdovú vlnu vo vodivom prostredí. Pre vlnu prúdovej hustoty tak môžeme napísať Helmholtzovu rovnicu, odvodenú z vlnovej rovnice elektromagnetickej vlny vo vodivom prostredí pre harmonické vlny

$$\Delta \mathbf{J}(\mathbf{r}) - j\omega \mu (\sigma + j\omega \epsilon) \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5)$$

kde  $\omega$  je frekvencia harmonickej vlny,  $\epsilon$  a  $\mu$  sú permitivita a permeabilita prostredia. Člen  $\epsilon\omega$  má význam vodivosti posuvného prúdu, ktorý môžeme pre veľmi vodivé prostredia ( $\sigma \gg \epsilon\omega$ ) zanedbať a

rovnica sa nám zjednoduší na nasledovný tvar

$$\Delta \mathbf{J}(\mathbf{r}) - j\omega\mu\sigma \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0 \quad (6)$$

Pre zjednodušenie budeme uvažovať, že prúdová hustota závisí iba od súradnice  $x$  a rovinu  $yz$  budeme považovať za hranicu vodivého prostredia, ktoré vyplnía polpriestor  $x \geq 0$ . Uvažujme tiež, že prúdová hustota má smer osi  $z$ , rovnica (6), tak prejde na tvar

$$\frac{d^2 \mathbf{J}_z(x)}{dx^2} - j\omega\mu\sigma \mathbf{J}_z(x) = 0 \quad (7)$$

Po použití substitúcie

$$j\omega\mu\sigma = \gamma^2 \quad (8)$$

dostaneme tvar

$$\frac{d^2 \mathbf{J}_z(x)}{dx^2} - \gamma^2 \mathbf{J}_z(x) = 0 \quad (9)$$

Dostali sme diferenciálnu rovnicu, podobnú rovnici vedenia tepla alebo rovnici difúzie. Riešenie preto musí mať, podľa našich očakávaní, exponenciálne klesajúci charakter. Všeobecné riešenie takejto rovnice je

$$\mathbf{J}_z(x) = \mathbf{J}_{z0} e^{-\gamma x} + \mathbf{J}'_{z0} e^{+\gamma x} \quad (10)$$

Ako sme spomenuli, celková prúdová hustota musí smerom dovnútra materiálu exponenciálne klesať, a teda integračná konštanta  $\mathbf{J}'_{z0} = 0$ . Riešenie tak nadobudne tvar

$$\mathbf{J}_z(x) = \mathbf{J}_{z0} e^{-\gamma x} \quad (11)$$

Komplexné číslo  $\gamma = \alpha + j\beta$  nazývame konštanta šírenia prúdovej hustoty vo vodivom prostredí. Reálna časť  $\alpha$  je konštanta útlmu, udávaná v jednotkách  $\text{m}^{-1}$  resp. dB/m a imaginárna časť  $\beta$  je fázová konštanta v jednotkách rad/m. Po využití rovnice (8) dostaneme

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{\gamma}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{\gamma}} = \\ &= \frac{1}{\delta} + \frac{j}{\delta} \quad (12) \end{aligned}$$

kde sme zaviedli novú veličinu

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{\gamma}{\omega\mu\sigma}} \quad (13)$$

udávanú v metroch a je to tzv. hĺbka prieniku alebo tiež skinová hĺbka. V tejto hĺbke poklesne prúdová hustota, a teda aj elektrické a magnetické pole na  $1/e$ -tinu povrchovej hodnoty. Tento jav nazývame **skin efekt**. Vidíme, že pri vysokých frekvenciách je skinová hĺbka pre vodivé materiály veľmi malá.

Využitím zavedených veličín môžeme pre

harmonický priebeh ( $\sim e^{j\omega t}$ ) rovnicu (11) prepísať na tvar

$$\mathbf{J}_z(x, t) = \mathbf{J}_{z0} e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})} \quad (14)$$

Skutočnú prúdovú hustotu tvorí reálna časť tohto výrazu

$$J_z(x, t) = J_{z0} e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta}) \quad (15)$$

Využitím Ohmovho zákona (4), z ktorého vyplýva, že vlna intenzity elektrického poľa kopíruje vlnu prúdovej hustoty, môžeme poslednú rovnicu (15) sformulovať pre harmonický priebeh elektrickej intenzity

$$E_z(x, t) = E_{z0} e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta}) \quad (16)$$

Komplexná impedancia je vo vodivom stratovom prostredí daná ako pomer pričných zložiek elektrickej a magnetickej intenzity. V našom prípade má elektrická intenzita smer osi  $z$  a magnetická kolmo na ňu smer osi  $y$ . Môžeme teda napísať

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (17)$$

kde  $\epsilon$  je komplexná permitivita stratového materiálu, ktorú pre veľmi vodivé prostredia ( $\sigma \gg \omega\epsilon$ ) môžeme definovať nasledovne

$$\epsilon = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \approx -j\frac{\sigma}{\omega} \quad (18)$$

Po dosadení tohto výrazu do rovnice pre impedanciu (17) dostávame

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \sqrt{j\frac{\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = (1+j) \frac{1}{\delta\sigma} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sigma\delta} e^{j\frac{\pi}{4}} = \mathbf{Z} e^{j\frac{\pi}{4}} \quad (19) \end{aligned}$$

kde sme využili vzťah (13) pre hĺbku prieniku a označili  $\mathbf{Z} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\delta} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}$  ako absolútnu hodnotu stratovej impedancie vo vodivom prostredí. Využitím vzťahov (19) a (17) rovnicu (16) prepíšeme pre intenzitu magnetického poľa

$$H_y(x, t) = \frac{E_{z0}}{\mathbf{Z}} e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}) \quad (20)$$

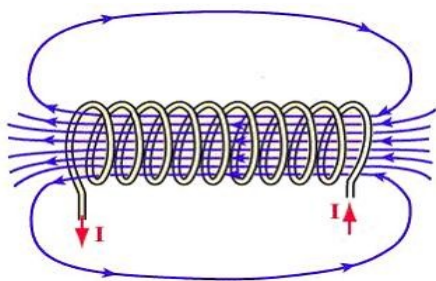
Z rovníc (16) a (20) vidíme, že elektromagnetická vlna je vo vodivom prostredí silne tlmená. Útlm reprezentuje práve impedancia vyjadrená vzťahom (19), ktorej absolútna hodnota je priamo úmerná frekvencii elektromagnetickej vlny. Útlm nastáva na

povrchu vodivého prostredia, preto je priamo úmerný efektívnej ploche vodiča.

Spojením poznatkov o povrchovom efekte a o elektromagnetickej indukcii si môžeme vytvoriť predstavu, ako funguje utlmovanie v našom filtri v dôsledku uhlíkového prášku. Čiastočky uhlíkového prášku, ktoré sú v zmesi s epoxidovým lepidlom, sú vzájomne izolované. V prípade uhlíkového prášku je to zabezpečené kvôli štruktúre grafitu a v prípade oceľového prášku [3] kvôli oxidačnej izolačnej vrstve, ktorá sa na jednotlivých čiastočkách vytvorí. V našom prípade používame uhlík pre jeho nemagnetické vlastnosti. Efektívna plocha čiastočiek uhlíkového prášku, obklopujúceho cievku nášho filtra, je tak veľmi veľká a dôsledkom toho je aj veľký útlm v dôsledku skin efektu na týchto čiastočkách.

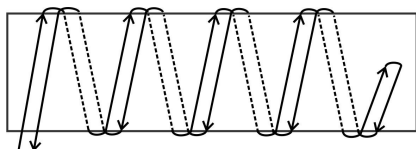
### 2.3. Magnetické pole solenoidu

Zo základných poznatkov elektromagnetizmu vieme, že indukčná cievka v tvare solenoidu, ktorou preteká jednosmerný prúd, vytvára magnetické pole vo svojom okolí a na osi solenoidu. Ak sú závitky cievky dostatočne nahusto pri sebe, je toto magnetické pole ekvivalentné magnetickému poľu budenému tyčovým magnetom. Má teda severný a južný pól a magnetické indukčné čiary podľa obr.2.



Obrázok 2: Magnetické pole budené indukčnou cievkou v tvare solenoidu, ktorou prechádza prúd  $I$  [2]

V experimentálnej fyzike však môže nastať situácia, kedy je potrebné vinutie vodiča, ktorým preteká jednosmerný prúd v tvare solenoidu, ale magnetické pole je nežiadúce. Tento problém sa dá jednoducho vyriešiť tzv. bifilárnym vinutím cievky. Takáto cievka pozostáva z dvoch vinutí prekrytých cez seba, ktoré sú na jednom konci spojené a preteká nimi teda ten istý prúd, avšak opačného smeru.



Obrázok 3: Bifilárne vinutá cievka

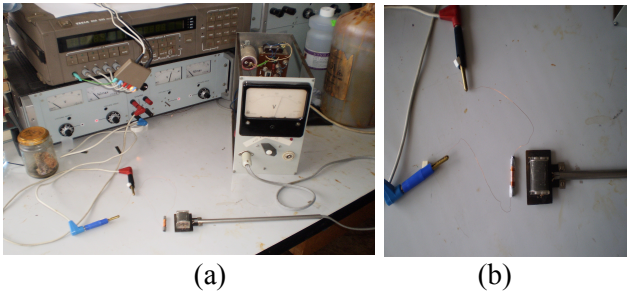
Vstup a výstup tejto cievky je na jednom konci vinutia a prúdy pretekajúce dvomi susednými

závitmi sú rovnako veľké a opačného smeru. Rovnako veľké a opačného smeru sú aj magnetické polia indukované týmto prúdom. Takéto polia sa vzájomne vyrušia a výsledkom je vinutie, ktoré vo svojom okolí nevytvára magnetické pole.

Nami navrhované mikrovlnné filtre sa budú používať na merania supravodivých qubitov, ktoré sú veľmi citlivé na zmeny magnetického poľa. Potrebujeme teda v čo najväčšej miere eliminovať magnetické pole vytvárané prechodom napájacieho jednosmerného prúdu cievkou v našom filtri. Z hľadiska redukcie magnetického poľa by bolo vhodné spomenuté bifilárne vinutie. Má to však jeden problém. Keďže vstup a výstup bifilárneho vinutia sú tesne pri sebe, je medzi nimi nezanedbateľná kapacita ( $C \sim 1/d$ , kde  $d$  je vzdialenosť vodičov). Pre vysoké frekvencie tak môže nastať kapacitný prechod časti signálu priamo medzi vstupom a výstupom vinutia (impedancia v dôsledku kapacity je  $ZC=1/(\omega C)$ ), čím sa zníži útlm v dôsledku prechodu signálu cievkou v práškovom prostredí. Je preto potrebné nájsť inú alternatívu vinutia cievky s redukovaným magnetickým poľom. Budeme sa však inšpirovať redukciou magnetického poľa v dôsledku protichodných elektrických prúdov v bifilárnom vinutí.

Jednou z vhodných alternatív sa zdá byť vinutie, ktoré má v polovici cievky zmenený smer na opačný. Dostaneme tak dve sériovo spojené cievky s opačným vinutím, a teda aj s rovnakým magnetickým poľom opačného smeru. Magnetické polia cievok sa budú vzájomne rušiť a celkové magnetické pole bude so vzdialenosťou klesať oveľa rýchlejšie (dipólový charakter cievky sa zmení na quadropólový, pri ktorom je pokles magnetického poľa so vzdialenosťou výrazne väčší).

Naše úvahy sme potvrdili experimentálne. Navinuli sme dve cievky s rovnakým počtom závitov, pričom pri jednej z nich sme použili štandardné vinutie a pri druhej vinutie so zmenou smeru v polovici cievky. Použili sme medený drôt s hrúbkou 0,2 mm a jadro cievky s priemerom 4 mm. Tieto cievky sme potom napájali jednosmerným prúdom  $I=250mA$  a zmerali ich magnetické polia vysokocitlivým meracím zariadením.



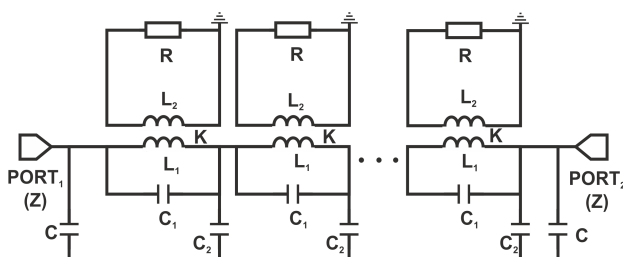
Obrázok 4: (a) Aparatúra na meranie mag. poľa, (b) Sonda meracieho zariadenia

Výsledky meraní ukázali, že magnetické pole cievky s otočeným vinutím v polovici kleslo na 20-25%. Indukcia magnetického poľa v kolmom smere vo vzdialenosti 2 cm (obr. 4b) bola pri tejto cievke 150  $\mu\text{T}$  oproti 700  $\mu\text{T}$ , nameranej v rovnakej vzdialenosti pre štandardne vinutú cievku. Vo vzdialenosti 1 cm v smere rovnobežnom s osou solenoidu sme namerali indukciu 350  $\mu\text{T}$  pre cievku s otočeným vinutím a 1400  $\mu\text{T}$  pre štandardnú cievku.

Výsledky ukázali, že tento typ vinutia výrazne zníži magnetické pole. Z jednoduchých úvah môžeme predpokladať, že v prípade rozdelenia cievky na štyri časti so striedajúcim vinutím by magnetické pole mohlo klesnúť až na 4-5% (quadrupólový charakter by sa nahradil oktapólovým). Pri výrobe našich filtrov použijeme vinutie so zmenou smeru v polovici. Ak sa ukáže, že takéto vinutie nemá vplyv na útlmové charakteristiky filtra, budeme uvažovať o zvýšení počtu sekcií so striedajúcim vinutím, aby redukcia magnetického poľa bola čo najvýraznejšia.

## 2.4. Modelová schéma filtra

Teraz sa pokúsime nájsť schému, ktorá najlepšie modeluje náš filter. Musíme uvážiť všetky parazitné parametre filtra, ako je medzizávitová kapacita a kapacita na uzemnený obal a tiež samotný útlm vysokých frekvencií. Vplyv vírivých prúdov budeme modelovať ideálnym transformátorom. Odporom v sekundárnom vinutí môžeme meniť vplyv skin efektu.



Obrázok 5: Schéma filtra zahrňujúca jeho podstatné parametre

Na obr. 5 je výsledná modelová schéma. Jeden periodicky sa opakujúci článok modeluje jeden

závit cievky v tvare solenoidu. Primárna indukčnosť transformátora  $L_1$  predstavuje indukčnosť jedného závit,  $C_1$  kapacitu medzi susednými závitmi,  $C_2$  kapacitu medzi závitom a medeným obalom filtra a kapacity  $C$  kondenzátory na vstupe a výstupe filtra. Impedancia vstupného a výstupného portu je  $Z=50\Omega$  v zhode s portami sieťového analyzáru. Počet opakujúcich sa blokov je 120, v súlade s počtom závitov cievky pri tesnom usporiadaní.

Zo známej geometrie a materiálových konštánt filtra môžeme jednotlivé parametre vypočítať. Kapacita medzi dvomi závitmi cievky je daná vzťahom pre kapacitu medzi dvomi rovnobežnými vodičmi:

$$C_1 = \frac{\pi \epsilon l}{\ln\left(\frac{d}{2r} + \sqrt{\frac{d^2}{4r^2} - 1}\right)} \approx 2,81 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

kde  $\epsilon$  je efektívna permitivita dielektrika kondenzátora ( $5\epsilon_0$ ),  $l$  dĺžka vodičov (12,5 mm),  $d$  vzdialenosť osí vodičov (0,12 mm) a  $r$  polomer vodiča (0,05 mm). Permitivitu sme odhadli zo známych hodnôt pre izoláciu vodiča ( $3,5\epsilon_0$ ) a epoxid ( $5,1\epsilon_0$ ), pričom väčšiu časť priestoru tvorí epoxidová zmes.

Kapacitu na jednotku dĺžky medzi cievkou a uzemneným obalom môžeme uvažovať ako kapacitu cylindrického kondenzátora. Kapacitu jedného závit na zem potom vypočítame nasledovne:

$$C_2 = \frac{2\pi\epsilon d}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \approx 0,13 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

kde  $d$  je hrúbka vodiča, resp. dĺžka cylindrického kondenzátora (0,1 mm),  $a$  je vonkajší priemer závit (4,1 mm) a  $b$  vnútorný priemer obalu (5,38 mm). Dielektrickú konštantu sme uvažovali rovnakú ako v predchádzajúcom prípade ( $\sim 5\epsilon_0$ ).

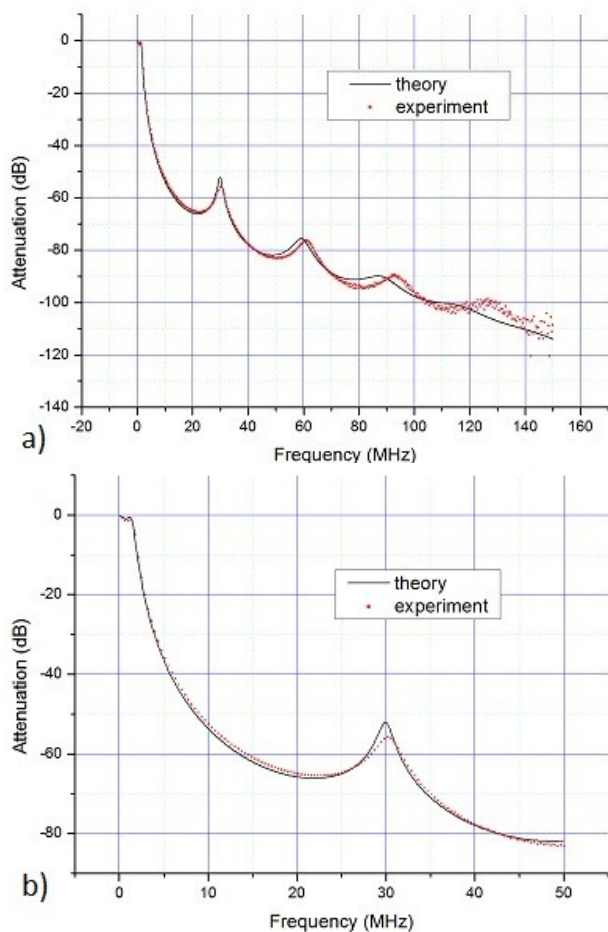
Indukčnosť jedného závit je daná vzťahom pre indukčnosť vodivej slučky:

$$L_1 = R \cdot \mu \left( \ln \frac{8R}{r} - 2 \right) \approx 1,01 \cdot 10^{-8} \text{ H} \approx 10^{-8} \text{ H}$$

kde  $R$  je polomer závit (2,1mm),  $\mu$  permeabilita medi ( $\mu \approx \mu_0$ ) a  $r$  polomer vodiča (0,05mm).

Frekvenčnú charakteristiku výslednej schémy sme vypočítali v programe na simuláciu elektromagnetických polí a výsledný graf sme porovnali s experimentálnymi dátami (obr. 6). Simuláciu sme robili vo frekvenčnom rozsahu do 150 MHz. Pri tejto hodnote meraný útlm klesol pod

hranicu šumu meracích zariadení (noise floor  $\sim 100$ dB).



Obrázok 6: Porovnanie simulácie modelovej schémy a nameraných výsledkov. (a) rozsah do 150 MHz. (b) zväčšený náhľad v rozsahu do 50MHz

Pri simulácii sme pre jednotlivé parametre použili nasledovné hodnoty:  $C_1=2$  pF,  $C_2=0,4$  pF,  $C=4$  nF,  $L_1=L_2=50$  nH,  $K=1$ ,  $R=200$   $\Omega$ . Tieto hodnoty sú v približnej zhode z vypočítanými veličinami. Indukčnosť  $L_2$  je vyššia v dôsledku magnetickej väzby medzi závitmi, a teda zvýšenia indukčnosti jedného závitu o ich vzájomnú indukčnosť.

Pre porovnanie sme indukčnosť filtra s tesným usporiadaním závitov zistili experimentálne. Prístrojom na meranie indukčnosti sme namerali hodnotu  $L_{exp}=10,7$   $\mu$ H, a teda jednému závitú prislúcha efektívna indukčnosť  $L_{exp1}=89$ nH. V našom modeli efektívnu indukčnosť zvyšuje sekundárna indukčnosť transformátora, preto je na simuláciu použitá nižšia hodnota.

Výsledky simulácie sú vo veľmi dobrej zhode z experimentálnymi dátami. Na obr. 6a) môžeme vidieť nárast útlmu pod úroveň 100 dB a tiež jednotlivé rezonančné módy v dôsledku LC prvkov.

Pre relevantné výsledky vo vyšších frekvenciách by bolo vhodné zvoliť odpor  $R$

frekvenčne závislý, nakoľko útlm v dôsledku skin efektu závisí od skinovej hĺbky, a teda aj od frekvencie signálu (vzťah 19). Takýmto modelom sa budeme zaoberať, ak budeme mať výsledky meraní sieťovým analyzérrom s väčším frekvenčným rozsahom.

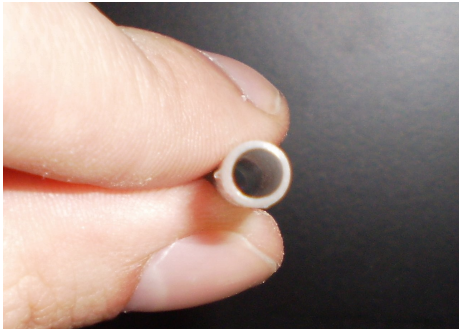
### 3. Konštrukcia filtrov

V kapitole 2. sme si vysvetlili fyzikálne javy, ktoré majú za následok útlm mikrovlnného filtra na báze vodivého prášku. Ukázali sme si tiež, aké vinutie cievky je vhodné pre elimináciu nežiadúceho magnetického poľa, ktoré by mohlo ovplyvniť meranie. Teraz sa budeme zaoberať samotnou výrobou týchto filtrov.

Vyrobili sme tri filtre s útlmovým prostredím obsahujúcim nemagnetický uhlíkový prášok, ktoré sa líšili spôsobom vinutia cievky. Použili sme štandardné vinutie, vinutie s otočeným smerom v polovici cievky a vinutie s rozšírenými závitmi. Pre vyrobené filtre potom odmeriame frekvenčnú charakteristiku prechodu signálu sieťovým analyzérrom. Porovnaním prvých dvoch zistíme či má zmena smeru vinutia cievky vplyv na útlm filtra v porovnaní so štandardným vinutím. Pri vinutí cievky s rozšírenými závitmi klesla dĺžka vodiča v útlmovom prostredí na polovicu, čo by mohlo znížiť celkový útlm. Rozšírenie závitov však zabráni kapacitnému prechodu medzi závitmi pre vysoké frekvencie a tiež zabezpečí obklopenie vodiča práškovým prostredím zo všetkých strán na rozdiel od tesného usporiadania závitov pri štandardnom vinutí. Porovnaním jednotlivých frekvenčných charakteristík tak zistíme, aká geometria vinutia cievky je pre naše účely najvhodnejšia.

#### 3.1. Postup pri výrobe

Ako sme si už spomenuli, cievka filtra musí byť obklopená stvrdnutou zmesou epoxidového lepidla a uhlíkového prášku. Je potrebné teda najprv vyrobiť jadrá cievok z tejto zmesi, na ktoré po jej stvrdnutí navinieme izolovaný medený vodič pre jednotlivé filtre. Vyrobili sme si formy v tvare trubičiek z vnútorným priemerom 4 mm z obyčajnej lepiacej pásky, ktorá sa zo stvrdnutej zmesi bude ľahko odstraňovať (z vnútornej strany trubičky je nelepiaca strana lepiacej pásky).



Obrázok 5: Forma pre jadro cievky

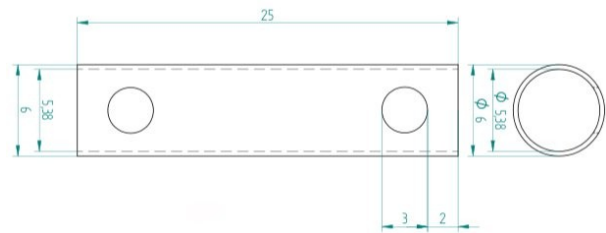
Takéto trubičky sme vyplnili zmesou epoxidového lepidla *Stycast 2850* a uhlíkového prášku. Množstvo prášku sme zvolili čo najvyššie v rámci možností rozmiešavania tejto zmesi. Výsledný objemový pomer prášku a lepidla bol približne 50/50 (20 ml prášku a 20 ml lepidla). Do zmesi sme potom pridali tužidlo *Catalyst 9* v pomere 1/10 k lepidlu. Zmesou s tužidlom sme vyplnili trubičky a nechali stvrdnúť (Po pridaní tužidla zmes stvrdne do 45 minút). Potom sme stuhnutú zmes opatrne vybalili z plastických foriem a získali tak jadrá s priemerom 4 mm. Na tieto jadrá sme potom navinuli 3 typy cievok s dĺžkou 15 mm (obr. 7). Prebytočné časti stvrdnutej zmesi sme skalpelom opatrne odstránili. Pri výbere typu epoxidového lepidla a rozmerov cievok ako aj samotného filtra sme sa inšpirovali článkom [3].

Na vinutie cievok sme použili izolovaný medený vodič s hrúbkou 0,12 mm. Pri štandardnom vinutí sme závit navinuli ručne v tesnom usporiadaní. Pri vinutí s rozšírenými závitmi sme postupovali tak, že sme navíjali paralelne 2 rovnaké medené vodiče a po zašixovaní sme jeden opatrne odstránili. Dosiahli sme tak rozšírenie závitov presne na hrúbku jedného vodiča a skrátenie celkovej dĺžky vodiča vo filtri na jednu polovicu (celková dĺžka pri štandardnom vinutí bola 150 cm a pri rozšírenom vinutí 75 cm). Navinuté cievky sme potreli sekundovým lepidlom IMI-7031, aby sme zabránili ich samovoľnému rozvinutiu.

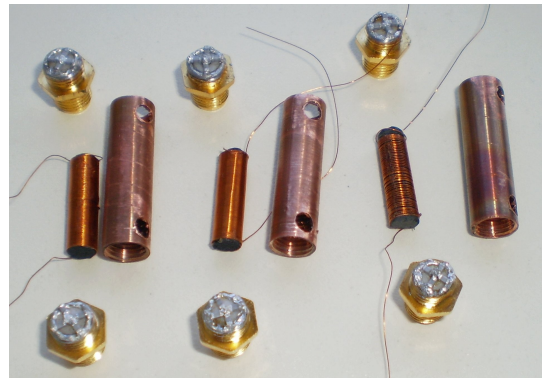
Ďalším krokom bola príprava SMA konektorov, na ktoré sme prikontaktovali kondenzátory, paralelne medzi vstupom a uzemnenou časťou. Diskové kondenzátory použité v práci [3] s kapacitou 4nF sme nahradili paralelným zapojením štyroch kondenzátorov CK0603 NPO s kapacitou 1nF. Na kontaktovanie sme použili zmes india (In) a olovnatého cínu (63% Sn, 37% Pb). Táto kontaktovacia zmes má lepšie vlastnosti pri nízkych teplotách ako samotný olovnatý cín. Pripravené SMA konektory sú znázornené na obr. 7.

Ako obal filtra sme použili medenú valcovú trubičku s otvormi pre vyplnenie okolia cievky epoxidovou zmesou po zložení filtra. Medený obal

bol vyrobený podľa nasledujúceho návrhu.



Obrázok 6: Návrh medeného obalu filtra (rozmery sú v mm)



Obrázok 7: Jednotlivé súčasti filtrov pred jeho zložením a vyplnením epoxidovou zmesou. (3 typy vinutia cievok, SMA konektory s prikontaktovanými kondenzátormi a medené obaly filtrov)

Po príprave všetkých súčasti filtra sme cievku vložili do medeného obalu a na jej konce prikontaktovali SMA konektory, ktoré sme následne priskrutkovali k medenému obalu. Znovu sme si namiešali zmes lepidla a uhlíkového prášku rovnako, ako pri výrobe jadier cievok a cez otvory v medenom obale sme vyplnili prázdny priestor v okolí cievky. Po stvrdnutí zmesi sme hotové filtre ešte premerali ohmmetrom, kvôli prípadnému poškodeniu, ku ktorému mohlo dôjsť počas ich konštrukcie. Odpor medzi vstupom a výstupom bol 1-2  $\Omega$  (v závislosti od vinutia cievky) a medzi vstupom a uzemnením nekonečný, čo je v súlade s našimi očakávaniami.

Dostali sme teda 3 kompaktné filtre s dĺžkou 4 cm (vrátane SMA konektorov) a požadovanou konštrukciou (Obr. 8). Výsledkom sú LC filtre typu II využívajúce útlmové prostredie na báze uhlíkového prášku s rôznymi vinutiami cievky.

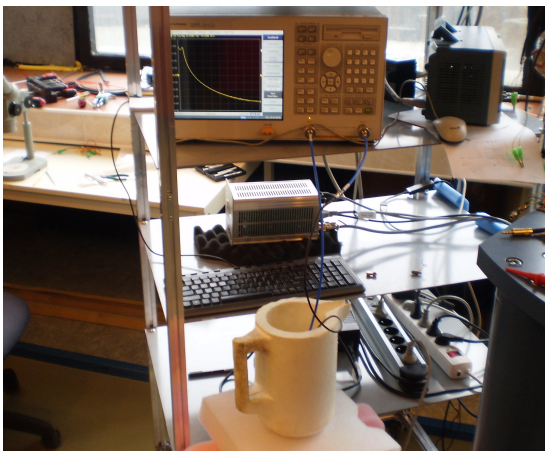


Obrázok 8: Výsledná konštrukcia kompaktného práškového filtra



## 4. Meranie útlmových vlastností a diskusia

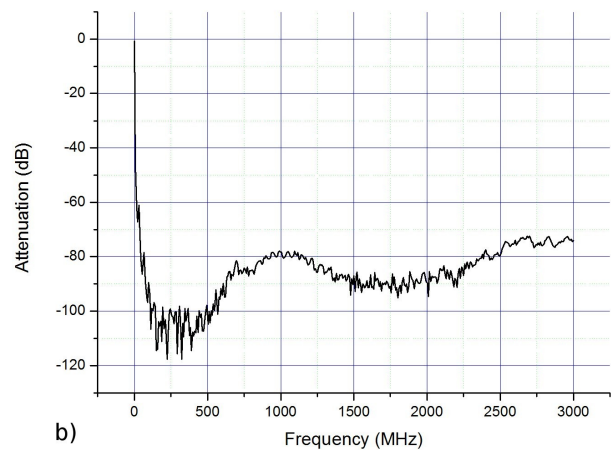
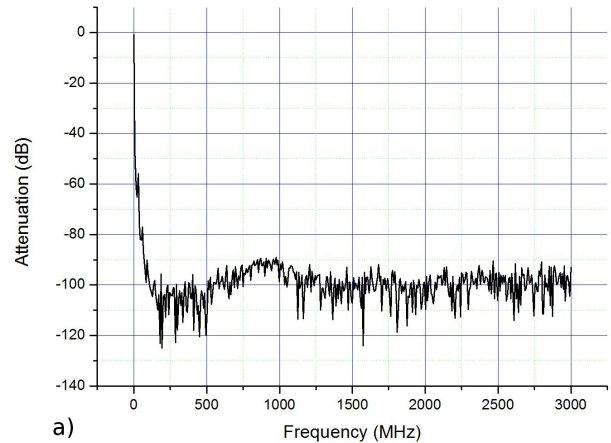
Na meranie frekvenčných charakteristík prechodu signálu všetkých troch filtrov sme použili merací prístroj *Agilent Technologies E3062A, 300kHz - 3GHz, ENA Series Network Analyser*. Každý filter sme merali pri izbovej teplote a pri teplote 77K, ktorú sme dosiahli ponorením filtra do kvapalného dusíka ( $N_2$ ). Meranie v kvapalnom dusíku sme robili kvôli zisteniu, aký vplyv na útlm filtra má výrazné zníženie teploty. Tieto výsledky budú pre nás dôležité, nakoľko filtre sa budú využívať v zapojeniach pri veľmi nízkych teplotách v zmiešavacom refrigerátore.



Obrázok 9: Aparatúra na meranie filtra chladeného kvapalným dusíkom

Merania sme robili pre plný rozsah sieťového analyzáru (300kHz – 3GHz). Výsledky týchto meraní nám poskytli spoľahlivé určenie frekvenčnej charakteristiky útlmu jednotlivých filtrov. Pre detailnejšie zobrazenie nárastu útlmu pod hranicu 100 dB sme pre filter so štandardným vinutím urobili meranie v rozsahu 300kHz – 150 MHz (kap. 2.4., obr. 6).

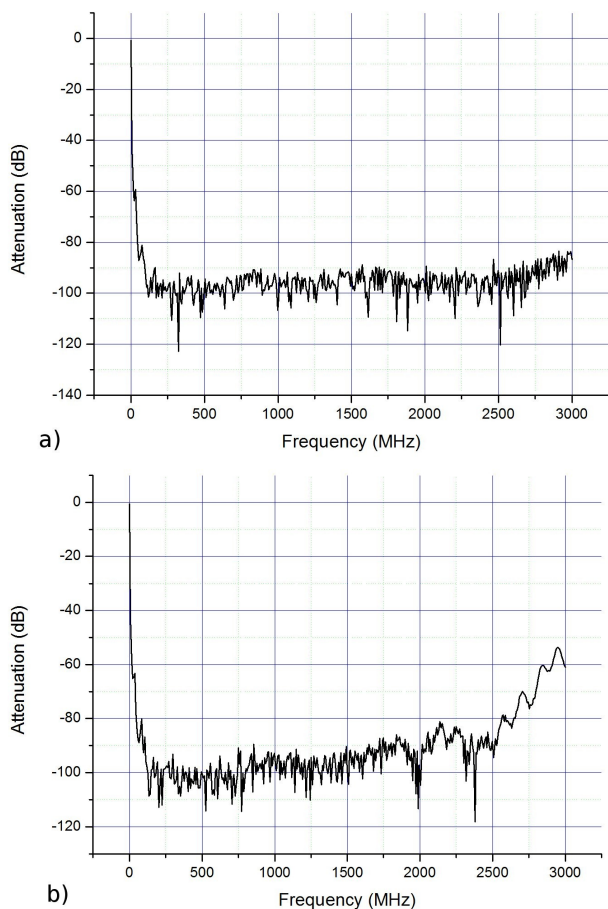
### 4.1. Filter so štandardným vinutím cievky



Obrázok 10: Frekvenčná charakteristika filtra so štandardným vinutím. (a) meranie pri izbovej teplote, (b) meranie v kvapalnom dusíku (77 K)

Útlm filtra pri izbovej teplote je v od hraničnej frekvencie (Cutoff frequency) 150MHz, v celom frekvenčnom rozsahu na úrovni ~100dB, čo je v súlade s požiadavkami kladenými na filter. Pri znížení teploty na 77 K je však útlmová charakteristika výrazne oslabená (~ 80dB) pre vyššie frekvencie. Toto zhoršenie útlmu môže mať za následok zníženie odporu uhlíkového prášku, a teda aj zníženie množstva energie premenenej na teplo [4]. Ďalším dôvodom môže byť zväčšenie kapacity medzi závitmi v dôsledku ich pevnejšieho utiahnutia pri nízkych teplotách, a teda skrátenie efektívnej dĺžky vodiča v útlmovom prostredí kapacitným prechodom signálu.

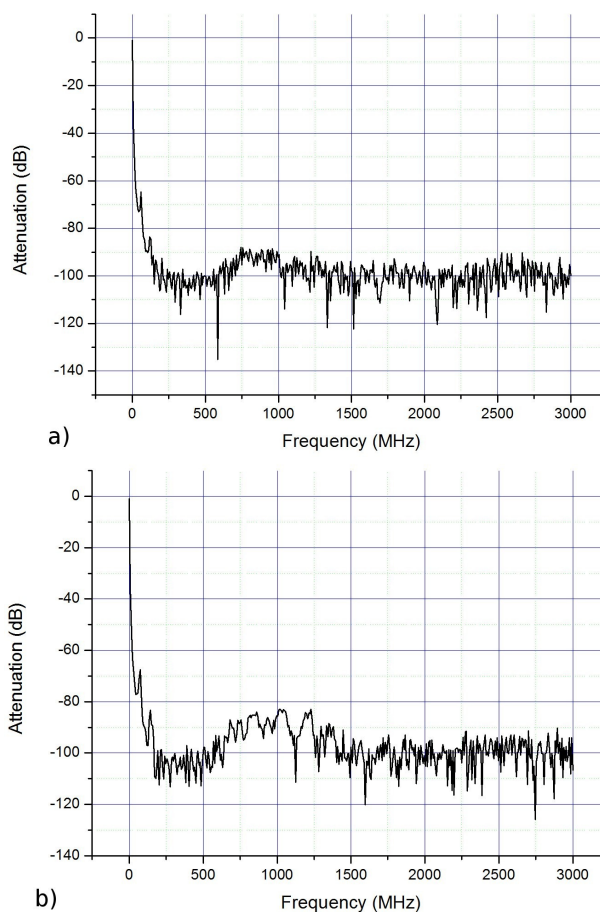
## 4.2 Filter s otočeným vinutím v polovici cievky



Obrázok 11: Frekvenčná charakteristika filtra s otočeným vinutím v polovici cievky. (a) meranie pri izbovej teplote, (b) meranie v kvapalnom dusíku (77 K)

Útlmová charakteristika filtra, pri ktorom sme kvôli redukcii magnetického poľa použili otočenie vinutia v polovici cievky, sa výrazne nelíši od charakteristiky filtra so štandardným vinutím. Pri izbovej teplote bol útlm podľa očakávaní ( $\sim 100$  dB) a pri teplote 77 K útlm pri vysokých frekvenciách klesol približne o 20 dB, čo môže byť spôsobené podobne ako v predošlom prípade kapacitným prechodom a znížením odporu vodivého prášku. Pre budúcnosť môžeme teda uvažovať o zvýšení počtu sekcií so striedajúcim vinutím pre dosiahnutie čo najväčšej redukcie magnetického poľa, keďže takáto zmena vinutia nemá výrazný vplyv na útlm filtra.

## 4.3. Filter s rozšírenými závitmi cievky



Obrázok 12: Frekvenčná charakteristika filtra s rozšírenými závitmi vinutia cievky. (a) meranie pri izbovej teplote, (b) meranie v kvapalnom dusíku (77 K)

Útlmová charakteristika nameraná pri izbovej teplote má podobný priebeh ako v prípade štandardného vinutia ( $\sim 100$  dB). Oslabenie útlmu v dôsledku skrátenia dĺžky vodiča v útlmovom prostredí je vykompenzované elimináciou kapacitného prechodu medzi závitmi a zväčšením efektívnej plochy útlmovej zmesi obklopujúcej vodič. Výsledky merania pri teplote 77 K boli pre nás veľmi pozitívne. Ako môžeme vidieť z Obr. 12 b), útlmová charakteristika bola v celom rozsahu od hraničnej frekvencie (150 MHz – 3 GHz) na úrovni  $\sim 100$  dB. Zníženie teploty filtra s týmto vinutím cievky teda nespôsobilo zníženie útlmu ako pri štandardnom vinutí. Dospeli sme tak k poznatku, že vinutie cievky s rozšírenými závitmi je pre mikrovlnné práškové filtre vhodnejšie ako štandardné vinutie s tesným usporiadaním závitov použité napríklad v prácach [3], [5]. Takýto filter utlmí vysoké frekvencie na úroveň šumov meracích zariadení (noise floor  $\sim 100$  dB) napriek skráteniu celkovej dĺžky vodiča v útlmovom prostredí.

## 5. Záver

Cieľom predloženej práce bolo pochopiť, ako funguje útlm mikrovlnných filtrov na báze vodivého prášku a následne skonštruovať 3 filtre s odlišným vinutím cievky. Pre vyrobené filtre sme odmerali ich frekvenčnú charakteristiku útlmu sieťovým analyzérom v rozsahu 300kHz – 3GHz. Z našich výsledkov vyplýva, že najvhodnejším typom filtra je kombinácia vinutia cievky s rozšírenými závitmi a vinutia s otočeným smerom v polovici cievky. Takýto filter bude utlmať signál na úroveň šumov meracích zariadení (noise floor ~ 100 dB) aj pri nízkych teplotách a vďaka zmene smeru vinutia cievky bude výrazne redukované jeho magnetické pole, ktoré by mohlo negatívne ovplyvniť merania, kde sa tento filter bude využívať. Do budúca budeme uvažovať o zvýšení počtu sekcií cievky so striedajúcim vinutím pre čo najväčšiu elimináciu magnetického poľa. Budeme tiež uvažovať o nahradení 4 paralelne spojených kondenzátorov na SMA konektore diskovým kondenzátorom [3]. Výhodou je jeho nižšia parazitná indukčnosť a jednoduchšie kontaktovanie na konektor oproti štandardným (kvádrovým) kondenzátorom. Na meranie plánujeme použiť sieťový analyzér s väčším rozsahom, vďaka čomu získame lepšie informácie o útlmovej charakteristike pri frekvenciách nad 3 GHz.

Výsledkom tejto práce je výrazné zlepšenie vlastností kryogénnych mikrovlnných filtrov na báze vodivého prášku. Nami vyrobené filtre majú veľmi dobré útlmové vlastnosti a je možné ich použiť pri vysokocitlivých mikrovlnných meraniach. Takéto merania budeme vykonávať pri práci so supravodivými kvantovými bitmi, ktorých realizácia je dlhodobým cieľom v našom laboratóriu.

## Pod'akovanie

Touto cestou ďakujem svojmu školiteľovi doc. RNDr. Miroslavovi Grajcarovi, DrSc., za usmernenie a odborné vedenie pri práci, Mgr. Mariánovi Trgalovi a Mgr. Pavlovi Neilingerovi za množstvo cenných rád a pripomienok k práci. Ďakujem tiež doc. RNDr. Františkovi Kundracikovi, PhD., za poskytnutie prístroja na meranie magnetického poľa a pomoc s jeho zaobchádzaním a doc. RNDr. Andrejovi Jaroševičovi, Csc. za užitočné rady ohľadom teoretického modelu filtra.

## Referencie

- [1] TIRPÁK, A. 1999: Elektromagnetizmus. Bratislava: Polygrafia SAV, 1999. ISBN 80-88780-26-8.
- [2] [http://schools.wikia.com/wiki/Left\\_hand\\_rules](http://schools.wikia.com/wiki/Left_hand_rules)
- [3] A. Lukashenko and A. V. Ustinov: Improved powder filters for qubit measurements. American Institute of Physics. DOI: 10.1063/1.2827515
- [4] Akio Fukushima, Akira Sato, Akio Iwasa, Yasuhiro Nakamura, Takeshi Komatsuzaki, and Yasuhiko Sakamoto : Attenuation of Microwave Filters for Single-Electron Tunneling Experiments
- [5] K. Bladh, D. Gunnarsson, E. Hurfeld, S. Devi, C. Kristoffersson, B. Smalander, S. Pehrson, T. Claeson, and P. Delsing : Comparison of cryogenic filters for use in single electronics experiments

## Lineárne optické vlastnosti dvojjadrových mikroštruktúrnych vlákien

Andrej Hubinský\*  
Školiteľ: Ignác Bugár‡

<sup>1</sup> Katedra experimentálnej fyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

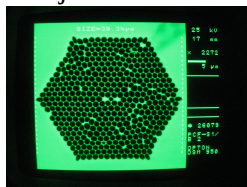
<sup>2</sup> Medzinárodné laserové centrum, Ilkovičova 3, 841 04 Bratislava

Mikroštruktúrne optické vlákna (MOV) sú jednou z najperspektívnejších oblastí vláknovej optiky. Kým v klasických vláknach vedenie svetla zabezpečuje úplný odraz elektromagnetickej vlny na rozhraní jadra a obalu s rozdielnym indexom lomu, u mikroštruktúrnych to spôsobuje braggovský odraz vln na periodickej štruktúre obalu. Z hľadiska typu jadra MOV môžu byť tvorené pevným alebo dutým jadrom. Hlavné výhody MOV v porovnaní klasickými vláknami sú väčšia lokalizácia svetelného poľa v jadre, možnosť jednomódovej činnosti pre širokú spektrálnu oblasť, podpora veľkej plochy vedeného módu a flexibilita pre tvarovanie disperzných vlastností.

Špeciálnym druhom MOV sú dvojjadrové vlákna, umožňujúce šírenie svetla v dvoch vzájomne previazaných jadrách. V takomto prípade energia elektromagnetickej vlny prechádza striedavo medzi dvoma jadrami aj keď budíme čiste len jedno jadro. Množstvo energie, ktorá prejde do nebudeneho jadra závisí od rozdielu fázových konštánt prislúchajúcich jednotlivým jadrám, úplný prechod nastane len v prípade nulového rozdielu. Vzdialenosť, po ktorej sa celá oscilujúca energia dostane z jedného do druhého jadra sa nazýva väzbová dĺžka. Závisí od vlnovej dĺžky a polarizácie vedeného svetla. Platí pre ňu vzťah

$$L_C = \frac{\pi}{|\beta_0^{(S)} - \beta_0^{(A)}|} \quad (1)$$

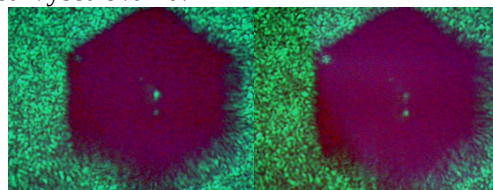
kde  $\beta_0^{(S)}$  a  $\beta_0^{(A)}$  sú postupne konštanty šírenia symetrického a asymetrického módu, ktoré sú vybudené v oboch jadrách.



Obr. 1 Detail mikroštruktúry vyšetrovaného vlákna

Pri experimentálnej realizácii sme vyšetrovali vlastnosti dvojjadrového vlákna s hexagonálnou mikroštruktúrou (Obr. 1). Aparatúra obsahovala nasedujúce prvky: laser s pracovnou vlnovou dĺžkou 532 nm, teleskop zabezpečujúci zväčšenie priemeru laserového lúča na 1 cm, zrkadlo smerujúce zväzok k vláknu, 2 mikroobjektívy so 40 násobným zväčšením - jeden fokusujúci zväzok na úroveň  $\mu m$  a druhý

zobrazujúci výstupné čelo vlákna na kameru; 2 mikrometrické 3D posuvné stojany pre mikroobjektívy, stojan na umiestnenie vlákna a webkameru pripojenú k počítaču. Metódou jemných zmien geometrie naviazania sa podarilo dosiahnuť prepínanie medzi jadrami na výstupnom konci vlákna pri jeho fixovanej dĺžke (Obr. 2). V ďalšej časti experimentu sme pri fixovanej geometrii naviazania postupne skracovali dĺžku vlákna o úseky s veľkosťou okolo 2 mm. Zaznamenali sme pri tom kolísanie intenzity svetla pri dominantnom jadre na výstupnom konci, ale nepozorovali sme priestorové rozloženie intenzity, pri ktorom by bola väčšia intenzita v druhom jadre. Popísané prvé výsledky, ktoré sme získali na prezentovanom dvojjadrovom MOV sú nádejné z hľadiska realizácie riadeného prepínania medzi jeho dvomi jadrami. Naším cieľom je pokračovať v týchto experimentoch a zabezpečiť väčší kontrast pri prepínaní medzi jadrami pri rozšírení spektrálnej oblasti vyšetrovania.



Obr. 2 Prepínanie svetla medzi dvomi jadrami vlákna.

### Kľúčové slová

mikroštruktúrne optické vlákna, dvojjadrové optické vlákna, väzbová dĺžka, laserové budenie, riadené prepínanie.

### Referencie

- [Saleh and Teich, 1991] Saleh, B. E. A. and Teich, M. C. (1991). Fundamentals of photonics, strany 273–307, New York, John Wiley & Sons, Inc.
- [Martinček a kol., 2006] Martinček, I., Turek, I., Káčik, D., Pudiš, D., (2006) *Netradičné metódy vyšetrovania optických vlákien a polovodičových diód*, strany 147–184, Žilina, EDIS – vydavateľstvo ŽU
- [Koyš, 2010] Koyš, M., (2010). Supercontinuum Generation in Dual Core Photonic Crystal Fiber, strany 38-44, Dizertačná práca, FMFI UK Bratislava

\*4ndr3y.jj@gmail.com

‡bugar@ilc.sk

# Oneskorené štiepenie po beta premene v $^{180}\text{Tl}$ a $^{202}\text{Fr}$

Boris Andel<sup>1</sup>

školiteľ: Stanislav Antalic<sup>2</sup>

Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Práca sa zaoberá oneskoreným štiepením po beta premene, ktorého štúdium je účinný nástroj na určovanie výšky štiepnych bariér, hmotnostnej distribúcie štiepnych fragmentov a ďalších štiepnych vlastností u inak nedosiahnuteľných štiepení jadier. Napríklad v jadrovej astrofyzike sú výšky štiepnych bariér a hmotnostná distribúcia fragmentov kľúčové vstupné parametre pre  $r$  – proces, ktorý je jedným z procesov nukleosyntézy.

Práca obsahuje všeobecný opis štiepenia jadier, potom konkrétnejšie oneskoreného štiepenia po beta premene a jeho význam. V krátkosti porovnáva dva modely štiepnych bariér, pokračuje opisom experimentálneho zariadenia ISOLDE a detekčného systému. Nasledujú výsledky, boli určené pravdepodobnosti oneskoreného štiepenia  $P_{\beta\text{DF}}(^{180}\text{Tl}) = (3,7 \pm 1,0) \cdot 10^{-5}$  a  $P_{\beta\text{DF}}(^{202}\text{Fr}) = (2,07 \pm 0,42) \cdot 10^{-4}$ . Ďalej boli určené vetviace pomery alfa premien  $^{176}\text{Pt}$ ,  $^{176}\text{Au}$ ,  $^{202}\text{Fr}$  a spodné limity vetviacich pomerov alfa premien  $^{198}\text{At}$  a  $^{198\text{m}}\text{At}$ .

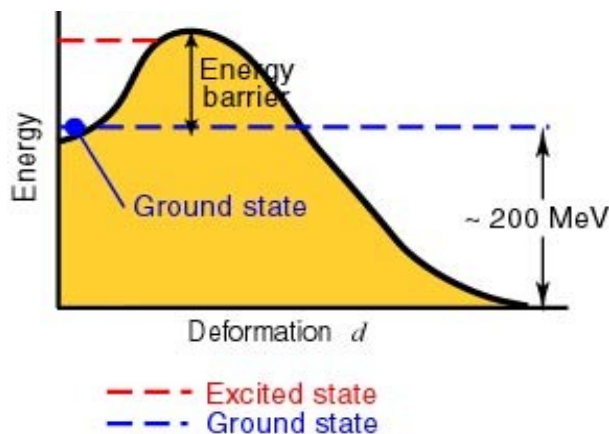
**Kľúčové slová:** oneskorené štiepenie, štiepna bariéra, vetviaci pomer

## 1 Úvod – štiepenie jadier

V roku 1938 O. Hahn a F. Strassmann izolovali bárium z produktov bombardovania uránu neutrónmi. Išlo o prekvapivý výsledok, pretože sa očakávala produkcia transuránov záchytnou reakciou neutrónov. L. Meitner a O. Frisch prišli s vysvetlením, že dochádza k štiepeniu uránu pomocou neutrónov. [Hall a Hoffmann, 1990].

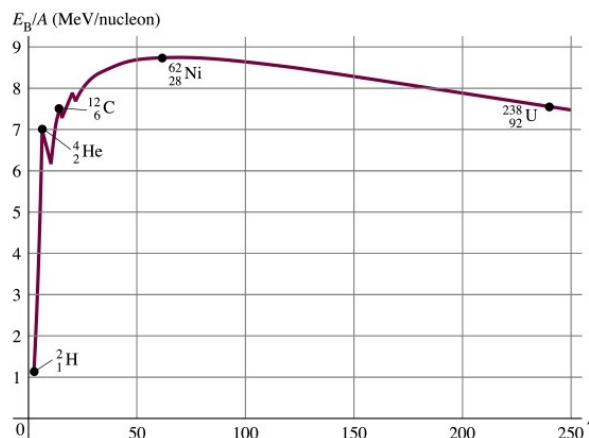
Pri štiepení dochádza k rozdeleniu ťažšieho jadra na dva ľahšie fragmenty a uvoľneniu veľkého množstva energie. Napríklad pre  $^{235}\text{U}$  je to približne 200 MeV. Tento proces je výsledkom súperenia silných príťažlivých jadrových síl, ktoré rastú približne úmerne s  $A$  a elektrického odpudzovania protónov, ktoré rastie rýchlejšie, približne je úmerné  $Z^2$  [Krane, 1988].

Rozštiepeniu jadra bráni štiepna bariéra, schematicky zobrazená na obr. 1.



Obr. 1 Štiepna bariéra - graf potenciálnej energie jadra (fragmentov) v závislosti od deformácie jadra (vzdialenosti fragmentov).

Energetická výhodnosť štiepenia jadier je zrejماً z grafu závislosti väzbovej energie na nukleón od hmotnostného čísla (obr. 2).



Obr. 2 Väzbová energia na nukleón v závislosti od hmotnostného čísla.

Pri štiepení jadra napríklad  $^{238}\text{U}$  vznikajú fragmenty, ktoré majú väčšiu väzbovú energiu na nukleón, teda musí dôjsť k uvoľneniu energie (približne 214 MeV). Väčšina tejto energie (asi 80%) je vo forme kinetickej energie fragmentov, ktoré sú urýchlené elektrickým odpudzovaním. Zvyšok ener-

<sup>1</sup>boris.andel@gmail.com

<sup>2</sup>stanislav.antalic@fmph.uniba.sk

gie sa uvoľní vo forme neutrónov, beta a gama žiarenia [Krane, 1988].

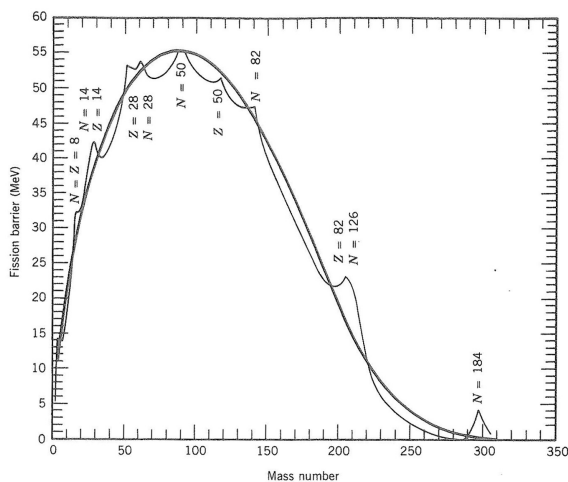
### 1.1 Spontánne štiepenie

Spontánne štiepenie objavili v roku 1940 G. N. Flerov a K. A. Petrjak, išlo o štiepenie uránu [Flerov a Petrjak, 1940].

Je to proces analogický s alfa premenou, kedy sa predpokladá, že štiepny fragment sa vytvorí v jadre a pretuneluje štiepnou bariérou (obr. 4). Pravdepodobnosť pretunelovania bariérou rýchlo klesá s rastúcou hmotnosťou, preto je spontánne štiepenie v porovnaní s alfa premenou málo pravdepodobné a význam nadobúda až pre nízke štiepne bariéry.

Sú tu však komplikovanejšie podmienky než pri alfa premene, preto je výhodnejšie študovať štiepenie z pohľadu deformácie jadra. Na opis je výhodný kvapkový model jadra a poloempirická hmotnostná formula. Jadro sa s rastúcou potenciálnou energiou deformuje, dochádza k rozťahnutiu "kvapky" až sa v strede zaškrtnú a sformujú sa dva fragmenty, odpudzované elektrickými silami a jadro sa rozdelí. Pri rastúcej deformácii rastie povrch jadra a mierne klesá coulombovské odpudzovanie protónov, kvôli zväčšujúcej sa vzdialenosti. Pre popis štiepenia je preto významný pomer coulombovskej a povrchovej energie z poloempirickej hmotnostnej formuly. Z tohto pomeru vyplýva rozhodujúci parameter stability voči spontánnemu štiepeniu, ktorým je pomer  $Z^2/A$ . Nazýva sa štiepny parameter a kritická hodnota je 51 [Mayer-Kuckuk, 1979].

Výšky štiepných bariér vypočítaných na základe kvapkového modelu možno korigovať pomocou vrstvomového modelu a dostať tak realistejšie hodnoty štiepných bariér (obr. 3). Vrstvomový model naznačuje možnosť existencie superťažkých prvkov v okolí  $A = 300$  [Krane, 1988].



Obr. 3 Výška štiepnej bariéry v závislosti od  $A$ . Hodnoty získané na základe kvapkového modelu sú zobrazené hrubšou čiarou, priebeh opravený vrstvomými korekciami je zobrazený tenšou čiarou [Krane, 1988].

### 1.2 Indukované štiepenie

Je to štiepenie spôsobené dodaním tzv. aktivačnej energie, teda energie potrebnej na prekonanie štiepnej bariéry.

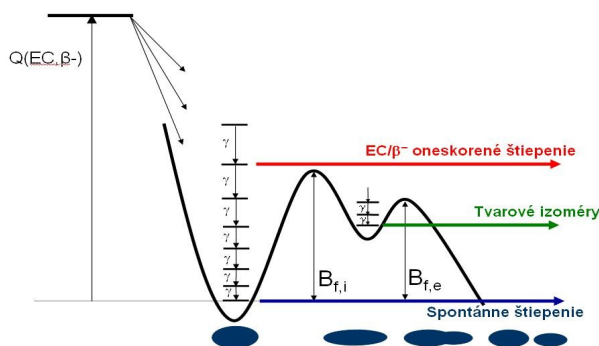
Pri ťažkých jadrách, ktoré majú štiepnu bariéru iba niekoľko MeV (obr. 3), môže postačovať separačná energia neutrónu získaná jeho zachytením, a tak je možné indukovať štiepenie pomocou neutrónov. Výhodné je to najmä pri jadrách s nepárnym počtom neutrónov, pretože zachytením neutrónu získa jadro energiu zvýšenú o energiu párovania nukleónov. Preto je možné indukované štiepenie  $^{235}\text{U}$  pomocou tepelných neutrónov. Naproti tomu, pre indukované štiepenie  $^{238}\text{U}$  sú potrebné neutróny s energiou približne 1 MeV.

Významná je možnosť vzniku reťazovej reakcie, kedy neutróny, ktoré vznikli počas štiepenia, indukujú štiepenie ďalších jadier. Pri štiepení  $^{235}\text{U}$  vzniká priemerne 2,47 neutrónov, ktoré po spomalení na rýchlosť tepelných neutrónov môžu spôsobovať reťazovú reakciu [Mayer-Kuckuk, 1979].

Štiepenie môže byť indukované aj elektromagneticky. A. Grewe a kol. nechali nalietať urýchlené jadrá rôznych neutrónovo deficitných izotopov na olovené fólie a vplyvom elektromagnetických a jadrových interakcií dochádzalo k štiepeniu daných jadier [Grewe a kol., 1997].

### 1.3 Štiepne izoméry

Jadro môže uviaznuť v excitovanom stave v sekundárnom minime štiepnej bariéry. Takéto jadro je silne deformované, od čoho je odvodený názov tvarové izoméry (obr. 4). V tomto stave majú jadrá nezvyčajne krátke doby polpremeny voči spontánnemu štiepeniu, pretože im stačí prekonať výrazne nižšiu štiepnu bariéru, než v základnom stave. Konkurenčným procesom štiepeniu je návrat do základného stavu pomocou emisie gama žiarenia [Krane, 1988].



Obr. 4 Štiepna bariéra so sekundárnym minimom a niektoré druhy štiepenia – oneskorené štiepenie po beta premene, štiepenie z tvarových izomérov a spontánne štiepenie. Pod vodorovnou osou je naznačená deformácia jadra.

## 1.4 Oneskorené štiepenie po beta premene

Je to proces, ktorý združuje beta premenu a štiepenie. Najskôr prebehne beta premena materského jadra za vzniku dcérskeho jadra v excitovanom stave. Energia tohto stavu je porovnateľná alebo väčšia ako štiepna bariéra dcérskeho jadra (obr. 4), takže v zápätí po beta premene nastáva štiepenie dcérskeho jadra. Procesu štiepenia konkuruje deexcitácia pomocou vyžiarenia gama kvánt.

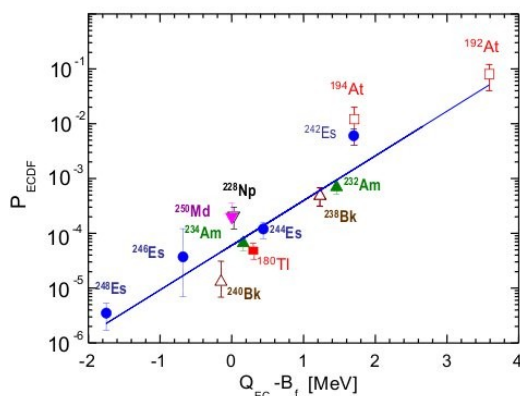
Základným kritériom na odhadnutie, či možno očakávať oneskorené štiepenie po beta premene ( $\beta\text{DF}$  – Beta Delayed Fission) je, aby  $Q_\beta$  – hodnota (energia beta premeny) bola porovnateľná alebo väčšia, ako výška štiepnej bariéry  $B_f$ . Na základe tohto kritéria možno predpokladať výskyt  $\beta\text{DF}$  v oblasti veľmi ťažkých jadier, pretože majú nízke štiepne bariéry a v oblasti ďaleko od oblasti beta stability, vďaka veľkej hodnote  $Q_\beta$ .

Pravdepodobnosť  $\beta\text{DF}$  ( $P_{\beta\text{DF}}$ ) možno vypočítať na základe vzťahu:

$$P_{\beta\text{DF}} = \frac{\int W(Q_\beta - E) \frac{\Gamma_f}{\Gamma_{\text{tot}}}(E) dE}{\int W(Q_\beta - E)} \quad (1)$$

kde  $W(Q_\beta - E)$  je pravdepodobnostná funkcia prechodu pre beta premenu,  $(\Gamma_f/\Gamma_{\text{tot}})(E)$  je podiel štiepnej šírky excitovaných hladín v dcérskom jadre k celkovej šírke zániku týchto stavov,  $E$  je excitačná energia dcérskeho jadra. Často sa predpokladá, že dcérske jadro môže excitovaný stav opustiť okrem štiepenia len vyžiarением gama kvanta, potom  $(\Gamma_f/\Gamma_{\text{tot}})(E) = [\Gamma_f/(\Gamma_f + \Gamma_\gamma)](E)$  [Hall a Hoffmann, 1992].

Z experimentálne určených  $P_{\beta\text{DF}}$  bola zistená približne exponenciálna závislosť od hodnoty rozdielu  $Q_\beta - B_f$ , čo je zobrazené na obr. 5.



Obr. 5 Závislosť experimentálne zistených  $P_{ECDF}$  ( $EC$  – elektrónový záchyt spolu s  $\beta^+$  premenu) od rozdielu  $Q_{EC} - B_f$  [Elseviers, 2009].

$\beta\text{DF}$  umožňuje štúdium štiepných vlastností ďaleko od oblasti beta stability a rozširuje množstvo nuklidov, u ktorých možno pozorovať nízkoenergetické štiepenie. Takto je možné študovať kinetickú energiu a hmotnostnú distribúciu výťažkov, výšku a štruktúru štiepných bariér, pravdepodobnosti štiepenia, gama deexcitácie a neutrónovej emisie u inak nedosiahnuteľných štiepení jadier. Získajú sa tak informácie využiteľné pri tvorbe a overovaní modelov štiepenia [Hall a Hoffmann, 1992]. Vďaka tomu, že ide o nízkoenergetické štiepenie, môžu sa tu významne prejavovať vrstvové efekty [Andreyev a kol., 2008].

Ďalším významom  $\beta\text{DF}$  je jeho vplyv na r-proces, ktorý je jedným z procesov nukleosyntézy. Je to rýchly záchyt neutrónov, kedy čas medzi záchytnom dvoch neutrónov je kratší, než doba života vzhľadom na beta premenu. Na dosiahnutie takýchto podmienok je potrebný extrémne silný neutrónový tok, ktorý vzniká pri výbuchu supernov. Predpokladá sa, že r-proces je zodpovedný za produkciu približne polovice jadier ťažších ako železo [Cowan a Thielemann, 2004].

Okrem toho, r-procesom sú vytvárané všetky aktinidy. Je to umožnené tým, že prechádza oblasťou veľmi neutrónovo bohatých izotopov, a tak obchádza oblasť krátko žijúcich izotopov medzi bizmutom a aktinidmi [Hall a Hoffmann, 1992].

$\beta\text{DF}$  má spolu s neutrónmi indukovaným a spontánnym štiepením vplyv na produkciu transuránov a celkové výťažky ťažkých prvkov v r-procese. Rozštiepením jadra sa jednak zabráni vzniku ťažšieho jadra, jednak vzniknú dva ľahšie fragmenty, ktoré môžu opäť vstúpiť do r-procesu a premieňať sa na ťažšie jadrá, čo sa nazýva štiepnou recykláciou. Takýmto spôsobom dochádza k zmene výťažkov oproti stavu bez štiepenia [Panov a kol., 2005].

Medzi najdôležitejšie vstupné parametre pre výpočty súvisiace s r-procesom patria výšky štiepných bariér, pravdepodobnosti a hmotnostné distribúcie fragmentov pre štiepenia z nízko položených excitovaných hladín. V súčasnosti nie je možné vytvárať v laboratórnych podmienkach izotopy dôležité pre r-proces a tak študovať ich štiepne vlastnosti ani tieto vlastnosti spoľahlivo vypočítať. Štúdiom  $\beta\text{DF}$  však možno získať informácie o štiepných bariérach v iných oblastiach ďaleko od oblasti beta stability, kam patria napríklad neutrónovo deficitné izotopy z oblasti okolo  $Z = 82$ . Takto je možné poskytnúť dáta pre zdokonalenie modelov na výpočet štiepných bariér [Andreyev a kol., 2008].

## 2 Modely štiepných bariér

V práci porovnávam dva modely štiepných bariér a hmotnostných úbytkov na výpočet  $Q_\beta$  hodnôt - Thomas-Fermi model (pre štiepne bariéry aj hmotnostné úbytky) a FRLDM (Finite-Range Liquid Drop Model) pre štiepne bariéry s hmotnostnými

úbytkami podľa modelu FRDM (Finite-Range Droplet Model).

Hodnotu  $Q_B$  možno vypočítať ako rozdiel hmotnostného úbytku materského jadra a hmotnostného úbytku dcérskeho jadra.

Štiepne bariéry podľa Thomas-Fermiho modelu sa dajú vypočítať na základe nasledujúcich vzťahov [Myers a Swiatecki, 1999]:

$$B(N, Z) = S(N, Z)F(X) \text{ MeV}, \quad (2)$$

kde

$$S = A^{2/3}(1 - kI^2) \quad (3)$$

$$I = (N - Z)/A \quad (4)$$

$$k = 1,9 + (Z - 80)/75 \quad (5)$$

$$X = Z^2/A(1 - kI^2) \quad (6)$$

pričom funkcia  $F(X)$  má dva tvary pre rôzne hodnoty  $X$ :

$$F(X) = 0,000199749 (X_0 - X)^3 \quad (7)$$

pre  $X_l \leq X \leq X_0$  a

$$F(X) = 0,595553 - 0,124136 (X - X_l) \quad (8)$$

pre  $30 \leq X \leq X_l$

kde  $X_0 = 48,5428$  a  $X_l = 34,15$ .

Hmotnostné úbytky som prevzal z [Myers a Swiatecki, 1994].

Pre FRDM som hodnoty štiepnych bariér prevzal z [Möller a kol., 2009]. Tento model využíva tri rôzne tvarové parametrizácie na výpočet potenciálnej energie jadra v závislosti od jeho deformácie. Prechod jadra zo základného stavu až po sfornovanie fragmentov je rozdelený na tri oblasti na základe deformácie a v každej oblasti je využitá iná parametrizácia, pričom na okrajoch oblastí sa parametrizácie prekrývajú.

Hmotnostné úbytky pre FRDM som prevzal z [Möller a kol., 1995].

Výsledné grafy uvádzam vo výsledkoch (obr. 8 a 9).

### 3 Experiment

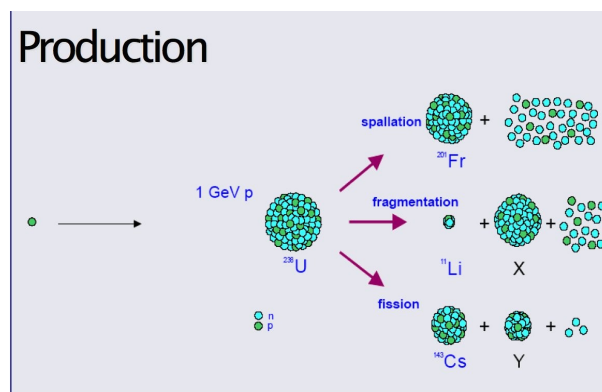
#### 3.1 ISOLDE

ISOLDE je laboratórium v komplexe Európskej organizácie pre jadrový výskum CERN. Názov je skratkou anglických slov Isotope Separator On Line DEvice. Určené je na tvorbu širokej škály rádioak-

tívnych zväzkov a ich štúdium. Dosahuje sa vysoká čistota zväzkov a v mnohých prípadoch najvyššie intenzity na svete. Prebieha tu výskum v rôznych oblastiach ako atómová a jadrová fyzika, jadrová astrofyzika, fyzika tuhých látok a materiálov a biomedicínsky výskum.

Jadrá sú produkované ostreľovaním terča zväzkom protónov z urýchľovača Proton Synchrotron Booster s energiou 1 – 1,4 GeV. Pri ostreľovaní terča dochádza k spalácii, fragmentácii a štiepeniu terčových jadier (obr. 6).

Terč je ohrievaný na vysokú teplotu, aby sa uľahčila a urýchlila difúzia vytvorených jadier. V závislosti od použitého terča sa teploty pohybujú od 700 °C do viac než 2000 °C.



Obr. 6 Spôsoby produkcie jadier v ISOLDE.

Nasleduje ionizácia produkovaných atómov. Používa sa povrchová, plazmová a laserová ionizácia. Pretože v našom experimente bola využitá laserová ionizácia, budem sa ďalej venovať tejto metóde.

Metóda sa nazýva laserová rezonančná ionizácia (Resonance Ionization Laser Ion Source – RILIS). Poskytuje selekciu na základe protónového čísla. Využíva rozdielnú elektrónovú štruktúru atómov s rôznym  $Z$ . Atómy sú ionizované lasermi s vhodnými vlnovými dĺžkami pre daný prvok. Môže ísť o viacstupňový proces, kedy sa postupne elektróny excitujú na vyššie hladiny, až následne dôjde k uvoľneniu elektrónov z obalu.

Potom ióny putujú na hmotnostnú separáciu. V ISOLDE sa nachádzajú dva on-line hmotnostné separátory s nezávislými terčami (zdrojmi iónov) – General Purpose Separator (GPS) a High Resolution Separator (HRS). Rozlíšenie  $m/\Delta m$  separátora HRS presahuje hodnotu 5000 [ISOLDE].

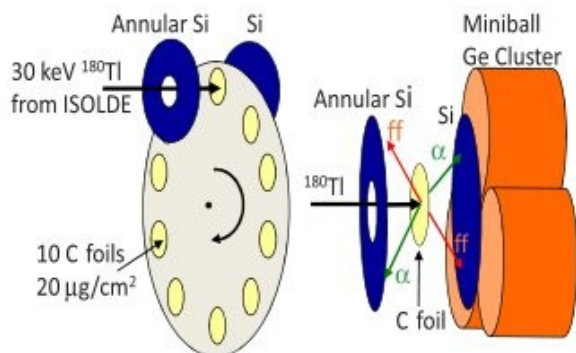
#### 3.2 Detekčný systém

Ako terč bol použitý  $UC_x$  s plošnou hmotnosťou 50 g/cm<sup>2</sup>. Po laserovej ionizácii a hmotnostnej separácii zväzok iónov urýchlený na 30 keV prechádza otvorom v kremíkovom detektore a je implantovaný do uhlíkovej fólie s plošnou hmotnosťou 20 μg/cm<sup>2</sup> (obr. 7). Po oboch stranách fólie sú umiestnené Si –



detektory na detekciu alfa častíc a štiepných fragmentov, v jednom z detektorov je spomínaný otvor na prechod iónového zväzku. Na meranie gama kvánt je tu zoskupenie troch Ge – detektorov (MINIBALL Ge cluster) a planárny Ge – detektor [Andreyev a kol., 2010].

Kremíkové detektory zaznamenávali v rozsahu od 1,5 MeV do 95 MeV.

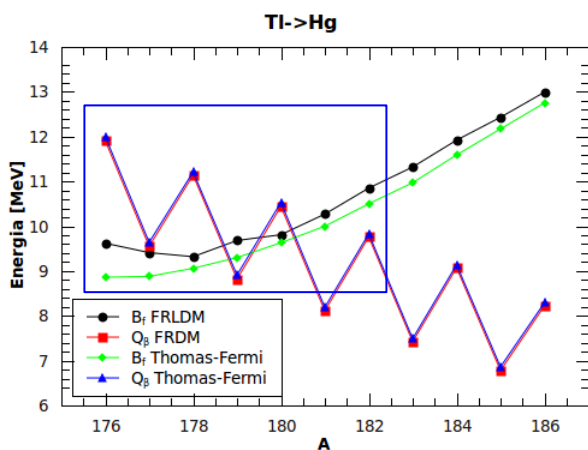


Obr. 7 V ľavej strane obrázku je pohľad na otočné koleso s uhlikovými fóliami, v pravej časti je priblížený pohľad na rozloženie detektorov v implantačnej stanici [Andreyev a kol., 2010].

## 4 Výsledky

### 4.1 Štiepne bariéry

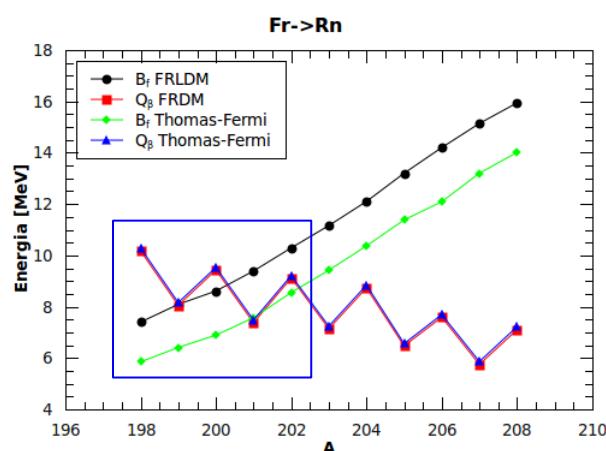
Na obr. 8 a 9 je porovnanie vyššie spomínaných modelov štiepných bariér a hmotnostných úbytkov pre neutrónovo deficitné izotopy tália a francie. V prvom prípade sa tálium premieňa elektrónovým záchyтом /  $\beta^+$  premenu na ortuť, v druhom prípade sa rovnakou reakciou premieňa francium na radón. Na obrázkoch je modrým rámcikom zvýraznená oblasť, kde možno očakávať  $\beta\text{DF}$ . Ide o oblasť, kde je hodnota  $Q_\beta$  porovnateľná alebo väčšia než  $B_\beta$ , ako už bolo spomenuté v podkapitole o  $\beta\text{DF}$ .



Obr. 8 Porovnanie modelov štiepných bariér a hod-

nôt  $Q_\beta$  pre neutrónovo deficitné izotopy Tl. Modrým rámcikom je zvýraznená oblasť, kde možno očakávať  $\beta\text{DF}$ .

Z porovnania vidieť, že  $Q_\beta$  hodnoty sú pre oba modely približne rovnaké. Štiepne bariéry sú pre izotopy ortuti v pomerne dobrej zhode, naproti tomu pre izotopy radónu sú pre Thomas-Fermiho model o takmer 2 MeV nižšie než pre FRLDM. Tento rozdiel pri  $^{202}\text{Fr}$  spôsobuje, že podľa FRDLM je  $Q_\beta$  už pod štiepnou bariérou, a teda na základe tohto modelu možno očakávať výrazne menšiu pravdepodobnosť  $\beta\text{DF}$  ( $P_{\beta\text{DF}}$ ) než na základe Thomas-Fermiho modelu, kde je hodnota  $Q_\beta$  nad štiepnou bariérou.



Obr. 9 Porovnanie modelov štiepných bariér a hodnôt  $Q_\beta$  pre neutrónovo deficitné izotopy Fr. Modrým rámcikom je zvýraznená oblasť, kde možno očakávať  $\beta\text{DF}$ .

### 4.2 $P_{\beta\text{DF}}$ a vetviace pomery

Experimentálne možno určiť pravdepodobnosť oneskoreného štiepenia po beta premene podľa nasledovného vzorca:

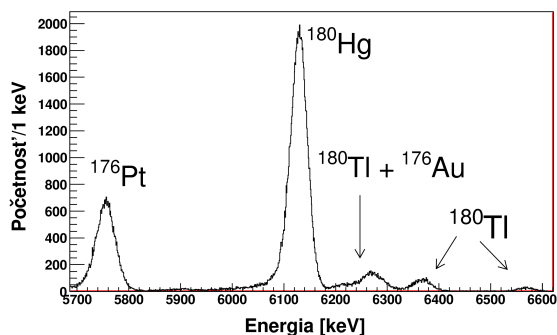
$$P_{\beta\text{DF}} = N_{\beta\text{DF}}/N_\beta \quad (9)$$

kde  $N_{\beta\text{DF}}$  je počet oneskorených štiepení po beta premene a  $N_\beta$  je počet beta premien. Jednotlivé počty určíme na základe alfa spektra a vetviacich pomerov premien pre dané izotopy.

Z alfa spektier je možné vypočítať aj vetviace pomery pre izotopy vznikajúce v rade premien začínajúcom skúmaným izotopom. V najjednoduchšom prípade vzniká dcérske jadro alfa premenu materského jadra, pričom početnosti alfa častíc emitovaných obidvomi druhmi jadier je možné priamo určiť z alfa spektra. Potom vetviaci pomer pre alfa premenu dcérskeho jadra je jednoducho pomer početnosti od dcérskych jadier a početnosti od materských jadier. V zložitejších prípadoch, keď jadro vzniká elektrónovým záchyтом alebo zároveň aj alfa premenu, prípadne pri určovaní vetviaceho pomeru

materského jadra, môže byť potrebné využiť známy vetviaci pomer pre niektoré z jadier.

Na obr. 10 je časť alfa spektra pre  $^{180}\text{Tl}$ . V alfa spektre je viditeľné, že sa dosahujú pomerne veľké početnosti, napriek tomu, že toto meranie bolo len rýchlym testom. Jednotlivé početnosti sú zhrnuté v tab. 1. Bola dosiahnutá vysoká čistota zväzku, v spektre sa nachádzajú len alfa čiary  $^{180}\text{Tl}$  a dcérskych produktov po rádioaktívnych premenách.



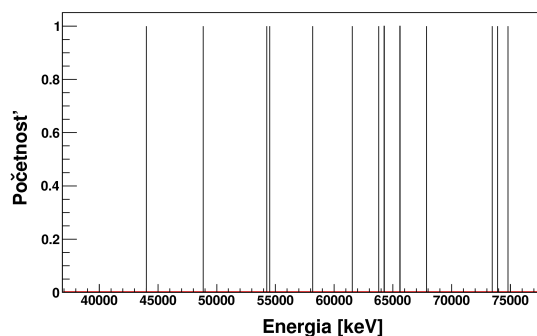
Obr. 10 Časť alfa spektra  $^{180}\text{Tl}$ .

Izotop	$E_{\alpha\text{exp}}$ [keV]	$E_{\alpha\text{ref}}$ [keV]	$N_{\alpha}$
$^{180}\text{Tl}$	$6211 \pm 19$	$6208 \pm 10$	$1391 \pm 37$
$^{176}\text{Au}$		$6228 \pm 10$	
$^{180}\text{Tl}$	$6270 \pm 23$	$6281 \pm 10$	$7305 \pm 85$
$^{176}\text{Au}$		$6286 \pm 10$	
$^{180}\text{Tl}$	$6366 \pm 18$	$6362 \pm 10$	$3573 \pm 60$
	$6568 \pm 15$	$6560 \pm 10$	$942 \pm 31$
$^{180}\text{Hg}$	$6129 \pm 16$	$6119 \pm 4$	$83659 \pm 289$
$^{176}\text{Pt}$	$5754 \pm 19$	$5753 \pm 3$	$30179 \pm 174$

Tab. 1 Početnosti zaznamenaných alfa častíc, emitovaných jednotlivými izotopmi.  $E_{\alpha\text{exp}}$  je energia alfa čiary určená z experimentu,  $E_{\alpha\text{ref}}$  je referenčná hodnota alfa čiary. Referenčné hodnoty sú prevzaté z [NNDC], pre  $^{180}\text{Tl}$  sú z [Toth a kol., 1998].

Na obr. 11 sú štiepne fragmenty pochádzajúce zo štiepenia  $^{180}\text{Hg}$ , ktorá vzniká elektrónovým záchyтом /  $\beta^+$  premenou v  $^{180}\text{Tl}$ . Štiepne fragmenty majú energie od 44 MeV po takmer 76 MeV, čo je v súhlase s pozorovaným asymetrickým štiepením pre  $\beta\text{DF}$  izotopu  $^{180}\text{Tl}$  publikovaným v [Andreyev a kol., 2010].

Spolu bolo zaznamenaných 13 štiepení. Pravdepodobnosť  $\beta\text{DF}$  pre  $^{180}\text{Tl}$  (tab. 5) bola určená ako  $P_{\beta\text{DF}} = (3,7 \pm 1,0) \cdot 10^{-5}$ . Táto hodnota je v súlade s výsledkami predchádzajúcich merí  $P_{\beta\text{DF}} = (3,6 \pm 0,7) \cdot 10^{-5}$  [Andreyev a kol., 2010]. Určené vetviacie pomery sú v tab. 2.

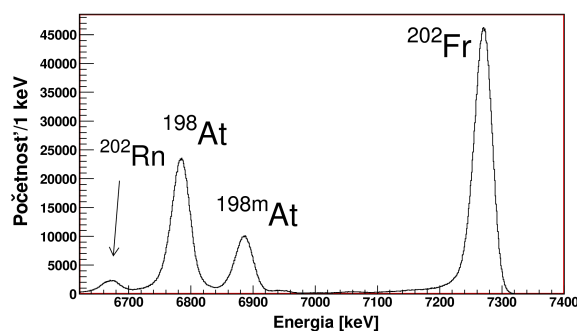


Obr. 11 Štiepne fragmenty  $^{180}\text{Hg}$ .

Izotop	$E_{\alpha\text{exp}}$ [keV]	$E_{\alpha\text{ref}}$ [keV]	$b_{\alpha\text{exp}}$ [%]	$b_{\alpha\text{ref}}$ [%]
$^{176}\text{Pt}$	$5754 \pm 19$	$5753 \pm 3$	$32,6 \pm 0,3$	$40 \pm 2$
$^{176}\text{Au}$	$6211 \pm 19^*$	$6228 \pm 10$	$18,8 \pm 5,7$	-
	$6270 \pm 23^*$	$6286 \pm 10$		-

Tab. 2 Vetviacie pomery alfa premien. Referenčné hodnoty sú prevzaté z [NNDC]. \*Ide o energie zmiešaných pikov pre  $^{176}\text{Au} + ^{180}\text{Tl}$ .

Početnosti pre alfa spektrum  $^{202}\text{Fr}$  (obr. 12) sú zhrnuté v tab. 3, pričom pre  $^{202}\text{Fr}$  dosahujú o tri rády vyššie hodnoty než v iných spektroskopických experimentoch zameraných na tento izotop [Uusitalo a kol., 2005, Huysse a kol., 1992].



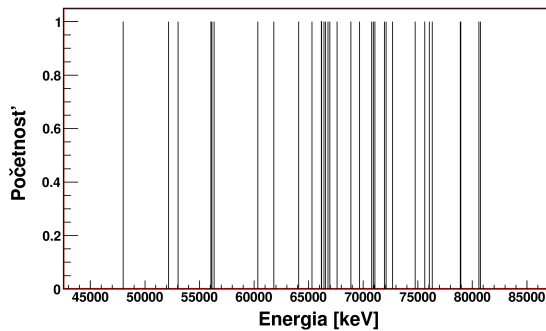
Obr. 12 Časť alfa spektra  $^{202}\text{Fr}$ .

Izotop	$E_{\alpha\text{exp}}$ [keV]	$E_{\alpha\text{ref}}$ [keV]	$N_{\alpha}$
$^{202}\text{Fr}$	$7270 \pm 15$	$7241 \pm 8$	$1750742 \pm 1323$
$^{202\text{m}}\text{Fr}$		$7235 \pm 8$	
$^{202}\text{Rn}$	$6671 \pm 14$	$6639,5 \pm 1,9$	$61953 \pm 249$
$^{198}\text{At}$	$6784 \pm 15$	$6748 \pm 6$	$831288 \pm 912$
$^{198\text{m}}\text{At}$	$6885 \pm 14$	$6850 \pm 6$	$334158 \pm 578$

Tab. 3 Početnosti zaznamenaných alfa častíc, emitovaných jednotlivými izotopmi. Referenčné

hodnoty sú prevzaté z [Uusitalo a kol., 2005] a [NNDC]. Bola použitá predbežná energetická kalibrácia.

Zaznamenaných bolo 33 štiepných fragmentov štiepenia  $^{202}\text{Rn}$  (obr. 13), ktorý vzniká elektrónovým záchyтом /  $\beta^+$  premenu v  $^{202}\text{Fr}$ . Rozsah energií fragmentov bol od 48 MeV do 81 MeV, teda ide opäť o asymetrické štiepenie. Pravdepodobnosť  $\beta\text{DF}$  (tab. 5) bola  $P_{\beta\text{DF}} = (2,07 \pm 0,42) \cdot 10^{-4}$ . Na základe tejto hodnoty môžeme urobiť rýchly odhad výšky štiepnej bariéry s presnosťou asi 1 MeV. Keď sa pozrieme na závislosť  $P_{\beta\text{DF}}$  od  $Q_{\beta} - B_f$  na obr. 5, ihneď vidíme, že pravdepodobnosti zistenej pre  $^{202}\text{Fr}$  zodpovedá hodnota  $Q_{\beta} - B_f$  približne 0,5 MeV. Hodnoty  $Q_{\beta}$  sú pre oba porovnávané modely približne zhodné (obr. 9), takže ďalej budeme uvažovať hodnotu z Thomas-Fermiho modelu  $Q_{\beta} = 9,2$  MeV. Dostaneme tak výšku štiepnej bariéry  $B_f = 8,7$  MeV. Táto hodnota je takmer rovnaká ako z Thomas-Fermiho modelu  $B_f = 8,6$  MeV.



Obr. 13 Štiepne fragmenty  $^{202}\text{Rn}$ .

V tab. 4 sú uvedené vetviace pomery pre niektoré izotopy vznikajúce v experimente.  $^{202}\text{Fr}$  má dve alfa čiary, vytvárané premenu základného a izomérneho stavu [Uusitalo a kol., 2005]. Ich energie sú však natoľko blízke, že sa pomocou nášho merania nedajú rozlíšiť. Vetviaci pomer  $^{202}\text{Fr}$  je potom zmiešaný vetviaci pomer základného a izomérneho stavu. Pri  $^{198}\text{At}$  už sú základný a izomérny stav rozlíšiteľné, ale vetviace pomery sú len spodnými limitmi, pretože materský izotop je práve  $^{202}\text{Fr}$ , kde jeho alfa početnosť je súčet početností od základného a izomérneho stavu, pričom  $^{198}\text{At}$  vzniká z  $^{202}\text{Fr}$  a  $^{198\text{m}}\text{At}$  vzniká z  $^{202\text{m}}\text{Fr}$ .

Izotop	$E_{\text{aexp}}$ [keV]	$E_{\text{aref}}$ [keV]	$b_{\text{aexp}}$ [%]	$b_{\text{aref}}$ [%]
$^{202}\text{Fr}$	$7270 \pm 15$	$7241 \pm 8$	$95,7 \pm 0,4$	100
$^{202\text{m}}\text{Fr}$		$7235 \pm 8$		
$^{198}\text{At}$	$6784 \pm 15$	$6748 \pm 6$	$> 47,48 \pm 0,06$	$> 80$
$^{198\text{m}}\text{At}$	$6885 \pm 14$	$6850 \pm 6$	$> 19,09 \pm 0,04$	$> 67$

Tab. 4 Vetviace pomery alfa premien. Referenčné hodnoty sú prevzaté z [Uusitalo a kol., 2005] a [Huysse a kol., 1992].

Izotop	$P_{\beta\text{DF}}$
$^{180}\text{Tl}$	$(3,7 \pm 1,0) \cdot 10^{-5}$
$^{202}\text{Fr}$	$(2,07 \pm 0,42) \cdot 10^{-4}$

Tab. 5 Pravdepodobnosti  $\beta\text{DF}$

## Záver

Podarilo sa pozorovať oneskorené štiepenie po beta premene v izotopoch  $^{180}\text{Tl}$  a  $^{202}\text{Fr}$ . Boli učené pravdepodobnosti  $\beta\text{DF}$   $P_{\beta\text{DF}}(^{180}\text{Tl}) = (3,7 \pm 1,0) \cdot 10^{-5}$  a  $P_{\beta\text{DF}}(^{202}\text{Fr}) = (2,07 \pm 0,42) \cdot 10^{-4}$ . Pravdepodobnosť pre  $^{180}\text{Tl}$  je v rámci neistoty zhodná s hodnotou publikovanou v [Andreyev a kol., 2010],  $P_{\beta\text{DF}} = (3,6 \pm 0,7) \cdot 10^{-5}$ . Na základe  $P_{\beta\text{DF}}$  pre  $^{202}\text{Fr}$  sa ukazuje pre tento izotop vhodnejší Thomas-Fermiho model na výpočet štiepnej bariéry. Zároveň sa podarilo určiť vetviace pomery alfa premien pre izotopy  $^{176}\text{Pt}$ ,  $^{176}\text{Au}$ ,  $^{202}\text{Fr}$  a dolné limity pomerov  $^{198}\text{At}$  a  $^{198\text{m}}\text{At}$ .

## Literatúra

- [Hall a Hoffmann, 1990] Hall, H. L. a Hofmann, D. C. (1990). Low energy nuclear fission and our understanding of the nucleus. In *Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry* Vol. 142 No. 1, 53-78
- [Krane, 1988] Krane, K. S. (1988). *Introductory Nuclear Physics*. John Wiley and Sons, Hoboken
- [Flerov a Petrjak, 1940] Flerov, G. N. and Petrjak, K. A. (1940). Spontaneous Fission of Uranium. In *Physical Review* 58, 89
- [Mayer-Kuckuk, 1979] Mayer-Kuckuk, T. (1979). *Fyzika atomového jadra*. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha
- [Grewe a kol., 1997] Grewe, A. a kol. (1997). Fission barriers from electromagnetic fission of 430 A MeV radioactive ion beams. In *Nuclear Physics A* 614, 400-414
- [Elseviers, 2009] Elseviers, J. (2009). *Electron Capture Delayed Fission of  $^{180}\text{Tl}$* . Diplomová práca, KU, Leuven (Belgicko).
- [Hall a Hoffmann, 1992] Hall, H. L. a Hofmann, D. C. (1992). Delayed Fission. *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* 42-147
- [Cowan a Thielemann, 2004] Cowan, J. J. a Thielemann, F. K. (2004). R-Process Nucleosynthesis in Supernovae. In *Physics Today* (October 2004) 47-53
- [Panov a kol., 2005] Panov, I. V. a kol. (2005). Calculations of fission rates for r-process nucleosynthesis. In *Nuclear Physics A* 747, 633-654

- [Andreyev a kol., 2008] Andreyev, A. N. a kol. (2008). Electron-capture delayed fission in the lead region: decay of  $^{192,194}\text{At}$ . Ešte nepublikované.
- [Myers a Swiatecki, 1999] Myers, W. D. a Swiatecki, W. J. (1999). Thomas-Fermi fission barriers. In *Physical Review C* Vol. 60
- [Myers a Swiatecki, 1994] Myers, W. D. a Swiatecki, W. J. (1994). Table of Nuclear Masses according to the 1994 Thomas-Fermi Model. Dostupné na internete: <ftp://www-nsdth.lbl.gov/pub/myers/ms-mass-table>
- [Möller a kol., 2009] Möller, P. a kol. (2009). Heavy-element fission barriers. In *Physical Review C* 79
- [Möller a kol., 1995] Möller, P. a kol. (1995). Nuclear Ground-State Masses and Deformations. In *Atomic data and nuclear data tables* 59, 185-381.
- [ISOLDE] The ISOLDE facility. Dostupné na internete: <http://isolde.web.cern.ch/ISOLDE/>
- [Andreyev a kol., 2010] Andreyev, A. N. a kol. (2010). New Type of Asymmetric Fission in Proton-Rich Nuclei. In *Physical Review Letters* 105
- [NNDC] National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory: Chart of Nuclides. Dostupné na internete: <http://www.nndc.bnl.gov/chart/>
- [Toth a kol., 1998] Toth, K. S. a kol. (1998). Identification of  $^{180}\text{Tl}$   $\alpha$  decay. In *Physical Review C* 58
- [Uusitalo a kol., 2005] Uusitalo, J. a kol. (2005).  $\alpha$  decay studies of very neutron-deficient francium and radium isotopes. In *Physical Review C* 71
- [Huyse a kol., 1992] Huyse, M. a kol. (1992). Isomers in three doubly odd Fr-At-Bi  $\alpha$ -decay chains. In *Physical Review C* 46, 1209-1217

# Study of background processes for the top-quark physics

Miroslav Bagljaš<sup>1\*</sup>

Supervisor: Stanislav Tokár<sup>1†</sup>

Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

**Abstract:** Study of the Monte Carlo (MC) simulated background processes for the top-quark physics at  $\sqrt{s} = 7TeV$  at the ATLAS experiment is reviewed in this paper. The standard algorithms and cuts that are used on both MC simulated  $t\bar{t}$  signal and real detector data were used to study background. Different threshold mass ( $m_{cr}$ ) for pairing procedure was used to examine suppression of background.

Number of background events that pass our algorithms and cuts was obtained. For these events we calculated combined b-jet charge and plotted this distribution in histograms. Study was done for lepton-jet decay channel of top-quark taking into account only leptonic branch of this decay.

**Keywords:** top-quark, b-jet, combined b-jet charge, background processes, ATLAS experiment, data processing, MC simulation

## Introduction

After a short downtime for maintenance ATLAS experiment is once again collecting data from proton-proton collisions at LHC. Present integral luminosity of ATLAS experiment for proton-proton collisions is  $35pb^{-1}$  and protons are colliding at  $\sqrt{s} = 7TeV$  central mass energy.

Statistics of real data is still insufficient for definitive determination of the top-quark charge. Until we have sufficient statistics of real data it is important to study behavior of our algorithms and procedures on MC simulated data. Also it is important to study MC processes that represent background to our algorithms, so they can be tuned. Once we know how many background events pass through the algorithms we can use this number to subtract it from real data events that pass the same algorithms.

## 1 Top-quark

In this Section basic properties of top-quark that are predicted by Standard Model (SM) are revised. Pre-

dictions for top-quark charge in SM and exotic model (XM) are compared. Production of top-quark at LHC and decay channels of  $t\bar{t}$  process, that are used for top-charge determination are also mentioned.

### 1.1 Standard Model (SM)

In the SM particles are divided into fermions and bosons. Fermions are particles with half integer spin and bosons have integer spin. The particles in SM are shown in Figure 1.

	2.4 MeV $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ u up	1.27 GeV $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ c charm	171.2 GeV $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ t top	0 0 1 Y photon
Quarks	4.8 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ d down	104 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ s strange	4.2 GeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ b bottom	0 0 1 g gluon
	<2.2 eV 0 $\frac{1}{2}$ e electron neutrino	<0.17 MeV 0 $\frac{1}{2}$ $\nu_{\mu}$ muon neutrino	<15.5 MeV 0 $\frac{1}{2}$ $\nu_{\tau}$ tau neutrino	91.2 GeV 0 1 Z weak force
Leptons	0.511 MeV -1 $\frac{1}{2}$ e electron	105.7 MeV -1 $\frac{1}{2}$ $\mu$ muon	1.777 GeV -1 $\frac{1}{2}$ $\tau$ tau	80.4 GeV $\pm 1$ 1 W weak force
				Bosons (Forces)

Figure 1: PStandard Model particles, with gauge bosons in rightmost column ([Wik, ])

Bosons are force carriers, there are 12 bosons with spin 1 in SM: photon (electro-magnetic interaction), gluon (strong interaction, 8 gluons with different color states) and  $W^{\pm}, Z^0$  (weak interaction). Higgs boson (spin 0) is yet to be confirmed. One of the reasons why LHC was built is to investigate and try to confirm existence of Higgs boson.

Fermions form matter, they are divided into hadrons and leptons. The hadrons consist of quarks. Structure of leptons have not been discovered yet, so we consider them structureless particles. There are three generations of quarks and leptons. The first generation is lightest and the third one contains heaviest particles.

- 1st generations consists of u- and d-quark, elec-

\*miroslav.bagljas@gmail.com

†Stanislav.Tokar@cern.ch

tron and electron neutrino.

- 2nd generation consists of s- and c-quark, muon and muon neutrino.
- 3rd generation consists of t- and b-quark, tau lepton and tau neutrino

Top-quark is III generation fermion. It has 1/2 spin, charge of  $+2/3 \cdot e$ <sup>1</sup> and mass of  $172 \pm 0.9 GeV$  [Nakamura, 2010].

It is accepted that top-quark, discovered by the experiments CDF and D0 at Fermilab [Abe, 1995], has charge of  $+2/3 \cdot e$ . But these experiments have not completely ruled out exotic model with  $-4/3 \cdot e$  charge. We expect to determine top-quark charge with confidence level of  $5 \cdot \sigma$  and completely rule out the exotic model.

## 1.2 Exotic model

The exotic model (XM) appeared as an alternative interpretation to the SM top-quark hypothesis of the Fermilab Tevatron experiments' discovery.

The XM predicts the top-quark charge to be  $-4/3 \cdot e$  and mass of  $\approx 170 GeV$ . Complete study on this matter can be found in the publication [Chang et al., 1999]. Main difference between the SM and the XM is in sign of the top-quark charge. Therefore we don't need to calculate top-quark charge precisely, all what we need to do is to determine the sign of the top-quark charge.

## 1.3 Production of $t\bar{t}$ pairs

In proton-proton collisions top-quark pairs can be produced through one of the following channels showed in Figure 2. As the caption under Figure 2. suggests a) and b) are gloun-gloun fusion production and c) is production by quark anti-quark annihilation.

The first two processes are more probable to occur at LHC, while the quark anti-quark production is a main source of top quarks at Tevatron.

## 1.4 Top-quark decay channels

Top-quark lives for a very short time and then decays. Main decay channels of the top-quark go through  $W + q$ , where  $q$  is  $b^-$ ,  $s^-$  or  $d^-$  quark.

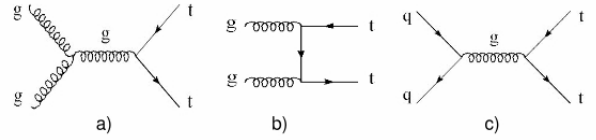


Figure 2: Production of  $t\bar{t}$  pairs: a),b) gloun-gloun fusion, c) quark anti-quark annihilation

In the  $t\bar{t}$  process, when both top-quarks decay through  $W + b$  channel, decay channels can be distinguished basing on decay products of W bosons. Formula (1) denotes possible decay channels of  $t\bar{t}$  process when top-quark decays to W boson and b-quark. Based on the number of leptons in final channel we distinguish di-leptonic, lepton+jet and hadronic channel. In the dileptonic (DL) channel we have two b-jets and both W bosons decaying to leptons and neutrinos. In the lepton+jet (LJ) channel one W boson decays leptonically and other into two quarks which hadronize and form jets so we have 4 jets, 2 of which must be b-jets. In the hadronic channel both W bosons decay into quarks, so we have six jets in this channel and two of them must be b-jets. Only the first two channels are used in our study. The hadronic channel is not used because it is hard to distinguish it from the QCD multi-jet processes.

$$\begin{aligned} t\bar{t} &\rightarrow l^+ \nu l^- \bar{\nu} b \bar{b} \\ t\bar{t} &\rightarrow l^\pm \nu j j b \bar{b} \\ t\bar{t} &\rightarrow j j j j b \bar{b} \end{aligned} \quad (1)$$

The DL and LJ channels are used because they can be distinguished relatively well using the standard procedures and algorithms.

In our study we used only LJ channel. We were interested only in leptonic branch of this decay. This means that we applied our algorithms only on the lepton+b-jet part of LJ channel, while the hadronic channel was not taken into account at this point of our study.

## 1.5 Top-quark decay in SM vs XM

Since the SM and the XM predict different charge, decay products of top-quark will also have different charge. Using this fact we can distinguish between these two models. In the SM we have top-quark decaying to  $W+b$  with the following products:

$$t \rightarrow W^+ + b^{-1/3}, W^+ \rightarrow l^+ + \bar{\nu} \quad (2)$$

<sup>1</sup> $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$  elementary charge

and for the XM decay products are the following:

$$t \rightarrow W^- + b^{-1/3}, W^- \rightarrow l^- + \nu \quad (3)$$

For antitop-quark signs of decay products will be opposite in both cases.

## 2 Background processes to $t\bar{t}$ processes

By background process we understand the process that can be interpreted by our algorithms and cuts as  $t\bar{t}$  process. These processes have similar decay products as the  $t\bar{t}$  decay process. Since we are interested in top-quark decaying into W boson and b-quark, our background consist mainly of processes that have  $W^\pm, Z^0$  bosons and quarks (jets) in their output channel. The QCD background processes have multiple jets and leptons with high momentum. The main background processes are the following ones:

- W+bb
- W+jets
- Z+jets
- Single top
- QCD background
- Di-boson

Although the single top background is not real background since the top-quark is produced in this channel, but our algorithms are developed for studying  $t\bar{t}$  processes, so the single top production contributes as a background in this case.

Data driven method will be used to study the QCD background. The data driven method is using real data to estimate QCD background. Since we have not used this method yet, the QCD background at the moment is not included in this study.

Since the largest contribution to the background is expected to be from the W+bb and W+jets processes, these processes were studied in more detail and had a priority over the other background types.

## 3 Methods and procedures used for event selection

### 3.1 Methods to determine top charge $Q^{top}$

For determination of  $Q^{top}$  we calculate charge of top-quark decay products. In most cases the top-quark decays into W boson and b-quark,  $t \rightarrow Wb$ . The charge of W bosons can be determined through the charge of the lepton to which it decays. The b-quark hadronizes and the products of its hadronization are in the shape of cone which is called b-jet. By using b-tagging algorithms we can calculate charge of the b-jet. Studies of the MC  $t\bar{t}$  signal show that although the b-jet charge calculated with these procedures is not exactly equal to  $-1/3 \cdot e$  but it has the right sign i.e. negative. This is explained later in paper.

#### 3.1.1 B-tagging algorithms

B-tagging is a procedure for determination if a given jet is b-jet. There are three main b-tagging algorithms which will be used in the study of the top-quark.

- JetProb
- SV0
- IP3D+SV1

#### 3.1.2 JetProb

JetProb is not currently used, we used it to study simulated the top-quark charge events at  $\sqrt{s} = 10TeV$  [Tokar et al., 2010]. This algorithm did not give satisfying results at  $10TeV$ . It was estimated that it will be used for the first real data samples, but the SV0 is used instead.

#### 3.1.3 IP3D+SV1

The IP3D+SV1 gave the best results at  $\sqrt{s} = 10TeV$ , but it is very sensitive to data and detector calibration, thus it will be used for a later analysis. It gives best results at cost of low number of events that can pass its strict requirements.

#### 3.1.4 SV0

SV0 is currently being used for the top charge studies on real data. It is not as sensitive to detector calibration as IP3D+SV1, but still does good selection of events.

The SV0 is life-time based reconstruction algorithm. It reconstructs secondary vertexes<sup>2</sup>.

This algorithm first checks if track belongs to jet and creates a list of these tracks. The track can be associated with only one jet. Then reconstruction of secondary vertexes is carried out. The SV0 reconstruct secondary vertexes following way: two track vertexes, that are significantly away from primary vertex, are created. The vertexes with mass close to mass of  $K_S^0$  meson or  $\Lambda^0$  baryon are excluded. After that the SV0 excludes the vertexes based on trace they left in detector.

For a reconstructed secondary vertex in the above mentioned way, a significance is calculated and compared to a predefined value. More details can be found in [Collaboration, 2008] Section on b-tagging.

### 3.2 B-jet charge weighting procedure

After the b-tagging is done, we can calculate the effective charge of b-jet. This is done using the following formula:

$$Q_{bjet} = \frac{\sum_i^N q_i |\vec{j} \cdot \vec{p}_i|^\kappa}{\sum_i^N |\vec{j} \cdot \vec{p}_i|^\kappa} \quad (4)$$

where  $q_i$  is the charge of  $i$ -th b-jet track,  $\vec{j}$  is the unit vector in the direction of b-jet axis,  $p_i$  is the momentum of  $i$ -th b-jet track and  $\kappa = 0.5$  is an exponent that was found by optimizing of the procedure.

### 3.3 Pairing procedure (Invariant mass criterion)

The lepton and b-jet pairing was done using the invariant mass distribution of the lepton and the b-tagged jet,  $m(l, b_{jet})$ . If assignment is correct  $m(l, b_{jet})$  cannot exceed the top-quark mass. This can be seen on Figure 3. The invariant mass spectra for the leptons and b-jets originating from the same top-quark are shown with the full red line and those from different top-quarks are shown with the dashed blue line.

In our case when we have lepton+jet channel of  $t\bar{t}$  decay, only b-jets that satisfy:

$$m(l, b_{jet}^{(1,2)}) < m_{cr} \wedge m(l, b_{jet}^{(2,1)}) > m_{cr} \quad (5)$$

are taken.

<sup>2</sup>vertex - space point in which interaction occurred (particle collision or decay), by secondary vertex usually particle decay in meant

In the dileptonic case both leptons should satisfy condition (5). The optimal value of  $m_{cr}$  cut was found to be 155 GeV.

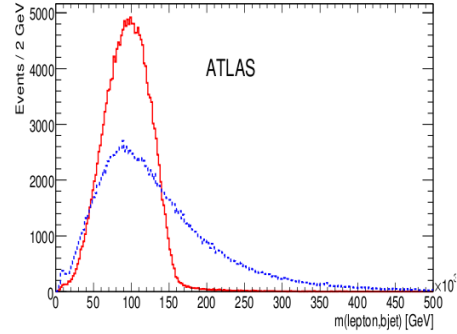


Figure 3: Lepton b-jet invariant mass spectra for the lepton and b-jet pairs from the same top-quark (full red line) and for those which origin from different top-quarks (dashed blue line).

### 3.4 Combined b-jet charge

The variable used for distinguishing between the SM and XM is the combined b-jet charge,  $Q_{comb}$ , which is calculated the following way:

$$Q_{comb} = Q_{bjet}^l \cdot Q_l \quad (6)$$

where  $Q_{bjet}^l$  is calculated using Eq. (4) and  $Q_l$  is charge of the lepton which was associated with a b-jet as described in Section 3.3.

When we look at the equations (2) and (3) in Section 1.5 we see that in the case of SM  $Q_{comb} < 0$  for both top- and antitop-quark decay. In case of the XM  $Q_{comb} > 0$  for top- and antitop-decay. Using this fact we can easily distinguish between the SM and XM.

## 4 Data samples and event selection used

We used the MC 2010  $\sqrt{s} = 7TeV$  simulated data approved by the Top Working group. Since the background samples are smaller than the  $t\bar{t}$  signal sample, the background was scaled to the signal sample 105200 which has 997000 events and luminosity of  $11404.71 pb^{-1}$ .

Scale factor is calculated for each background process using the following formula:

$$scale = \frac{997000 \cdot \sigma_{bckg}}{N_{bckg} \cdot \sigma_{t\bar{t}}} \quad (7)$$



where  $\sigma_{bckg}$  is the cross section of a given background process,  $N_{bckg}$  is the number of events in the corresponding background sample of given process and  $\sigma_{t\bar{t}}$  is the cross section of  $t\bar{t}$  process.

#### 4.1 Background samples

The MC simulated background processes listed here were used in the study. The background sample number denotes a specific process for given type of background. To resolve their meaning one should consult ATLAS TWiki page.

- W+bb: 106280, 106281, 106282, 106283
- W+jets: 107680, 107681, 107682, 107683, 107684, 107685, 107690, 107691, 107692, 107693, 107694, 107695, 107700, 107701, 107702, 107703, 107704, 107705
- Single top: 108340, 108341, 108342, 108343, 108344, 108345, 108346

#### 4.2 Event selection criteria

As it was mentioned in Section 1.5, we are using the LJ and DL channel to perform our study. At the moment only the LJ channel is studied. Following selection criteria are for the LJ channel.

To select a  $t\bar{t}$  candidate in the LJ channel we are using the criteria written in Tables 1 and 2. In Table 1 are the requirements for the case when we have electron in the LJ channel, and Table 2 is for the muon case. The common cuts for both leptons are:

- $m_{crit} = 155 \text{ GeV}$  for invariant mass criterion
- b-jet track  $p_T > 1 \text{ GeV}$
- b-jet cone  $\Delta R < 0.25$
- $d_0 < 2 \text{ mm}$
- $z_0 \cdot \sin \theta < 10 \text{ mm}$
- For the inner detector (ID): at least one hit in the pixel detector and at least 6 hits in the SCT(scintillation detector).

For the study of the MC simulation data (both signal and background) the following single leptonic trigger was required: EF\_e15\_medium (electron case) and EF\_mu13\_tight (muon case).

Cuts description for Lepton + jets channel	
cut	Electron channel
C1	Electron trigger requirements (see below)
C2	Require primary vertex with at least 5 tracks
C3	Remove events with bad jets with $p_T > 20 \text{ GeV}$ and $E > 0 \text{ GeV}$
C4	At least 1 electron $p_T > 20 \text{ GeV}$
C5	Exactly 1 electron $p_T > 20 \text{ GeV}$
C6	Exactly 0 muons $p_T > 20 \text{ GeV}$
C7	Trigger matching (selected electron matches a triggered electron)
C8	The event is rejected if the electron shares a track with a muon close to a jet
C9	Missing transverse energy $MET > 35 \text{ GeV}$ and the transverse mass of the W $> 25 \text{ GeV}$
C10	At least 2 jets with $p_T > 25 \text{ GeV}$ and $ \eta  < 2.5$
C11	At least 4 jets with $p_T > 25 \text{ GeV}$ and $ \eta  < 2.5$
C12	At least 1 good jet with SV0 weight $> 5.85$

Table 1: The standard  $t\bar{t}$  cuts used to select the  $t\bar{t}$  candidate in LJ channel (when lepton = electron).

Cuts description for Lepton + jets channel	
cut	Muon channel
C1	Muon trigger requirements (see below)
C2	Require primary vertex with at least 5 tracks
C3	Remove events with bad jets with $p_T > 20 \text{ GeV}$ and $E > 0 \text{ GeV}$
C4	At least 1 muon $p_T > 20 \text{ GeV}$
C5	Exactly 1 muon $p_T > 20 \text{ GeV}$
C6	Exactly 0 electrons $p_T > 20 \text{ GeV}$
C7	Trigger matching (selected muon matches a triggered muon)
C8	The event is rejected if the electron shares a track with a muon close to a jet
C9	Missing transverse energy $MET > 20 \text{ GeV}$ and the transverse mass of the W + $MET > 60 \text{ GeV}$
C10	At least 2 jets with $p_T > 25 \text{ GeV}$ and $ \eta  < 2.5$
C11	At least 4 jets with $p_T > 25 \text{ GeV}$ and $ \eta  < 2.5$
C12	At least 1 good jet with SV0 weight $> 5.85$

Table 2: The standard  $t\bar{t}$  cuts used to select the  $t\bar{t}$  candidate in LJ channel (when lepton = muon).

## 5 Results

Here we present the results obtained with the methods and selection criteria described in Section 3.

Different  $m_{cr}$  threshold masses for the pairing procedure (Section 3.3) were tested only on the W+bb and W+jets processes. The results are in Table 3,  $N_{scaled}$  was calculated by multiplying  $N$  with the scale obtained using Formula (7). Other cuts were the same as those in Tables 1 and 2. The results are summary of both electron and muon case.

In Table 3 we see that the number of background

$m_{cr}$ [GeV]	W+bb		W+jets	
	$N$	$N_{scaled}$	$N$	$N_{scaled}$
140	$26 \pm 5.10$	$158.8 \pm 31.1$	$29 \pm 5.4$	$241.8 \pm 44.9$
145	$30 \pm 5.48$	$181.9 \pm 33.2$	$33 \pm 5.7$	$269.3 \pm 46.9$
150	$29 \pm 5.4$	$176.4 \pm 32.8$	$37 \pm 6.1$	$317.9 \pm 52.3$
155	$29 \pm 5.4$	$175.5 \pm 32.6$	$35 \pm 5.9$	$283.3 \pm 47.9$
160	$26 \pm 5.1$	$158.8 \pm 31.1$	$32 \pm 5.7$	$283.5 \pm 50.1$
W+bb and W+jets				
140	$400.6 \pm 54.0$			
145	$451.3 \pm 56.9$			
150	$494.3 \pm 60.8$			
155	$458.7 \pm 57.3$			
160	$442.3 \pm 58.1$			

Table 3: Number of background events for different  $m_{cr}$  values, column W+bb and W+jets is joined result

$m_{cr}$ [GeV]	W+bb	W+jets	Both
	$\langle Q_{comb} \rangle$	$\langle Q_{comb} \rangle$	$\langle Q_{comb} \rangle$
140	$0.068 \pm 0.12$	$-0.029 \pm 0.1$	$0.010 \pm 0.11$
145	$0.035 \pm 0.11$	$-0.008 \pm 0.11$	$0.010 \pm 0.11$
150	$0.037 \pm 0.11$	$-0.003 \pm 0.09$	$0.012 \pm 0.10$
155	$0.041 \pm 0.11$	$-0.004 \pm 0.1$	$0.014 \pm 0.10$
160	$-0.013 \pm 0.1$	$-0.007 \pm 0.09$	$-0.009 \pm 0.09$

Table 4:  $\langle Q_{comb} \rangle$  and  $\sigma_Q$  of W+bb and W+jets for different  $m_{cr}$  values, column Both is joined result

events that pass our procedures and cuts do not change significantly for various  $m_{cr}$ . The least number of events pass for  $m_{cr} = 140$  GeV and  $160$  GeV for both the W+bb and W+jets background type. At the moment  $m_{cr} = 155$  GeV is used as the default cut, but as we see it gives a slightly larger number of background events than two values previously mentioned.

The results in Table 4 show that in all cases the mean value of  $\langle Q_{comb} \rangle$  is compatible with zero if the uncertainties are taken into account.

background	$N_{scaled}$	$\langle Q_{comb} \rangle$	B/S[%]
W+bb	$175.5 \pm 32.6$	$0.041 \pm 0.1$	2.24
W+jet s	$283.3 \pm 47.9$	$-0.004 \pm 0.1$	3.61
single top	$393.2 \pm 14.1$	$-0.044 \pm 0.02$	5.02
All-bkgd	$852 \pm 29.4$	$-0.013 \pm 0.07$	10.87
Signal	$7839 \pm 88.5$	$-0.086 \pm 0.0036$	100

Table 5: Number of events  $N_{scaled}$ , mean  $\langle Q_{comb} \rangle$  charge and B/S ration for background process after invariant mass criterion,  $m_{cr} = 155$  GeV

In Table 5 the number of scaled background events,  $N_{scaled}$ , that pass our selection criteria is shown in the first column. For each background type we computed  $\langle Q_{comb} \rangle$ . The B/S is background-to-signal per-

centage. As expected the single top gives the largest portion of background events, but its  $Q_{comb}$  is correlated with the signal  $Q_{comb}$  i.e. it exhibits similar b-jet charge asymmetry as that of the signal. The  $\langle Q_{comb} \rangle$  for every background type is not significantly shifted away from 0, but is symmetric around it.

In Figure 4 the charge distributions of W+bb, W+jets (blue line) and single top (red line) are shown before the invariant mass criterion was applied. Figure 5 shows the charge distribution of the same background but after the invariant mass criterion. The invariant mass criterion is very important because it suppresses background events significantly as we see by comparing Figures 4 and 5. Also in Figure 5 we can see even better than in Table 5 that the charge distribution of the background processes is symmetrically distributed around 0.

For these plots only the standard cuts were used (as described in Section (4.2)), the study was done only for  $m_{cr} = 155$  GeV.

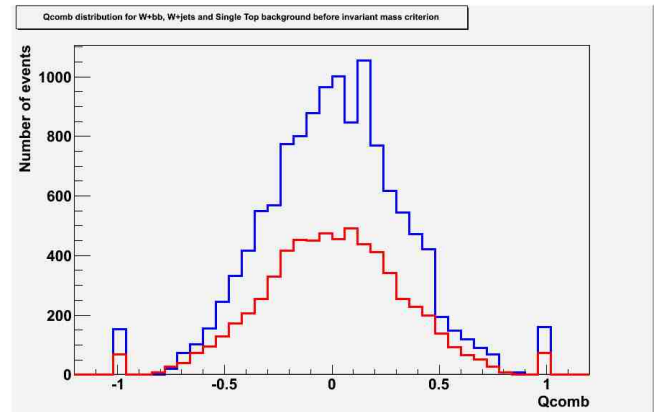


Figure 4:  $Q_{comb}$  distribution for the W+bb and W+jets (blue line) and single top (red line) background before the invariant mass criterion

## 6 Summary

Tables 3 and 4 contain interesting results for different  $m_{cr}$  values for the W+bb and W+jets background summarized (third column). We see that  $m_{cr} = 160$  GeV gives the least number of events and  $\langle Q_{comb} \rangle$  in this case is the closest to 0, but not significantly. The value of  $\langle Q_{comb} \rangle$  in third column of Table 4 is approximately the same for all values of  $m_{cr}$ . In Table 3 the maximal number of events pass the invariant mass criterion for  $m_{cr} = 150$  GeV,

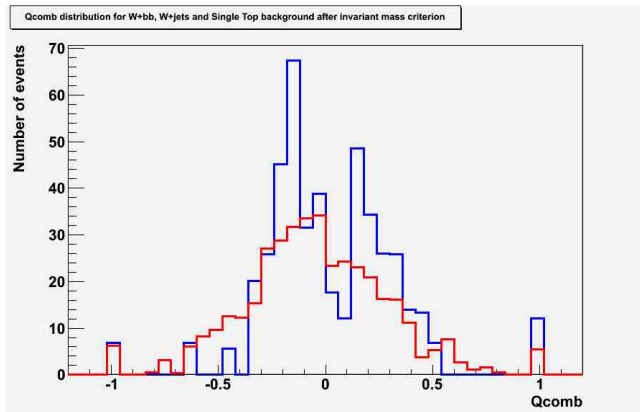


Figure 5:  $Q_{comb}$  distribution for the W+bb and W+jets (blue line) and single top (red line) background after the invariant mass criterion

when  $m_{cr}$  is increased or decreased the number of event drops. Further analysis is needed to determine whether the current default value of  $m_{cr} = 155\text{GeV}$  will be changed or not.

When Figures 4 and 5 are compared, one can see that our algorithms and cuts do very well at suppressing background, but still further investigation is needed to determine if the background can be suppressed even more.

Table 5 shows that the background processes have small B/S ratio, this means that the algorithms and cuts used are performing well at suppressing background.

Other background processes are still to be studied. The data driven method for calculating the QCD contribution is one of our priorities in the upcoming weeks.

The Z+jets background processes were not included in this study, yet. With the Z+jets data samples insufficient statistics of simulated data is a persisting problem. The results obtained for study at  $\sqrt{s} = 10\text{TeV}$  show that the Z+jets processes do not contribute to background significantly. The same is true for di-boson background. It is expected that this background will contribute more to the DL channel of  $t\bar{t}$  process.

## Acknowledgment

Here I would like to thank my supervisor doc. RNDr. Stanislav Tokár, CSc. and Mgr. Pavol Federič for many suggestions and useful information during the work on this paper.

## References

- [Wik, ] [http://en.wikipedia.org/wiki/Standard\\_Model](http://en.wikipedia.org/wiki/Standard_Model).
- [Abe, 1995] Abe, F. e. a. c. (1995). Observation of top quark production in  $\bar{p}p$  collisions with the collider detector at fermilab. *Phys. Rev. Lett.*, 74(14):2626–2631.
- [Chang et al., 1999] Chang, D., Chang, W.-F., and Ma, E. (1999). Alternative interpretation of the fermilab tevatron top events. *Phys. Rev. D*, 59(9):091503.
- [Collaboration, 2008] Collaboration, A. (2008). Expected performance of the atlas experiment detector, trigger and physics.
- [Nakamura, 2010] Nakamura, K. e. a. (2010). Particle physics booklet.
- [Tokar et al., 2010] Tokar, S., Astalos, R., Bagljas, M., Batkova, L., Federic, P., Plazak, L., Stavina, P., and Zenis, T. (2010). Top quark charge in atlas at 10 tev. Technical Report ATL-PHYS-INT-2010-111, CERN, Geneva.

# Štúdium vlastností kvantových systémov pod vplyvom sínusovej deformácie

Michal Daniška<sup>1\*</sup>

Školiteľ: Andrej Gendiar<sup>2†</sup>

<sup>1</sup>Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

<sup>2</sup>Centrum pre výskum kvantovej informácie, FÚ SAV, Dúbravská cesta 9, 845 11 Bratislava

## Abstrakt

Práca skúma vlastnosti nového typu okrajových podmienok - sínusovej deformácie (SD). Zameriava sa na asymptotické správanie systému fermiónov umiestnených na mriežke pri náraste jej rozmeru  $N$ . Ukazuje sa, že pri vhodnej voľbe parametrov SD možno výrazne potlačiť vplyvy konečnorozmernosti oproti voľným okrajovým podmienkam (VOP) a zároveň zvýšiť rýchlosť konvergencie k limitným hodnotám ( $N \rightarrow \infty$ ) na úroveň porovnateľnú s periodickými okrajovými podmienkami (POP).

**Kľúčové slová:** Voľné a periodické okrajové podmienky, sínusová deformácia, translačná invariantnosť, energia základného stavu, asymptotická limita.

## 1 Úvod

Hľadanie riešení Schrödingerovej rovnice zložitejších kvantovomechanických systémov, obzvlášť v prítomnosti nenulovej interakcie, je často možné iba pomocou rôznych numerických algoritmov. Základom analýzy je zvyčajne určenie spektra vlastných hodnôt  $\epsilon_n$  a vlastných funkcií  $\Psi_n$  hamiltoniánu systému. Niektoré metódy ako napr. kvantové Monte Carlo, sú neefektívne pre systémy s interagujúcimi fermiónmi. Presné a efektívne riešenie v 1D v tomto prípade možno dosiahnuť pomocou metódy Density matrix renormalization group (DMRG), ktorá je však citlivá na prítomnosť ďalekodosahových interakcií [White, 1992], [Verstraete a kol., 2004].

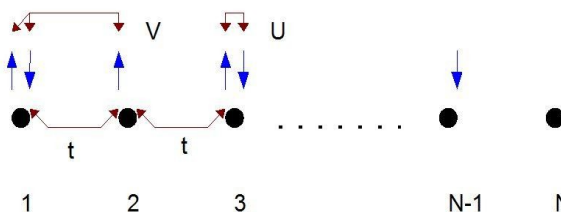
Často nás zaujímajú veličiny charakterizujúce systémy veľkých rozmerov  $N$ , ako napr. energia základného stavu  $E_0(N)$ . V závislosti od zložitosti hamiltoniánu sme však zvyčajne schopní spočítať iba systém malých rozmerov a spoliehať sa na škálovanie parametrov v asymptotickej limite  $N \rightarrow \infty$ . Pre takéto konečné kvantové systémy je následne potrebné vhodne stanoviť okrajové podmienky riešenia. Najbežnejšími sú voľné (VOP) a periodické okrajové podmienky (POP).

Použitie VOP dovoľuje prejaviť sa okrajovým efektom, ktoré sa odzrkadľujú vo vzniku významných konečnorozmerných korekcií k skúmaným parametrom systému, napr.  $E_0(N)$ , ktoré značne spomaľujú konvergenciu k ich asymptotickým hodnotám ( $E_0(\infty)$ ).

Potlačenie týchto korekcií a urýchlenie konvergencie možno dosiahnuť prostredníctvom POP, ktoré implicitne vytvárajú kvázinekonečný systém, no za cenu zavedenia ďalekodosahových interakcií, ktoré napr. pri DMRG znižujú jej presnosť. Cieľom je preto zaviesť také okrajové podmienky, ktoré redukujú okrajové efekty podobne ako POP, no bez použitia ďalekodosahových interakcií.

### 1.1 Definícia systému

V jednorozmernom prípade uvažujeme systém, retiazku, s  $N$  ekvidištančne rozmiestnenými uzlovými polohami, v ktorých sa môžu nachádzať fermióny (obr. 1).



Obr. 1: Modelovaný systém. Modré šípky označujú fermión s daným priemetom spinu,  $t$  je kinetický člen,  $U, V$  interakčné členy.

Predpokladáme tesnoväzobný prístup, kde vlnová funkcia fermiónu v uzle  $l$  -  $\Phi_l$  je silne lokalizovaná a významnejší prekryv dosahuje iba s vlnovými funkciami najbližších susedov. Akákoľvek interakcia môže nastať najviac medzi fermiónmi v susedných uzloch. Vo výpočtoch uvažujeme polovičné zaplnenie, keď počet častíc v systéme  $P = N/2$ , čo je výpočtovo najzložitejší prípad.

Pokiaľ zavedieme formalizmus sekundárneho kvantovania, kde kreačný operátor častice v stave  $\Phi_l$  s priemetom spinu  $\sigma$  označíme  $\hat{c}_{l,\sigma}^\dagger$  a

\*Michal.daniska@gmail.com

†Andrej.gendiar@savba.sk

písľušný anihilačný operátor  $\hat{c}_{l,\sigma}$ , potom celkový hamiltonián systému môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -t \sum_{(l,k)} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} (\hat{c}_{l,\sigma}^\dagger \hat{c}_{k,\sigma} + \hat{c}_{k,\sigma}^\dagger \hat{c}_{l,\sigma}) \\ & + V \sum_{(l,k)} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} (\hat{c}_{l,\sigma}^\dagger \hat{c}_{l,\sigma} \hat{c}_{k,\sigma}^\dagger \hat{c}_{k,\sigma}) \\ & + U \sum_l (\hat{c}_{l,\uparrow}^\dagger \hat{c}_{l,\uparrow} \hat{c}_{l,\downarrow}^\dagger \hat{c}_{l,\downarrow}) \\ & + \mu \sum_l \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \hat{c}_{l,\sigma}^\dagger \hat{c}_{l,\sigma}, \end{aligned} \quad (1)$$

kde  $(l,k)$  označuje dvojicu susedných miest na mriežke,  $t$  je kinetický člen,  $U$  udáva silu vzájomnej interakcie medzi dvomi spinmi s opačným priemetom  $\sigma$  v tom istom uzle,  $V$  udáva silu interakcie medzi fermiónmi v susedných uzloch a  $\mu$  je chemický potenciál [Essler a kol., 2005]. Vlnové funkcie  $\Phi_l$  neboli presne zadefinované, preto sú členy  $t$ ,  $V$ ,  $U$  voliteľné a možno ich pri výpočte meniť.

V takomto formalizme možno POP zapísať v tvare

$$\hat{c}_l = \hat{c}_{l+N}, \quad l=1, \dots, N \quad (2)$$

a VOP, zakazujúce opustiť systém,

$$\hat{c}_0 = \hat{c}_{N+1} = 0. \quad (3)$$

## 2 Neinteragujúce častice

Najjednoduchší prípad systému popísaného v časti 1.1, ktorý možno aj analyticky vyriešiť dostaneme, ak položíme interakčné členy  $U$ ,  $V = 0$ . Hamiltonián (1) potom napr. pre POP nadobudne tvar

$$\hat{H} = -t \sum_{l=1}^N (\hat{c}_l^\dagger \hat{c}_{l+1} + \hat{c}_{l+1}^\dagger \hat{c}_l). \quad (4)$$

Pri VOP by v dôsledku absencie väzby medzi prvým a posledným ( $N$ -tým) uzlom sumácia prebiehala iba po  $N-1$ .

Spektrum vlastných energií získame analyticky napr. pomocou diskretnéj Fourierovej transformácie operátorov  $\hat{c}_l$  do takých obrazov  $\hat{a}_n$ , aby sme (4) previedli na diagonálny tvar

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n. \quad (5)$$

Potom  $\varepsilon_n$  sú vlastné energie jednočasticového systému a  $\hat{a}_n$  anihilačné operátory im prislúchajúcich stavov. Výsledok sa líši podľa druhu aplikovaných okrajových podmienok. Pre POP dostávame [Gendiar a kol., 2009]

$$\varepsilon_n = -2t \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad n=1, \dots, N \quad (6)$$

a pri VOP

$$\varepsilon_n = -2t \cos\left(\frac{\pi n}{N+1}\right), \quad n=1, \dots, N. \quad (7)$$

Základná energia systému pri polovičnom zaplnení je, vzhľadom na Pauliho vylučovací princíp, daná súčtom  $N/2$  najnižších jednočasticových energií (6) resp. (7). Pri POP dostávame

$$E_0^{POP}(N) = \sum_{n=-N/4+1}^{N/4} \varepsilon_n = -2t \cot\left(\frac{\pi}{N}\right), \quad (8)$$

z čoho je zrejmé, že  $E_0^{POP}(N)$  narastá s  $N$ , preto treba systém charakterizovať nejakou intenzívnou veličinou, napr. energiou pripadajúcou na 1 uzol  $E_0^{POP}(N)/N$ . V asymptotickej limite  $N \rightarrow \infty$  táto s uvážením Taylorovho rozvoja nadobudne tvar

$$\begin{aligned} \frac{E_0^{POP}(N)}{N} = & -\frac{2t}{N} \cot\left(\frac{\pi}{N}\right) = \\ & -\frac{2}{\pi} t + \frac{2\pi t}{3N^2} + O(N^{-3}), \end{aligned} \quad (9)$$

kde  $O(N^{-3})$  označuje zanedbateľný príspevok členov vyššieho rádu. Rýchlosť zániku konečnorozmerných korekcií k asymptotickej limite je teda úmerná  $N^2$ . Podobne pre VOP dostávame

$$E_0^{VOP}(N) = \sum_{n=1}^{N/2} \varepsilon_n = t \left[ 1 - \left( \sin \frac{\pi/2}{N+1} \right)^{-1} \right] \quad (10)$$

a

$$\frac{E_0^{VOP}(N)}{N} = -\frac{2}{\pi} t + \frac{t}{N} \left( \frac{2}{\pi} - 1 \right) + O(N^{-2}). \quad (11)$$

Rýchlosť konvergencie pri VOP je teda dvojnásobne pomalšia ako pri použití POP.

### 2.1 Sínusová deformácia

Sínusová deformácia (SD) je nový typ okrajových podmienok, ktoré sú kombináciou VOP a tzv. vyhladzovacej funkcie  $f(l)$ , ktorej úlohou je dosiahnutie podmienok (3) postupným spojitém potlačaním hodnôt  $\hat{c}_l$  smerom k okrajom tak, aby na hranici dosiahli požadovanú nulovú úroveň. Pri SD má  $f(l)$ , modifikujúca intenzitu väzieb medzi uzlami, tvar  $m$ -tej mocniny prvej polperiódy funkcie sínus

$$f(l) = \sin^m\left(\frac{l\pi}{N}\right) \quad l=1, \dots, N-1, \quad (12)$$

a preto je sínusovo deformovaný hamiltonián daný vzťahom

$$\hat{H} = -t \sum_{l=1}^{N-1} \sin^m\left(\frac{l\pi}{N}\right) (\hat{c}_l^\dagger \hat{c}_{l+1} + \hat{c}_{l+1}^\dagger \hat{c}_l). \quad (13)$$

Takýto hamiltonián už nie je analyticky riešiteľný, a preto bolo spektrum vlastných energií ako aj im

zodpovedajúce vlastné funkcie získané numerickým výpočtom.

Vzhľadom na zavedenie  $f(l)$ , treba tiež zaviesť také normovanie základnej energie  $E_0(N)$ , aby si výsledky pre POP, VOP a SD v limite  $N \rightarrow \infty$  vzájomne zodpovedali. Jednou z možností je normovanie na celkovú silu väzby, potom má pre SD normalizačná konštanta  $B$  tvar

$$B_{1D}^{SD(m)}(N) = \sum_{l=1}^{N-1} \sin^m\left(\frac{l\pi}{N}\right), \quad (14)$$

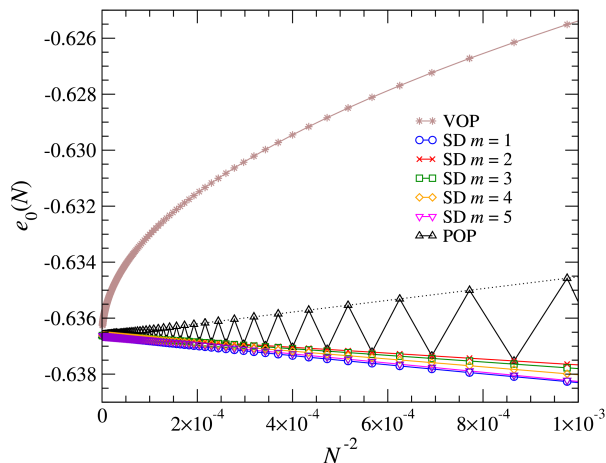
čo v prípade  $m = 0, 2$  znamená  $B_{1D}^{SD(0)}(N) = N - 1$  resp.  $B_{1D}^{SD(2)}(N) = N/2$ . Pri VOP je vytvorených medzi  $N$  uzlami  $N - 1$  nemodifikovaných väzieb, preto  $B_{1D}^{VOP}(N) = N - 1$  a pre  $B_{1D}^{POP}(N)$  podobne máme  $N$ . Normalizovanú základnú energiu definujeme vzťahom

$$e_0(N) = E_0(N)/B(N). \quad (15)$$

## 2.2 Konvergencia normalizovanej základnej energie $e_0(N)$

Rýchlosť konvergencie energie  $e_0^{POP}(N)$  pri polovičnom zaplnení je podľa (9) úmerná  $N^{-2}$ , pre  $e_0^{VOP}(N)$  je  $N^{-1}$ , rovnako ako v (11), nakoľko pri

$N \rightarrow \infty$  nie je rozdiel medzi  $N$  a  $N - 1$ . Pre SD neboli analytické predpovede odvodené, preto možno priebeh  $e_0^{SD}(N)$  ohodnotiť iba na základe grafického spracovania numerických výsledkov (obr. 2). Zaujímavá je zhoda (v rámci numerickej presnosti na 16 cifier) priebehu  $e_0^{SD}(N)$  a  $e_0^{POP}(N)$  pri nepárnom počte uzlov  $N$ .

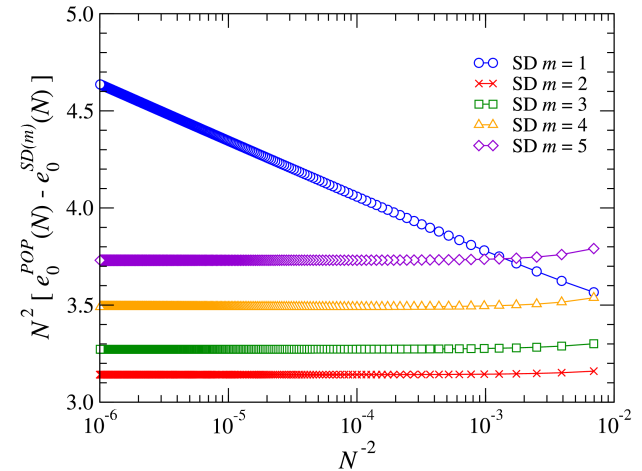


Obr. 2: Normalizovaná základná energia  $e_0(N)$  ako funkcia  $N^{-2}$  pre neinteragujúci systém.

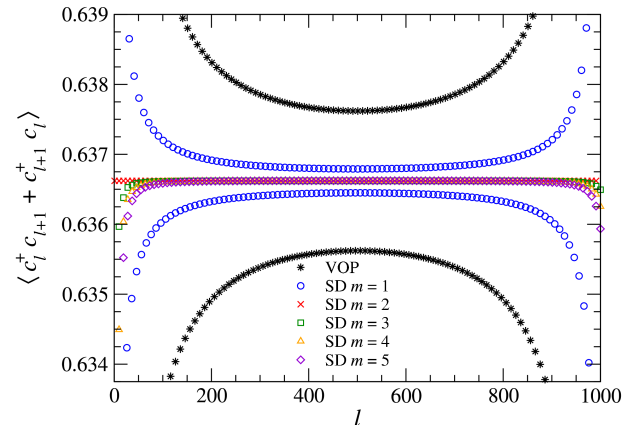
Ako ukazuje priebeh  $N^2[e_0^{SD}(N) - e_0^{POP}(N)]$  na obr. 3, pre  $m \geq 2$  sa dosahuje rovnaká rýchlosť konvergencie ako u POP, teda  $N^{-2}$ . Pri  $m = 1$  je  $e_0^{SD}(N)$  sprevádzaná korekciou úmernou  $N^{-2} \log(N)$  a prípad  $m = 0$  je identický s VOP.

## 2.3 Potlačenie vplyvu okrajov

Potlačenie efektov konečnorozmernosti možno charakterizovať napr. strednou hodnotou obsadenosti  $\langle c_l^\dagger c_l \rangle$  alebo väzbovej energie  $\langle c_{l+1}^\dagger c_l + c_l^\dagger c_{l+1} \rangle$ , ktorej priebeh pre jedorozmerný neinteragujúci fermiónový systém je zobrazený na obr.4.



Obr. 3: Porovnanie rýchlosti konvergencie energií  $e_0^{SD}(N)$  s  $e_0^{POP}(N)$  pre neinteragujúci systém.



Obr. 4: Priebeh strednej hodnoty väzbovej energie  $\langle c_{l+1}^\dagger c_l + c_l^\dagger c_{l+1} \rangle$  v neinteragujúcom systéme.

Najvýraznejší vplyv okrajov sa podľa očakávania pozoruje pre VOP, menej pre SD s  $m = 1$ . Pri  $m = 2$  sa dosahuje translačne invariantný priebeh, podobne ako u POP, kým pri vyšších mocnidlách  $m$  sa tesne na hranici opäť začínajú prejavovať okrajové efekty. Translačne invariantná hodnota väzbovej energie  $\langle c_{l+1}^\dagger c_l + c_l^\dagger c_{l+1} \rangle$  sa s rastom  $N$  blíži k limitnej hodnote normalizovanej základnej energie  $|e_0(\infty)| = 2t/\pi$ .

### 3 Interagujúce častice

Pri nenulových hodnotách interakčných členov  $U$ ,  $V$ , je možné získať výsledky pre (1) iba numericky. Pri výpočtoch boli uvažované hamiltoniány v tvare

$$\begin{aligned} \hat{H}_{POP} = & -t \sum_{l=1}^N \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left( \hat{c}_{l,\sigma}^\dagger \hat{c}_{l+1,\sigma} + \hat{c}_{l+1,\sigma}^\dagger \hat{c}_{l,\sigma} \right) \\ & + V \sum_{l=1}^N (\hat{n}_l - 1)(\hat{n}_{l+1} - 1) \\ & + U \sum_l \left( \hat{n}_{l,\downarrow} - \frac{1}{2} \right) \left( \hat{n}_{l,\uparrow} - \frac{1}{2} \right) - \mu \sum_l \hat{n}_l \end{aligned} \quad (16)$$

a

$$\begin{aligned} \hat{H}_{VOP} = & -t \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left( \hat{c}_{l,\sigma}^\dagger \hat{c}_{l+1,\sigma} + \hat{c}_{l+1,\sigma}^\dagger \hat{c}_{l,\sigma} \right) \\ & + V \sum_{l=1}^{N-1} \hat{n}_l \hat{n}_{l+1} + U \sum_l \hat{n}_{l,\downarrow} \hat{n}_{l,\uparrow} \\ & - \left( \mu + \frac{U}{2} + 2V \right) \sum_l \hat{n}_l + N \left( \frac{U}{4} + V \right), \end{aligned} \quad (17)$$

kde  $\hat{n}_{l,\sigma} = \hat{c}_{l,\sigma}^\dagger \hat{c}_{l,\sigma}$  označuje počet častíc s priemetom spinu  $\sigma$  v uzle  $l$ ,  $\hat{n}_l = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \hat{c}_{l,\sigma}^\dagger \hat{c}_{l,\sigma}$  počet všetkých častíc v uzle  $l$  a dodatočné aditívne konštanty v členoch radov v (16) a (17) sú zvolené tak, aby  $\mu = 0$  [Gendiar a kol., 2011].

Vyhľadujúci faktor prislúchajúci  $l$ -tému uzlu pri použití sínusovej deformácie zavádzame v tvare

$$\frac{1}{2} \left[ \sin^m \left( \frac{\pi(l-1)}{N} \right) + \sin^m \left( \frac{\pi l}{N} \right) \right], \text{ následkom čoho}$$

celkový hamiltonián pre SD nadobudne tvar

$$\begin{aligned} \hat{H}_{SD} = & -t \sum_{l=1}^{N-1} \sin^m \left( \frac{\pi l}{N} \right) \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left( \hat{c}_{l,\sigma}^\dagger \hat{c}_{l+1,\sigma} + \hat{c}_{l+1,\sigma}^\dagger \hat{c}_{l,\sigma} \right) \\ & + U \sum_l \sin^m \left( \frac{\pi l}{N} \right) \frac{1}{2} \left[ \left( \hat{n}_{l,\downarrow} - \frac{1}{2} \right) \left( \hat{n}_{l,\uparrow} - \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \left. + \left( \hat{n}_{l+1,\downarrow} - \frac{1}{2} \right) \left( \hat{n}_{l+1,\uparrow} - \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{\mu}{2} \sum_l \sin^m \left( \frac{\pi l}{N} \right) (\hat{n}_l + \hat{n}_{l+1}) \\ & + V \sum_{l=1}^{N-1} \sin^m \left( \frac{\pi l}{N} \right) (\hat{n}_l - 1)(\hat{n}_{l+1} - 1). \end{aligned} \quad (18)$$

Tvar normovacích konštánt  $B$  (14) zostáva zachovaný.

#### 3.1 Bezspinový systém

Jednoduchšiu variantu interagujúceho systému dostaneme, ak neuvažujeme priemet spinu častíc, pričom súčasne pokladáme  $U = 0$ . Vzhľadom na prítomnosť interakcie volíme bázu ako množinu stavov reprezentujúcich všetky možné lokalizácie

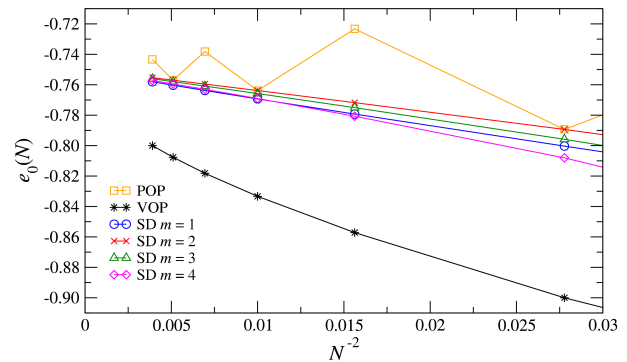
častíc, ktoré sa dajú vytvoriť pri danom  $N$  a zaplnení. Napríklad pre  $N = 4$  a polovičné zaplnenie ju možno vytvoriť zo stavov 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, kde 1 označuje prítomnosť častice na danej pozícii, 0 absenciu. Základná energia systému  $E_0(N)$  je potom najnižšou energiou zo spektra vlastných hodnôt hamiltoniánu. Limitný prípad  $V = 0$  zodpovedá neinteragujúcemu systému.

#### 3.2 Spinový systém

V spinovom systéme sa môžu v rovnakom kvantovom stave nachádzať až 2 častice, navzájom sa líšiacie priemetom svojho spinu. Sila ich vzájomnej interakcie je daná členom  $U$ . Limita  $U, V = 0$ , zodpovedá dvom nezávislým interagujúcim systémom každý pre jeden priemet spinu. Vzhľadom na to, že normovací faktor je rovnaký ako v bezspinovom prípade, normalizovaná energia  $e_0(N)$  bude vtedy dvojnásobná, teda  $-4t/\pi$ .

#### 3.3 Konvergencia normalizovanej energie $e_0(N)$

Priebeh  $e_0(N)$  pre interagujúci ( $V = 1$ ) bezspinový systém (obr. 5) je podobný ako u neinteragujúcich častíc. Zhoda medzi  $e_0^{SD}(N)$  a  $e_0^{POP}(N)$  pre nepárne  $N$  sa narúša s rastom interakčného člena  $V$ . Extrapoláciou z vypočítaných závislostí pri POP a SD s  $m = 2$  boli určené vzájomne si zodpovedajúce limitné hodnoty základných energií  $e_0^{POP}(\infty) = -0,74995$  a  $e_0^{SD(2)}(\infty) = -0,74992$ .

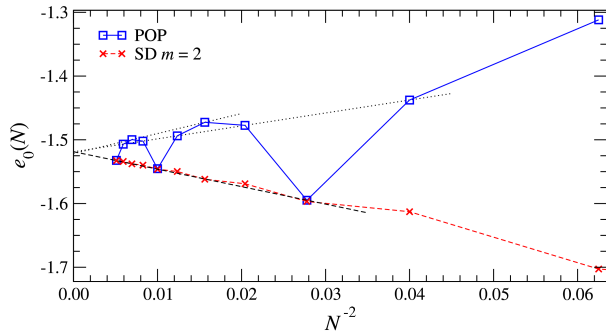


Obr. 5: Normalizovaná energia  $e_0(N)$  ako funkcia  $N^{-2}$  pre interagujúci bezspinový systém ( $V = 1$ ).

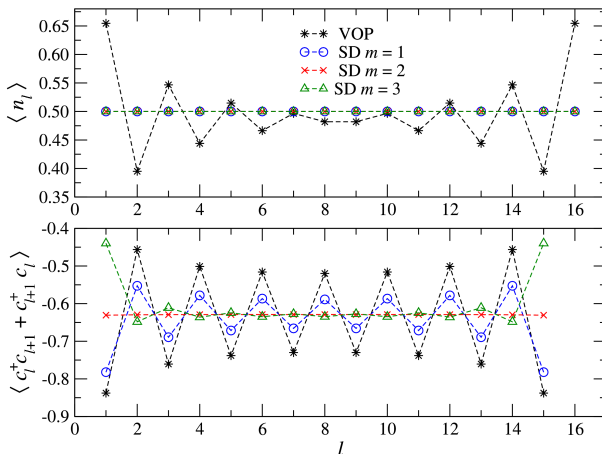
Aj pre spinový systém (obr. 6) pozorujeme u energií  $e_0^{SD(2)}(N)$  a  $e_0^{POP}(N)$  rýchlosť konvergence  $N^{-2}$  k limitným hodnotám  $e_0^{POP}(\infty) = -1,51862$  a  $e_0^{SD(2)}(\infty) = -1,51866$ . Zhoda výsledkov medzi oboma priebehmi pri počte uzlov mriežky  $N = 2, 4, 6, \dots$  sa narúša s rastom  $U, V$ .

### 3.4 Potlačenie vplyvu okrajov

Priebeh väzbovej energie  $\langle c_{l+1}^\dagger c_l + c_l^\dagger c_{l+1} \rangle$  pre bezspinové neinteragujúce častice a  $V = 1$  je zobrazený na obr.7 dole. Translačnú invariantnosť sa podarilo dosiahnuť iba pri  $m = 2$ , hoci i vyššie mocnitéle  $m$  významne redukujú vplyv okrajov u SD v porovnaní s VOP. Horná časť obr.7 zobrazuje priebeh obsadenosti  $\langle c_l^\dagger c_l \rangle$ , z ktorého vidno, že vplyv okrajov sa prejavuje iba pri VOP.

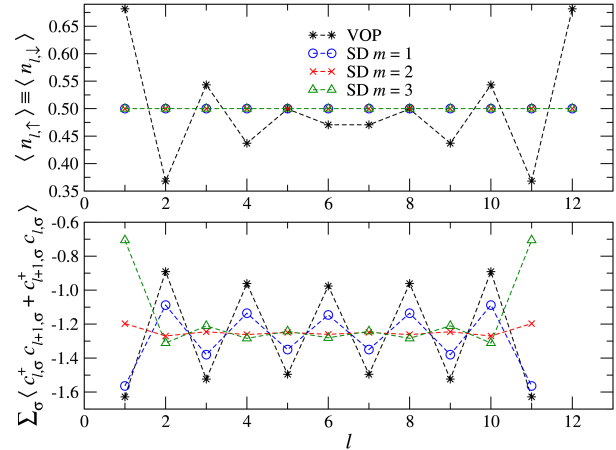


Obr. 6: Normalizovaná základná energia  $e_0(N)$  ako funkcia  $N^{-2}$  pre interagujúci spinový systém ( $V = 1, U = 2$ ).



Obr. 7: Porovnanie stredných hodnôt obsadenosti  $\langle c_l^\dagger c_l \rangle$  a väzbovej energie  $\langle c_{l+1}^\dagger c_l + c_l^\dagger c_{l+1} \rangle$  pre interagujúci bezspinový systém ( $V = 1, U = 0$ ).

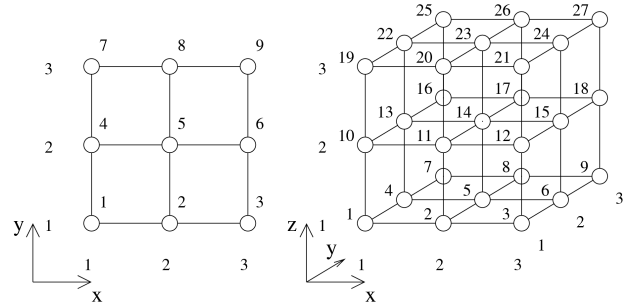
Pre spinový systém (obr.8) sa u väzbovej energie  $\sum_{\sigma=1,4} (\hat{c}_{l,\sigma}^\dagger \hat{c}_{l+1,\sigma} + \hat{c}_{l+1,\sigma}^\dagger \hat{c}_{l,\sigma})$  nepodarilo pomocou SD úplne potlačiť vplyv okrajov. Najhomogénnejší priebeh sa však opäť dosiahol pri  $m = 2$ . Pretože uvažujeme polovičné zaplnenie, je počet kladne ako aj záporne polarizovaných častíc rovnaký, z dôvodov symetrie musí preto pre obsadenosť platiť  $\langle \hat{n}_{l,\uparrow} \rangle = \langle \hat{n}_{l,\downarrow} \rangle$ . Z hornej časti obr.8 potom možno konštatovať, že pri použití VOP je vplyv okrajov na priebeh strednej hodnoty obsadenosti výrazný, kým SD vedie k takmer konštantnému priebehu.



Obr. 8: Porovnanie stredných hodnôt obsadenosti  $\langle c_l^\dagger c_l \rangle$  a väzbovej energie  $\langle c_{l+1}^\dagger c_l + c_l^\dagger c_{l+1} \rangle$  pre interagujúci spinový systém ( $V = 1, U = 2$ ).

## 4 Sínusová deformácia vo vyšších rozmeroch

Pri výpočtoch boli uvažované štvorcová mriežka v 2D a kubická v 3D, ktoré sú aj s vyznačením spôsobu indexovania uzlov znázornené na obr. 9.



Obr. 9: Indexovanie 2D a 3D mriežky ( $N = 3$ ).

Keďže analytické riešenie pre takéto systémy neexistuje a kvôli vysokej náročnosti numerických výpočtov bol vo výpočtoch uvažovaný iba prípad neinteragujúcich fermiónov.

### 4.1 Sínusová deformácia v 2D

Dvojmerná sínusová deformačná funkcia  $f_{2D}^{SD(m)}(l, k)$ , modifikujúca silu interakcie medzi susednými uzlami mriežky  $l, k$  bola zvolená v separovateľnom tvare súčinu sínusu prebiehajúceho v smere osi  $x$  a v smere osi  $y$ . Pre prípad, keď susedné uzly sú v smere osi  $x$  vzdialené o 1 medziuzlovú vzdialenosť, no v smere osi  $y$  majú rovnakú súradnicu  $-y_{l,k}$ , má  $f_{2D}^{SD(m)}(l, k)$  tvar

$$f(l, k)_{2D}^{SD(m)} = \sin^m \left( \frac{x_{l,k} \pi}{N} \right) \frac{1}{2} \times \left[ \sin^m \left( \frac{(y_{l,k} - 1) \pi}{N} \right) + \sin^m \left( \frac{y_{l,k} \pi}{N} \right) \right], \quad (19)$$



preto hamiltonián pre SD možno zapísať vzt'ahom

$$\begin{aligned} \hat{H}_{SD} = & -t \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \left[ \sin^m \left( \frac{(i-1)\pi}{N} \right) + \sin^m \left( \frac{i\pi}{N} \right) \right] \\ & \times \sum_{j=1}^{N-1} \sin^m \left( \frac{\pi j}{N} \right) \left( \hat{c}_{(j,i),\sigma}^\dagger \hat{c}_{(j+1,i),\sigma} + \hat{c}_{(j+1,i),\sigma}^\dagger \hat{c}_{(j,i),\sigma} \right) \\ & -t \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \left[ \sin^m \left( \frac{(j-1)\pi}{N} \right) + \sin^m \left( \frac{j\pi}{N} \right) \right] \\ & \times \sum_{i=1}^{N-1} \sin^m \left( \frac{\pi i}{N} \right) \left( \hat{c}_{(j,i),\sigma}^\dagger \hat{c}_{(j,i+1),\sigma} + \hat{c}_{(j,i+1),\sigma}^\dagger \hat{c}_{(j,i),\sigma} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

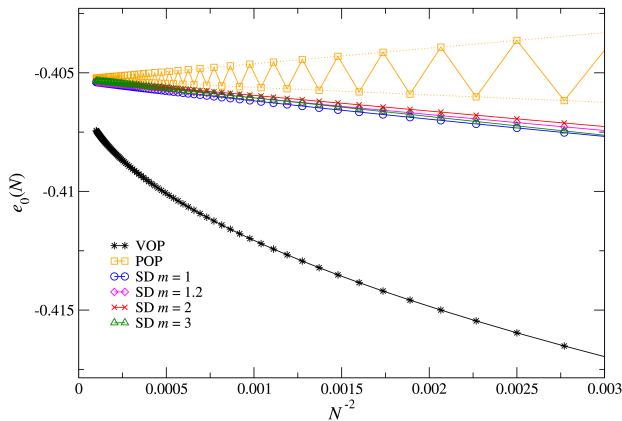
Normalizačné konštanty sú rovné celkovej sile väzby, teda

$$B_{2D}^{SD(m)} = \sum_{i=1}^N \left[ \sin^m \left( \frac{(i-1)\pi}{N} \right) + \sin^m \left( \frac{i\pi}{N} \right) \right] \sum_{j=1}^{N-1} \sin^m \left( \frac{\pi j}{N} \right) \quad (21)$$

$$\text{a } B_{2D}^{POP} = 2N^2 \quad \text{a } B_{2D}^{VOP} = 2N(N-1).$$

## 4.2 Konvergencia normalizovanej základnej energie $e_0(N)$

Závislosť  $e_0(N)$  (obr. 10) je v 2D podobná ako v predchádzajúcich prípadoch, avšak medzi  $e_0^{POP}(N)$  a  $e_0^{SD(2)}(N)$  sa už nedosahuje zhoda pre žiadne  $N$ .



Obr. 10: Závislosť  $e_0(N)$  ako funkcia  $N^{-2}$  pre neinteragujúci systém v 2D.

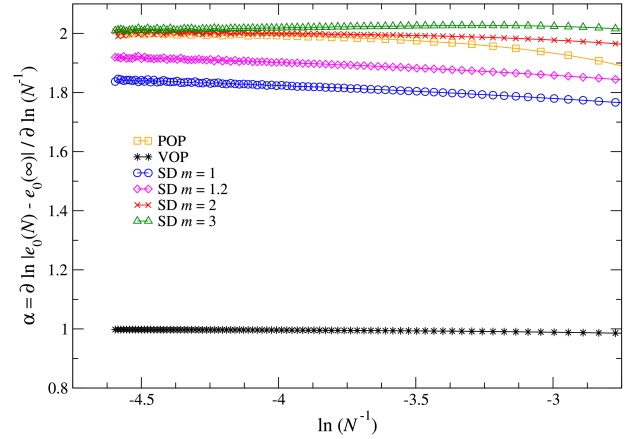
Pokiaľ predpokladáme, že korekcia prvého rádu k  $e_0(\infty)$  spôsobená konečnými rozmermi závisí od  $N$  mocniny, teda

$$|e_0(\infty) - e_0(N)| = AN^{-\alpha}, \quad (22)$$

kde  $A$  je bližšie neurčená konštantá, tak koeficient  $\alpha$  môžeme určiť z priebehu  $e_0(N)$  vyhodnotením výrazu

$$\alpha = \frac{\partial \ln |e_0(\infty) - e_0(N)|}{\partial \ln N^{-1}}, \quad (23)$$

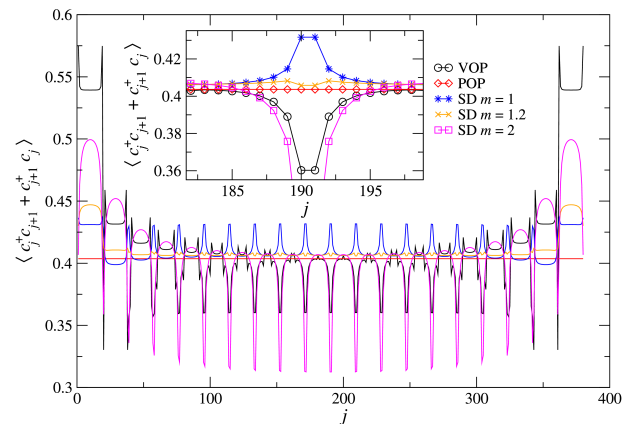
pokiaľ najprv extrapoláciou stanovíme  $e_0(\infty)$ . Limitné hodnoty  $\alpha$  (obr. 11) sa výrazne profilujú pre VOP ( $\alpha \approx 1$ ), POP a SD  $m = 2, 3$  ( $\alpha \approx 2$ ). V prípade SD  $m = 1$  a  $1,2$  sa  $\alpha$  s rastom  $N$  blíži k 2, no túto hodnotu zrejme nedosahuje.



Obr. 11: Koeficient rýchlosti konvergencie  $\alpha$  Error: Reference source not found pre neinteragujúci systém v 2D.

## 4.3 Potlačenie efektov okrajov

Priebeh väzbovej energie  $\langle \hat{c}_l^\dagger \hat{c}_{l+1} + \hat{c}_{l+1}^\dagger \hat{c}_l \rangle$  je pre rôzne okrajové podmienky v 2D neinteragujúcom systéme zobrazený na obr. 12. Celkový počet zobrazených hodnôt je o  $N$  menší ako celkový počet uzlov  $N^2$ , pretože pre uzly s indexom  $l = iN$  neexistuje väzba s uzlom  $l+1$ , nakoľko ten sa nachádza na protiahlnej strane mriežky.



Obr. 12: Stredná hodnota väzbovej energie  $\langle c_{l+1}^\dagger c_l + c_l^\dagger c_{l+1} \rangle$  pre neinteragujúci systém v 2D.

Translačne invariantný priebeh  $\langle \hat{c}_l^\dagger \hat{c}_{l+1} + \hat{c}_{l+1}^\dagger \hat{c}_l \rangle$  bol dosiahnutý len pre POP. Pri ostatných typoch okrajových podmienok pozorujeme výrazné odchýlky na začiatku a konci závislosti, prislúchajúce okrajovej oblasti v protiahlých rohoch mriežky a slabšie fluktuácie s periódou  $N-1$ , zodpovedajúce väzbám medzi uzlami na okrajoch systému. Vo vnútri mriežky sa

$\langle \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+1} + \hat{c}_{i+1}^\dagger \hat{c}_i \rangle$  homogenizuje a v prvom priblížení dosahuje hodnoty blízke POP. Zmenou parametra  $m$  pri SD sa podarilo získať najrovnomernejší priebeh väzbovej energie pri  $m \approx 1,2$

#### 4.4 Sínusová deformácia v 3D

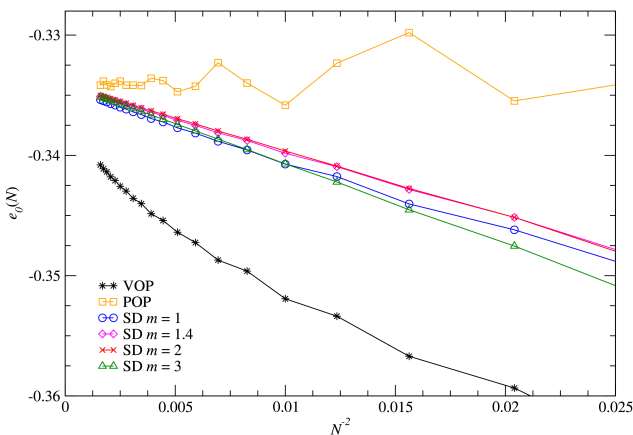
Trojrozmerná vyhladzovacia funkcia  $f_{3D}^{SD(m)}(k, l)$ , modifikujúca silu väzby medzi uzlami s indexami  $k, l$ , má v prípade, že súradnica, ktorou sa susedné uzly odlišujú je  $x$ , tvar

$$f_{3D}^{SD(m)}(l, k) = \sin^m\left(\frac{x_{l,k}\pi}{N}\right) \frac{1}{2} \left[ \sin^m\left(\frac{(y_{l,k}-1)\pi}{N}\right) + \sin^m\left(\frac{y_{l,k}\pi}{N}\right) \right] \times \frac{1}{2} \left[ \sin^m\left(\frac{(z_{l,k}-1)\pi}{N}\right) + \sin^m\left(\frac{z_{l,k}\pi}{N}\right) \right]. \quad (24)$$

Normalizačná konštanta  $B_{3D}^{SD(m)}(N)$  je daná súčtom faktorov (24) cez všetky prípustné kombinácie  $(k, l)$ ,  $B_{3D}^{VOP}(N) = 3(N-1)N^2$  a  $B_{3D}^{POP}(N) = 3N^3$ .

#### 4.5 Konvergencia normalizovanej základnej energie $e_0(N)$

Nerovnomerné oscilácie v závislostiach  $e_0(N)$  (obr. 13) v porovnaní s hladšími priebehmi v 1D a 2D vznikajú v dôsledku malých  $N$  zahrnutých do výpočtu. Podobne ako pri nižších dimenziách sa k limite  $e_0(\infty)$  najpomalšie približuje  $e_0^{VOP}(N)$ , pri POP a SD korekčný člen zaniká s  $\alpha$  blízkou 2. Závislosť  $e_0^{POP}(N)$  už nie je vhodná na presnejšie určenie  $e_0(\infty)$ , preto bola táto veličina stanovená extrapoláciou  $e_0^{SD(2)}(N)$  s približnou hodnotou -0,3341 (pri  $t = 1$ ).



Obr. 13: Závislosť normalizovanej základnej energie  $e_0(N)$  ako funkcia  $N^{-2}$  pre neinteragujúci systém v 3D.

## Záver

Ukázali sme, že pre neinteragujúce častice prináša SD s  $m = 2$  prakticky identické výsledky ako POP, teda urýchľuje rýchlosť konvergencie k limitnej hodnote základnej energie  $e_0(\infty)$  na dvojnásobok oproti VOP a vytvára translačne invariantný systém, a to aj bez zavedenia d'alekosahových interakcií. Výrazné potlačenie efektov konečnorozmernosti, hoci nie úplné, sme pri  $m = 2$  pozorovali aj v systéme interagujúcich častíc a pre iné  $m$  aj vo vyšších rozmeroch. Navyše, v 3D umožnila sínusová deformácia, narozdiel od POP, dostatočne presne stanoviť  $e_0(\infty)$  aj pri malom rozmere mriežky  $N$ . Rozšírená verzia tohto príspevku, pojednávajúca o vlastnostiach sínusovej deformácie v 1D, je prijatá na publikovanie v časopise *Physical Review A* [Gendiar a kol., 2011].

## Literatúra

- [White, 1992] White, S. R. (1992). Density Matrix Formulation for Quantum Renormalization Groups. *Physical Review Letters*, vol. 69, no. 19. ISSN 1079-7114.
- [Verstraete a kol., 2004] Verstraete, F., Porras, D., Cirac, J.I. (2004). Density Matrix Renormalization Group and Periodic Boundary Conditions: A Quantum Information Perspective. *Physical Review Letters*, vol. 93, no. 22. ISSN 1079-7114.
- [Essler a kol., 2005] Essler, F. H. L., Frahm, H., Göhmann, F., Klümper, A., Korepin, V.E. (2005). *The One-Dimensional Hubbard Model*. 1. vyd. Cambridge, UK. Cambridge University Press. 674 s. ISBN 0-511-07996-6.
- [Gendiar a kol., 2009] Gendiar, A., Krcmar, R., Nishino, T. (2009). Spherical Deformation for One-Dimensional Quantum Systems. *Progress of Theoretical Physics*, vol. 122, no. 4 ISSN 1347-4081.
- [Gendiar a kol., 2011] Gendiar, A., Daniška, M., Lee, Y., Nishino, T. (2011). Suppression of finite-size effects in one-dimensional correlated systems. *Physical Review A*. V tlači. ISSN 1094-1622.

# Kalibrácia náboja b- jetu

František Herman\*

Školiteľ: Stanislav Tokár†

Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Cieľom mojej práce je preštudovať, či sme schopní okalibrovať absolútnu hodnotu náboja b- jetu aj iným spôsobom ako zo spektra kombinovaného náboja. Iný spôsob spočíva v určení absolútnej hodnoty efektívneho náboja b- jetu z kumulovaného spektra b- jetových nábojov. Zaujímam sa zatiaľ len o b- jety asociované s leptónmi z leptón- jetovej vetvy rozpadu top kvarku.

## 1 Triedenie elementárnych častíc

Štandardný model (SM) predpokladá existenciu dvanástich elementárnych častíc, s rovnakou veľkosťou spinového kvantového čísla  $s = 1/2$ , z ktorých je tvorená všetka hmota v našom vesmíre. Pre takéto častice platí Pauliho vylučovací princíp a voláme ich fermióny. Ku každej takejto častici (fermiónu), existuje antičastica, ktorá má až na znamienko náboja všetky vlastnosti s ňou identické.

(Name)	Electric Charge	Number of Color Charges	(Symbol)	Mass in MeV									
<b>Model of Elementary Particles</b>													
<b>Three Generations of Matter (Fermions)</b>													
	<b>I</b>			<b>II</b>		<b>III</b>							
Quarks	Up	$+2/3$	$3$	$\sim 5$	Charm	$+2/3$	$3$	$\sim 1350$	Top/Truth	$+2/3$	$3$	$> 131000$	
	Down	$-1/3$	$3$	$\sim 9$	Strange	$-1/3$	$3$	$\sim 175$	Bottom/Beauty	$-1/3$	$3$	$\sim 4500$	
Leptons	Electron Neutrino	$0$	$1$	$< 0.0000070$	Muon Neutrino	$0$	$1$	$< 27$	Tau Neutrino	$0$	$1$	$< 31$	
	Electron	$-1$	$1$	$.511$	Muon	$-1$	$1$	$105.66$	Tau	$-1$	$1$	$1777.1$	
	<b>Force Carriers (Gauge Bosons)</b>												
	Photon	$0$	$1$	$0$	Gluon	$0$	$8$	$0$	Z zero	$0$	$1$	$91187$	
	$\gamma$	$0$	$1$	$0$	$g$	$0$	$8$	$0$	$Z^0$	$0$	$1$	$91187$	
	<b>Weak Interactions</b>												
	$W^+$	$+1$	$1$	$80220$	$W^-$	$-1$	$1$	$80220$					

Obr.: 1 Štandardný model

Fermióny delíme podľa veľkosti ich náboja na:

1. Kvarky- Častice, ktoré majú zlomkovú hodnotu elementárneho náboja  $e$ , kde  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$ .

2. Leptóny- Častice, ktoré majú celočíselnú hodnotu elementárneho náboja  $e$ .

Rímske číslice na obr. 1 rozdeľujú fermióny na generácie, zodpovedajúce časticiam, ktoré vykazujú podobné fyzikálne správanie. Každá častica nižšej generácie má nižšiu hmotnosť, ako jej podobná vo vyššej generácii. Stabilné častice sú tvorené členmi prvej generácie. To môžeme demonštrovať na stabilných atómoch zložených z atómového jadra, kde sa nachádzajú protóny a neutróny pozostávajúce z Up a Down kvarkov a z obalu, kde je elektrón. Počas premeny častíc poskladaných z nabitých členov z druhej a tretej generácií je veľmi krátky. Neutrína nemajú elektrický náboj a majú takmer nulovú hmotnosť. Top kvark, ktorým sa zaoberá skupina Atlas/ Bratislava sa doposiaľ nepodarilo nájsť ako súčasť žiadneho hadrónu.

Druhý sektor SM tvoria intermediálne bozóny, ktoré sú zodpovedné za jednotlivé typy interakcií medzi fermiónmi. Fotón zabezpečuje elektromagnetické, gluón silné jadrové a nakoniec  $Z^0$ ,  $W^+$  a  $W^-$  slabé jadrové interakcie. Bozóny majú celočíselnú hodnotu spinového kvantového čísla.

Tretí a posledný sektor SM tvorí Higgsov bozón. Teoretický predpoklad je taký, že častice nadobúdajú svoju hmotnosť, práve interakciou s týmto bozónom. Zároveň je to jediná časť SM, ktorá zatiaľ nebola experimentálne potvrdená. Túto úlohu majú v súčasnosti experimenty ATLAS a CMS v CERN, ako aj experimenty prebiehajúce vo Fermilabe.

## 2 Bottom a top kvark

Táto práca je súčasťou programu skupiny ATLAS/ Bratislava, ktorá sa zaoberá rekonštrukciou náboja top kvarku. Cieľom tejto práce je preskúmanie nábojového spektra b- jetov pochádzajúcich z hadronizácie bottom kvarku. Kvôli tomu uvediem stručný popis vlastností týchto dvoch elementárnych častíc.

O teoretickú predpoveď týchto častíc sa postarali Makoto Kobayashi a Toshihide Maskawa v roku 1973 pre vysvetlenie narušenia CP symetrie. Za

\*feriherman@gmail.com

†Stanislav.Tokar@cern.ch

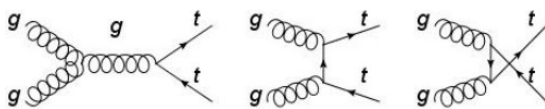
vysvetlenie tohto javu boli v roku 2008 ocenení Nobelovou cenou. Experimentálne potvrdenie b-kvarku bolo v roku 1977 na experimente E288 vo Fermilabe pod vedením Leona M. Ledermana. Top-kvark bol nájdený experimentmi CDF[1] a D0[2] taktiež vo Fermilabe, avšak až v roku 1995.

Bottom, alebo aj beauty kvark patrí do 3. generácie častíc so spinom  $1/2$ , teda k fermiónom. Hodnota jeho elektrického náboja je  $-1/3e$ . Jeho pokojová hmotnosť je  $4.19 \pm 0.18 \text{ GeV}/c^2$  čo predstavuje približne 4.5 násobok hmotnosti protónu. K nemu prislúchajúca antičastica sa nazýva antib- kvark a má rovnaké všetky vlastnosti okrem hodnoty elektrického náboja, ktorá je v prípade antib- kvarku opačná.

Top kvark je najťažší kvark s hmotnosťou  $172 \pm 1.3 \text{ GeV}/c^2$ , čo je približne 183 krát hmotnosť protónu. Je to fermión patriaci do tretej generácie. Hodnota jeho elektrického náboja je s najväčšou pravdepodobnosťou rovná  $2/3e$ , čo zodpovedá teoretickej predpovedi SM, avšak z vlastností jeho najpravdepodobnejšieho rozpadu môžeme taktiež hovoriť o hodnote  $-4/3e$ . Takýto model je známy s prívlastkom exotický.

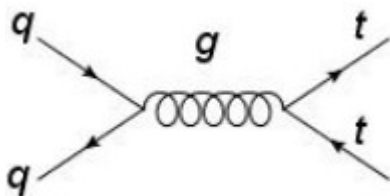
Pre štúdium top kvarku je v našom prípade dôležitá tzv. párová top- antitop kvarková produkcia. V tomto prípade sú páry top, antitop kvarku vytvorené pri zrážkach hadrónov prostredníctvom silných interakcií. Procesy vytvorenia takéhoto páru sú závislé od energie a typu nalietaujúcich častíc. Sú nimi najmä:

- 1 Gluónová fúzia: Tento proces je podstatný pre experiment ATLAS na LHC. Schéma rôznych variánt jeho priebehu:



Obr. 2 Gluónová fúzia

- 2 Kvark- antikvarková anihilácia je dôležitá pre experimenty v Tevatrone. Jej priebeh:



Obr. 3 Kvark- antikvarková anihilácia

Pre oba obrázky platí, že šípka smerujúca sprava doľava, zodpovedá antičastici.[3]

## 2.1 Rozpad top kvarku

Top kvark sa najčastejšie rozpadá na b kvark a W bozón. Ak chceme hovoriť o top kvarku predpokladaného SM a znázorníme náboje jednotlivých častíc, schéma rozpadu bude vyzerat nasledovne:

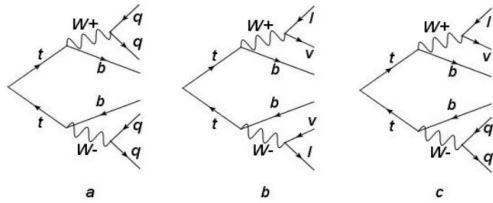
$$t^{(2/3)} \rightarrow b^{(-1/3)} + W^{(+1)} \quad (1)$$

Pre exotický model top kvarku by náčrt rozpadu vyzeral takto:

$$t^{(-4/3)} \rightarrow b^{(-1/3)} + W^{(-1)} \quad [4] \quad (2)$$

Pri rekonštrukcii náboja top kvarku je tým pádom potrebné získať informáciu o náboji W bozónu a bottom, resp. anti- bottom kvarku. Nesmieme však zabudnúť na to, že s top kvarkom sa rozpadá aj antitop kvark, oba pochádzajúce z gluónovej fúzie. Bottom kvark vytvorí spršku častíc označovaných ako b- jet. Rozpad W bozónu sa však odohráva viacerými spôsobmi. Na základe klasifikácie týchto spôsobov hovoríme o nasledovných kanáloch rozpadu.

- 1 V prípade, keď sa oba W bozóny rozpadajú na páry kvark- antikvark, ktoré následne hadronizujú, hovoríme o hadrónovej vetve rozpadu. V tomto type procesu máme 6 jetov. Dvomi z nich musíme priradiť b, resp. antib kvark a zvyšok identifikovať ako rozpadajúce sa W bozóny. Hoci pravdepodobnosť tohto procesu je až 44.5%, jeho analýza je veľmi náročná kvôli vysokému pozadiu pochádzajúceho z QCD procesov. Názorne mu zodpovedá prípad **a** na obr. 4.
- 2 O dileptonovom kanále hovoríme v prípade, keď sa každý z W bozónov rozpadá na leptón a k nemu prislúchajúce neutríno. Takýto kanál je veľmi jednoduché identifikovať vďaka chýbajúcej hodnote energie a priečnej hybnosti, kvôli dvom málo interagujúcim neutrínam. V neprospech tohto procesu však vyznieva pravdepodobnosť jeho realizácie, ktorá je len 11%. Na obrázku tomuto procesu zodpovedá písmeno **b**.
- 3 Pod pojmom leptón- jetový kanál máme na mysli proces, keď sa jeden z W bozónov rozpadá leptónovo a druhý na kvark- antikvarkový pár. Tento proces je ideálny na štúdium hneď z dvoch dôvodov. Je jednoducho identifikovateľný vďaka chýbajúcej energii a priečnej hybnosti neutrína, ktoré v detektoroch ATLAS-u takmer neinteragujú. Pravdepodobnosť že takýto proces nastane, je rovnaká ako



Obr. 4 Kanále rozpadu top kvarku

v prípade hadrónového kanálu, teda 44.5%. Celkový signál z detektora pochádza od leptónu, neutrína, dvoch b- jetov a dvoch jetov pochádzajúcich z rozpadu W bozónu. Všetky dáta použité pri mojej práci, pochádzali práve z nábojovej rekonštrukcie tohto typu. Na obrázku ho nájdeme pod symbolom c.

Pre prípad SM odpovedajú šípky na obrázku smerujúce zľava doprava časticiam a šípky sprava doľava antičasticiam.

## 2.2 Určenie náboja top kvarku

Pri určení náboja top kvarku pomocou rekonštrukcie jeho rozpadu sú kľúčové nasledujúce faktory:

- 1 Zistenie náboja W bozónu prostredníctvom náboja leptónu, na ktorý sa tento bozón rozpadá.
- 2 Odlíšenie b- jetov od jetov pochádzajúcich z hadronizácie ľahkých kvarkov z W bozónu. Ich následná rekonštrukcia a nábojová analýza.
- 3 Priradenie leptónu a b- jetu prislúchajúcemu top kvarku.

## 2.3 Párovanie b- jetov s leptónom

Princíp fungovania tejto procedúry je založený na tom, že invariantná hmotnosť top kvarku je väčšia ako invariantná hmotnosť b- jetu a leptónu, nachádzajúcich sa v rozpade tohto top- kvarku. Pre leptón- jetovú vetvu vyzerá toto kritérium nasledovne:

$$m(l, b_{jet}^{(1,2)}) < m_{cr} \wedge m(l, b_{jet}^{(2,1)}) > m_{cr} \quad (3)$$

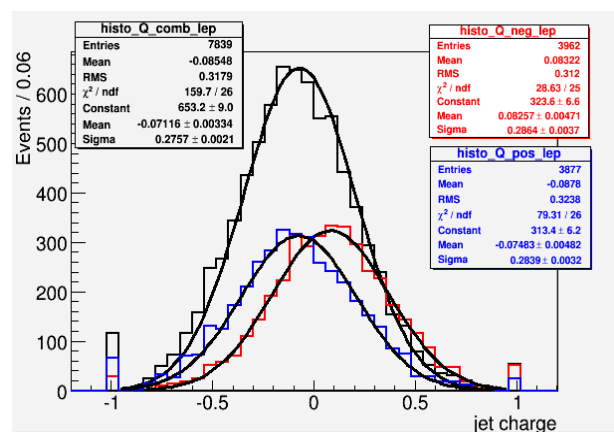
Kde  $m(l, b_{jet}^{(1,2)})$  označuje invariantnú hmotnosť leptónu a b- jetu pochádzajúceho z rozpadu toho istého top- kvarku. Symbol  $m(l, b_{jet}^{(2,1)})$  je invariantná hmotnosť leptónu a b- jetu pochádzajúcich z rôznych top- kvarkov. Kritická hmotnosť  $m_{cr}$  bola optimalizovaná pre zrážky protónov pri energií 10 TeV na hodnotu  $m_{cr} = 155$  GeV[5].

## 2.4 Určenie efektívneho náboja b- jetu

Bottom kvark nemôžeme detekovať priamo, pretože veľmi rýchlo hadronizuje. Z detektora potom dostávame signál zodpovedajúci spríske hadrónov známych ako b- jet. Výsledný náboj získame ako vážený priemer nábojov jednotlivých trekov jetu. Zapísané vzorcom, ako:

$$q_{bjet} = \frac{\sum q_i |\vec{j} \cdot \vec{p}_i|^K}{\sum |\vec{j} \cdot \vec{p}_i|^K} \quad (4)$$

Kde  $\vec{p}_i$  označuje vektor hybnosti nameranej v i- tom treku b- jetu s osou  $\vec{j}$ . Symbol  $q_i$  označuje nameraný náboj v i- tom treku a  $K$  je váhový parameter optimalizovaný na hodnotu 1/2[6]. Na obr. 5 sú vykreslené spektrá b-jetu spárovaného s kladným leptónom, záporným leptónom a kombinované spektrum tohto náboja. Disperzia spektier b- jetových nábojov asociovaných s kladným, resp. so záporným leptónom je spôsobená procedúrou, ktorou určujeme náboj b- jetu. Podľa vzťahu (4) môže byť minimálna hodnota  $q_{bjetmin} = -1$  resp. maximálna hodnota  $q_{bjetmax} = 1$ . Kombinované spektrum dostaneme, ak náboj b- jetu vynásobíme hodnotou náboja s ním spárovaného leptónu a oba tieto spektrá vykreslíme do jedného histogramu. Disperzia tohto spektra je spôsobená disperziou spektier z ktorých vzniklo. Hodnota náboja b- jetu sa vyhodnotí ako stredná hodnota kombinovaného nábojového spektra.



Obr. 5 Nábojové spektrum b jetov, leptónová vetva

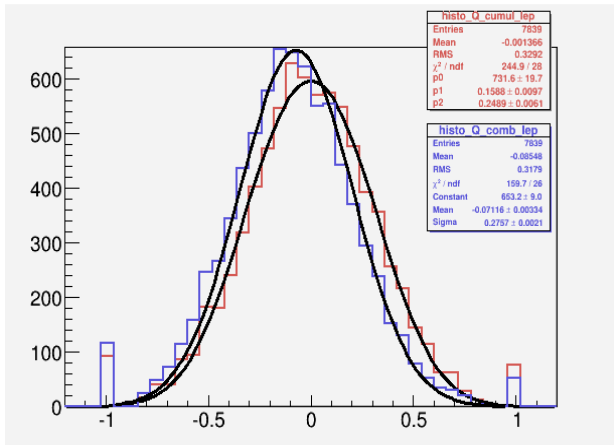
Týmto spôsobom sme schopní určiť o koľko percent sa absolútna hodnota náboju b- kvarku líši od efektívnej hodnoty náboja b- jetu.

Pri zostrojení kumulatívneho spektra náboju b- jetov jednoducho sčítame histogramy b- jetov asociované s kladným a záporným leptónom. Na obr. 6 je zobrazené kumulované spektrum a pre porovnanie je pridaný aj histogram kombinovaného

náboja. Kumulované spektrum však nefitujeme jednoduchým Gaussovým rozdelením, ale nami navrhnutou rozdeľovacou funkciou  $F(q)$  v tvare:

$$F(q) = 1/2([p_0]G(q, p_1, p_2) + [p_0]G(q, -p_1, p_2)) \quad (5)$$

Kde  $G(q, p_1, p_2)$  znamená Gaussovo rozdelenie náboja  $q$  okolo strednej hodnoty parametra fitu  $p_1$ , so strednou kvadratickou odchýlkou danou parametrom  $p_2$ . Parameter  $p_0$  zaisťuje správne normovanie daného rozdelenia.

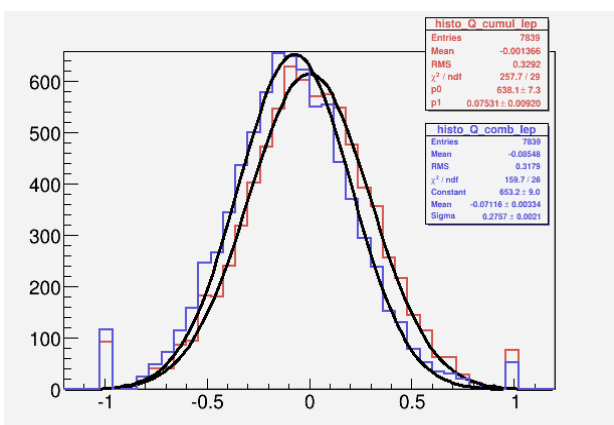


Obr. 6 Porovnanie kombinovaného spektra s kumulovaným bez fixovaného parametra  $p_2$

Za zmienku stojí rozdielnosť výsledkov pre strednú hodnotu fitov spomínaných spektier, ktoré sú uvedené v predposledných riadkoch v legendách. Môže za to zrejme fakt, že sme parameter  $p_2$  ponechali voľným. Pri zafixovaní tohto parametra na hodnotu rovnej aritmetickému priemeru hodnôt  $\sigma$  z fitov jednotlivých spektier náboja b- jetu asociovaným s kladným, respektíve záporným nábojom:

$$\frac{\sigma_{lep+} + \sigma_{lep-}}{2} = 0.285 \quad (6)$$

Získavame fit zobrazený na obr. 7.



Obr. 7 Porovnanie kombinovaného spektra s kumulovaným s fixovaným parametrom  $p_2$

Absolútna hodnota parametra  $p_0$ , sa líši od hodnoty efektívneho náboja určeného z kombinovaného spektra náboja b- jetov o 5.5%. Pre škálovací parameter  $C$ , ktorý dáva do pomeru absolútnu hodnotu náboja b- kvarku podľa SM a absolútnu hodnotu efektívneho náboja b- jetu:

$$C = \frac{|Q_b^{SM}|}{|Q_b^{eff}|} \quad (7)$$

Dostávame výsledok  $C_1 = 4.68$ , ak za  $|Q_b^{eff}|$  dosadíme hodnotu efektívneho náboja z kombinovaného spektra. Ak ako  $|Q_b^{eff}|$  použijeme hodnotu efektívneho náboja z kumulovaného spektra, tak potom  $C_2 = 4.43$ . Hodnota pomeru medzi efektívnym nábojom, získaným z kombinovaného spektra a nábojom z kumulovaného spektra  $|Q_b^{effCUMUL}|$ :

$$P = \frac{|Q_b^{effCUMUL}|}{|Q_b^{effCOMB}|} = \frac{0.075}{0.071} = 1.056 \quad (8)$$

### 3 Záver

Mojim zámerom bolo preskúmať, či je možné pri určovaní absolútnej hodnoty efektívneho náboja b- jetu vychádzať z kumulovaného spektra. Doposiaľ všetky výsledky vyzerali sľubne. Komplikácie nastávajú, keď vezmeme nábojové spektrum b- jetov pred kritériom (7), odpočítame od neho pozadie a následne sa s našou rozdeľovacou funkciou snažíme nájsť efektívny náboj b- jetu. Výsledky uvedené v tomto dokumente sú získané za použitia popisovanej analýzy na simulovaných procesoch metódou Monte Carlo. Získané výsledky som porovnával aj s reálnymi dátami, avšak kvôli nízkej štatistike sú z dát získané výsledky nedôveryhodné a preto tu toto porovnanie neuvádzam. Použitie takejto formy analýzy na reálnych dátach bude teda možné, až keď sa naberie ich dostatočný počet z reálneho experimentu. Jednou z ďalších otázok, ktoré pri práci s uvedenou formou analýzy nastávajú, je určenie pri akom veľkom množstve eventov z reálnych dát ju možno použiť. Ak sa obmedzíme na vyhodnotenie uvedených výsledkom, môžeme konštatovať, že navrhnutá metóda dobre reprodukuje veľkosť efektívneho náboja b- jetu.

### Pod'akovanie

Na tomto mieste sa chcem poďakovať doc. RNDr. Stanislavovi Tokárovi, CSc., Mgr. Pavlovi Federičovi a Bc. Miroslavovi Bagljašovi za mnoho cenných rád a odbornú pomoc pri písaní tejto práce.

## Referencie

- [1] Abeetal.(CDFcollaboration),Phys. Rev.Lett.74(1995)2626.
- [2] S.Abachietal.(D0collaboration),Phys. Rev.Lett.74(1995)2632.
- [3] ExpectedPerformanceoftheATLASExperiment,CERN-OPEN-2008-020.
- [4] D.Chang,W.F.Chang,E.Ma,Phys.Rev. D59(1999)091503.
- [5] ATLAS NOTE , Potential for top quark charge measurement in ATLAS
- [6] Róbert Astaloš, A Study of B - jet Charge Structure

# Kalibrácia náboja b-jetov pomocou dvoj-jetových eventov

Lukáš Plazák\*

Školiteľ: Stanislav Tokár†

Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava,

**Abstrakt:** Pri rekonštrukcii náboja top kvarku je rozhodujúce správne určenie náboja b-jetu vytvoreného b-kvarkom, na ktorý sa top kvark rozpadá. Cieľom tejto práce je kalibrácia náboja b-jetov na dvoj-jetových eventoch. Tento proces je nezávislý od top kvarkových procesov. Preto dobre poslúži na overovanie metód, ktoré sa použijú pri rekonštrukciách top kvarkov. V práci sa uvažujú dva jety letiace v navzájom opačných smeroch. Jeden z jetov musí obsahovať mión a druhý jet musí byť SV0 algoritmom označený ako b-jet. Z predpokladu, že jety sú iniciované  $b\bar{b}$  kvarkovým párom vyplýva korelácia medzi nábojom miónu a nábojom b-jetu.

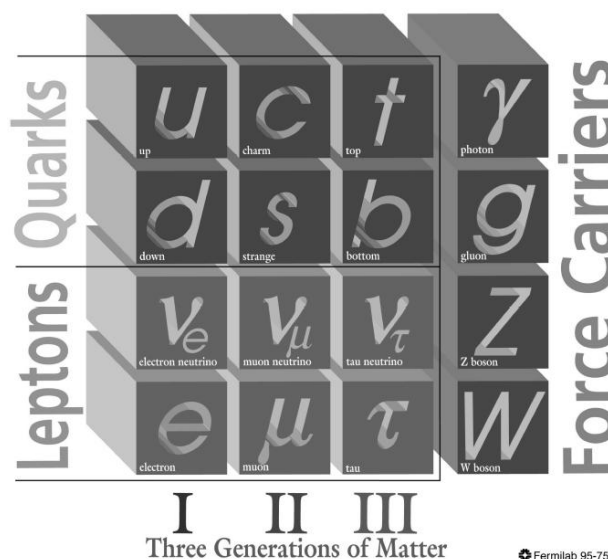
*KLúčové slová:* b-jet, mión, kombinovaný náboj

## 1 Úvod

Large Hadron Collider (LHC) je najväčší a najvýkonnejší časticový urýchľovač nielen v CERN, ale na celom svete. LHC je vybudovaný tak, aby bol schopný dodať časticiam vo zväzkoch energiu až 14 TeV. Prvé protón-protónové zrážky boli zaznamenané 20. novembra 2009[1]. Od marca roku 2010 sú zväzky urýchľované na energiu 3.5 TeV. V ťažiskovej sústave je teda energia pri zrážke 7 TeV. Súčasťou LHC je šesť experimentov (ALICE, ATLAS, CMS, LHCb, LHCf a TOTEM), ktoré majú za úlohu zistiť, ako sa správajú častice pri veľmi vysokých energiách.

Štandardný model zlučuje v sebe tri fundamentálne interakcie (elektromagnetickú, slabú a silnú). Fundamentálne častice prírody rozdeľuje do troch časticových sektorov: fundamentálne fermióny, intermediálne bozóny a Higgsove bozóny. Fermióny sú častice hmoty s polčíselným spinom a zahrňujú leptóny a kvarky. Intermediálne bozóny sú kvantá silových polí s celočíselným spinom. Medzi bozóny patria fotóny, W a Z bozóny, gluóny. Kvarky a leptóny tvoria tri generácie. V každej generácii sú dva kvarky a dva leptóny (obr. 1). Podľa Štandardného modelu majú kvarky v jednej generácii vždy náboj

$2/3$  a  $-1/3$ . Z leptónov má jeden z nich náboj  $-1$  a druhý je neutríno. Pre testovanie fyziky podľa Štandardného modelu, prípadne hľadanie novej fyziky za týmto modelom, je dôležitá fyzika top kvarku. So svojou plánovanou ročnou produkciou 8 miliónov eventov obsahujúcich top kvark, zohrá experiment ATLAS v tomto testovaní významnú úlohu.



Obr. 1: Rozdelenie fermiónov do trojgeneračnej štruktúry a kalibračných bozónov (tzv. nosičov síl) podľa Štandardného modelu

Náboj top kvarku sa určuje nepriamo pomocou náboja b-kvarku a W-bozónu, na ktoré sa tento kvark rozpadá. V tejto práci sa budem venovať kalibrácii náboja b-jetov na dvoj-jetových eventoch. Tento proces je nezávislý od top kvarkových procesov. Preto dobre poslúži na overovanie metód, ktoré sa použijú pri rekonštrukciách top kvarkov. V práci sa uvažujú dva jety letiace na navzájom opačné smery. Jeden z jetov musí obsahovať mión a druhý jet musí byť SV0 algoritmom označený ako b-jet. Predpoklad je, že jety sú iniciované  $b\bar{b}$  kvarkovým párom. Z toho vyplýva korelácia medzi nábojom miónu a nábojom b-jetu.

\*lukas.plazak@gmail.com

†stanislav.tokar@fmph.uniba.sk



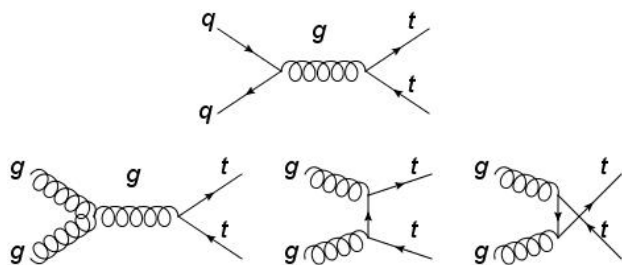
## 2 Tretia generácia kvarkov

### 2.1 Top kvark

Top kvark, objavený vo Fermilabe v roku 1995 v experimentoch CDF[2] a D0[3], doplnil trojgeneračnú štruktúru Štandardného modelu a otvoril tak nový priestor pre fyziku top kvarku. Podľa Štandardného modelu je spolu s b-kvarkom časticou tretej generácie a má náboj  $2/3$ . Na základe vykonaných analýz v CDF[4] a D0[5] však existuje možnosť, že pozorovaná častica nebol top kvark, ale „exotický“ kvark s nábojom  $-4/3$ [6].

Top kvark vzniká v hadrón-hadrónových zrážkach prevažne prostredníctvom silných interakcií. Pri zrážkach typu protón-protón sa produkujú páry top-antitop kvarkov prostredníctvom gluónovej fúzie alebo kvark-antikvarkovej anihilácie (obr. 2). Relatívny význam oboch spôsobov závisí na energii zrážky a pôvode zväzku častíc. V LHC prevažuje pri tvorbe top-antitop kvarkových párov gluónová fúzia (90%) a v experimentoch na Tevatrone kvark-antikvarková anihilácia (85%). Top kvark sa rozpadá takmer okamžite bez toho, aby stihol hadronizovať. V Štandardnom modeli sa top kvark rozpadá takmer výhradne jediným spôsobom  $t \rightarrow Wb$ . W-bozón sa následne môže rozpadnúť leptónovo alebo hadrónovo.

Vďaka takmer okamžitému rozpadu po vzniku top kvarku sú všetky jeho vlastnosti prenesené na produkty rozpadu. Preto je pre určenie jeho náboja nutné určiť náboj W-bozónu a b-kvarku. Náboj W-bozónu sa dá relatívne jednoducho určiť z náboja leptónu, na ktorý sa rozpadá. Náboj b-kvarku, ktorým je inicializovaný b-jet, získavame metódou váhovania trackov v danom b-jete.

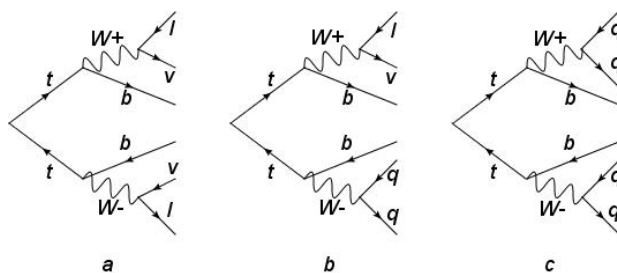


Obr. 2: Feynmanove diagramy znázorňujúce produkciu top-antitop párov. Prvý diagram zobrazuje kvark-antikvarkovú anihiláciu, zvyšné tri gluónovú fúziu. Šípka smerujúca sprava doľava zodpovedá antičastici.

Z experimentálneho hľadiska sa rozpad páru top-antitop kvarku môže charakterizovať prostred-

níctvom počtu W-bozónov, ktoré sa rozpadajú leptónovo.[7] Ide o nasledujúce tri prípady (obr. 3):

- Dileptónový rozpad reprezentuje  $1/9$  prípadov. Oba W-bozóny sa rozpadajú na páry leptón-neutríno. Dohromady vznikajú dva nabité leptóny, dve neutrína a dva b-jety. Na identifikáciu tohto prípadu sú potrebné dva leptóny s veľkou  $p_T$  a chýbajúca  $E_T$ .
- Leptón + jetový rozpad predstavuje  $4/9$  prípadov. Prítomnosť jedného leptónu s veľkou  $p_T$  umožňuje potlačiť QCD<sup>1</sup> pozadie a W+jety zo Štandardného modelu. Jediný zdroj chýbajúcej  $E_T$  v tomto prípade je jedno neutríno. Dohromady vznikajú dva b-jety pochádzajúce z rozpadu top kvarkov, leptón, neutríno a dva ľahšie jety z jedného W-bozónu. Tento rozpad je prípadom, ku ktorému sa analýza v tejto práci najviac približuje.
- Hadrónový rozpad predstavuje  $4/9$  prípadov. Oba W-bozóny sa rozpadajú hadrónovo. To má za následok šesť jetov: dva b-jety pochádzajúce z rozpadu top kvarkov a štyri ľahké jety z rozpadu W-bozónov. Okrem chýbajúcej veľkej  $p_T$  leptónov detekciu sťažuje aj prítomnosť vysokého pozadia počas rekonštrukcie.

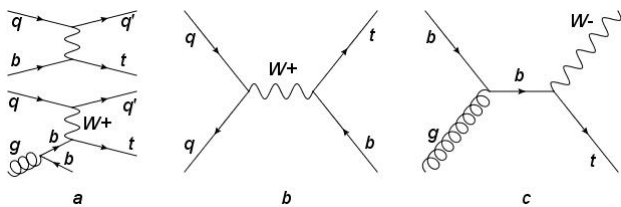


Obr. 3: Feynmanove diagramy znázorňujúce rozpad top-antitop párov: a - dileptónový rozpad, b - leptón + jetový rozpad, c - hadrónový rozpad. Šípka smerujúca sprava doľava zodpovedá antičastici.

Okrem produkcie top kvarku v pároch, sa môže produkovať aj jednotlivo (single top) prostredníctvom elektroslabej interakcie. Produkcia samostatného top kvarku môže podľa Štandardného modelu prebiehať tromi spôsobmi (obr. 4):

<sup>1</sup>Quantum ChromoDynamics - teória silných interakcií, popisujúca interakcie kvarkov a gluónov pri vytváraní hadrónov

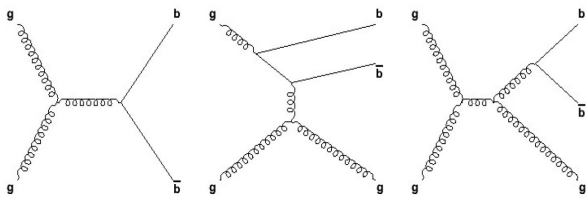
- t-kanál „t-channel“: Kvarkom vyžiarený virtuálny W bozón premení pri interakcii morský b-kvark z protónu na top kvark. Tento spôsob sa taktiež označuje ako W-gluónová fúzia, keďže b-kvark pochádza z gluónu rozpadajúceho sa na pár b-kvarku a antib-kvarku.
- s-kanál „s-channel“: Času podobný (time-like) W-bozón vzniká fúziou dvoch kvarkov. Následne sa tento W bozón rozpadá na top a b-kvark.
- Asociovaná produkcia: Označovaná aj ako Wt-kanál. Top kvark vzniká spolu so skutočným W-bozónom. Počiatočný b-kvark je morský kvark z protónu.



Obr. 4: Feynmanove diagramy znázorňujúce vznik samostatného (single) top kvarku: a - t-kanál, b - s-kanál, c - Wt-kanál. Šípka smerujúca sprava doľava zodpovedá antičastici.

## 2.2 B-kvark

V najnižších priblíženiach môže byť produkcia b-kvarku popísaná tromi spôsobmi: „flavour creation, flavour excitation a gluon splitting“ (obr. 5).



Obr. 5: Feynmanove diagramy znázorňujúce vznik b-kvarku pri „flavour creation, flavour excitation a gluon splitting“.

V mnohých prípadoch je produkcia b-kvarkov hlavným pozad'ovým procesom, preto je nutné porozumieť ich vzniku. Veľmi dôležité je rozlišovanie b-jetov, c-jetov a ľahkých jetov. Ak vezmeme b-jet a k nemu priradíme mión, priečna hybnosť miónu vzhľadom na os b-jetu dobre rozlišuje b-jety od c-jetov a ľahkých jetov. Pri tejto metóde sa mión pridáva k jetu, ku ktorému je najbližšie. tento

miónový jet sa priraduje k jetu označenému algoritmom, založeným na rekonštrukcii sekundárneho vertexu, ako b-jet s najvyššou energiou.

B-kvark hadronizuje takmer okamžite po svojom vzniku. Od svojho vzniku v primárnom vertexe po vznik jetu v sekundárnom vertexe preletí určitú vzdialenosť. Na tomto je založený jeden z algoritmov na určovanie b-jetov (SV0). Jety pochádzajúce z ľahkých kvarkov a gluónov nie sú veľmi často asociované so sekundárnym vertexom.

## 3 Kalibrácia náboja jetu

Zo vzorky boli vyberané eventy, ktoré obsahovali dva jety. Jeden z nich obsahoval mión, druhý bol algoritmom označený ako b-jet. Na určenie náboja b-jetu bola použitá váhová metóda spočívajúca vo váhovaní sumy nábojov trackov asociovaných s jetom. Príspevok jednotlivých trackov je úmerný priemetu hybnosti na os jetu.

$$Q_{bjet} = \frac{\sum_i q_i |\vec{j} \cdot \vec{p}_i|^\kappa}{\sum_i |\vec{j} \cdot \vec{p}_i|^\kappa} \quad (1)$$

kde  $q_i(p_i)$  je náboj (hybnosť) i-teho tracku,  $\vec{j}$  určuje smer osi b-jetu a  $\kappa$  je parameter optimalizovaný na hodnotu 0,5. Všetky tracky musia byť kónuse  $\Delta R = 0.25$  vzhľadom na os jetu.

Na základe znamienka (-+) náboja b-jetu sa určuje, či jet pochádza z  $b$ - alebo  $\bar{b}$ -kvarku. V tejto práci sa uvažujú na opačné strany letiace dva jety. Miónový jet aj b-jet by mali pochádzať z  $b\bar{b}$  páru. Z toho vyplýva, že náboj b-jetu je korelovaný s nábojom miónu. Ak je v miónovom jete kladne nabitý lepton b-jet pochádza z b-kvarku. A naopak ak je lepton záporne nabitý, b-jet pochádza z  $\bar{b}$ -kvarku:  $b \rightarrow \mu^- X$  ( $\bar{b} \rightarrow \mu^+ X$ ).

### 3.1 Dáta a MC vzorky

Zoznam použitých MC vzoriek

- mc10\_7TeV.108068.J2\_pythia\_jetjet\_muFIXED.merge.NTUP\_BTAG.\*\_p421
- mc10\_7TeV.108069.J3\_pythia\_jetjet\_muFIXED.merge.NTUP\_BTAG.\*\_p421

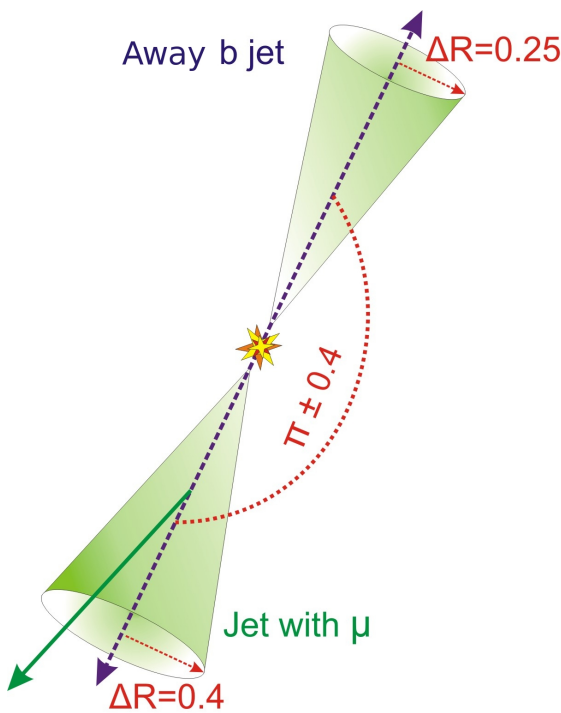
\* znamená číslo 574\_s933\_s946\_r1830\_r1700.

Použitá dáta zodpovedajú  $42,7 \text{ pb}^{-1}$  dát protón-protónových zrážok pri energii 7 TeV zozbieraných

v experimente ATLAS v období od 30. marca 2010 do 30. augusta 2010.

- data10\_7TeV.periodE.physics\_JetTauEtmiss. PhysCont.NTUP\_BTAG.repro05\_v02\_p400
- data10\_7TeV.periodF.physics\_JetTauEtmiss. PhysCont.NTUP\_BTAG.repro05\_v02\_p400
- data10\_7TeV.periodG.physics\_JetTauEtmiss. PhysCont.NTUP\_BTAG.repro05\_v02\_p400
- data10\_7TeV.periodH.physics\_JetTauEtmiss. PhysCont.NTUP\_BTAG.repro05\_v02\_p400
- data10\_7TeV.periodI.physics\_JetTauEtmiss. PhysCont.NTUP\_BTAG.repro05\_v02\_p400

### 3.2 Výberové kritéria



Obr. 6: Grafické znázornenie b-jetu a opačným smerom letiaceho jetu s miónom.

Miónový jet obsahuje v kónuse  $\Delta R = 0.4$  mión zrekonštruovaný MUID algoritmom. Druhý jet bol označený ako b-jet b-tagovacím algoritmom SV0 s váhou väčšou ako prahová hodnota 5.85. Zo zákona zachovania hybnosti by oba jety mali letieť v navzájom opačných smeroch. Požiadavka teda je aby smerový vektor miónového jetu bol otočený o uhol  $\phi = \pi \pm 0.4$  rad od b-jetu v rovine xy (obr. 6).

Kritéria výberu b-jetov a trackov asociovaných s b-jetom:

- $|\eta| < 2.5$ ,
- $p_T > 25$  GeV,
- treky (stopy nabitých častíc) patriace b-jetu sú v kónuse  $\Delta R < 0.25$  vzhľadom na os b-jetu,
- berú sa len tracky s  $p_T > 1$  GeV,
- uvažuje sa len jet obsahujúci aspoň dva tracky,
- maximálny počet trackov v jete je 7, ak je trackov viac, berie sa do úvahy len prvých 7 s najvyššou  $p_T$ .

Kritéria na výber miónov:

- $7\text{GeV} < p_T < 100$  GeV,
- $\Delta R < 0.4$  vzhľadom na os miónového jetu.

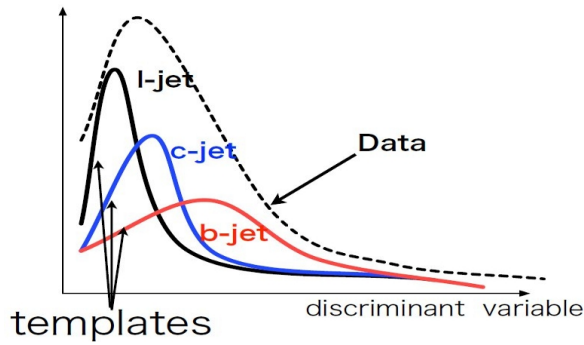
Dodatočné kritéria na zvýšenie kvality rekonštruovaných miónových trackov:

- počet BLayerHits  $> 0$
- počet PixelHits  $> 0$  a SCTHits  $> 5$
- počet PhiHits  $> 1$  (RPC a TGC)
- počet TRTHits  $> 5$  (iba pre  $|\eta| < 1.9$ )

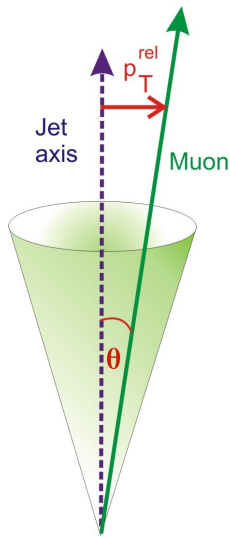
### 3.3 Relatívna priečna hybnosť miónov $p_T^{rel}$

V eventoch obsahujúcich ťažké kvarky sa na identifikáciu využíva semi-leptónový rozpad ťažkých hadrónov. Napriek neutrínu unikajúcemu s časťou energie existuje možnosť rekonštrukcie rozdelenia hmotnosti ťažkých hadrónov. Keďže tieto rozdelenia sa výrazne líšia pre  $b$  a  $c$  kvarky, umožňujú určenie ich relatívneho zastúpenia vo vzorke (obr. 7).

Relatívna priečna hybnosť leptónu vzhľadom na os jetu  $p_T^{rel}$  (obr. 8) dáva jasnú predstavu o rodičovskom kvarku tohto jetu. Vďaka väčšej hmotnosti b-kvarku, eventy s rozpadom b-hadrónu produkujú leptóny s vyššími hodnotami  $p_T^{rel}$  [8].



Obr. 7: Ilustrácia rozdelenia  $p_T^{rel}$  leptónov pochádzajúcich z rôznych kvarkov



Obr. 8: Grafické znázornenie  $p_T^{rel}$  miónu asociovaného s jetom.

### 3.4 Kombinovaný náboj

V analýze sa rekonštruje takzvaný kombinovaný náboj b-jetu definovaný nasledovne:

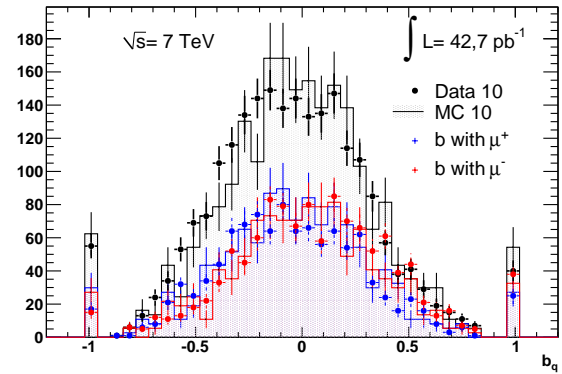
$$Q_{bcomb} = Q_{bjet} \times Q_{\mu} \quad (2)$$

kde  $Q_{bjet}$  je náboj b-jetu vypočítaný podľa rovnice (1) a  $Q_{\mu}$  je náboj miónu z jetu letiaceho opačným smerom. Rozdelenie kombinovaného náboja pre dáta a MC, ako aj náboja b-jetu asociovaného s kladným, resp. záporným miónom je zobrazené na obrázku 9.

### 3.5 Výsledky

Základom pre analýzu v tejto práci sú nasledujúce predpoklady a korelácie:

- doba života b-hadrónov je asi 1.5 ps
- korelácia medzi nábojom miónu a znamienkom náboja pôvodcu b-jetu



Obr. 9: Porovnanie rozdelenia kombinovaného náboja pre MC a dáta. Vyšráfované oblasti zodpovedajú MC, krížiky dátam.  $p_T^{rel} > 1100 MeV$ ,  $p_T^{\mu} > 10000 MeV$ ,  $25000 < p_T^{b-jet} < 40000 MeV$

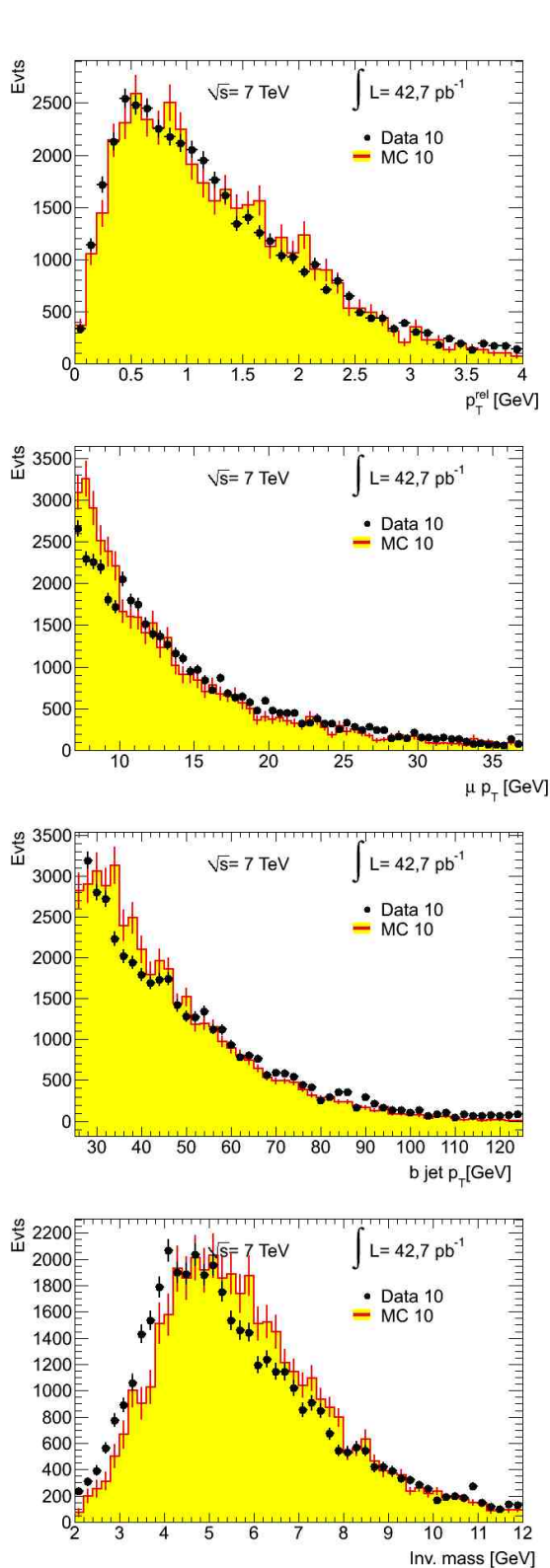
- vďaka väčšej hmotnosti b-kvarku je  $p_T^{rel}$  miónu pochádzajúceho z b väčšia ako pre mión z c alebo ľahkých kvarkov.
- produkcia miónov je výsledok rozpadu b-hadrónov

Kombinovaný náboj  $Q_{bcomb}$  bol preskúmaný v závislostiach na základných kinematických premenných:

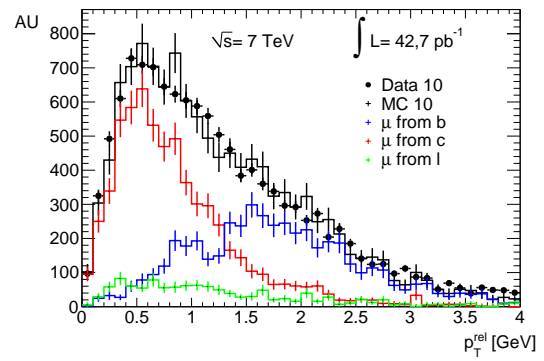
- $p_T^{rel}$  a priečnej hybnosti  $p_T^{\mu}$  miónu,
- pozdĺžnej a priečnej hybnosti b-jetu -  $p_L^b$  a  $p_T^b$ ,
- invariantnej hmotnosti b-jetu.

Rozdelenie týchto premenných je na obrázku 10.

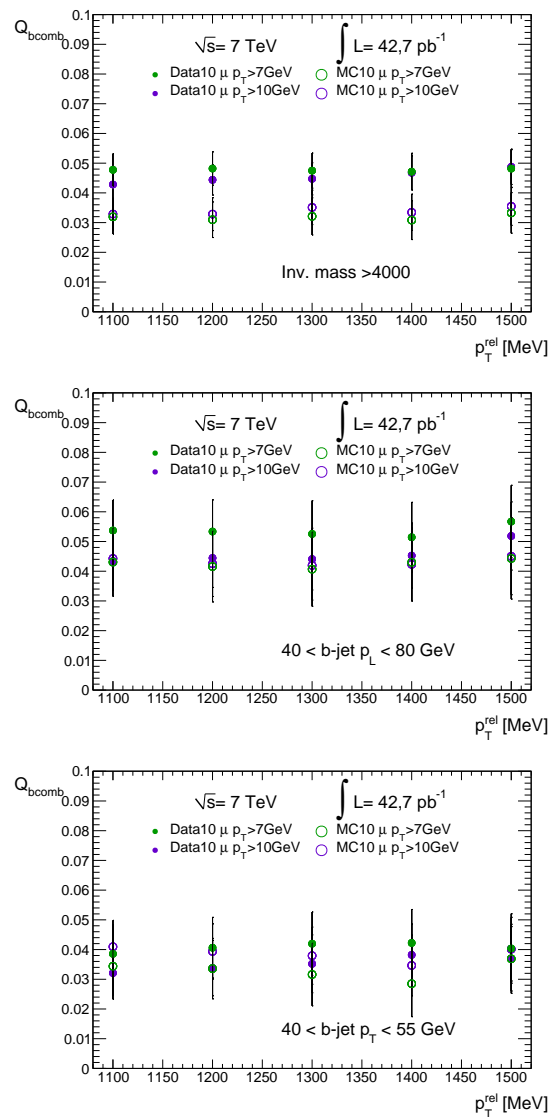
Závislosti strednej hodnoty kombinovaného náboja  $Q_{bcomb}$  na rôznych prahových hodnotách  $p_T^{\mu}$  a invariantnej hmotnosti, intervaloch  $p_T^b$  a  $p_L^b$  sú zobrazené na obrázku 12



Obr. 10: Porovnanie rozdelenia  $p_T^{rel}$ ,  $p_T^\mu$ ,  $p_T^b$  a invariantnej hmotnosti b-jetov pre MC a dáta. Vyšrafované oblasti zodpovedajú MC, krížiky dátam.



Obr. 11: Rozdelenie  $p_T^{rel}$  miónov pochádzajúcich z rôznych kvarkov. Spektrum miónov z b-kvarku je širšie ako z c-kvarku. Na základe tohto poznatku sa dá nastaviť prahová hodnota  $p_T^{rel}$  na odfiltrovanie väčšiny miónov nepochádzajúcich z b-kvarku



Obr. 12: Porovnanie kombinovaného náboja  $Q_{bcomb}$  pre dáta (plné krúžky) a MC (kružnice). Zelená farba zodpovedá  $p_T^\mu > 7 \text{ GeV}$  a fialová  $p_T^\mu > 10 \text{ GeV}$

## 4 Záver

Cieľom tejto práce je kalibrácia náboja vzhľadom na určovanie náboja top kvarku. Analýza náboja b-jetu využíva váhovaciu techniku, ktorá je založená na určovaní rodičovskej častice b-jetu pomocou miónov.

Na získanie predbežných výsledkov boli použité dáta s celkovou luminozitou  $42,7 \text{ pb}^{-1}$  pri ťažiskovej energii zrážok 7 TeV.

Kombinovaný náboj  $Q_{bcomb}$  bol preskúmaný v závislostiach na rôznych kinematických premenných. Zo získaných výsledkov vyplýva, že  $Q_{bcomb}$  je takmer nezávislý na rôznych prahových hodnotách  $p_T^{rel}$  miónov a invariantnej hmotnosti b-jetov.  $Q_{bcomb}$  je taktiež veľmi málo závislý na prahovej hodnote priečnej hybnosti  $p_T^\mu$  miónov. Na druhej strane sa ukazuje výrazný vplyv priečnej ( $p_T^b$ ) a pozdĺžnej ( $p_L^b$ ) hybnosti b-jetu.

Na základe MC-truth informácie sa taktiež zistilo, že aplikovaním vhodnej prahovej hodnoty  $p_T^{rel}$  sa dá podstatne zvýšiť efektívnosť výberu miónov z b-hadrónov:

$\mu z$	$p_T^{rel} > 0$	$p_T^{rel} > 1400$
beauty	$39,28\% \pm 0,94\%$	$70,33\% \pm 2,73\%$
charm	$51,29\% \pm 0,96\%$	$21,03\% \pm 2,75\%$
light	$9,43\% \pm 0,56\%$	$8,64\% \pm 1,38\%$

## Pod'akovanie

Ďakujem doc. RNDr. Stanislavovi Tokárovi, CSc. za cenné rady a odbornú pomoc, ktorú mi poskytol počas písania tejto práce.

Za venovaný čas, pomoc a rady pri riešení problémov ďakujem Mgr. Lucii Bátorovej.

## Literatúra

- [1] Eidelman S. et al. <http://press.web.cern.ch/press/-pressreleases/releases2009/pr16.09e.html>.
- [2] Abe et al.(CDF collaboration). Phys. rev. lett. 74 (1995) 2626.
- [3] S. Abachi et al. (D0 collaboration). Phys. rev. lett. 74 (1995) 2632.
- [4] A. Abulencia et al. First cdfmeasurement of the topquark charge using the top decay products, 2007, cdf note 8783.
- [5] V. M. Abazov et al. Phys. rev. lett. 98 (2007) 041801.
- [6] E. Ma D. Chang, W.F. Chang. Phys. rev. d 59 (1999) 091503.

[7] Expected Performance of the ATLAS Experiment, CERN-OPEN-2008-020.

[8] Atlas Colaboration. Calibrating b-tagging using dijet events, atl-phys-pub-2009-024 (2009).

# Experimentálny výskum vnútorného brzdného žiarenia $^{90}\text{Y}$

Rastislav Tatarko<sup>1</sup>  
 Školiteľ: Jaroslav Staníček<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

<sup>2</sup>Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Cieľom práce je namerať spektrum vnútorného brzdného žiarenia sprevádzajúceho beta premenu nuklidu  $^{90}\text{Y}$  a určiť relatívnu intenzitu procesu. Výsledky porovnávame s výsledkami iných autorov.

**Kľúčové slová:** Rádioaktívna premena, procesy vyšších rádov, vnútorné brzdné žiarenie, zakázané beta prechody

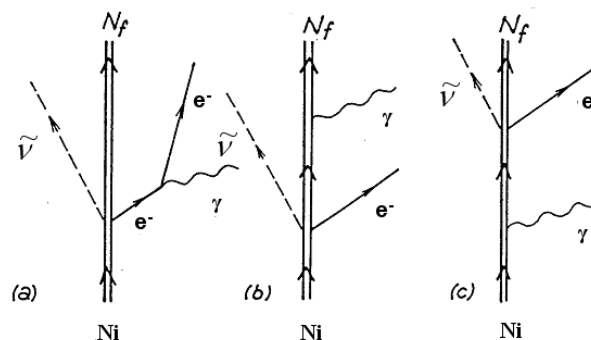
## Úvod

Rádioaktívnu premenu jadier opisujeme poruchovou teóriou. Základným typom rádioaktívnej premeny ( $\alpha, \beta$ ) a emisii gama-kvánt zodpovedajú v poruchovom rozvoji členy prvého rádu. Základné premeny môžu byť sprevádzané rôznymi elektromagnetickými reakciami jadra s nabitou časticou, ktoré sú v poruchovej teórii opísané členmi vyšších rádov. Procesy vyšších rádov sú:

- vnútorné brzdné žiarenie
- vnútorná tvorba elektrón-pozitronových párov
- ionizácia a excitácia elektrónového obalu

## 1. Vnútorné brzdné žiarenie

V kvantovej mechanike je vnútorné brzdné žiarenie (IB) procesom druhého rádu, ktoré sú  $\alpha$ -krát menej pravdepodobné ( $\alpha=1/137$  je konštanta jemnej štruktúry) než procesy prvého rádu. Základným rozdielom medzi ním a vonkajším brzdným žiarením je, že vnútorné brzdné žiarenie takmer nezávisí na okolitom materiáli [1]. Tvorba fotónov sprevádzajúcich beta premenu pozostáva z dvoch nezávislých, elementárnych procesov – emisie elektrónu a vznik gama kvanta. Priebeh procesu možno znázorniť tromi diagramami (Obr. 1). Diagram (a) znázorňuje prípad, kedy žiarenie vzniká interakciou coulombovských polí emitovaného elektrónu a dcérskeho jadra, diagramy (b) a (c) opisujú produkciu fotónov cez excitované stavy jadra a nazývajú sa nepriame prechody.



Obr. 1 Diagramy vzniku vnútorného brzdného žiarenia

Prehľad teórie je uvedený v práci [2]. Prvú teóriu pre dovolené beta prechody vypracovali Knipp a Uhlenbeck a nezávisle na nich Bloch, je podľa nich označovaná ako KUB. Pracovali s predpokladom emisie beta a emisie fotónu ako nezávislých procesov, pričom pre pravdepodobnosť emisie fotónu  $P(E)$  platí

$$P(E) = \int_{1+E}^{E_0} P(E_\beta) \Phi(E_\beta, E) dE_\beta, \quad (1)$$

kde  $P(E_\beta)dE_\beta$  je spektrum beta častíc,  $\Phi(E_\beta, E)$  je pravdepodobnosť vytvorenia fotónu s energiou  $E$  beta elektrónom s energiou  $E_\beta$  a  $E_0$  je energia prechodu. Celkový počet fotónov  $N(E)$  s energiou väčšou ako  $E$  pripadajúcich na jeden elektrón možno určiť ako

$$N(E) = \int_E^{E_0-1} P(E) dE. \quad (2)$$

Tieto výsledky boli získané za predpokladu  $Z = 0$ . Emisia fotónu nastáva aj bez prítomnosti coulombovského poľa, pretože elektrón získava po opustení jadra zrýchlenie. Spresniť teóriu sa pokúsili Nilsson, Lewis a Ford zavedením korekcie na vplyv coulombovského poľa dcérskeho jadra (teória LFN). Ak uvažujeme  $Z \neq 0$ , vo vzťahu (1) treba  $P(E_\beta)$  nahradiť výrazom

$$P(E_\beta) = P_0(E_\beta) F(Z, E_\beta), \quad (3)$$

kde  $F(Z, E_\beta)$  je Fermiho funkcia pre dovolené prechody a  $P_0(E_\beta)$  energetické spektrum beta ako v (1). Ďalej treba nahradiť funkciu  $\Phi(E_\beta, E)$

modifikovanou funkciou  $\Phi_Z(E_\beta, E)$ , ktorej závislosť na počte protónov možno zapísať

$$\Phi_Z(E_\beta, E) = \Phi_0(E_\beta, E) \frac{F(Z, E_p)}{F(Z, E_\beta)}, \quad (4)$$

kde  $E_p = E_\beta - E$  je relativistická energia fotónu. Pri analýze  $IB(\beta)$  stačí vo väčšine prípadov uvažovať diagram (a) z Obr. 1, pretože príspevok nepriamych prechodov (b) a (c) je veľmi malý. Pri zakázaných prechodoch beta však hrajú dôležitú úlohu. Teóriu pre zakázané premeny beta spresnili Ford a Martin. Amplitúda nepriamych prechodov je úmerná energii, teda ich príspevok je najvýznamnejší pri vyšších energiách.

Spojité žiarenie sprevádzajúce nepriame prechody je koherentné s  $IB$  sprevádzajúcim priame prechody. Žiarenie vzorky obsahuje 3 členy:

- $IB$  emitované predovšetkým v smere pohybu elektrónu
- nepriame žiarenie izotropné vzhľadom na hybnosť elektrónu, ak nepriamy prechod je dovolený
- interferencia  $IB$  a nepriameho žiarenia, pri veľkých uhloch  $IB$  oproti pohybu elektrónu relatívne významná.

Úpravou teórie pre nepriame prechody sa zaoberal aj Felsner, ktorého výsledky zlepšili súlad s experimentom predovšetkým pre energeticky vyššie oblasti spektra. Teóriu pre zakázané beta prechody rozpracovali Janouch a Havránek. Uvažovali emisiu kruhovo polarizovaného fotónu beta elektrónom pri premene jadra ako elektroslabý proces a vyčíslili amplitúdu procesu pre rôzny stupeň zákazu premeny. Z ich výsledkov vyplýva, že pravdepodobnosť emisie  $IB$  pri zakázanom prechode rastie pri vysokých energiách oproti pravdepodobnosti pri dovolenom prechode. Tento jav je prakticky nezávislý na  $Z$  jadra. Zráтали teoretický tvar spektra špeciálne pre prípad zakázaného prechodu 1. stupňa nuklidu  $^{90}\text{Y}$  [3].

Táto teória je v dobrej zhode s experimentálnymi výsledkami.

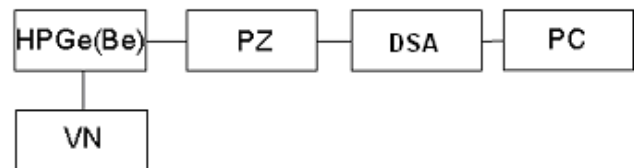
Z teoretických a experimentálnych výsledkov pre  $IB(\beta)$  vyplýva:

- spektrum  $IB(\beta)$  sa podobá spektru vonkajšieho brzdného žiarenia, ak majú rovnaký koncový bod
- intenzita  $IB(\beta)$  prudko klesá s rastúcou energiou fotónov
- intenzita  $IB(\beta)$  je o jeden až dva rády nižšia ako pre vonkajšie brzdné žiarenie a málo závisí na náboji dcérskeho jadra
- emitovaný fotón a  $\beta$  - elektrón sú silne uhlovo korelované
- fotóny  $IB(\beta)$  sú kruhovo polarizované.

Experimentálne sledovanie vnútorného brzdného žiarenia vytvoreného beta -elektrónom je náročné, pretože je spojené s vonkajším brzdným žiarením, ktorého intenzita je podstatne vyššia než intenzita sledovaného procesu. Výskum tohto procesu sa preto obmedzil iba na niekoľko beta - aktívnych nuklidov s čo najjednoduchšou schémou premeny.

## 2. Experimentálne zariadenie pre meranie $IB$

Pre potlačenie rušivých vplyvov pri meraní zriedkavých procesov, akým je  $IB$  (pozadia, externého brzdného žiarenia, RTG čiara pochádzajúcich od okolitých materiálov, prípadne žiarenia prímiesi obsahnutých vo vzorke) je nutné použiť vysokosenzitivné, nízkopozadové metódy merania. Na sledovanie vnútorného brzdného žiarenia sprevádzajúceho  $\beta$  - premenu  $^{90}\text{Y}$  sme použili HPGe(Be) detektor s koaxiálnou konfiguráciou elektród. Rozmery vonkajšieho valca sú  $\varnothing 51,8 \times 19,4$  mm, vnútorného jadra  $\varnothing 9,1 \times 11$  mm. Detektor sme použili v single zapojení, ktorého schéma je na Obr. 2.



Obr. 2: Bloková schéma zapojenia HPGe detektora

VN – zdroj vysokého napätia

PZ – nábojovo-citlivý predzosilňovač

DSA – digitálny spektrometrický analyzátor

PC – osobný počítač so softvérom Genie

2000

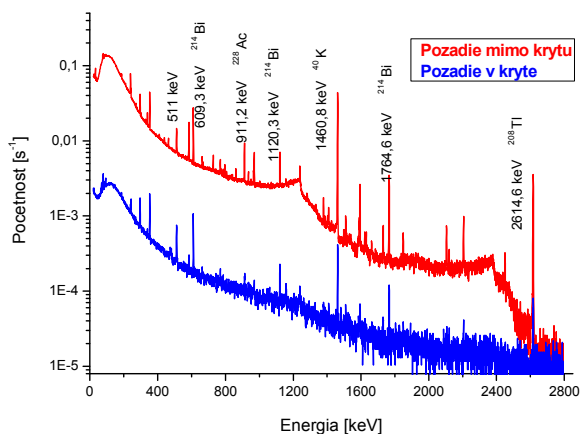
Pre pasívne potlačenie pozadia bol detektor pri meraní umiestnený v nízkopozadovom tieniacom kryte, ktorý sa nachádza v suteréne pavilónu F2 FMFI UK. Jeho celková hmotnosť je 4700 kg. Je umiestnený na nosnej konštrukcii, ktorá umožňuje jednoduché otváranie predných dverí krytu. Rozmery vnútorného priestoru sú  $38 \times 38 \times 60$  cm. V spodnej časti krytu je otvor pre detektor. Smerom dovnútra je kryt zložený z nasledovných vrstiev:

- 1 cm železa
- 10 cm olova
- 1 cm medi
- 8 cm neutrostopu
- 1 cm plexiskla

Tieniace vlastnosti nízkopozadového krytu sme ohodnotili meraním a porovnaním pozadia pre



detektor umiestnený mimo krytu a v kryte. Pozadie vonku sme merali počas doby 345864 s, pozadie v tieniacom kryte 771242 s. Namerané počtosti sme prerátali na jednotku času. Potlačenie prírodného pozadia tieniacim krytom znázorňuje Obr. 3.



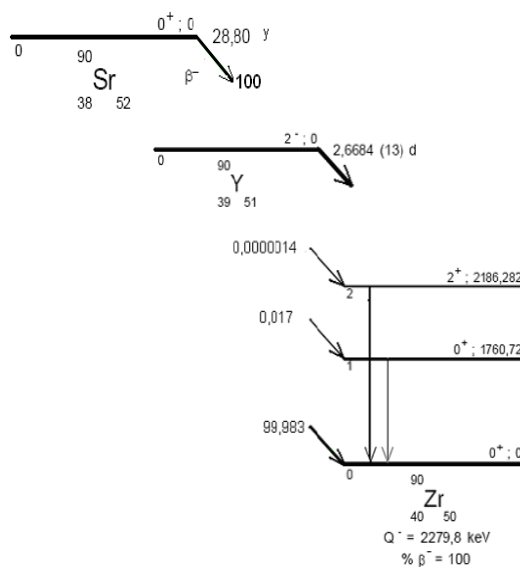
**Obr. 3:** Porovnanie pozadia vnútri a mimo nízkoopozadového tieniaceho krytu

Celkové potlačenie pozadia (pomer plôch spektra) nízkoopozadovým krytom v energetickom intervale 30-2800 keV bolo 38,3.

### 3. Charakteristika nuklidu $^{90}\text{Y}$

Izotop  $^{90}\text{Y}$  má  $T_{1/2} = 2,6684$  dňa. Premieňa sa emisiou beta častice zakázaným prechodom  $2 \rightarrow 0^+$  na  $^{90}\text{Zr}$ . Na základný stav dcérskeho jadra vedie 99,983% premien. Maximálna energia beta častíc je 2279,8 keV. S pravdepodobnosťou 0,017% môže prejsť na vzbudenú hladinu zirkónu  $0^+$  s energiou 1760,72 keV [4]. Prechod  $0^+ \rightarrow 0^+$  je zakázaný, jadro preto nemôže nadobudnúť základný stav emisiou fotónu. V takom prípade nadobudne základnú hladinu vnútornou konverziou alebo emisiou vnútorných  $e^- e^+$  párov. Môže tiež nastať dvojité emisie gama kvánt.

Použili sme kovový žiarič  $^{90}\text{Sr} + ^{90}\text{Y}$  s aktivitou  $(2,56 \pm 0,05)$  MBq ku dňu 1.6.2010. Nuklid  $^{90}\text{Sr}$  sa premieňa s dobou polpremeny 28,808 roka na  $^{90}\text{Y}$  100%-nou emisiou beta častíc s energiou 0,546 MeV. Pri tejto premene nedochádza k emisii gama kvánt.  $^{90}\text{Y}$  sa premieňa v rádioaktívnej rovnováhe so stronciom na  $^{90}\text{Zr}$ .

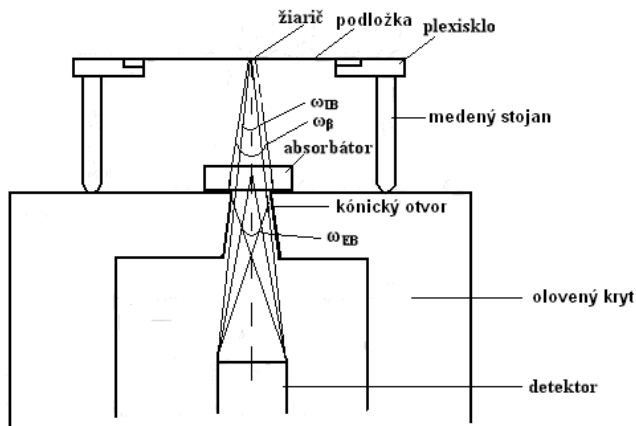


**Obr.4** Schéma premeny  $^{90}\text{Sr} + ^{90}\text{Y}$

### 4. Korekcie pri meraní IB

Podstatnou korekciou je korekcia na vonkajšie brzdné žiarenie, ktorého intenzita je väčšia ako intenzita vnútorného brzdného žiarenia, preto pre úspešné meranie ho potrebujeme čo najviac potlačiť. Použili sme metódu priestorových uhlov. Jej princípom je nájdenie takej geometrie merania, pri ktorej pomer priestorových uhlov, pod ktorými dopadajú IB a EB do detektora, zabezpečí minimálny príspevok EB.

Geometrické usporiadanie experimentu je znázornené na Obr. 5. Zdroj žiarenia je umiestnený na podstavci z plexiskla, ktorý stojí na troch medených nohách. Podstavec má tvar prstenca a do otvoru v jeho strede možno umiestniť podložku pre žiarič. Vertikálnu polohu podstavca možno spojiť meniť. Beta častice emitované žiaričom smerom k detektoru sú úplne absorbované absorbátorom z plexiskla o hrúbke 1 cm. Ten je položený tak, aby úplne zakrýval hornú časť kónického otvoru oloveného tieniaceho krytu. Tieniacy kryt slúži na pohltanie fotónov vonkajšieho brzdného žiarenia, ktoré vzniká pri interakcii beta elektrónov s materiálom v priestore mimo kužeľa, vymedzeného kónickým otvorom.



**Obr. 5** Usporiadanie experimentu pre optimalizáciu pomeru EB/IB

Pre pomer početností vonkajšieho a vnútorného brzdného žiarenia, zaregistrovaného detektorom,  $N_{EB}/N_{IB}$ , platí

$$\frac{N_{EB}(E)}{N_{IB}(E)} = \frac{f_{EB}(E, Z_{\text{absorbátora}})}{f_{IB}(E)} \frac{\omega_{\beta}}{\omega_{IB}} \omega_{EB}, \quad (5)$$

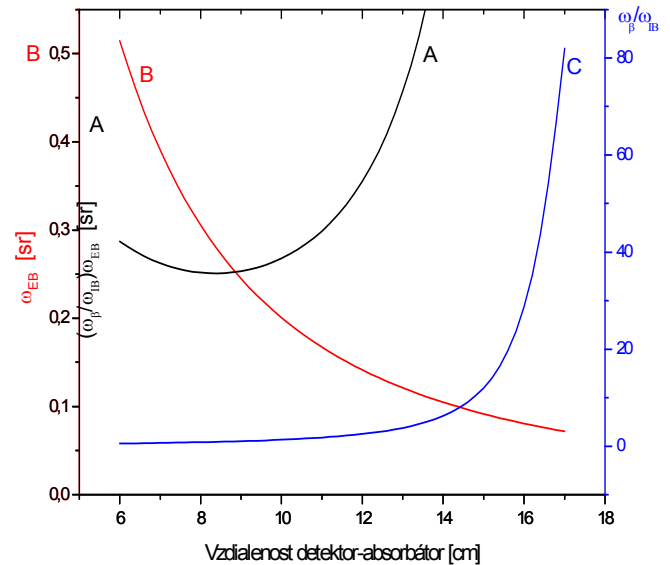
kde  $N_{\beta}$  je počet beta častíc emitovaných za jednotku času,  $f_{IB}$  a  $f_{EB}$  sú pravdepodobnosti, že beta častica vytvorí pri interakcii fotón IB, resp. EB,  $\omega_{IB}$  a  $\omega_{EB}$  sú priestorové uhly, pod ktorými dopadajú fotóny IB a EB na detektor a  $\omega_{\beta}$  je priestorový uhol, v ktorom elektróny zo žiariča vytvárajú v absorbátore vonkajšie brzdné žiarenie, ktoré môže byť detektorom zaregistrované. Pomer  $N_{EB}/N_{IB}$  sme vyšetrovali pri zmene vzdialenosti absorbátora od detektora. Za predpokladu izotropného priestorového rozloženia produkcie externého brzdného žiarenia elektrónmi zo žiariča v absorbátore nezávisí pomer  $f_{EB}/f_{IB}$  na geometrii merania a je konštantný. Vzdialenosť žiarič – detektor bola 18 cm. Minimum pomeru početností vonkajšieho a vnútorného brzdného žiarenia, zaregistrovaného detektorom,  $N_{EB}/N_{IB}$ , dosiahneme tým, že absorbátor umiestnime do takej vzdialenosti

od čela kryštálu, v ktorej veľkosť pomeru  $\frac{\omega_{\beta}}{\omega_{IB}} \omega_{EB}$

bude minimálna. Závislosť priestorových uhlov pre beta častice a brzdné žiarenie od vzdialenosti absorbátor-detektor sme vyniesli do grafu (Obr. 6). Vidíme, že optimálna vzdialenosť absorbátora od detektora, daná minimom krivky A, je 8,4 cm. Pritom je potrebné dodržať optimálnu polohu žiariča čo najpresnejšie, pretože už malá výchylka môže spôsobiť nezanedbateľný rozdiel v nameranej početnosti. Pri našom meraní bol príspevok výchylky žiariča k celkovej neistote merania 5,4%.

Aj pri optimálnej geometrii pre potlačenie EB, detektor stále registruje časť fotónov externého brzdného žiarenia. Korekciu na zvyškové EB sme

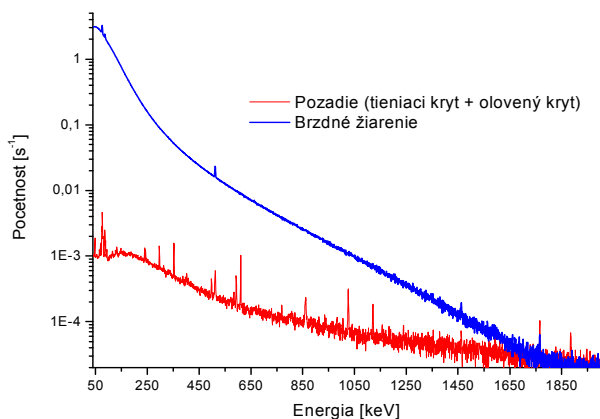
urobili experimentálne. Intenzita  $EB(\beta)$  je približne úmerná atómovému číslu absorbátora a



**Obr. 6** Závislosť priestorových uhlov na vzdialenosti absorbátora od detektora

je nulová pri  $Z=0$ . Z nameraných spektier brzdného žiarenia pre rôzne absorbátory možno skonštruovať závislosť príspevku externého brzdného žiarenia na  $Z$ . Čistú hodnotu  $IB(\beta)$  potom získame extrapoláciou k  $Z=0$ . Uskutočnili sme dve pomocné merania spektier brzdného žiarenia s absorbátormi hliník a meď. Z nameraných spektier sme pre niekoľko energií určili závislosť početnosti na atómovom čísle absorbátora. Týmito bodmi sme preložili priamku a extrapoláciou k  $Z=0$  sme určili početnosť pochádzajúcu len od IB bez príspevku EB. Početnosti sme normovali na jednotku. Príspevok EB spolu s úbytkom IB v použítom absorbátore (plexisklo) nepresahuje 4% intenzity  $IB(\beta)$  nuklidu  $^{90}\text{Y}$ .

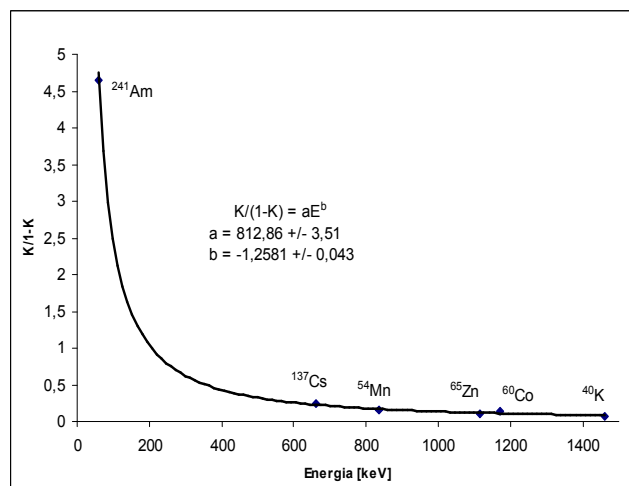
Ďalšou korekciou je korekcia na pozadie. Meranie prebiehalo vnútri nízkoopod'ového krytu a detektor bol navyše umiestnený v olovenom kryte pre potlačenie EB, ktorý má tiež tieniace vlastnosti. Ako vidíme na Obr. 7, početnosti pozadia boli oproti početnostiam brzdného žiarenia nižšie o niekoľko rádov. Početnosť brzdného žiarenia je získaná z merania s plexisklovým absorbátorom za dobu 681827 s. Vplyv tejto korekcie na výsledné spektrum je významný iba v oblasti vyšších energií. Nad energiou 1650 keV klesli namerané početnosti na úroveň pozadia.



**Obr. 7** Porovnanie početností brzdného žiarenia a pozadia v nízkoopozadovom kryte s oloveným krytom

Fotóny brzdného žiarenia, ktoré dopadnú do citlivého objemu použitého HPGe(Be) detektora, v ňom môžu interagovať nielen fotoefektom, ale aj comptonovským rozptylom. Registrácia comptonovsky rozptýlených gama kvánt skresľuje namerané spektrum  $\text{IB}(\beta)$ . Spektrum treba preto korigovať na príspevok fotónov, interagujúcich rozptylom. Pre túto korekciu sme použili metódu postupných subtraktíí. Spočíva v tom, že pre najvyššiu energiu prítomnú v nameranom spektre sa určí plocha comptonovského kontinua a jej relatívny podiel vzhľadom na plochu píku úplnej absorpcie sa odráta z nameraného spektra. Postup sa zopakuje pre ďalšie energie od najvyššej po najnižšiu.

Z celkového počtu  $N(E)$  zaregistrovaných fotónov s energiou  $E$ , sa v píku úplnej absorpcie zaregistruje  $K(E) \cdot N(E)$  fotónov, ostatné sú zaregistrované v comptonovskom kontinuu. Ich počet je  $N(E) \cdot (1 - K(E))$ . Pre získanie vzťahu medzi energetickým a prístrojovým tvarom spektra pre rôzne energie  $\gamma$ -kvánt sme uskutočnili meranie niekoľkých žiaričov. Závislosť pomeru  $N(E) \cdot (1 - K(E))$  od energie fotónov sme vyniesli do grafu (Obr. 8) a bodmi sme preložili mocninnú funkciu tvaru  $(K/1-K) = aE^b$ . Pomocou tejto funkcie vieme určiť pomer comptonovsky rozptýlených fotónov v celom vyšetřovanom rozsahu spektra.



**Obr. 8** Závislosť relatívnej plochy comptonovského kontinua v spektre od energie fotónov

Spektrum sme rozdelili na intervaly po 50 keV a postupným odrátaním príspevku comptonovsky rozptýlených fotónov pre každý interval sme dostali spektrum korigované na comptonovské rozdelenie.

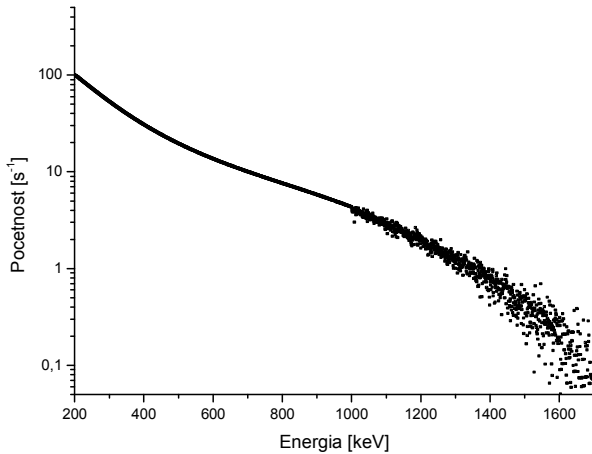
Spektrum  $\text{IB}(\beta)$  môže byť ovplyvnené prítomnosťou sumačných impulzov, ktoré vznikajú v dôsledku konečnej rozlišovacej doby meracej aparatury. Odhad príspevku sumačných impulzov sme urobili nasledovne: Nech sú namerané početnosti impulzov pre energie  $E_1$  a  $E_2$  rovné  $n_1$ , resp.  $n_2$  a nech rozlišovacia doba aparatury je  $\tau$ . Pri energii  $E_1 + E_2$  bude v spektre zaregistrovaných navyše  $2 \tau n_1 n_2$  impulzov. Pre ohodnotenie príspevku sumačných impulzov pri danej energii musíme zaradiť takýto príspevok od všetkých kombinácií energií  $E_1, E_2$ . Takto získame horný limit pre príspevok sumačných impulzov. Skutočný príspevok bude o niečo menší. Rozlišovacia doba použitej aparatury bola  $\tau = 1 \mu\text{s}$ . Pri vyhodnotení príspevku sumačného efektu s použitím tejto hodnoty sme zistili, že príspevok početnosti sumačných impulzov v nameranom spektre je menší ako 0,2 %.

Spektrum  $\text{IB}$  s použitím plexisklového absorbátora bolo merané počas doby 689601 s, z toho mŕtva doba bola 7774 s, čo predstavuje 1,13% z celkovej doby merania. Plocha spektra  $\text{IB}$  je po korekcii na mŕtvu dobu väčšia oproti ploche nameraného spektra najviac o 1,14%.

Po korekcii na comptonovské rozdelenie sú v spektre prítomné už len impulzy od úplne absorbovaných fotónov. Pre získanie výsledného spektra  $\text{IB}$  sme urobili korekciu na pikovú účinnosť. Energetickú kalibráciu detektora sme získali použitím najintenzívnejších čiar nuklidu  $^{152}\text{Eu}$ .

## Výsledky a diskusia

Výsledné spektrum po korekcii na pozadie, Comptonovské rozdelenie a detekčnú účinnosť je na Obr. 9. Celková relatívna neistota plochy spektra získanej meraním je 10,32%.



Obr. 9 Výsledné spektrum IB( $\beta$ )  $^{90}\text{Y}$

Pre procesy vyšších rádov sa určuje aj ich relatívna intenzita oproti základnému procesu, v našom prípade oproti beta premene nuklidu  $^{90}\text{Y}$ .

Zdroj  $^{90}\text{Sr} + ^{90}\text{Y}$  má dve skupiny beta častíc s koncovými bodmi spektier pri energiách 546 keV pre  $^{90}\text{Sr}$ , resp. 2279,8 keV pre  $^{90}\text{Y}$ . Aby sme vylúčili príspevok stroncia, spektrum sme vyšetrovali v intervale 550–2279,8 keV. Tvar spektra beta častíc  $^{90}\text{Y}$  sme získali podľa tabuľkových hodnôt relatívnych početností beta častíc pre danú energiu [5]. Zrátali sme relatívne početnosti pre použitý žiarič  $^{90}\text{Sr} + ^{90}\text{Y}$  s aktivitou 2,56 MBq. Určili sme počet emitovaných častíc v energetickom intervale 550–1650 keV, v ktorom sme vyšetrovali spektrum vnútorného brzdného žiarenia. Počet častíc v tomto energetickom intervale emitovaných za jednotku času je  $1,63 \cdot 10^6$ . Túto hodnotu sme porovnali s počtom emitovaných fotónov vnútorného brzdného žiarenia v rovnakom intervale, ktorý je daný plochou výsledného spektra IB v tomto intervale. Tento počet je  $2820 \pm 290$ . Ich pomer predstavuje relatívnu intenzitu vyšetrovaného procesu oproti základnému (beta premene) vo vyšetrovanom intervale  $(17,3 \pm 1,8) \cdot 10^{-4}$ .

Náš výsledok pre interval 550–1650 keV sme porovnali s experimentálnym výsledkom autorov Powar, Singh pre interval 550–1790 keV. Ich hodnota relatívnej intenzity IB je  $(15,5 \pm 1,5) \cdot 10^{-4}$  [6]. Rozdiel spôsobený chýbajúcou časťou spektra v oblasti 1650 – 1790 keV predstavuje menej ako 0,4% celkovej intenzity. Pri tomto priblížení je v zhode s výsledkom predchádzajúceho

experimentu v rámci neistoty merania (interval spoľahlivosti  $\pm 2\sigma$ ).

Ďalšie meranie IB( $\beta$ ) previedli Singh, Shetha a Dargazelli. Z výsledkov merania zrátali relatívnu pravdepodobnosť emisie fotónu IB pre rôzne energie [7]. Porovnanie ich výsledkov s našimi uvádzame v Tabuľke 1.

Výsledky experimentov potvrdzujú význam nepriamych prechodov pre nuklidy so zakázanou beta premenu 1. stupňa, ako je  $^{90}\text{Y}$ . V oblasti vyšších energií sa prejavuje významné prevýšenie intenzity procesu v porovnaní s intenzitou pri dovolených prechodoch. Nameraná intenzita je v dobrom súlade s teóriou, ktorá nepriame prechody zohľadňuje (teórie Felsner; Janouch, Havránek).

Energia [keV]	Relatívna pravdepodobnosť IB/ $\beta$ $\times 10^{-4}$	
	Náš výsledok	Sing, Shetha, Dargazelli
611	37,0	34,0
661	28,0	25,6
712	22,0	19,0
761	17,1	14,9
828	1,14	9,39
930	6,01	5,27
1032	3,56	3,34
1140	2,19	2,04
1242	1,14	1,10
1380	0,62	0,58
1518	0,23	0,19
1635	0,12	0,10

Tabuľka 1 Porovnanie experimentálnych výsledkov relatívnej pravdepodobnosti sledovaného procesu pre rôzne energie

## Zoznam bibliografických odkazov

- [1] BAČEK, D. 1981. *Vnútorné brzdné žiarenie v jadrách  $^{32}\text{P}$ ,  $^{51}\text{Cr}$ ,  $^{54}\text{Mn}$* : diplomová práca. Bratislava: Univerzita Komenského, 1981. 62 s.
- [2] STANIČEK, J. 1982. *Výskum procesov vyšších rádov pri jadrových premenách metódami spektrometrie gama*: kandidátska dizertačná práca. Bratislava: Univerzita Komenského, 1982. 149 s.
- [3] JANOUC, F. – HAVRÁNEK, M. 1965. *Internal bremsstrahlung by first forbidden beta transitions*. Milano, International Centre for Theoretical Physics, 1965. Rukopis
- [4] CHISTÉ, V. 2005. *Table de Radionucléides* [online]. Dostupné na internete:

<[http://www.nucleide.org/DDEP\\_WG/Nuclides/Sr-90\\_tables.pdf](http://www.nucleide.org/DDEP_WG/Nuclides/Sr-90_tables.pdf)>

[5] KOLOBAŠKIN, V. M. a kol. 1978. *Beta-izlučenie produktov delenija: Spravožnik*. Moskva: Atomizdat, 1978, 472 s.

[6] POWAR, M.S. – SINGH, M. 1975. Measurement of the Internal Bremsstrahlung Spectrum of  $^{90}\text{Y}$ . In *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*. 1975, vol. 1, no. 4, s. 453-460

[7] SINGH, B. –DARGAZELLI, S. 1971. Probability of Production of Internal Bremsstrahlung Accompanying  $\beta$  Decay from  $^{90}\text{Sr}$  and  $^{90}\text{Y}$ . In *Physical Review C*. 1971, vol. 4, no. 6, s. 2144-2149

# Production of high intensity Beta Beams at the ISOLDE facility (Extended Abstract)

Rastislav Hodák<sup>1\*</sup>

Thierry Stora<sup>2†</sup>

Supervisor: Fedor Šimkovic<sup>1‡</sup>

<sup>1</sup> Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava, Slovensko

<sup>2</sup> CERN, CH-1211 Ženeva 23, Švajčiarsko

The Beta Beams were proposed by Piero Zucchelli in 2002 [Zucchelli, 2002]. This is a concept of a large scale next generation facility that claims to provide pure and collimated ultra-relativistic beams of electron neutrinos and antineutrinos with help of accelerated  $\beta$ -decaying radioactive ions circulating in a storage ring [see Fig.1]. This kind of

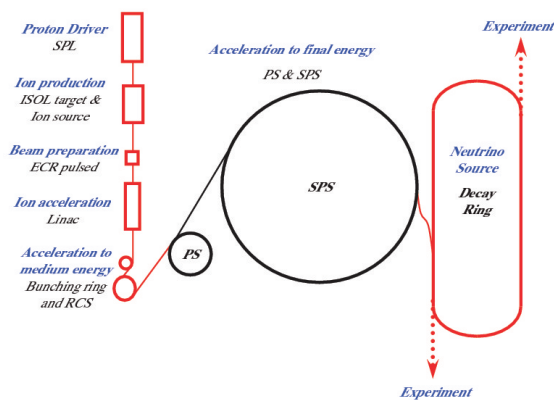


Figure 1: An overview of a possible  $\beta$ -beam facility at CERN

high intense source of electron (anti)neutrinos directed towards a remote underground neutrino detector [Orme, 2010] are planned to be used for a measurement of  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  oscillations, offering a unique chance for establishing a value of the  $\theta_{13}$  mixing angle and CP violating phase [Volpe, 2010]. The main task is to chose proper isotopes for acceleration facility, which allow to produce intense (anti)neutrino flux for physical experiments. Two isotopes have been selected as suitable  $\beta$ -emitters for production of neutrino ( ${}^6\text{He}$ ) and antineutrino ( ${}^{18}\text{Ne}$ ) beams [Lindroos and Mezzetto, 2010, Wildner, 2010].

The aim of this paper is to present an effective approach for production and extraction of the short-lived radionuclide  ${}^6\text{He}$ . There is a possibility to produce this isotope at the ISOLDE facility (CERN), us-

ing the so-called Isotope Separation On Line (ISOL) method. The  ${}^6\text{He}$  production is achieved with the  ${}^9\text{Be}(n, \alpha){}^6\text{He}$  reaction by use of spallation neutrons (from the 1.4 GeV proton beam of the Proton Synchrotron Booster impinging on a tungsten convertor) and porous  $\text{BeO}$  (Beryllium Oxide) material.

A preparation of beam of  $2.9 \times 10^{18}$  anti-neutrinos per year for a neutrino detector requires roughly  $10^{13}$  ions of  ${}^6\text{He}$  per second extracted from the production target ( $\text{BeO}$ ).

A crucial task for the production chain is an identification and investigation of the appropriate  $\text{BeO}$  ISOL target material. We turn our attention to sintered pellets of porous, micrometric  $\text{BeO}$  of 71% nominal density. This material is stable up to  $1400^\circ\text{C}$  only being in contact with a thin rhenium foil. Usually, it is inserted in the standard tantalum target oven used at ISOLDE to insure chemical compatibility between the target and the oven. The overall  ${}^6\text{He}$  release efficiency in the experiment depends on the production yield inside the  $\text{BeO}$  target. This dependency requires the knowledge of the neutron spallation spectrum, which can be determined by using of the Activation Foils method.

The obtained results from the  ${}^6\text{He}$  release experiment show that a realization of the concept of  $\beta$ -beams is feasible.

## References

- [Lindroos and Mezzetto, 2010] Lindroos, M. and Mezzetto, M. (2010). Beta Beams. *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 60:299–325.
- [Orme, 2010] Orme, C. (2010). High- $\gamma$  beta beams within the laguna design study. *ArXiv:1004.0939v1 [hep-ph]*.
- [Volpe, 2010] Volpe, C. (2010). Search for cp violation in the lepton sector. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 64:325–333.
- [Wildner, 2010] Wildner, E. (2010). Beta Beams. *Acta Phys. Polon.*, B41:1525–1538.
- [Zucchelli, 2002] Zucchelli, P. (2002). A novel concept for a  $\bar{\nu}_e/\nu_e$  neutrino factory: the beta-beam. *Phys. Lett. B*, 532:166–172.

\*hodak.rastik@gmail.com

†thierry.stora@cern.ch

‡simkovic@teller.dnp.fmph.uniba.sk

# Decay studies of neutron deficient Ra and Fr isotopes (Extended Abstract)

Zdenka Kalaninová\*

Supervisor: Stanislav Antalic†

Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

Nuclear models are inconsistent in predictions of nuclear properties far from the line of beta stability. Some of the isotopes were discovered only recently and just a few nuclei were registered which results in sizeable uncertainties. That is the motivation for detailed nuclear structure research of these nuclei in many laboratories. From such experiments we can obtain information on e.g. single-particle levels, nuclear masses, fission barrier heights or production cross sections. New data are important for testing and optimization of theoretical models.

In this work we focus on decay properties of neutron-deficient radium and francium isotopes close to the proton drip-line. For these isotopes only little information is known and also experimental values diverge reasonably. Ra and Fr nuclei were produced in complete fusion reaction  $^{56}\text{Fe}^{13+} + ^{147,149}\text{Sm}$  in experiments carried out at SHIP (in GSI, Darmstadt). Beam energies were varying from 244 to 275 MeV which resulted in different excitation energies of compound nuclei. For each energy we estimated production cross sections for  $^{200,201,202,203}\text{Fr}$  and  $^{201,202,203}\text{Ra}$  (see Fig. 1). From the ratio of  $^{202}\text{Fr}/^{202}\text{Ra}$  we estimated the upper limit for  $^{200}\text{Ra}$  production cross section as 24 pb.

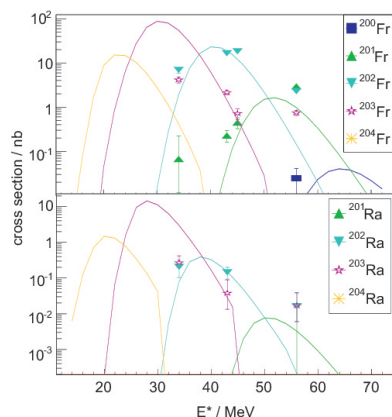


Figure 1: Cross sections for the production of Fr and Ra isotopes in reaction  $^{56}\text{Fe} + ^{149}\text{Sm}$ .

\*Zdenka.Kalaninova@fmph.uniba.sk

†Stanislav.Antalic@fmph.uniba.sk

We produced an order of magnitude more  $^{202}\text{Ra}$  nuclei than any previous study, thus we improved its decay characteristics (see Table 1). There is still open question on  $\alpha$  decay of  $^{201}\text{Ra}$ , because our results differ from previously published data. This could indicate the presence of two long-lived states in this nucleus (see Fig. 2).

Table 1: The  $\alpha$  decay properties of  $^{202}\text{Ra}$  isotope

$E_\alpha$ keV	$T_{1/2}$ ms	No. of chains	ref.
7714(12)	$3.9^{+1.3}_{-0.8}$	15	this work
7740(20)	$16^{+30}_{-7}$	1	[Uusitalo et al., 2005]
7860(60)	$0.7^{+3.3}_{-0.3}$	1	[Leino et al., 1996]

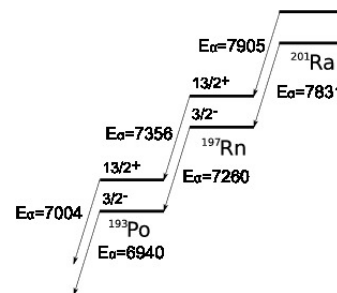


Figure 2: Suggested  $\alpha$  decay scheme of  $^{201}\text{Ra}$  isotope.  $\alpha$  energy of  $^{201g}\text{Ra}$  is from this work,  $\alpha$  energy of  $^{201m}\text{Ra}$  is from [Uusitalo et al., 2005]. All  $\alpha$  energies are in keV.

## References

- [Leino et al., 1996] Leino, M., Uusitalo, J., Allatt, R., Armbruster, P., Enqvist, T., Eskola, K., Hofmann, S., Hurskanen, S., Jokinen, A., Ninov, V., Page, R., and Trzaska, W. (1996). Alpha decay studies of neutron-deficient and radium isotopes. *Z. Phys. A*, 355:157.
- [Uusitalo et al., 2005] Uusitalo, J., Leino, M., Enqvist, T., Eskola, K., Grahn, T., Greenlees, P., Jones, P., Julin, R., Juutinen, S., Keenan, A., Kettunen, H., Koivisto, H., Kuusiniemi, P., Lappänen, A.-P., Nieminen, P., Pararinen, J., Rahkila, P., and Scholey, C. (2005).  $\alpha$  decay studies of very neutron-deficient francium and radium isotopes. *Phys. Rev. C*, 71:024306.

# Mechanizmus kontroly dátových strát pre GEM TPC v Super-FRS

Tomáš Balog<sup>1,2\*</sup>

Školiteľ: Branislav Sitár<sup>1†</sup>

<sup>1</sup> Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

<sup>2</sup> GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH, Planckstrasse 1, 642 91 Darmstadt, DE

**Abstrakt:** V experimentoch s vysokými intenzitami, medzi ktoré patrí aj pripravovaný Super-FRS v GSI Darmstadt v rámci projektu FAIR, môže nastať situácia, kedy dátová frekvencia dočasne presiahne dostupné pásmo frekvenčnej priepustnosti čítacej elektroniky. V konvenčných systémoch s triggerom sa takéto situácie zvládajú pomocou mŕtvej doby systému, počas ktorej sa odstraňuje k mŕtvej dobe časovo súviaca časť fyzikálnych udalostí. V samo-triggerovacej front-end elektronike však situácie dátového preťaženia vedú k nesynchronným dátovým stratám, a tak potenciálne aj k zápisu veľkého množstva neúplných udalostí. Preto je nutné nájsť mechanizmy, ktoré umožnia prechod ku synchronizácii dátových strát a vytvoreniu mechanizmu mŕtvej doby, čím sa umožní zápis častí udalostí v úplných dátových balíkoch.

*Kľúčové slová:* SFRS, TPC, GEM, n-XYTER, simulácia, SystemC, dátové straty, samo-triggerovací

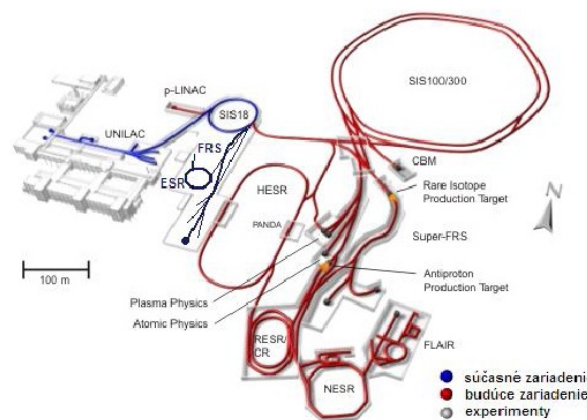
## 1 TPC komory pre Super-FRS

### 1.1 Super-FRS v projekte FAIR

Plánované zariadenie v GSI Darmstadt v rámci projektu FAIR pozostáva z dvoch synchrotrónových urýchľovačov a štyroch veľkých akumuláčnych prstencov. Súčasná zariadenie v GSI Darmstadt spolu s novým lineárnym urýchľovačom potom budú slúžiť ako predurýchľovač. Nový urýchľovač bude mať o 2 rády vyššiu intenzitu zväzkov v porovnaní so súčasným zariadením vďaka silným synchrotrónom SIS100 a SIS300. Pre protóny bude faktor zvýšenia intenzity ešte o rád vyšší. Magnetická rigidita súčasného synchrotrónu SIS18 je  $B\rho_{max}=18\text{Tm}$ , pričom nové synchrotróny budú dosahovať  $B\rho_{max}=100\text{Tm}$ , resp.  $B\rho_{max}=300\text{Tm}$ . Cieľom je dosiahnuť intenzity až  $10^{12}$  iónov  $U^{28+}$ . [Geissel, 2003] Dĺžka pulzu bude 60 ns pre exotické jadrá a 25 ns pre antiprotony. Frekvenčný rozsah urýchľovačov sa má pohybovať od 1.14MHz do 2.67 MHz. [Spiller, 2009] Oba

synchrotróny môžu operovať v pulznom aj kontinuálnom režime.

Ďalšie súčasť zariadenia sú *zberný prstenec, akumuláčny prstenec, nový experimentálny akumuláčny prstenec, vysokoenergetický akumuláčny prstenec a supravodivý fragment separátor*.



Obr. 1: Súčasná a budúca zariadenie v GSI Darmstadt (UNILAC – lineárny urýchľovač ťažkých iónov, p-LINAC – urýchľovač protónov, FRS – Fragment Separátor, ESR – Experiment Storage Ring, SIS18 a SIS100/300 – synchrotróny pre ťažké ióny, HESR – High-Energy Storage and Cooler Ring, PANDA – detektor, CBM – Compressed Baryonic Matter Experiment, SuperFRS – Super Fragment Separator, NESR – New Experimental Storage Ring, CR – Collector Ring, RESR – Accumulator Ring)[Winkler, 2002]

SuperFRS má svojimi vlastnosťami prevyšovať možnosti aktuálne existujúceho FRS. Prenos fragmentov v súčasnom FRS je obmedzený na niekoľko percent kvôli veľkému fázovému rozdeleniu zväzku v priestore. SuperFRS má dosahovať až 70% prenos vzniknutých fragmentov, keďže jeho dizajn značne zvyšuje akceptanciu fázového priestoru zväzku. Pri zvýšení akceptancie ostáva rozlišovacia schopnosť iónovej optiky na rovnakej úrovni, aby sa zachovala kvalita separácie fragmentov pre následné použitie v spektrometri.

SuperFRS bude pozostávať z dvoch častí - predseparátora a hlavného separátora. Celý systém má byť achromatický, takže výsledný obraz v poslednej ohniskovej rovine je nezávislý na rozložení hybností pri

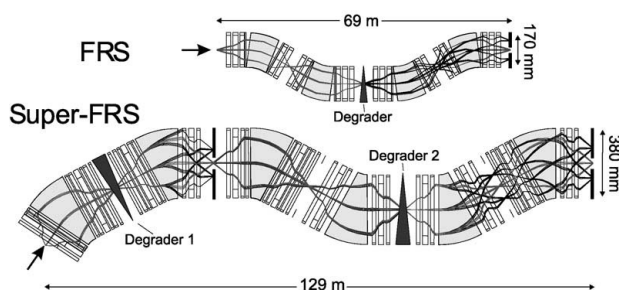
\*t.balog@gsi.de

†sitar@fmph.uniba.sk



Tabuľka 1: Porovnanie vlastností FRS a Super-FRS[Geissel, 2003]

Zariadenie	Akceptancia hybnosti $\Delta p/p$	Uhlová akcept. $\Delta\Phi_x$	Uhlová akcept. $\Delta\Phi_y$
FRS	$\pm 1\%$	$\pm 13\text{mrad}$	$\pm 13\text{mrad}$
SuperFRS	$\pm 2.5\%$	$\pm 40\text{mrad}$	$\pm 20\text{mrad}$



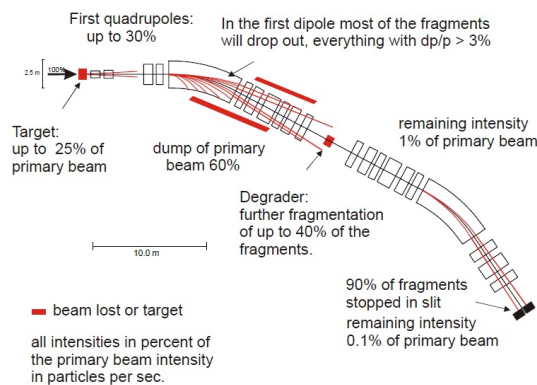
Obr. 2: Porovnanie rozloženia FRS a SuperFRS spolu so zobrazením dráh fragmentov v jednotlivých separátoroch. Pohľad zhora.[Geissel, 2003]

vstupe iónov do separátora.

Zväzok iónov sa do SuperFRS dostáva vývodom priamo zo synchrotrónov a následne naráža na uhlíkový terčik. V tejto prvej časti sa stratí 25% zo zväzku. Následne vytvorené fragmenty prechádzajú prvou sériou kvadrupólov, kde sa stratí ďalších 5% zo zväzku. V prvom dipóle sa eliminuje všetko, čo presahuje určenú hodnotu hybnosti s presnosťou  $\Delta p/p=3\%$ . Takto sa odstráni ďalších 30% z primárneho zväzku. V následnom degradéri opätovne fragmentuje 40% z predtým vytvorených fragmentov. Za týmto degradérom už ostáva len 1% z primárneho zväzku. Ďalších 90% zo zvyšku sa odchyti na štrbine, ktorá je nastavená podľa očakávaných výstupov, takže na konci tohto celého procesu ostáva 0.1% z primárneho zväzku. Tieto procesy prebiehajú v oboch častiach separátora.[Winkler, 2002]

Keďže primárny zväzok je priamym výstupom z urýchľovača, tak v úvodnej časti SuperFRS sú kladené veľké požiadavky na vlastnosti detektora, ktorý by bol schopný merať polohu a profil zväzku. Intenzita primárneho zväzku nedovoľuje uložiť do cesty zväzku žiadny tuhý materiál, keďže pri interakcii by sa v látke uložilo veľké množstvo energie, čím by sa zvýšila teplota materiálu až na  $10^4$  K, a to by spôsobilo jeho roztavenie. V tejto časti je nutné použiť detektor, ktorý nebude ukladať do cesty zväzku žiaden materiál.[Geissel, 2003]

V časti SuperFRS, ktorá sa nachádza za predseparátorom už takéto požiadavky na detektor nie sú,



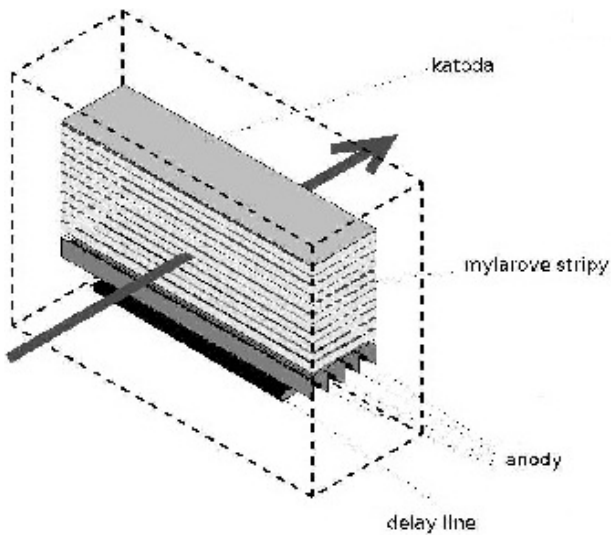
Obr. 3: Veľkosť zväzku pri prechode cez predseparátor[Winkler, 2002]

keďže intenzita primárneho zväzku je znížená na 0.1% a postačovať budú aj detektory na báze TPC komôr.

## 1.2 TPC komory s GEM

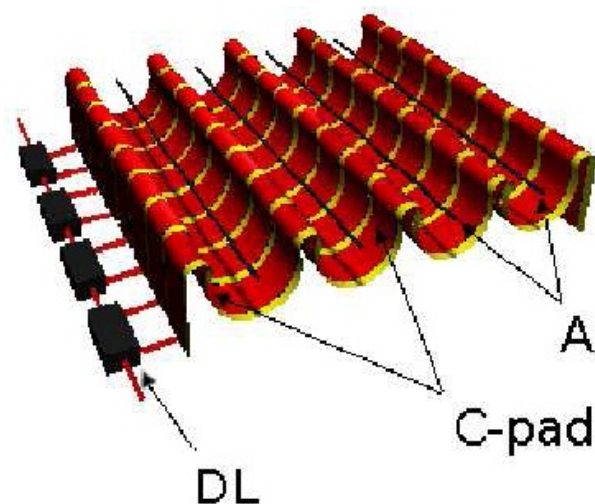
Časovo projekčné komory pozostávajú z dvoch hlavných častí: driftového priestoru a časti s proporcionálnymi komorami. Aktívny objem TPC komory tvorí driftový priestor, ktorý je naplnený pracovným plynom (zmesou argónu s ďalšími plynmi, najčastejšie metánom alebo  $\text{CO}_2$ ). V tomto priestore nastáva ionizácia plynu prelietavajúcimi časticami. Oblasť je ohraničená poleformujúcimi elektródami (typicky medzi pokovené mylarové stripy), ktoré vytvárajú homogénne elektrické pole vo vnútri. Homogenita a drift elektrónov si vyžadujú lineárny spád driftového poľa, čo sa dosahuje odporovým deličom zapojeným na tieto elektródy.

Proporcionálna oblasť slúži na zosilnenie signálu, ktorý bol vytvorený po prelete častice driftovým priestorom. V bežných TPC komorách je tvorená mriežkou, anódovými vláknami a oneskorovacím vedením. Úlohou mriežky je oddeliť homogénne elektrické pole v driftovej časti od cylindrického v proporcionálnej časti. Potenciál na nej môže byť rovnaký ako na oneskorovacom vedení, alebo je na ňu privedené dodatočné napätie, čím sa dopĺňa lineárny spád napätia na mylarových stripoch. Pre TPC komory z FMFI používané vo FRS je toto napätie na hodnote -80 V[Procházka, 2006]. Pod mriežkou sa nachádzajú anódové vlákna uložené nad katódami v tvare C-padov, kde každý C-pad tvorí jeden segment, ktorý vyúsťuje na oneskorovacie vedenie. Úlohou anódových vlákien je zosilnenie vzniknutého sig-



Obr. 4: Schématický pohľad na TPC komoru. [Procházka, 2006]

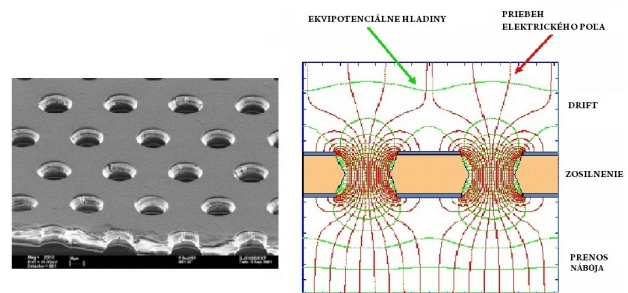
nálu vďaka veľkému spádu napätia v okolí anód. Dodatočne sa používa aj branovacia mriežka (tzv. gate-ovanie). Branovacia mriežka slúži na vychytanie iónov vzniknutých v okolí anód pri tvorbe elektrónovej lavíny, aby sa nedostali do driftového priestoru TPC komory, kde by svojim nábojom mohli dočasne, do ich vychytania na katóde driftového pol'a, deformovať homogenitu driftového elektrického pol'a.



Obr. 5: Pohľad na proporcionálnu časť TPC s C-padmi. A je anódové vlákno, DL je oneskorovacie vedenie. [Procházka, 2006]

### 1.2.1 GEM a ich použitie v TPC

GEM alebo aj plynový elektrónový multiplikátor (Gas Electron Multiplier) je obojstranne med'ou pokovaná kaptónová fólia. Je chemicky perforovaná, čím sa dosahuje vysoká hustota obojstranne kuželovitých dier s vonkajším priemerom  $70\mu\text{m}$  a vnútorným priemerom  $50\mu\text{m}$ . Vzďalenosť medzi stredmi dier je typicky  $140\mu\text{m}$ . Po privedení napätia na GEM  $\sim 100\text{V}$  budú diery fungovať ako multiplikátory elektrónov, keďže vďaka dostatočne veľkému elektrickému pol'u v nich dochádza k tvorbe elektrónových lavín ionizáciou plynu. Maximálne zosilnenie, ktoré je možné dosiahnuť jedinou fóliou sa pohybuje na úrovni  $10^3$ . Toto zosilnenie nie je dostatočné, preto je časté usporiadanie GEM fólií v detektoroch je v tripletoch—teda použitie troch fólií namiesto jednej, čím sa dosahuje zväčšenie zosilnenia na úroveň  $10^4$ – $10^5$ . [Bencivenni, 2003]



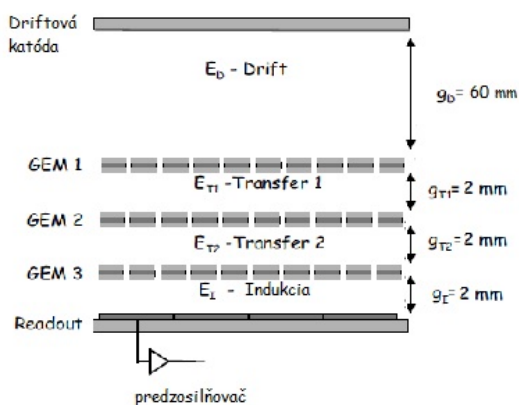
Obr. 6: Elektrické pole v okolí diery GEM fólie a v jej vnútri. [Bencivenni, 2003]

V TPC komorách nahrádza triplet GEM proporcionálne komory tvorené anódovými vláknami a C-padmi. Pri použití GEM je čítanie signálov pomocou stripov (uložené na plošnej doske). Signál generuje elektrónová lavína pri pohybe od tretej GEM fólie k stripovej doske.

Pri proporcionálnych komorách je signál vytváraný pohybom iónov, ktoré vznikli pri tvorbe elektrónovej lavíny v okolí anódy, smerom od anódy do driftovej časti detektora. Najväčšia časť signálu sa vytvorí pri pohybe iónov do vzdialenosti približne  $100\mu\text{m}$  od anódy. Pri použití tripletu GEM je signál tvorený elektrónmi. Pohyblivosť iónov je nižšia ako u elektrónov, takže trvanie signálu je dlhšie. Navyše v TPC komore s driftovým priestorom menším ako  $10\text{cm}$  nie je možné použiť branovaciu mriežku, pretože pri jej uzavretí—zapojení na napätie neprepúšťa ajúce ióny do driftovej časti detektora—sa v elektrónike vytvárajú presluchy signálov z bra-

novacej mriežky, ktoré trvajú až 1ms. Ióny sa potom dostávajú aj do driftovej časti detektora, čím vzniká dlhý chvost signálu. V prípade GEM fólií je branovanie priamo na každej z fólií vďaka tvaru elektrického poľa v dierach GEM, ktorým sa ióny vychytávajú na vrchnej pokovenej časti GEM. Vychytených je až 99% vzniknutých iónov. Použitie GEM teda značne zvyšuje rýchlosť merania signálu voči proporcionálnym komorám a je ich možné použiť v prostrediach s veľkými multiplicitami, čo je aj prípad merania polohy a profilu zväzku v SuperFRS.[Balog, 2010]

Na čítanie týchto rýchlych signálov je predpokladané použitie front-end elektroniky na báze samotriggerovacieho n-XYTER čipu, ktorý parametrami vyhovuje požiadavkám SuperFRS.



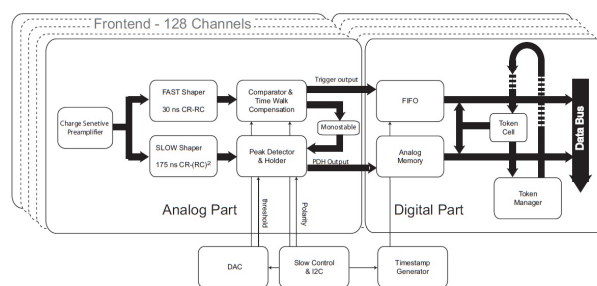
Obr. 7: Uloženie GEM fólií v detektore—za driftovým polom sú tri GEM fólie. Signál je zberaný priamo na stripoch pripojených na výstup.

### 1.3 n-XYTER čip

n-XYTER (Neturon-X-Y-Time-Energy-Readout) je samotrigerovací 128 kanálový readout obvod vyvíjaný v GSI Darmstadt pre experimenty vo fyzike vysokých energií a je plánované jeho využitie vo väčšine experimentov. Vstupný signál je po vstupe zosilnený nábojovo-citlivým predzosilňovačom so zosilnením  $9\mu V/e^-$  a šumom  $<1000e^-$ . Následne sa signál delí a vchádza do dvoch nezávislých tvarovačov:

- rýchly tvarovač
- pomalý tvarovač

Oba tvarovače pozostávajú z analógovej a digitálnej časti. V analógovej je signál tvarovaný rýchlym CR-RC tvarovačom a je triggerom pre čítanie signálu.



Obr. 8: Schéma n-XYTER čipu.[Brogna, 2009]

Vytvorený unipolárny impulz má nábehovú hranu trvajúcu 19ns. Nasleduje komparátor a kompenzačný obvod časového posunu (time-walk). Komparátor porovnáva signál s hodnotou danou DAC (Digitálno-analógový konvertor), čím vytvára trigger. Kompenzačný obvod časového posunu je potrebný pre získanie amplitúdovo nezávislej časovej známky. Analógová časť pomalého časovača CR-(RC)<sup>2</sup> zísť uje amplitúdu signálu po jeho tvarovaní na signál s nábehovou hranou 130ns pomocou detektora píku.

V digitálnej časti je výstup z rýchleho tvarovača použitý na vytvorenie časovej známky. Tá je generovaná 12 bitovým generátorom časovej známky s časovým rozlíšením 1ns. Po triggerovaní vytvarovaným signálom sa časová známka uloží do FIFO pamäte. Zároveň je signál tvarovaný pomalým tvarovačom a uložený do analógovej pamäte.

Čítanie signálov prebieha pomocou tzv. Token Ringu. V prípade, že sa v jednej z FIFO pamätí nachádzajú dáta, vytvorí token generátor tzv. token (značku), ktorá putuje od kanála ku kanálu. Ak sa pri práchode tokenu nachádzajú v pamäti uložené dáta, tak sa inicializuje prenos analógovej a digitálnej hodnoty do 32MHz Data Bus, z ktorého je možné dáta čítať. Analógová časť dát putuje do 4096 kanálového ADC a je následne spracovávaná v ďalších jednotkách DAQ elektroniky.

## 2 Mechanizmy synchronizácie dátových strát

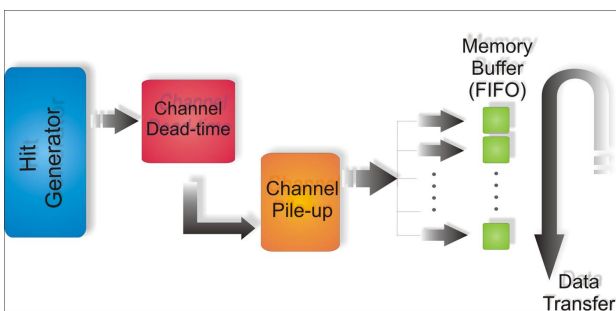
V prípade použitia samotrigerovacej elektroniky je v systéme vynechané centrum, ktoré rozhoduje o spustení ukladania dát a následne aj rozhodnutie o mŕtvej dobe, teda času, počas ktorého sú merané dáta odstránené pre neúplnú funkčnosť systému. Princíp samotrigerovania spočíva v nezávislosti všetkých kanálov, a teda ukladanie dát prebieha paralelne a

jednotlivo z každého kanála bez vonkajšieho spustenia. V prípade dátového preťaženia nastávajú v takomto systéme nesynchronne straty dát, čo potenciálne vedie k zápisu veľkého množstva neúplných eventov.

Preto je nutné nájsť mechanizmy umožňujúce synchronizáciu dátových strát, čím sa umožní uloženie úplných dátových balíkov aspoň počas krátkej doby, čoho výsledkom je následná definícia mŕtvej doby takéhoto systému.

## 2.1 Popis simulácie a simulovaného systému

Simulácia správania elektroniky bola vytvorená v programovacom jazyku SystemC. Ten je založený na C++ štandarde avšak obsahuje vlastné knižnice, ktoré umožňujú popis prenosu dát v elektronike a správanie jednotlivých modulov elektroniky.



Obr. 9: Schéma simulovanej elektroniky.

V simulácii bola použitá schéma ako na Obr. 9. Zhrnutie použitých vlastností zhrňa tabuľka 2.

Tabuľka 2: Vlastnosti simulovaného systému

Veľkosť systému	1,10,100,1000 čipov
Počet kanálov na 1 čip	128
Počet buniek na FIFO	4,8,16,32
Mŕtva doba na kanál	30ns - tvarovanie signálu v rýchlom tvarovači
Doba pile-up na kanál	300ns - tvarovanie signálu v pomalom tvarovači
Frekvencia čítania dát	32MHz - frekvencia Token Ringu
Dátové frekvencie	64MHz, 50MHz, 42MHz, 32MHz, 16MHz, 8MHz

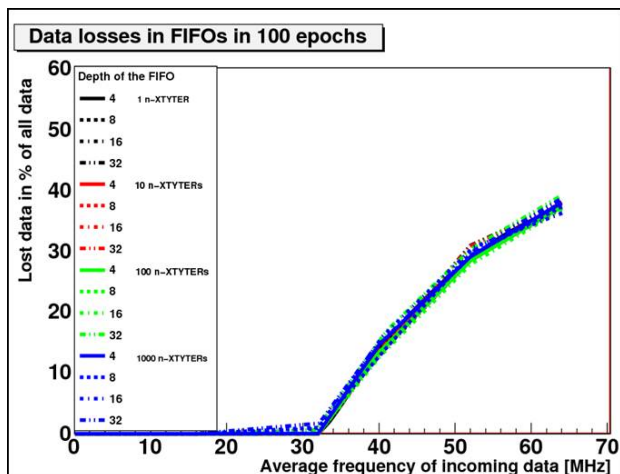
Na základe vlastností n–XYTER čipu a pre zjednodušenie simulácie bolo predpokladané, že za Token Ringom nestávajú žiadne dátové straty, keďže za ním je elektronika synchronizovaná. Generátor dát generuje prichádzajúce dáta v čase na základe Poissonovho rozdelenia so strednou hodnotou danou

podľa tabuľky 2. Pre každý čip je jeden generátor. Následne sú dáta zasielané na jednotlivé kanály podľa Rovnomerného rozdelenia. Dáta prechádzajú cez tvarovače, kde sa určí, či je signál kanálom viditeľný. V prípade, že signál príde v čase skoršom ako 30ns po predchádzajúcom signále, je automaticky zahodený, pretože elektronika ho nie je schopná zaregistrovať kvôli mŕtvej dobe na kanále. V prípade, že signál príde v čase do 300ns od predošlého signálu v danom kanáli, je tento signál tiež zahodený, avšak elektronika je schopná poslať informáciu o pile-upe. Dáta, ktoré prejdú cez tvarovače putujú ďalej do FIFO pamäte, z ktorej sú čítané pomocou Token Ringu. Token Ring operuje s frekvenciou 32MHz, avšak je schopný čítať iba jedné dáta z jedného FIFO pri jednom obehú a po každom čítaní dát z daného kanála začína kontrolu od nasledujúceho kanála. To znamená, že v prípade úplného zaplnenia všetkých kanálov je pre každý kanál frekvencia čítania 250kHz. Ďalšou vlastnosťou Token Ringu je, že prázdne kanály preskakuje.

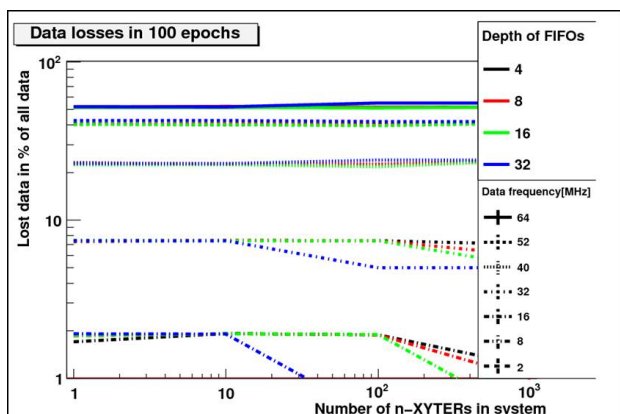
## 2.2 Výsledky simulácií

I keď samotriggrovacia elektronika nemá centrum rozhodovania o spustení zápisu, zachováva si synchronizáciu času. To znamená, že pre každý kanál má čas rovnakú aktuálnu hodnotu, zhodné je aj jeho plynutie a taktiež časové rozlíšenie. To umožňuje vonkajšiu synchronizáciu kanálov aj napriek ich vzájomnej nezávislosti. Pre tento účel bola zadefinovaná tzv. **epocha**. Pod epochou rozumieme čas potrebný pre Token Ring aby prečítal všetky dáta zo všetkých FIFO v čipe v prípade ich úplného zaplnenia. Takže v prípade, že ide o systém so 128 kanálmi, kde každý kanál obsahuje FIFO so 4 bunkami, je epocha  $4 * 128 * [T_{TokenRing}] = 512 * 31.25ns = 16\mu s$ .

Bez ďalšieho mechanizmu v rámci čipu sú dátové straty úplne asynchronne a významná časť nastáva na FIFO jednotlivých kanálov. Percentuálne vyjadrené straty sú veľkostne nezávislé na počte buniek v FIFO, či na veľkosti systému. Z Obr. 10 je viditeľné, že limitným bodom pre takúto elektroniku je dátová frekvencia, ktorá sa rovná frekvencii čítania dát. Už v tejto časti sú viditeľné straty, ktoré sú spôsobené štatistickými fluktuáciami v rámci použitých štatistických rozdelení. Náhodnosť strát na jednotlivých kanáloch zároveň nedovoľuje definovať mŕtvu dobu celého systému, keďže ten je nutné zadefinovať pomocou kontrolného softvéru.



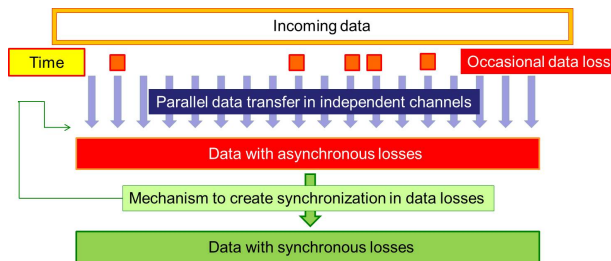
Obr. 10: Straty na FIFO.



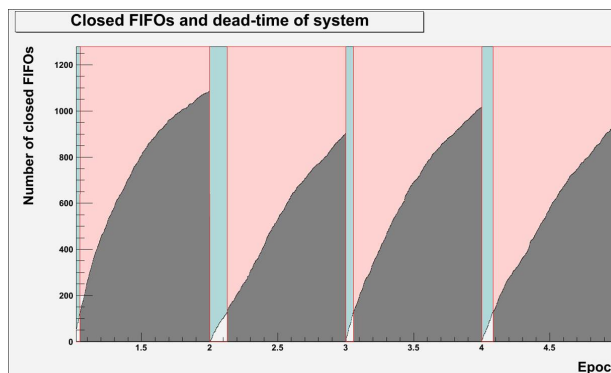
Obr. 11: Dátové straty vo veľkosti rôznych systémoch a pre rozličné veľkosti FIFO pamätí – straty sú zhodné (čiaru sa prekrývajú).

Z týchto výsledkov je viditeľné, že kontrolný mechanizmus musí byť umiestnený pred FIFO. Ako prvá možnosť sa naskytá uzavretie FIFO v momente, keď je zaplnené. To si síce vyžaduje zasielanie ďalšej informácie do ovládacieho systému, avšak implementácia do samotného hardvéru nie je problémom tejto štúdie. Každé FIFO je opätovne otvorené, teda je umožnený zápis, keď začne nová epocha. Uzavretie FIFO zároveň dovoľuje definíciu mŕtvej doby systému. Ak vezmeme v úvahu, že sa v systéme môže stratiť malé množstvo dát, potom je mŕtva doba definovaná ako čas, keď je zavretý väčší počet FIFO pamätí ako je sotvérom určené maximálne množstvo.

Obr. 13 ukazuje, že systém je stále asynchrónny, keďže množstvo strát je v každej epoche iné a zároveň je začiatok mŕtvej doby v každej epoche iný. To je spôsobené tým, že veľké množstvo FIFO pamätí má na začiatku epochy v sebe stále nejaké dáta, takže za-



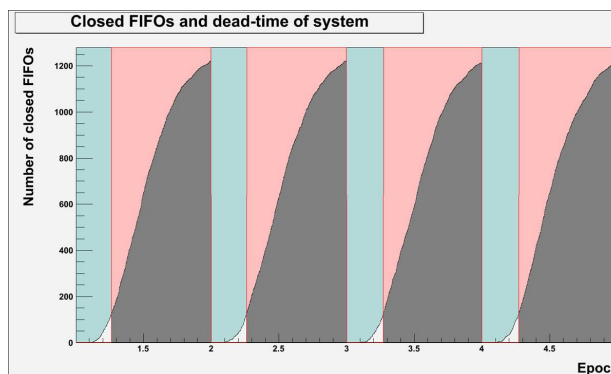
Obr. 12: Implementácia kontrolného mechanizmu.



Obr. 13: Mŕtva doba systému. Povolené množstvo zavretých FIFO je 10%. Frekvencia dát je 64MHz.

plnenie nastáva veľmi rýchlo po opätovnom otvorení pamätí na začiatku novej epochy. Silné fluktuácie začiatku mŕtvej doby sú spôsobené štatistickými fluktuáciami, ktoré sa v prípade FIFO s malým množstvom buniek stávajú významné.

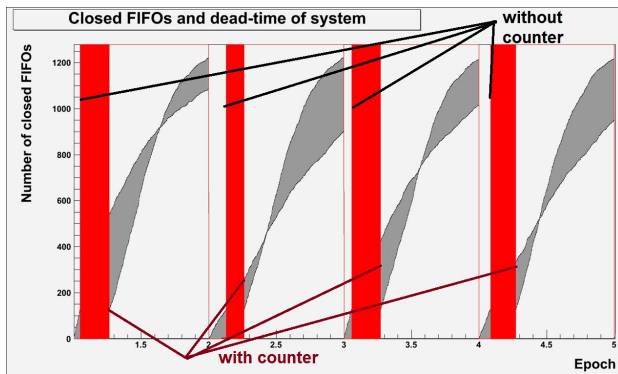
Je teda nutná ešte jedna dodatočná zmena na schéme elektroniky, ktorou sa umožní aby Token Ring bol schopný prečítať všetky dáta, ktoré sú do FIFO prepustené, čím sa dosiahne, že pamäte budú na začiatku novej epochy prázdne.



Obr. 14: Mŕtva doba systému s počítadlom. Povolené množstvo zavretých FIFO je 10%. Frekvencia dát je 64MHz.

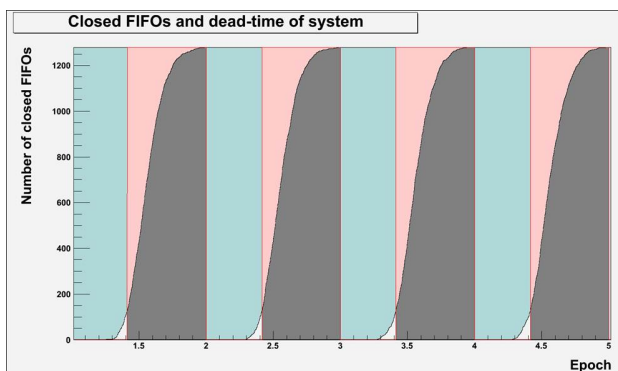
Pred FIFO sa vloží počítadlo prichádzajúcich dát. V prípade, že počítadlo dosiahne hodnotu, ktorá sa

rovná počtu buniek v FIFO, je dané FIFO uzavreté. Podmienka, že FIFO musí byť naplnené v tomto prípade už neplatí. Takže je možná aj situácia, že v momente vypnutia FIFO sa v ňom nachádzajú už len posledné zapísané dáta. Týmto spôsobom sa vlastne alokuje zafixovaný frame-rate pre každý kanál.



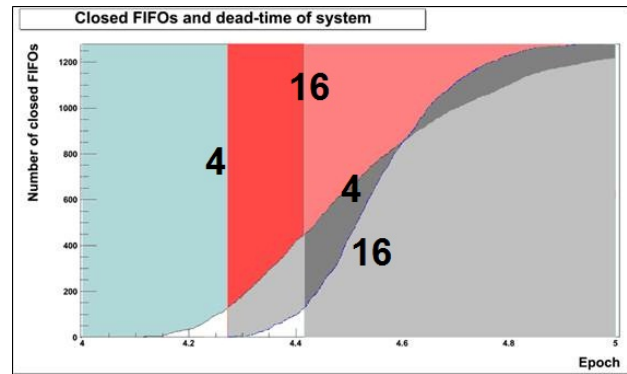
Obr. 15: Porovnanie mŕtvych dôb pre zatváranie FIFO pamätí s a bez počítadla. Povolené množstvo zavretých FIFO je 10%. Frekvencia dát je 64MHz.

Z Obr.14 je viditeľné, že systém sa správa synchronne, a teda alokovanie fixného frame-rate je správny prístup pre synchronizáciu samotriggrovacieho systému. Avšak veľkosť mŕtvej doby je stále príliš veľká v porovnaní s konvenčnými triggerovými systémami, kde je jej hodnota napríklad 50% v zobrazených prípadoch kde dátová frekvencia je 64MHz a frekvencia čítania dát je 32MHz. Pre samotriggrovací systém je toto ideálny prípad, keď je hĺbka FIFO pamäte nekonečná. Zmenšiť mŕtvu dobu je teda možné zväčšením FIFO pamäte, čím sa alokuje väčší frame-rate, a zároveň sa znižuje vplyv fluktuácií.



Obr. 16: Mŕtva doba systému s FIFO so 16 bunkami. Povolené množstvo zavretých FIFO je 10%. Frekvencia dát je 64MHz.

Z Obr. 16 je viditeľné, že pre prípad FIFO so 16 bunkami je mŕtva doba o zrejme kratšia, čo je spôsobené



Obr. 17: Porovnanie mŕtvych dôb pre FIFO so 4 a so 16 bunkami. Povolené množstvo zavretých FIFO je 10%. Frekvencia dát je 64MHz.

menšími fluktuáciami v rámci jednotlivých kanálov. Zvyšovaním hĺbky FIFO sa teda systém približuje k ideálnemu fungovaniu, kde mŕtva doba začína v polovici epochy a stráca sa polovica dát a druhá polovica dát je zapísaná a úplná.

### 3 Záver

Samotriggrovací systém potrebuje mať mechanizmus synchronizácie dátových strát pre prípad dátového preťaženia elektroniky. To je možné dosiahnuť alokovaním fixného frame-rate pre kanál, čo zároveň umožňuje aj definovať mŕtvu dobu celého systému ako čas, keď je počet zavretých FIFO väčší ako softvérovo určená hodnota. Skrátenie mŕtvej doby je možné dosiahnuť zväčšením hĺbky FIFO pamäte. V prípade použitia v GEM TPC pre SuperFRS sú dátové straty kvôli vysokým intenzitám očakávané, avšak takto sa tieto straty stávajú počítateľnými a je možné ich implementovať do ďalšieho spracovania dát.

### Literatúra

- [Balog, 2010] Balog, T. (2010). Riešenie problémov detektorov pre vysokointenzívne zväzky ťažkých iónov. Master's thesis, Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave.
- [Bencivenni, 2003] Bencivenni, G. (2003). Advances in Triple-GEM detector operation for high-rate particle triggering. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, 513:264–268.
- [Brogná, 2009] Brogná, A. (2009). The n-XYTER reference manual. online: <http://cbm-wiki.gsi.de/cgi-bin/view/Public/PublicNxyter>.

- [Geissel, 2003] Geissel, H. (2003). The SuperFRS project at GSI. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 204:71–85.
- [Procházka, 2006] Procházka, A. (2006). Charakteristiky TPC komôr na FRS v GSI darmstadt. Master's thesis, Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave.
- [Spiller, 2009] Spiller, P. (2009). SIS100/300 conceptual design studies. *online: [www.gsi.de/informationen/wti-library/scientificreport2003/files/218.pdf](http://www.gsi.de/informationen/wti-library/scientificreport2003/files/218.pdf)*.
- [Winkler, 2002] Winkler, M. (2002). The SuperFRS project at GSI. *online: <http://saferib.web.cern.ch/saferib/presentations/winkler.pdf>*.

# Návrh kontinuálneho monitora pre meranie radónu vo vodách

Pavol Blahušiak

Vedúci: Monika Müllerová

Konzultant: Karol Holý

Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Táto práca popisuje návrh jednoduchého zariadenia určeného na kontinuálne meranie aktivít radónu vo vodách na báze NaI(Tl) detektora. Aktivita radónu sa stanovuje gama spektrometricky pomocou gama kvánt emitovaných dcérskymi produktmi radónu ( $^{214}\text{Pb}$  a  $^{214}\text{Bi}$ ).

**Kľúčové slová:** Kontinuálny monitor, NaI(Tl) kryštál, Kalibrácia, Spektrum, Zásahová úroveň.

Radón je rádioaktívny vzácny plyn bez farby, chuti a zápachu. Vzniká alfa premenou rádia  $^{226}\text{Ra}$ . Doba polpremeny radónu  $^{222}\text{Rn}$  je  $T_{1/2} = 3,826$  dňa. Radón spôsobuje približne polovicu radiačnej záťaže obyvateľstva a hlavne preto je dôležitý jeho monitoring vo všetkých zložkách prírodného prostredia spolu s jeho dcérskymi produktmi. V prírode sa vyskytujú tri izotopy radónu  $^{222}\text{Rn}$  - radón,  $^{220}\text{Rn}$  - torón a  $^{219}\text{Rn}$  - aktinón. Pomenovaním radón sa najčastejšie označuje  $^{222}\text{Rn}$ . Do vôd sa radón dostáva procesmi difúzie a hlavne emanácie hornín [1]. V prírodnom prostredí sa nachádza v plynnom stave a ťažko vytvára zlúčeniny, keďže má úplne zaplnený oktet.

Koncentrácia  $^{222}\text{Rn}$  sa určuje detekciou alfa, beta alebo gama častíc emitovaných radónom a jeho produktmi premeny. Podľa spôsobu odberu vzorky sa rozlišujú aktívne metódy, pri ktorých sa plyn čerpá do meracieho zariadenia čerpadlami a pasívne metódy, kde sa  $^{222}\text{Rn}$  dostáva do pracovného priestoru zariadenia difúziou. Odbery sa uskutočňujú niekedy aj mimo laboratória a existujú tri základné typy meracích metód. Sú to bodové odbery, integrálne merania a kontinuálne merania [2].

Bodové odbery sa týkajú krátkych odberov do jednej hodiny, z čoho sa určuje okamžitá objemová aktivita radónu alebo jeho produktov premeny. Táto metóda sa používa pri kalibrácií iných meracích metód alebo pri určovaní vysokých objemových aktivít.

Pri integrálnych meraniach je detektor vystavený pôsobeniu žiarenia niekoľko dní, týždňov alebo až mesiacov. Analýza prebieha až po expozícií a určí

sa priemerná koncentrácia radónu aj s jeho produktmi premeny, ktorá bola počas expozície. Kontinuálne merania nepretržite zaznamenávajú aktuálnu informáciu o koncentrácií rádionuklidov počas merania. Odber vzorky a ukladanie dát prebieha súčasne. Aktuálna informácia o priemernej koncentrácií radónu a jeho produktov premeny sa zaznamenáva v časových intervaloch.

Kontinuálne monitory sa môžu používať na dlhodobé merania aktivít radónu vo vode, v ovzduší alebo v pôdnom vzduchu.

## Aplikačné využitie monitorovania radónu

- hydrogeologický výskum (pohyb podzemných vôd a ich interakcia s povrchovými vodami)
- infiltrácia (prísun vody do studní)
- transport vody
- sledovanie tektonických a vulkanických procesov
- určovanie veku vôd
- hľadanie ložísk uránu
- aj liečebné účinky
- dodržiavanie rádiohygienických limitov

## Ciele

Hlavným cieľom práce je navrhnúť a v laboratórnych podmienkach okalibrovať jednoduchý systém pre kontinuálne meranie radónu vo vodách, čo umožní:

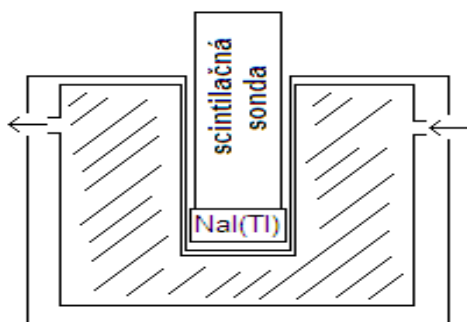
- sledovať frekvenčné rozdelenie objemovej aktivity radónu vo vodách s cieľom určenia priemernej hodnoty objemovej aktivity radónu charakterizujúcej zdroj z hľadiska zásahovej úrovne
- sledovanie kontaminácie vôd na južnom Slovensku, pričom ide o vážny ekonomicko-hospodársky problém
- predpokladá sa, že systém bude testovaný v reálnych podmienkach



## Princíp práce kontinuálneho monitora

Princíp prietokového detektora je založený na  $\gamma$  – spektrometrii, v ktorom budú zaznamenané produkty premeny radónu.

Monitor by mal fungovať kontinuálne na základe merania spektra gama žiarenia od produktov premeny  $^{222}\text{Rn}$ . V spektre budú zaznamenané produkty premeny radónu, napríklad na základe početnosti vo fotopíku od  $^{214}\text{Bi}$  (pík 609 keV), alebo širšieho okna, kde odrežeme z jednej strany šumy a z druhej draslíkový pik. Systém je v tvare „U“, vid'. obrázok 1, aby sa tam dala vložiť scintilačná sonda s NaI(Tl) kryštálom a tým sa detektor obklopí vzorkou. Celý systém je tienový olovom z dôvodu kozmického žiarenia a radiácie pochádzajúcej zo zemského povrchu. Tento návrh monitora by mal pracovať pre ten prípad, keď vody máme dostatok – pre rádiohygienické použitie.

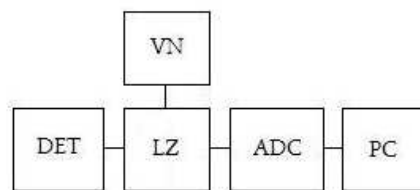


Obr. 1 Schematické znázornenie systému

## Energetická kalibrácia detektora

Na kalibráciu scintilačného detektora NaI(Tl) [(Ø 38 x 38) mm] sme použili  $^{207}\text{Bi}$  a  $^{137}\text{Cs}$ . Od cézia sme použili pik s energiou  $E = 622$  keV. Pri bizmute sme mali tri píky, pričom energia prvého píku  $E = 76,506$  keV bola určená ako vážený priemer s troch blízko ležiacich energií a to z dôvodu horšieho energetického rozlíšenia detektora. Detektor tieto tri píky registroval ako jeden. Počiatočné nastavenia:  $U_{\text{VN}} = 1020$  V, zosilnenie 32, tvarovacia konštanta  $\tau = 10$   $\mu\text{s}$ .

Počas kalibrácie sme použili zapojenie detektora, ktoré je znázornené v schéme na obrázku 2.

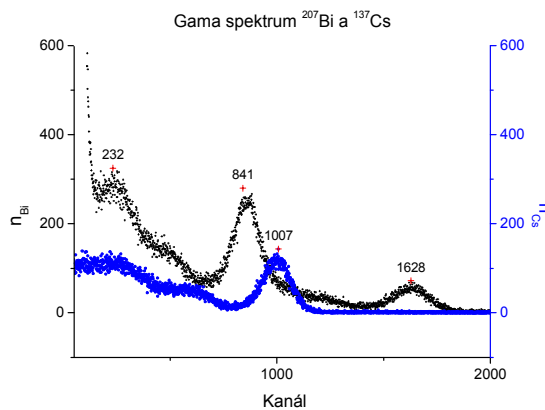


Obr. 2 Schéma spektrometrickej trasy

kde:

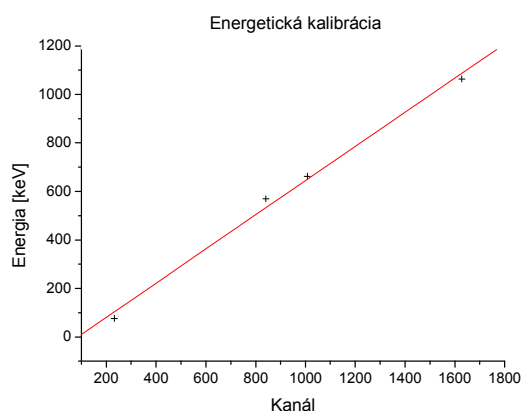
DET - detektor  
VN – zdroj vysokého napätia  
LZ – zosilňovač  
ADC – analógovo číslicový prevodník  
PC – počítač

Kalibráciu sme robili pomocou určených vrcholov energetických píkov od  $^{207}\text{Bi}$  a  $^{137}\text{Cs}$ . Číslo v píku označuje kanál (obrázok 3).



Obr. 3 Kalibračné píky v gama spektre

Kalibračná priamka scintilačného detektora NaI(Tl) [(Ø 38 x 38) mm] je na obrázku 4.



Obr. 4 Kalibračná priamka

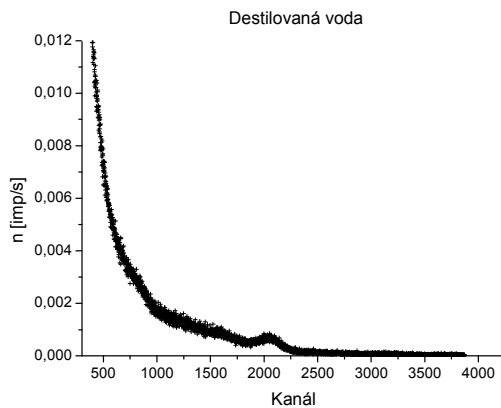
Váhovanie hodnôt lineárnou funkciou  $y = ax + b$ :

$$a = 0,70 \pm 0,04$$

$$b = -60 \pm 40$$

Ďalej sme zmerali gama spektrum pre destilovanú vodu, ktorá predstavuje požadovú vzorku (obr. 5)

Gama spektrum destilovanej vody (200 keV – 2650 keV), v ktorom vidíme draslíkový pík.



Obr. 5 Spektrum namerané pre destilovanú vodu

## Minimálne merateľné aktivity

Minimálna merateľná aktivita je najnižšia aktivita, ktorá sa môže na danej aparatúre pomocou daného detektora zmerať. Vzťah na výpočet minimálnej merateľnej aktivity má tvar [3]:

$$A_{\min} = \frac{1 + 2\delta\sqrt{n_p T}}{\varepsilon_f \delta^2 T} \quad (1)$$

kde:

$\delta$  – relatívna neistota stanovenia aktivity

$T$  – celková doba merania (vzorky + pozadia) [s]

$n_p$  – početnosť pozadia detektora [imp/s]

$\varepsilon_f$  – detekčná účinnosť

Uvažujeme podmienky:  $\delta = 0,1$ ,  $T = 1800$  s,  $n_p = 9,11$  imp/s,  $\varepsilon_f = 0,002$ .

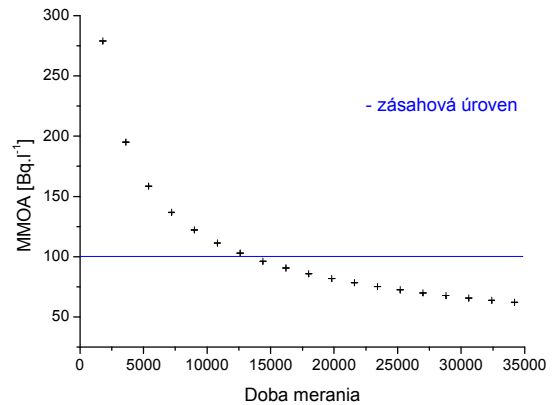
Z minimálne merateľnej aktivity získame podľa vzťahu (2) minimálne merateľnú objemovú aktivitu radónu (MMOA) vo vode v nasledovnom tvare:

$$MMOA = \frac{A_{\min}}{V_{vz}} \quad (2)$$

Minimálna merateľná objemová aktivita pri objeme vzorky  $V_{vz}$  2,65 litra je 86 Bq/l pri dobe merania 5 hodín. Čo nám umožňuje merať

objemovú aktivitu radónu (OAR) vo vodovodnom potrubí a stanoviť či prekračuje odvodené zásahové úrovne stanovené vyhláškou [4].

Ako vidíme na obrázku 6, odvodenú zásahovú úroveň 100 Bq/l je možné namerať pomocou NaI(Tl) [(Ø 38 x 38) mm] detektora pri dobe merania vzorky dlhšej ako 4 hodiny.



Obr. 6 Minimálna merateľná objemová aktivita radónu v závislosti od doby merania

## Záver

Navrhli a zostavili sme zariadenie pre meranie objemovej aktivity radónu vo vodách na báze NaI(Tl) detektora. Uskutočnili sme kalibráciu detekčného systému a zmerali požadovú vzorku – destilovanú vodu. Z merania gama spektra destilovanej vody môžeme povedať, že detektor má dostatočný detekčný limit pre stanovenie, či vzorka je pod alebo nad odvodenou zásahovou úrovňou určenou vyhláškou a preto ho bude možné využiť pre rádiohygienické merania.

## Referencie

- [1] P. Blahušiak. Radón a jeho variácie v rôznych médiách: Bakalárska práca. Bratislava: FMFI UK, 2010. 10 – 12 s.
- [2] M. Müllerová. Komplexná radónová diagnostika uzavretých priestorov: Diplomová práca. Bratislava: FMFI UK, 2005. 94 s.
- [3] J. L. Putman: Int. J. Appl. Rad. Isotopes, No. 13, (1962) 99
- [4] Príloha č. 4 k vyhláške č. 528/2007 Z. z.

# Gamaspektrometria meteoritu Košice

Mgr. Andrej Kováčik\*

Školiteľ: Ivan Sýkora†

Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Článok sa zaoberá problematikou určenia koncentrácií kozmogénnych rádionuklidov v úlomkoch meteoritu Košice pomocou gamaspektrometrických metód. Jeho hlavným zameraním je určenie detekčnej účinnosti pre jednotlivé vzorky meteoritu využitím experimentálnych metód a metódy počítačovej Monte Carlo simulácie.

**Kľúčové slová:** gamaspektrometria, detekčná účinnosť, simulácie Monte Carlo, kozmogénne rádionuklidy, meteorit

## 1 Úvod

Meteorit Košice, ktorý dopadol 28. februára 2010 pri obci Vyšný Klatov, je v poradí šiestym nájdeným meteoritom na území Slovenska. Doposiaľ bolo, podľa zverejnených informácií [Dobrovodský 2011], nájdených 77 úlomkov, z ktorých najväčší má hmotnosť vyše 2 kg a najmenší 0,5 g. Úlomky vznikli viacerými explóziami pôvodného telesa, ktorého priemer sa odhaduje na 1,5 m a hmotnosť na niekoľko ton, počas jeho preletu atmosférou. Tento meteorit bol klasifikovaný ako obyčajný H5 chondrit [Tóth a Svoreň 2011].

Chondrity patria do skupiny kamenných meteoritov [Bischoff 2001]. Tieto sú formované z vonkajšej časti planét, alebo asteroidov, preto sa ťažšie rozoznávajú medzi pozemskými kameňmi. Ak však po ich dopade na zem, neuplynie príliš dlhá doba, dá sa na nich pozorovať čierna natavená kôra, ktorá na nich vznikla počas preletu atmosférou. Chondrity sa navyše vyznačujú drobnou zrnkovitou štruktúrou. Tieto zrnká, nazývané chondruly, pochádzajú zo slnečnej hmloviny a boli sformované skôr ako naša Zem a ostatné planéty Slnečnej sústavy.

Obyčajné chondrity sú najčastejšie sa vyskytujúce meteority. Obsahujú chondruly s priemerom od 0,5 po 1 mm a rôzne množstvá železa, podľa čoho sa delia na ďalšie 3 podskupiny. H chondrity majú z nich najväčšiu koncentráciu

železa a iných kovov a najmenšie chondruly. Do tejto skupiny spadá okolo 42% obyčajných chondritov.

Číslo 5, v označení H5, vyjadruje petrologický typ meteoritu, t.j. stupeň zmeny chondrúl vplyvom vysokej teploty na stupnici od 1 po 7, kde stupeň 1 až 3 znamená nezmenené, alebo málo zmenené chondruly. [Michel and Neumann, 1998], [Bhattacharya et al. 1980]

Znalosť produkcie kozmogénnych nuklidov v extraterestriálnom objekte, akým je meteorit, umožňuje ohodnotiť variácie kozmického žiarenia, alebo expozičnú históriu meteoritu [Sarafin et al. 1984]. V Slnečnej sústave je takýto objekt bombardovaný stredne a vysoko energetickými časticami zo slnečného a galaktického kozmického žiarenia. Solárne kozmické žiarenie je tvorené v priemere z 98% protónmi a 2% alfa časticami, s energiami dosahujúcimi niekoľko stoviek MeV/n. Zdrojom galaktického kozmického žiarenia, pochádzajúceho zvonka Slnečnej sústavy, sú výbuchy supernov. Energia tohto žiarenia môže v niektorých prípadoch dosahovať hodnoty až  $10^{15}$  MeV. Stredné hodnoty energií sú však niekoľko GeV/n. Galaktické kozmické žiarenie je tvorené z 87 % z protónov, 12% z alfa častíc a 1% ťažších častíc. Jeho variácie sú spôsobené interakciou častíc tohto žiarenia so solárnym magnetickým poľom [Michel and Neumann, 1998].

Interakciu kozmického žiarenia z kozmickým prachom, asteroidmi a meteoroidmi vzniká pomerne veľké množstvo stabilných a rádioaktívnych nuklidov. Jednou z nedeštruktívnych analytických metód, pomocou ktorej sa dá určiť prítomnosť a koncentrácie niektorých kozmogénnych nuklidov je nízkopozadová gamaspektrometria.

Prvý z úlomkov meteoritu Košice sa podarilo objaviť koncom marca 2010, po roztopení snehu, vedeckými pracovníkmi KAFZM FMFI a ASÚ SAV. Na základe gamaspektrometrickej analýzy na KJFB, ktorá ukázala prítomnosť rádionuklidov  $^{54}\text{Mn}$ ,  $^{22}\text{Na}$  a  $^{26}\text{Al}$  bol potvrdený jeho mimozemský pôvod. Podrobnejšie merania ukázali prítomnosť ďalších kozmogénnych rádionuklidov  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{58}\text{Co}$ ,  $^{48}\text{V}$ ,  $^{46}\text{Sc}$ . Terčové prvky, z ktorých tieto rádionuklidy vznikajú interakciou s kozmickým žiarením sú v Tab. 1. Za účelom

\* andrej.kvkv@gmail.com

† sykora@fmph.uniba.sk

gamaspektrometrickej analýzy bolo KJFB nakoniec poskytnutých spolu 12 kúskov tohto meteoritu.

Rádionuklid:	Terčový prvok:	Energie gama čiar [keV]:	$T_{1/2}$ :
$^{54}\text{Mn}$	Fe, Ni, Mn	834,85	312,3 d
$^{22}\text{Na}$	Mg, Al, Si, Ca, Ti, Fe, Ni	1274,5	2,6 r
$^{26}\text{Al}$	Mg, Al, Si, Ca, Ti, Fe, Ni	1808,6	$7,17 \cdot 10^5$ r
$^{60}\text{Co}$	Co, Ni	1173,2 1332,5	5,27 r
$^{57}\text{Co}$	Fe, Ni	122,06 136,47	271,8 d
$^{58}\text{Co}$	Fe, Ni	810,78	70,8 d
$^{46}\text{Sc}$	Ti, Fe, Ni	889,28 1120,54	83,8 d
$^{48}\text{V}$	Ti, Fe, Ni	983,5 1312,1	15,97 d

Tabuľka 1:  
Rádionuklidy nájdené v úlomku meteoritu Košice č.1 a ich charakteristiky.

## 2 Etalóny meteoritu Košice

Určenie aktivít jednotlivých rádionuklidov v úlomkoch si vyžaduje poznať píkovoú účinnosť pre každý úlomok pre dané energie gama kvánt. Nepravidelný tvar úlomkov obmedzuje použitie simulácií Monte Carlo len na približný odhad jednotlivých píkových účinností za predpokladu čo najvernejšej aproximácie geometrie úlomku jednoduchšou geometriou. Z tohto dôvodu sme uprednostnili experimentálne metódy, ktoré sú z hľadiska presnosti určenia detekčných účinností v tomto prípade vyhovujúcejšie.

### 2.1 Výroba odliatkov úlomkov meteoritu

Ku každému z 12 kusov meteoritu sme vyrobili jeho odliatok za pomoci tenkej hliníkovej fólie

a epoxidovej živice. Jednotlivé úlomky boli zabalené do polyetylénovej fólie aby sa predišlo ich kontaminácii hliníkom. Následne na to naň bolo striedavo nanosené 3 až 4 vrstvy hliníkovej fólie a epoxidu. Po uplynutí zhruba jedného dňa epoxid stvrdol a spolu s alobalom vytvoril okolo úlomku meteoritu laminátovú škrupinu, z ktorej bolo treba úlomok meteoritu vyrezať. Týmto spôsobom sme vyrobili formu s hrúbkou steny okolo 1 až 2 mm, ktorá svojou vnútornou plochou verne kopírovala vzorku meteoritu.

### 2.2 Výroba náplne pre odliatky meteoritu

Experimentálna metóda určenia detekčných účinností vyžaduje zhotovenie etalónu, ktorý okrem svojho tvaru, reprezentuje čo najvernejšie požadovanú vzorku aj svojim prvkovým zložením a hustotou. Ako materiál náplne etalónov sme použili zmes práškového pentakarbonylového mäkkého Fe s kremičitým pieskom  $\text{SiO}_2$ , do ktorého boli primiešané rádionuklidy  $^{40}\text{K}$  a  $^{26}\text{Al}$ , ďalej sme do nej pridali vodné roztoky solí, ktoré obsahovali rádionuklidy  $^{54}\text{Mn}$ ,  $^{65}\text{Zn}$ ,  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{22}\text{Na}$  a zvýšili koncentráciu  $^{26}\text{Al}$ . Pri gamaspektrometrických meraniach sme zistili aj menšiu koncentráciu  $^{60}\text{Co}$ , ktorý sa nachádzal v roztoku so soľami  $^{54}\text{Mn}$ . Soľné roztoky sme rozriedili vodou a do zmesi aplikovali injekčnou striekačkou po kvapkách v niekoľkých cykloch, medzi ktorými sa prebytočná voda odparila pod zdrojom tepla a zmes premiešala, aby sa zabezpečila čo najlepšia homogenita rozloženia rádionuklidov.

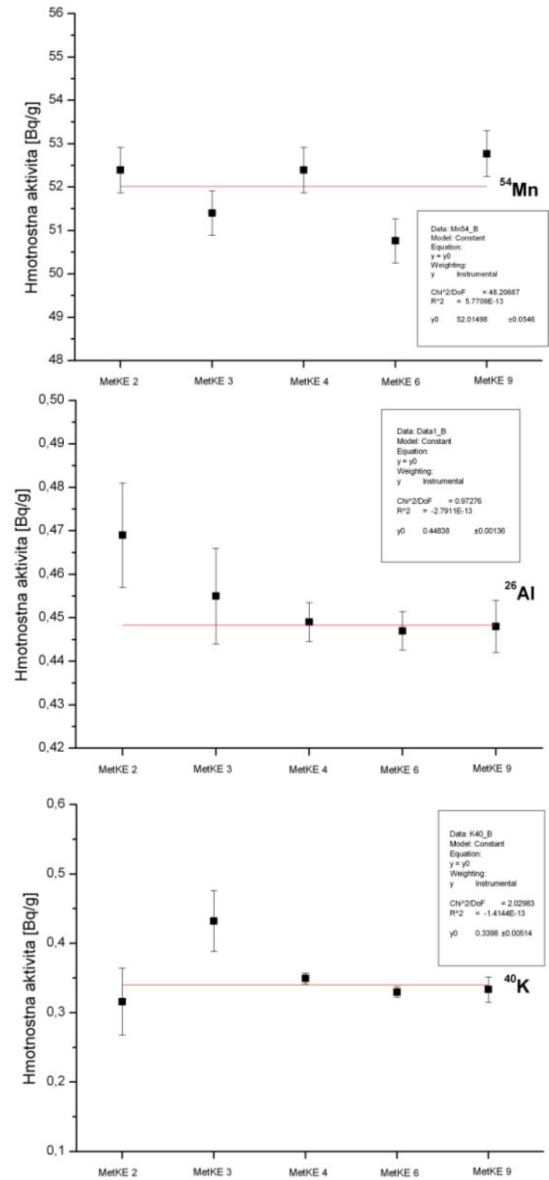
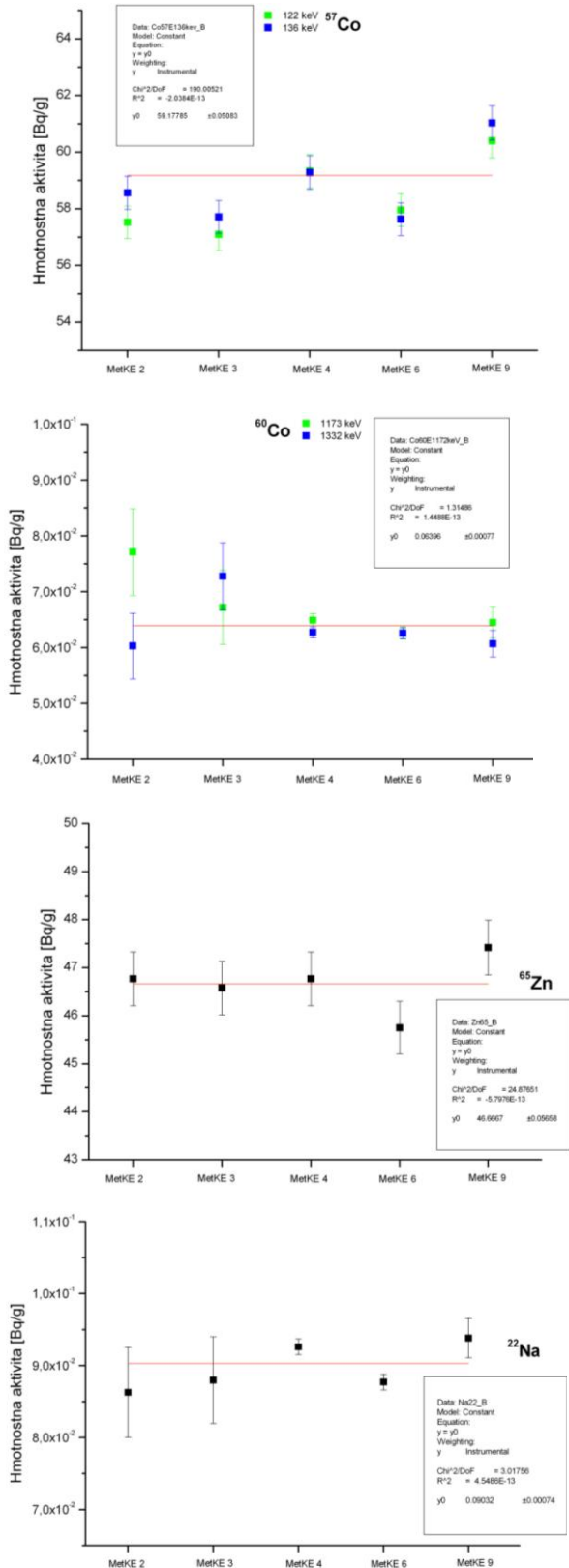
Hustota vytvorenej zmesi bola, v dôsledku nedostatku potrebného množstva práškového Fe, okolo 2,8 g/ml, čo je zhruba o 20% menej ako je hustota skutočného meteoritu.

### 2.3 Určenie aktivít etalónov meteoritu

Aktivita jednotlivých rádionuklidov v soľných roztokoch boli síce známe, avšak ich hmotnostné aktivity v etalónovej zmesi sa dali určiť na základe použitého objemu soľných roztokov len orientačne. Presnejší údaj sme získali meraním rôznych častí tejto zmesi na detektoroch na ktoré máme vytvorený Monte Carlo model detekčnej účinnosti. Meranie sme realizovali v dobre definovanej geometrii, ku ktorej sme určili účinnosť pomocou počítačových simulácií.

Po gamaspektrometrickom meraní druhého najväčšieho etalónu, č.2, sme jeho náplň nasypali do vzorkovnice tvaru valca objemu 125 ml, odvážili a určili objem a po vytvorení jej modelu v programovom balíku Geant 3.2.1 určili účinnosti pre požadované energie. Rovnakým spôsobom sme

postupovali pri etalónoch č.3, č.4, č.6 a č.9. Aktivity etalónovej zmesi určené v každom z piatich odliatkov z nameraných a namodelovaných údajov sú na Obr. 1. Stredné hmotnostné aktivity jednotlivých rádionuklidov v etalónovej zmesi sú v Tab. 2.



Obrázok 1: Hmotnostné aktivity jednotlivých rádionuklidov v etalónovej zmesi v etalónoch č.2, č.3, č.4, č.6 a č.9 fitované konštantnou funkciou.

Nuklid	$A_m$ [Bq/g]	$\sigma$ [Bq/g]
Co-57	58.19	$\pm 0.7$
Mn-54	52.02	$\pm 0.55$
Zn-65	46.67	$\pm 0.57$
Al-26	4.48E-01	$\pm 1.4E-02$
Co-60	6.32E-02	$\pm 5.0E-03$
K-40	3.40E-01	$\pm 5.1E-02$
Na-22	9.03E-02	$\pm 7.4E-03$

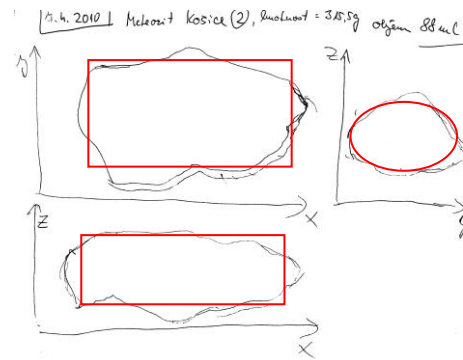
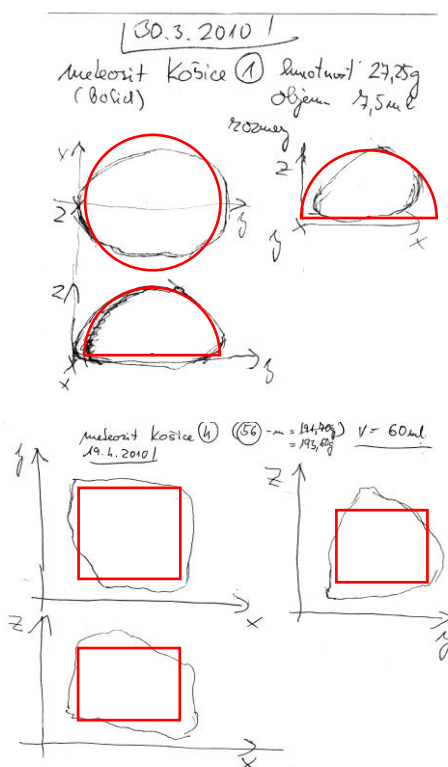
Tabuľka 2: Hmotnostné aktivity jednotlivých rádionuklidov v etalónovej zmesi pre meteorit Košice

### 3 Určenie detekčných účinností pre meteorit Košice

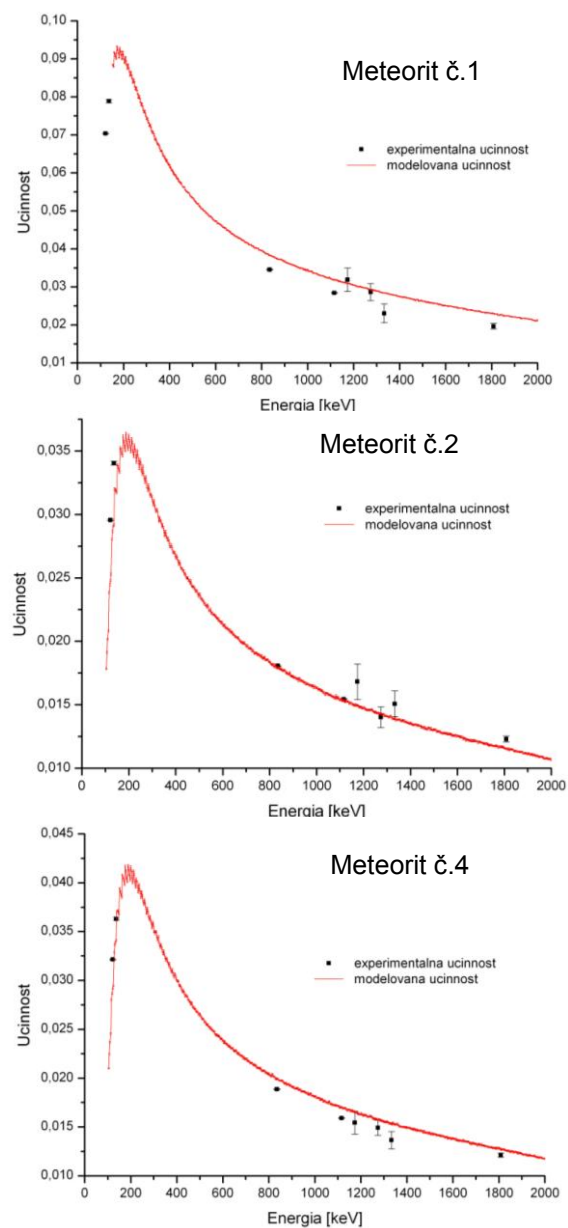
Detekčné účinnosti pre jednotlivé úlomky meteoritu sme určili meraním etalónov na detektore za pomoci vypočítanej aktivity rádionuklidov pre každý etalón.

Na overenie správnosti určenia detekčných účinností sme využili počítačové simulácie, v rámci ktorých sme vytvorili zjednodušený model troch meteoritov (č.1, č.2 a č.4). Meteorit č.1 bol v simuláciách aproximovaný polguľou, meteorit č.2 valcom s elipsovým prierezom a meteorit č.4 obdĺžnikom (Obr. 2). Pri vytváraní zjednodušených modelov bol braný ohľad predovšetkým na zachovanie rovnakého objemu v porovnaní so skutočným meteoritom. Vzhľadom na to, že prvková analýza meteoritu Košice zatiaľ nebola dokončená v jeho modeli sme použili typické prvkové zastúpenie pre obyčajné chondrity typu H5: O – 36%, Si – 17%, Al – 1%, Fe – 28%, Mg – 14%.

Účinnosti získané experimentálnymi metódami sa líšia od účinností zo simulácií Monte Carlo o približne 10% v pre nižšie energie a o 7% v prípade vyšších energií (Obr. 3). Ak zoberieme do úvahy nepresnosti ktorých sme sa dopustili pri zjednodušovaní tvaru meteoritov v modeli, súlad medzi účinnosťami získanými týmito dvomi rôznymi spôsobmi je pomerne vysoký.



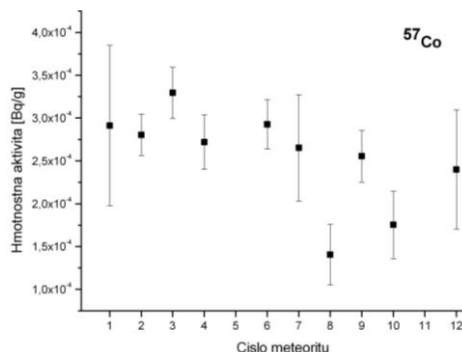
Obrázok 2: Porovnanie tvaru priemetov modelov č.1, č.2 a č.4 s reálnym tvarom úlomkov.



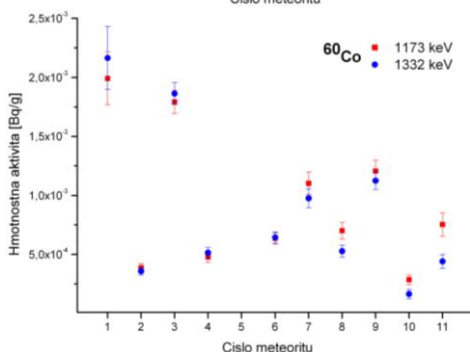
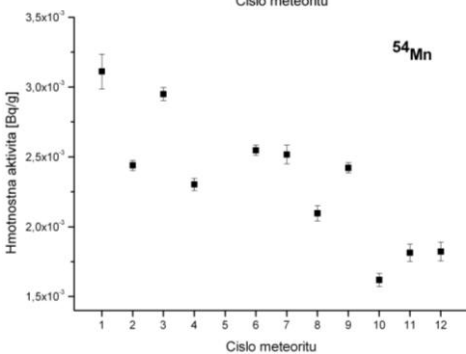
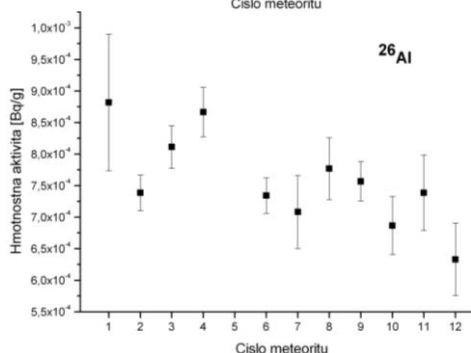
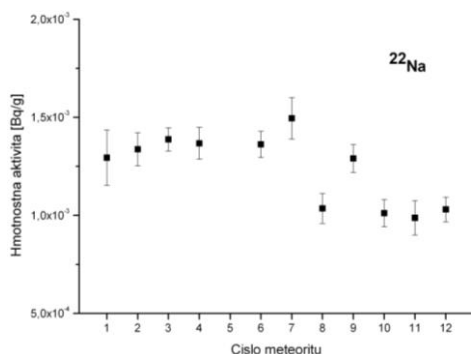
Obrázok 3: Porovnanie modelovaných a experimentálne získaných píkových účinností pre meteorit č.1, č.2 a č.4

## 4 Určenie hmotnostných aktivít úlomkov meteoritu Košice

Pomocou určených píkových účinností pre jednotlivé energie emitovaných gama kvánt rádionuklidmi <sup>57</sup>Co (122,36 keV), <sup>60</sup>Co (1173,2 keV a 1332,5 keV), <sup>22</sup>Na (1274,5 keV), <sup>26</sup>Al(1808,6 keV), a <sup>56</sup>Mn(834,8 keV) pre jednotlivé úlomky meteoritu a po ich gamaspektrometrickom meraní v časovom rozsahu od 5 po 10 dní sme stanovili hmotnostné aktivity uvedených rádionuklidov (Obr. 4). Uvedené štandardné neistoty sú na úrovni spoľahlivosti 1σ.



Obrázok 4: Hmotnostné aktivity úlomkov meteoritu Košice č.1 až č.12



## 5 Použité detekčné systémy

Gamaspektrometrické analýzy uvedených vzoriek úlomkov meteoritu Košice a vyrobených etalónov boli vykonané na dvoch polovodičových HPGe detektoroch na KJFB, ktorých základné charakteristiky sú uvedené v Tab. 3.

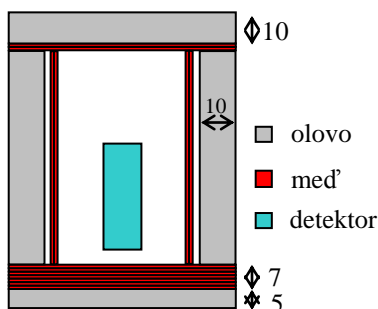
Detektor (HPGe40) s označením GX4020 od firmy Canberra bol umiestnený v tieniacom kryte pozostávajúceho z olovených blokov a medených platní (Obr. 5, 6).

Detektor (HPGe280) s označením IGC65 od firmy PGT bol počas meraní uzavretý vo viackomponentnom tieniacom kryte (Obr. 7).

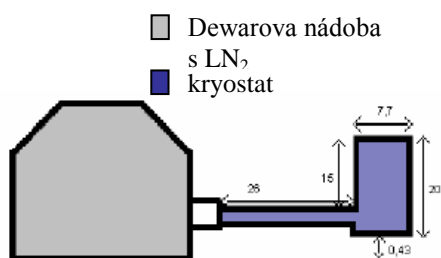
Spektrá boli analyzované pomocou programu Emcaplus od firmy Silena.

	Detektor	
	HPGe280	HPGe40
Objem kryštálu [cm <sup>3</sup> ]	280	40
FWHM (1333 keV)	2,12 keV	2,0 keV
FWHM (122 keV)	1,08 keV	1,1 keV
Relat. účinnosť	69%	40%

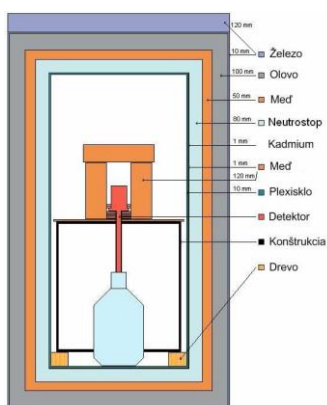
Tabuľka 3: Základné charakteristiky použitých HPGe detektorov



Obrázok 5: Schématický prierez krytom detektora HPGe40



Obrázok 6: Konfigurácia Dewarovej nádoby a kryostatu detektora HPGe40



Obrázok 7: Prierez tieniacim krytom detektora HPGe280

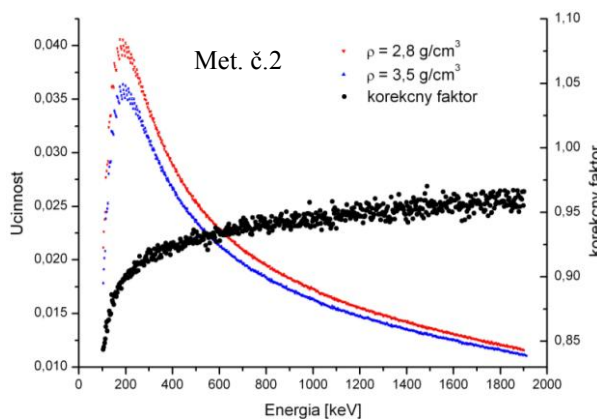
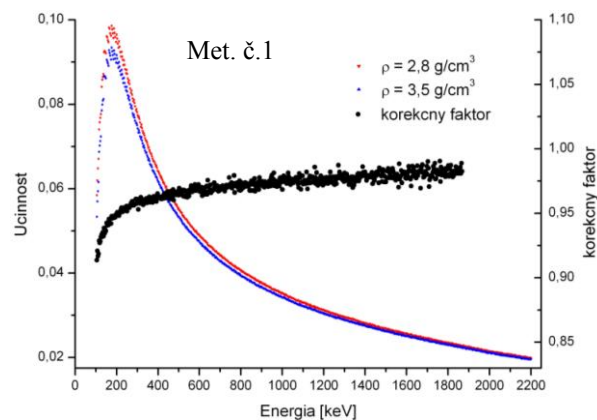
## 6 Diskusia a záver

V rámci tejto práce sme určili hmotnostné aktivity kozmogénnych rádionuklidov  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{22}\text{Na}$ ,  $^{26}\text{Al}$  a  $^{56}\text{Mn}$  v 12 úlohkách meteoritu Košice (obr. č.3). Píkové účinnosti pre jednotlivé energie gama kvánt pre každý úloček meteoritu sme získali pomocou experimentálnych metód, ktoré spočívali vo výrobe odliatku jednotlivých úlohkov, výrobe etalónovej zmesi, ktorá by svojim zložením, hustotou a obsahom rádionuklidov čo najlepšie zodpovedala pôvodnému meteoritu. Aktivitu rádionuklidov v etalónovej zmesi sme určili pomocou jej gamaspektrometrickej analýzy v dobre definovanej geometrii vzorkovnice a simulácii Monte Carlo. Vyrobenú etalónovú zmes sme použili

ako výplň etalónov jednotlivých úlohkov meteoritu a určili tak píkové účinnosti jednotlivých čiar pre každý z úlohkov. Hodnoty píkových účinností pre 3 úlohky (č.1, č.2, č.4) sme overili pomocou vytvorenia približného modelu ich geometrie v rámci Monte Carlo simulácií.

Ďalšou úlohou bude určenie korekčných faktorov pre experimentálne určené píkové účinnosti, vzhľadom na to, že hustota vyrobenej etalónovej zmesi sa líšila od strednej hustoty meteoritu ( $3,5 \text{ g/cm}^3$ ), čo mohlo spôsobiť nahodnotenie určených píkových účinností najmä v oblasti nižších energií pre väčšie úlohky meteoritu. Pre ohodnotenie použijeme novovytvorenú zmes s hustotou  $3,44 \text{ g/cm}^3$ , ktorá lepšie zodpovedá hustote reálneho meteoritu.

Na odhad veľkosti potrebných korekcií sme využili vytvorený približný model meteoritu č.2, ako zástupcu väčších úlohkov a meteoritu č.1, ako zástupcu menších úlohkov. Využitím simulácií Monte Carlo sme porovnali píkové účinnosti pre rôzne hustoty ( $2,8 \text{ g/cm}^3$  a  $3,5 \text{ g/cm}^3$ ) modelov týchto dvoch meteoritov (obr.č.17). Z týchto porovnaní sme určili korekčnú funkciu, ktorá pre model meteoritu č.2 nadobúda hodnoty od 0,84 pre nižšie energie po 0,95 pre vyššie energie a pre model meteoritu č.1 hodnoty od 0,92 pre nižšie energie po 0,96 pre vyššie energie.



Obrázok 8: Účinnosti z Monte Carlo simulácií pre hustoty 2,8 a  $3,5 \text{ g/cm}^3$  pre model meteoritu č.1 a č.2 a korekčné faktory pre ich píkové účinnosti



Vzhľadom na to, že podľa simulácií Monte Carlo sa korekčné faktory účinností hlavne pre väčšie úlomky meteoritu budú výraznejšie líšiť od 1, bude v týchto prípadoch, potrebné určiť ich hodnoty aj experimentálne, t.j. primiešať do vyrobenej etalónovej zmesi viac práškového Fe, tak aby sme dosiahli požadovanú hustotu  $3,5 \text{ g/cm}^3$ , určiť aktivity jednotlivých rádionuklidov v tejto zmesi a pomocou vytvorených odliatkov určiť píkove účinnosti pre vybrané úlomky meteoritu.

## Pod'akovanie

Autor by rád poďakoval prof. RNDr. Vladimírovi Porubčanovi, DrSc za poskytnutie úlomkov meteoritu Košice.

Práca bola podporená projektom 1/0770/11 Izotopový výskum meteoritu Košice a podobných chondritov typu H.

## Literatúra

- [Michel and Neumann, 1998] Michel, R. and Neumann, S. (1998). Interpretation of cosmogenic nuclides in meteorites on the basis of accelerator experiments and physical model calculations. *Earth Planet Sci.*, 107: 441-457
- [Dobrovodský 2011] Dobrovodský, M. (2011). Meteorit Košice rok po tom. <http://astrin.planetarium.sk/meteorit-kosice-rok-po-tom-c07165>
- [Tóth a Svoreň 2011] Tóth J., Svoreň J. (2011). Pád meteoritu na Slovensku. <http://www.daa.fmph.uniba.sk/meteoritSK.html>
- [Bischoff 2001] Bischoff A. (2001). Fantastic new chondrites, achondrites, and lunar meteorites as the result of recent meteorite search expeditions in hot and cold deserts. *Earth, Moon and Planets.*, 85-86: 87-97
- [Sarařin et al. 1984] Sarařin R., Bourot-Denise M., Crozaz G., Herpers U., Pellas P., Schultz L. and Weber H.W. (1984). Cosmic ray effects in the Antarctic meteorite Allan Hills A 78084. *Earth and Planetary Science Letters*, 73: 171-182
- [Bhattacharya et al. 1980] Bhattacharya S.K., Imamura M., Sinha N., Bhandari N. (1980). Depth and size dependence of  $^{53}\text{Mn}$  activity in chondrites. *Earth and Planetary Science Letters*, 51: 45-57

# Merania exhalačnej rýchlosti a štúdium exhalácie $^{222}\text{Rn}$ z pôdy

Monika Mazánová

Školiteľka: Monika Müllerová

Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Práca sa zaoberá štúdiom exhalácie radónu z pôdy v areáli FMFI UK v Bratislave. Exhalácia bola kontinuálne meraná pomocou akumuláčnej metódy. Analyzovali sme vplyv meteorologických parametrov na exhalačnú rýchlosť radónu. Analýzy ukázali výrazný vplyv zrážok na rýchlosť exhalácie. Tento výsledok je vyhodnotený v tabuľke, ktorá je tiež súčasťou práce.

**Kľúčové slová:** radón, exhalačná rýchlosť, zrážky, akumuláčna metóda

## 1 Úvod

V otázke rádioaktivity sa v tomto období pozornosť verejnosti sústreďuje predovšetkým na zdroje žiarenia vytvorené človekom (jadrové zariadenia, rádioaktívny odpad a pod.) bez toho, aby si väčšina ľudí uvedomovala, že najväčším zdrojom ožiarenia človeka je prírodná rádioaktivita a z nej je najzávažnejším zdrojom radón. Po zistení, že hodnoty koncentrácie radónu môžu dosiahnuť úroveň, ktorá vyžaduje kontrolu, sa záujem o radón a jeho dcérske produkty prudko zvýšil. Väčšina radónu pochádza z pôdy, odkiaľ difunduje do atmosféry. Dávka z ožiarenia radónom a jeho rádioaktívnych produktov premeny, ktoré sú  $\alpha$ -žiariče, tvorí približne polovicu z celkového ročného ožiarenia človeka. Koncentrácie radónu sa so zmenou miesta môžu prudko meniť a preto je nutné poznať všetky parametre, ovplyvňujúce hodnotu koncentrácie radónu. Radón difunduje do pôdnych tekutín (voda, vzduch), ktorými je transportovaný, takže ich pohyb hrá dôležitú úlohu a je ovplyvňovaný viacerými faktormi: vlastnosti pôdy, meteorologické podmienky (teplota, dažďové zrážky, atmosférický tlak) a geodynamické udalosti [Holý a kol., 1997]. Dôležitým parametrom udávajúcim transport radónu z pôdy je jeho exhalačná rýchlosť. V tejto práci sme sa venovali štúdiu exhalácie radónu z pôdy v závislosti od meteorologických parametrov. Jej

správne určenie je v súčasnosti predmetom viacerých štúdií. Výsledky merania exhalácie  $^{222}\text{Rn}$  z pôdy majú aplikácie v meteorológii, v určení vplyvu na zmiešavaciu výšku atmosféry, testovanie modelov transportu polutantov v atmosfére, v inžinierskej geológii a v iných oblastiach.

## 2 Základné vlastnosti radónu a jeho vznik v pôde

Radón ( $^{222}\text{Rn}$ ) je rádioaktívny inertný prvok so  $Z = 86$ , ktorý vzniká rádioaktívnou premenou rádia ( $^{226}\text{Ra}$ ).

Zdrojom rádia sú nerasty s obsahom uránu obsiahnuté v zemskej kôre. Najvyššie množstvo rádia obyčajne obsahujú geologicky staré kryštalické horniny (napr. granity) a najnižšie množstvo mladé sedimenty (napr. vápence) [Nagda, 1994]. Výskyt radónu na určitom území preto úzko súvisí s jeho geologickou stavbou. Veľkú časť slovenského územia tvoria jadrové pohoria so zvýšeným obsahom uránu. Ložiská uránových rúd sú sústredené v oblasti Spišsko-gemerského Rudohoria a v pohorí Považský Inovec.

Pri premene  $^{226}\text{Ra}$  je väčšina uvoľnenej energie prenesená na  $\alpha$  – časticu. Atóm radónu v dôsledku spätného odrazu od alfa častice získava kinetickú energiu. Táto energia je 10 až 100 000-krát väčšia ako typická energia chemickej väzby, preto radón nezostáva súčasťou pôvodnej chemickej štruktúry, ale migruje k povrchu alebo defektom zrna [Böhm]. Tento jav sa nazýva emanácia radónu. Takto sa radón dostáva do podzemných vôd a do pôdneho vzduchu. Koncentrácia radónu v pôde je typicky  $40 \text{ Bq}\cdot\text{kg}^{-1}$  [Myriek a kol.]. V pôde je transport dvoj etapový proces – emanácia z pôdnych zrn do pórov medzi zrnami a následne sa radón vplyvom gradientov koncentrácie a tlaku dostáva do atmosféry. Ak je zemina suchá, je síce transport radónu na povrch ľahký, ale emanácia je nízka a naopak [Lindmark, 1985].

<sup>1</sup> monika.mazanova@gmail.com

<sup>2</sup>Monika.Mullerova@fmph.uniba.sk

### 3 Exhalácia radónu z pôdy

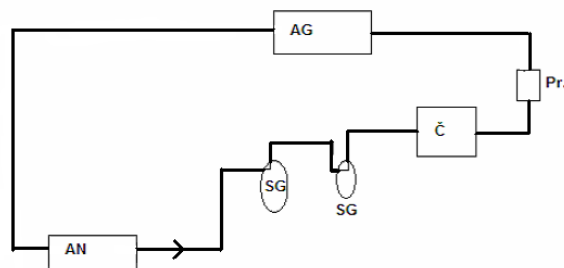
Exhalácia radónu závisí od množstva zložitých a meniacich sa faktorov, ako geofyzikálne a chemické charakteristiky pôdy, štruktúry pôdy, obsahu  $^{226}\text{Ra}$ , emanačného koeficientu, priepustnosti, absorpcie  $^{222}\text{Rn}$ , vrstvenia, povrchovej vegetácie a ďalších [IAEA, 1981]. Variácie meteorologických parametrov (napríklad poveternostných podmienok, zrážok) sú najviac vplyvujúcimi faktormi na exhaláciu radónu z pôdy [Jha a kol., 2000]. Priemerné hodnoty exhalácie z pôdy boli stanovené Wilkenigom a kol. na  $15 \text{ mBq m}^{-2}\text{s}^{-1}$  [Wilkenig a kol., 1972] a Scherym a kol. na  $22 \text{ mBq m}^{-2}\text{s}^{-1}$  [Schery a kol., 1989]. Z hľadiska charakteru merania exhalácie radónu z pôdy poznáme 3 hlavné typy metód merania: uzavretá akumulčná, prietoková akumulčná a absorpčná [Holý a kol., 2000; Wilkenig a kol., 1972; Harley a kol., 1988].

### 4 Experimentálna časť

Exhalácia radónu z povrchu pôdy sa merala v areáli FMFI UK v Bratislave kontinuálne akumulčnou metódou v období 24.8.2010 do 11.10.2010. Metóda je založená na umiestnení akumulčnej nádoby otvorenou stranou na povrch pôdy a meraní nárastu koncentrácie radónu v nej po určitých časových intervaloch [Holý a kol., 2000].

#### 4.1 Usporiadanie aparatury

Akumulčná nádoba v tvare valca bola otvorenou stranou položená na pôdny povrch neďaleko FMFI UK. Poklopom na opačnej strane bolo možné nádobu otvoriť a prevetrať atmosférickým vzduchom. Nádoba je zapustená 5 cm do pôdy, jej výška nad pôdnym povrchom je 18 cm, objem celej meracej aparatury  $V$  (nádoby so silikagélom, prietokomer, hadica, akumulčná nádoba, AlphaGUARD) je 23,84 litra a plocha exhalácie  $S = 0,1075 \text{ m}^2$ . Schéma celého zapojenia je na obrázku 1.



Obr. 1: Schéma zapojenia aparatury na meranie exhalačnej rýchlosti radónu z pôdy akumulčnou metódou: AN – akumulčná nádoba, SG – silikagél, Č – vzduchové čerpadlo, Pr. – prietokomer, AG – AlphaGuard (detektor).

Vzduch unikajúci z pôdy sa akumuluje v akumulčnej nádobe. Nasledovne cirkuluje kontinuálne uzavretým meracím okruhom s prietokom vzduchu nastaveným na  $0,5 \text{ l/min}$ . Najprv prechádza silikagélom, kde sa vychytáva vlhkosť a pokračuje cez vzduchotesné čerpadlo. Prietok je kontrolovaný prietokomerom. Za ním je posledná časť okruhu, ktorou je detektor. V ňom je kontinuálne meraná aktivita a následne sa vzduch vracia do akumulčnej nádoby. Ako detektor bol použitý multiparametrový radónový monitor AlphaGuard PQ 2000/MC50. Detektor je trojrozmerný  $\alpha$  – spektrometer s ionizačnou komorou ako detektorom radónu, ktorého celkový vnútorný objem je  $0,62 \text{ l}$  [Genrich].

### 5 Výsledky a diskusia

Objemová aktivita v akumulčnej nádobe bola zaznamenaná v 10-minútových intervaloch. Pri meraní exhalácie sú dôležitými parametrami spätná difúzia a únik radónu z akumulčnej nádoby. Charakterizuje ich konštanta  $\lambda_b$ :

$$\lambda^* = (\lambda_{Rn} + \lambda_b) \text{ [s}^{-1}\text{]}.$$

Konštanta premeny radónu má hodnotu  $\lambda_{Rn} = 2,11 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ . K určeniu  $\lambda^*$  sme použili namerané dáta objemovej aktivity radónu za dostatočne dlhú dobu, tak aby bol zrejмый exponenciálny nárast aktivity. Hodnoty sme fitovali funkciou [Holý a kol., 2000]:

$$A_{V,Rn} = \frac{E_{S,Rn} \cdot S}{V \lambda^*} (1 - e^{-\lambda^* t})$$

Výsledky merania exhalačnej rýchlosti sú uvedené v tabuľke 1.

Tab. 1: Výsledky merania exhaláčnej rýchlosti radónu z pôdy. R – korelačný koeficient.

Dátum		$\lambda^*$	$\lambda_b$	$E_{S,Rn}$	R
Začiatok merania	Koniec merania	[ $10^{-5}$ s $^{-1}$ ]	[ $10^{-5}$ s $^{-1}$ ]	[mBq·m $^{-2}$ s $^{-1}$ ]	
26.8.2010 15:05	27.8.2010 10:55	4 ± 0,1	4 ± 0,32	13 ± 0,3	0,97
27.8.2010 14:05	29.8.2010 22:05	2 ± 0,04	2 ± 0,2	10,4 ± 0,2	0,96
31.8.2010 15:05	2.9.2010 9:15	2 ± 0,1	2 ± 0,32	8,8 ± 0,2	0,97
3.9.2010 9:05	6.9.2010 15:35	2 ± 0,03	2 ± 0,17	12,3 ± 0,2	0,96
10.9.2010 12:05	13.9.2010 15:05	1 ± 0,02	1 ± 0,14	9,4 ± 0,1	0,96

Veľkosť  $\lambda^*$  určuje dobu, počas ktorej je nárast aktivity v akumuláčnej nádobe lineárny:  $t \ll (1/\lambda^*)$ . Vypočítané doby merania lineárneho nárastu aktivity  $t$  sme použili na ofitovanie získaných hodnôt objemovej aktivity radónu funkciou [Holý a kol., 2000]:

$$A_{V,Rn} = \frac{E_{S,Rn} \cdot S}{V} t$$

Takto sme dostali exhaláčnej rýchlosti radónu z pôdy pre lineárny nárast aktivity v akumuláčnej nádobe uvedené v tabuľke 2.

Tab. 2: Výsledky merania exhaláčnej rýchlosti radónu z pôdy. R – korelačný koeficient.

Dátum		t	$E_{S,Rn}$	R
Začiatok merania	Koniec merania	[s]	[mBq·m $^{-2}$ s $^{-1}$ ]	
26.8.2010 15:05	27.8.2010 10:55	< 5000	12,3 ± 1,4	0,61
27.8.2010 14:05	29.8.2010 22:05	< 10 000	9,8 ± 0,3	0,93
31.8.2010 15:05	2.9.2010 9:15	< 10 000	8,4 ± 0,3	0,95
3.9.2010 9:05	6.9.2010 15:35	< 10 000	11,9 ± 0,3	0,96
10.9.2010 12:05	13.9.2010 15:05	< 20 000	10,2 ± 0,2	0,94

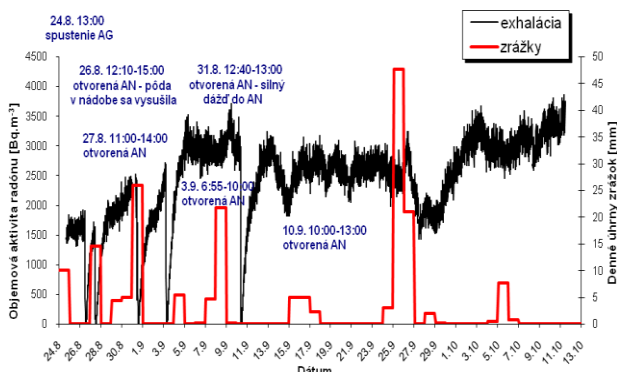
Na týchto nárastoch je možné pozorovať vplyv zrážok a vlhkosti na zmenu exhaláčnej rýchlosti radónu z pôdy. Keďže obsah vody v pôde má vplyv na emanáciu a následne na transport a samotnú exhaláciu radónu, vykonali sme niekoľko meraní hmotnostnej vlhkosti pôdy. Vlhkostný profil sa meral do hĺbky 50 cm v období 2.9.2010 - 13.10.2010 (tab. 3).

Tab. 3: Výsledky merania vlhkosti pôdy v rôznych hĺbkach.

Dátum odberu vzoriek	Hmotnostná vlhkosť w [%]				
	0 - 10 cm	10 - 20 cm	20 - 30 cm	30 - 40 cm	40 - 50 cm
2.9.2010	25,5	23,1	14,9	11,5	9,3
21.9.2010	20,4	18,2	16,2	11,3	13,6
28.9.2010	20	18,2	15,4	11,7	11,8
4.10.2010	18,9	16,5	14,2	11,2	9,5
13.10.2010	16,1	13,5	13,7	12,1	7,6

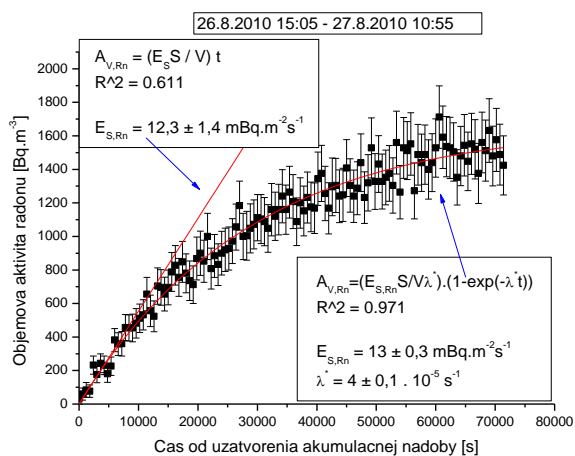
Analýzovali sme výsledky vlhkosti pôdy a zistili sme viditeľný vplyv spadnutých zrážok do hĺbky 30 cm. Dňa 2.9.2010 dosiahla hmotnostná vlhkosť najväčšiu nameranú hodnotu v povrchovej vrstve ( $w = 25,5$  %). Tomuto meraniu predchádzalo dlhotrvajúce obdobie zrážok (obr. 1). Najnižšia

zaznamenaná hodnota je z merania vykonaného 13.10.2010, pretože od 27.9.2010 neboli zaznamenané takmer žiadne zrážky.



Obr. 2: Závislosť exhalácie radónu z povrchu pôdy od denných úhrnov spadnutých zrážok.

Celkový priebeh exhalácie radónu závislý od zrážok je na obrázku 2. Viditeľný nárast exhalácie nastal po spadnutí veľkého množstva zrážok 26.9.2010. Voda zaplňajúca pôdne kapiláry vytlačí vzduch z hĺbky približne 30 cm, čoho dôsledkom je zvýšenie exhalácie radónu z pôdy. Následne sa kapiláry uzatvoria a vzduch už nemôže unikať. Saturovanie povrchovej vrstvy pôdy vodou hlavne po zrážkach vyvoláva zníženie exhalačnej rýchlosti radónu z pôdy (27.9.2010 – 30.9.2010). Keď sa póry presakovaním a vyparovaním vody uvoľnia,  $^{222}\text{Rn}$  cez ne vystupuje na povrch, a nakoniec dosiahne obvyklú stabilnú hodnotu exhalácie po niekoľkých dňoch od zrážok. Poklesy objemovej aktivity radónu v akumuláčnej nádobe sú spôsobené jej otvorením pre účely merania exhalačnej rýchlosti radónu z pôdy.

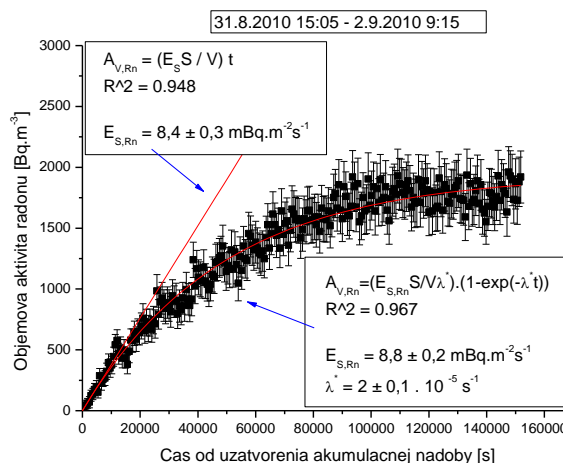


Obr. 3: Fit nárastu exhalačnej rýchlosti radónu.

Graf na obrázku 3 popisuje nárast objemovej aktivity radónu v akumuláčnej nádobe v období

sucha. Nádoba bola otvorená 26.8.2010 o 12:10 do 15:00. Pôda v nádobe sa vysušila. Následne bola nádoba opäť uzavretá. Objemová aktivita radónu v akumuláčnej nádobe začala narastať až dosiahla saturovanú hodnotu. Z fitovania nameraných údajov exponenciálnou funkciou sme získali hodnotu exhalačnej rýchlosti  $E_{S,Rn} = 13 \pm 0,3 \text{ mBq. m}^{-2} \text{ s}^{-1}$  a z fitovania lineárnej časti nárastu  $E_{S,Rn} = 12,3 \pm 1,4 \text{ mBq. m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Čo je v rámci neistoty merania veľmi dobrá zhoda.

Graf na obrázku 4 reprezentuje prípad, kedy bol silný dážď do akumuláčnej nádoby. Nádoba bola otvorená 31.8.2010 o 12:40 do 13:00. Pôda pod nádobou nasiakla vodou. Následne sa nádoba uzavrela. Z fitovania nárastu nameraných údajov objemovej aktivity radónu v akumuláčnej nádobe exponenciálnou funkciou sme získali hodnotu exhalačnej rýchlosti radónu z pôdy  $E_{S,Rn} = 8,8 \pm 0,2 \text{ mBq. m}^{-2} \text{ s}^{-1}$  a z fitovania lineárnej časti nárastu  $E_{S,Rn} = 8,4 \pm 0,3 \text{ mBq. m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Hodnoty sú opäť v rámci neistoty rovnaké.



Obr. 4: Fit nárastu exhalačnej rýchlosti radónu.

## Záver

Prvá časť je venovaná vzniku radónu v pôde a jeho základným vlastnostiam. V ďalšej časti sme popísali kontinuálnu metódu merania exhalácie radónu z pôdy.

Zostavili sme aparatúru na meranie exhalačnej rýchlosti radónu z povrchu pôdy. Z nárastu objemovej aktivity radónu v akumuláčnej nádobe bolo možné pozorovať vplyv zrážok a vlhkosti na zmenu exhalačnej rýchlosti radónu z pôdy. Exhalačnú rýchlosť sme zaznamenali najvyššiu ( $13,0 \pm 0,3 \text{ mBq. m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ) počas suchého obdobia

a najnižšiu ( $8,8 \pm 0,2 \text{ mBq. m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ) počas silných dažďov.

Bol zistený výrazný vplyv spadnutých zrážok na exhaláciu radónu z pôdy. Určenie podrobnejšej závislosti exhalačnej rýchlosti radónu z pôdy si vyžaduje podrobnejší monitoring a nové kontinuálne metódy jej merania.

## PodĎakovanie

Táto práca bola podporená vedeckou grantovou agentúrou Ministerstva školstva SR, VEGA projekt 1/0678/09.

## Literatúra

- [Holý a kol., 1997]. Holý K., Böhm R., Matoš M., Polášková A., Holá O. (1997) I. Konferencia – Rádioaktivita v životnom prostredí. *Výsledky trojročného kontinuálneho monitorovania objemovej aktivity  $^{222}\text{Rn}$  v pôdnom vzduchu a prístupy k interpretácii jej variácií*. Spišská Nová Ves.
- [Nagda, 1994]. Nagda, N. L. (1994). *Radon: prevalence, measurements, health risks, and control*. Philadelphia: Librari of Congres Cataloging-in-Publicativ Data, 1994. 170 s. ISBN 0-8031-2057-5
- [Böhm] [www.skola.sk/podporovane-projekty/fyzika-okolo-nas/files/Radoslav\\_Bohm\\_Radon.doc](http://www.skola.sk/podporovane-projekty/fyzika-okolo-nas/files/Radoslav_Bohm_Radon.doc). *Radón a jeho produkty premeny (25.3.2010)*.
- [Myriek a kol.]. Myriek T. E., Bernen, B. A., Haywood, F. F. (1983). Determination of Concentrations of Selected Radionuclides in Surface Soil in the U.S. *Health Physics*. Vol. 45. s. 631-642
- [IAEA, 1981] IAEA. Current practices and options for confinement of uranium mill tailings. *Technical report series*. No 209. Vienna.
- [Jha a kol., 2000] Jha S., Khan A. H., Mishra, U. C. (2000). *A study of the  $^{222}\text{Rn}$  flux from soil in the U mineralised belt at Jduguda*. s. 157-169
- [Lindmark, 1985] Lindmark A., Rosen B. (1985). Radon in soil gas exhalation tests and in situ measurements. *The Science of the Total Environment* 45. s. 397-404.
- [Wilkening a kol., 1972] Wilkening, M. H., Clements, W. E., Stanley, D. (1972).  $^{222}\text{Rn}$  Flux Measurements in Widely Separated regions. *The natural radiation environment II*. Springfield. s. 717-730.
- [Schery a kol., 1989] Schery, D. a kol. (1989). The flux of Rn and Th from Australian soils. In *Journal of Geophysical Research*, 94/D6. Wasington. s. 8567-8576.
- [Harley a kol., 1988] Harley, N. H. a kol. (1988). Measurement of Radon and Radon Daughters in Air. *NCRP Report No. 97*. Bethesda. 173 s.
- [Genrich] Genrich, V. *AlphaGUARD PQ2000/MC50 Multiparameter Radon Monitor*. Frankfurt: Genitron Instruments GmbH.
- [Holý a kol., 2000] K. Holý, M. Matoš, T. Stanys, O. Holá, A. Polášková, I. Bosá: *Testing of the  $^{222}\text{Rn}$  as a tool for determination of  $\text{CO}_2$  exhalation rates from the soil*, Zborník 2. Banskoštiavnické dni, Banská Štiavnica, (2000) 124 – 138

# Kontinuálne meranie objemovej aktivity radónu dvojfiltrou metódou

Attila Moravcsík\*  
Školiteľ: Karol Holý†

Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Cieľom práce bolo aplikovať vedomosti, ktoré sme získali počas meraní detekčným systémom na monitorovanie objemovej aktivity produktov premeny radónu, na vytvorenie detekčného systému, ktorým sme schopný merať objemovú aktivitu radónu, založenej na dvojfiltrouj metóde, na čo najnižšej úrovni. Na základe Wardovej metódy sme uskutočnili kalibráciu detektora, ktorý sme otestovali v rôznych podmienkach.

**Kľúčové slová:** radón, dvojfiltrouj metóda, Wardova kalibrácia.

## Úvod

Posledné desaťročia je radónová problematika často diskutovanou témou. Podľa organizácie UNSCEAR, približne 50% ročnej efektívnej dávky pochádza práve od radónu a jeho produktov premeny [UNSCEAR, 2008]. Preto je dôležité vedieť presne merať objemovú aktivitu radónu. Kvôli plynnému charakteru radónu sa vyskytujú určité komplikácie pri jeho meraniach. Preto boli vytvorené metódy založené na detekcii jeho produktov premeny.

Dvojfiltrouj metódu merania objemovej aktivity radónu navrhol v roku 1969 Thomas a jeho kolektív [THOMAS, - LeCLARE, 1970]. Nevýhodou jeho prístupu bolo, že hromadiaci objem za 1. filtrom bol veľmi malý (na úrovni 1 l) a 2. filter bol po jeho expozícii potrebné premiestniť pod detektor, ktorý bol umiestnený mimo odberovej hlavice. K ďalším nevýhodám patrila nízka citlivosť a diskontinuálnosť získavania údajov o objemovej aktivite  $^{222}\text{Rn}$ .

Cieľom tejto práce bolo zrealizovať kontinuálny monitor objemovej aktivity radónu na báze dvojfiltrouj metódy, umožňujúci merať objemové aktivity  $^{222}\text{Rn}$  na úrovni až  $1\text{Bq/m}^3$ .

## 1. Radón - vlastnosti a jeho zdroje

### 1.1 Vlastnosti radónu

Radón ( $^{222}\text{Rn}$ ) je prírodný inertný rádioaktívny plyn bez farby a zápachu, ktorý vzniká premenou rádia ( $^{226}\text{Ra}$ ) obsiahnutého v zemskej kôre.

Môže sa vyskytovať v rôznych skupenstvách - v plynnom, kvapalnom a tuhom.

Radón, keď je v kvapalnom skupenstve, je spočiatku priehľadný a bezfarebný, neskôr, kvôli jeho produktom premeny, sa začína zakalovať. Po naplnení do sklenenej nádoby produkty premeny začnú vyvolávať zelenú fluorescenciu.

V tuhom skupenstve je nepriehľadný a žiary ako modrý briliant.

Je členom uránového premenového radu. Urán sa samovoľne rozpadá na rádium, to na radón, ktorý sa ďalej s dobou polpremeny 3,82 dňa premieňa na atómy pevných prvkov  $^{218}\text{Po}$ ,  $^{214}\text{Pb}$ ,  $^{214}\text{Bi}$  a  $^{214}\text{Po}$ .

### 1.2 Zdroje radónu

Dominantným zdrojom radónu v atmosfére je geologické podložie.  $^{238}\text{U}$  je obsiahnutý vo všetkých horninách v stopových množstvách. Jednotlivé typy hornín majú rôzny obsah uránu. Najmenej uránu a jeho produktov premeny obsahujú usadené horniny typu pieskovec, ílovec a zlepenec (okolo  $15\text{Bq}\cdot\text{kg}^{-1}$ ). Stredný obsah uránu majú premenené horniny. Najvyšší obsah uránu a produktov premeny obsahujú vulkanické

\* attilam@szm.sk

† karol.holy@fmph.uniba.sk

horniny (v priemere okolo  $48 \text{ Bq.kg}^{-1}$ ) [ŠÁRO, - TÖLGYESSY,1985].

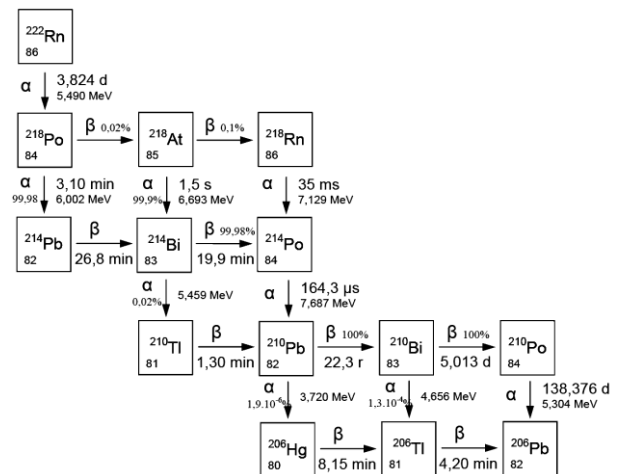
Ďalším zdrojom radónu je podzemná voda a svetové oceány. Radón je vo vode rozpustný. Podzemná voda, ktorá prúdi cez horniny a zeminy obsahujúce radón, je radónom obohacovaná. Najvyšší obsah radónu z tohto dôvodu obsahuje spodná voda pri geologickom podlaží tvorenom vyvretými horninami (žula a pod.), nižší je v oblastiach so zásaditými horninami a najnižší v sedimentoch (vápenec, pieskovec a pod.) Pri využívaní tejto vody na úžitkové a pitné účely dochádza k uvoľňovaniu radónu.

## 2. Produkty premeny radónu

Všetky produkty premeny radónu sú ťažké kovy, ktoré vznikajú  $\alpha$ - respektíve  $\beta$ - premenou. Majú schopnosť tvorenia zhlukov a viazanie sa na povrch aerosólov, ktoré sa neskôr môžu vychytávať na povrchu predmetov.

Premenou radónu vznikajúce rádionuklidy napríklad  $^{218}\text{Po}$ ,  $^{214}\text{Pb}$ ,  $^{214}\text{Bi}$  a  $^{214}\text{Po}$  sa môžu inhaláciou dostať do pľúc a tam sa viazať na pľúcne tkanivo a tým prispieť k riziku vzniku rakoviny pľúc. Respiračné faktory (intenzita a hĺbka dýchania) ovplyvňujú hĺbku vniknutia produktov premeny do pľúc.

Nestabilný  $^{222}\text{Rn}$  s dobou polpremeny 3,82 dňa emitovaním alfa častice s energiou  $E_\alpha=5,49 \text{ MeV}$  sa premieňa na  $^{218}\text{Po}$ , ktorý má dobu polpremeny 3,1 minúty. To sa ďalej emisiou alfa častice s energiou  $E_\alpha=6,002 \text{ MeV}$  premieňa na jadro  $^{214}\text{Pb}$ . Následne dvoma beta premenami vzniká jadro  $^{214}\text{Po}$ , ktoré je tiež alfa žiarič s dobou polpremeny 164,3  $\mu\text{s}$ . Z neho emisiou alfa častice s energiou 7,687 MeV vzniká olovo  $^{210}\text{Pb}$ , ktoré už má dlhú dobu polpremeny. Na obrázku 1 môžeme vidieť všetky produkty premeny radónu.



Obrázok 1 Premenová schéma  $^{222}\text{Rn}$ .

## 3. Meranie radónu a jeho produktov premeny

Objemovú aktivitu radónu a produktov jeho premeny možno určiť detekciou alfa, beta častíc alebo gama žiarenia vznikajúceho pri rádioaktívnej premene.

Metódy na meranie radónu a produktov premeny môžeme rozdeliť na základe rôznych kritérií.

Podľa toho, akým spôsobom sa meraná vzorka dostáva do citlivého objemu detektora delíme detekčné metódy na aktívne a pasívne. Ak sa radón dostáva difúziou do citlivého objemu detektora, tak takúto metódu nazývame pasívnou. Pri aktívnej metóde je do meracieho systému zapojené čerpadlo, pomocou ktorého je vzduch presávaný cez detektor alebo filter.

Ďalším kritériom môže byť charakter merania. Na základe toho detekčné metódy delíme na bodové odbery, integrálne a kontinuálne merania.

Pri meraní lokálnej koncentrácie radónu, napríklad v budovách alebo v teréne, sa používajú bodové odbery. Vzorka sa akumuluje počas krátkeho časového úseku a následne je analyzovaná zvyčajne v priebehu niekoľkých hodín. Vďaka tomuto našla svoje uplatnenie pri meraniach v teréne. Metóda však nie je vhodná na spracovanie veľkého množstva vzoriek.



Integrálne meranie je založené na tom, že detektor je vystavený žiareniu počas dlhého časového úseku. Pri tomto meraní dostávame jednu hodnotu, čo predstavuje priemernú hodnotu objemovej aktivity počas doby merania.

Jediná metóda, ktorá dáva aktuálnu hodnotu objemovej aktivity radónu, resp. jeho produktov premeny počas merania je kontinuálne monitorovanie. Do meracieho systému je zvyčajne zapojené čerpadlo s rýchlosťou čerpania v rozmedzí od pár desiatín l/min do niekoľkých desiatok l/min. Typický merací interval je od 15 min do 3-4 h.

Na meranie radónu sa môžu použiť rôzne detektory, ale najčastejšie sa používajú scintilačné komôrky, ionizačné komory, elektrety, dvojfiltru metóda a metóda založená na absorpcii radónu na aktívne uhlie [MÜLLEROVÁ, 2005].

#### 4. Dvojfiltru metóda

Na určovanie objemovej aktivity radónu na základe meraní aktivít produktov premeny, slúži tzv. dvojfiltru metóda [THOMAS, - LeCLARE, 1970]. Detekčný systém využíva dva filtre. Prvý filter slúži na to, aby zachytil produkty premeny nachádzajúce sa v presávanom vzduchu. Za filtrom nasleduje veľkoobjemová komora (v našom prípade 200 l sud), kde sa presávaný vzduch zdrží nejakú dobu v závislosti od rýchlosti presávania. Za dobu, čo sa vzduch zdrží v objeme, sa radón začne premieňať na  $^{218}\text{Po}$ , ktoré sa následne tiež premieňa. Potom je vzduch z objemu presávaný cez filter, na ktorom sa zachytia produkty premeny radónu. Na základe aktivity produktov premeny na 2. filtri potom možno určiť objemovú aktivitu radónu v presávanom vzduchu. Táto metóda si nevyžaduje presné poznanie hodnôt rovnovážnych faktorov, ako to je napríklad v prípade určovania objemovej aktivity radónu na základe objemových aktivít jeho produktov premeny.

Pre detekciu alfa aktivít produktov premeny sme použili kremíkový polovodičový detektor s povrchovou bariérou o citlivej

ploche  $450 \text{ mm}^2$ , nad ktorým bol umiestnený vo vzdialenosti 4,5 mm druhý filter.

### 5. Kalibrácia detekčného systému pomocou Wardovej metódy

#### 5.1 Teória Wardovej kalibrácie

Metóda je založená na určení koeficientov, ktoré charakterizujú odozvu detektora na vstupný radónový impulz [WARD, - BORAK, 1991]. Tieto koeficienty sa označujú ako tzv. invertujúce koeficienty. Princíp kalibrácie spočíva v tom, že na vstup detekčného systému sa pripojí vzduch so známou objemovou aktivitou radónu. Sleduje sa, ako detektor zareaguje na jeden vstupný radónový impulz. V detektore sa s časom postupne zvyšuje aktivita radónu. Po skončení jedného meracieho cyklu sa odpojí vzduch so známou aktivitou a na vstup sa pripojí neaktívny vzduch. Tým, že cez detektor sa presáva neaktívny vzduch, tak aktivita v detektore sa postupne znižuje, kým sa nedosiahne úroveň pozadia detektora. Toto postupné znižovanie aktivity je spôsobené vymývaním radónu z objemu a rozpadom jeho produktov premeny.

Ak poznáme aktivitu radónu, tak pre odozvu detektora v čase  $t$  možno písať:

$$N(t) = \sum_{i=0}^n \phi_i A(t-i), \quad (1)$$

kde  $\phi_i$  je koeficient charakterizujúce nelineárnu odozvu detektora,

$A(t-i) [\text{Bq} \cdot \text{m}^{-3}]$  - priemerná hodnota objemovej aktivity  $^{222}\text{Rn}$  v presávanom plyne v čase  $t-i$ .

Argument  $(t-i)$  predstavuje predchádzajúce meracie intervaly. Záporná hodnota  $(t-i) < 0$  je definovaná ako rovná nule.

Zo vzťahu (1) vidieť, že časová odozva pre detektor v časovom intervale  $t$  je závislá od predchádzajúcich intervalov. To sa dá prepísať do tvaru:

$$N(t) = \phi_0 A(t) + \phi_1 A(t-1) + \phi_2 A(t-2) + \dots + \phi_n A(t-n). \quad (2)$$

Ak zo vzťahu (2) vyjadríme  $A(t)$ , tak pre ňu môžeme písať:

$$A(t) = \frac{1}{\phi_0} N(t) - \frac{\phi_1}{\phi_0} A(t-1) - \frac{\phi_2}{\phi_0} A(t-2) - \dots - \frac{\phi_n}{\phi_0} A(t-n). \quad (3)$$

Pre intervaly  $(t-1)$ ,  $(t-2)$ ,  $(t-i)$ ... môžeme podobne napísať:

$$A(t-1) = \frac{1}{\phi_0} N(t-1) - \frac{\phi_1}{\phi_0} A(t-2) - \frac{\phi_2}{\phi_0} A(t-3) - \dots - \frac{\phi_n}{\phi_0} A(t-n-1),$$

$$A(t-2) = \frac{1}{\phi_0} N(t-2) - \frac{\phi_1}{\phi_0} A(t-3) - \frac{\phi_2}{\phi_0} A(t-4) - \dots - \frac{\phi_n}{\phi_0} A(t-n-2),$$

$$A(t-i) = \frac{1}{\phi_0} N(t-i) - \frac{\phi_1}{\phi_0} A(t-i-1) - \frac{\phi_2}{\phi_0} A(t-i-2) - \dots - \frac{\phi_n}{\phi_0} A(t-n-i).$$

Ak tieto výrazy dosadíme do rovnice (3), môžeme získať vyjadrenie na výpočet  $A(t)$  v závislosti od počtu nameraných impulzov v intervaloch  $(t-j)$ :

$$A(t) = \tau_0 N_1(t) - \sum_{j=1}^n \tau_j N_{j+1}(t), \quad (4)$$

kde,

$$\tau_0 = \frac{1}{\phi_0},$$

$$\tau_1 = \tau_0 (\tau_0 \phi_1),$$

$$\tau_2 = \tau_0 (\tau_0 \phi_2 - \tau_1 \phi_1),$$

$$\tau_3 = \tau_0 (\tau_0 \phi_3 - \tau_1 \phi_2 - \tau_2 \phi_1),$$

$$\vdots$$

$$\tau_m = \tau_0 (\tau_0 \phi_m - \tau_1 \phi_{m-1} - \dots - \tau_{m-1} \phi_1). \quad (5)$$

Koeficienty  $\tau_i$  sa nazývajú „invertujúce koeficienty“, lebo invertujú odozvu detektora na objemovú aktivitu  $^{222}\text{Rn}$ .

Neistota objemových aktivít sa vyjadruje ako:

$$\sigma_{A_t}^2 = \sum_{i=0}^k N_{j-i}^2 \sigma_{\tau_i}^2 + \sum_{i=0}^k \tau_i^2 N_{T(j-i)} + N_p \sum_{i=0}^k \tau_i^2, \quad (6)$$

kde:  $N = N_T - N_p$ ,  $N$  je počet impulzov zaregistrovaný od vzorky za daný merací interval,

$N_p$  – počet impulzov zaregistrovaný od pozadia za daný merací interval,

$N_T$  – počet impulzov zaregistrovaný od vzorky a pozadia za daný merací interval.

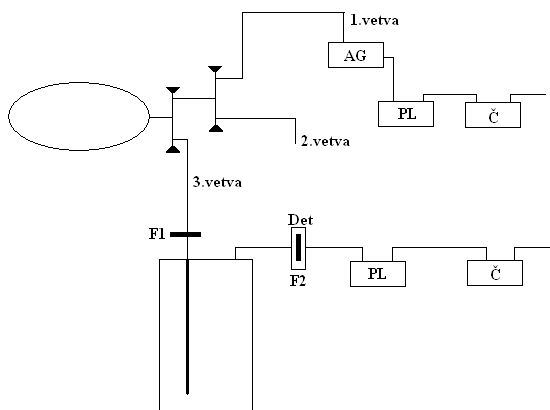
## 5.2 Kalibrácia detekčného systému

Na účel kalibrácie detekčného systému bol vytvorený radónový zásobník s celkovým objemom  $10 \text{ m}^3$ .

Zásobník sme začali naplňať 17.2.2011 o 13:30 čerpaním pôdneho vzduchu. Čerpanie z pôdy bolo uskutočňované do 18.2.2011 do 10:00. Za tú dobu sme do zásobníka naplnili  $3600 \text{ l}$  pôdneho vzduchu. Potom sme zásobník doplnili nízkoaktívnym vzduchom z laboratória 256 na objem  $5935 \text{ l}$ . Aktivitu radónu v zásobníku sme určili na základe bodových odberov. Kalibráciu detektora sme odštartovali 18.2.2011 o 13:29. Zapojenie detekčného systému je zobrazené na obrázku 2. V zapojení vidieť 3 vetvy. Prvá vetva slúžila na monitorovanie objemovej aktivity vzduchu, ktorý bol presávaný detekčným systémom.

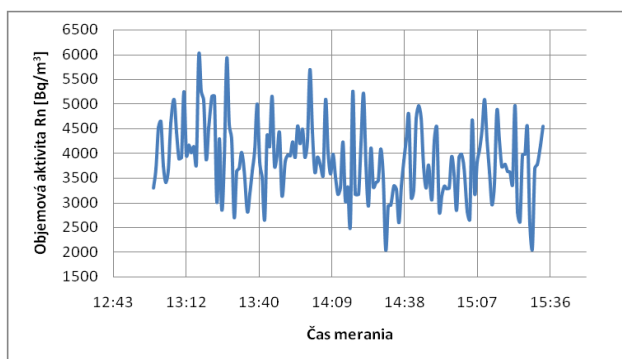
V tejto vetve sme pomocou monitoru radónu Alphaguard (AG) pracujúcom v prietokovom režime zaznamenávali kontinuálne každú minútu hodnotu objemovej aktivity radónu. Pomocou druhej vetvy sme počas kalibrácie uskutočňovali bodové odbery do Lucasových komôrok. Tieto odbery slúžili na kontrolu správnosti merania AG. Tretia vetva pozostávala zo samotného detekčného systému. Rýchlosť čerpania za detektorom sme nastavili na  $32 \text{ l/min}$ .

Po uplynutí 2 hodinového intervalu, sme radónový zásobník odpojili a na vstup detekčného systému sme pripojili vzduch z vonkajšej atmosféry. Počas nasledujúcich intervalov sme sledovali pokles zaregistrovaných impulzov.



Obrázok 2 Schéma zapojenia detekčného systému počas kalibrácie pomocou Wardovej metódy.

Na obrázku 3 je záznam priebehu objemovej aktivity radónu meranej pomocou AG. Z nameraných hodnôt sme potom určili priemernú hodnotu objemovej aktivity radónu v zásobníku na  $A=(3752,5 \pm 83,8) \text{ Bq/m}^3$ .



Obrázok 3 Záznam priebehu objemovej aktivity radónu v zásobníku meranej pomocou AG.

Priebežne sme uskutočňovali aj bodové odbery do scintilačných komôrok. Na základe týchto odberov sme určili priemernú objemovú aktivitu na  $A=(3590,9 \pm 192,7) \text{ Bq/m}^3$ . Táto nameraná hodnota je v dobrej zhode s aktivitou získanou na základe meraní pomocou AG.

Na základe nameraných početností so zahrnutím korekcií na pozadie detektora a na základe známej hodnoty aktivity radónu sme pomocou vzťahov (5), určili invertujúce koeficienty. Ich hodnoty sú uvedené v tabuľke 1.

Tabuľka 1 Vypočítané invertujúce koeficienty.

$i$	$N_i$	$\tau_i$	$\sigma(\tau_i)$
0	47707	0,078658	0,001793
1	29654	0,048892	0,002498
2	2713	-0,02592	0,001778
3	286	0,013801	0,001219
4	92	-0,00725	0,000807
5	55	0,003871	0,000526

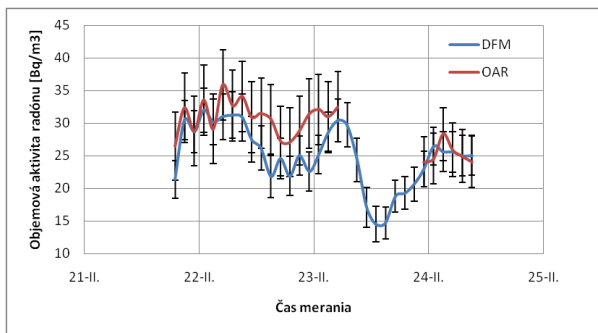
## 6. Meranie vo vnútornej atmosfére

Na odskúšanie správnosti kalibrácie, sme uskutočnili niekoľko meraní objemovej aktivity vo vnútornej atmosfére. Merania boli uskutočňované v dňoch 21.2. až 25.2.2011 kedy meranie bolo z technických príčin prerušené. Na otestovanie reakčnej schopnosti detektora na náhlu veľkú zmenu aktivity, sme 24.2.2011 k detekčnému systému pripojili radónový zásobník s pôdnym vzduchom.

Ako porovnávací monitor sme použili litrovú scintilačnú komoru a AlphaGuard.

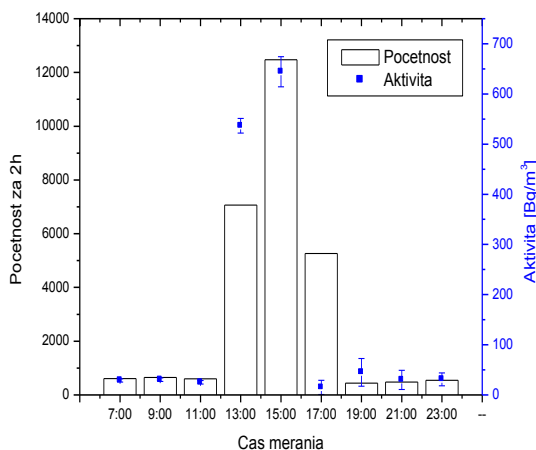
V období 21.2. až 24.2. sme pomocou detekčného systému sledovali priebeh objemovej aktivity radónu vo vnútornej atmosfére. Namerané hodnoty (DFM) sme porovnali s hodnotami získanými scintilačnou komorou (OAR). Porovnanie priebehov je na obrázku 5. Priebehy objemových aktivít sú podobné a namerané hodnoty sa v rámci neistoty  $1\sigma$  dobre zhodujú. Môžeme preto skonštatovať, že kalibrácia detekčného systému bola úspešná a náš detektor je použiteľný ako kontinuálny monitor objemovej aktivity radónu vo vnútornej atmosfére.

Na overenie reakčnej schopnosti detekčného systému, sme 24.2. o 12:00 napojili na vstup detektora radónový zásobník so známou hodnotou objemovej aktivity radónu. Objemová aktivita radónu bola  $A=(529,6 \pm 26,4) \text{ Bq/m}^3$ . Po štyroch hodinách sme zásobník odpojili a sledovali ďalej odozvu detektora.



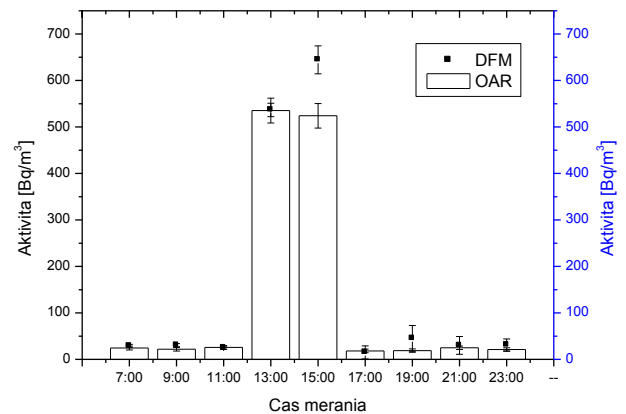
Obrázok 5 Porovnanie priebehov objemových aktivít radónu meraných rôznymi detektormi.

Na obrázku 6 je záznam nameraných impulzov a k nim vypočítané hodnoty objemovej aktivity radónu na základe kalibračných koeficientov. Vidíme, že počas šiesteho meracieho intervalu sme na základe vyšších nameraných početností vypočítali správnu objemovú aktivitu radónu.



Obrázok 6 Záznam nameraných početností a k nim vypočítané objemové aktivity radónu.

Na obrázku 7 je porovnanie objemových aktivít, ktoré sme určili na základe DFM, s objemovými aktivitami získané pomocou referenčných detektorov. Na základe tohto porovnania vidíme, že nami postavený detekčný systém dobre zareagoval na radónový pík, lebo až na jednu hodnotu sme dostali v rámci neistoty merania  $1\sigma$  rovnaké hodnoty OAR ako z ďalších monitorov radónu.



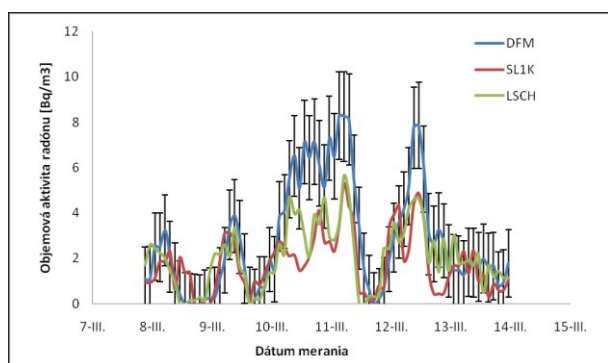
Obrázok 7 Porovnanie objemových aktivít radónu merané rôznymi detekčnými systémami.

## 7. Meranie vo vonkajšej atmosfére

V predchádzajúcej kapitole sme poukázali na to, že náš detekčný systém je vhodný na kontinuálne meranie objemovej aktivity radónu vo vnútornej atmosfére. Preto v ďalšej časti našej práce sme tiež zisťovali, či je detekčným systémom možné merať aktivity aj na úrovni  $1 \text{ Bq/m}^3$ . Na túto úlohu dobre poslúžilo meranie objemových aktivít vo vonkajšej atmosfére, ktoré sme uskutočnili v období od 8.3. do 14.3.2011.

Na základe nameraných početností sme pomocou kalibračných koeficientov, uvedených v tabuľke 1, vypočítali hodnotu objemovej aktivity radónu. Tieto hodnoty OAR sme potom porovnali s objemovými aktivitami, ktoré sa súbežne merali pomocou litrovej a veľkoobjemovej scintilačnej komory. Porovnanie nameraných hodnôt OAR uvedený je na obrázku 8.

Z obrázku 8 vidíme, že priebehy objemových aktivít radónu získané všetkými 3 detektormi sú v dobrej zhode. Ako vidíme, našim detekčným systémom sa nám podarilo namerať aj denné variácie, čo svedčí o dostatočnej rýchlosti reakcie systému na vonkajšiu zmenu. Vypočítané objemové aktivity sa líšia chybou menšou ako  $1\sigma$  oproti objemovým aktivitám získanými scintilačnými komorami.



Obrázok 8 Porovnanie objemových aktivít radónu vo vonkajšej atmosfére meranej pomocou DFM, litrovej scintilačnej (SL1K) a veľkoobjemovej (LSCH) komory.

### Záver

Cieľom tejto práce bolo experimentálne zdokonaľiť už existujúci detekčný systém na monitorovanie objemovej aktivity radónu na základe dvojfiltrovej metódy. Ako teoretické základy nám poslúžili práce [ŠEFČÍK, 2008] a [THOMAS, LeCLARE,1970]. Pomocou Wardovej kalibrácie sme určili invertujúce koeficienty. Funkčnosť detekčného systému sme odskúšali na meraniach vo vnútornej atmosfére a ukázali sme, že detekčný systém môže pracovať s dostatočnou citlivosťou aj v kontinuálnom režime, pričom výpočet OAR z nameraných početností impulzov je možné uskutočniť pomocou jednoduchých vzťahov (4). Na základe nameraných súborov dát z vonkajšej atmosféry sme ukázali, že detekčný systém je možné použiť aj na meranie nízky objemových aktivít radónu na úrovni  $1 \text{ Bq/m}^3$ .

### Použitá literatúra

[UNSCEAR, 2008] UNSCEAR, 2008. *Sources and effects of ionizing radiation*. [online]. New York: United Nations, 2010. p.4. Dostupnosť na internete: <[http://www.unscear.org/docs/reports/2008/09-86753\\_Report\\_2008\\_GA\\_Report.pdf](http://www.unscear.org/docs/reports/2008/09-86753_Report_2008_GA_Report.pdf)>. ISBN 978-92-1-142274-0.

[ŠÁRO, - TÖLGYESSY,1985] ŠÁRO, Š. – TÖLGYESSY, J. 1985. *Rádioaktivita prostredia*. Bratislava: Vydavateľstvo Alfa,1985.

[MÜLLEROVÁ, 2005] MÜLLEROVÁ, M. : *Komplexná radónová diagnostika uzatvorených priestorov* [diplomová práca]. Bratislava : FMFI UK, 2005. 94 p.

[WARD, - BORAK, 1991] WARD, D.C - BORAK, T.B. 1991. Determination of time-varying  $^{222}\text{Rn}$  concentrations using flow-through scintillation flasks. In: *Health Physics*. 1991, vol. 61, no. 6, p. 799-807.

[ŠEFČÍK, 2008] ŠEFČÍK, P. 2008. *Vývoj a testovanie detektora pre monitorovanie radónu dvojfiltrovou metódou* [diplomová práca]. Bratislava : FMFI UK, 2008. 75 s.

[THOMAS, - LeCLARE,1970] THOMAS, J.W. - LeCLARE P.C. 1970. A study of the two-filter method for radon-222. In *Health Physics*. 1970, vol.18, p.113-122.

# Read-out TPC komory s tripletom GEM

Pavel Vnučko\*

Školiteľ: Miroslav Pikna†

Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Vyvíjaná TPC komora s tripletom GEM predstavuje návrh na odstránenie určitých obmedzení starších typov komôr s proporcionálnym read-outom. V komore tohto typu je potrebné použiť nové čítanie vo forme stripov. Navrhnuté boli dve geometrie stripov, ktorých vlastnosti je potrebné dôkladne premerať.

**Kľúčové slová:** GEM, GEM triplet, TPC, chevron, stripy, pristorové rozlíšenie

## 1 Úvod

Jednou z oblastí, na ktorú sa v súčasnosti zameriava svetový výskum, je oblasť ťažkých iónov. Medzi najvýznamnejšie výskumné strediská patrí inštitút GSI v Darmstade.

V najbližších rokoch je plánované rozšírenie a zmodernizovanie zariadenia. Plánovaný projekt FAIR (Facility For Antiproton and Ion Research) by mal zahŕňať nové výkonnejšie urýchľovače SIS 100/300, niekoľko akumuláčnych a experimentálnych prstencov a taktiež nový fragment separátor Super-FRS. Vylepšenia oproti fungujúcim zariadeniam by mali byť hlavne v oblasti vyšších intenzít primárnych a sekundárnych zväzkov, zlepšenie prenosu fragmentov na experimentálne stanoviská a zvýšenie akceptancie fragmentov akumuláčnym prstencom.[1]

Nové experimentálne zariadenia a vyššie intenzity kladú tiež vyššie požiadavky na detekčné systémy. V súčasnosti využívané TPC komory používané v GSI nie sú konštruované na plánované intenzity. Preto je potrebné prísť s novým konceptom TPC komôr, ktoré budú spĺňať dané požiadavky. Jedným z návrhov je využitie plynových elektrónových multiplikátorov – GEM, ktoré by mali odstrániť niektoré z obmedzení súčasných TPC komôr.

## 2 TPC komory

Časovo projekčné komory sú polohovo citlivé ionizačné komory schopné precízneho merania

polohy preletu nabitej častice. Konštrukčne sa dajú rozdeliť na tri časti. Na driftovú časť, oblasť zosilnenia náboja a zber vytvoreného signálu.

Driftová časť predstavuje uzavretú nádobu s pracovným plynom umiestnenú v homogénnom elektrickom poli. Prechádzajúca častica v nej ionizuje pracovný plyn, čím vytvorí stopu kladných iónov a elektrónov. Tie v aplikovanom elektrickom poli driftujú opačnými smermi. Pre kvalitnú rekonštrukciu stopy častice musí byť zaistené uniformné a homogénne elektrické pole. Na tento účel je driftový priestor obklopený pole formujúcimi elektródami.

V ďalšej časti je vytvorený náboj zosilnený, keďže signál je príliš malý. Na zosilnenie slúžia procesy sekundárnej ionizácie a všeobecne je možné použiť niekoľko metód ako to dosiahnuť. Doteraz bol najčastejšie využívaný princíp proporcionálnych počítačov. Tie však v súčasnosti narážajú na svoje hranice a preto sa hľadajú alternatívne spôsoby zosilnenia.

Poslednú časť tvorí oblasť zberu signálu. Na tieto účely slúžia čítacie pady, ktorých tvar a geometria závisí od typu a účelu TPC komory. Každý je napojený na oneskorovacie vedenie, ktoré vedie signál oboma smermi. Na výstupe sú potom časové údaje z pravej a ľavej strany vedenia. Tieto časy zodpovedajú dobe driftu spolu s prechodom po oneskorovacom vedení. Nulový čas je určený triggerom, ktorý hovorí o vstupe častice do aktívnej oblasti detektora. Zo známej doby driftu, resp. zo známej dĺžky oneskorovacieho vedenia je potom možné určiť dvojrozmernú polohu preletu častice. Ak y označíme súradnicu častice v smere driftu, môžeme ju určiť vzťahom

$$y = v_d t_d - y_{off} \quad (1)$$

Člen  $v_d$  predstavuje rýchlosť driftu elektrónov,  $t_d$  predstavuje čas ich driftu a  $y_{off}$  je posun oproti nule určený kalibráciou.

Druhú so súradnic, označenú ako  $x$ , je vzhľadom na dostupné informácie možné určiť jedným z príslušných vzťahov

$$x = v_d (t_l - t_d) - x_{off} \quad (2)$$

\* pavel.vnucko@gmail.com

† miroslav.pikna@fmph.uniba.sk

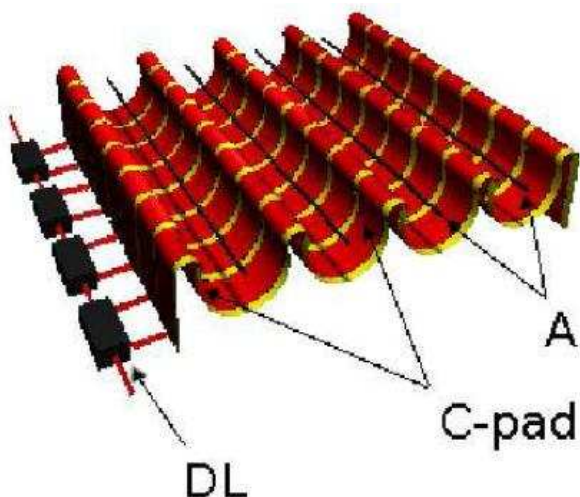
$$x = v_d(t_r - t_d) - x_{off} \quad (3)$$

$$x = \frac{v_d}{2}(t_l - t_r) - x_{off} \quad (4)$$

Člen  $t_r$  a  $t_l$  sú časy z pravej a ľavej strany oneskorovacieho vedenia a  $x_{off}$  je opäť koeficient určený z kalibrácie.

## 2.1 Komory s proporcionálnym read-out

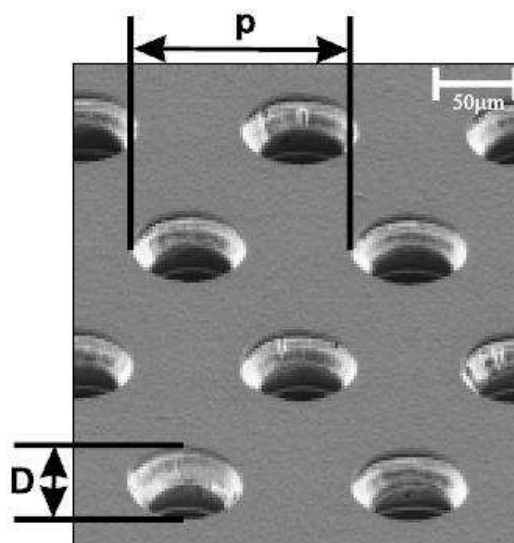
V prípade starších typov komôr s proporcionálnym read – outom je signál tvorený pohybom kladných iónov. Elektróny, ktoré predriftujú do okolia anódy, vytvoria elektrónovú lavínu, ktorá vzniká v blízkom okolí anódy. V nej vytvorené elektróny sú vychytané anódou. Kladné ióny vytvorené v tomto procese sú elektrickým poľom nútené k pohybu smerom od anódy. Vzhľadom na ich nižšiu pohyblivosť ostávajú v jej okolí výrazne dlhšie ako elektróny. Signál je na padoch vytvorený procesmi elektromagnetickej indukcie pri spätnom pohybe kladných iónov. Tie sa ďalej pohybujú späť do driftového priestoru detektora, kde narúšajú homogenitu elektrického poľa a môžu zachytávať signálne elektróny. Tento jav ovplyvňuje opakovaciu frekvenciu TPC komory. Možnosťou ako tento jav potlačiť a zvýšiť opakovaciu frekvenciu komory je použitie bránovacej mriežky. Jej úlohou je vychytenie kladných iónov. V TPC komorách vyvinutých na FMFI jej úlohu čiastočne preberá mriežka, ktorá oddeľuje driftový priestor od priestoru proporcionálneho zosilnenia.



Obrázok 1: Náčrt proporcionálnej časti TPC komôr s čítacími C-padmami

## 2.2 Komora s využitím GEM

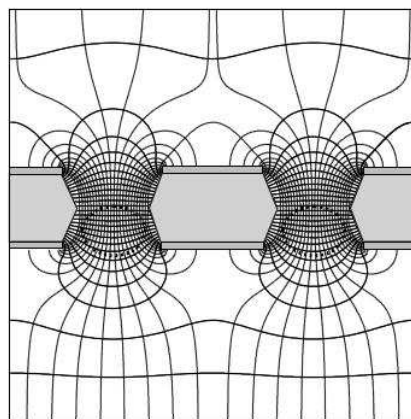
Pre novú generáciu experimentov s ťažkými iónmi je potrebné vylepšiť aj súčasné detekčné systémy.



Obrázok 2: Fotografia GEM fólie štandardnej geometrie [2]

Jednou z hlavných úloh plánovaných v GSI je zvýšenie intenzít primárnych a sekundárnych zväzkov. Preto je potrebné výrazne zlepšiť opakovaciu frekvenciu TPC komôr a upraviť tak komoru pre plánované intenzity. Jedným z možných riešení sa javí využitie konceptu GEM fólií namiesto proporcionálneho.

Plynový elektrónový multiplikátor GEM (Gas Electron Multiplier) predstavuje tenkú polymérovú fóliu pokovovanú z oboch strán. Fólie sú chemicky perforované veľkým množstvom dier. Štandardná geometria GEM má fóliu hrubú 50 μm pokovovanú z oboch strán 5 μm vrstvou medi. Diery sú od seba vzdialené 140 μm s priemerom dier 70 μm a dvojkužeľovitým tvarom [2]. Experimentuje sa však s rôznymi veľkosťami a tvarmi dier. Po naložení potenciálového rozdielu na vodivé platne GEMu sa v dierach a ich okolí vytvorí silné elektrické pole. To zaisťuje jednak prenos elektrónov cez diery a pri



Obrázok 3: Elektrické pole v diere GEM fólie a jej okolí [2]

vyšších intenzitách poľa vedie aj k násobeniu náboja. Pre jednu GEM fóliu môže zosilnenie dosiahnuť faktor 100 – 1000 v závislosti od použitého pracovného plynu a veľkosti aplikovaného poľa. Vysoké zosilnenia sa však neodporúčajú, keďže sa zvyšuje pravdepodobnosť vzniku výboja, čo vedie k nestabilite a poškodeniu systému. [2] Pre potrebné zosilnenie signálu je možné využiť viac GEM fólií zapojených za sebou. Procesy transportu a elektrónov a iónov cez GEM opisujú tri parametre. Transparentnosť, zosilnenie a účinnosť extrakcie. Ich opis a vlastnosti sú detailne opísané v [3].

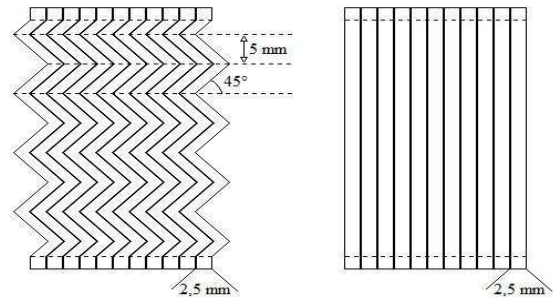
Výhodou použitia tohto systému je fakt, že branovanie je uskutočnené na každej z GEM fólií. Tvar elektrického poľa zabezpečí vychytenie veľkého počtu vytvorených kladných iónov. Využitie GEMov vedie tiež k tomu, že signál je tvorený len z elektrónov vystupujúcich z poslednej fólie. Takýmto spôsobom je odstránený vplyv kladných iónov a dĺžka signálu je výrazne skrátená. To tiež znamená, že nie je možné na zber signálu použiť pady, ktoré využívajú elektromagnetickú indukciu pri spätnom pohybe kladných iónov. Namiesto toho sú používané stripy, na ktorých je signál tvorený zberom elektrónov. V prípade čítania v proporcionálnych komôr pomocou C-padov, zasiahne vytvorený signál až tri tieto pady. To vedie k možnosti lepšieho určenia polohy pomocou metódy váhovania signálu z jednotlivých padov. Nevýhodou použitia GEM fólií v TPC komore je fakt, že signál je v tomto prípade zbieraný na jednom stripe. Po započítaní difúzie elektrónov sa jedná o zasiahnutie dvoch stripov na ich rozhraní, no aj v tomto prípade sa jedná o zhoršenie určenia polohy oproti starším komorám. Rozlíšenie je potom dané šírkou stripu vzťahom

$$\sigma = \frac{\text{šírka stripu}}{\sqrt{12}} \quad (5)$$

Na odstránenie tohto nedostatku bola navrhnutá ďalšia geometria čítacích stripov pre tento typ komory. Jedná sa o takzvanú chevronovú, alebo zig-zagovú geometriu. Tá je navrhnutá tak, aby bolo zasiahnutých vždy niekoľko stripov a mohlo byť využité váhovanie signálu pre lepšie určenie polohy preletu častice.

### 3 Simulácia geometrie čítacích stripov

Na preskúmanie vlastností dvoch navrhnutých usporiadaní stripov, bola vytvorená simulácia v ROOTe. Pre väčšiu variabilitu a lepšie pochopenie možných efektov sú viaceré parametre



Obrázok 4. : Náčrt geometrie použitých stripov vo vyvíjanej komore GEM TPC. Vľavo chevronové usporiadanie, vpravo rovné stripy.

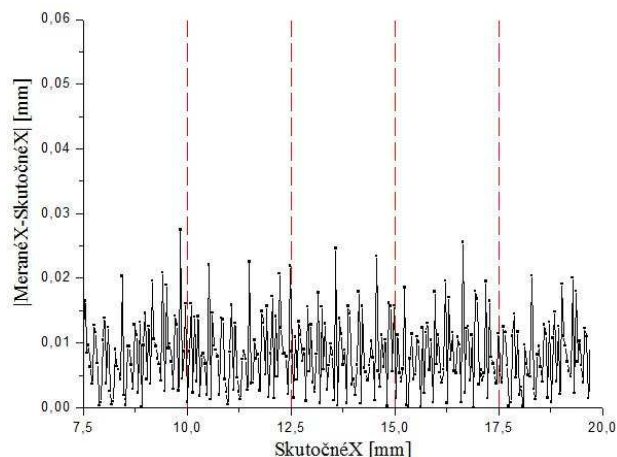
meniteľné. Úlohou programu je simulovať koľko a akým spôsobom sú zasiahnuté stripy chevronovej resp. priamej geometrie čítacích stripov driftujúcimi elektrónmi vytvorenými pri prechode detekovanej častice. Zo signálu na stripoch je určená poloha zväzku metódou váhovania a porovnaná so skutočnou polohou preletu častice. Program nezapočítava vplyv elektroniky na signál, či efekty na oneskorovacom vedení, takže hovorí len o vplyve geometrie na zber signálu. Samostatnými simuláciami pre chevronovú a priamu geometriu je možné ich porovnať.

Program obsahuje 9 stripov chevronovej, resp. priamej geometrie s meniteľnou hrúbkou, čo pre účely tejto simulácie postačuje. Poloha zväzku je zadávaná počiatočným a konečným bodom, čiže je možné analyzovať aj zväzky letiace pod istým uhlom, nie len rovnobežne so stripmi. Z geometrického hľadiska sa však jedná len o rozšírenie signálu na viacero stripov. V reálnych komorách sú tiež častice letiace pod väčším uhlom zle definované a nastupujú iné efekty spojené so zberom náboja. Z týchto dôvodov tento prípad nie je až taký zaujímavý. Pozdĺž takto zadanej priamky sú generované body, predstavujúce elektróny driftujúce z poslednej GEM fólie smerom k čítacím stripom. Generované sú gausovským rozdelením s meniteľným rozptylom na simulovanie difúzie elektrónov. Počet vygenerovaných bodov je taktiež meniteľný. Vzhľadom na výstup komory vo forme GEM fólií sú centrá generovaných elektrónov od seba vzdialené pravidelne každých 140 μm, ako pri fóliách použitých vo vyvíjanej TPC komore. Podľa toho, v ktorej oblasti je vygenerovaný elektrón, je v zodpovedajúcom stripe zvýšený počet zaznamenaných bodov.

Výstupnou informáciou simulácie sú počty zaznamenaných bodov v jednotlivých stripoch a reálny prelet častice. V ďalšej fáze je metódou váhovania z týchto údajov určená poloha preletu častice a porovnaná so zadanou, čiže skutočnou polohou preletu.

V prvej simulácii sme porovnali počet zasiahnutých stripov v rôznych bodoch preletu častice. Chevronová geometria je navrhnutá takým

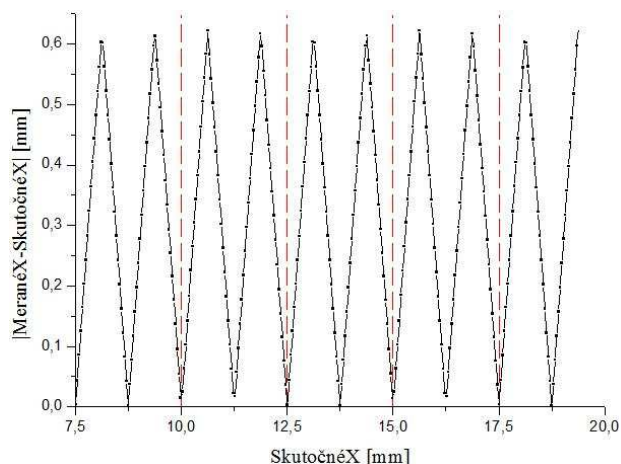




Obrázok 5: Absolútna hodnota rozdielu meranej a skutočnej polohy preletu častice pre chevronovú geometriu čítacích stripov bez difúzie

spôsobom, aby aj pri nulovej difúzií boli zasiahnuté vždy viaceré stripy. V reálnom prípade však dochádza k istej nezanedbateľnej difúzií elektrónov. Tá je pre plynovú zmes Ar 90% + CH<sub>4</sub> 10%, používanú v GEM – TPC komore a pre dĺžku driftu približne 4 cm na úrovni  $\sigma = 1,1$  mm. Reálne môže difúzia driftujúcich elektrónov byť väčšia, keďže v prípade GEM – TPC sa elektróny pohybujú pomedzi GEM diery. Podľa očakávania sú v prípade chevronovej geometrie bez difúzie zasiahnuté dva až tri stripy, takže v tomto prípade je možné využiť váhovanie na určenie polohy stopy častice. V prípade rovných stripov je pri minimálnej difúzií vždy zasiahnutý iba jeden strip. Pri započítaní difúzie sa pre okrajové polohy zvýši počet zasiahnutých stripov o jeden pre obe geometrie.

Na ohodnotenie presnosti určenia polohy častice pri týchto geometriách slúžila simulácia, v ktorej bolo simulovaných celkovo 5000 prelietajúcich častíc. Poloha ich preletu sa posúvala z počiatočnej

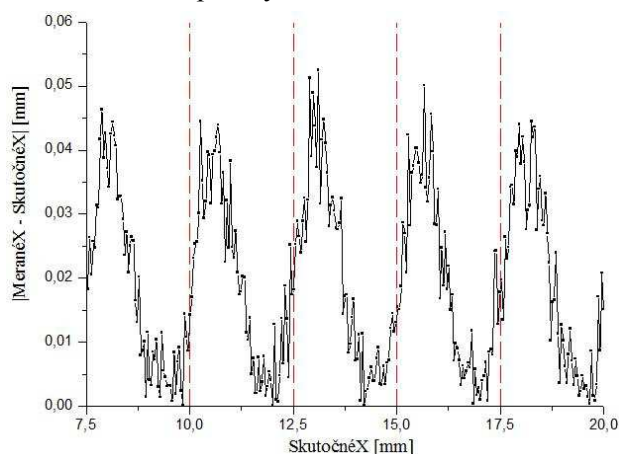


Obrázok 6: Absolútna hodnota rozdielu meranej a skutočnej polohy preletu častice pre rovnú geometriu čítacích stripov s difúziou

polohy 7,5 mm (ľavý okraj tretieho stripu) po 20 mm (pravý okraj siedmeho stripu) v 0,0025 mm dlhých krokoch. Takto simulované stopy prešli postupne cez 5 stripov. Pre každú takto prejdenú časticu bol určený rozdiel medzi skutočnou polohou a polohou určenou váhovaním zasiahnutých stripov.

Prvým prípadom boli simulácie bez difúzie. Na obrázku 5 je zobrazený rozdiel reálnej a nameranej polohy v závislosti od skutočného miesta preletu pre chevronovú geometriu. Naznačené sú aj hranice jednotlivých stripov. Simulácia jasne ukazuje výhody chevronovej geometrie. V prípade rovnej geometrie je vždy zasiahnutý len jeden strip. Rozdiel medzi vypočítanou a skutočnou polohou dosahuje minimum len v strede stripu, keďže meraná hodnota je pre celú šírku stripu rovná práve stredu stripu. Výsledky pre chevronovú geometriu sú tiež podľa očakávania. V tomto prípade sú zasiahnuté väčšinou tri stripy a polohu je možné určiť váhovaním. Na okrajoch stripov sú zasiahnuté síce len dva stripy, medzi ktorými prechádza častica, no to presnosť určenia polohy výraznejšie neovplyvňuje. To dokazuje aj výsledok simulácie (Obrázok 5), kde pre celú šírku stripu je presnosť určenia polohy na rovnakej úrovni.

Zaujímavším je už reálny prípad s predpokladanou difúziou 1,1 mm. V prípade rovných stripov dochádza k výraznému zlepšeniu určenia polohy (Obrázok 6). Bližšia analýza ukazuje, že vzhľadom na šírku difúzie je len v úzkej oblasti stredu stripu zasiahnutý jediný strip. Keďže skutočná poloha častice sa v tomto prípade nachádza v okolí stredu stripu, klesá rozdiel nameraného a reálneho smerom do stredu stripu. Ďalej k rozhraniu už sú zasiahnuté dva stripy a nastáva váhovanie signálu, čím sa opäť určenie polohy zlepšuje. Tento fakt vysvetľuje výsledný obrázok pre rovné stripy. Zaujímavým je prípad chevronovej geometrie, pre ktorú sa započítaním difúzie určenie polohy mierne zhorší. Obrázok tiež



Obrázok 7: Absolútna hodnota rozdielu meranej a skutočnej polohy preletu častice pre chevronovú geometriu čítacích stripov s difúziou

jasne naznačuje istú štruktúru. Určenie polohy je však o rád lepšia ako v prípade rovných stripov.

Výsledky simulácií ukazujú výhody chevronového usporiadania oproti rovným stripom. Zaujímavým výsledkom bol fakt, že pri započítaní difúzie sa rozlíšenie rovnej geometrie zlepšilo, zatiaľ čo rozlíšenie chevronovej geometrie sa zhoršilo. Napriek tomu vykazovala druhá spomenutá geometria v oboch prípadoch výrazne lepšie výsledky. Pre prípad s predpokladanou difúziou bolo určenie polohy zväzku dokonca o rád vyššie v prípade chevronov. Z geometrického hľadiska sa teda jednoznačne ukazuje byť výhodnejšie použiť chevronovú geometriu.

V reálnom meraní je však geometria čítacích stripov len jedným z vplyvov, ktoré vstupujú do priestorového rozlíšenia detektora. Ďalšie vplyvy sú napríklad linearita oneskorovacieho vedenia, či parametre TDC. Tie sa však nemenia a ich príspevok je pre obe geometrie čítacích stripov rovnaký. V prípade chevronovej geometrie môžu navyše nastať rôzne kapacitné efekty spôsobené uvedenou geometriou.

## 4 Priame meranie vlastností

Na korektné ohodnotenie priestorového rozlíšenia komory je potrebné priame meranie. Na to je potrebné zabezpečiť úzky, dostatočne intenzívny zväzok ionizujúcich častíc.

Využiť na tieto účely alfa žiarič sa nejaví ako možné riešenie. Alfa častice s energiou na úrovni 5 MeV sa totiž nedostanú cez mylarové okienko komory. Aby boli pre takéto meranie použiteľné, musel by byť žiarič umiestnený do aktívneho objemu komory, čo vedie k ďalším komplikáciám. Aj merania s beta žiaričom sa ukázali ako nepraktické pre tieto účely. Elektróny v aktívnom objeme podliehajú viacnásobnému rozptylu a teda dráhu „pôvodného“ elektrónu nie je možné určiť jednoznačne. Pri použití gama zdroja vyššie uvedené problémy nenastávajú. Dráha je jednoznačne daná a použitím vhodného kolimátora je možné vytvoriť zväzok požadovaných parametrov. Problém však nastáva s intenzitou dostupných zdrojov. Ďalší problém je v tom, že detektor je konštruovaný na silne ionizujúce častice. Dôležité pri takýchto meraniach je, aby pozdĺž dráhy častice bolo vytvorených dostatočne množstvo elektrón – iónových párov. V prípade gama zdrojov môže pre tieto kritéria nastať problém. Po uvážení všetkých faktorov a požiadaviek sa ako najvýhodnejšie javí využitie röntgenového, alebo laserového zväzku.

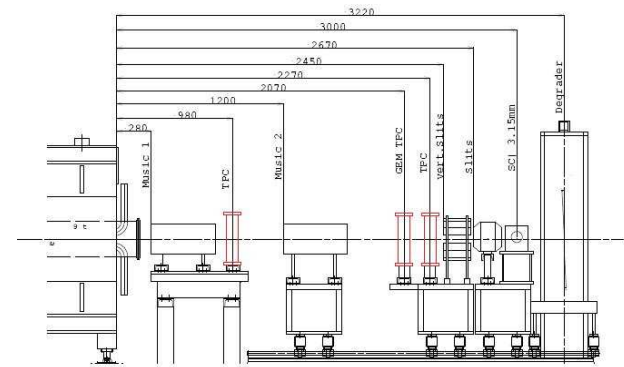
Poslednou možnosťou je absolvovať merania priamo na zväzku ťažkých iónov dodávaných z urýchľovača, na ktorý je detektor konštruovaný.

## 5 Meranie v GSI

Koncom septembra 2010 sa naskytila možnosť merania v GSI Darmstadt. Vyvíjanú komoru sme mohli pripojiť k experimentu skupiny RISING. Jednalo sa tiež o parazitný zväzok, takže čas a možnosti výrazne ovplyvňovať parametre zväzku boli značne obmedzené. Hlavnou úlohou merania bolo overenie funkčnosti TPC komory s tripletom GEM v reálnych podmienkach ako aj jeho spoľahlivosť a stabilitu počas dlhodobého merania. Podľa možností bolo tiež cieľom určiť priestorové rozlíšenie komory a jej účinnosť.

### 5.1 Usporiadanie experimentu

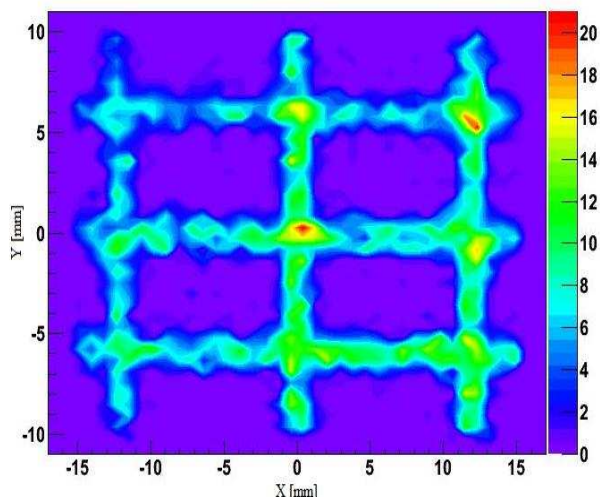
Usporiadanie experimentu je zobrazené na obrázku. Pre naše účely sú zaujímavé dve TPC komory staršieho typu s proporcionálnym výstupom označené ako TPC 5 a TPC 6 a vyvíjanú GEM-TPC. Komory 5 a 6 slúžili v experimente na určenie polohy zväzku a dávali tiež informáciu o počte častíc dodaných s urýchľovača. Zväzok bol dodávaný niekoľko hodín denne počas štyroch dní od 20.9. po 23.9 hlavne vo večerných a nočných hodinách. Primárne boli urýchľované ióny  $^{64}\text{Ni}$  pričom profil a parametre zväzku sa zo dňa na deň menili podľa potrieb druhej skupiny. Energia častíc bola na úrovni 550MeV/u a intenzity 4000 častíc na spill.



Obr. Usporiadanie experimentu v GSI Darmstadt. Pre naše účely sú dôležité označené TPC komory. Zľava TPC 5, GEM – TPC a TPC 6.

### 5.2 Kalibrácia komôr

Kalibrácia komôr bola vykonaná metódou využívanou v GSI. Založená je na využití scintilačných masiek. Tie predstavujú 1mm hrubé scintilátory usporiadané do mriežky známych rozmerov. Táto maska je mechanicky posunutá pred okienko TPC komory tak, aby stred mriežky bol v strede okienka. Zapojením fotonásobičov do koincidencie s hlavným triggerom nastane výber len tých eventov, ktoré prechádzajú cez scintilátor. Namerané spektrum potom obsahuje píky



Obrázok 5. : Spektrum namerané GEM – TPC použitím scintilačnej masky.

v miestach scintilačnej masky známych rozmerov. Z tohto spektra sa potom určí faktor a posun na prevod kanálov na milimetre.

### 5.3 Výsledky meraní

Výsledky jednotlivých meraní preukázali funkčnosť a stabilitu novej GEM – TPC. Počas štyroch dní pracovala bez problémov a výpadkov. Porovnaním profilov zväzkov nameraných TPC 5 a 6 a GEM – TPC v jednotlivých dňoch taktiež neboli objavené žiadne výrazné rozdiely, ktoré by naznačovali zlyhanie komory. Účinnosť sme určili porovnaním počtu zaznamenaných častíc v jednotlivých komorách. V tabuľke sú uvedené tieto hodnoty pre všetky komory v každom meraní. Výsledky ukazujú, že účinnosť vyvíjanej komory je v tomto experimente na rovnakej úrovni, ako účinnosť používaných komôr.

Exaktné určenie priestorového rozlíšenia komory vzhľadom na usporiadanie experimentu nebolo možné. Polohu preletu častíc boli totiž určované len dvoma TPC komorami. Priestorové rozlíšenie týchto komôr v x-ovom smere je pritom na úrovni 200 – 300  $\mu\text{m}$ . Presnú hodnotu priestorového rozlíšenia je komplikované udať, keďže závisí aj od parametrov zväzku. Najlepšie sú definované častice letiace kolmo na okienko detektora a pre tieto je aj priestorové rozlíšenie najlepšie. Z tohto dôvodu je už samotné určenie stopy častice opatrené chybou na úrovni 200 – 300

Tabuľka 1. : Počet zaznamenaných častíc v jednotlivých TPC komorách pre jednotlivé merania.

$\mu\text{m}$ . Jedinou informáciou o priestorovom rozlíšení

	TPC 5	GEM-TPC	TPC 6
20.9.	772815	774518	774578
21.9.	793019	793063	793401
22.9.	494027	497892	496847
23.9.	1146169	1175065	1149223

GEM - TPC je teda porovnanie polohy určenej komorami TPC 5 a TPC 6 s polohou nameranou GEM – TPC. Preto sme sa pri vyhodnocovaní dát opierali o hodnotu rozdielu polôh určených TPC 5 a TPC 6 a nameranej polohy z GEM – TPC.

Merania v GSI boli začaté so chevronovou geometriou čítacích stripov. Po dvoch dňoch nám bol umožnený prístup ku komore, takže bolo možné vymeniť ju za rovné stripy. Profil a veľkosť zväzkov sa však v priebehu dní menil, takže jednotlivé merania nie sú rovnocenné. Z tohto dôvodu sme pre jednotlivé merania robili výrezy z nameraných dát. Jednalo sa o zobrazenie len tých stôp častíc, ktoré boli v TPC 5 a TPC 6 vzdialené od stredu zväzku najviac 2,5 mm, resp. 1,5 mm. Takýmto spôsobom sme získali zväzky šírky 5 mm, resp. 3 mm, v ktorých bol opäť určený rozdiel nameranej polohy GEM – TPC a polohy určenej TPC 5 a TPC 6. Výrez 3 mm predstavoval najnižšiu možnú hodnotu, pri ktorej bola dostatočná štatistika zaznamenaných častíc pre všetky dni merania. Najvýznamnejšie výsledky sú zobrazené v tabuľke. V tabuľke je tiež udaný RMS pre celý zväzok v danom dni merania.

Namerané dáta naznačujú, že určenie polohy častice je v prípade rovných stripov lepšie ako pri použití navrhutej chevronovej geometrie. Tento výsledok je však ovplyvnený niekoľkými závažnými faktami. Jednak priestorové rozlíšenie

Tabuľka 2: Namerané hodnoty pre rozdiel polohy častice nameranej určenej TPC 5 a TPC 6 a polohy určenej GEM – TPC. Tiež udané sú RMS zväzkov pre jednotlivé merania

Deň	RMS [mm]	5mm [mm]	3mm [mm]
20.9.	15,27	0,315	0,295
21.9.	6,05	0,272	0,223
22.9.	4,25	0,206	0,171
23.9.	1,42	0,139	0,128

všetkých použitých detektorov je do istej miery závislé na uhle preletu častíc a teda parametroch zväzku. To potvrdzujú aj výber z dát pre jednotlivé merania. Z tabuľky je viditeľné, že pre rovnaké výrezy zväzkov, hodnoty rozdielu nameranej polohy GEM – TPC a polohy určenej TPC 5 a TPC 6 klesajú s celkovým profilom zväzku. Keďže parametre zväzku boli výrazne lepšie v prípade meraní s rovnou geometriou stripov, môže to byť jedným z dôvodov lepšieho určenia polohy v prípade rovnej geometrie stripov. Ďalej sa jedná o fakt, že poloha zväzku bola určená len dvoma TPC komorami s priestorovým rozlíšením rádovo na úrovni skúmanej komory. Pre lepšie určenie stopy častice by preto bolo potrebné použiť väčšie množstvo komôr, alebo detektory s priestorovým rozlíšením výrazne lepším, ako v prípade GEM - TPC. Vzhľadom na usporiadanie a možnosti experimentu toto nebolo možné zaistiť.

## 6 Záver

Použitím nového konceptu GEM fólií vo vyvíjaných TPC komorách je potrebné použiť aj iný druh čítania signálu. Navrhnuté sú pritom dve možnosti a to rovné stripy a chevronová geometria. Na preskúmanie vlastností oboch usporiadaní bola vytvorená simulácia, ktorá mala za úlohu ukázať ich správanie v prípade bez prítomnosti difúzie elektrónov a s ňou. Výsledky sa pritom zhodujú s teoretickým predpokladom. Chevronová geometria mala výraznejšie lepšie určenie polohy častice, aj keď v prípade so započítanou difúziou sa jej vlastnosti porovnaním s prípadom bez difúzie o niečo zhoršili. V oboch prípadoch sa však jednalo o približne rád lepšie výsledky ako v prípade rovného usporiadania. Simulácia však nezapočítava vplyvy, ktoré môžu zhoršiť vlastnosti chevronových stripov. Môže sa jednať o rôzne kapacitné efekty spôsobené geometriou. Z tohto hľadiska je potrebné čítacie stripy ešte overiť.

Reálne meranie uskutočnené v GSI preukázalo funkčnosť TPC komory s GEM tripletom ako celku. Počas štyroch dní neboli zaznamenané žiadne problémy a účinnosť detekcie častíc sa ukázala byť na úrovni používaných typov. Presné ohodnotenie priestorového rozlíšenia však vzhľadom na podmienky nebolo možné. Namerané hodnoty jednoznačne nepreukázali lepšie vlastnosti chevronovej geometrie. Dokonca s rovnou geometriou boli namerané lepšie hodnoty určenia polohy lepšie.

Vzhľadom na to, že v rámci možností experimentu nebolo možné presné ohodnotenie vlastností čítacích systémov a priestorového rozlíšenia novej TPC komory, je potrebné v tejto oblasti ďalšie meranie. Jednou z možností je využiť laserový zväzok, pokiaľ to bude v rámci možností na FMFI možné. Alternatívou je meranie priamo na zväzku z urýchľovača, no experimentálne usporiadanie musí byť navrhnuté špeciálne pre tieto účely. V súčasnosti sú už tiež pripravené podmienky pre merania s plynovou zmesou Ar + CO<sub>2</sub>. Použitie tejto plynovej zmesi by malo viesť k vyššiemu možnému plynovému zosilneniu a k vyšším driftovým rýchlostiam elektrónov.

## References

- [1] H. Geissel a kol., *The Super-FRS Project at GSI*, 2003.
- [2] S. Kappler a kol., *Aging Measurements with the Gas Electron Multiplier (GEM)*, Aging Phenomena in Gaseous Detectors (DESY, Oct. 2001), submitted to ELSEVIER PREPRINT, dostupné na internete <[http://wwwcompass.cern.ch/compass/detector/gem/publications/altunbas\\_desy2001.pdf](http://wwwcompass.cern.ch/compass/detector/gem/publications/altunbas_desy2001.pdf)>

- [3] L. Hallermann, *Analysis of GEM Properties and Development of a GEM Support Structure for the ILD Time Projection Chamber.*, Dizertačné práca, (2010), str. 39 – 45.
- [4] M. Ball, *Methods and Results for Calibration and Track Separation of a GEM based TPC using an UV-Laser.*, Dizertačné práca, (2008).
- [5] A. Procházka, *Charakteristika TPC komôr na FRS v GSI Darmstadt.*, Diplomová práca, (2006).

# Rádionuklidy v atmosférických zrážkach

Lívia Brestáková  
Školiteľ: Ivan Sýkora

Katedra jadrovej fyziky a biofyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Úvod

Na KJFB FMFI UK sa rádioaktivita atmosféry sleduje dlhodobo a pravidelne, od r.2004 zahŕňa aj sledovanie rádioaktivity zrážok. Tento príspevok prináša výsledky z meraní zrážok za rok 2010 a začiatok roka 2011.

Merania rádioaktivity atmosféry sa vykonávajú na celom svete, veľký význam majú najmä dlhodobé kontinuálne pozorovania. Rádioaktivitu atmosféry môžeme ohodnotiť pomocou presávania vzduchu cez filtre v rôznych nadmorských výškach a odoberaním atmosférických zrážok. Atmosféra je plynný obal Zeme. Skladá sa prevažne z plynov, ale jej súčasťou sú aj aerosoly. Do atmosféry sa dostávajú aj rádionuklidy, v plynenej podobe (molekulárne usporiadanie) alebo zachytené na aerosoloch a prachových časticiach. Podľa pôvodu ich rozdeľujeme na prirodzené, kozmogénne a antropogénne. Najčastejšie monitorované rádionuklidy v prízemnej vrstve atmosféry pomocou gamaspektrometrie sú: kozmogénny izotop  $^7\text{Be}$ , prirodzený  $^{40}\text{K}$  a  $^{210}\text{Pb}$ , a antropogénny  $^{137}\text{Cs}$ .

## Odber a meranie vzoriek

Zrážky sa odoberajú do zbernej nádoby umiestnenej na streche Fakulty matematiky, fyziky a informatiky. Nad zbernou nádobou je plocha o veľkosti 1x1 m, z ktorej napršaná voda steká do nádoby. Zbieraná voda sa odlieva každý deň, v prípade väčších úhrnov zrážok aj viackrát. Po odobraní je dažďová voda odparovaná bez ohrievania (ofukovaním povrchu teplým vzduchom). Voda sa odparuje na polyetylénovom nosiči, ktorý sa potom zlisuje a takto pripravená vzorka je meraná v nízkopozad'ovom gamaspektroskopickom laboratóriu, na detektore uloženom v tieniacom kryte. Vzorky sú následne spracovávané spaľovaním pri teplote do 400°C. Aby sme ohodnotili možné straty pri takomto procese spracovania, vzorky sme najprv upravili len zlisovaním. Zlisované vzorky sme na detektor položili najprv z jednej strany a následne z druhej strany kvôli určeniu homogénneho rozloženia

aktivity na polyetylénovom nosiči. Po zmeraní oboch strán sme zlisovanú vzorku spálili a uzavreli do plexisklového nosiča. Takto pripravená vzorka sa opäť zmerala na polovodičovom detektore.

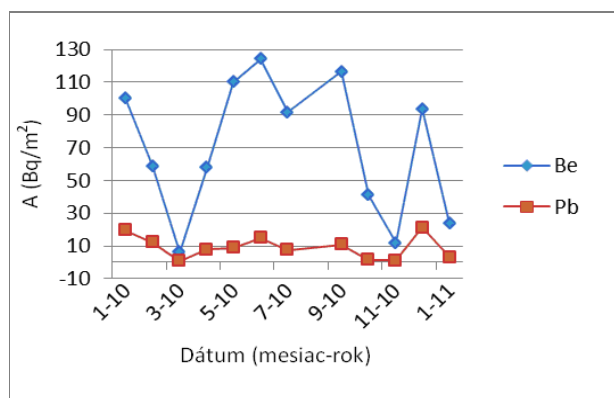
## Výsledky

Pre získanie štatisticky významných výsledkov, ktoré umožnia ohodnotiť možné straty pri spaľovaní vzoriek je potrebné získať čo najväčšie množstvo výsledkov. Doteraz realizované merania ešte neumožňujú finálne závery. Predbežné výsledky z porovnania lisovaných a spálených vzoriek naznačujú možné straty.

Na obr. 1 sú graficky zobrazené namerané hodnoty v zlisovaných vzorkách zrážok  $^{210}\text{Pb}$  a  $^7\text{Be}$ .

## Záver

Príspevok prináša predbežné výsledky z meraní rádioaktivity atmosférických zrážok za rok 2010 a hodnotí korekcie na straty pri spaľovaní vzoriek na limitovanom súbore dát.



Graf 1 Namerané hodnoty v zlisovaných vzorkách zrážok  $^{210}\text{Pb}$  a  $^7\text{Be}$

## Použitá literatúra

- [1] H. W. Feely, R. J. Larsen, C. G. Sanderson, Factors That Cause Seasonal Variations in Beryllium-7 Concentrations in Surface Air, *J. Environ. Radioactivity*, 9 (1989)
- [2] D. Korčák, Rádionuklidy v atmosfére, Rigorózna práca, 2006

# Štúdium charakteristík miónovej zložky sekundárneho kozmického žiarenia v blízkosti zemského povrchu

Alexander Szabó\*

Školiteľ: Ivan Sýkora†

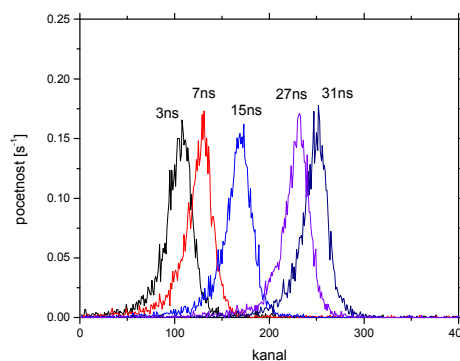
Katedra jadrovej fyzika a biofyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Kozmické žiarenie ako tok prevažne kladne nabitých relativistických častíc prilietavajúcich na Zem z okolitého priestoru podáva informáciu o pôvode a zložení slnečnej sústavy a galaxií.

Častice pochádzajúce primárne z kozmického žiarenia ako aj častice vznikajúce v interakciách v atmosfére tvoria podstatnú časť pozadia pri monitorovaní nízkych rádioaktivít látok v prírode. V dôsledku interakcií primárneho žiarenia v atmosfére (spršky) iba veľmi malá časť tohto žiarenia preniká neporušená k povrchu Zeme, preto je dôležité sa zamerať na sekundárnu zložku. Tesne nad povrchom Zeme resp. na úrovni hladiny mora je sekundárna zložka tvorená z najväčšej časti  $\mu$  - mezónmi (miónami) potom nasleduje elektromagnetická časť pozostávajúca z  $e^- - e^+$  párov a  $\gamma$  - žiarenia a nakoniec početne málo zastúpená hadrónová časť [1], [2].

Z hľadiska experimentov nízkych aktivít je poznanie správania toku miónov dôležité, hoci napriek ich krátkemu životu (2,2  $\mu$ s) by nemali byť pozorovateľné pri povrchu Zeme (vznikajú vo výške zhruba 13 km), ale v dôsledku ich relativistického charakteru dokážu preniknúť do hĺbky približne 7000 m vodného ekvivalentu. Tento fakt hrá dôležitú úlohu pri výstavbe nízkopozadových detektorov [3].

Práca sa zaoberá štúdiom toku miónov ako aj ich uhlovým rozdelením v azimutálnom a zenitárnom smere. Tok kozmických miónov sa meral za pomoci dvojice plastických scintilátorov, ktoré umožnili vymedziť požadovaný priestorový uhol. Bolo potrebné realizovať merania homogénnosti odozvy týchto detektorov s využitím kolimovaného zväzku  $\gamma$ -žiarenia. Taktiež bolo potrebné realizovať časovú kalibráciu spektrometra, pričom časové rozlíšenie sa pohybovalo na úrovni 5 ns.



Obr. 1 Časová kalibrácia spektrometra

Získané charakteristiky uhlového rozdelenia toku kozmických miónov bude možné využiť pri spresnení počítačového modelovania nízkopozadových tieniacich krytov používaných v gamaspektrometrickom laboratóriu KJFB FMFI UK.

## Literatúra

- [1] L. Biermann. *Origin and propagation of cosmic rays*. Annu. Rev. Nucl. Sci. 1953.2:335-364
- [2] K. Greisen. *Cosmic rays showers*. Annu. Rev. Nucl. Sci. 1960.10:63-108
- [3] J. A. Formaggio and C.J. Martoff. *Background to sensitive experiments underground*. Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 2004. 54:361-412

\*aszab23@gmail.com

†sykora@fmph.uniba.sk

# Modelovanie kryštálov

Stanislav Fecko\*

Školiteľ: Marián Fecko†

Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

**Abstrakt:** V práci sa opisuje spôsob, akým sa dajú hľadať a kresliť kryštály s kubickou grupou symetrie. V prvej časti opisujeme program, ktorý hľadá orbity, v druhej tieto orbity využívame na modelovanie kryštálov.

*Kľúčové slová:* grupa, orbita, kryštály, modelovanie

## 1 Úvod

Mojou snahou bolo vytvoriť program, ktorý by generoval modely kryštálov s *kubickou* symetriou, čiže so symetriou kocky. Ukazuje sa, že takýchto kryštálov existuje niekoľko základných typov, ktoré sa volajú *jednoduché tvary* (angl. *forms*) a všeobecný kryštál (tzv. *spojka*) je ich 'zmesou'. Takže prvým cieľom bude zistiť, ako pre danú symetriu vyzerajú tieto jednoduché tvary. V tom nám môže pomôcť teória grúp a ich pôsobení na množine. Naozaj, podľa štandardnej učebnice [Phillips, 1963] je jednoduchý tvar "súbor všetkých stien, ktoré musí kryštál obsahovať, aby zachoval symetriu, ak je jedna stena zadaná". Z pohľadu grúp [Sternberg, 1994] pre nás steny kryštálu tvoria množinu, na ktorej pôsobí grupa symetrie. Jednoduchý tvar je potom práve *orbitou* tohoto pôsobenia. Hľadanie jednoduchých tvarov sa tým redukuje na hľadanie orbít pôsobenia grupy symetrií na stenách kryštálu.

Nájdenie všetkých týchto orbít pri konkrétnom pôsobení grupy iba pomocou intuície nemusí byť ľahká úloha. Avšak s pomocou počítača sa to dá urobiť systematicky a pomerne rýchlo. Na tento účel som si vytvoril prvý program. Druhý program potom rieši modelovanie a zobrazovanie výsledných kryštálov (čístých tvarov aj spojok).

## 2 Grupa symetrie kocky

Hľadáme zobrazenia, ktoré zobrazia kocku na seba. To znamená že vrcholy sa zobrazia do vrcholov, hrany do hrán a steny do stien. Takúto vlastnosť majú iba

afinné zobrazenia. Keďže ale chceme zobrazit' doslova "kocku samu na seba", posunutie a ani škálovanie nie sú prípustné manipulácie (ako výsledok posunutia by sme síce dostali rovnakú kocku, ale inde; zmenou veľkosti tiež zjavne nedostaneme pôvodnú kocku). Prvé obmedzenie spomedzi afinných zobrazení spĺňajú iba lineárne zobrazenia. Druhé obmedzenie spomedzi lineárnych vyčlení iba ortogonálne transformácie.

Vezmime si teda jednu takúto kocku (s vrcholmi  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ ). Uvažujme zobrazenia

$$(x, y, z) \mapsto (u, v, w),$$

kde  $u, v, w$  sú permutované prvky  $\pm x, \pm y, \pm z$ . Dá sa nahliadnuť, že tieto zobrazenia zachovávajú kocku a zároveň že sú to práve všetky zobrazenia s danou vlastnosťou. Koľko ich je? Pri výbere  $\pm$  máme  $2^3 = 8$  možností, permutácií troch prvkov je 6, preto všetkých zobrazení (a teda počet prvkov grupy symetrií) bude 48. Grupu označujeme  $O_h$  (od slova octaheder, lebo sa ukazuje že tú istú grupu symetrie má aj osemsten).

Grupu symetrie samotnej kocky teda poznáme. Nás však zaujímajú *všetky* kryštály, ktoré majú túto grupu symetrie. Steny každého z takýchto kryštálov tvoria množinu, na ktorej pôsobí grupa  $O_h$ . Množiny na ktorých pôsobia grupy, sa rozpadajú na orbity. Keď sa obmedzíme na tie steny, ktoré tvoria jednu orbitu, dostávame už vyššie spomínané jednoduché tvary. Súbor viacerých orbít dáva dokopy spojky. Základnou úlohou je preto teraz nájsť orbity.

## 3 Hľadanie orbít

Ukazuje sa, že jednoduchšie ako pracovať so stenami je pracovať s ich *normálovými vektormi*. Z pôsobenia na steny sa tak stáva pôsobenie na vektoroch.

Zatiaľ vieme, že ak zadáme jednu stenu (normálový vektor), tak zo symetrie nám vyplynie nejaká množina ďalších stien, ktoré kryštál musí obsahovať. Táto množina, alebo orbita nezávisí na konkrétnom vektore, ale každý vektor z tejto množiny je schopný ju celú vygenerovať (Orbita je jednoznačne daná kto-

\* stanislav.fecko@gmail.com

† fecko@fmph.uniba.sk

rýmkoľvek svojim prvkom). To znamená, že ak nájdem jeden vektor nejakej orbity, našiel som tým celú orbitu.

Mojim najbližším cieľom je teraz hľadať tieto orbity. Je pomerne zjavné, že väčšina vektorov vygeneruje 48-prvkovú orbitu. Presnejšie, iba v nejakom zmysle špeciálne vektory budú mať na svedomí menej prvkovú orbitu. A práve tieto nás budú najviac zaujímať.

Ako sa spomína v dodatku, počet prvkov orbity musí deliť počet prvkov grupy, v tomto prípade  $O_h$ , tj. musí deliť 48. Niektorých reprezentantov orbít vieme nájsť veľmi jednoducho. Napríklad vektor  $(1, 0, 0)$  vygeneruje šesťprvkovú orbitu, ktorú ak zobrazíme na kryštál, spoznáme v ňom kocku. Avšak intuícia väčšine z nás nenapovie, či aj nejaký iný vektor (tj. taký, ktorý nepatrí do orbity  $(1, 0, 0)$ ) vygeneruje šesťprvkovú orbitu. A podobne pre viacprvkové, kde to je na predstavivosť ešte náročnejšie. Preto som sa rozhodol využiť 'predstavivosť' počítača a nechal som ho hľadať vektory, ktoré generujú nejaké zaujímavé orbity.

Smer každého vektora sa dá stotožniť s bodom na sfére. Na prezentáciu vypočítaných výsledkov som si preto zvolil spôsob zafarbenia sférického povrchu. To znamená, že výsledkom tohoto programu je farebná sféra. Zafarbenie je zvolené tak, že farba každého bodu zodpovedá počtu prvkov orbity generovanej týmto bodom.

Na vizualizáciu som si predpočítal textúru, ktorú som už iba nalepil na guľu a zobrazil. Textúru som mal parametrizovanú polárnymi súradnicami. Pre každý bod som si vygeneroval všetkých 48 obrazov. V ďalšom kroku som hľadal duplikáty (ak som trafil orbitu s menej ako 48 prvkami, tak vzniknuté vektory sú vždy po dvojiciach, trojiciach,... rovnaké). Po ich vyhodení z množiny som teda dostal nejaký počet unikátnych vektorov, ktorých počet som zapísal do textúry.

Výsledkom tejto časti je teda síce nie veľmi pekne, ale zato informatívne zafarbená sféra. *Z farby v každom bode jej povrchu vidno, koľko prvkovú orbitu daný vektor generuje* (Napríklad osem zelených bodiek na obrázku tvorí osemprvkovú orbitu).

## 4 Vytvorenie a zobrazenie modelu

Model vytváram inkrementálnym spôsobom, preto potrebujem nejaký počiatočný stav. Vychádzam z kocky dostatočne veľkých rozmerov. Používal som

kocku s dĺžkou hrany 8. Vizuálne som overil, že takáto veľkosť je s bohatou rezervou dostatočná pre moju aplikáciu (samozrejme, nie pre ľubovoľnú množinu vektorov; v mojom prípade vektory držali na uzde požiadavky, ktoré som na ne zo symetrie kládol).

Vstupom pre model je množina normálových vektorov stien. Na konci každého si vytvorím rovinu kolmú na daný vektor. V každom kroku mám nejaký doterajší tvar kryštálu a potrebujem ho orezať jednou rovinou. Výrazným zjednodušením situácie je vedomosť, že všetky objekty, s ktorými prichádzam do kontaktu, sú konvexné. Je to preto, že výsledný objekt, rovnako ako aj každý z medzivýsledkov, je prienikom polpriestorov ohraničených rovinami. Každý z polpriestorov je zjavne konvexný. A prienik konvexných objektov je tiež konvexný objekt.

Východziu kocku teda orezávam rovinami zadanými vektormi zo vstupu. Každú stenu orezávam osobitne a priesečníky si zapamätávam, pretože tie budú tvoriť novú stenu na zaplátanie vzniknutej diery. Keďže vopred viem, že aj nová stena má byť konvexná, viem si tieto priesečníky správne usporiadať. Až na možné numerické komplikácie preto výsledok nezávisí od konkrétneho poradia rovín, ktorými orezávam.

Nakoniec dostanem výsledný kryštál, ktorý pomocou OpenGL zobrazujem ako trojuholníkový model.

Metóda umožňuje vytvárať aj 'zmesi' jednoduchých tvarov (spomínané spojky). Tie vzniknú ako kombinácia dvoch (alebo viacerých) jednoduchých tvarov s rôznym pomerom váh. Vstupom pre takýto model je preto nie jeden jednotkový vektor (ako to bolo pre jednoduché tvary), ale dvojica (resp. viacica) vektorov. Je zjavné, že ak obidva vynásobíme rovnakým číslom, tvar kryštálu sa nezmení (iba jeho absolútna veľkosť). Preto používam jeden vektor dĺžky 1 a ostatné sú najviac rovnako dlhé. Pomerom váh sa teda myslí vzájomný pomer dĺžok týchto vektorov.

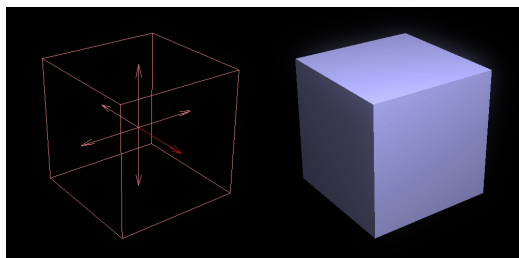
Postup je obdobný ako predtým: na každý z vektorov nechám pôsobiť grupu symetrií, dostanem dve množiny normálových vektorov, a tými orezávam veľkú kocku.

Výsledkom takýchto kombinácií sú nakoniec kryštály, ktoré na pohľad vyzerajú zložito, avšak všetky z nich majú rovnakú grupu symetrií ako obyčajná kocka.

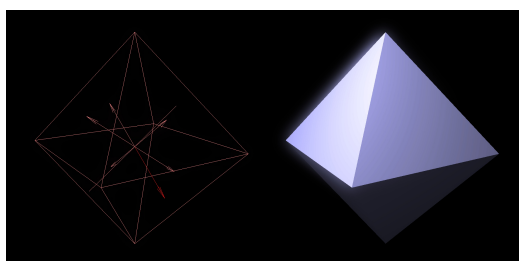


## 5 Výsledky

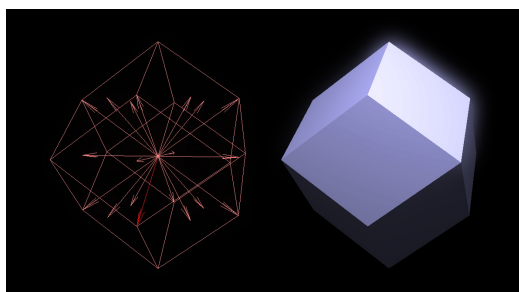
Tu uvediem jednak výslednú textúru, ako aj niekoľko obrázkov zaujímavých kryštálov.



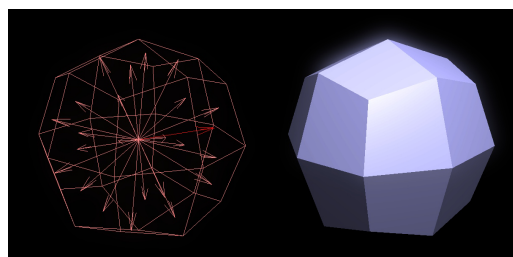
Obr. 1: Šesťprvková orbita



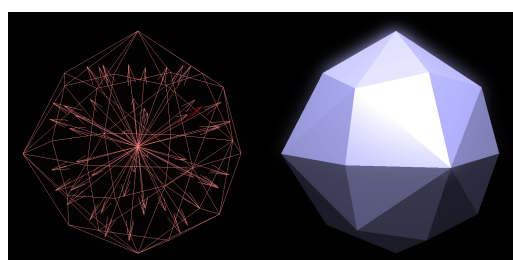
Obr. 2: Osemprvková orbita



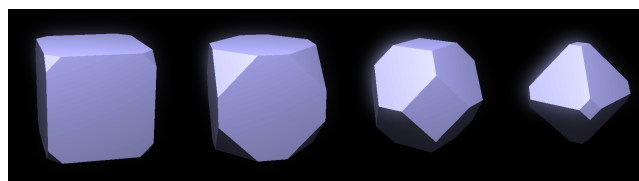
Obr. 3: Dvanásťprvková orbita



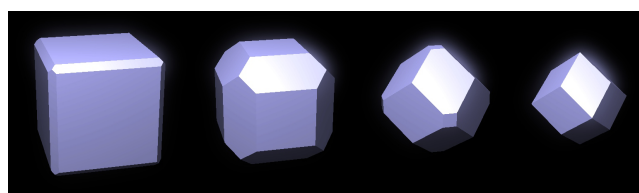
Obr. 4: 24-prvková orbita



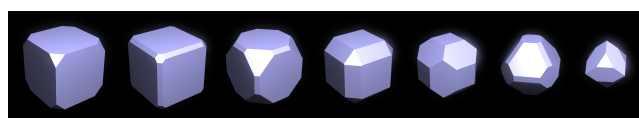
Obr. 5: 48-prvková orbita



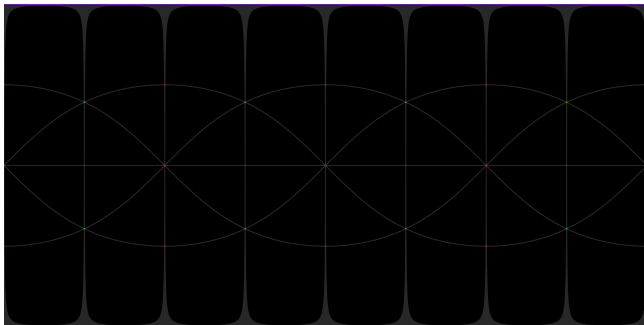
Obr. 6: Kombinácie šesťprvkovej a osemprvkovej orbity s rôznym pomerom váh



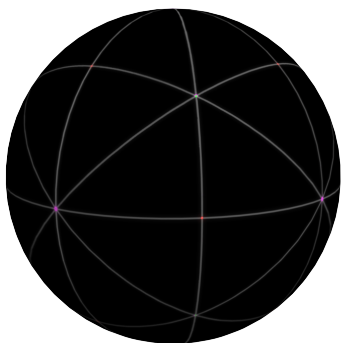
Obr. 7: Kombinácie šesťprvkovej a dvanásťprvkovej orbity s rôznym pomerom váh



Obr. 8: Kombinácie šesťprvkovej, osemprvkovej a dvanásťprvkovej orbity s rôznym pomerom váh



Obr. 9: Vypočítaná textúra: Čierna znamená 48-prvkovú orbitu, sivá 24-prvkovú, červená 12-prvkovú, zelená 8-prvkovú a modrá 6-prvkovú. Malé ružové oblasti sú miesta kde kvôli limitovanej presnosti nebolo možné zistiť, o ktorú z orbít ide (so zvýšenou presnosťou by sa stenčovali napríklad aj sivé čiary a na obrázku by nebolo nič vidno).



Obr. 10: Textúra namapovaná na sféru. Vidno, že sivé čiary tvoria veľké kružnice. Vidíme jeden rovník, osem poludníkov a štyri krížne kružnice, ktoré zvierajú s rovníkom uhol  $\frac{\pi}{4}$ . Body sú na ich priesečníkoch. Ak by sme si sféru zabalili do kocky, videli by sme, že šesť-prvková orbita sú vektory smerujúce do stredov stien, osemprvková sú vektory smerujúce do vrcholov kocky a dvanásť-prvková orbita pozostáva z vektorov smerujúcich do stredov hrán.

## 6 Dodatok

### 6.1 Pôsobenie grupy na množine

Majme grupu  $G$ , množinu  $M$  a zobrazenie  $G \times M \rightarrow M$ ,  $(a, m) \mapsto am$ . Ak spĺňa

$$a(bm) = (ab)m$$

$$em = m$$

pre všetky  $a, b \in G$  a ľubovoľné  $m \in M$ , kde  $e$  je neutrálny prvok grupy  $G$ , hovoríme, že ide o pôsobenie

grupy  $G$  na množine  $M$  (alebo tiež akciu  $G$  na  $M$ ).

### 6.2 Orbita

Nech teda  $G$  pôsobí na  $M$  a nech  $m$  je prvok množiny  $M$ . Vytvoríme množinu všetkých bodov tvaru  $am$ , pre  $a$  idúce postupne cez všetky prvky grupy. Túto množinu označujeme

$$G \cdot m = \{am | a \in G\}$$

a nazývame *orbitou* bodu  $m$ .

### 6.3 Stabilizátor

Ďalej pre každý bod  $m$  množiny  $M$  môžeme uvažovať všetky také prvky  $g$  grupy  $G$ , ktoré nechajú daný bod na mieste, čiže  $am = m$ . Ak  $am = m$ , tak aj  $a^{-1}m = m$ . Navyše ak  $am = m$  a zároveň aj  $bm = m$ , tak aj  $(ab)m = m$ . Preto tieto prvky  $g$  tvoria podgrupu pôvodnej grupy  $G$  a nazývame ju *stabilizátor* (*grupa izotropie*) bodu  $m$  a označujeme ju  $G_m$ .

Dá sa dokázať, že počet prvkov orbity vynásobený počtom prvkov stabilizátora dáva vždy počet prvkov celej grupy  $G$ . Počet prvkov orbity teda vždy delí počet prvkov grupy.

Pre prípad grupy  $O_h$  musí počet prvkov každej orbity deliť 48 (napríklad šesť-prvková orbita zodpovedá kocke, osemprvková pravidelnému osemstenu, atď).

## Literatúra

[Phillips, 1963] Phillips, F. (1963). *An Introduction to Crystallography*. Wiley, New York.

[Sternberg, 1994] Sternberg, S. (1994). *Group Theory and Physics*. Cambridge University Press.

# Soft Shadow Mapping for Large Virtual Environments

Michal Ferko\*

Supervisor: Martin Samuelčík†

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

**Abstract:** This paper describes a method for optimized shadow rendering used in real-time 3D applications and 3D video games. The algorithm is a modified version of Shadow Mapping, a widely used shadowing technique that employs an additional pixel buffer to store depth information from the scene. This information is then used to determine which parts of the scene are lit and which are in shadow. The improved algorithm for Shadow Mapping is named Parallel-Split Shadow Mapping, which uses multiple shadow maps. The camera's viewing frustum is split into several parts and one shadow map is rendered for each of these parts. This reduces the aliasing of the shadows at the cost of additional computational time. In addition, the shadows are synthesized every frame only for the parts of the scene that are inside the camera viewing volume, whereas in Standard Shadow Mapping, the shadows for the whole scene have to be synthesized. Furthermore, we explain how a separable Gaussian blur can be used to generate soft shadows with the Shadow Mapping techniques.

*Keywords:* OpenGL, Real-time Rendering, Shadow Mapping, Parallel-Split Shadow Mapping, Soft Shadows, Screen-Space Soft Shadows

## 1 Introduction

Real-time rendering is a crucial part of all modern video games, which are meant to be as realistic as possible. With increasing number of triangles rendered per frame and complex lighting calculations, optimization becomes very important. Shadows are indispensable in the complex lighting models, since they increase realism of the rendered images rapidly and provide the viewer with depth information. In this paper, we first explain the concept of Shadow Mapping, a technique used to generate shadows in real-time with good hardware support. We then explain an extension which improves precision and decreases aliasing. Finally, we provide a way to generate soft shadows using Shadow Mapping and Gaus-

sian convolution.

## 2 Shadow Mapping

Shadow Mapping was first introduced by Lance Williams in [Williams, 1978]. The algorithm requires only an additional render pass for the whole scene geometry. Therefore it is relatively easy to implement when compared to shadow volumes and it fully utilizes the power of the graphics processor.

The algorithm works in multiple rendering passes, usually one for each light in the scene and some additional passes to render the final scene.

To simplify things, let's have just one light casting shadows. How do we determine which points in our scene are lit and which are shadowed? If we could extend the rays emitting from the light, only the closest point to the light (hit by a ray) will be lit by it. All other points will be shadowed by the object containing the closest point, as shown in Figure 1: The point  $P$  on the object has distance  $d$  from the light, and therefore the point  $Q$ , which is farther away on the line defined by the light's position and the position of  $P$  will be in shadow. We just have to do this for every single point that could be lit. A straightforward approach would be very costly, but thankfully the idea of Shadow Mapping will reduce the computation time significantly.

By rendering the scene from the light's point of view and storing the rendered depth values into a depth texture (called the shadow map) from that render pass, we will acquire the distances of all the points that are lit by the light. The final rendering pass would only need to compare the right depth value from our stored shadow map with the point that is currently being rendered. If the distance of the point is almost exactly the value stored in the shadow map, then this point is lit by the light. If the distance is greater, it is in shadow.

### 2.1 First pass

In the first pass, the scene is rendered from the light's point of view. We only need the depth values from

\*michalferko1@gmail.com

†samuelcik@sccg.sk

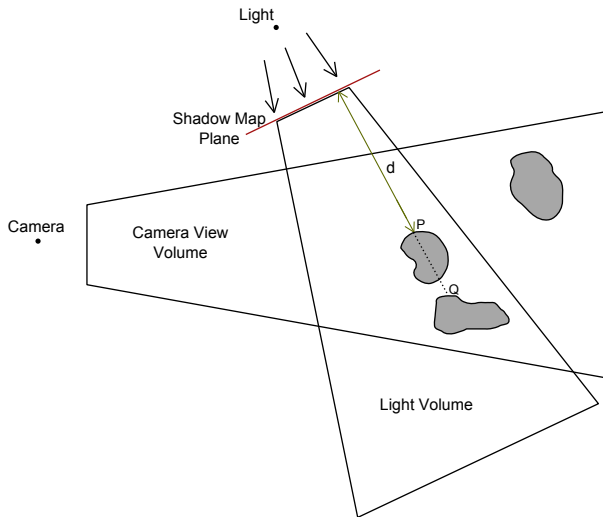


Figure 1: Shadow Mapping geometry

this render pass, therefore no special computations for lighting or other effects are needed (only the vertex positions should be taken into account, ignoring vertex color and textures). We will save the depth values into a texture (or render into it directly).

A depth texture can be interpreted as a grayscale image, where brighter color means higher depth (or bigger distance from the camera position). In Figure 2, you can see a scene with shadows synthesized using Shadow Mapping, and the shadow map for that scene represented as a grayscale image.

## 2.2 Second pass

We have a texture with depth values (our shadow map) that tell us how far those pixels are from the light. But when pixels are rendered during the second pass, the algorithm has to have a position in the shadow map to read the depth value from. Therefore, we need to prepare a transformation matrix to transform the pixels from object space to the light's clip space. We had to use this matrix in the first pass when rendering from the light's point of view. Therefore, we only need to save the matrix during the first pass and then multiply each point  $(x, y, z, 1)$  in world space with this matrix ( $(x_s, y_s, z_s, 1)$  will be the result), which gives us the exact pixel position to read from the shadow map (the  $x_s$  and  $y_s$  coordinates). Furthermore, the  $z_s$  coordinate determines the depth of the point being rendered and we can directly compare this value with the value stored in the shadow map at position  $(x_s, y_s)$ .

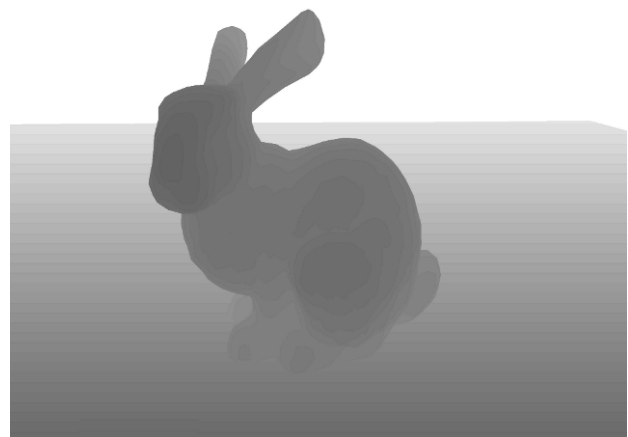
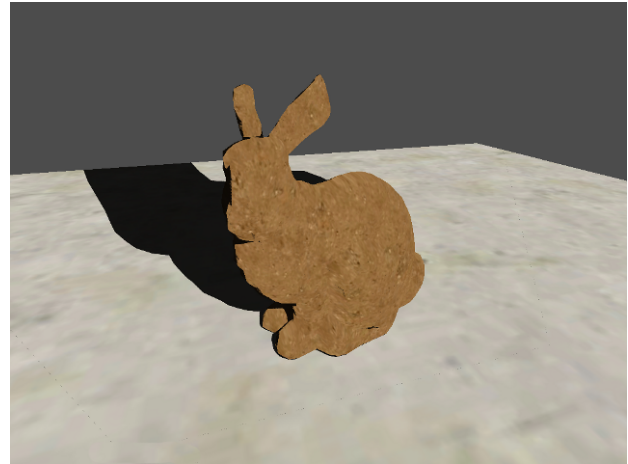


Figure 2: Shadow Mapping output - scene with shadows (top) and the scene's shadow map (bottom)

## 3 Parallel-Split Shadow Mapping

Due to the fact that the shadow map is limited by its resolution, strong aliasing artifacts can occur when using Shadow Mapping. Therefore, a lot of methods try to decrease the aliasing with a wide variety of options. The shadow map size is limited by hardware (most graphic cards cannot handle a texture with resolution higher than  $4096 \times 4096$ ). Therefore, the idea of using multiple shadow maps at once was introduced. Also, when using the simple Shadow Mapping for a large scene such as a city, the shadow map has to cover the whole city and thus the coverage of the entire scene by this one shadow map will result in strongly decreased precision.

Parallel-Split Shadow Mapping (PSSM) is one of the techniques that uses multiple shadow maps for one light. The main idea is to split the view frustum with parallel splits (parallel to the near and far plane) into smaller frusta and then synthesizing one

shadow map per frustum. It was first introduced in [Zhang et al., 2006] and is similar to Cascaded Shadow Maps [Engel, 2006], which also uses view frustum splitting, but in a different manner.

### 3.1 The algorithm

How the algorithm works is shown in Figure 3. There are 4 splits, meaning that for each of these parts, a single shadow map is created. Point  $P$  on the first object is lit, this information is retrieved by looking up the value in shadow map for the third split. Point  $Q$  is in shadow, because it has the same lookup position in shadow map as point  $P$ , but it is farther away. If point  $Q$  was in the last subfrustum, we would be querying if it is shadowed or not from the last shadow map.

All the shadow maps have the same resolution, therefore the near and far planes of the split parts are the controlling elements and by altering them, we adjust the aliasing. The point is to use preciser shadow maps for objects that are closer to the viewer (since these objects will be larger in the final image) and thus improving the precision.

The placement of split planes attempts to increase sampling frequency of the shadow map for closer objects (that will be bigger in the resulting image) and decrease sampling for distant objects (that will only cover a few pixels).

There are three schemes that can be used to position the split planes. The uniform split scheme (Equation 1), the logarithmic split scheme (Equation 2) and the most useful is the combination of these two called the practical scheme (Equation 3). In the following equations,  $n$  is the near plane,  $f$  the far plane,  $i$  is the number of the split and  $m$  is the split count.  $\lambda \in [0, 1]$  is a constant that controls the practical scheme, which is just a linear combination of the first two. A value of  $\lambda = 0.5$  proved experimentally to be the best to avoid over- and under-sampling.

$$C_i^{uni} = n + (f - n) \cdot \frac{i}{m} \quad (1)$$

$$C_i^{log} = n + \left(\frac{f}{n}\right)^{\frac{i}{m}} \quad (2)$$

$$C_i = \lambda \cdot C_i^{log} + (1 - \lambda) \cdot C_i^{uni} \quad (3)$$

The algorithm can be divided into these steps:

1. Split the view frustum into  $m$  parts depending on the split scheme

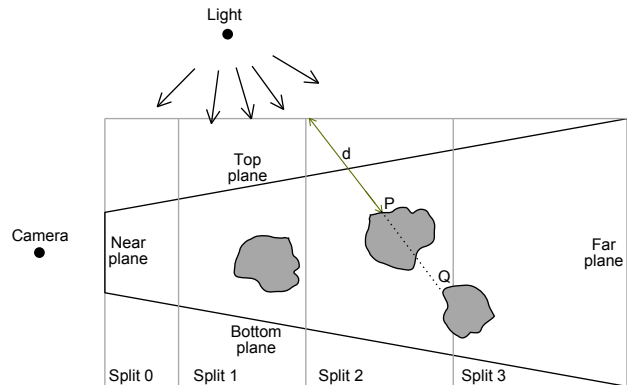


Figure 3: Parallel-Split Shadow Maps

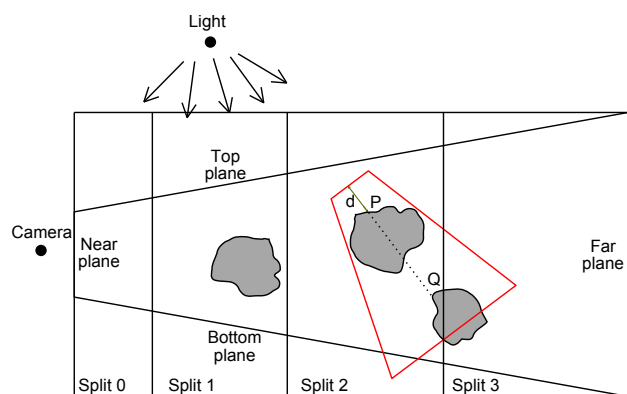


Figure 4: PSSM - Scene dependent projection

2. Calculate the light's view matrix for each of these parts
3. Generate shadow maps (with resolution  $w \times h$  for each of the splits) by rendering the scene from the light's point of view
4. Render the final scene with shadows applied, choose which shadow map to use based on the depth of the pixel being rendered

Another improvement of this technique is possible. The light's viewing frusta are generated to enclose its respective camera viewing sub-frustum. However, this frustum can be tighter if we enclose only the objects that are casting and receiving shadows. As a result, the light's viewing volume will have smaller extents (but still covered by the same shadow map with the same resolution), which further reduces aliasing. This is called the scene-dependent projection. An example is shown in Figure 4 - the red frustum is much smaller than in the scene-independent projection, since it only has to cover objects  $P$  and  $Q$ .

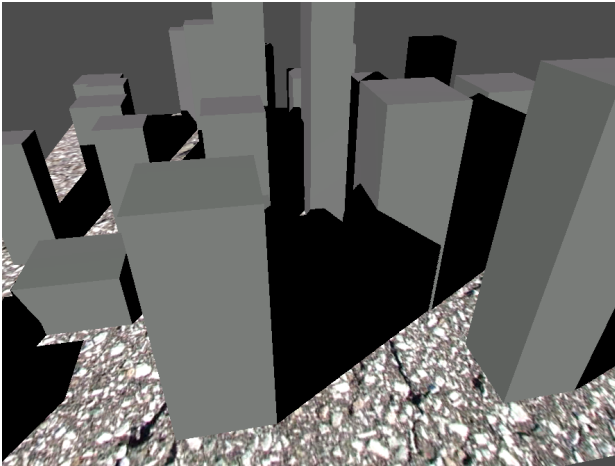


Figure 5: One of the test scenes used

Due to the nature of the algorithm, the increased sampling frequency is most notable when we have a large scene (such as a city) and the shadow map would have to cover the entire city. Such a test scene is shown in Figure 5. If we only had one object and a light source that is near the object, the standard shadow mapping would have the same aliasing but better performance.

### 3.2 Performance

The performance of PSSM is worse than the Shadow Mapping. The scene has to be rendered  $m + 1$  times for  $m$  splits (instead of 2 for the Shadow Mapping). When there are more ( $n$ ) shadow-casting lights, it becomes  $(m \cdot n) + 1$ .

There are various extensions that can be made to the algorithm. With the help of geometry shader cloning or instancing and multiple render targets for OpenGL Framebuffer Objects, it is possible to generate all shadow maps needed for one light casting PSSM shadows in only one pass. This approach (with the help of DirectX 10) is discussed in [Zhang et al., 2007]. Similarly, it is possible to render one shadow map for multiple lights in one pass and a combination can generate the mentioned  $m \cdot n$  shadow maps in only one pass. This optimization would decrease batching rapidly, since the scene has to be rendered only twice. If the batch count is a bottleneck of the application, such a change could increase performance significantly. However, this approach would be limited by the maximum number of render targets, which is hardware-specific.

Despite the fact that we are using multiple shadow

maps, the fragment shader always has to read only from one of the shadow maps (because only one shadow map corresponds to the fragment's depth). Therefore, we do not waste shader computation and do not require to read from each shadow map, which could be costly.

## 4 Soft Shadows

Shadow Mapping and Parallel-Split Shadow Mapping only produce hard-edged shadows. The problem is that shadows in real life never have hard edges, because in real life, light sources are not just points, but objects that have their size. A good example is shown in Figure 6. The term umbra is used for the set of points which lie in full shadow, in other words, the light source is not visible from these points. The term penumbra is used for points that are partially in shadow, meaning that the light source is partially visible from these points.

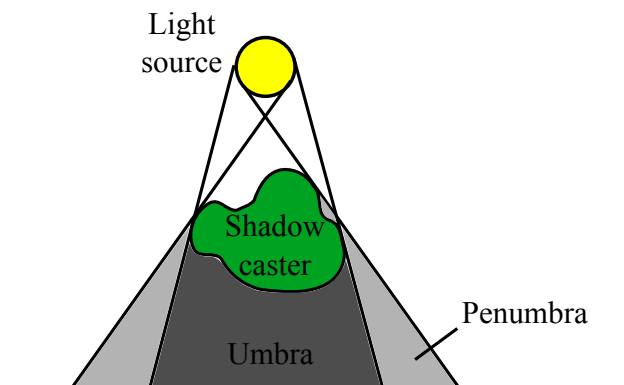


Figure 6: Umbra and penumbra

An approach with Shadow Mapping could be to generate hundreds of lights and render one shadow map for each of these. The result would be high quality shadows, but it could not perform in real-time, since for generating one frame, hundreds of shadow maps would have to be rendered.

In [Donnelly and Lauritzen, 2006], authors store the distribution of depths instead of the depth itself in the shadow map. This allows them to estimate the fraction of a fragment that is in shadow.

### 4.1 Percentage-Closer Filtering

Probably the simplest soft shadow technique is using Percentage-Closer Filtering (PCF)

[Reeves et al., 1987]. The shader not only samples the appropriate pixel in the shadow map, but also its neighborhood ( $3 \times 3, 5 \times 5, \dots$ ). For every point sampled, the result is binary (1 = in shadow, 0 = not in shadow). The mean value from all results is  $r \in [0, 1]$ , which determines how much the fragment is in shadow (the lower the value, the more the light affects the fragment).

Using a fixed size neighborhood does not correspond well to penumbra size. A penumbra size estimation is described in [Fernando, 2005].

PCF has a performance issue. In every fragment shader, depending on the size of the neighborhood,  $n \times n$  texture reads need to occur. Texture reads are expensive when compared to other shader instructions, and thus a  $7 \times 7$  PCF has much lower performance than disabled PCF.

What happens in PCF is that in each pixel of the shadow map, a mean filter is applied. However, simply doing a convolution of the shadow map is not a solution to providing soft shadows. The results of the comparison are averaged, not the depth values themselves. In [Annen et al., 2008], the authors provide a modification called Exponential Shadow Mapping, which takes advantage of saving other information into the shadow map and blurring this modified shadow map is then used to synthesize soft shadows.

## 4.2 Screen-Space Soft Shadows

By splitting the final shadow map pass into two, we can easily provide soft shadows. Firstly, the result of Shadow Mapping lookup is rendered for each pixel. The output is a binary shadow result map, where white pixels represent lit surfaces and black pixels represent shadowed surfaces. By applying a Gaussian convolution, we can blur this map and thus blur the hard edges.

The 2D Gaussian convolution (Equation 4) is separable, meaning that it is equal to doing a 1D vertical Gaussian convolution followed by a 1D horizontal convolution (Equation 5). For a  $n \times n$  kernel, 2D Gaussian convolution uses  $n \times n$  texture reads, whereas the consecutive 1D convolutions use only  $n + n$  texture reads. The bigger the kernel, the more significant the difference in performance.

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (4)$$

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (5)$$

Despite the fact that we have to perform 2 extra passes to blur the shadow result map, using the separable Gaussian convolution provides better performance than PCF with the same kernel sizes. These extra passes render a full-screen quad with a shadow map mapped to it and render to a texture, performing the Gaussian convolution in the fragment shader.

Finally the blurred shadow result map is used to determine, which pixels are lit and which are not (however, the result is now in range  $[0, 1]$ , not binary) and thus we can calculate the light contribution depending on how lit the pixel is.



Figure 7: Soft Shadows noise caused by sparse convolution kernel

This approach has one crucial advantage and that is that it can be used with any shadowing technique. We can use normal Shadow Mapping to render shadowed areas, or PSSM or even not use Shadow Mapping at all and use Shadow Volumes.

However, light bleeding artifacts occur and the blurring factor should be varying depending on how far the shadows are. This could be achieved by either making bigger steps when blurring the map (take every  $i$ -th pixel in the row/column), which could result in certain shadow noise (see Figure 7). Light bleeding occurs when a shadow is blurred and it is covered by a different object, the shadow becomes blurred near to object's edges and produces incorrect results like the ones in Figure 8 (the bunny's ears cause the non-shadowed edge around them).

In [MohammadBagher et al., 2010], the authors describe a PCF approach in screen-space, which allows them to use higher resolution shadow maps but still limit the texture reads by the screen resolution.

They use the same penumbra estimation as the authors of [Fernando, 2005]. They also use a cross-bilateral gaussian blur, which reduces light bleeding artifacts that occur in our approach.



Figure 8: Light bleeding in soft shadows

## 5 Results

Results are crucial for the techniques described. An important part is the difference in aliasing for simple Shadow Mapping and Parallel-Split Shadow Mapping. Parallel-Split Shadow Mapping works especially well when objects are far-away from the light and the shadows have to cover large scenes. Therefore, the shadows in images where the camera sees only distant shadows are almost identical.

However, if we consider a large scene with sunlight shadows and a camera that walks between huge objects, Parallel-Split Shadow Mapping has much better sampling properties than Shadow Mapping. A comparison is shown in Figure 9.

When displaying blurred shadow maps, the difference in aliasing is less visible. In certain situations, however, the difference is still notable. As seen in Figure 10, the sphere's shadow is jagged for Shadow Mapping but smooth for PSSM.

### 5.1 Performance

Performance for these techniques is the fundamental criterion, especially if these should be integrated into real-time application like games. The demo implementation was written in C++ and OpenGL, using GLSL for shaders. The machine for testing was a Lenovo G560 Notebook with Intel Core i3 330M 2.13 GHz and an NVIDIA GeForce 310M. All tests were performed in fullscreen in native  $1366 \times 768$



Figure 9: Aliasing in Shadow Mapping (top) and PSSM (bottom)

resolution. No hidden-surface removal techniques or frustum culling were used, rendering to texture was performed via Framebuffer Objects and objects were stored in Vertex Buffer Objects.

	<b>Resolution</b>	1024 <sup>2</sup>	2048 <sup>2</sup>
<b>Scene</b>	<b>Faces</b>	<b>FPS</b>	<b>FPS</b>
Primitives	1300	328.3	180.0
Bunny	2947	320.0	161.3
Dragon	47826	75.9	71.0

Table 1: Shadow Mapping Performance

We can see in Table 1 that the average performance is good, and even for complex objects like the dragon, the frame rate is still above 60 FPS. When compared to the results in Table 2, the performance drop is not so drastic (around 30 – 50%).

If we perform soft shadowing with a kernel width of 41 (corresponding to a  $41 \times 41$  Gaussian blur mask), we get the results in Table 3. The blur is quite large and still we retain acceptable frame rates for simpler objects. There is still much that can be done to increase performance. With varying mask density and adjusting blurring depending on the fragment's depth,





Figure 10: Aliasing in Soft Shadow Mapping (top) and Soft PSSM (bottom)

	<b>Resolution</b>	$3 \times 512^2$	$3 \times 1024^2$
<b>Scene</b>	<b>Faces</b>	<b>FPS</b>	<b>FPS</b>
Primitives	1300	231.0	162.7
Bunny	2947	214.3	147.2
Dragon	47826	36.9	36.9

Table 2: Parallel-Split Shadow Mapping Performance

	<b>Technique</b>	SM	PSSM
	<b>Resolution</b>	$2048^2$	$3 \times 1024^2$
<b>Scene</b>	<b>Faces</b>	<b>FPS</b>	<b>FPS</b>
Primitives	1300	34.8	30.7
Bunny	2947	27.7	22.6
Dragon	47826	19.7	15.0

Table 3: Soft Shadows Performance

such an approach retains high shadow quality while avoiding the constant blur width problem.

## 6 Conclusion

In this paper, we have presented an image-based method for rendering shadows in real-time. We extended this method with a technique that increases precision and thus reduces shadow aliasing (which occurs due to the image-based nature of shadows). Furthermore, we provided a way to render soft shadows with a hardware-accelerated blurring approach. The algorithm retains plausible frame rates while providing realistic shadows. Furthermore, we showed that even when generating soft shadows, using basic Shadow Mapping may result in aliasing artifacts and thus using a technique with decreased aliasing is encouraged.

## References

- [Annen et al., 2008] Annen, T., Mertens, T., Seidel, H.-P., Flerackers, E., and Kautz, J. (2008). Exponential shadow maps. In *Proceedings of graphics interface 2008*, GI '08, pages 155–161, Toronto, Ont., Canada, Canada. Canadian Information Processing Society.
- [Donnelly and Lauritzen, 2006] Donnelly, W. and Lauritzen, A. (2006). Variance shadow maps. In *Proceedings of the 2006 symposium on Interactive 3D graphics and games*, I3D '06, pages 161–165, New York, NY, USA. ACM.
- [Engel, 2006] Engel, W. (2006). Cascaded shadow maps. In Engel, W., editor, *Shader X<sup>5</sup>: Advanced Rendering Techniques*, chapter 4, pages 197–206. Charles River Media, Inc.
- [Fernando, 2005] Fernando, R. (2005). Percentage-closer soft shadows. In *ACM SIGGRAPH 2005 Sketches*, SIGGRAPH '05, New York, NY, USA. ACM.
- [Lloyd et al., 2008] Lloyd, D. B., Govindaraju, N. K., Quammen, C., Molnar, S. E., and Manocha, D. (2008). Logarithmic perspective shadow maps. *ACM Trans. Graph.*, 27:106:1–106:32.
- [MohammadBagher et al., 2010] MohammadBagher, M., Kautz, J., Holzschuch, N., and Soler, C. (2010). Screen-space percentage-closer soft shadows. In *ACM SIGGRAPH 2010 Posters*, SIGGRAPH '10, pages 133:1–133:1, New York, NY, USA. ACM.
- [Reeves et al., 1987] Reeves, W. T., Salesin, D. H., and Cook, R. L. (1987). Rendering antialiased shadows with depth maps. In *Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, SIGGRAPH '87, pages 283–291, New York, NY, USA. ACM.
- [Shastry, 2011] Shastry, S. A. (2011). Soft-edged shadows. [http://www.gamedev.net/page/resources/\\_/reference/](http://www.gamedev.net/page/resources/_/reference/)

- programming/special-effects/shadows/  
soft-edged-shadows-r2193. Accessed: 10.4.2011.
- [Williams, 1978] Williams, L. (1978). Casting curved shadows on curved surfaces. In *Proceedings of the 5th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, SIGGRAPH '78, pages 270–274, New York, NY, USA. ACM.
- [Zhang et al., 2007] Zhang, F., Sun, H., and Nyman, O. (2007). Parallel-split shadow maps on programmable gpus. In Nguyen, H., editor, *GPU Gems 3*. Addison-Wesley Professional, first edition.
- [Zhang et al., 2006] Zhang, F., Sun, H., Xu, L., and Lun, L. K. (2006). Parallel-split shadow maps for large-scale virtual environments. In *Proceedings of the 2006 ACM international conference on Virtual reality continuum and its applications*, VRCIA '06, pages 311–318, New York, NY, USA. ACM.

# Zjednodušovanie mnohouholníkových plôch metódou ekvidištančných rezov

Gábor Kiss\*

Školiteľ: Pavel Chalmovianský†

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, FMFI UK, Mlynsá Dolina, 842 48 Bratislava,

**Abstrakt:** Naša práca je zameraná na geometrické dátové štruktúry a ich použitie v aplikácii zameranej na zníženie počtu mnohouholníkov v uzavretých lomených plochách. Navrhli sme algoritmus určený na zjednodušenie polygonálnej siete a dátovú štruktúru, ktorá umožňuje optimalizáciu priebehu algoritmu. Na overenie funkčnosti nami navrhovaného postupu sme implementovali aplikáciu v jazyku C++ s pomocou niekoľkých externých knižníc. Naše výsledky ukazujú, že navrhovaný algoritmus je reálne schopný znížiť celkový počet mnohouholníkov objektu.

*KLúčové slová:* geometrická dátová štruktúra, asymptotická zložitosť, uzavretá lomená plocha, zjednodušovanie mnohouholníkovvej siete

## 1 Úvod

V počítačovej grafike sa povrch telesa často určuje vymenovaním objektov, ktoré ho tvoria, teda vrcholov, hrán a stien. Najčastejšie používanými mnohouholníkmi pri reprezentácii objektov sú trojuholníky, ktorých reprezentácia v počítači je jednoduchá a ich renderovanie je často podporované grafickým hardvérom aj softvérom. Používanie polygónov však má aj svoje nevýhody. Vzhľadom na to, že sú to rovinné útvary, je potrebné použiť tisíce až milióny mnohouholníkov na detailný popis zložitejších útvarov [Schroeder et al., 1992].

Používanie týchto detailných modelov však nie je vždy potrebné. V mnohých prípadoch by bolo vhodnejšie používanie jednoduchších modelov, keďže rýchlosť renderovania a množstvo použitej pamäte je závislé najmä od počtu mnohouholníkov.

V týchto prípadoch by bolo užitočné, ak by sme mali metódu, pomocou ktorej by bolo možné redukciu počtu polygónov vykonať. Takýto algoritmus musí byť dostatočne efektívny na to, aby ho bolo možné použiť aj na vysokom počte mnohouholníkov, mal by čo najviac zachovať tvar a topológiu pô-

vodného objektu, a mal by poskytovať používateľovi možnosť nastaviť úroveň zjednodušenia objektu.

## 2 Stav problematiky

Výskum v oblasti zjednodušovania polygonálnych sietí je veľmi rozsiahly, preto v tejto časti spomenieme niekoľko prác, ktoré mali vplyv na náš algoritmus. Mnohé z týchto výsledkov, rovnako ako náš, sa zaoberajú len trojuholníkovými lomenými plochami ako napríklad [Schroeder et al., 1992], [Hussain et al., 2004] a [Canas and Gortler, 2006].

Často kladenou podmienkou na zjednodušovací algoritmus je aj zachovanie topológie pôvodného objektu, toto však nie je všeobecnou podmienkou, ako môžeme vidieť v prácach [Garland and Heckbert, 1997] a [Canas and Gortler, 2006].

Práce, ktoré ovplyvnili náš projekt najvýznamnejšie sú práce [Canas and Gortler, 2006] a [Schroeder et al., 1992]. Inšpiráciou z prvého bolo počítanie prieniku zjednodušovanej siete s rezovými rovinami. Z druhého výskumu sme použili spôsob určovania odstrániteľných bodov, ktorý sme následne upravili a použili v našom algoritme.

## 3 Základné definície a pojmy

V nasledujúcich častiach budeme často používať, niekoľko základných pojmov, ktoré definujeme a vysvetlíme v tejto sekcii. Budeme voľne sledovať [Božek, 2009].

### 3.1 Lomená čiara

Majme v euklidovskej rovine danú postupnosť bodov  $p_1, p_2, \dots, p_n; n \geq 3$ .

Lomenou čiarou  $\Pi = p_1, p_2, \dots, p_n$  nazývame zjednotenie úsečiek  $p_i p_{i+1}; i = 1, \dots, n - 1$ . Tieto úsečky nazývame *stranami lomenej čiary* a body  $p_1, p_2, \dots, p_n$  jej *vrcholmi*.

\*kissogk@gmail.com

†pavel.chalmoviansky@fmph.uniba.sk

Jednoduchou uzavretou lomenou čiarou nazveme takú lomenú čiaru, ktorej každé dve rôzne strany sa pretínajú maximálne v jednom bode, a každý z jej vrcholov susedí práve s dvomi stranami. Bodom prieniku dvoch strán je vrchol takejto lomenej čiary.

### 3.2 Mnohouholník a jeho triangulácia

Mnohouholník určený jednoduchou uzavretou lomenou čiarou  $\Pi$ , je oblasť ohraničená danou lomenou čiarou zjednotená s  $\Pi$ . Lomenú čiaru  $\Pi$  nazývame hranicou mnohouholníka.

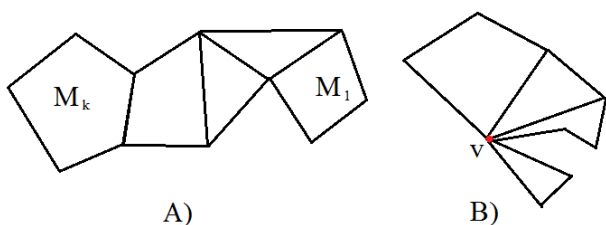
Trianguláciou mnohouholníka budeme nazývať rozdelenie  $n$ -uholníka na trojuholníky tak, že žiadna hrana triangulácie nepretína hranicu mnohouholníka. Platí, že každý mnohouholník je triangulovateľný. Dôkaz tohto tvrdenia je uvedený napríklad v [de Berg et al., 2000].

### 3.3 Ret'azec mnohouholníkov

Majme danú množinu mnohouholníkov  $M$  s  $n$  prvkami  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Vyberme si z nej ľubovoľné dva mnohouholníky – označme si ich  $M_k$  a  $M_l$ . Ret'azcom mnohouholníkov nazývame tú usporiadanú postupnosť prvkov množiny  $M$ , pre ktorú platí, že jej prvým prvkom je  $M_k$ , posledným je  $M_l$ , a zároveň každé dva nasledujúce prvky v danej postupnosti majú spoločnú hranu (obr. 1 A).

### 3.4 Hviezdica vrcholu mnohouholníkov

Majme danú množinu mnohouholníkov  $M$  s  $n$  prvkami  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Za hviezdicu vrcholu  $v$  považujeme takú podmnožinu  $M'$  množiny  $M$ , v ktorej platí, že prienikom všetkých prvkov  $M'$  je  $v$  (obr. 1 B).



Obr. 1: Ret'azec mnohouholníkov (A) a hviezdica vrcholu v mnohouholníkov (B).

### 3.5 Lomená plocha

Jednoduchou lomenou plochou nazveme zjednotenie konečného počtu mnohouholníkov v trojrozmer-

nom euklidovskom priestore s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. Stenami jednoduchej lomenej plochy nazývame mnohouholníky, ktorých zjednotením vznikla, hrany sú stranami týchto mnohouholníkov a vrcholmi ich vrcholy.
2. Prienikom dvoch rôznych susedných (nedisjunktných) mnohouholníkov je alebo strana oboch mnohouholníkov alebo vrchol oboch mnohouholníkov.
3. Každé dva rôzne mnohouholníky možno spojiť ret'azcom mnohouholníkov.
4. Každé dva rôzne mnohouholníky z hviezdice vrcholu možno v rámci tej hviezdice spojiť ret'azcom mnohouholníkov.
5. Každá z hrán lomenej plochy patrí najviac dvom stenám.

Jednoduchú lomenú plochu nazývame aj *mnohouholníková sieť*. Ak každá hrana jednoduchej lomenej plochy patrí práve dvom stenám, tak ju nazývame *jednoduchá uzavretá lomená plocha*.

## 4 Analýza zložitosti algoritmov

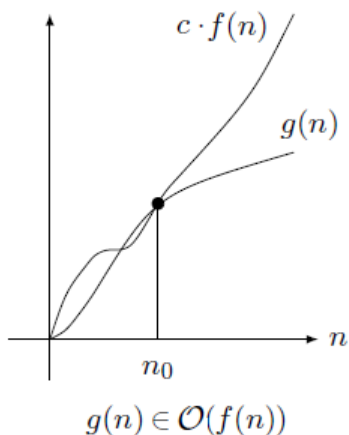
Pri analýze zložitosti algoritmov sú najpodstatnejšími kritériami množstvo použitej pamäte na uloženie spracovávaných informácií a rýchlosť spracovania týchto údajov – teda doba vykonávania algoritmu. Niekedy je síce možné určiť čas behu algoritmu presne, ale zvyčajne tento výsledok nemá praktický význam. Pre veľké vstupy sa môžu zanedbávať výrazy nižšieho rádu takisto ako multiplikatívne konštanty. Preto sa štandardne používa asymptotický odhad uvedených parametrov, takzvaná  $\mathcal{O}$ -symbolika. Prvýkrát bola použitá v knihe *Analytische Zahlentheorie* od Paula Bachmanna [Bachmann, 1894] a neskôr ju spopularizoval Donald Knuth v *The Art of Computer Programming* [Knuth, 1998] [Chalmovianský et al., 2001].

### 4.1 Asymptotická notácia

V našej práci budeme najčastejšie používať asymptotické ohraničenie zhora, ale pre ucelený prehľad si uvedieme aj asymptotické ohraničenie zdola a

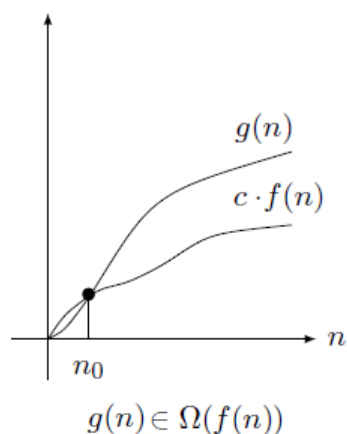
asymptoticky tesné ohraničenie. Obrázky v tejto sekcii sme prevzali z [Lacko, 2007].

*Asymptotickým ohraničením zhora*  $\mathcal{O}(f(n))$  sa označuje množina všetkých takých funkcií  $g(n)$ , pre ktoré existujú konštanty  $n_0 \in \mathbb{N}$ , a  $C \in \mathbb{R}$ ,  $C > 0$  také, že platí  $|g(n)| < C \cdot f(n)$  pre všetky  $n > n_0$  (obr. 2).



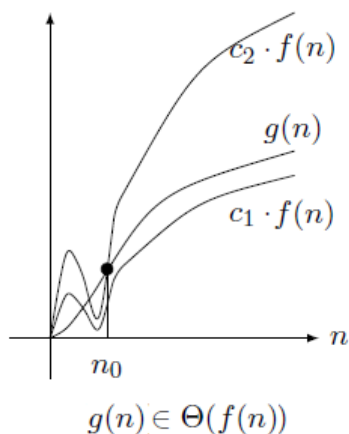
Obr. 2: Asymptotické ohraničenie zhora.

*Asymptotickým ohraničením zdola*  $\Omega(f(n))$  sa označuje množina všetkých takých funkcií  $g(n)$ , pre ktoré existujú konštanty  $n_0 \in \mathbb{N}$ , a  $C \in \mathbb{R}$ ,  $C > 0$  také, že platí  $|g(n)| > C \cdot f(n)$  pre všetky  $n > n_0$  (obr. 3).



Obr. 3: Asymptotické ohraničenie zdola.

*Asymptoticky tesným ohraničením*  $\Theta(f(n))$  sa označuje množina všetkých takých funkcií  $g(n)$ , pre ktoré existujú konštanty  $n_0 \in \mathbb{N}$ , a  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ,  $C_1, C_2 > 0$  také, že platí  $C_1 \cdot f(n) < |g(n)| < C_2 \cdot f(n)$  pre všetky  $n > n_0$  (obr. 4).



Obr. 4: Asymptoticky tesné ohraničenie.

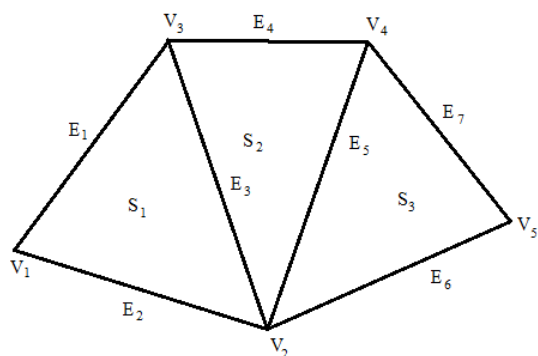
## 4.2 Dvojsmerne spájaný zoznam hrán a okrídlená hrana

Dátová štruktúra *dvojsmerne spájaný zoznam hrán* (DCEL) je často používaná pri reprezentácii rovinných útvarov ako aj na reprezentáciu lomených plôch.

Ako príklad si vezmime rovinný graf  $G$ . Množinu jeho vrcholov si označme  $V = v_1, \dots, v_n$ , množinu hrán  $E = e_1, \dots, e_m$  a množinu stien  $F = f_1, \dots, f_k$ . Základ štruktúry DCEL nazveme hranový uzol. Ku každej hrane grafu  $G$  je jednoznačne priradený práve jeden takýto uzol. Hranový uzol sa skladá z informačnej časti a časti obsahujúcej dva smerníky  $p_1$  a  $p_2$ . V informačnej časti sa nachádzajú údaje o začiatku hrany ( $V_1$ ), konci hrany ( $V_2$ ), o pravej príľahlej stene ( $F_1$ ) a o ľavej príľahlej stene ( $F_2$ ). Smerník  $p_1$  odkazuje na prvú hranu susednú so spracovávanou hranou, ak sú jej susedia zo začiatočného vrcholu usporiadaný v zmysle kladnej orientácie. Podobne smerník  $p_2$  je odkazom na prvú susednú hranu k danej hrane, ak pozeráme jej susedov v protismere chodu hodinových ručičiek z jej koncového vrcholu. Táto reprezentácia nám umožňuje efektívne určovať susednosť stien, nachádzať hranice oblastí, a v prípade, ak poznáme aspoň jednu hranu incidentnú s vrcholom, vieme ostatné hrany určiť v čase úmernom stupňu vrcholu. Táto dátová štruktúra sa často nazýva aj *okrídlená hrana* [Chalmovianský et al., 2001].

Štruktúru okrídlená hrana je možné reprezentovať aj tromi zoznamami, ktoré sú hierarchicky usporiadané. Najvyššia úroveň je tvorená zoznamom stien, kde každá plocha odkazuje na jednu svoju hranu. O stupeň nižšie sa nachádza zoznam hrán, v ktorom je uložené najväčšie množstvo informácií – nachádzajú

sa tu odkazy na všetky susedné geometrické elementy – oba susedné vrcholy, všetky susedné plochy a všetky susediace hrany. Na najspodnejšej úrovni je zoznam vrcholov, ktorý zaznamenáva geometriu celého objektu, teda sú v ňom uložené súradnice jednotlivých vrcholov (obr. 5).



Tabuľka vrcholov	
V <sub>1</sub>	$x_1, y_1, z_1$
V <sub>2</sub>	$x_2, y_2, z_2$
V <sub>3</sub>	$x_3, y_3, z_3$
V <sub>4</sub>	$x_4, y_4, z_4$
V <sub>5</sub>	$x_5, y_5, z_5$

Tabuľka hrán							
E <sub>1</sub>	V <sub>1</sub>	V <sub>3</sub>	F <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>	E <sub>4</sub>
E <sub>2</sub>	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	F <sub>1</sub>	E <sub>1</sub>	E <sub>1</sub>	E <sub>3</sub>	E <sub>6</sub>
E <sub>3</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>	F <sub>1</sub> F <sub>2</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>5</sub>	E <sub>1</sub>	E <sub>4</sub>
E <sub>4</sub>	V <sub>3</sub>	V <sub>4</sub>	F <sub>2</sub>	E <sub>1</sub>	E <sub>3</sub>	E <sub>7</sub>	E <sub>5</sub>
E <sub>5</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>4</sub>	F <sub>2</sub> F <sub>3</sub>	E <sub>3</sub>	E <sub>6</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>7</sub>
E <sub>6</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>5</sub>	F <sub>3</sub>	E <sub>5</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>7</sub>	E <sub>7</sub>
E <sub>7</sub>	V <sub>4</sub>	V <sub>5</sub>	F <sub>3</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>5</sub>	E <sub>6</sub>	E <sub>6</sub>

Tabuľka stien	
S <sub>1</sub>	E <sub>1</sub>
S <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>
S <sub>3</sub>	E <sub>5</sub>

Obr. 5: Graf a jeho reprezentácia pomocou okrádlenej hrany.

## 5 Algoritmus zjednodušenia siete

Samotný algoritmus je rozdelený na štyri časti, ktorými sa budeme podrobne zaoberať v nasledujúcich častiach, ale najskôr si popíšeme vstupy nášho algoritmu.

### 5.1 Vstupné dáta

Vstupom do nášho algoritmu budú mnohouholníková sieť, ktorej steny sú trojuholníkmi, a štyri používateľom nastaviteľné parametre, ktoré budú určovať

mieru zjednodušenia výslednej siete. Týmito parametrami sú:

**Počet deliacich rovín:** tento parameter budeme označovať  $q$ . Toto číslo nám udáva koľkými rovnobežnými ekvidištančne vzdialenými rovinami bude objekt rozdelený. Čím je ich počet menší, tým výraznejšie môže byť zníženie množstva trojuholníkov. Samozrejme, so znižujúcim sa kvantom trojuholníkov sa znižuje aj podobnosť medzi zjednodušeným a pôvodným objektom.

**Vzdialenosť bodu od priamky prechádzajúcej jeho susednými vrcholmi:** označujeme ako  $p$ . Udáva maximálnu povolenú vzdialenosť vrcholu lomenej čiary od jeho susedných vrcholov.

**Maximálna dĺžka hrany lomenej čiary:** je určená na zabránenie vzniku dlhých hrán bez bodov, ktoré by mohli vzniknúť pri použití predchádzajúceho parametra. Definuje maximálnu povolenú vzdialenosť dvoch bodov po zjednodušení. Ak by sa pri odstraňovaní niektorého bodu táto hranica prekročila, odstránenie neprebehne a postúpi sa na ďalší vrchol mnohouholníka. Tento parameter budeme označovať  $\lambda$ .

**Miera zachovania obsahu mnohouholníka:** určuje o koľko percent sa môže zmeniť obsah nového mnohouholníka oproti pôvodnému. Zároveň zabráňuje degenerácii mnohouholníkov na úsečky.

### 5.2 Predspracovanie

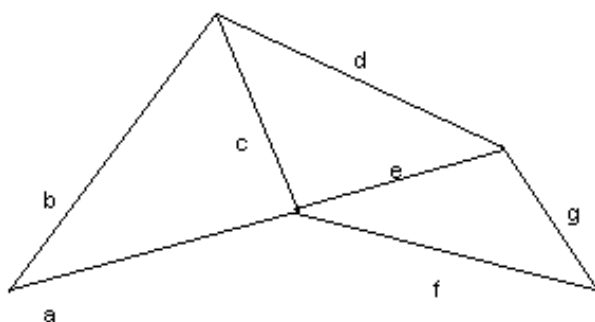
Prvým krokom nášho algoritmu je načítanie objektu zo súboru. Objekt načítavame do dátovej štruktúry navrhutej pre náš algoritmus.

Najprv si popíšeme štruktúru jednej bunky, z ktorej sa naša dátová štruktúra bude skladať:

Každý z týchto základných prvkov sa delí na tri časti. V prvej sú uložené koncové body danej hrany, v druhej časti sa nachádzajú štyri smerníky na ďalšie hrany (obr. 6) a v poslednej je uložená informácia o tom, či bola daná hrana už spracovaná. Jedná sa teda o dátovú štruktúru, ktorá je podobná štruktúre okrádlená hrana.

Keď už vieme z akých častí sa skladá celá štruktúra, môžeme si bližšie popísať jej napĺňanie. Predpokladajme, že štruktúra je už čiastočne naplnená – teda už existuje zoznam spracovaných hrán. Tento zoznam si označme  $A$ . Následne chceme pridať hrany ďalšieho trojuholníka. Označme si hrany tohto trojuholníka ako  $t_1$ ,  $t_2$  a  $t_3$ . Najprv spracujeme hranu  $t_1$ . Postupne budeme prechádzať zoznamom už spraco-

vaných hrán a budeme overovať, či sa tam už daná hrana nenachádza. Ak sa tam nenachádza, priradíme ju do zoznamu a zapamätáme si jej polohu. V prípade, že sa v zozname už nachádza, hranu neprikladáme, len si uložíme jej pozíciu v zozname hrán. Následne podobným spôsobom spracujeme aj hrany  $t_2$  a  $t_3$ . Po tomto kroku budeme mať uložené pozície troch hrán, ktoré teraz navzájom prepojíme smerníkmi. Teda z bunky pre hranu  $t_1$  budú smerníky odkazovať na bunky s hranami  $t_2$  aj  $t_3$ , z bunky obsahujúcej hranu  $t_2$  budú odkazy na bunky s  $t_1$  aj  $t_3$ , a bunka  $t_3$  bude odkazovať na  $t_1$  a  $t_2$ . Vzhľadom na to, že každá hrana patrí práve dvom trojuholníkom, každá bunka bude celkovo odkazovať na štyri ďalšie hrany.



index	1	2	3	4	5	6	7
hrana	a	b	c	d	e	f	g
smernik1	2	1	1	3	3	5	5
smernik2	3	3	2	5	4	7	6
smernik3	-	-	4	-	6	-	-
smernik4	-	-	5	-	7	-	-
spracovane	0	0	0	0	0	0	0

Obr. 6: Na obrázku vidíme trojuholníky, ku ktorým je v tabuľke vytvorená dátová štruktúra používaná v našom algoritme. Smerníky, ktorým nie je zadaná číselná hodnota, neodkazujú na žiadnu ďalšiu hranu – takýto prípad sa nám v našom algoritme nevyskytne, keďže každá hrana patrí práve dvom trojuholníkom.

### 5.3 Výpočet hrán lomených čiar

Tento krok je prvým pri samotnom zjednodušovaní objektu. Vstupmi sú v tomto prípade mnohoúhľovníková sieť, ktorú chceme zjednodušiť – uložená v štruktúre vytvorenej pri predspracovaní, a počet rovín  $q$ .

Najprv si vytvoríme rezové roviny kolmé na os  $x$  nasledovne:

1. Prvá bude mať rovnicu  $x - x_{min} = 0$  a posledná  $x - x_{max} = 0$ , kde  $x_{min}$  a  $x_{max}$  sú minimálna a maximálna  $x$ -ová súradnica vrcholov vstupného objektu. Tieto informácie možno získať už v predspracovaní alebo lineárnym prechodom cez vstupnú dátovú štruktúru.
2. Medzi týmito dvomi rovinami rozmiestnime ďalších  $q - 1$  rovnobežných rovín ekvidistančne. Vo všeobecnosti teda možno napísať, že budeme mať  $q + 1$  rovín v tvare
 
$$p_d : x - x_{min} - d \frac{x_{max} - x_{min}}{q} = 0, \text{ kde } d = 0, \dots, q.$$

Teraz už možno pristúpiť k určovaniu lomených čiar. Hrany týchto čiar budú tvorené prienikmi jednotlivých rezových rovín s trojuholníkmi objektu.

Výpočet bude prebiehať tak, že postupným prechádzaním zoznamu  $A$  nájdeme prvú takú hranu, ktorá pretína niektorú z rovín  $p_d$ ,  $d = 0, \dots, q - 1$ . Tým hranám, ktoré boli počas tohto hľadania spracované ale prienik sa nenašiel, zmeníme stav spracovania na true. Po nájdení prvej hrany, určíme jej prienik s danou rovinou – označme si ju  $p_k$ . Nech táto hrana patrí trojuholníku  $r_l$ . Následne spočítame prienik  $p_k$  aj s ostatnými hranami  $r_l$ . Počet bodov, ktoré dostaneme bude určite rovný dvom (v špeciálnych prípadoch môžu byť dané dva body totožné). Tieto dva body nám určujú úsečku, ktorá je prienikom roviny  $p_k$  s trojuholníkom  $r_l$ . Podobným spôsobom overíme či  $r_l$  nemá prienik aj s rovinami  $p_{k-1}$  a  $p_{k+1}$ . Ak hrana  $r_l$  nemá prienik s inou rovinou, tak ju označíme za spracovanú. Vďaka našej dátovej štruktúre vieme, ktoré trojuholníky vstupného objektu susedia s  $r_l$ . Preto môžeme postupovať po susedných trojuholníkoch tak, že sa postupne bude v rovine  $p_k$  vytvárať lomená čiara, ktorá bude predstavovať prienik objektu s danou rovinou.

Po vytvorení uzavretej lomenej čiary sa bude opäť vyhľadávať taká nespracovaná hrana, ktorá má prienik s niektorou z rezových rovín. Ak ju nájdeme, bude sa opakovať postup opísaný vyššie. Vytváranie lomených čiar skončí, keď budú všetky hrany v  $A$  označené ako spracované.

Pre každú rovinu sa budú lomené čiary ukladať v poli. Označme si tieto polia  $Q_0, \dots, Q_{q-1}$ . Prvky polí  $Q_i$ ;  $i = 0, \dots, q - 1$  si označme  $q_{i0}, \dots, q_{im}$ . V prípade, že je vstupný objekt nekonvexný, môže nastať situácia, pri ktorej sa v jednej rovine budú nachádzať viaceré uzavreté lomené čiary. Tieto čiary navzájom oddelíme špeciálnym prvkom v poli, ktorý vkladáme

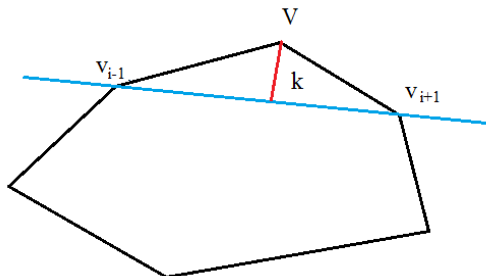
dáme za posledný prvok aktuálnej lomenej čiary a pred prvý prvok nasledujúcej lomenej čiary. Vďaka tomuto prvku budeme vedieť v nasledujúcich krokoch rozlíšiť jednotlivé lomené čiary.

## 5.4 Zjednodušovanie

V tejto časti nastane samotné zjednodušenie siete. Vstupnými parametrami budú vzdialenosť  $-p$ , dĺžka  $-\lambda$  a výstup predchádzajúceho kroku – teda polia  $Q_0, \dots, Q_{q-1}$ . Každú uzavretú lomenú čiaru spracujeme nasledovne:

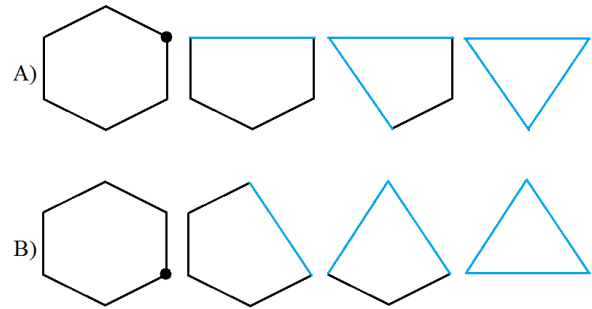
Majme mnohoúhelník  $Q$  a množinu jeho vrcholov  $V$ . Jednotlivé vrcholy si označme  $v_1, \dots, v_n$ . Nech je tento zoznam vrcholov cyklický. Ako vidíme na obrázku 7, vzdialenosť  $k$  predstavuje vzdialenosť vrcholu  $v_i$  mnohoúhelníka od priamky prechádzajúcej cez jeho susedné body  $v_{i-1}$  a  $v_{i+1}$ . Ak je  $k \leq p$ , tak bod  $v_i$  z mnohoúhelníka vynecháme a pridáme hranu spájajúcu vrcholy  $v_{i-1}$  a  $v_{i+1}$ . Postupným prechádzaním cez všetky vrcholy mnohoúhelníka docielime zníženie počtu jeho vrcholov, čo nám vo výsledku zníži počet trojuholníkov pri opätovnej triangulácii objektu.

Zároveň dbáme na to, aby sme zachovali aj obsah daného mnohoúhelníka. Teda v prípade ak by percentuálna zmena obsahu mnohoúhelníka prekročila hranicu danú parametrom  $\delta$ , nedôjde k odstráneniu daného vrcholu mnohoúhelníka. Tento postup vynechávania vrcholov je možné opakovať, až kým nenastane prípad, že po prejdení celej lomenej čiary nevytlúčime ani jeden bod.



Obr. 7: Vzdialenosť  $k$  používaná pri zjednodušovaní.

Výsledok tohto postupu nie je jednoznačný, ako ukážeme na obrázku 8.



Obr. 8: Závislosť výsledku zjednodušenia od vrcholu, v ktorom zjednodušovanie začne. V oboch prípadoch začíname vo zvýraznenom vrchole.

## 5.5 Vytvorenie zjednodušeného objektu

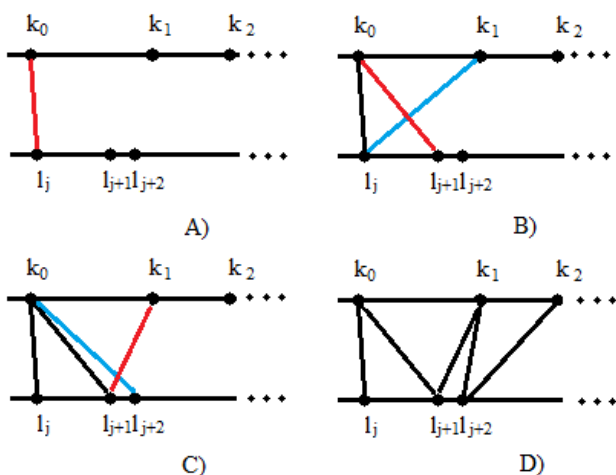
Konečnou fázou celého postupu bude opätovné vytvorenie mnohoúhelníkovej siete. V tomto kroku budeme potrebovať na vstupe zjednodušené lomené čiary a pôvodný objekt. Našou úlohou v tomto kroku algoritmu je prepojiť prvky jednotlivých častí tak, aby vznikla uzavretá lomená plocha. Postupne budeme spracovávať dvojice polí  $Q_i, Q_{i+1}$  a vytvárat výsledný objekt. Pred tým, ako začneme popisovať jednotlivé prípady, ktoré môžu počas vytvárania objektu nastať, si najprv popíšeme riešenie dvoch podproblémov, s ktorými sa budeme stretávať v tejto finálnej fáze.

**Vytvorenie plochy medzi dvoma lomenými čiarami:** Majme zadané dve lomené čiary  $K$  a  $L$ , medzi ktorými sa má vytvoriť lomená plocha. Nech sú body  $k_0, \dots, k_m$  a  $l_0, \dots, l_n$  vrcholmi  $K$  respektíve  $L$  uloženými v cyklickom zozname. Ďalej predpokladajme, že sú dané uzavreté lomené čiary orientované rovnako. Pri vytváraní plochy medzi útvarmi  $K$  a  $L$  sa bude postupovať pomocou nasledujúceho algoritmu:

1. K prvku  $k_0$  nájdeme najbližší vrchol zo zoznamu  $L$ . Nech je týmto prvkom  $l_j$ . Bod  $k_0$  spojíme s bodom  $l_j$ .
2. Následne vypočítame vzdialenosti  $k_0$  od  $l_{j+1}$  a  $k_1$  od  $l_j$ . Spojíme body s menšou vzdialenosťou. Nech je to v našom prípade dvojica  $k_1, l_j$ .
3. V nasledujúcom kroku teda budeme testovať vzdialenosti bodov  $k_1, l_{j+1}$  a  $k_2, l_j$ , a do výsledku pridáme kratšiu hranu.
4. Analogicky ako v predchádzajúcom kroku, budeme postupovať, až kým nedospejeme ku



kroku, v ktorom by sme mali opäť pridať hranu  $k_0l_j$ .



Obr. 9: Postup spájania častí dvoch čiar. Na časti A je zobrazená prvá hrana vytvárajúcej plochy. V častiach B a C vidíme modrou farbou vyznačenú hranu, ktorej dĺžku sme počítali ale do výsledku pridaná nebola, naopak červenou farbou je vyznačená pridaná hrana. Na poslednej časti vidíme celú trianguláciu znázornených častí čiar.

**Prepojenie dvoch lomených čiar v jednej rezovej rovine:** Druhým podproblémom, ktorý je potrebné vyriešiť, je spojenie viacerých lomených čiar v jednej rezovej rovine s jednou čiarou v rovine druhej. Majme dve rezové roviny  $Q_i$  a  $Q_{i+1}$ . V  $Q_i$  majme dve lomené čiaru – označme si ich  $K$  a  $L$  a ich prvky  $k_0, \dots, k_m$  a  $l_0, \dots, l_n$ . V rovine  $Q_{i+1}$  majme čiaru  $Y$  s vrcholmi  $y_0, \dots, y_m$ . Ako sme videli v predchádzajúcej časti, na vytvorenie lomenej plochy je nutné, aby obe spájané lomené čiaru mali jeden komponent súvislosti. Teda v našom prípade by sme potrebovali  $K$  a  $L$  spojiť tak, aby vytvárali jednu uzavretú lomenú čiaru. Tento stav dosiahneme nasledujúcim postupom:

1. Premietneme  $K$  a  $L$  do  $Q_{i+1}$  (obr. 10 A).
2. Pre každý vrchol patriaci  $K$  aj  $L$  spočítame minimálnu vzdialenosť k vrcholom  $Y$ .
3. Tie vrcholy, ktorých vzdialenosť od vrcholov lomenej čiaru  $Y$  bola väčšia ako daná prahová hodnota, sa zaradia do zoznamu  $Z$  vrcholov určených na ďalšie spracovanie (obr. 10 B).

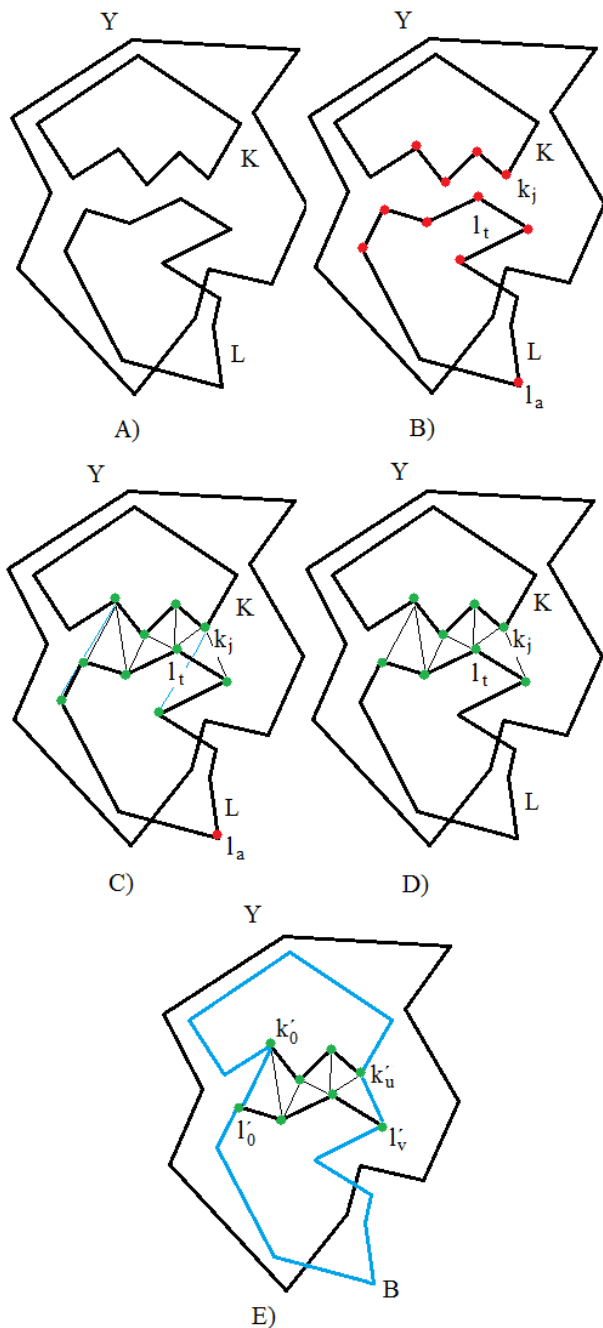
4. Z vrcholov v zozname  $Z$  vyhl'adáme tie dva, ktorých vzájomná vzdialenosť je najmenšia, také, že jeden z nich patrí  $K$  a druhý  $L$ . Nech sú týmito prvkami  $k_j$  a  $l_i$ . Pridajme si tento vrchol  $k_j$  do zoznamu  $K'$ . Do tohto zoznamu budeme ďalej pridávať vrcholy  $k_{j+1}, k_{j+2}, \dots, k_{j+p}$ , dovedy, kým bude každý prvok z nich v zozname  $Z$ . Analogicky pridávame aj vrcholy  $k_{j-1}, k_{j-2}, \dots, k_{j-r}$ . Tieto body pridávame do zoznamu v rovnakom poradí v akom boli na pôvodnej lomenej čiare  $K$ . Podobne budeme postupovať pre bod  $l_i$  a jeho susedné vrcholy, ktoré vložíme do  $L'$  (obr. 10 C).

Po vytvorení zoznamov  $K'$  a  $L'$  môžeme pristúpiť k prepojeniu lomených čiar  $K$  a  $L$ . Prvky v  $K'$  a  $L'$  si označme  $k'_0, \dots, k'_u$  a  $l'_0, \dots, l'_v$ . Tieto prvky nám predstavujú dve neuzavreté lomené čiaru, na ktoré môžeme použiť upravenú verziu algoritmu popísaného v predchádzajúcej časti. Následne overíme, či niektorá hrana triangulácie pretína niektorú z hrán  $k'_j k'_{j+1}$ . Ak nájdeme takúto úsečku, odstránime ju z triangulácie aj s prislúchajúcimi vrcholmi v prípade, že ich stupeň je 1 (vzhľadom na hrany triangulácie). Vytvoríme novú trianguláciu a opätovne overíme prieniky (obr. 10 D). Tento proces opakujeme, kým nenastane prípad, v ktorom sa nevynechal ani jeden bod.

Dĺžka takto vzniknutých pomocných úsečiek (hrán triangulácie) však môže byť veľmi veľká, preto ich prerozdělíme na menšie časti. Prerozděl'ovanie začíname najdlhšou z úsečiek. Najprv si určíme, koľkokrát je dlhšia ako je vzdialenosť dvoch rezových rovín. Označme si tento násobok  $e$ . Každú pomocnú úsečku rozdelíme na  $e$  častí tak, aby novovzniknuté body boli rozdelené na daných úsečkách ekvidištancne (obr. 11 A). Tým nám vzniklo celkovo  $e + 1$  neuzavretých lomených čiar, ktoré vieme navzájom prepojiť trojuhľovníkovou sieťou (obr. 11 B). Označme si ich  $C_0, \dots, C_e$ . Body na úsečkách  $k'_0 l'_0$  a  $k'_u l'_v$  a nespracované vrcholy z  $K$  a  $L$  nám tvoria novú lomenú čiaru  $B$  (obr. 10 E).

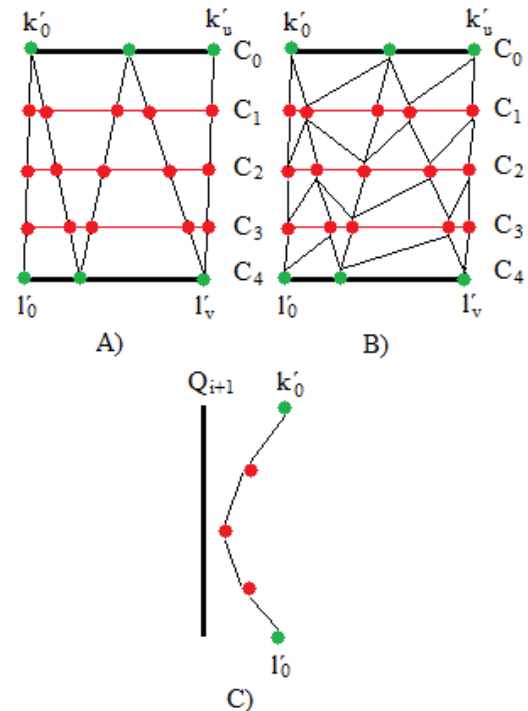
Následne sa premietne  $B$  a aj všetky novovzniknuté body naspäť do roviny  $Q_i$ . Vrcholy čiaru  $B$  teraz môžeme prepojiť s vrcholmi čiaru  $Y$  pomocou algoritmu vytvorenia plochy medzi dvoma lomenými čiarami opísaného v predchádzajúcej časti. Poslednou úpravou bude zmena  $x$ -ových súradníc bodov v rovine  $Q_i$ , ktoré nepatria  $B$ . Jedná sa teda o vrcholy lomených čiar  $C_0, \dots, C_e$ . Súradnice vrcholov  $C_0$  a  $C_e$  necháme nezmenené. Súradnice bodov lomenej čiaru  $C_{\lfloor \frac{e}{2} \rfloor}$  posunieme o  $\frac{4}{5}$  vzdialenosti dvoch

susedných rezových rovín, smerom k rovine  $Q_{i+1}$ . Transformácia  $x$ -ových súradníc vrcholov ostatných lomených čiar bude rovná polovici zmeny k nim susednej, už spracovanej lomenej čiare, ktorej posun bol nenulový (obr. 11 C).



Obr. 10: Lomené čiary  $Y$ ,  $K$  a  $L$  premietnuté do jednej roviny (A). V časti B sú červenou zvýraznené vrcholy zo zoznamu  $Z$ . Následne sa z týchto vrcholov vytvorí zoznamy  $K'$  a  $L'$ . Bod  $l_a$  sa do  $K'$  nevloží, lebo je od ostatných bodov oddelený nezvýraznenými vrcholmi (C). Modrou zvýraznené hrany triangulácie

sa vynechajú (D). Vytvorí sa zoznam B (E).



Obr. 11: Ilustrácia vytvorenia lomených čiar  $C_0, \dots, C_e$ , v tomto prípade je  $e = 4$  (A). Následne sa vytvorí nová triangulácia (B). Časť C zobrazuje zmenu  $x$ -ových súradníc bodov pri pohľade z bočnej strany.

Podobný postup spájania lomených čiar možno použiť aj v prípade väčšieho množstva lomených čiar v jednotlivých rovinách.

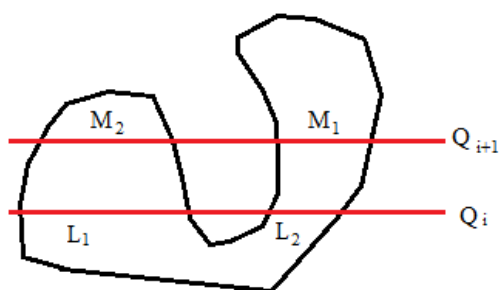
Keď už máme popísané všetky potrebné funkcie, môžeme bližšie popísať tvorbu výstupného objektu. Budeme analyzovať všetky prípady, ktoré pri jeho tvorbe môžu nastať:

Najjednoduchším prípadom je, ak obe polia obsahujú práve jednu lomenú čiaru. V tomto prípade spojíme čiary v oboch rovinách plochou pomocou algoritmu popísaného vyššie.

Relatívne jednoducho je riešiteľný aj prípad, ak sa v oboch susedných rovinách nachádza rovnaký počet lomených čiar. V tomto prípade by sme mali určiť, ktoré čiary si navzájom prislúchajú a následne ich prepojiť podobne ako v predchádzajúcej časti. Na zistenie tejto informácie možno opäť použiť dátovú štruktúru z predspracovania nasledovne:

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že obe roviny obsahujú dve lomené čiary. Označme si tieto lomené čiary ako  $L_1$  a  $L_2$  v prvej rovine, a  $M_1$  a

$M_2$  v druhej rovine. Našou úlohou je teraz zistiť, či máme  $L_1$  spojiť plochou s  $M_1$ . Vyberme si teda z  $L_1$  jednu hranu a k nej prislúchajúci trojuholník z dátovej štruktúry  $A$ . Prechádzajme po susedných trojuholníkoch v tejto štruktúre dovtedy, kým nenájdeme trojuholník, cez ktorý prechádza niektorá z hrán  $M_1$ . Ak nájdeme cestu medzi  $L_1$  a  $M_1$  takú, že nepreťala žiadnu rovinu rezu, okrem hrany lomenej čiary  $M_1$ , môžeme  $L_1$  a  $M_1$  označiť za prepojitelné. V prípade, že cesta prešla aj inou rovinou, otestujeme inú dvojicu čiar. Ak sa nám podarí označiť všetky lomené čiary za prepojitelné, tak jednotlivé dvojice prepojíme plochou (obr. 12). Inak nastáva prípad popisovaný v nasledujúcom odseku.

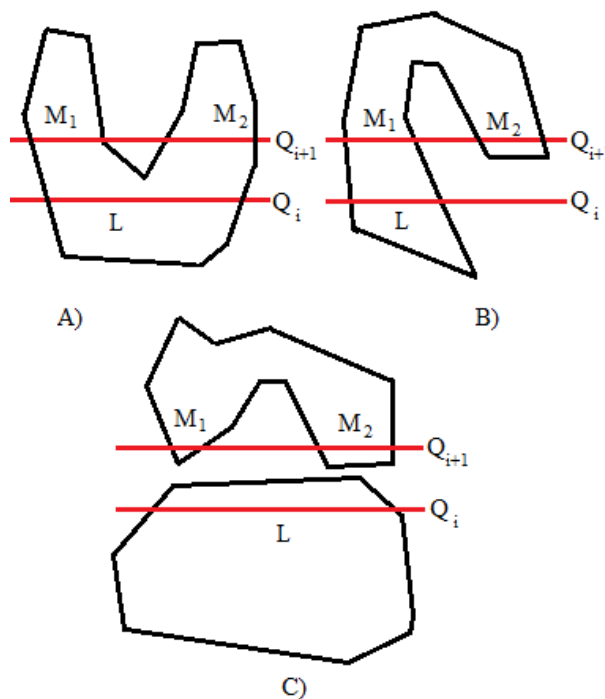


Obr. 12: Na obrázku sa nachádza ilustrácia objektu a dvoch rezových rovín vyznačených červenou farbou. V každej rovine sa nachádzajú dve lomené čiary. Vidíme, že z čiary  $L_1$  nevieme prejsť k lomenej čiare  $M_1$  bez toho aby sme nepreťali inú lomenú čiaru ako  $M_1$ . Existuje však takáto cesta medzi čiarami  $L_1$  a  $M_2$ . Podobne aj pre  $L_2$  a  $M_1$ .

Najzložitejším prípadom je, ak sa majú prepojiť dve roviny, v ktorých sa nachádza rôzne množstvo lomených čiar, alebo ak sa v rovinách s rovnakým počtom čiar nachádzajú navzájom nesúvisiace lomené čiary. Tento prípad budeme riešiť podobne ako predchádzajúci, teda pomocou hľadania navzájom prislúchajúcich si lomených čiar, ale bude prípustné, aby sa k jednej lomenej čiare z prvej roviny priradilo viacero čiar z roviny druhej (alebo naopak). Popíšme si teda ako by prebiehal algoritmus v tejto časti.

Pre jednoduchosť vezmeme dve roviny, z ktorých v prvej sa nachádza jedna lomená čiara –  $L$  a v druhej dve –  $M_1$  a  $M_2$ . Následne overme, či existuje taká cesta medzi  $L$  a  $M_1$ , ktorá nepreťína žiadne ine roviny. Ak áno, tak  $M_1$  priradíme k  $L$ . Podobne postupujeme aj s dvojicou  $L$  a  $M_2$ . V tomto prípade môžu nastať tri prípady:

- Obe čiary  $M_1$  a  $M_2$  sa priradili čiare  $L$  – teda musíme najskôr prepojiť  $M_1$  a  $M_2$  navzájom a následne ich spojíme s čiarou  $L$  (obr. 13 A).
- Lomenej čiare  $M_1$  sme priradili  $L$  a  $M_2$  nie – v tomto prípade vytvoríme plochu medzi  $M_1$  a  $L$ . Lomená čiara  $M_2$  bude predstavovať novú časť objektu. Ak nastane takáto situácia, vytvorí sa triangulácia mnohoúhľovníka, ktorého hranicou je lomená čiara  $M_2$  (obr. 13 B). Analogický prípad nastáva aj v prípade ak  $M_2$  je priradený  $L$  a  $M_1$  nie je.
- Lomeným čiarám  $M_1$  ani  $M_2$  sa čiara  $L$  nepriradila. V tomto prípade sa spraví triangulácia všetkých mnohoúhľovníkov, ktorých hranicou sú dané lomené čiary (obr. 13 C).



Obr. 13: Na obrázku sú znázornené rôzne prípady ktoré môžu nastať pri spájaní rezových rovín s rôznym počtom lomených čiar.

## 6 Zložitosť navrhnutého algoritmu

Ku koncu popisu nášho algoritmu uvedieme analýzu zložitosti navrhnutého riešenia.

### 6.1 Časová zložitosť

V tejto časti si budeme postupne rozoberať časovú náročnosť jednotlivých častí nášho riešenia:

### Predspracovanie

Načítanie objektu zo súboru zaberie čas  $\mathcal{O}(n)$ , kde  $n$  predstavuje počet stien mnohouholníkovej siete. Následne sa musia načítané hrany stien vložiť do definovanej dátovej štruktúry  $A$ . Túto operáciu budeme vedieť vykonať v čase  $\mathcal{O}(n^2)$ . Táto operácia sa však vykonáva jedine pri načítaní nového objektu a pri akejkoľvek zmene parametrov zjednodušenia možno použiť rovnakú dátovú štruktúru.

### Výpočet hrán lomených čiar

Nájdienie súradníc  $x_{max}$  a  $x_{min}$  nám zaberie čas  $\mathcal{O}(n)$  – prejdeme postupne všetky prvky v  $A$  a nájdeme tie, ktoré majú minimálnu a maximálnu súradnicu. Následné určenie rovín vieme vykonať v konštantnom čase  $\mathcal{O}(1)$ . Keďže pri zisťovaní, či má daný trojuholník prienik s rovinou, overíme každý trojuholník, tento krok nám zaberie celkovo čas  $\mathcal{O}(n)$ . Celková zložitosť tejto časti algoritmu je teda  $\mathcal{O}(n)$ .

### Zjednodušovanie

Predpokladajme, že počet hrán lomených čiar je lineárne závislý od počtu stien vstupnej mnohouholníkovej siete. Najhorší prípad, ktorý môže v tomto kroku nastať, je, ak vždy vynecháme len jednu hranu a na konci nám ostane  $k$  hrán kde  $k \ll n$ . V tomto prípade odstránime  $n - k$  na  $n - k$  prechodov. Keďže  $k$  je zanedbateľné, celkovo sa dá zjednodušovanie vykonať v čase  $\mathcal{O}(n^2)$ .

### Vytvorenie zjednodušeného objektu

Ako vidíme, záverečná časť nášho algoritmu je časovo najnáročnejšia. Jej časová zložitosť úzko súvisí s pôvodnou topológiou zjednodušeného objektu. Jej časovú náročnosť by sme z empirických skúseností vedeli odhadnúť na  $\Omega(n^3)$ .

## 6.2 Pamäťová náročnosť

Počas celého behu algoritmu udržujeme v pamäti všetky hrany zjednodušeného objektu. Ďalej si udržujeme aj informáciu o hranách lomených čiar vzniknutých v rezových rovinách. Týchto hrán by však nemalo byť viac ako hrán pôvodného objektu. Teda celková pamäťová náročnosť je  $\mathcal{O}(n)$ .

## 7 Výsledky a implementácia

### 7.1 Implementácia

Načítanie súborov typu .obj bolo implementované pomocou knižnice glm.cpp a ich rotácia pomocou

knižnice trackabll.cpp. Celý program bol naprogramovaný v jazyku C++ s použitím OpenGL.

Prvým krokom implementácie bolo vytvorenie beta-verzie. V tejto verzii samozrejme neboli implementované všetky navrhnuté časti algoritmu. Pomocou tohto programu sme sa však utvrdili, že navrhovaný algoritmus je reálne schopný znížiť počet trojuholníkov vstupnej mnohouholníkovej siete tak, aby bol výstupný objekt podobný objektu vstupnému. Podobnosť bola posudzovaná čisto vizuálne používateľom.

Následne sme pristúpili k implementácii celého algoritmu. Vzhľadom na časovú náročnosť predspracovania sme sa rozhodli po prvom spracovaní ukladať štruktúru  $A$  do binárneho súboru, a pri nasledujúcom spustení programu ju už len načítať, čím sme výrazne urýchlili spustenie programu. Niektoré z funkcií sme mohli použiť už z implementovanej beta-verzie, avšak mnohé z nich bolo nutné upraviť alebo naprogramovať namiesto nich nové, používajúce štruktúru  $A$ .

### 7.2 Výsledky

Pri testovaní programu sme použili niekoľko objektov vytvorených v programe Blender. Pri testoch na objektoch so zložitejšou topológiou ešte dochádza k nepresnostiam v tvorbe nového objektu v poslednej časti algoritmu, teda pri vytváraní novej mnohouholníkovej siete.

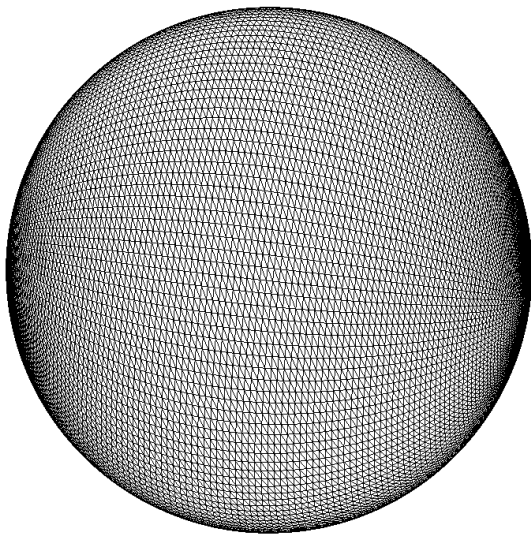
Prvým testovaným objektom bola guľa, ktorá mala 32512 trojuholníkov. Objekt bol rozdelený 58 rovinami, v ktorých vznikli lomené čiary, ktoré mali spolu 25248 hrán. Po aplikácii zjednodušenia daných lomených čiar ostalo celkovo 2828 hrán a výsledný objekt mal 11638 trojuholníkov. Nasledujúce obrázky ukazujú jednotlivé kroky algoritmu s nastaveniami:

$$\begin{aligned} q &= 57 \\ \lambda &= 0,15 \\ p &= 2.0 \\ \delta &= 0,8 \end{aligned}$$

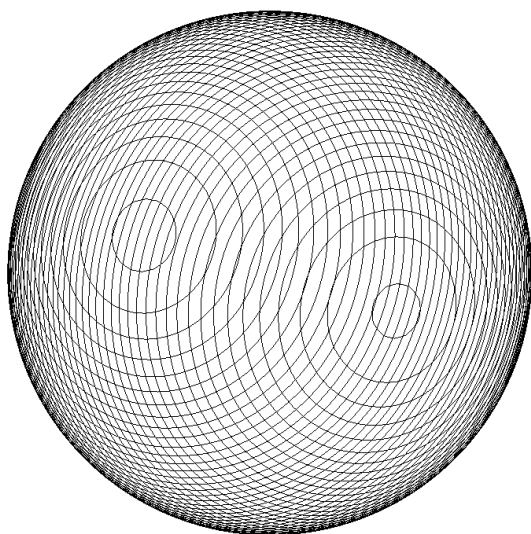
Ďalší testovaný objekt mal pred spracovaním 61440 trojuholníkov, ktorých počet sa po spracovaní znížil na 8446. Lomené čiary vznikajúce pri rozdelení objektu mali 23808 hrán, z ktorých bolo 22159 odstránených. Nastavenia zjednodušenia boli rovnaké ako v predchádzajúcom prípade.

Objekt	Gul'a	Objekt2
vstup – poč. trojuh.	32512	61440
výstup – poč. trojuh.	11638	8446
$t_1$	2,075 s	3,387 s
$t_2$	2,135 s	3,677 s
$t_3$	582,835 s	2055,142 s

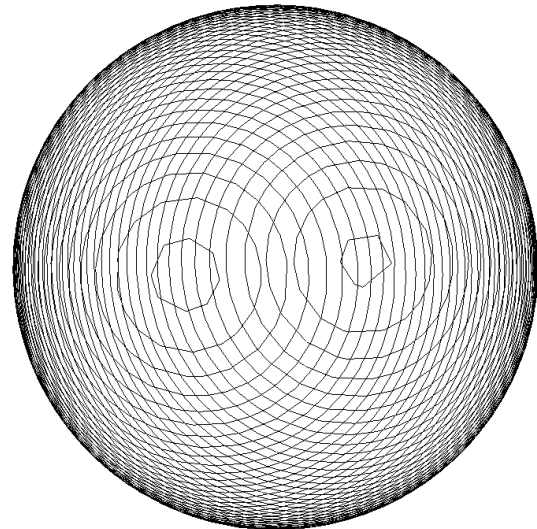
Tabuľka 1: Porovnanie výsledkov algoritmu na dvoch objektoch. Čas  $t_1$  je bez načítania dátovej štruktúry z binárneho súboru,  $t_2$  s načítaním a  $t_3$  udáva čas behu algoritmu aj s vytváraním dátovej štruktúry.



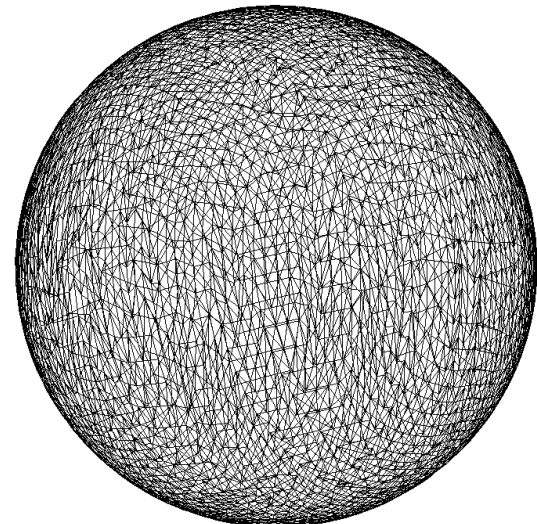
Obr. 14: Gul'a s polomerom 1 a 32512 trojuholníkmi.



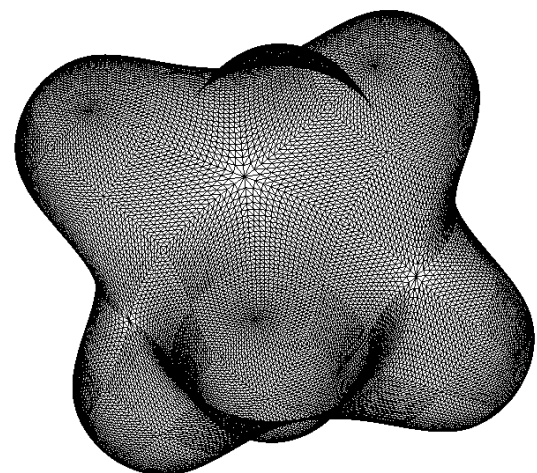
Obr. 15: Lomené čiary vzniknuté po rozdelení gule 58 rezovými rovinami.



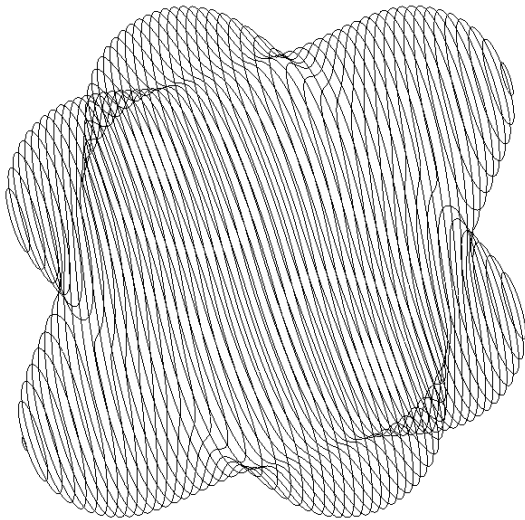
Obr. 16: Lomené čiary po ich zjednodušení.



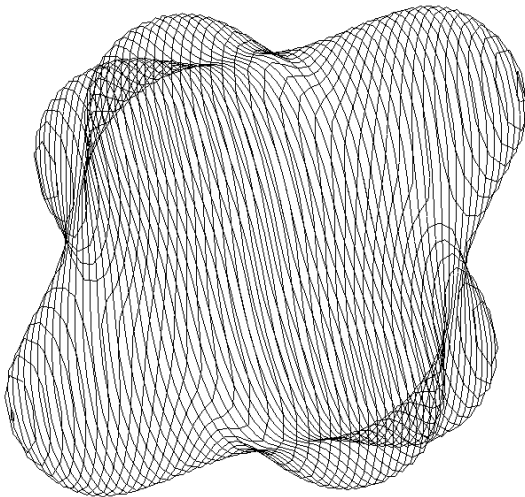
Obr. 17: Nový objekt s 11638 trojuholníkmi.



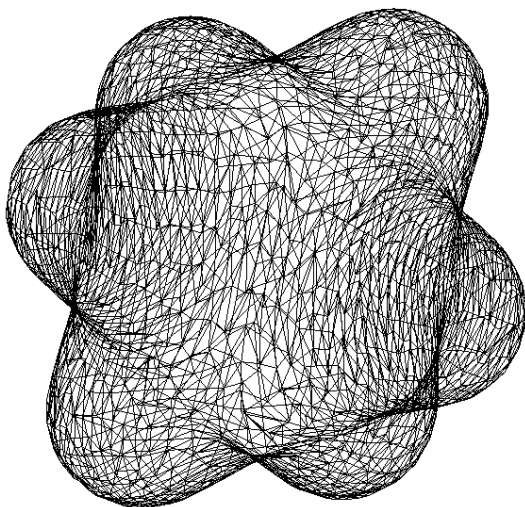
Obr. 18: Vstupný objekt s 61440 trojuholníkmi.



Obr. 19: Uzavreté lomené čiary vzniknuté počas rozdelenia objektu.



Obr. 20: Zjednodušenie lomených čiar. Celkovo ostalo 1649 hrán.



Obr. 21: Novovytvorený objekt s 8446 trojuholníkmi.

## 8 Ďalšia práca

V budúcnosti by sme radi odstránili nejednoznačnosť zjednodušovania lomených čiar a zároveň by sme radi upravili časť prepájania dvoch lomených čiar v jednej rezovej rovine tak, aby zmeny  $x$ -ových súradníc vrcholov lomených čiar  $C_0, \dots, C_e$ , boli upravované na základe zakrivenia pôvodného objektu. Zaujímavou možnosťou je rozšírenie množiny objektov, ktoré je algoritmus schopný spracovať, aj na lomené plochy s hranicou.

Ako sme videli, celková časová zložitosť algoritmu vo všeobecnosti nie je lepšia ako  $\mathcal{O}(n^2)$ , čo je spôsobené zjednodušením lomených čiar a opätovným vytvorením mnohoholníkovej siete (predspracovanie sa vykonáva len raz, preto tento krok neuvažujeme). V budúcnosti by sme preto radi navrhli algoritmus pracujúci s lomenými čiarami, ktorý by vynechal tieto časovo náročné kroky.

## Literatúra

- [Bachmann, 1894] Bachmann, P. (1894). *Die Analytische Zahlentheorie*. Leipzig B.G. Teubner.
- [Božek, 2009] Božek, M. (2009). Študijné materiály k predmetu geometria 1.
- [Canas and Gortler, 2006] Canas, G. D. and Gortler, S. J. (2006). Surface remeshing in arbitrary codimensions.
- [Chalmovianský et al., 2001] Chalmovianský, P., Ferko, A., Galbavý, R., and Ľudovít Niepel (2001). *Zložitosť geometrických algoritmov*. Univerzita Komenského.
- [de Berg et al., 2000] de Berg, M., van Kreveld, M., Overmars, M., and Schwarzkopf, O. (2000). *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, second edition.
- [Garland and Heckbert, 1997] Garland, M. and Heckbert, P. S. (1997). Surface simplification using quadric error metrics. In *SIGGRAPH*, pages 209–216.
- [Hussain et al., 2004] Hussain, M., Okada, Y., and Nijima, K. (2004). Efficient and feature-preserving triangular mesh decimation. *Journal of WSCG*, 2004.
- [Knuth, 1998] Knuth, D. (1998). *The Art of Computer Programming, volume 1: Fundamental algorithms*. Addison-Wesley Publishing Company.
- [Lacko, 2007] Lacko, V. (2007). Kombinatorické algoritmy.
- [Schroeder et al., 1992] Schroeder, W. J., Zarge, J. A., and Lorenson, W. E. (1992). Decimation of triangle meshes. In *Computer Graphics (SIGGRAPH '92 Proceedings)*, pages 65–70.

# HDR SMISS – High Dynamic Range Scalable Multifunctional Indoor Scanning System

Tomáš Kovačovský<sup>1\*</sup>  
Školiteľ: Ján Žižka<sup>2†</sup>

<sup>1</sup> KAGDM, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

<sup>2</sup> KAI, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Tento článok pojednáva o jednoduchom prehľade metód automatickej rekonštrukcie scény, ale najmä predkladá prehľad výsledkov na vývoji systému SMISS, určeného na automatickú optickú 3D rekonštrukciu v metrických súradniciach. Poukazuje na doteraz neadresovaný problém dynamického rozsahu zariadení v oblasti optickej 3D rekonštrukcie a ponúka riešenie pomocou dodatočného hardvéru v podobe sekundárnej kamery a optických komponentov - polopriehľadné zrkadlo a lineárne polarizačné filtre. Prvotné experimenty potvrdili zvýšenú robustnosť pri skenovaní scén s vysokým dynamickým rozsahom.

**Kľúčové slová:** 3D rekonštrukcia, kamera, projektor, kalibrácia, triangulácia, trojrozmerné mračno bodov, viac pohľadová geometria, vytváranie hĺbkovej mapy, počítačové videnie, polarizácia, HDR

## 1 Úvod

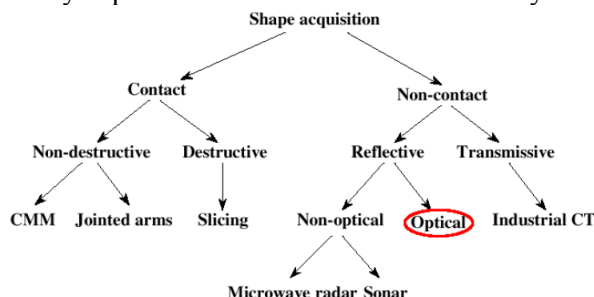
Neustále napredovanie výkonu počítačov nám v súčasnosti umožňuje zobrazit' virtuálny obsah v nevídanej kvalite. Virtuálny obsah máme dnes možnosť pozorovať v televízií, animovaných filmoch, počítačových hrách, na internete, ale aj pri rôznych vizualizáciách stavieb a podobne. Pričom počítačová fikcia a zobrazovanie trojrozmerného sveta je už často krát na nerozoznanie od fotografií. A práve pokrok na poli 3D počítačovej grafiky zvyšuje dopyt po trojrozmerných počítačových modeloch. Na vytváranie počítačových modelov je k dispozícii množstvo modelovacích programov, avšak zhotovenie kvalitného modelu si vyžaduje tréning a veľké množstvo času. Preto je potrebné mať systémy na rýchlu a kvalitnú rekonštrukciu objektov, ktoré by boli schopné automaticky nasnímať reálny objekt a interpretovať ho ako 3D model. Vďaka pokroku v presnosti meracích zariadení a zvyšujúcej sa kvalite ostatných hardvérových súčastí je dnes na trhu dostupných

mnoho systémov na automatickú 3D rekonštrukciu objektov.

V ďalších kapitolách sa budeme zaoberať stručným prehľadom týchto systémov, ale najmä realizáciou konkrétneho zariadenia z triedy optických bezkontaktných skenerov - SMISS. Popíšeme konštrukciu a implementáciu jednotlivých častí a metód systému. Predostrieme problém nedostatočného dynamického rozsahu optických systémov a jeho navýšenie prostredníctvom inovatívneho navrhnutého prístupu pre systém SMISS.

## 2 Prehľad

V tejto kapitole stručne popíšeme prehľad systémov určených pre automatickú rekonštrukciu scény.



Obrázok 1: rozdelenie prístupov pre automatickú rekonštrukciu. Zdroj: [Curless et al., 2000]

Všetky systémy možno rozdeliť na kontaktné a bezkontaktné, podľa toho, či dochádza k priamemu fyzickému kontaktu so skenovaným objektom.

### 2.1 Kontaktné systémy

Kontaktné systémy možno používať pri objektoch, ktoré sa dotykom senzora neznehodnotia, prípadne snímaný objekt už nebude potrebný, v tom prípade je možné použiť metódy **deštruktívne**, medzi ktoré patrí aj tzv. vrstvenie, pri ktorom sa meraný objekt postupne nareže rovnobežnými rovinami, ktoré sa vyhodnocujú zvlášť pomocou rovinných skenerov a výsledné dáta sa zaregistrujú do výsledného volumetrického 3D modelu.

\* tomas.kovacovsky@gmail.com

† jzizka@gmail.com

Ak si však snímaný objekt nemôžeme dovoliť poškodiť, môžeme použiť systémy ako **CMM** (z angl. Coordinate-measuring machine), prípadne **systém pohyblivých ramien** s dotykovým meracím senzorom.

## 2.2 Bezkontaktné systémy

Bezkontaktné systémy vo všeobecnosti využívajú žiarenie, prípadne vlnenie, ktoré sa odráža, prípadne prechádza meraným objektom.

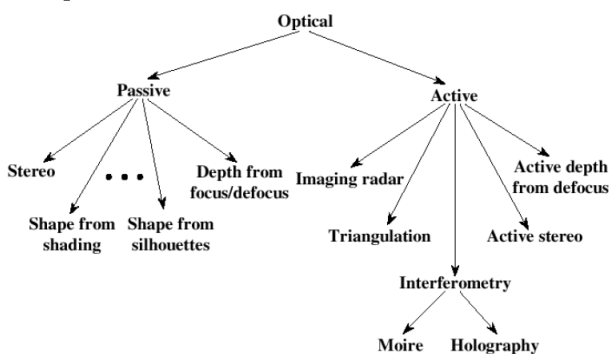
Medzi systémy využívajúce **prechod žiarenia** cez meraný objekt patrí zariadenie z názvom **CT** (z angl. computed tomography). Počítačová tomografia sa používa najmä v medicíne, ale aj v priemysle, jej výhodou je, že nám poskytuje aj objemové dáta (vnútro objektu), nie iba jeho povrch.

Systémy využívajúce **odrazivosť** snímaného **materiálu** môžeme ďalej deliť na optické a neoptické, medzi ktoré patrí napríklad **radar** (z angl. radio detection and ranging), alebo **sonar** (z angl. sound navigation and ranging), ktoré využívajú mikrovlnné žiarenie, respektíve zvukové vlny.

O optických systémoch si povieme bližšie v ďalšej podkapitole.

## 2.3 Optické systémy

Vzhľadom na početnosť prístupov v tejto oblasti sa budeme zaujímať bližšie len relevantnými systémami spadajúcimi do triedy bezkontaktných optických skenerov založených na reflexii od povrchu, prehľad vetvy optických systémov ponúkame na obrázku 2. Pre podrobnejší prehľad systémov v tejto oblasti odporúčame [Sansoni et al., 2009].



Obrázok 2: Základné rozdelenie optických systémov pre automatickú rekonštrukciu. Zdroj: [Curless et al., 2000]

**Pasívne systémy** snímajú scénu osvetlenú okolitým osvetlením, správajú sa pasívne, so scénou žiadnym spôsobom neinteragujú.

Medzi pasívne systémy radíme pasívnu stereovíziu [Tátraiová, 2007], získavanie tvaru z tieňovania [Zhang et al., 1999], z kontúry, prípadne určovanie hĺbky z rozostrenia.

**Aktívne systémy** sa vyznačujú interakciou s meraným objektom, a to vo forme osvetlenia objektu vhodným osvetlením, prípadne zmenou hardvérových nastavení pre kvalitnejšie zaznamenanie údajov pre opätovné skenovanie.

Táto kategória nám ponúka menšiu závislosť na konkrétnych vlastnostiach skenovaných objektov, ako aj vo všeobecnosti vyššiu dosahovanú presnosť a rýchlosť merania. V dôsledku čoho sa táto vetva vývoja rapídne rozvíja. Patria sem systémy ako **optický radar** využívajúci technológiu **TOF** (z angl. Time of flight), systémy založené na **triangulácií**, **interferometrii**, ale aj **aktívna stereovízia** a **získavanie hĺbky z rozostrenia**, ktoré na rozdiel od pasívnych systémov využívajú osvetlenie scény štruktúrovaným vzorom, ktorý napomáha presnejšiemu meraniu.

Viac informácií možno získať v článku [Kovačovský, 2010].

## 3 SMISS

SMISS na získavanie trojrozmerného obrazu scény používa **kombináciu kamery a projektora**. Systém pritom projektorom na scénu projektuje **modulované štruktúrované osvetlenie** pomocou špeciálne zvolených **vzorových obrazcov**. Kamerou potom sleduje scénu pod jednotlivými štruktúrovanými obrazmi projektora a snaží sa určiť, ktorými obrazovými bodmi boli osvetlené jednotlivé body nasnímané kamerou. Na základe **triangulácie** sme potom schopný vypočítať metrické súradnice jednotlivých projektorom osvetlených bodov snímaného objektu.

Systém bol navrhnutý tak, aby ho bolo možné jednoducho obsluhovať, bol schopný merať objekty rôznych veľkostí a materiálov. Vzhľadom na využitie vlastného zdroja svetla je SMISS určený najmä na použitie v interiéri, nakoľko silné slnečné žiarenie môže výrazne ovplyvniť merací rozsah zariadenia.

Presnejší popis systému ponúkneme nižšie v kapitole 3.3.

### 3.1 Teoretické východiská

Systém SMISS využíva pre svoje fungovanie viaceré poznatky a postupy, ktorých teoretický základ si popíšeme v tejto podkapitole.

#### 3.1.1 Geometria

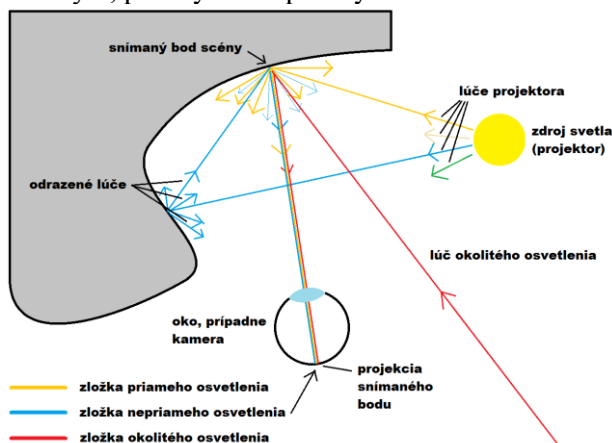
Zariadenie na získanie 3D mračna bodov využíva poznatky z projektívnej geometrie, triangulácie, model štrbinovej kamery, mnoho pohľadovej geometrie a korešpondencie medzi obrazovým priestorom kamery a projektora. Pre matematický základ v tejto oblasti odporúčame knihu [Hartley & Zisserman, 2004].



Keďže systém pracuje s reálnou kamerou a projektorom, obraz je v dôsledku skreslenia objektívom zakrivený. Pre kvalitné nameranie pozícií bodov v priestore je preto nutné systém a jednotlivé zariadenia nakalibrovať. V tejto oblasti sme použili kalibračnú metódu navrhnutú Zhangom v práci [Zhengyou, 2000].

### 3.1.2 Osvetlenie

Pri snímaní objektov našim systémom sú jednotlivé povrchy osvetlené 3 druhmi osvetlenia, a to okolitým, priamym a nepriamym.



Obrázok 3: Schéma osvetlenia bodu jednotlivými zložkami svetla. Zdroj: Autor

**Okolité** osvetlenie pochádza zo svetelných zdrojov, ktoré do systému nepatria. Efekt tohto osvetlenia sa dá ľahko kompenzovať pomocou nasnímania scény s vypnutým projektorom a následným odrátaním nasnímaného odrazu od ostatných.

**Priamym** osvetlením nazývame svetelné lúče, ktoré sa po prvom odraze od povrchu dostávajú do kamery.

**Nepriame** osvetlením nazývame lúče, ktoré vyšli z projektora, dopadli na objekty v scéne a po viac ako jednom odraze boli odrazené do snímajúcej kamery.

Obraz kamery možno vyjadriť ako **súčet 3 nezávislých obrazov**, ktoré zodpovedajú nasnímaní scény pod jednotlivými osvetleniami. Toto však prakticky nie je možné uskutočniť, teoreticky sa však tieto obrazy dajú od seba oddeliť.

Ak už od nasnímaného obrazu oddelíme „obraz okolitého osvetlenia“, ostáva nám ešte priame a nepriame. Na oddelenie týchto zložiek používame metódu [Nayar et al., 2006]. Výsledok tejto metódy možno pozorovať na Obrázku 4.



Obrázok 4: Obraz priameho (vľavo) a nepriameho (vpravo) osvetlenia. Zdroj: Autor

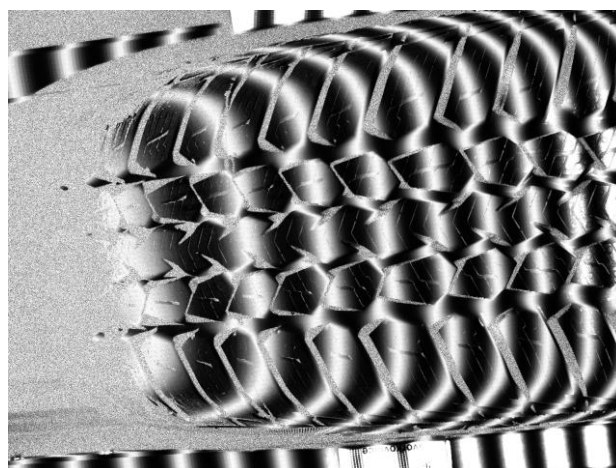
### 3.1.3 Vzorové obrazy

Pomocou vzorových obrazov budeme do scény vkladať nové informácie, ktoré sa budeme snažiť pomocou kamery dekódovať.

Vzorové obrazy musia byť vybrané tak, aby bolo možné pre každý bod obrazového priestoru kamery určiť, ktorým bodom (prípadne ktorou množinou bodov, napr. pruhom) projektora bol daný bod osvetlený. Vďaka tomu vieme získať korešpondenciu medzi bodom kamery a bodom (prípadne pruhom) projektora.

V našej práci budeme používať vzory patriace do triedy pruhových (z angl. fringe patterns). Tieto vzory pozostávajú z pruhov (väčšinou horizontálnych alebo vertikálnych) usporiadaných v špecifickom poradí.

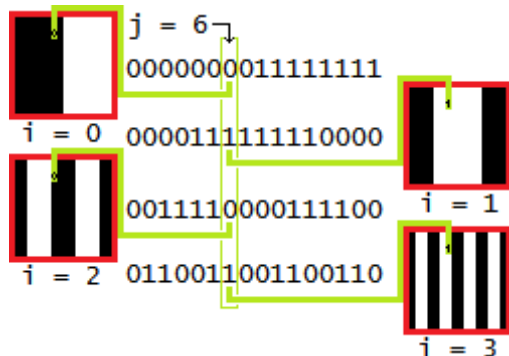
**Vzory založené na fázovom posune** využívajú na svoj predpis periodické funkcie ako napríklad sínus. Detekcia korešpondencie medzi pruhom projektora a lúčom snímaným kamerou sa dá interpretovať ako zistenie intenzity odozvy v danom bode a nájdenia funkčnej hodnoty popisnej funkcie definujúcej daný pruh. Objekt osvetlený pod daným vzorovým obrazom možno pozorovať na obrázku 5.



Obrázok 5: Objekt osvetlený sínusovým vzorom. Zdroj: Autor

**Grayove zrkadlové vzory** sú zložené z vertikálnych, alebo horizontálnych pruhov. Každý pruh môže byť pritom buď čierny, alebo biely.

Uvažujme, že chceme získať vertikálne zrkadlové vzory pre projektor s horizontálnym rozlíšením  $k$ . Nech potom  $n = \lceil \log_2 k \rceil$  je počet vzorov, ktoré budeme potrebovať. Číslo  $n$  nám taktiež symbolizuje počet bitov, ktoré potrebujeme na zápis ľubovoľného indexu (**x-ovej** súradnice) projektora v grayovom zrkadlovom kóde. Potom farba  $i$ -teho pruhu v obraze  $j$  je biela práve vtedy, ak má číslo  $i$  v grayovom zrkadlovom kóde 1 v  $j$ -tom bite. V opačnom prípade je pruh čierny. Pre ilustráciu uvádzame Obrázok 6.



Obrázok 6: Princíp zhotovenia Grayových zrkadlových vzorov. Zdroj: Autor

### 3.2 Podobné práce

Automatickej 3D rekonštrukcii sa venuje veľké množstvo komerčných spoločností ako aj univerzít. Vyčerpávajúci prehľad rôznych systémov zaoberajúcich sa touto tematikou možno nájsť v článku [Čarnický, 2005] a v už spomínanom [Sansoni et al., 2009]. Veľmi široký prehľad konkrétnych najmä komerčných produktov možno nájsť na webovskej stránke [Nafis].

Inšpiráciou pre náš projekt bol článok [Rocchini et al., 2001], v ktorom autori zostrojili cenovo efektívne zariadenie na skenovanie nefarebných objektov. Využívali farebný fotoaparát v kombinácii s projektorom, ktorý objekt osvetľoval farebnou mutáciou grayových zrkadlových vzorov.

Medzi práce využívajúce **grayové zrkadlové vzory**, prípadne binárne vzory možno uviesť [Morimoto & Fujii, 2005] a [Lanman & Taubin, 2009], kde sa autori venovali návodom ako zostrojiť jednoduchý 3D skener.

Veľký výskum bol uskutočnený aj v rekonštrukcii scény s využitím projektorových vzorov založených na fázovom posune [Peng & Gupta, 2007], [Gorthi & Rastogi, 2010]. Práca [Zhang & Huang, 2006] sa venuje rekonštrukcii v reálnom čase.

Autori v článkoch [Furukawa et al., 2008], [PAGÈS et al., 2003], [Kazantsev & Petriu, 2008], [Furukawa et al., 2009] využívajú na osvetlenie scény jediný statický vzor, na podobnom princípe pracuje aj systém Microsoft Kinect.

Polarizovaný svetelný zdroj modulovaný fázovými vzormi využíva systém [Chen et al.,

2007], ktorý kompenzuje viacnásobné odrazy vnútri priesvitných objektov a pomocou polarizácie sa sústreďuje na priame odrazy od povrchu materiálu.

Spracovaniu mračna bodov do NURBS povrchov sa venuje článok [Teutsch et al., 2007].

### 3.3 Popis fungovania systému

V tejto podkapitole podrobnejšie popíšeme postup a fungovanie zariadenia SMISS. Pre zjednodušenie ďalšieho postupu budeme považovať jednotlivé obrazové body kamery a projektora ako body s nekonečne malým polomerom. V budúcej práci sa budeme venovať aj pod-pixelovej presnosti, avšak v tomto texte budeme považovať body kamery a projektora ako atómové elementy.

Náš systém pracuje na podobnom princípe ako stereovízia, úloha jednej z kamier je však nahradená projektorom. Preto budeme potrebovať systém najskôr nakalibrovat'.

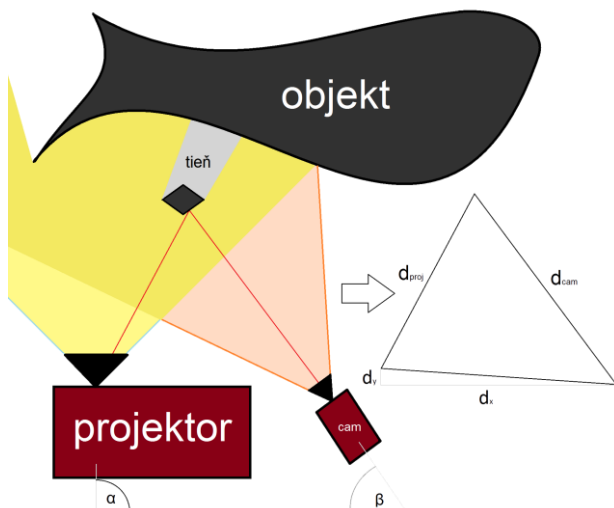
Kalibrácia prebieha v dvoch krokoch. Najskôr nakalibrujeme každé zariadenie zvlášť, kde získame parametre matice vnútorných parametrov a atribúty radiálneho a tangenciálneho skreslenia šošoviek. V ďalšom kroku potom kalibrujeme kameru a projektor ako pár, čím získame znalosť o vzájomnej polohe a orientácii zariadení.

Po kalibrácii je systém pripravený na skenovací proces, tu si môže užívateľ nastaviť parametre skenovania, ako aj viacero systémových prahov.

Samotný skenovací proces prebieha v niekoľkých fázach. Najskôr systém nasníma scénu bez osvetlenia projektora, tento snímok bude potom odrátaný od každého ďalšieho snímku, čím anulujeme efekt okolitého osvetlenia.

Následne je pomocou metódy v [Nayar et al., 2006] získaný obraz priameho a nepriameho osvetlenia scény. Na základe týchto obrazov je určené ktoré body scény sú projektorom osvetlené a taktiež sú detegované povrchy, ktoré sú ovplyvnené viac nepriamym ako priamym osvetlením (tieto, spolu so zatienenými bodmi sú vylúčené z procesu skenovania).

Následne prebieha projektovanie jednotlivých **grayových zrkadlových vzorov**. Scéna je pri osvetlení jednotlivými vzormi nasnímaná kamerou. Po dokončení sekvencie sa vyhodnotí pre každý nevylúčený bod z obrazového priestoru kamery, ktorým pruhom projektora bol osvetlený, na čo sú v systéme implementované 3 separátne metódy. **Porovnávanie s priamym a nepriamym osvetlením, adaptívne prahovanie** a porovnávanie voči **negovaným vzorom**. Presný popis navrhnutých metód nájdete v práci [Kovačovský, 2010].



Obrázok 7: Princíp triangulácie v systéme SMISS.

Zdroj: Autor

Keď už máme získanú korešpondenciu medzi bodmi kamery a pruhmi projektora, je možné vypočítať súradnice snímaného bodu v priestore. Bod kamery v priestore definuje krivku a pruh projektora v priestore definuje zakrivenú rovinu, v dôsledku skreslenia optiky projektora. Tento prienik sa vypočíta navrhnutým iteratívnym algoritmom.

Výsledné namerané hodnoty sú v centimetroch v súradnicovom priestore projektora, následne sú zapísané do binárneho súboru.

### 3.4 Možnosti a limitácie

Systém SMISS je schopný namerať mračno 3D bodov na  $n = a * \log_2 b + c$  snímkou. Pričom **a** je 2 v prípade použitia metódy porovnávania voči negovaným vzorom, v ostatných prípadoch je **a** rovno 1, **b** je počet zobrazovacích bodov projektora vo vertikálnom (prípadne horizontálnom smere) a **c** je konštantný počet snímkou potrebných na nasnímanie pomocných záberov. Dôležitý je najmä logaritmický vzťah medzi potrebným počtom snímkou a počtom nasnímaných bodov, čo znamená že pri dvojnásobnom náraste rozlíšenia v oboch smeroch budeme potrebovať len 1, resp. 2 snímky navyše.

Rýchlosť metódy ďalej nie je priamo závislá od počtu zobrazovacích bodov kamery, avšak pomer zobrazovacích bodov projektora ku kamere ovplyvňuje hĺbkovú presnosť zariadenia. Počet nasnímaných bodov je však závislý iba na rozlíšení kamery. Vďaka tejto skutočnosti je touto metódou možné nasnímať milióny bodov za sekundu (konkrétny počet je závislý na rozlíšení kamery, optickom výkone projektora a snímkovacej frekvencie oboch zariadení).

Systém na korektné fungovanie a skenovanie potrebuje pracovať s povrchmi, ktoré sú dostatočne lambertovské, teda odrazia dostatok prvotných

lúčov projektora do kamery. Ak materiál odráža príliš veľa prichádzajúceho žiarenia podľa uhla odrazu, môže sa stať, že sa do kamery príde príliš málo svetelného žiarenia aby ho bolo možná zaznamenať. Z rovnakého dôvodu môže byť odozva takýchto povrchov výraznejšia od nepriamych lúčov, ktoré sa na povrch odrazili s ostatných objektov v scéne. Využitá metóda je schopná určiť takéto povrchy a vylúčiť ich z procesu skenovania, avšak počas snímania je aj na tieto povrchy taktiež vysielané projektorové osvetlenie, čo má za následok odrazenie lúčov daným povrchom a osvetlenie ostatných častí scény silným nepriamym osvetlením.

Veľké problémy spôsobujú taktiež výrazné rozdiely v dynamickom rozsahu v scéne. Keďže systém používa globálny expozičný čas a konštantný jas projektora, dochádza k problému preexponovaných, prípadne podexponovaných častí scény.

Ako príklad možno uviesť čierny predmet umiestnený pred bielou stenou. Biela stena odrazí do kamery viac svetelných lúčov ako čierny predmet. Ak nastavíme expozíciu kamery tak, aby sme nemali stenu preexponovanú, bude odozva bodov kamery korešpondujúciach z čiernym predmetom na úrovni šumu. Ak však nastavíme dostatočnú expozíciu, aby sme boli schopný korektné nasnímať lúče odrazené z predmetu, stena bude prudko preexponovaná, čo bude mať za následok nekorektné správanie senzoru kamery a bude spôsobovať jav pretekania bielej do okolitých bodov. Problém s príliš veľkým rozsahom intenzít na meranom objekte je prítomný u všetkých optických systémov založených na svetelnom žiarení.

V ďalšej kapitole si popíšeme navrhnuté inovatívne riešenie spomínaných limitácií.

## 4 HDR SMISS

V tejto kapitole si popíšeme vylepšenie systému SMISS pomocou prídavných zariadení, čo bude mať za následok zvýšenie dynamického rozsahu zariadenia.

Ak chceme zvýšiť dynamický rozsah zariadenia SMISS, jednou z možností je aplikovať metódy snímania HDR obrazu pre každé snímanie kamery. Pri tejto metóde sa kamerou nasníma niekoľko obrázkov s rôznymi úrovňami expozície. Z výsledných obrázkov sa potom vyhotoví HDR snímok. Aplikovaním tejto metódy na každé snímanie kamery by sme skutočne zvýšili dynamický rozsah zariadenia, avšak každý snímok by sme museli zaznamenávať v rôznych úrovniach expozície, čo by navýšilo počet potrebných snímkou na rekonštrukciu scény na niekoľkonásobok.

Navyše metóda pri zvyšovaní času expozície zvyšuje odozvu z tmavých, ako aj svetlých oblastí záberu. Preto môže byť niekedy problém na rozhraniach medzi tmavými a svetlými povrchni, kde pri zvyšovaní expozície preexponované povrchy na obrázku pretekajú do okolia, a tak nie je možné správne namerať skutočnú hodnotu niektorých tmavých povrchov.

Riešením oboch problémov by bolo využitie dynamického rozsahu projektora, a to tak, že by na svetlé povrchy dopadalo z projektora menej svetla, a naopak na tmavé viac. Tým by sme vyriešili problém na lokálnej úrovni, pre každý pixel projektora zvlášť. Váhouvaným projekčného obrazu špecifickou maskou zabezpečíme, aby sa počty fotónov odrazených od skenovaného povrchu do kamery vyrovnali, a tým sa odozvy svetelného žiarenia v kamerovom obraze „zmestia“ do jej maximálneho dynamického rozsahu.

V ďalšej podkapitole si rozoberieme ako zostrojíme príslušnú masku projektora.

#### 4.1 Maska obrazu projektora

Získať pozície preexponovaných, prípadne podexponovaných bodov v obrazovom priestore kamery je priamočiare. Nech bod  $X$  je bodom obrazu kamery, ktorý je preexponovaný, teda by sme chceli jeho odozvu znížiť, to by sme mohli dosiahnuť znížením intenzity obrazu projektora, ktorý vysiela svetelný tok na daný bod. Túto informáciu by sme však potrebovali vo všeobecnosti pre všetky body kamery. Potrebovali by sme teda korešpondenciu medzi obrazovým priestorom kamery a projektora. Táto korešpondencia je však ekvivalentná s rekonštrukciou scény. Teda na získanie váhovej masky projektora by sme potrebovali najskôr nasnímať scénu, získať korešpondenciu, vytvoriť masku a následne opakovať skenovanie.

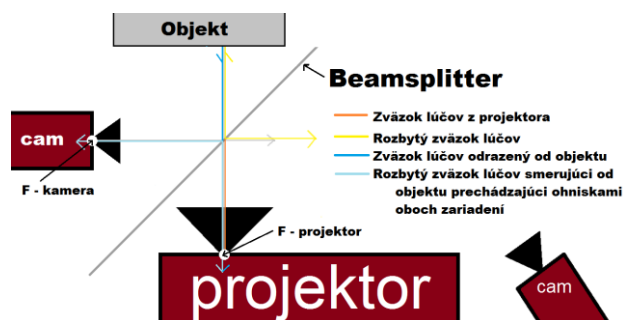
Iteráciou tohto postupu by sme postupne získali korektnú korešpondenciu medzi obrazovým priestorom kamery a projektora pre všetky povrchy. Doba skenovania by však rástla s každou iteráciou.

Bodová korešpondencia medzi obrazovým priestorom projektora a kamery je vo všeobecnosti závislá od geometrie scény, existuje však také vzájomné umiestnenie kamery a projektora, kedy je táto korešpondencia invariantná na zmenu geometrie objektu. Takúto pozíciu získame ak postavíme projektor a kameru tak, aby ich ohniskové body splývali.

#### 4.2 Zarovnanie ohniskových bodov kamery a projektora

Zarovnanie ohniska kamery a projektora je fyzicky nerealizovateľné, avšak opticky môžeme tento efekt docieľiť pridaním ďalšej kamery a optického

zariadenia s názvom beamsplitter. Týmto komponentom môžeme rozdeliť optickú os projektora na 2 a na novo vytvorenú os môžeme umiestniť kameru. Usporiadanie je popísané na obrázku 8.



Obrázok 8: Princíp postavenia kamery a projektora.

Zdroj: Autor

Beamsplitter zabezpečí, že svetelný tok projektora je rozdelený na 2 časti. Jedna sa odrazí, a druhá časť prejde na scénu. Svetlo dopadajúce na scénu sa odráža od objektov a lúče smerujú naspäť k zariadeniu. Ako náhle lúče prechádzajú beamsplitterom, časť z nich osvetlí projektor, ale časť sa odrazí do pridanej kamery. Tá je položená tak, že jej optická os s ohniskom ležia na zobrazení optickej osi projektora cez rovinnú súmernosť definovanú rovinou beamsplittera.

Takto položená kamera vidí obraz projektora neskreslene, nezávisle na geometrie scény na ktorú projektor vysiela svetelné žiarenie.

Časť optického výkonu projektora, ktorá bola odklonená beamsplitterom preč od scény môže dopadať na iné objekty, ktorých odraz bude v pridanej kamere taktiež vidieť, nakoľko časť odrazených lúčov prejde cez beamsplitter do kamery. Túto časť optického výkonu projektora budeme zdržiavať a absorbovať nízko reflexným materiálom.

Teraz sme schopný namerať korešpondenciu medzi obrazovým priestorom kamery a projektora, ktorá ostáva konštantná, pokiaľ sa nezmení vzájomná poloha zariadení.

Popíšeme ďalej spôsob ako zostrojiť masky obrazu projektora, ak poznáme korešpondenciu medzi obrazmi kamery a projektora.

#### 4.3 Zostrojenie masky

Zostrojenie masky pre obraz projektora prebieha v dvoch krokoch.

Najskôr projektorom naprojektujeme na scénu konštantnú úroveň maximálneho jasú. Vzápätí nasnímame scénu s rôznymi úrovňami expozície kamery, tak získame kamerový HDR obraz scény.

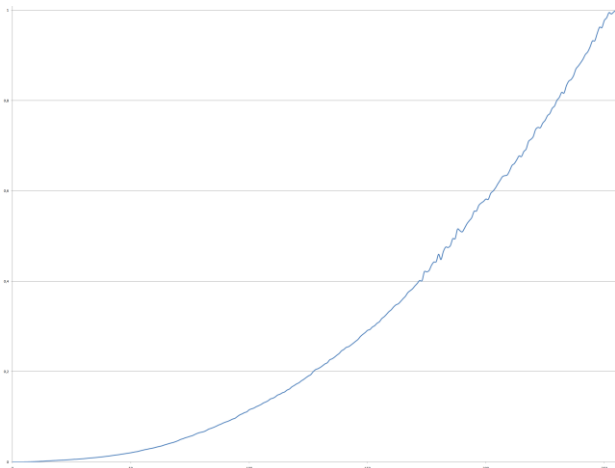
Zvolíme si hodnotu odozvy ktorá by bola najvhodnejšia pre všetky povrchy. Pre každý bod kamery si vypočítame číslo, akým by sme museli danú odozvu vynásobiť, aby sme získali

požadovanú optimálnu odozvu. Teda keby mal každý pixel kamery expozičnú dobu vynásobenú príslušnou hodnotou, získali by sme konštantný obraz (za predpokladu, že používame kameru s lineárnou odozvou, teda  $\alpha$ -krát viac fotónov dopadajúci na svetlo citlivý pixel vyvolá  $\alpha$ -krát vyššiu odozvu, čo ale CCD kamery splňajú).

Avšak nemôžeme nastaviť expozíciu samostatne pre jednotlivé pixle kamery, môžeme však znížiť hodnotu vyžarovania pre pixel projektoru, ktorý daný kamerový pixel osvetľuje. A to tak, že potrebujeme intenzitu vyžarovania daného pixla naškálovať hodnotou  $\alpha$ . Keďže mriežky a rozlíšenia kamery a projektoru nemusia dokonale korešpondovať, budeme škálovať s istou váhou aj okolité body projektoru, a to podľa Gaussovho rozdelenia pre vhodné  $\sigma$ .

Musíme si ďalej uvedomiť, že odozva projektoru nemusí byť lineárna, a teda musíme zostrojiť bijektívne zobrazenie, ktoré nám dá vzťah medzi obrazovou hodnotou projektoru a samotnou energiou vyžarovania. Ak budeme mať takúto bijekciu, môžeme aktuálnu hodnotu projektorového obrazu pre daný pixel zobrazit' do nášho lineárneho priestoru, kde môžeme hodnotu naškálovať parametrom  $\alpha$  a vzápätí zobrazit' výsledok inverzným zobrazením na požadovanú naškálovanú šedo tónovú úroveň.

Túto bijekciu možno získať kalibráciou, kde s postupným znižovaním šedej úrovne obrazu projektoru meriame odozvu kamery. Nameraný gram zobrazenia pre náš testovací projektor môžete vidieť na obrázku 9. Pričom táto bijekcia ostáva pre daný projektor konštantná.



Obrázok 9: Graf závislosti energie vyžarovania projektoru (vertikálna os) od jasovej úrovne obrazu (horizontálna os). Zdroj: Autor

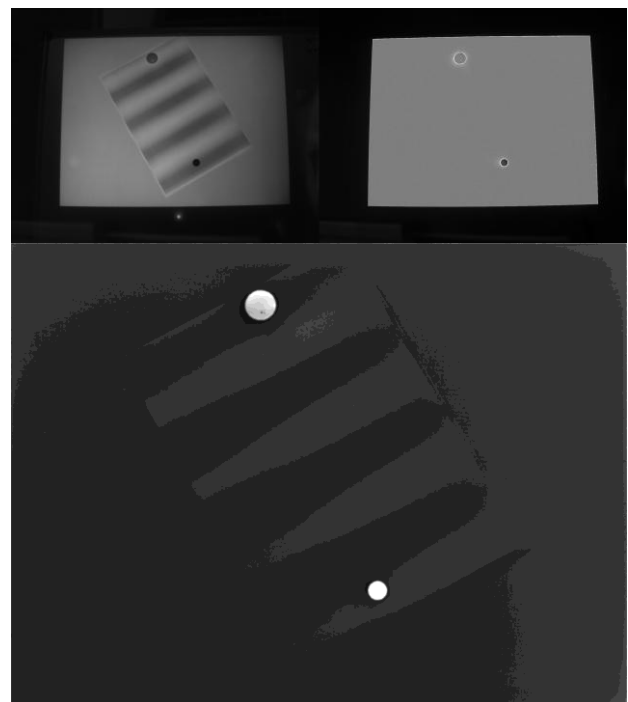
Ak poznáme danú funkčnú závislosť, môžeme postupne prechádzať všetky body HDR kamerového obrazu, a nastavovať požadované jasové intenzity pre projektorový obraz, čím získame prvotnú masku projektoru.

V ďalšom kroku opakujeme nasledovný postup. Naprojektuj predchádzajúcu masku projektorom. Nasnímaj scénu kamerou a urob novú masku identickým spôsobom, avšak len s jednoduchým obrazom kamery.

Pre naše testovanie sme použili 3 iterácie a výsledky boli dostatočné.

Druhá fáza algoritmu je potrebná pre lokálne doladenie projektorovej masky. V blízkosti ostrých prechodov medzi vysoko a nízko odrazivými materiálmi sú v kamerovom HDR obraze hodnoty nízko odrazivých materiálov ovplyvnené vysoko odrazivými materiálmi v dôsledku globálneho striedania expozícií pri konštrukcii HDR obrazu.

Na demonštráciu ponúkame obrázok vytlačeného sínusového gradientu nasnímaného kamerou pri konštantnom osvetlení, a snímok toho istého gradientu nasnímaného pri osvetlení vypočítanou maskou.



Obrázok 10: Obrázok scény nasnímaný pod konštantným osvetlením (vľavo hore), Tá istá scéna osvetlená vypočítanou maskou (vpravo hore), použitá maska (dole)  
Zdroj: Autor

Ako náhle máme k dispozícii masku projektoru, jej pomocou dokážeme stlačiť dynamický rozsah scény na minimum, a tak dokážeme korektne zaznamenať aj „svetlé“ a „tmavé“ povrchy súčasne. Treba si však uvedomiť že týmto spôsobom sme získali nástroj, ktorým vieme znížiť dynamický rozsah scény pre pridanú kameru, pre **kameru geometrickú**<sup>1</sup> však táto maska nemusí byť vhodná.

<sup>1</sup> **Geometrickou kamerou** označíme pôvodnú kameru systému, táto je určená na získavanie 3D mračna bodov

#### 4.4 Maska projektora pre geometrickú kameru

Pokiaľ by sme žili v svete Lambertovských odrazov, daná maska by fungovala rovnako dobre pre obe kamery. Nakoľko difúzne odrazy nie sú závislé na pozícií pozorovateľa. Skutočnosť je však taká, že intenzita odrazeného svetla je závislá na pozícií pozorovateľa.

Ak totiž pridaná kamera vidí priamy odraz od povrchu, maska projektora pre príslušné body bude výrazne znížená, vďaka čomu sa pre túto kameru hodnota odozvy od odrazu zníži. Kamera geometrická však priamy odraz môže vidieť na inej pozícií, a teda po aplikovaní masky vznikne na jej odraze čas obrazu s nižšou odozvou, a časť obrazu s vyššou odozvou.

Dostatočným riešením tohto problému je využitie polarizácie svetla. Položíme pred výstup projektora lineárny **polarizačný filter**, čím zabezpečíme, že vychádzajúce svetlo projektora bude lineárne polarizované. Toto svetlo sa šíri do scény a inciduje s objektmi.

Rozdeľme si odrazené svetlo od objektov na jeho Difúzne a Spekulárnu (**Glossy**) zložku.

**Difúzny** odraz je spôsobený mikroštruktúrou materiálu, a v svojej podstate depolarizuje svetelné žiarenie. Teda odchádzajúce lúče sú nepolarizované.

**Spekulárny** odraz naopak polarizáciu žiarenia zachováva, a teda lúče odrazené od objektov si polarizáciu zachovávajú.

Ak položíme ďalšie 2 lineárne polarizačné filtre pred obe kamery, pričom os polarizácie natočíme kolmo na os polarizácie projektora, získame oddelenie difúznej a spekulárnej zložky. Tento prístup bol použitý článku [Umeyama, S. Godin, G., 2004]

Lúče odrazené difúznym odrazom prechádzajú polarizátormi kamier s polovičnou intenzitou, avšak lúče odrazené od povrchu spekulárnym odrazom sa na spomínaných polarizátoroch zastavia.

Demonštráciu môžete vidieť na obrázkoch 11 a 12. Na obrázku 11 je scéna nasnímaná s polarizačným filtrom kamery natočeným rovnobežne s polarizátorom projektora. Na obrázku 12 je polarizačný filter kamery natočený kolmo.

Ak teda do systému dodáme aj polarizačné filtre, môžeme predpokladať, že vypočítaná mapa pre projektor dostatočne zníži dynamický rozsah scény pre geometrickú kameru, čím sa adekvátne zvýši dynamický rozsah celého systému.

Samotné pridanie polarizačných filtrov navyše výrazne zníži dynamický rozsah všeobecnej scény, nakoľko takmer úplne anuluje priame odrazy.



Obrázok 11: Otvorený polarizačný filter. Zdroj: Autor



Obrázok 12: Zatvorený polarizačný filter. Zdroj: Autor

## 5 Výsledky a experimenty

### 5.1 Pozorovania

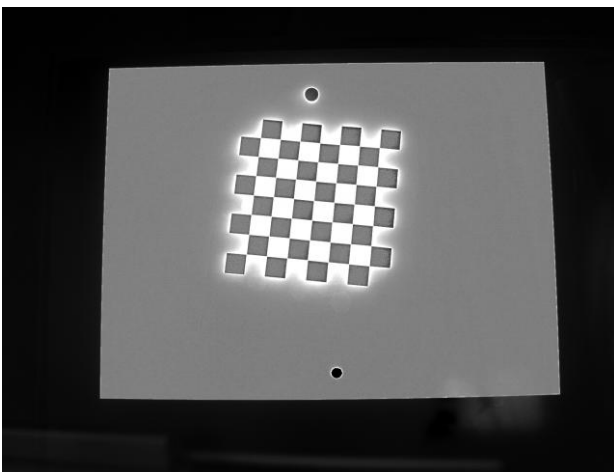
Vzhľadom na diskrétny obrazový priestor geometrickej kamery a projektora, je veľmi dôležitá vzájomná poloha projektora a geometrickej kamery. Epipolárna geometria nám hovorí kam by sa jednotlivé body obrazového priestoru kamery premietli v obrazovom priestore projektora. Ak zvolíme usporiadanie kamery a projektora na jednej línii, ako je uvedené na obrázku 7 zistíme, že epipolárne čiary bodov kamery v obrazovom priestore projektora sú orientáciou podobné horizontálnym pruhom projektora. Teda ak zistíme ktorým pruhom projektora bol niektorý bod kamery osvetlený, vzdialenosť bodu od kamery získame s prienikom epipolárnej čiary (vo všeobecnosti krivky) s príslušným pruhom projektora. Ak však zvolíme horizontálne obrazové vzory, tento prienik nemusí byť jedinečný s dôsledku diskrétnych obrazových matic. Preto je potrebné zvoliť v tomto prípade vertikálne obrazové vzory, nakoľko sú

potom pruhy projektora s epipolárnymi čiarami takmer kolmé.

Vzdialenosť kamery od projektora, a taktiež aj triangulačný uhol ovplyvňuje hĺbkovú presnosť merania, znižovaním triangulačného uhlu  $\beta$  teda zvyšujeme hĺbkovú presnosť, ale taktiež znižujeme merací rozsah zariadenia, ako aj znemožňujeme skenovanie konkávných povrchov, v ktorých vznikajú vzájomné tieň medzi kamerou a projektorom.

Taktiež sme zistili, že pri získavaní projektorovej mapy, môže dôjsť k javu pri ktorom sa na tmavé povrchy vyšle vysoká intenzita projektorového svetelného žiarenia, ktoré následne v dôsledku sekundárnych odrazov osvetlí susediace svetlé povrchy, ktoré sú následne kvôli narastenej intenzite odzvy stmavené, čím u nich klesá odzvy priamo odrazených lúčov a naopak rastie odzvy nepriamych lúčov. Výsledný obraz z kamery možno pozorovať na obrázku 13, kde je možné vidieť obrázok vytlačenej šachovnice na papieri, kde sivé políčka sú čierne políčka šachovnice, a biele políčka sú výrazne ovplyvnené nepriamym osvetlením. Tento problém sa dá vyriešiť separáciou obrazu na 2 skupiny, ktoré sa navzájom ovplyvňujú a tie skenovať nezávisle.

V reálnej scéne však k tomu efektu dochádza len ojedinele.



Obrázok 13: Efekt vzájomného ovplyvňovania v dôsledku nepriameho osvetlenia. Zdroj: Autor

## 5.2 Testy

Bol uskutočnený test priemernej chyby merania.

Test bol zrealizovaný naskenovaním keramickej tabule. Výsledným mračnom bodov bola potom preložená rovina ktorá minimalizovala súčet kolmých vzdialeností nameraných bodov od roviny. Súčet vzdialeností v optimálnej polohe roviny sa potom predelil počtom bodov a získala sa priemerná chyba merania. Tabula bola vzdialená od systému približne 80 cm. Pričom na meranie sa použil projektor Epson s rozlíšením 1024x768 a farebná digitálna kamera AVT Marlin s rozlíšením

1394x1040. Tabuľku výsledkov ponúkame v obrázku 14. Test bol vyhotovený s použitím rôznych algoritmov na dekódovanie grayových zrkadlových vzorov. Najmenšia hodnota priemernej chyby bola zaznamenaná 0,4 milimetra a najhoršia 0,5 milimetra.

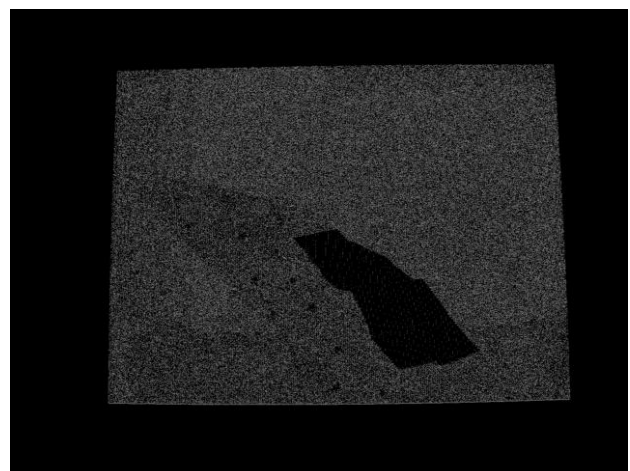
	Použité vzory	Počet Bodov	Súčet chýb v cm	Priemerná chyba v cm
MI	Vertikálne+ Horizontálne	1044364	42 591,10	0,040781854
	Vertikálne	1044035	43 069,20	0,041252640
DvG1	Vertikálne+ Horizontálne	1044225	44 069,90	0,042203452
	Vertikálne	1043747	51 230,30	0,049083063
DvG2	Vertikálne+ Horizontálne	1044587	43 598,20	0,041737261
	Vertikálne	1044210	45 611,80	0,043680677
AT1	Vertikálne+ Horizontálne	1043905	51 795,50	0,049617063
	Vertikálne	1044063	51 139,60	0,048981335
AT2	Vertikálne+ Horizontálne	1044298	52 464,10	0,050238629
	Vertikálne	1044212	50 887,90	0,048733303
Orientácia Roviny		Súradnice	Stred mračna	Normála
		x:	3,1289600	0,0666971
		y:	-8,9507900	-0,2290400
		z:	77,1213000	0,9711290

Obrázok 14: Výsledky testu merania priemernej chyby.

Zdroj: Autor

Nakoľko systém pracuje na princípe triangulácie, táto presnosť môže byť zvýšená použitím inej optiky s väčšou ohniskovou vzdialenosťou, prípadne optiky s variabilnou ohniskovou vzdialenosťou, čím sa zvýši fyzické rozlíšenie systému. Takto vieme jednoducho škálovať systém, pričom presnosť sa môže pohybovať v desiatkach mikrometrov. Pomer presnosti ku veľkosti nasnímanej plochy však ostáva konštantný.

Ďalší test sa uskutočnil na demonštráciu zvýšenia dynamického rozsahu zariadenia pri skenovaní. Bol vyhotovený test pri ktorom sa snímala čierny zamatový klobúk na ktorom bola položená biela vreckovka, teda dynamický rozsah scény bol nad rámec systému SMISS bez implementovania nových metód.

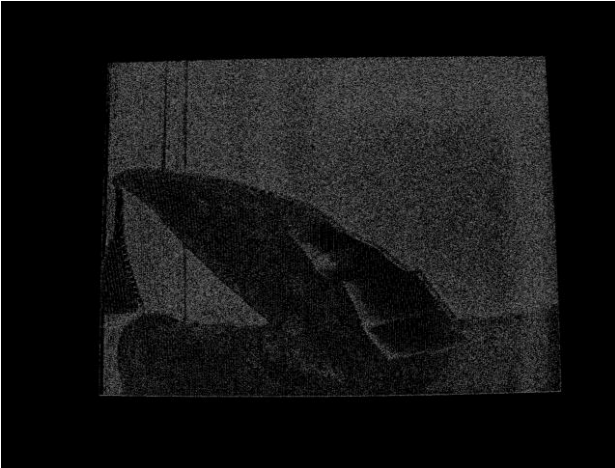


Obrázok 15: Použitie vzoru s konštantnou intenzitou.

Zdroj: Autor

Na ukážku bol naprojektovaný posledný grayov zrkadlový vzor, teda vzor s najvyššou frekvenciou. Ten bol v jednom prípade projektovaný s konštantným jasom (obrázok 15), a v druhom bol váhovaný maskou projektora (obrázok 16).

Predkladané obrázky boli vyhotovené s binárnych obrázkov hovoriacich o poslednom bite grayovho zrkadlového kódu indexu pre každý pixel kamery. Z dôvodu malej veľkosti obrázkov boli obrázky upravené filtrom, ktorý zvýrazní oblasti ktoré by sa vyhodnotili správne. Tieto oblasti sú zvýraznené oblastami nízkej intenzity.

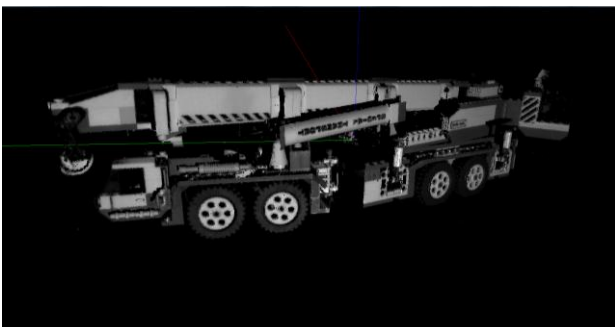


Obrázok 16: Použitie vzoru váhovaného maskou projektora. Zdroj: Autor

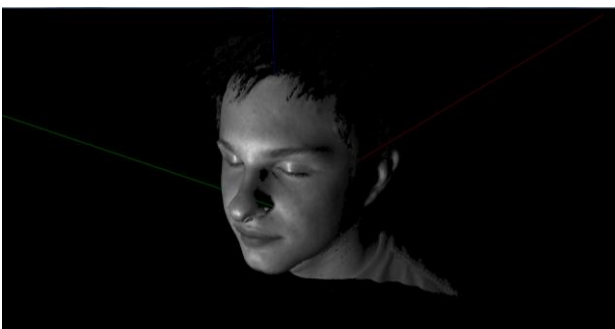
Z obrázkov vidno, že zatiaľ čo v prvom prípade by sa posledný bit vzorov určil správne iba na vreckovke, v druhom prípade by sa správne určil aj na povrchu vreckovky, aj na klobúku.

### 5.3 Naskenované modely

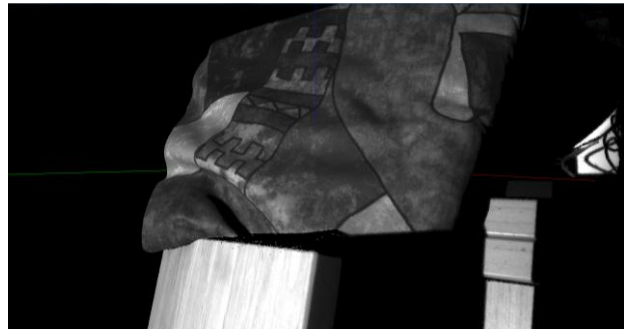
Ponúkame niekoľko obrázkov vyrenderovaného mračna bodov použitím OpenGL. Textúra pre body bola použitá zo šedotónového obrazu z kamery.



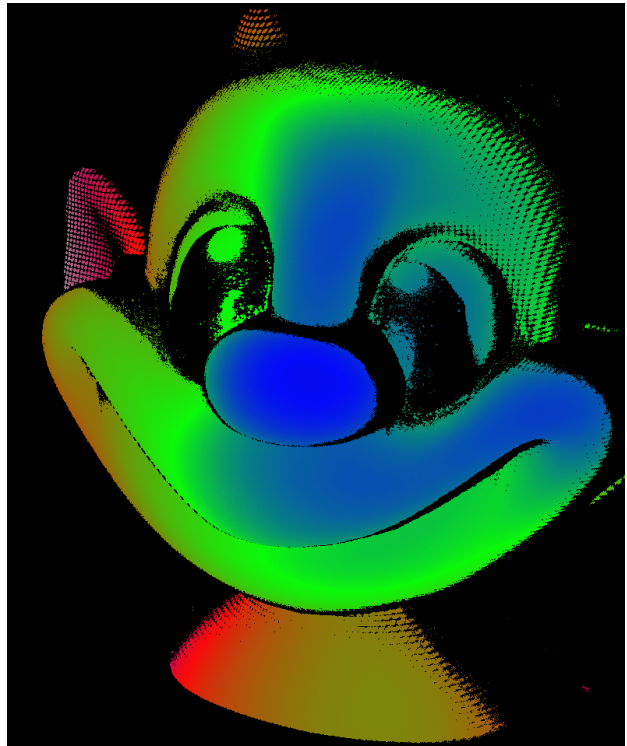
Obrázok 17: Lego žeriav. Zdroj: Autor



Obrázok 18: Ľudská tvár. Zdroj: Autor



Obrázok 19: Vankúš. Zdroj: Autor



Obrázok 20: Hĺbková mapa nasnímanej figúry. Veľkosť tváre 5 cm na 6 cm. Rozlíšenie: 50 mikrometrov. Zdroj: Autor

## 6 Použitý hardvér

Na zhotovenie prototypu bol potrebný nasledovný hardvér:

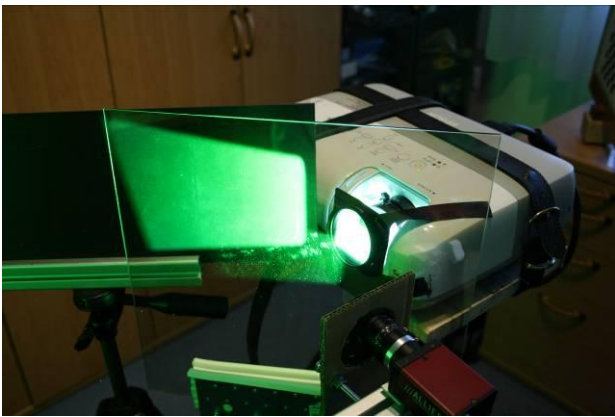
- Projektor Epson EBX6
- Kamera AVT Marlin a AVT Stingray
- 4 krát statív
- Kalibračný objekt
- Montáž na kameru s projektorom
- Montáž na kameru
- Lineárne polarizačné filtre
- Beamsplitter s montážou
- Temniaci povrch s montážou
- Počítač

Obrázky hardvérovej konštrukcie systému ponúkame na obrázkoch 21 a 22.





Obrázok 21: Hardvérová implementácia projektu SMISS.  
Zdroj: Autor



Obrázok 22: Implementácia prototypu pre HDR. Zdroj:  
Autor

## Záver

Cieľom práce bolo zhotoviť zariadenie určené na automatickú rekonštrukciu objektov.

Tento zámer sa nám darí napĺňať. Nakoľko práca na projekte ešte nie je definitívne ukončená.

Predložili sme základný popis fungovania skonštruovaného systému, ktorý je schopný naskenovať veľké množstvo objektov rôznych materiálov. Dosiahnuté výsledky a meracia presnosť zariadenia bola nad očakávanie autorov.

Pri implementácii systému bolo použitých viacero autormi navrhnutých postupov a algoritmov.

Bola uskutočnená flexibilná a variabilná hardvérová implementácia prototypu systému.

Taktiež sme vyslovili problém s nedostatočným dynamickým rozsahom meracích zariadení pre reálne scény a riešenie tohto problému prostredníctvom navrhnutej inovatívnej metódy.

Daná metóda taktiež umožňuje vyčleniť reflexné povrchy z merania, čím sa zníži úroveň nepriameho osvetlenia.

Prácu teda považujeme za úspešnú vzhľadom na navrhnuté metódy a robustný základ pre ďalší vývoj.

## Špeciálne poďakovanie

Autor vyjadruje vďaku spoločnosti ME-Inspection SK s.r.o. za zapožičanie častí hardvéru použitého pri testovaní prototypu v rôznych variantoch.

## Zoznam použitej literatúry

- [Curless et al., 2000] Curless, B., & Seitz, S. (August 2000). 3D Photography. (*Course No. 19*). ACM Siggraph '00 Course Notes.
- [Sansoni et al., 2009] Sansoni, G., Trebeschi, M., & Docchio, F. (September 2009). State-of-The-Art and Applications of 3D Imaging Sensors in Industry, Cultural Heritage, Medicine, and Criminal Investigation. *Sensors* (9), s. 568-601.
- [Tátraiová, 2007] Tátraiová, K. (2007). *Rekonštrukcie a stereovízia [dizertačná práca]*. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky.
- [Zhang et al., 1999] Zhang, R., Tsai, P.-S., Cryer, J. E., & Shah, M. (August 1999). Shape from Shading: A Survey. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21 (8), s. 690-706.
- [Kovačovský, 2010] Kovačovský, T. (2010). SMISS – Scalable Multifunctional Indoor Scanning System. [Bakalárska práca]. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky.
- [Hartley & Zisserman, 2004] Hartley, R., & Zisserman, A. (2004). *Multiple View Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [Zhengyou, 2000] Zhengyou, Z. (August 2000). A flexible new technique for camera calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22 (11), s. 1330-1334.
- [Nayar et al., 2006] Nayar, S. K., Krishnan, G., Grossberg, M. D., & Raskar, R. (Júl 2006). Fast separation of direct and global components of a scene using high frequency illumination. *ACM Transactions on Graphics*, 25 (3), s. 935-944.
- [Čarnický, 2005] Čarnický, J. (2005). *Ján Čarnický, Progresívne optické metódy reverzného inžinierstva a rýchleho prototypovania v medicíne*. Bratislava: Univerzita Komenského.
- [Nafis] Nafis, C. *3D Scanners, Digitizers, and Software for making 3D Models and Measurements*. Cit. 10. Apr. 2011. Dostupné na Internet: Simple3D: <http://www.simple3d.com/>
- [Rocchini et al., 2001] Rocchini, C., Cignoni, P., Montani, C., Pingi, P., & Scopigno, R. (Marec 2001). A low cost 3D scanner based on structured light. *Computer Graphics Forum*, 20 (3).
- [Morimoto & Fujii, 2005] Morimoto, M., & Fujii, K. (2005). A portable 3d scanner based on structured light and stereo camera. *IEEE*

- International Symposium on Communications and Information Technology 1* (1), 569-572.
- [Lanman & Taubin, 2009] Lanman, D., & Taubin, G. (August 2009). Build your own 3D scanner: 3D photography for beginners. *ACM SIGGRAPH 2009 Courses*, 3 (7), s. 1-94.
- [Peng & Gupta, 2007] Peng, T., & Gupta, S. K. (December 2007). Model and algorithms for point cloud construction using digital projection patterns. *ASME Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 7 (4), s. 372-381.
- [Gorthi & Rastogi, 2010] Gorthi, S. S., & Rastogi, P. (Február 2010). Fringe Projection Techniques: Whither we are? *Optics and Lasers in Engineering*, 48 (2), s. 133-140.
- [Zhang & Huang, 2006] Zhang, S., & Huang, P. S. (December 2006). High-resolution, real-time three-dimensional shape measurement. *Optical Engineering*, 45 (12).
- [Furukawa et al., 2008] Furukawa, R., Kawasaki, H., Sagawa, R., & Yagi, Y. (2008). 3D Scanning Method for Fast Motion using Single Grid Pattern with Coarse-to-fine Technique. Leeds: British Machine Vision Conference.
- [PAGÈS et al., 2003] PAGÈS, J., SALVI, J., & MATABOSH, C. (2003). Implementation of a robust coded structured light technique for dynamic 3D measurements. (s. 1073-1076). Barcelone: IEEE International Conference on Image Processing.
- [Kazantsev & Petriu, 2008] Kazantsev, A., & Petriu, E. (2008). Robust Pseudo-Random Coded Colored Structured Light Technique for 3D Object Model Recovery. (s. 150-155). Ottawa: IEEE International Workshop on Robotic and Sensors Environments Ottawa.
- [Furukawa et al., 2009] Furukawa, R., Kawasaki, H., Sagawa, R., & Yagi, Y. (2009). Shape from Grid Pattern Based on Coplanarity Constraints for One-shot Scanning. *IPSN Transactions on Computer Vision and Applications*, s. 139-157.
- [Chen et al., 2007] Chen, T., Lensch, H. P., Fuchs, C., & Seidel, H.-P. (2007). Polarization and Phase-Shifting for 3D Scanning of Translucent Objects. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 4, s. 1829-1836.
- [Teutsch et al., 2007] Teutsch, C., Berndt, D., Trostmann, E., & Preim, B. (2007). Adaptive Real-Time Grid Generation from 3D Line Scans for fast Visualization and Data Evaluation. (s. 177-184). 11th International Conference Information Visualization.
- [Umeyama, S. Godin, G., 2004] Umeyama, S. Godin, G. (2004). Separation of diffuse and specular components of surface reflection by use of polarization and statistical analysis of images. (s. 639 – 647). Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions

# Physical Animation of Wetting Terrain and Erosion (Extended Abstract)

Matej Hudák<sup>1\*</sup>

Supervisor: Roman Ďurikovič<sup>2†</sup>

<sup>1</sup> Department of Algebra, Geometry and Didactics of Mathematics, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava,

<sup>2</sup> Department of Applied Informatics, FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

Natural terrain includes a lot of different shapes. Terrain morphs over time by both constructive as well as degenerative processes result in features such as mountains, canyons and sandstones.

Granular materials like sand or soil and their behaviour under the impact of erosion modeling is an indispensable part of the natural-looking terrain. Very interesting and important process, closely related to erosion, is soil wetting. As large amount of water is absorbed by lower soil layers, water factor can influence particles composition with the result in erosion. Continuous changes in positions of these rigid particles, computed with contact forces and applied in the contact status are described in discrete element method [Cundall and Strack, 1979].

Although there are many algorithms to simulate terrain erosion, majority of them is acting on the terrain surface. We propose a new approach of erosion simulation with wetness as main factor. As result of our algorithm we created mass movement erosion. In the soil system unlike sand material, angle of repose is generated due to more complex contact model. For this purpose we extended the contact model by adding forces simulating cohesion [W. Rungjiratananon and Nishita, 2008] and material's strength [Mingjing Jiang and Leroueil, 2007].

For the cohesion simulation we created wetness system. Wetness is the percentage value of water saturated in little gaps between particles. It produces attractive force  $\vec{F}_i^{attract}$ .

$$\vec{F}_i^{attract} = \max \left\{ 0, w_f - \frac{w_i - w_j}{2} \right\} (v_j - v_i), \quad (1)$$

where  $w_i$  is wetness of particle  $p_i$  and  $v_i$  is its velocity. Wetness system creates changes in basic DEM contact model.

For the simulation of higher strength in the soil system, we use bonds. The bond is relation between two colliding particles. If particles are moving away

scene	particles	1 core	openMP	time step
sand	130k	0.2 fps	6 fps	0.001
wetness	20k	7 fps	13 fps	0.0005
input	50k	4 fps	5 fps	0.0002
hill	30k	2 fps	3 fps	0.0001
layers	60k	1.2 fps	3.4 fps	0.0002

Table 1: Comparison of frames per second on different terrains without and with openMP.

from each other, bonding forces keep them together in the normal, tangential and angular direction. For the normal direction we set the bond as follows

$$\vec{B}_n = (R_n / \xi) * \vec{N}, \quad (2)$$

where  $R_n$  is normal bonding coefficient,  $\xi$  is overlap value and  $\vec{N}$  is normal created in basic DEM. These forces are subtracted in the basic contact model in the normal, tangential and angular direction.

Input scene for erosion was created using 3D scan-line and set of layers with different water aggregation speed, bonding coefficients and other soil properties. The framework was implemented in C++ and parallelized using OpenMP (Table 1). For visualization we used OpenGL. Water saturated between different soil layers creates pressure, which in summation through large mass of material, drives particles apart with result in movement.

## References

- [Cundall and Strack, 1979] Cundall, P. and Strack, O. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29:47–65.
- [Mingjing Jiang and Leroueil, 2007] Mingjing Jiang, Y. H.-S. and Leroueil, S. (2007). A simple and efficient approach to capturing bonding effect in naturally microstructured sands by discrete element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 69:1158–1193.
- [W. Rungjiratananon and Nishita, 2008] W. Rungjiratananon, Zoltan Szego, Y. K. and Nishita, T. (2008). Real-time animation of sand-water interaction. *Pacific Graphics '08*, 27(7):1887–1893.

\*subseth.mato@gmail.com

†durikovic@fmph.uniba.sk

# Využitie detekcie tvárí pri určovaní významných oblastí v obraze (rozšírený abstrakt)

Júlia Kučerová<sup>1\*</sup>

Školiteľ: Elena Šikudová<sup>2†</sup>

<sup>1</sup> Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava,

<sup>2</sup> Katedra aplikovanej informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

Vizuálna pozornosť je v ľudskom vnímaní veľmi dôležitá. Je to schopnosť vizuálneho systému detekovať významné objekty a oblasti v pozorovanej scéne.

Existuje množstvo modelov, ktoré sa zaoberajú zisťovaním prítomnosti a polohy významných oblastí scény. V tejto práci sa zameriavame na model založený na lokálnom potlačaní viacnásobných príznakov v kontexte [Hu et al., 2005]. Hoci je tento model efektívny pri detekcii oblastí vizuálnej pozornosti v obrazoch obsahujúcich malé objekty, zlyháva pri detekovaní tvárí, ktoré sú taktiež významné v scéne, ktorá ich obsahuje. Z tohto dôvodu sme sa pokúsili o vylepšenie vybraného modelu pridaním ďalšieho príznaku. Navrhli sme metódu detekovania výrazných oblastí, ktorá modifikuje vybraný model, a kde je detekcia tváre použitá ako ďalší príznak.

Pre použitie detekcie tváre ako prídavného príznaku sme sa rozhodli preto, lebo tváre v pozorovanej scéne sú zo sémantického hľadiska pre človeka taktiež významné. Tento fakt bol študovaný v [Langton et al., 2008], kde výsledky experimentov naznačujú, že tváre sú schopné odoberať vizuálnu pozornosť od iných objektov nachádzajúcich sa v pozorovanej scéne.

Naša úloha spočíva v spracovaní základného modelu, pridaní nového príznaku detekcie tváre a vyhodnotení výsledkov porovnaním s inými modelmi. Vybraný model vytvára a kombinuje dve základné časti: mapou kombinácií a mapou potlačenia. Mapa kombinácií spočíva v sčítaní máp pre tri základné príznaky (farba, intenzita, textúra), čím vznikne mapa, ktorá obsahuje významné oblasti v scéne, ale nanešťastie zvýrazňuje aj tie nevýrazné. Mapa potlačenia preto slúži na potlačanie týchto nevýrazných oblastí v mape kombinácií. Vytvorili sme ju na základe [Hu et al., 2005] a skombinovali s mapou detekcie tvárí, ktorá bola získaná pomocou Viola/Jones algoritmu ([Viola and Jones, 2001]). Obe mapy sme navzájom vynásobili, čím vznikla výsledná mapa

Visual Attention Model	KLD
Navrhnutá metóda	1.1358
Hu	2.2524
Itti	1.6642

Tabuľka 1: Priemerné KLD pre porovnávané modely

významných oblastí. Naším prístupom sme docielili, aby vo výslednej mape boli tváre rovnako výrazné ako oblasti detekované pôvodným algoritmom.

Na porovnanie výsledkov nášho modelu s modelmi [Itti et al., 1998] a [Hu et al., 2005] sme použili Kullback-Leibler divergenciu, kde sme vybrané modely porovnávali s manuálne nameranými dátami. Čím je KLD nižšia, tým sú porovnávané obrázky podobnejšie. V tabuľke sú znázornené priemerné hodnoty KLD pre porovnávané modely. Na testovanie sme použili 10 vzorových obrázkov. Ako možno vidieť, náš model dosahuje na skúmanej množine obrázkov obsahujúcich tváre najlepšie výsledky.

Kvalitu detekcie plánujeme v budúcej práci vylepšiť upravením mapy potlačenia a jej následnej kombinácii s mapou kombinácií. Taktiež plánujeme porovnať naše výsledky s reálnymi dátami získanými pomocou eye-tracking systému.

## Literatúra

- [Hu et al., 2005] Hu, Y., Rajan, D., and Chia, L.-T. (2005). Adaptive local context suppression of multiple cues for salient visual attention detection. In *IEEE International Conference on Multimedia and Expo*, pages 1–4.
- [Itti et al., 1998] Itti, L., Koch, C., and Niebur, E. (1998). A model of saliency-based visual attention for rapid scene analysis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 20(11):1254–1259.
- [Langton et al., 2008] Langton, S., Anna Law and, A. M. B., and Schweinberger, S. R. (2008). Attention capture by faces. *Cognition*, 107:330–342.
- [Viola and Jones, 2001] Viola, P. and Jones, M. (2001). Rapid object detection using a boosted cascade of simple features. In *CVPR*, page 233–237.

\*kucerova.julia@gmail.com

†sikudova@sccg.sk

# Concept of Skeleton Texture Mapping (Extended Abstract)

Martin Madaras\*

Supervisor: Roman Ďurikovič†

Department of Applied Informatics, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

This article introduces an idea for novel way of mapping textures onto a surface of 3D model. Our technique is based on two interlocking mappings, the first one maps surface vertices onto computed skeleton and the second maps surrounding area of each skeleton segment into a rectangle with dimensions based on surface properties around this segment. Furthermore, these rectangles are packed into a squared texture by approximately solving an optimization problem which seems to be NP-complete. With our technique, we are able to map the texture onto the surface without any precomputed or stored texture coordinates. Our texture mapping approach is also suitable for surfaces with topology non-homotopic to a sphere.

Mapping between the surface and the skeleton works in a deterministic way and the benefit is that storing of uv coordinates is not needed. In the first stage, skeleton is extracted from an input mesh. As algorithm for skeleton extraction [1] is used. The algorithm extracts the skeleton from closed 2D-manifold mesh using iterative Laplacian contraction. If the input surface is with boundaries, polygon soup or point cloud, we can use adaptation of this algorithm [3], which can handle such surfaces. During the skeleton construction we store the mapping (i.e. which mesh vertices were collapsed into which skeleton node). Furthermore, we compute and store some surface properties of collapsed vertices into corresponding skeleton node. These properties serve for priority weight estimation. Priority weights encode, how important the segment is in a sense of level of detail and how much of space it requires in the final texture. To avoid aliasing and waxy look of textures the filtering has to be applied in texture mapping. For each texel within rectangles we have to guarantee that it has well defined local neighborhood. We do this in such a way that each rectangle is enclosed in mirrored parts of itself. Each skeleton segment is mapped into a rectangle and relative texture coordi-

nates to the rectangle origin are then computed as in Equations 1 and 2. For each skeleton segment priority weights are computed as weighted linear combination of parameters as number of polygons, surface area ratio, curvature and the segment length, which are used to determine parameters as distance  $d$  and dimensions of the rectangle  $w, h$

$$u = \frac{\theta}{2\pi}h \quad (1)$$

$$v = \begin{cases} d(1 - \frac{\alpha}{\pi/2}) & t < 0 \\ d + t(w - 2d) & t \in (0, 1) \\ w + d(\frac{\beta}{\pi/2} - 1) & t > 1. \end{cases} \quad (2)$$

Rectangle with higher priority needs better storing of details, hence it will be stored in bigger area than rectangle with lower priority. Determining relative size ratio between the rectangles, we can formulate the storing of these rectangles as a packing problem of storing  $N$  rectangles with dimensions  $(R_i^W, R_i^H)$  into a unit square. We see some useful applications of our approach in computer graphics. An application of Skeleton Texture Map (STM) concerns mapping of procedurally generated textures onto the surface or seamless texture space diffusion [4] and Skeleton Displacement Map (SDM) can be used as data structure for model representation.

## References

- [1] Au, O. K.-C., Tai, C.-L., Chu, H.-K., Cohen-Or, D., and Lee, T.-Y. (2008). Skeleton extraction by mesh contraction. *ACM Transactions on Graphics*, 27(3).
- [2]. Two-part texture mappings. *IEEE Computer Graphics and Applications* 6 (1986), 40–53.
- [3] CAO J., TAGLIASACCHI A., OLSON M., ZHANG H., SU Z.: Point cloud skeletons via laplacian based contraction. In *Proceedings of the 2010 SMI Conference* (2010), pp. 187–197.
- [4] D'EON E., LUEBKE D., ENDERTON E.: A system for efficient rendering of human skin. In *ACM SIGGRAPH 2007 sketches* (2007), SIGGRAPH '07. Techniques.

\*madaras@sccg.sk

†durikovici@fmph.uniba.sk

# Image-based interpolácia obrazu v blízkej fotogrametrii (rozšírený abstrakt)

Viktor Major<sup>1\*</sup>

Školiteľ: Pavol Beluško<sup>2†</sup>

<sup>1</sup> Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava,

<sup>2</sup> EDICO SK, a.s., Kopčianska 65, 851 01 Bratislava

Práca sa zaoberá interpoláciou obrazu a odstraňovaním pozadia na konkrétnych nasnímaných dátach pri digitalizácii kultúrneho dedičstva. Vstupnými dátami pre navrhnuté metódy sú objektové panorámy. Objektová panoráma je séria fotografií, štandardne zachytávajúca predmet z 36 strán. Predmet je vždy otočený o  $10^\circ$  voči predchádzajúcej polohe okolo osi, ktorá sa čo najmenej líši od prirodzenej osi predmetu.

Interpolácia je metóda nájdenia nových dátových bodov v diskkrétnej množine známych bodov. Morfing pohľadu je metóda spracovania obrazu, kde sa z dvoch vstupných obrázkov vytvoria medziobrázky [Szeliski, 2010]. Pri generovaných obrázkoch sa očakáva zachovanie vernosti geometrických útvarov a textúra morfovaných predmetov. Navrhnutá metóda interpolácie obrazu je založená na metóde optical flow s použitím Bézierových kriviek [Salomon, 2006].

Interpolované obrazy sa generujú zo štyroch po sebe idúcich obrazov objektivej panorámy. Optical flow sa vyráta z obrázkov  $2 \rightarrow 3$  a  $3 \rightarrow 4$ . Pre dané pixle z obrazu 2 dostaneme súradnice, kde sa posunuli na 3. a 4. obraze. Na vypočítané body sa použije kvadratická Bézierová krivka. Následne sa vyráta optical flow aj pre obrazy  $1 \leftarrow 2$  a  $2 \leftarrow 3$  v opačnom smere. Z dvoch štruktúr Bézierových kriviek sa generujú interpolované obrazy medzi obrazmi 2 a 3. Vygenerovaný obraz (Obr. 1) z jednej štruktúry sa zmiešava s obrazom generovanej z druhej štruktúry, aby doplnila chýbajúce pixle, ktoré vznikli pri výpočte optical flow. Na implementáciu metódy sme použili programovací jazyk C++, knižnicu OpenCV a FlowLib [Werlberger et al., 2010].

Odstraňovanie pozadia je jedna z najviac fundamentálnych metód spracovania obrazu, pre svoju jednoduchosť a preto, že v mnohých situáciach máme upevnenú kameru alebo fotoaparát. Pri odstraňovaní pozadia sa najprv musí "natréňovať" pozadie. Po tréňovaní sa model pozadia porovnáva s aktu-



Obr. 1: Vľavo: obrázok z  $10^\circ$ , v strede: vygenerovaný obrázok z  $15^\circ$ , vpravo: obrázok z  $20^\circ$



Obr. 2: Vľavo: nasnímaný obrázok, vpravo: obrázok po odstránení pozadia

álnym obrazom a známe časti pozadia sa odčítajú [Bradski and Kaehler, 2008].

Pri navrhovaní riešenia pre softvér na odstraňovanie pozadia boli hlavné požiadavky, aby sa zachovali prirodzené tieň nasnímaných predmetov a odstránili sa nežiaduce prvky, ako napríklad otočný stôl na ktorom sa predmet točí. Navrhli sme metódu, ktorá spĺňa všetky horeuvedené požiadavky (Obr. 2). Softvér je založený na rôznych filtroch a používa diferenciálne snímky. Na implementáciu metódy sme použili programovací jazyk C++, knižnicu OpenCV.

## Literatúra

- [Bradski and Kaehler, 2008] Bradski, G. and Kaehler, A. (2008). *Learning OpenCV*. O'Reilly Media Inc.
- [Salomon, 2006] Salomon, D. (2006). *Curves and Surfaces for Computer Graphics*. Springer-Verlag.
- [Szeliski, 2010] Szeliski, R. (2010). *Computer Vision, Algorithms and Applications*. Springer-Verlag.
- [Werlberger et al., 2010] Werlberger, M., Pock, T., and Bischof, H. (2010). Motion estimation with non-local total variation regularization. In *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, San Francisco, CA, USA.

\* viktormajor@yahoo.com

† pavol.belusko.edico@gmail.com

# SPH with Small Scale Details and Improved Surface Reconstruction (Extended Abstract)

Juraj Onderik\*

Michal Chládek†

Supervisor: Roman Ďurikovič‡

Katedra aplikovanej informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava,

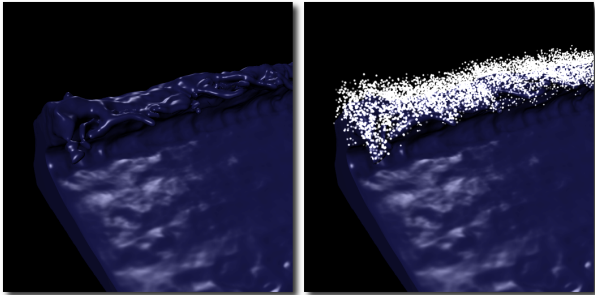


Figure 1: *Breaking wave simulation (only 20k particles) with 14k splash particles emitted using our technique.*

In our paper, three main ideas are presented. The first one is a novel method for creating small scale details as splashes and foam for SPH simulations. In our technique, each fluid particle can become a source emitter of splash particles. The probability of emission is controlled by density decay and velocity of fluid particles. Splash particles are uncoupled, collide only with obstacles and follow only ballistic motion. This approach improves the visual realism of the fluid while the resolution of the fluid used in simulation can be relatively small. It is more suitable for larger scene, where splasher are commonly observed.

Due to coherency of fluid motion, spatial sorting of particles usually performed in neighbor search can be done faster than using regular sorting algorithm like in [Onderik and Ďurikovič, 2008]. In our observation, only around 10 percent of particles change their cell index. Using this fact we provide a simple 3 step (split-sort-merge) approach to reorder particles in approximately 2/3 time of a regular sort. In the first step we split particles into a sorted and an unsorted group, then we reorder the small unsorted group with a regular sort and finally we merge both sorted groups into a new particle list.

We have improved fluid surface recon-

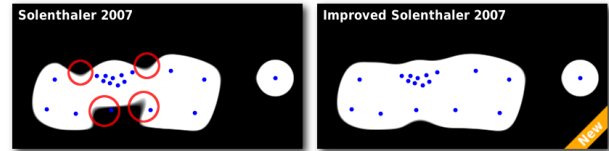


Figure 2: *Results of surface reconstruction method from [Solenthaler et al., 2007] with(right) and without(left) density weighting.*

struction techniques [Zhu and Bridson, 2005, Solenthaler et al., 2007] to better handle uneven distributions of particles. Our method first computes density distribution of particles which is then used for weighting the particle average using following equation.

$$\mathbf{C}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{C}_1(\mathbf{p})}{\mathbf{C}_2(\mathbf{p})} = \frac{\sum_j \frac{1}{w_j} W(\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_j\|, h) \mathbf{p}_j}{\sum_j \frac{1}{w_j} W(\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_j\|, h)}, \quad (1)$$

where  $\mathbf{p}$  is position of a particle,  $W$  is kernel function used in SPH simulation and  $w_j$  is *iso-density* of  $j$ -th particle which is an interpolant of unit mass of neighboring particles. We also propose a different approach to reduce artifacts within isolated particles, without the need of eigen value analysis, giving us a clean analytic expression of surface normals.

## References

- [Onderik and Ďurikovič, 2008] Onderik, J. and Ďurikovič, R. (2008). Efficient neighbor search for particle-based fluids. *Journal of the Applied Mathematics, Statistics and Informatics*, 4.
- [Solenthaler et al., 2007] Solenthaler, B., Schläfli, J., and Pajarola, R. (2007). A unified particle model for fluid-solid interactions. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 18:69–82.
- [Zhu and Bridson, 2005] Zhu, Y. and Bridson, R. (2005). Animating sand as a fluid. volume 24, pages 965–972, New York, NY, USA. ACM Press.

\*jura.j.underik@fmph.uniba.sk

†michal.chladek@fmph.uniba.sk

‡durikovici@fmph.uniba.sk

## Nefotorealisticke modelovanie miest

Michal Pálenkár <sup>1\*</sup>

Školiteľ: Peter Borovský <sup>2‡</sup>

<sup>1</sup> Katedra algebr, geometrie a didaktiky matematiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

<sup>2</sup> Katedra aplikovanej informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

Súčasné trendy v oblasti urbánnych vizualizácií sa približujú k čo najvernejšiemu zobrazeniu skutočnosti, inými slovami k fotorealistickej vizualizácii. Môžeme to pozorovať pri propagácii výstavby nových komplexov, predaji nehnuteľností, na bilbordoch a podobne. V mnohých prípadoch tieto vizualizácie nepôsobia presvedčivo. Výsledok je často neestetický a štylizácia objektov tak pôsobí umelo.

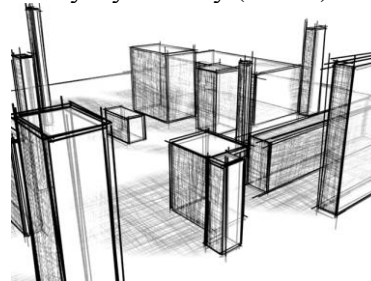
Autor tejto práce predkladá alternatívny pohľad na problematiku nefotorealistickej štylizácie miest. Prehodnocuje výsledky doterajšieho výskumu a nachádza širšie možnosti jeho využitia v praxi. Ako jednu z možností riešenia tohto aspektu kreovania reality vidí v štylizovanom pojmí zobrazovanej skutočnosti. Hlavnou motiváciou a zároveň výzvou je napodobnenie umeleckého ilustratívneho štýlu v digitálnej sfére pri zachovaní kresebného rukopisu autora.

Cieľom je vytvorenie štylizovaného prostredia častí virtuálnych miest bez ohľadu na použitý zobrazovací 3D engine za pomoci autorského softvérového diela v podobe skriptu.

Prínosom tejto práce by mala byť analýza nájdených problémov, ohľadne nefotorealistickeho modelovania, spojená s ich riešeniami. Na druhej strane prínos v praxi sa predpokladá najmä v oblastiach architektúry a vizualizácií miest.

Pojem NPR - non-photorealistic rendering (nefotorealisticke renderovanie) označuje vedeckú a technologickú oblasť zaoberajúcu sa počítačovou grafikou, ktorá sa usiluje o generovanie obrazov pôsobiacich nefotorealisticke [Strothotte a Schlechtweg, 2002]. Typické metódy nefotorealistickeho štylizovania ako backFace culling a cell shading, sa NPR snaží implementovať prostredníctvom na to určených renderovacích algoritmov [Buchholz a kol., 2003]. Práve tu sa dostávame k našej alternative a to k nefotorealisticke modelovaniu (NPM - non-photorealistic modeling). Myšlienkou je nahradenie týchto algoritmov jednoduchými priestorovými entitami a tým zasiahnuť priamo do modelu, pričom

ostanú zachované všetky náležitosti nefotorealistickej štylizácie. Ide o akúsi syntézu medzi kresbou a modelom a to takou formou, že obrysové hrany objektu by boli nahradené trojrozmernými elementmi a samotná adaptácia kresleného štýlu povrchu modelu, formou textúry. Výstupom tak bude opäť model, ktorý bude nefotorealisticke štylizovaný (Obr. 1).



Obr. 1: Výstup skriptu napodobňujúci ručnú kresbu

Základným princípom je detekcia obrysových hrán. Narozdiel od NPR, kde sa tieto informácie musia zisťovať pri každom pohybe kamery, sa detekcia hrán odohráva na úrovni modelu s použitím jeho geometrie. Tým sa stráca nutnosť získavať výstupy v podobe hĺbkovej a normálovej mapy. V našom prípade si vystačíme s porovnávaním jednotlivých plôšok vzhľadom na ich normálové vektory.

Výsledky sa nesnažia verne kopírovať realitu, no so zachovaním estetickej podstaty budú sprostredkovať umelecký zážitok. Uplatnenie sa predpokladá najmä v architektúre, vizualizácii historických budov, kultúrneho dedičstva a pri propagácii miest zahraničným turistom.

### Referencie

- [Strothotte a Schlechtweg, 2002] Strothotte, T. a Schlechtweg, S. (2002). *Non-Photorealistic Computer Graphics - Modelling, Rendering, and Animation*, strany 311-320, San Francisco, Elsevier Science.
- [Buchholz a kol., 2003] Buchholz, H., Döllner, J., Nienhaus, M. a Kirsch, F. (2003). *Real-Time Non-Photorealistic Rendering of 3D City Models.*, Potsdam, Hasso - Plattner - Institute.

\* michalpalenkar@gmail.com

‡ peter.borovsky@fmph.uniba.sk



# Procedurálny model ruky so zameraním na deformáciu geometrie a vytváranie vrások (rozšírený abstrakt)

Ján Špaček<sup>1\*</sup>

Školiteľ: Jana Dadová<sup>2†</sup>

<sup>1</sup> Katedra informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava,

<sup>2</sup> Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

Virtuálne postavy sa používajú stále častejšie v rôznych odvetviach, vo filme, pri počítačových hrách, pri simuláciách chirurgických operácií a je čím ďalej, tým dôležitejšie ich detailné a realistické zobrazovanie. K dosiahnutiu realistickosti sa kladie dôraz na modelovanie kriviek tela, animáciu, materiály reprezentujúce pokožku, vlasy a oblečenie. Z toho všetkého je pokožka najcitlivejšou a najzložitejšou časťou. Pokrýva úplne celé telo človeka. Ľudské oko ju vníma neustále, jej zvrásnením, farbou a tvarom rozoznávame vek, pocity, nálady a pohyby ľudí. Zvrásnenie kože a jej sfarbenie sú najviditeľnejšou časťou ľudského tela, preto sú hlavnými faktormi ktoré určujú reálnosť vykresľovania pokožky. Práve z týchto dôvodov realistické zobrazenie pokožky výrazne prispieva k celkovému realizmu modelov ľudí.

Keď sa pozrieme detailne na pokožku, zistíme že celá je pokrytá akousi mikroštruktúrou, ktorá je rovnaká na väčšine ľudského tela. Táto mikroštruktúra je veľmi dobre definovaná geometrickými tvarmi. Viditeľné línie, vzory, vrásky a záhyby sú odlišnej konštrukcie, sú výraznejšie a tvoria makroštruktúru.[Bando et al., 2002]

Mikroštruktúra povrchu pokožky je určená epidermou a má jednoduchú sieťovú štruktúru. Táto štruktúra pozostáva z mnoho polygónov, prevažne trojuholníkov[Marks, 1991]. Hrany trojuholníkov určujú polohu brázd alebo mikrolinky a zakrivený povrch obklopený brázdami určuje vrchol, respektíve hrebeň. Mikrolinky môžu byť miesto pre makrolinky alebo vrásky. Majú jemnú štruktúru a na určitých miestach sú modifikované vzhl'adom na smer a frekvenciu pohybov v danom mieste. Mikrolinky majú rôzne vzory a vlastnosti na rôznych častiach tela, ale na väčšine povrchu pokožky majú stále základnú jednoduchú polygonálnu štruktúru.[Wu et al., 1998]

Makroštruktúra určuje vlastnosti pokožky charakteristické pre určitú časť tela. Napríklad miesto a vzor čiar na dlani a na chodidle, viditeľné hlboké ohybné čiary na ostatných častiach tela a potenciálne vrásky, ktoré ukazujú vek alebo pohyb človeka (výrazy na tvári). V porovnaní s mikrolinkami, makrolinky formujú hĺbku, šírku a pokrčenie brázd[Wu et al., 1998].

Vrásky môžeme vytvárať manuálnym modelovaním a textúrovaním so značnou časovou náročnosťou a veľkým úsilím, ktoré je nevyhnutné pre dosiahnutie čo najlepšieho výsledku. Čas a úsilie potrebné na vytvorenie realistického modelu ruky sa dá zredukovať vytvorením nejakej metódy, ktorá zlepší efektivitu modelovania.

Za pomoci jazyka Python som naprogramoval jednoduchú metódu, ktorá v programe Blender vytvára vrásky na užívateľom zadanom mieste na ruke. V skripte som použil bump mapping a zmenu geometrie objektu. Pomocou mojej jednoduchšej metódy na vytváranie vrások sa značne redukuje čas a úsilie potrebné na vytvorenie realistického modelu ruky. Neskôr sa táto metóda bude dať použiť aj na vytváranie vrások na iných častiach tela.

## Literatúra

- [Bando et al., 2002] Bando, Y., Kuratate, T., and Nishita, T. (2002). A simple method for modeling wrinkles on human skin.
- [Marks, 1991] Marks, R. (1991). Mechanical properties of the skin.
- [Wu et al., 1998] Wu, Y., Kalra, P., and Magnenat-Thalmann, N. (1998). Simulation of static and dynamic wrinkles of skin.

\*jan.spacek@gmail.com

†dadova@sccg.sk

# The worst view for virtual museum presentation (Extended Abstract)

Ivana Varhaníková\*

Supervisor: Andrej Ferko†

<sup>1,2</sup>Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University, 842 48 Bratislava

In this work we present two different worst view approaches. The first one is based on finding algorithmic best view methods and then we present also a human based approach to find the worst view.



Figure 1: The best and the worst view of a church according to Image based best view selection method.

## Inverse method

For the best view automatic searching there exist lots of algorithms. As a demonstration we chose the algorithm from [Lacko et al., 2010], where entropy of each view is considered at a pixel level based on the method by [Cernekova et al., 2006].

When we obtain the entropy values of the views we can line up the values uplink from the lowest to the highest one. The worst view path is calculated as a connection of the views from the view list from the worst one to the best (or only selected ones till the number of views we need) by the adequate curves. We think that when we upkeep visitors attention enough, that he may spend more time in a virtual museum, without feeling bored.

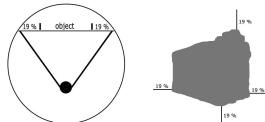


Figure 2: Premises for finding a good view on an object according to [Bertok and Janousek, 1988].

## Perception method

The effect of computing the best views on some object is to give observer as much information as possible. In the [Bertok and Janousek, 1988] they as-

sume that the observer gets most informations from that view where camera stays in the point that from each side of object is 19 % free space (background). This rule is illustrated in Figure 2. However, according to visual perception [Goldstein, 2010] it is necessary to give to observer firstly known percepts and then new ones. Using Gestalt psychology [Werner and Diekmayer, 1997], we can find the most attractive part of our object, which is different from the rest and we target that detail. Then we use the premises to find a good view for whole object to its part and we get eventual worst view. When we have the worst view, we can continuously get to best view by ascending.

## Conclusion

In this work we described a support tool for creating virtual museum presentations. Finding the worst view on 3D objects and connect them into the museum going-over may upkeep attention of visitors of museum. This research was partly supported from Slovak Scientific Grant Agency (VEGA), project No. 1/0763/09 and it was presented as a poster at Eurographics 2011.

## References

- [Bertok and Janousek, 1988] Bertok, I. and Janousek, I. (1988). *Computers and Art*. SPN. ISBN 80-08-00037-6.
- [Cernekova et al., 2006] Cernekova, Z., Pitas, I., and Nikou, C. (2006). Information theory-based shot cut/fade detection and video summarization. *IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology*, 16:82–91.
- [Goldstein, 2010] Goldstein, B. (2010). *Encyclopedia of Perception*. SAGE Publications, Inc. ISBN 978-1-4129-4081-8.
- [Lacko et al., 2010] Lacko, J., Cernekova, Z., and Maricak, M. (2010). Geometry and image based view quality comparison for 3d models. *SCCG 2010 Proceedings*, 26:173–177.
- [Werner and Diekmayer, 1997] Werner, K. and Diekmayer, U. (1997). *Creativity training*. Prague. ISBN 80-7178-227-0.

\*varhanikova@sccg.sk

†ferko@sccg.sk

# Simulácia šermu v 3D za pomoci UI

Jaroslav Blanáš\*  
Školiteľ: Igor Farkaš†

Katedra aplikovanej informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Táto práca sa zaoberá simuláciou šermovania v 3D, kde hlavným problémom je schopnosť naučiť agenta obranné manévry, aby sa dokázal ubrániť trénerovým výpadom. Na tento účel využívame učenie s posilňovaním (reinforcement learning - RL) pomocou CACLA algoritmu (*Continuous actor critic learning automaton*). Dopredná neurónová sieť sa bohužiaľ nedokázala naučiť daný problém pomocou CACLA algoritmu, preto sme navrhli jej modifikáciu, ktorá sa ukázala ako výborne riešenie pre tento problém.

**Keywords:** Učenie s posilňovaním, CACLA, šermovanie

## 1 Motivácia práce

Mojou hlavnou motiváciou tohto experimentu sú počítačové hry, ktoré často poskytujú hráčom nie veľmi sofistikovanú umelú inteligenciu. Keď hráč odhalí spôsob (algoritmus), akým umelá inteligencia funguje v hre, stáva sa preňho hra nudnou. Umelá inteligencia v hre sa nedokáže adaptovať, prispôbovať hráčovi, učiť sa od hráča novým stratégiám, či vytvárať si hybridné stratégie. Počítačové hry pre mňa predstavujú bohatú oblasť pre experimenty s umelou inteligenciou, ktorá disponuje sofistikovanými virtuálnymi prostrediami, ktoré sú schopné poskytovať vstupné dáta pre neurónové siete v reálnom čase. Ako prvý krok som si preto zvolil vytvoriť umelú inteligenciu, ktorá by sa dokázala naučiť obranné manévry v spojitom prostredí akcií a stavov.

## 2 Učenie s posilňovaním.

Učenie s posilňovaním korešponduje so širokou skupinou tried strojového učenia, ktoré umožňujú agentovi naučiť sa správať v prostredí, založenom na základe skalárnej odmeny signálu. Agent interaguje s *prostredím*. V teórii riadenia sa agent nazýva *regulátor* a prostredie *plán*. Agent vykonáva *akcie*  $a$ , ktoré môžu zmeniť *stav*  $s$  prostredia, napríklad : pozícia robota alebo orientácia robotického ramena, agent spracováva *poznatky*  $o$  z prostredia, ktoré mu poskytujú informácie o aktuálnom stave. Správanie agenta je dané jeho *stratégiou*  $\pi$ , na základe ktorej sa rozhoduje v rôznych situáciách. Cieľom učenia s posilňovaním je naučiť stratégiu založenú na špecifickej spätnej väzbe od prostredia k agentovi, nazývanej *odmena*  $r$ . Odmeny sú skalárne hodnoty, ktoré ukazujú, aká je dobrá konkrétna situácia. Potom cieľom je naučiť stratégiu, ktorá maximalizuje mieru krátkodobých alebo aj dlhodobých odmien (Sutton, Barto, 1998).



Obr. 1 : Schematická reprezentácia RL

Pomocou učenia s posilňovaním môžeme riešiť problémy, ktoré môžu byť modelované ako Markovovské rozhodovacie problémy (*Markov Decision Problems*) (Sutton a Barto, 1998). Kde prostredie má Markovovskú vlastnosť, že reakcie prostredia v čase  $t+1$  sú závislé len od udalostí v čase  $t$ . Markovovské rozhodovacie problémy sú usporiadaná štvorica  $(S, A, R, P)$ , kde :

\* dzejro@gmail.com

† farkas@fmph.uniba.sk

- $S$  je konečná množina stavov,  $s_t \in S$  je stav agenta v čase  $t$ .
- $A$  je konečná množina akcií,  $a_t \in A$  je akcia agenta vykonaná v čase  $t$ .
- $R : S \times A \times S \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcia ohodnocujúca správanie agenta (funkcia odmeny a trestu),  $R(s_t, a_t, s_{t+1})$ .
- $P : S \times A \times S \rightarrow [0, 1]$  je funkcia prechodu, kde  $P(s_t, a_t, s_{t+1})$  dáva pravdepodobnosť prechodu do stavu  $s_{t+1}$  pri vykonaní akcie  $a_t$  v stave  $s_t$ .

Agent v čase  $t$  sa nachádza v stave  $s_t \in S$ , na základe svojej aktuálnej naučenej stratégie  $\pi : S \times A \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  sa snaží zvoliť najvhodnejšiu akciu  $a_t \in A$ , ktorou by maximalizoval svoje odmeny v ďalších krokoch. Odmeny agenta, ktoré sú ďalej v budúcnosti, sú menej hodnotné (diskontované), preto aby sa agent snažil čo najrýchlejšie maximalizovať svoje odmeny. Táto intuícia bola vynájdená v ekonomickej teórii; rovnaká odmena je hodnotnejšia viac, ak je k dispozícii okamžite, ako keď je k dispozícii až po dlhom čase. Odmena v budúcnosti je :

$$r_t + \gamma r_{t+1} + \gamma^2 r_{t+2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i r_{t+i} \quad (1)$$

kde  $\gamma \in \langle 0, 1 \rangle$  je diskontný faktor.

## 2.1 Ohodnocovacia funkcia

Pri použití ohodnocovacej funkcie (*value function*) sa agent počas učenia optimálnej stratégie riadi hodnotami spojenými s jednotlivými stavmi alebo dvojicami (akcia, stav). Hodnoty spojené s jednotlivými stavmi alebo dvojicami (akcia, stav) predstavujú očakávaný diskontovaný výnos z tohto daného stavu alebo dvojice, za predpokladu, že agent nasleduje danú stratégiu  $\pi$ .  $V_\pi(s)$  označujeme ohodnotenie konkrétneho stavu  $s$  pri danej stratégii  $\pi$ . Podobne, pri ohodnocovaní akcií vzhľadom na stavy označujeme  $Q_\pi(s, a)$  pre každú dvojicu. Označme  $\pi^*$  ako optimálnu stratégiu agenta, potom ohodnocovanie stavov je definované nasledovnou Bellmanovou rovnicou optimality (Bellman, R. E., 1957) :

$$V^*(s) = \max_a \sum_{s'} P(s, a, s') (R(s, a, s') + \gamma V^*(s')) \quad (2)$$

a pre ohodnotenie akcií vzhľadom na stavy platí:

$$Q^*(s, a) = \max_a \sum_{s'} P(s, a, s') (R(s, a, s') + \max_{a'} \gamma Q^*(s', a')) \quad (3)$$

## 2.2 Aktér-kritik architektúra

Táto architektúra má oddelenú štruktúru: Jedna časť systému kritik reprezentuje hodnoty stavov ohodnocovacej funkcie  $V(s)$ , ďalšou časťou je aktér, ktorý sa učí stratégiu  $\pi(s)$  na základe signálov z kritika. Oboja kritik a aktér sa učia na základe časového rozdielu chýb (temporal difference error – TD-chyba) (Sutton, 1988). TD pravidlo učenia kritika :

$$V_{t+1}(s_t) = V_t(s_t) + \alpha [r_{t+1} + \gamma V_t(s_{t+1}) - V_t(s_t)] \quad (4)$$

kde  $\alpha$  je parameter rýchlosti učenia.

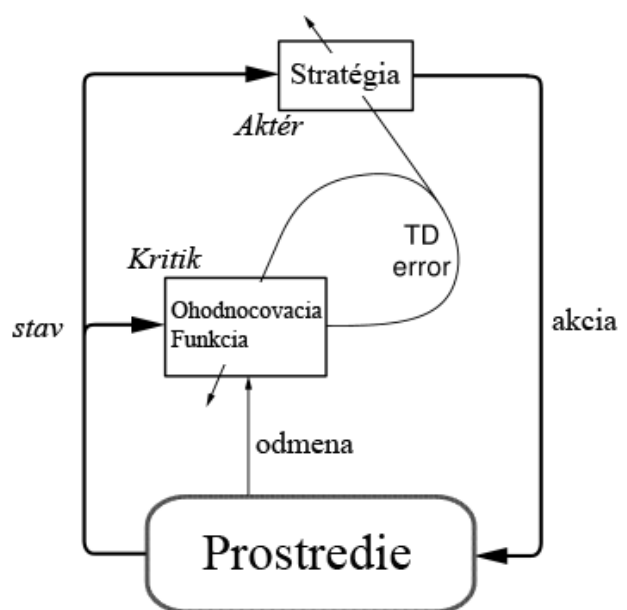
Po každej vykonanej akcii kritik zhodnotí nový stav a určí, aká vhodná bola daná akcia, výpočet TD chyby :

$$\delta = r_{t+1} + \gamma V(s_{t+1}) - V(s_t) \quad (5)$$

kde  $V$  je aktuálna ohodnocovacia funkcia vykonaná kritikom. TD chyba je použitá na ohodnotenie zvolenej akcie  $a_t$  v stave  $s_t$ . Ak je chyba pozitívna, potom pravdepodobnosť výberu tejto akcie by mala byť posilnená pre budúcnosť, naopak, ak je negatívna, potom pravdepodobnosť výberu by mala byť oslabená pre budúcnosť. TD pravdepodobnostná funkcia aktéra :

$$P_{t+1}(s_t, a_t) = P_t(s_t, a_t) + \beta \delta_t \quad (6)$$

kde  $\alpha, \beta$  sú parametre rýchlosti učenia.



Obr. 2 : Typická aktér-kritik architektúra (Sutton, Barto, 2004).

### 3 Spojitý priestor

Keď je stavový priestor spojitý, používame aproximátory funkcie (*function approximators* - FA), ktoré sa používajú na ukládanie hodnôt stavov prostredia a akcií. *Kritika* a *aktéra* nahradíme spojitými funkciami. *Kritika* nahradíme funkciou  $V : s \rightarrow R$ , ktorá pre aktuálny stav  $s_t$  vypočíta ohodnotenie  $V_t(s_t)$ . *Aktéra* nahradíme tiež spojitou funkciou  $A : s \rightarrow R^n$ , ktorá pre aktuálny stav vygeneruje najvhodnejšiu akciu  $A_t(s_t)$ . Ako parametre aproximátorov funkcie  $A$  beriem vektor parametrov  $\theta^A$  a pre funkciu  $V$  vektor parametrov  $\theta^V$ .

#### 3.1 CACLA

Algoritmus CACLA (*Continuous actor critic learning automaton*) (van Hasselt a Wiering, 2007) je rozšírením algoritmu ACLA (*Actor Critic Learning Automaton*) učenia s posilňovaním a zavedením CACLA do spojitého prostredia stavov a akcií. CACLA nepoužíva model prostredia (model-free), ale učí agenta priamo na základe on-line interakcie s prostredím.

##### A) Aktualizačné pravidlo pre učenie

Aktualizácia sa vykonáva na parametroch FA. Nech  $\theta^V$  je vektor parametrov pre kritika, aktualizáčnè pravidlo pri učení kritika na jeho váhach neurónovej siete je nasledovné:

$$\theta_{i,t+1}^V = \theta_{i,t}^V + \alpha \delta_t \frac{\partial V_t(s_t)}{\partial \theta_{i,t}^V} \quad (7)$$

kde  $\alpha$  je rýchlosť učenia a  $\theta_{i,t}^V$  je  $i$ -tá zložka vektoru  $\theta^V$  v čase  $t$  a  $V_t(s_t)$  je výstup z FA v čase  $t$  so vstupom  $s_t$ .

Aktualizačné pravidlo pri učení aktéra na jeho váhach neurónovej siete je nasledovné:

$$\text{if } \delta_t > 0 : \theta_{i,t+1}^A = \theta_{i,t}^A + \alpha (a_t - A_t(s_t)) \frac{\partial A_t(s_t)}{\partial \theta_{i,t}^A} \quad (8)$$

kde  $\theta_{i,t}^A$  je  $i$ -tá zložka vektoru  $\theta^A$  v čase  $t$  a  $A_t(s_t)$  je výstup z FA v čase  $t$  so vstupom  $s_t$ . Zmenu  $\theta^A$  sa vykoná len pri pozitívnej spätnej väzbe, keď  $\delta_t > 0$ .

##### B) Explorácia

Prieskum okolia je rozhodujúci pri učení s posilňovaním, pretože je to jediný spôsob, ako objavovať nové a lepšie stratégie. Keď sa agent nachádza v stave  $s_t$ , musí vybrať najvhodnejšiu akciu  $a_t$  pre tento stav, za pomoci spojitè funkcie  $A(s_t)$ . Jeho voľba je modifikovaná z dôvodu

lepšieho prieskumu okolia. Explorácia umožňuje agentovi objaviť nové a často aj vhodnejšie stratégie. Voľba pravidla explorácie je závislá od konkrétneho problému. Poznáme dve základné explorácie :

- Gaussovská explorácia – pravdepodobnosť výberu akciu  $a_t$  je: 
$$\pi_t(s_t, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(a - (A_t(s_t)))^2 / 2\sigma^2}$$
- $\epsilon$ -greedy explorácia, s pravdepodobnosťou  $\epsilon$  je vybraná úplne náhodná akcia, ktorú akceptujeme ako pôvodnú. S pravdepodobnosťou  $(1 - \epsilon)$  je ponechaná pôvodná akcia.

##### C) Algoritmus

Na začiatku sa zvolí počiatočná konfigurácia prostredia, napríklad: pozícia agenta a pozícia cieľa. V každom kroku získame nový stav prostredia  $s_t$ , potom aktér vygeneruje najvhodnejšiu akciu  $a_t$ , na ktorú sa aplikuje explorácia a dostaneme zmenenú akciu  $a_t'$ . Aplikovaním akcie  $a_t'$  dostaneme nový stav prostredia  $s_{t+1}$ . Funkcia REWARD nám ohodnotí kvalitu prechodu medzi stavmi  $s_t$  a  $s_{t+1}$ . Kritikom ohodnotíme obidva stavy a vypočítame  $\delta$ , ktorá nám určuje kladnú alebo zápornú spätnú väzbu, na základe ktorej je potom trénovaný aktér. Kritik je trénovaný v každom kroku, ale aktér je trénovaný len pri kladnej  $\delta$ . Hodnoty  $\delta$  posilňujú alebo oslabujú väzby kritika so stavmi.

**Algoritmus 1:** Trénovanie modelu CACLA (van Hasselt a Wiering, 2007)

```

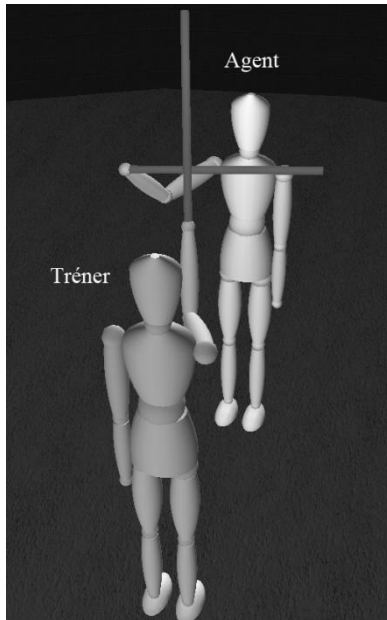
1:  $s_0$  – počiatočný stav;
2: for  $t \leftarrow 0$  to #krokov do
3:    $a_t \leftarrow$  EXPLORATION( $A(s_t)$ );
4:    $s_{t+1} \leftarrow$  APPLY( $s_t, a_t$ );
5:    $r_t \leftarrow$  REWARD( $a_t, s_t, s_{t+1}$ );
6:    $\delta_t \leftarrow r_t + \gamma V_t(s_{t+1}) - V_t(s_t)$ ;
7:    $\theta_{i,t+1}^V = \theta_{i,t}^V + \alpha \delta_t \frac{\partial V_t(s_t)}{\partial \theta_{i,t}^V}$ ;
   // Back-Propagation Critic.
8:   if  $\delta_t > 0$  then
9:      $\theta_{i,t+1}^A = \theta_{i,t}^A + \alpha (a_t - A_t(s_t)) \frac{\partial A_t(s_t)}{\partial \theta_{i,t}^A}$ ;
   // Back-Propagation Actor.
10:  end if
11: end for

```

### 4 Simulátor šermovania

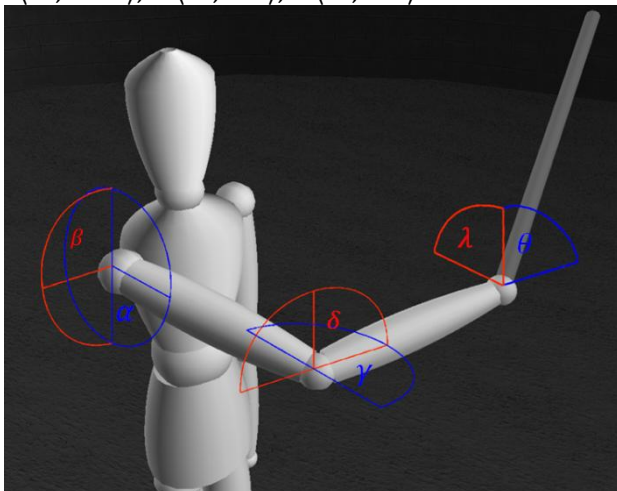
Cieľom tejto práce bolo aj navrhnuť a implementovať simulátor šermovania. Čo je simulátor šermovania? Simulátor šermovania je prostredie, v ktorom sa nachádzajú dva modely

robotov, z ktorých jeden je tréner a druhý je agent. Tréner má predprogramované rôzne akcie v podobe výpadov. Základom simulátora sú modely robotov. Sú reprezentované základnými 3D geometrickými objektmi (valec, guľa, hranol), ktoré sú pospájané dokopy tak, aby čo najviac pripomínali jednoduchý tvar robota (postavy), dve ruky, dve nohy, telo, hlava a meč.



Obr. 3: Simulátor šermovania

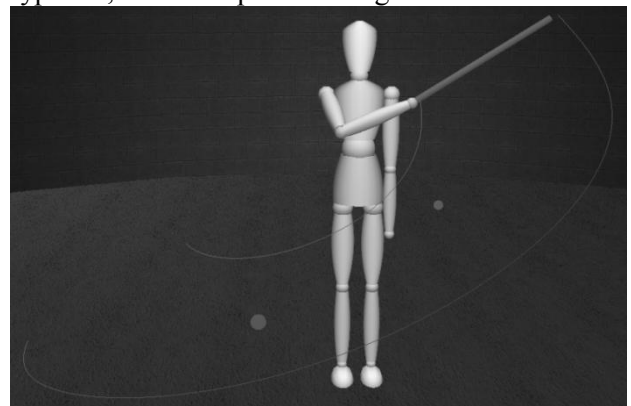
Dôležitou a zložitou časťou modelov sú kĺby (ramenný kĺb, lakt'ový kĺb, zápästný kĺb), vďaka ktorým dokážeme zabezpečiť lepšie a prirodzenejšie reprezentovanie pohybov rúk. Modely neobsahujú ďalšie kĺby, keďže ide o hlavne simuláciu pohybov pravej ruky, ktorá drží meč. Jednotlivé kĺby obsahujú limity, ktoré určujú, ako sa dané časti vedú ohnúť alebo vyrovať. Ruka modelov obsahuje šesť stupňov voľnosti.  $\alpha \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle$ ,  $\beta \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$ ,  $\gamma \langle 0^\circ, 145^\circ \rangle$ ,  $\delta \langle 0^\circ, 120^\circ \rangle$ ,  $\theta \langle 0^\circ, 60^\circ \rangle$ ,  $\lambda \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$



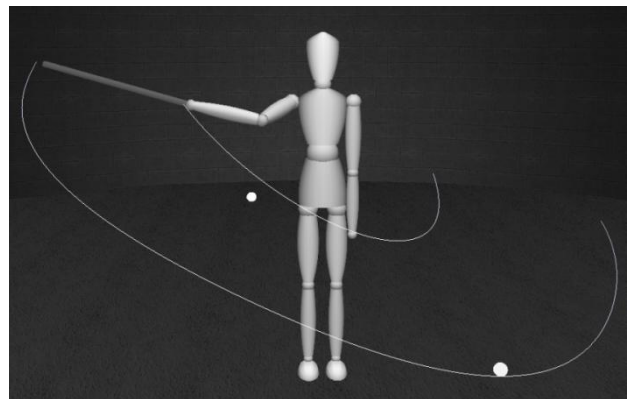
Obr. 4: Stupne voľnosti ruky agenta

#### 4.1 Typy výpadov

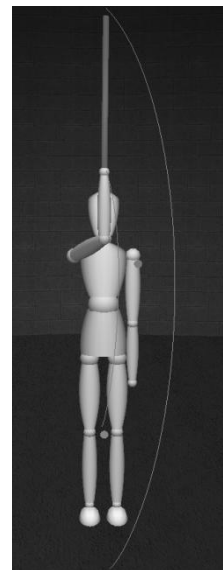
Na tréning používame tri základné typy výpadov z ľava (Obr. 5), z prava (Obr. 6) a stredový (Obr. 7). Agent je trénovaný celkovo na deviatich výpadoch tri ľavé, tri pravé a tri stredové, tieto sú počas testovania upravované generátorom výpadov, ktorý mení sklon a natočenie jednotlivých výpadov. Takto vzniká veľké množstvo nových a zložitejších výpadov, než ktoré pozná náš agent.



Obr. 5: Výpad zľava



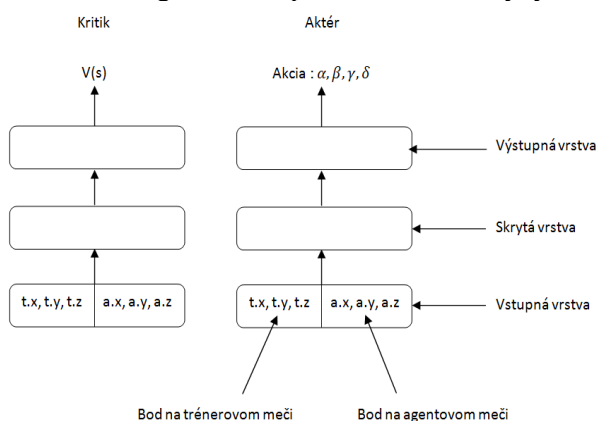
Obr. 6: Výpad sprava



Obr. 7: Výpad zo stredy

## 4.2 Agent

Agent je v 3D priestore reprezentovaný jednoduchým modelom robota, ktorého pozícia v priestore je statická a pohybuje sa len jeho pravá ruka a jeho meč. Na začiatku tréningu, pred každým výpadom trénera, sa agentova ruka a jeho meč nastaví do počiatočnej pozície, ktorá bola zvolená tak, aby pozícia vyhovovala každému druhu výpadu. Následne sa náhodne zvolí jeden z možných výpadov pre trénera, na ktorý sa agent snaží vhodne voliť akcie pomocou RL algoritmu. Prostredie, v ktorom sa agent nachádza, je spojené vzhľadom na stavy a akcie, preto ako jednu z možností algoritmov učenia s posilňovaním sme zvolili CACLA algoritmus. CACLA algoritmus je reprezentovaný dvoma dvojvrstvovými doprednými neurónovými sieťami (aktér, kritik) a ich učenie je realizované algoritmom spätného šírenia chyby.



Obr. 8: Aktér a kritik návrh siete

Aktér a kritik dostávajú na vstupnej vrstve siete šesť reálnych čísel. Prvé tri reálne čísla určujú pozíciu (x, y, z) bodu na trénerovom meči a druhé tri určujú pozíciu bodu na agentovom meči. Výstupom neurónovej siete aktéra  $A(s)$  sú štyri reálne čísla, ktoré určujú štyri stupne voľnosti ruky agenta. Tieto hodnoty sú z intervalu  $(0, 1)$ , pretože používame neuróny so sigmoidálnou aktivačnou funkciou. Aktér nevolí akciu  $\Delta a$  čiastočnej zmeny posunutia jeho ruky, ale výstupné hodnoty sú preškáľované na celé uhly v radiánoch, napríklad  $\alpha \in (-\pi, \pi)$ , z ktorých sa vypočíta  $\Delta a$  čiastočná zmena posunutia ruky (nováAlpha - aktuálnaAlpha)  $\rightarrow$  zmena.

```
double cCacla::AngleChange(double angle){
// 0 aký uhol sa zmenia jednotlivé uhly.
    if (abs(angle) > M_PI_10){
        return angle > 0.0 ? M_PI_10 : - M_PI_10;
    }
    return angle;
}

double * cCacla::ModifyAction(double * state,
                             double * action)
{
    double * a = new double[sizeOutput];
```

```
// SCALE angles

// alpha
a[0] = ScaleAlpha(action[0]);
// beta
a[1] = ScaleBeta(action[1]);
// gamma
a[2] = ScaleGamma(action[2]);
// delta

a[3] = ScaleDelta(action[3]);

a[0] -= actualAlpha;
a[1] -= actualBeta;
a[2] -= actualGamma;
a[3] -= actualDelta;

a[0] = AngleChange(a[0]);
a[1] = AngleChange(a[1]);
a[2] = AngleChange(a[2]);
a[3] = AngleChange(a[3]);
return a;
}
```

Obr 9: Modifikácia akcie

Na každú akciu, ktorú v danom stave zvolil aktér, je najprv aplikovaná gaussovská exploračia, potom je následne modifikovaná, preškáľovaná a nakoniec je z nej vypočítaná čiastočná zmena akcie  $\Delta a = [\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma, \Delta\delta]$ . Akcia  $\Delta a$  je aplikovaná, čím dôjde k posunu pravej ruky agenta.

```
void cCacla::ApplyAction(double* action) {
    actualAlpha += action [0];
// Uloženie si nových uhlov ramena.
    actualBeta += action [1];
    actualGamma += action [2];
    actualDelta += action [3];

    agent->rightArm.SetAngles(actualAlpha, actualBeta,
                              actualGamma, actualDelta);
// Nastavenie nových uhlov ramena.
    agent->Sword.A = agent->P.C;
}
```

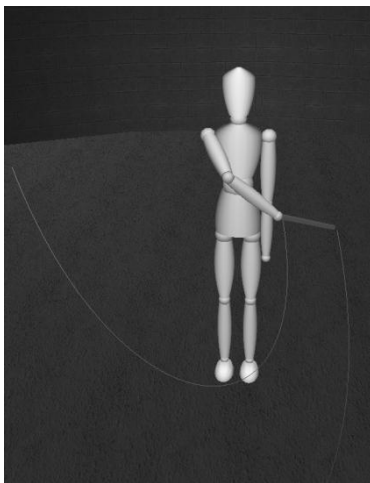
Obr 10: Aplikovanie akcie

## 5 Výsledky

Pri experimentoch s algoritmom CACLA sme sa snažili natréňovať agenta na rozličných modeloch sieťach. Vyskúšali sme rôzne kombinácie modelov siete pre aktéra a kritika s jednou skrytou vrstvou, ale aj s viacerými skrytými vrstvami. Taktiež sme vyskúšali rozličné kombinácie rýchlosti učenia pre aktéra a kritika. Podarilo sa nám pomocou tohto algoritmu natréňovať agenta, tak aby dokázal rozlišovať jednotlivé typy výpadov od seba, a tiež sa snažil voliť čo najvhodnejšie akcie, ktoré by viedli k jeho úspešnej obrane. Dlhú dobu sme si mysleli, že agent nie je schopný naučiť sa rozlišovať jednotlivé typy výpadov pomocou algoritmu CACLA, ale ukázalo sa, že je to možné, aj keď len do určitej miery. Agent sa síce naučil rozpoznávať rôzne typy výpadov, ale na jeden druh výpadu volil stále približne rovnaký obranný manéver. Ako keby sa naučil len nejaké tri postupnosti akcií, ktoré zodpovedali trom základným typom výpadov trénera.

Aby agent dokázal zlepšiť svoju obrannú schopnosť, a tak znížil celkovú chybu pri testovaní, nutne si k tomu potrebuje osvojiť schopnosť rozlišovania jednotlivých typov výpadov. Agent nadobudol túto schopnosť, už počas prvých 800 trébovaných epizód (Obr. 12). Potom, ako sa agent dokázal naučiť rozlišovať jednotlivé typy výpadov od seba, začal sa zlepšovať v obrane, ale len po určitú hranicu. Agent mal tendencie zhoršovať a zlepšovať svoju obrannú stratégiu, ani počas 10000 epizód sa nedokázal razantne zlepšiť. Testovacia krivka oscilovala. Testovacia chyba pri použití algoritmu CACLA nedokázala klesnúť pod hranicu 20%.

Snažili sme sa zistiť, či natrébovaný agent pomocou algoritmu CACLA dokáže schopne reagovať na nový typ výpadu – výpad zospodu (Obr. 11). Agent preukázal dobrú schopnosť reagovať aj na úplne nové typy výpadov. Tento výpad je dosť neštandardný pre agenta, lebo sa nepodobá na žiaden zo základných výpadov nami zvolenými (zľava, sprava, na stred). Bohužiaľ agent nedokázal vôbec schopne reagovať na výpad zospodu. Jeho reakcia na tento druh výpadu bola dosť chaotická a obranný manéver skôr pripomínal nejakú medzikombináciu pravého a stredového obranného manévru.



Obr 11: výpad zospodu

Keďže agent trébovaný pomocou algoritmu CACLA nenaplnil naše očakávania, rozhodli sme sa pre vlastnú modifikáciu algoritmu CACLA, ktorá by dosahovala vyššiu úspešnosť ako algoritmus CACLA, a tiež by dokázal schopne reagovať aj na výpad zospodu.

## 5.1 MCACLA

Navrhli sme nasledovnú modifikáciu algoritmu CACLA (Algoritmus 2 MCACLA). Prvou modifikáciou je, že pri trébovaní neberieme do

úvahy len akciu  $a_t$ , ktorú dostávame exploračiou z akcie  $a_{actor}$ , ale berieme aj samotnú akciu  $a_{actor}$ , ktorú zvolil *aktér* ako najhodnejšiu akciu v stave  $s_t$  podľa aktuálnej stratégie. Pri trébovaní využívame bonus v podobe toho, že pracujeme s dvomi stavmi  $s1_{t+1}$  a  $s2_{t+1}$ , do ktorých sa dostávame práve pomocou týchto dvoch akcií  $a_t$  a  $a_{actor}$  prechodom zo stavu  $s_t$ . Ďalšou dôležitou modifikáciou je, že sa snažíme *kritika* učiť pomocou odmeny a trestu z prostredia  $r_t$  a nie pomocou časového rozdielu chyby (TD-chyby). Chceme, aby sa *kritik* naučil čo najlepšie reprezentovať hodnoty  $r_t$ , pretože ním odohnocujeme už vypočítané nové stavy  $s1_{t+1}$  a  $s2_{t+1}$ . Hodnoty  $v_1$  a  $v_2$  dostaneme ohodnotením týchto stavov. Dôležitou modifikáciou prešla aj podmienka  $\delta > 0$ , ktorá určovala, aké akcie sa má *aktér* učiť. Pri tejto podmienke sa *aktér* učil akcie z príliš širokého pásma (viď. kapitola 4.6). Preto sa domnievame, že práve kvôli tomuto sa *aktér* nedokázal lepšie špecializovať na rôzne typy výpadov. Túto podmienku sme upravili tak, aby sa *aktér* učil len vtedy, keď jeho akcia  $a_{actor}$  je horšia ako akcia  $a_t$  získaná exploračiou, čo vyjadruje táto podmienka  $v_1 > v_2$ . Touto podmienkou zaručujeme, že sa *aktér* bude snažiť zlepšovať, a tiež bude mať dostatočnú voľnosť pri exploračii. Poslednou modifikáciou tohto algoritmu je, že táto istá podmienka  $v_1 > v_2$  tiež rozhoduje o tom, aká akcia bude v konečnom kroku aplikovaná v prostredí. Aplikuje sa akcia, ktorá bola vyhodnotená ako lepšia.

---

### Algoritmus 2: Trébovanie modelu MCACLA (Jaroslav Blanář, 2010)

---

```

1:  $s_0$  – počiatočný stav;
2: for  $t \leftarrow 0$  to #krokov do
3:    $ac \leftarrow A(s_t)$ ;
4:    $a_t \leftarrow \text{EXPLORATION}(ac)$ ;
5:    $s1_{t+1} \leftarrow \text{GetState}(s_t, a_t)$ ;
6:    $s2_{t+1} \leftarrow \text{GetState}(s_t, ac)$ ;
7:    $r_t \leftarrow \text{REWARD}(a_t, s_t, s1_{t+1})$ ;
8:    $\delta_t \leftarrow r_t$ ;
9:    $\theta_{i,t+1}^V = \theta_{i,t}^V + \alpha \delta_t \frac{\partial V_t(s_t)}{\partial \theta_{i,t}^V}$ ;
   // Back-Propagation Critic
10:   $v_1 = V_t(s1_{t+1})$ ;
11:   $v_2 = V_t(s2_{t+1})$ ;
12:  if  $v_1 > v_2$  then
13:     $\theta_{i,t+1}^A = \theta_{i,t}^A + \alpha (a_t - A_t(s_t)) \frac{\partial A_t(s_t)}{\partial \theta_{i,t}^A}$ ;
   // Back-Propagation Actor
14:   $\text{APPLY}(s_t, a_t)$ ;

```



```

15:   else
16:       APPLY( $s_t$ ,  $ac$ );
17:   end if
11: end for

```

Aj pri algoritme MCACLA sme vyskúšali rôzne kombinácie modelov siete pre aktéra a kritika s jednou skrytou vrstvou, ale aj s viacerými skrytými vrstvami. Taktiež sme vyskúšali rozličné kombinácie rýchlosti učenia pre aktéra a kritika.

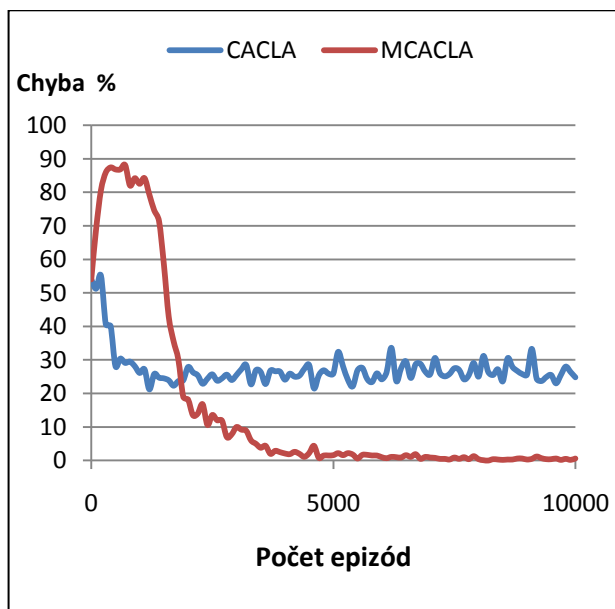
Po preskúmaní rôznych modelov, sme zvolili nasledovnú výslednú konfiguráciu modelu siete, dve dopredné neurónové siete s jednou skrytou vrstvou, ktorá obsahovala 10 sigmoidálnych perceptrónov s počiatočnou rýchlosťou učenia *aktéra*  $\alpha = 0.03$ , ktorú znižujeme na hodnotu 0.01, keď celková chyba klesne pod 20%. Týmto znížením dosahuje, že *aktér* jemnejšie vyladuje svoju aktuálnu stratégiu (Obr. 12). Rýchlosť učenia *kritika* sme zvolili  $\beta = 0.02$ .

## 5.2 Porovnanie výsledkov CACLA a MCACLA

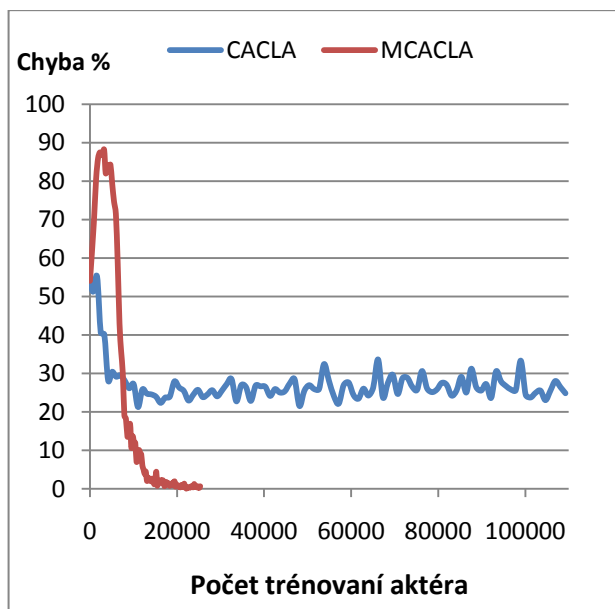
Z výsledkov jednoznačne vyplýva, že dominantným je algoritmus MCACLA. Testovacia chyba algoritmu CACLA nedokázala klesnúť pod hranicu 20%, zatiaľ čo algoritmus MCACLA sa s týmto problémom dokázal úspešne popasovať, keďže jeho testovacia chyba dokázala klesnúť až na 0%, čím dosahuje až 100% úspešnosť. Druhým zásadným rozdielom je, že algoritmus MCACLA preukázal schopnosť úspešne reagovať aj na dosť neštandardný výpad zospodu (Obr. 11). Nielenže agent trénovaný pomocou algoritmu CACLA nedokázal schopne reagovať na výpad zospodu, ale ani sa pomocou tohto algoritmu nedokázal natrénovať nejaký obranný manéver, ktorým by bol schopný úspešne naň reagovať. Preto algoritmus MCACLA považujeme za úspešnú modifikáciu.

Z obrázku 12 sa zdá, že algoritmus CACLA si dokáže oveľa rýchlejšie osvojiť schopnosť rozlišovania jednotlivých typov výpadov, a tak aj rýchlejšie zlepšiť svoju obrannú schopnosť. Tento poznatok je bohužiaľ mylný, ak vezmeme tieto dva isté priebehy testovacích chýb na týchto dvoch algoritmoch a nedáme ich do vzťahu vzhľadom na počet trénovaných epizód, ale vzhľadom na počet trénovaní *aktéra* (Obr. 13). Čo je počet vyjadrujúci koľkokrát sa skutočne *aktér* učil nejakú akciu počas trénovania. Ako môžeme vidieť z grafu 13, obidva algoritmy si osvojili schopnosť rozlišovania jednotlivých typov výpadov za približne rovnaký počet trénovaní *aktéra*. Tento graf nám prináša

nový rozmer, nielenže algoritmus MCACLA je efektívnejší, ale aj z výpočtového hľadiska oveľa rýchlejší a menej náročný. Zatiaľ čo algoritmus CACLA potreboval na 10 tisíc výpadoch 110 tisíc trénovaní *aktéra*, algoritmus MCACLA potreboval len približne 30 tisíc trénovaní *aktéra*.



Obr. 12: Porovnanie CACLA s MCACLA vzhľadom na počet epizód.



Obr. 13: Porovnanie CACLA s MCACLA vzhľadom na počet trénovaní aktéra.

## 6 Záver

Navrhli sme a implementovali adaptívneho agenta s využitím umelej inteligencie pre simuláciu šermovania. Pre riešenie tohto problému sme sa rozhodli použiť učiaci algoritmu CACLA – *Continuous Actor Critic Learning Automaton*, ktorý pracuje nad spojitým priestorom stavov a akcií. Algoritmus CACLA patrí do kategórie učenia s posilňovaním. Rozhodli sme sa ho použiť, pretože bol úspešne implementovaný v minuloročnej diplomovej práci (2010) Richarda Koreňčiaka na ovládanie robotického ramena v 3D priestore. S týmto učiacim modelom siete sa nám podarilo dosiahnuť len čiastočne natrénovanie agenta na danom probléme. Agent, natrénovaný pomocou algoritmu CACLA dosiahol maximálne 80% obrannú úspešnosť a nebol schopný reagovať na nové typy výpadov. Preto sme sa rozhodli pre vlastnú modifikáciu algoritmu CACLA, ktorá by bola schopná dosiahnuť vyššiu úspešnosť ako algoritmus CACLA, a tiež by dokázala schopne reagovať aj na nové typy výpadov.

Navrhli sme modifikáciu algoritmu CACLA, pomocou ktorej sme dokázali úspešne natrénovať agenta, ktorého obranné manévry boli oveľa presnejšie, na základe čoho agent mohol dosiahnuť až 100% úspešnosť. Agent tiež preukázal schopnosť úspešne reagovať aj na nové typy výpadov. Modifikácia algoritmu CACLA sa ukázala, nielenže efektívnejšia pri tréningu agenta, ale aj z výpočtového hľadiska oveľa rýchlejšia a menej náročná.

Z implementačného hľadiska táto práca bola pomerne rozsiahla. Jedným z najdôležitejších systémov je fyzikálny engine (physical engine), ktorý vypočítava kolízie rôznych objektov v priestore. V tejto práci boli použité Bézierové krivky, inverzná kinematika, fyzikálny engine, dopredné neurónové siete a 3D vizualizácia v OpenGL. Celý projekt je implementovaný v C++ a implementácia obsahuje 5100 riadkov kódu.

## Pod'akovanie

Touto cestou by som chcel poďakovať svojmu školiteľovi práce doc. Ing. Igor Farkaš, PhD., za cenné rady a tiež profesionálne vedenie počas tvorby tejto práce.

## Referencie

- [Anderson, C. W., 1993]. Q-learning with hidden-unit restarting. In S. J. Hanson, J. D. Cowan, & C. L. Giles (Eds), *Advances in neural information processing systems* (Vol. 5, pp. 81-88). Morgan Kaufmann, San Mateo, CA.
- [Bellman, R. E., 1957], *Dynamic Programming*. Princeton University Press..
- [Crites, R. H., & Barto, A. G., (1996)]. Improving elevator performance using reinforcement learning. In D. S. T. and M. C. Mozer & M. E. Hasselmo (Eds.), *Advances in neural information processing systems: Proceedings of the 1995 conference* (pp. 1017-1023). Cambridge, MA: MIT Press.
- [Humphrys, M., 1997]. *Action selection methods using reinforcement learning*. Unpublished doctoral dissertation, University of Cambridge, Computer Laboratory.
- [Lin, L.-J., 1992]. Self-improving reactive agents based on reinforcement learning, planning, and teaching. *Machine Learning*, 8, 293-321.
- [Rummery, G. A., & Niranjan, M., 1994]. *On-line Q-learning using connectionist systems* (Technical report No. CUED/F-INFENG/TR 166). Engineering Department, Cambridge University.
- [Sutton, R. S. and Barto, A. G., 1998], *Reinforcement Learning: An Introduction*. The MIT press, Cambridge MA, A Bradford Book.
- [Sutton, R. S., 1988]. Learning to predict by the methods of temporal differences. *Machine Learning*, 3, 9-44.
- [van Hasselt, H., Wiering, M. A., 2007]. *Reinforcement learning in continuous action spaces*. In Proceedings of the IEEE International Symposium on Adaptive Dynamic Programming and Reinforcement Learning, p. 272 - 279 .

# Elektronické voľby a ich vybrané parametre

Juraj Danko\*

Školiteľ: Daniel Olejár†

Katedra informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

**Abstrakt:** V práci predstavíme motivácie pre implementáciu elektronických volieb, vybrané bezpečnostné, technické a organizačné parametre, ako aj prehľad existujúcich modelov pre elektronické voľby a ich klasifikáciu.

**Kľúčové slová:** elektronické voľby, informačná bezpečnosť, modely elektronického hlasovania

## Úvod

Spoločnosť 21. storočia prechádza hlbokými zmenami, spôsobenými zavádzaním informačných a komunikačných technológií. V súvislosti so zavedením elektronických volieb v Estónsku, Švajčiarsku či USA a ich experimentálnou prevádzkou v Holandsku<sup>1</sup> či pripravovanou prevádzkou napríklad v Nórsku sa i v slovenských médiách čoraz častejšie objavujú zmienky o elektronizácii všeľudových hlasovaní a potenciálnom využití uvedeného trendu i na Slovensku. Z dôvodu zvýšenia povedomia o problematike ako aj uvedenia zaujímavých faktov či parametrov dlhodobovo vyvíjaných systémov umožňujúcich implementáciu elektronických volieb budeme systematicky analyzovať vybrané existujúce schémy, ktoré považujeme za najdôležitejšie. Pokúsime sa vyextrahovať ich bezpečnostnú či výkonnostnú povahu ako relatívne, tak absolútne berúc do úvahy požiadavky kladené na schémy elektronických volieb. Uvedieme tiež návrhy rozšírenia a modifikácií uvedených schém na základe cudzích zdrojov i vlastných analýz. V prvej časti práce popíšeme dôvody vedúce k zavádzaniu elektronických volieb v iných krajinách a súčasný slovenský volebný systém. Nasadenie elektronických volieb má totiž zmysel skúmať až po jasnom vytýčení cieľov a požiadaviek na ich realizáciu kladených. V druhej časti sa pokúsime určiť základné požadované parametre pre elektronizáciu volieb nie len na Slovensku. Tretia časť predstaví popis a porovnanie existujúcich modelov. Následne uvedieme analýzu vybraných skúmaných parametrov schém a ich možné rozšírenia.

\*sudanec@gmail.com

†olejar@dcs.fmph.uniba.sk

<sup>1</sup>kde podľa [de Haes, 2008] pre neúspech a nedôveru bola akákoľvek elektronizácia volieb spoločnosťou odmietnutá

## 1 Voľby vo svete a na Slovensku

Slobodné voľby sú jedným zo základných pilierov modernej demokracie v dnešnom svete. Ako ukážeme v ďalších kapitolách, nielen slobodné rozhodnutie voliča je nevyhnutným prvkom ich spoľahlivého a všeobecne akceptovaného vykonávania.

Podoba volieb vychádza v každej krajine z jej historických koreňov, ako aj povahy spoločnosti. Napriek rozmanitosti a rozdielnosti volieb vo svete možno i na Slovensku aplikovať pri uvažovaní o elektronizácii volieb skúsenosti a poznatky z krajín, ktoré sa už spomenutou cestou vydali dávnejšie. Konkrétne, fungujúci estónsky model, ako aj experimentálne modely využívané v USA, Švajčiarsku či Nórsku nám poskytujú bohatú základňu vedomostí, z ktorých sa možno poučiť a využiť ich pri návrhu slovenského systému elektronického hlasovania. Teraz popíšeme volebný systém SR a identifikujeme jeho základné parametre, ktoré sú relevantné pre návrh spôsobu elektronického hlasovania<sup>2</sup>:

- Technicky najjednoduchšie na Slovensku prebiehajú voľby primátorov resp. starostov; ide o výber 1 z  $L$  kandidátov; takýto typ volieb budeme ďalej nazývať 1 :  $L$  model
- Podobne 1 :  $L$  ale potenciálne v dvoch kolách v SR prebiehajú voľba župana a prezidentské voľby; tento model možno jednoducho previesť na jedny voľby typu 1 :  $L$  a následné prípadné voľby v druhom kole typu 1 : 2, ktoré tiež označujeme *Áno/Nie*<sup>3</sup>
- Špecifickým prípadom volieb sú referendá, kde volič vo všeobecnosti v  $K$  otázkach volí 1 z 2 odpovedí; ide teda o  $K$ -násobný *Yes/No* model, ktorý možno teoreticky previesť na model 1 :  $L$ , kde  $L$  predstavuje množinu všetkých potenciálne

<sup>2</sup>parametre slovenského volebného systému sme získali konzultáciou s Mgr. Marcelom Martinkovičom pôsobiacim na Filozofickej fakulte Trnavskej Univerzity v Trnave

<sup>3</sup>právnymi problémami, ako je napríklad nejednoznačnosť výkladu nadpolovičnej väčšiny v prvom kole prezidentských volieb, sa v tejto práci nebudeme ďalej zaoberať

možných volieb<sup>4</sup>

- Voľby do VÚC, mestských a obecných zastupiteľstiev a Európskeho Parlamentu predstavujú výber  $K$  z  $L$  kandidátov; tento model budeme označovať  $K : L$
- Pravdepodobne najväčšie komplikácie prinášajú parlamentné voľby, ktoré na Slovensku znamenajú výber jednej z kandidujúcich strán, a následne 0-4 kandidátov z jej kandidátky (tzv. krúžkovanie). Ak by sme tento model zjednodušili na výber 1 strany a následne napríklad 4 z 150 možností, išlo by o model  $1 : K : L$ , kde  $K = 4, L = 150$ . Na takúto teoretickú konštrukciu možno reálny model previesť podobne, ako sme to navrhli pri referende; počet možností sa tým však podstatne<sup>5</sup> zvýši
- Zabudnúť netreba ani na potenciálne zmeny vo volebnom systéme na Slovensku; do úvahy pripadá napríklad zvýšenie počtu volebných obvodov v parlamentných voľbách, ktoré by ale nemalo vplyv na model volieb

Pozitívny vplyv na zložitost' návrhu systému elektronických volieb by mohlo mať i zjednotenie niektorých typov volieb a ich jednoznačné, presné definovanie zmenou príslušných zákonov.

## 2 Elektronické voľby

V tejto kapitole zavedieme potrebné pojmy a uvedieme základné kategórie elektronických volieb. Podobne ako mnoho iných pokusov o digitalizáciu či automatizáciu procesov nielen v štátnej správe, i elektronické voľby si kladú za cieľ zvýšiť efektivitu, znížiť náklady a prinajmenšom udržať bezpečnosť papierového (pôvodného, konvenčného) modelu. Vďaka masívnemu progresu výpočtových technológií sa mnoho projektov elektronizácie darí implementovať pri dodržaní, a často i prekonaní spomenutých základných cieľov. Ako však načrtne v nasledovných riadkoch, v prípade elektronických volieb rozhodne nie je očitné či a nakoľko je súčasný svet informačných technológií pripravený realizovať výzvy bezpečných volieb ako predpokladu demokratického systému.

<sup>4</sup>volič môže odpovedať na 1 až  $K$  otázok jednu z dvoch potenciálnych odpovedí

<sup>5</sup>napríklad 1 voľba z 20 a 0-4 voľby z 150 možností, ak by vo voľbách kandidovalo 20 strán

Hlavnými motívami pre vývoj technológií elektronických volieb sú<sup>6</sup>:

- Zvýšiť účasť na voľbách zjednodušením odovzdávania hlasov voličmi  
Elektronické voľby tiež predstavujú nový pohľad na možnosť hlasovať z viacerých miest (v prípade hlasovania z kontaktných bodov) alebo z ľubovoľného miesta s pripojením do siete Internet (v prípade umožnenia hlasovania z PC pripojených do siete Internet). Podľa [IKT, 2007] malo v roku 2007 doma aktívne pripojenie do siete Internet 34,5% populácie Slovenska a ďalších približne 20% malo prístup na Internet v práci alebo na inom dostupnom mieste a vzhľadom k pomerne rýchlo postupujúcej informatizácii našej spoločnosti možno predpokladať, že možnosť hlasovať elektronicky nadobúda podstatná časť slovenských občanov; ďalej, uvažujúc predovšetkým mladú generáciu a odborníkov na IT by sa mohla potenciálne zvýšiť účasť vo voľbách aj u ľudí, ktorí by inak voliť nechceli
- Znížiť náklady na všeludové hlasovania  
Zníženie nákladov by bolo najmarkantnejšie v prípade zavedenia výlučne elektronického hlasovania, a to z kontaktných bodov (a prípadne aj PC pripojených do siete Internet). V prípade modelu konvenčných (papierových) elektronických volieb rozšírených o možnosť voľby prostredníctvom siete Internet by sa náklady podstatnejšie neznižili, pretože musíme predpokladať, že istá časť obyvateľstva bude hlasovať konvenčným spôsobom
- Zvýšiť rýchlosť spočítavania hlasov
- Zvýšiť rýchlosť zverejňovania hlasov
- Zvýšiť presnosť (znížiť pravdepodobnosť chyby) spočítavania hlasov  
V elektronických voľbách možno často priamočiarejšie rozlíšiť platný hlas od neplatného a spočítavanie prebieha automatizovane, bez možnosti chyby pri ručnom spracovaní

Elektronické volebné systémy už svoju premiéru s väčším či menším úspechom zažili. Uvažujúc i reálne nasadenia napríklad v USA<sup>7</sup> alebo Estónsku, možno

<sup>6</sup>enumerácia parametrov je rozšírením zoznamu uverejneného v [Mägi, 2007]

<sup>7</sup>SERVE, viac napríklad v [Mägi, 2007]

proces elektronických volieb zovšeobecniť napríklad do nasledujúcich niekoľko fáz:

- Registrácia voliča
- Identifikácia a autentifikácia voliča
- Autorizácia voliča
- Vykonanie voľby (odovzdanie hlasu)
- Ukladanie a správa hlasov
- Spočítavanie hlasov
- Audit hlasovania a systému
- Zverejňovanie výsledkov
- Riešenie potenciálnych protestov
- Archivácia výsledkov a dokumentov

V praxi je registrácia často splnená ešte pred samotnými voľbami, ak voliči disponujú prostriedkom umožňujúcim pokračovať v ďalších fázach volieb, a to napríklad elektronickou identifikačnou kartou s obsahnutým RSA súkromným kľúčom (podobná myšlienka je použitá i v estónskom modeli elektronických volieb).

Poznáme 3 základné spôsoby autentifikácie (“čo viem”, “čo mám”, “čo som”). V prípade prítomnosti dôveryhodnej tretej strany (konvenčné voľby, voľby z kontaktných bodov) možno použiť biometrické prvky a papierový token (napr. ID preukaz). Pri hlasovaní z ľubovoľného PC je vyžadovaná silná forma autentifikácie voliča. Podľa metódy hlasovania preto uveďme delenie:

1. Elektronické voľby z kontaktných bodov
2. Elektronické voľby z kontaktných bodov a PC pripojených do siete Internet
3. Konvenčné voľby (papierové) rozšírené o hlasovanie z PC pripojených do siete Internet

Príkladom prvého typu elektronických volieb sú napríklad voľby v USA, kde volič príde na kontaktné miesto (resp. do volebnej miestnosti), identifikuje a autentifikuje sa, po autorizácii komisiou vykoná voľbu a opäť odchádza domov. Vo všeobecnosti možno povedať, že zabezpečiť spoľahlivé a bezpečné hlasovanie výlučne z konečného počtu kontaktných bodov

v správe štátnych orgánov je principiálne jednoduchším problémom (argumentujeme napríklad možnosťou priamej kontroly zariadení) ako zabezpečiť druhý typ všeludových hlasovaní, ktorý je implementovaný napríklad v už spomínanom Estónsku. Konkrétnymi bezpečnostnými parametrami sa budeme zaoberať v časti 3. Možno teda vysloviť uzáver, že identifikáciu a autentifikáciu voliča vykonáva buď okrsková komisia v prípade voľby z kontaktného bodu, alebo čítacie zariadenie v spolupráci s volebným serverom (potenciálne vo všetkých popísaných variantoch elektronických volieb). Autorizácia je možná len po úspešnej identifikácii a autentifikácii oprávneného voliča. Následné vykonanie voľby je umožnené iba autorizovanému voličovi, ktorý v kontaktnom bode na hlasovacom zariadení označí (vyberie) žiadanú voľbu, respektíve voľbu označí na osobnom počítači, z ktorého hlasuje.

Vzhľadom na prirodzenú snahu čo najmenej zaťažiť voliča samotnou voľbou a volebnú komisiu manuálnou činnosťou, ktorá môže byť potenciálnym zdrojom chýb či problémov, ostatné fázy volieb sú potenciálne do vysokej miery automatizované. Práve audit hlasovania a systému je nástrojom umožňujúcim spätnú kontrolu, či najmä automatizované procesy prebehli v súlade s príslušnými zákonmi, procedúrami a nariadeniami. Ak sú hlasy šifrované a nie je z nich možno voliča jednoznačne identifikovať, vo fáze ukladania a správy hlasov sa kladie dôraz predovšetkým na zabezpečenie integrity hlasov. Pri spočítavaní a audite môžu (a napr. v prípade estónskeho modelu aj sú) byť technické prostriedky odpojené od verejných počítačových sietí, prenos dát teda môže prebiehať i manuálne kvôli zvýšeniu odolnosti systému voči hrozbám zvonku.

### 3 Bezpečnostné a technické parametre

Motiváciou elektronických volieb je umožniť jednoduchšie a flexibilnejšie spôsoby hlasovania potenciálnym voličom. Pochopiteľne je dôležité zabezpečiť, aby elektronické všeludové hlasovania garantovali minimálne porovnateľnú bezpečnosť ako hlasovania konvenčné, papierové. Uveďme teraz zoznam požiadaviek z modelu konvenčných (papierových) volieb doplnený požiadavkami, ktoré sa objavili pri návrhu implementácií schém elektronických volieb [Dr. Rolf Haenni, 2008], [Rjašková, 2002].

### 3.1 Požiadavky

Požiadavky nešpecifické pre elektronické voľby:

- **Dostupnosť systému** - je potrebné zabezpečiť vysokú dostupnosť systému širokej verejnosti, a to z dvoch hľadísk; dostupnosti služby ako takej (napríklad ochrana pred útokmi typu DoS) a dostupnosti osobných počítačov, internetu a elektronických volieb populácií. Táto požiadavka zahŕňa aj príslušnú hladinu informovanosti spoločnosti a primeranú marketingovo-informačnú kampaň
- **Spôľahlivosť systému**, ktorá je nevyhnutná najmä z dôvodu zabezpečenia všeobecnej dôvery ľudí v bezpečnosť a spoľahlivosť systému ako aj pre hladký priebeh hlasovania
- **Auditabilita systému** - je potrebné zabezpečiť možnosť analýzy a kontroly počas trvania volieb i po ich skončení, a to najmä určením vhodnej auditačnej politiky
- **Transparentnosť a otvorenosť volieb** - je oprávnenou požiadavkou od naplnenia ktorej závisí, či ľudia elektronické voľby akceptujú alebo nie. Zahŕňa dobrú informovanosť spoločnosti o parametroch volebného systému, kontrolu protokolov, modelu a samotnej finálnej implementácie odbornou verejnosťou vrátane akademickej obce a spoločností zaoberajúcich sa informačnou bezpečnosťou, prehľadné zákonné úpravy volieb, operatívne riešenie vzniknutých problémov a mnoho ďalších prirodzených požiadaviek
- **Výhodnosť** ako pre štát (ekonomická výhodnosť, úspora ľudských zdrojov), tak pre voličov (napríklad voľba z pohodlia domova je z pohľadu voliča zvyčajne výhodou)
- **Flexibilita a mobilita systému**, ktoré by mali byť umožnené flexibilitou samotného návrhu a umožňovať jednoduché a lacné úpravy podľa aktuálnych požiadaviek na zmeny (volebného systému, bezpečnostných požiadaviek, spoločenskej situácie ..)

Štandardné požiadavky špecifické pre elektronické voľby, ktoré sa zväčša darí naplniť bez dodatočných predpokladov a problémov:

- **Oprávnenosť k voľbe** - voliť môžu práve všetci oprávnení voliči; dôležité je zabezpečiť, aby pri

voľbách nikto nebol zvýhodnený alebo znevýhodnený, ako aj odmietnutie záškodníkov, ktorí volebné právo nemajú

- **Demokratickosť** - predstavuje prirodzenú požiadavku možnosti odovzdať práve 1 hlas každým voličom (ako uvidíme neskôr v časti 4.2, táto požiadavka je v skutočnosti komplexnejšia a komplikovanejšia)
- **Súkromnosť** voličovi zaručuje nespojitelnosť ľubovoľného hlasu s jeho osobou. Ani volič, ani organizátor volieb a ani ľubovoľný pozorovateľ by nemal voličovi byť schopný dokázať ako hlasoval
- **Robustnosť** je požiadavkou na všeobecnú odolnosť systému. Primerane malá<sup>8</sup> skupina voličov, ktorí sa nesprávajú podľa protokolu (zmýlia sa alebo úmyselne konajú inak), neoprávnených voličov či časť autorít môže zlyhať bez toho, aby to narušilo celkový priebeh a výsledok volieb v neakceptovateľnom meradle. Ako sa ukáže v príkladoch protokolov v časti 4, ani táto požiadavka nie je návrhmi často naplnená, a predovšetkým modely nevyužívajúce rôzne threshold schémy (napr. Shamirovu pre delenie kľúča<sup>9</sup>, threshold El-Gamal, atp.) majú s jej napĺňaním principiálne problémy

Požiadavky, ktorých splnenie je zväčša problematické a vedie k dodatočným predpokladom alebo čiastočným riešeniam:

- **Individuálna overiteľnosť** znamená, že volič dokáže samostatne overiť, že jeho hlas sa úspešne a korektne započítal do výsledku volieb
- **Univerzálna overiteľnosť**, analogicky, znamená, že ktokoľvek dokáže samostatne overiť, či všetky hlasy boli korektne spočítané a prirátané k výsledku
- **Férovosť** vyžaduje, aby nikto so zúčastnených alebo tretích strán nedisponoval a nebol schopný

<sup>8</sup>Primerane malá v prípade voličov znamená zanedbateľná vzhľadom na ich celkový počet, v prípade autorít je zvyčajne určená ako časť menšia ako napríklad  $\frac{1}{3}$  alebo iná zdôvodnená menšina a v prípade záškodníkov či útočníkov by malo ísť o odolnosť teoreticky absolútnu (v praxi, pochopiteľne, ohraničenú technickými limitmi)

<sup>9</sup>definícia schémy je uvedená v [Menezes et al., 1997], str. 525-526

získať čiastočné výsledky počas konania volieb; na zabezpečenie férovosti sa v uvažovaných návrhoch často využíva práve zdieľanie kľúča medzi viacerými autoritami a ukladanie hlasov v zašifrovanej podobe až do skončenia volieb

Spomeňme ešte jednu prirodzenú požiadavku kladenú na elektronické voľby, ktorá však, ako sa ukáže v časti 4, je vo väčšine súčasných modelov takmer nesplnená alebo vyžaduje dopĺňanie a úpravu protokolov.

- **Nemožnosť ovplyvnenia** voliča je teoretickým cieľom, podľa ktorého by nemalo byť pri zvolenej volebnej schéme možné donútiť voliča k voľbe. Ukazuje sa, že ide o požiadavku veľmi silnú a v praxi pravdepodobne nerealizovateľnú (predovšetkým ak uvažujeme model elektronických volieb s umožnením hlasovania z osobných počítačov pripojených do siete Internet). Podstatou tejto požiadavky je receipt-freeness<sup>10</sup>; volič by nemal byť schopný komukoľvek dokázať ako hlasoval; existujúce modely sa zväčša obmedzujú na zabezpečenie receipt-freeness, ktorá, ako ukážeme v časti 4, je sama o sebe ťažko vynútitelná a dosiahnuteľná a často môže jej dosiahnutie kolidovať s dosiahnutím iných požiadaviek, ako je napríklad univerzálna overiteľnosť

### 3.2 Hrozby

Ako sme už naznačili, elektronických volieb sa týka mnoho potenciálnych problémov a hrozieb, ktoré je potrebné eliminovať alebo minimalizovať už vo fáze návrhu. Vyčíslime preto kategórie základných hrozieb a všeobecné princípy predchádzaniu dopadom, s ktorými by mal ľubovoľný praktický návrh elektronických volieb kalkulovať:

- **Chyba softvéru** (na strane klienta alebo serveru) - softvér by mal byť preto otvorený a auditovateľný širokou odbornou verejnosťou; v prípade klientského softvéru je potrebné zabezpečiť jeho vhodnú distribúciu a jednoduchú inštaláciu
- **Chyba hardvéru** (na strane klienta alebo serveru) - hardvér by mal byť pre zvýšenie spoľahlivosti zálohovaný (napríklad hot-backup, teda záloha schopná okamžite a plnohodnotne nahradiť nefunkčnú súčasť systému) a jeho komponenty primerane distribuované

<sup>10</sup>absencia možnosti dokázať komukoľvek obsah svojho hlasu (voľný preklad, angličtina)

- **Neúmyselné nedodržanie protokolu zo strany voliča** je problémom, ktorému sa dá vyhnúť iba veľmi ťažko a je vhodné mu predchádzať jednoduchosťou klientského softvéru, dobrou informovanosťou voličov a odolnosťou softvéru voči chybám používateľa
- **Úmyselné narušenie protokolu zo strany voliča** je menej nebezpečnou formou tzv. útoku zvnútra; systém by mal byť schopný takéto pokusy detegovať a neumožniť viacnásobné odovzdanie hlasu alebo obmedziť možnosť odovzdania neplatného hlasu
- **Modifikácia klientskej aplikácie útočníkom** alebo napadnutie osobného počítača využívaného na elektronickú voľbu je nezanedbateľná hrozba. Riziko z nej vyplývajúce je vysoké, v praxi veľmi ťažko minimalizovateľné, pretože dizajnér systému na daný počítač nemá priamy dosah; aj preto sa zväčša dopady hrozby v praktických implementáciách buď zanedbávajú alebo minimalizujú možnosťou opakovanej voľby, dodatočnej klasickej voľby alebo častými zmenami v hlasovacej aplikácii a protokole
- **Útok na verejný komunikačný kanál** - jeho uskutočniteľnosť je často minimalizovaná napríklad využitím silných šifrovacích kryptografických prostriedkov na komunikáciu
- **Útok na volebné servery**, ako napríklad útok typu DOS alebo pokus o priame preniknutie do systému sú pravdepodobne jednými z útokov s najfatálnejšími následkami na priebeh a spoľahlivosť volieb; možno im predchádzať i zabezpečením organizačných a fyzických opatrení (fyzická ochrana zariadení, atp.), ako aj zákonnou ochranou a vysokým bezpečnostným štandardom na použitých zariadeniach; server s odovzdanými hlasmi tiež môže byť fyzicky oddelený od verejnej siete (ako je tomu napríklad v estónskom modeli)

Podrobnejšia analýza rizík a metódy ich odstraňovania sú mimo rámec tejto práce a budeme sa im venovať v ďalších publikáciách.

## 4 Uvažované riešenia

V tejto časti popíšeme kryptologickými konštrukciami zvolené systémy elektronického hlasovania.

Podrobnosti o použitých teoretických a formálnych štruktúrach možno nájsť v [Menezes et al., 1997] a [Rjašková, 2002] v kapitolách 3 a 4. Schémy elektronických volieb budeme deliť podobne ako v [Dr. Rolf Haenni, 2008]:

- Schémy založené na slepých podpisoch
- Schémy založené na homomorfnom šifrovaní
- Schémy založené na anonymnom kanále

Uvedme najprv niekoľko univerzálnych označení, ktoré budeme v našich zápisoch ďalej používať:

$H(m)$  - bezpečná<sup>11</sup> hašovacia funkcia, ktorej vstupom je správa  $m$  a výstupom odtlačok správy  $x \in_R S$  -  $x$  je náhodne vygenerovaný prvok z množiny  $S$

$Sign(c, SK)$  - elektronická podpisová funkcia, ktorej vstupom je správa  $c$  a tajný súkromný kľúč  $SK$ , jej výstupom je elektronický podpis správy  $c$

*autorita* - subjekt riadiaci voľby; má veľkú výpočtovú silu a dokáže uložiť veľké množstvo súkromných dát  
*nástenka* - médium s povolenými operáciami čítania a zápisu ale zakázanými operáciami úpravy hodnoty a odstránenia hodnoty

#### 4.1 Schémy založené na slepých podpisoch

Schémy patriace do prvej z uvažovaných skupín sú založené na aplikovaní schémy pre slepý podpis<sup>12</sup> (často ide o schémy založené na RSA alebo podobné schémy). Takýto podpis je (zvyčajne) univerzálne overiteľný, pretože naväzuje na existujúcu infraštruktúru umožňujúcu jeho overenie. Zaujímavé je, že autori schém založených na slepých podpisoch ich často považujú za v širokom meradle nasaditeľné do reálnych implementácií; v praxi sa však ukazuje, že schémy často majú privysoké požiadavky (napríklad na vlastnosti komunikačných kanálov) a často nedisponujú základnými bezpečnostnými parametrami ako je napríklad nedonútiteľnosť k voľbe (receipt-freeness). Keďže v takýchto schémach nie je zvyčajne zaručená súkromnosť hlasu, nemožno predpokladať, že by boli verejnosťou akceptované

<sup>11</sup>Hašovacia funkcia by mala byť jednosmerná, odolná voči kolíziám, generovať univerzálne distribuované odtlačky s rovnakou pravdepodobnosťou (zväčša nám postačujú bežné konštrukcie ako SHA a v praxi ani nie je veľmi vhodné klásť na hašovacie funkcie vyššie predpoklady, pretože zvyčajne nedisponujeme konštrukciami, ktoré by ich napĺňali)

<sup>12</sup>[Menezes et al., 1997], str. 475

ako prijateľné.

##### 4.1.1 Schéma TrustVote

Ako príklad schémy založenej na slepých podpisoch uvedieme schému TrustVote predstavenú v [Dr. Rolf Haenni, 2009]<sup>13</sup>.

Účastníkmi volieb sú **volič**, **administračný server**, **autorita**, **komisia**, **zberatelia kľúčov** a z technických zariadení **registračná nástenka** a **nástenka hlasovania**. Schéma TrustVote pozostáva z nasledovných 5 fáz:

1. **Inicializácia**, počas ktorej je primárnym aktérom administračný server. Vygeneruje *IDvolieb* - unikátny identifikátor daných volieb a toto ID umiestni na nástenku. Podobne vygeneruje prázdny hlasovací lístok a umiestni ho na nástenku. Zoznam oprávnených voličov je zaslaný autoritám prostredníctvom kanálu zabezpečujúceho autentickosť správy (napr. využitím asymptrickej kryptografie)
2. **Príprava voliča** spočíva vo vyplnení volebného lístka a jeho zašifrovaní; volič vytvorí digitálny vodoznak definovaný ako  $\hat{m} = H(ID \text{ voliča} || IDvolieb || m)$ , kde  $m$  je náhodná hodnota. Tento vodoznak bude ako súčasť volebného lístku anonymne identifikovať voliča v ďalšom priebehu volieb.
3. **Registrácia** je fázou, v ktorej možno výhodne použiť slepé podpisy. Volič najprv spojí svoj zašifrovaný hlas s aktuálnym *IDvolieb* a vodoznakom vygenerovaním odtlačku nasledovne:

$$h = H(\hat{m} || IDvolieb || w)$$

Z dôvodu zvýšenia robustnosti schémy sa využíva  $(t, N)$  zdieľaná schéma pre slepé podpisy; výsledkom je, že podpis považujeme za platný, ak sa na ňom korektné podieľalo aspoň  $t$  z  $N$  poverených autorít. Označme  $e = (e_1, \dots, e_N)$  verejné kľúče podpisovateľov a  $s = (s_1, \dots, s_N)$  jednotlivé podpisy. Potom overenie je tvaru  $verify_{e,t}(s, x) \in \{0, 1\}$ . Takúto schému možno

<sup>13</sup>Táto schéma (podobne ako väčšina schém s praktickým prínosom) je schémou hybridnou; avšak, schéma je založená na využití slepých podpisov, a preto ju uvádzame v tejto časti.



založiť napríklad na RSA<sup>14</sup>. V protokole pokračujú autority podpísaním takto pripravenej hodnoty (pre každú autoritu volič pripraví na podpísanie potenciálne odlišnú hodnotu a odovzdá ju prostredníctvom registračnej nástenky). Ak je hodnota voličom korektne podpísaná, autorita ju môže z registračnej nástenky prečítať a podpísať svojím súkromným kľúčom. Počet potrebných komponentov podpísaných autoritami v  $(t, N)$  určuje, kedy táto fáza končí

4. **Odozdanie hlasu** - prvým krokom odovzdávania hlasov je vytvorenie schémy pre zdieľanie tajomstva. Možno použiť napríklad Shamirovu  $(t, N)$  schému pre zdieľanie tajomstva, prostredníctvom ktorej volič rozdistribuuje podiely kľúča zberateľom kľúčov. Opäť, vyšší treshold v schéme zvyšuje robustnosť a odolnosť schémy. Ako treshold označíme parameter  $t$  v zdieľanej schéme  $(t, N)$ . Druhým krokom je odovzdanie zašifrovaného hlasu a podielov  $s$  podpísaných slepým podpisom autoritami na volebnú nástenku voličom. Overovací kód pre odovzdané dáta sa vypočíta ako  $h = H(\hat{m} || IDvolieb || w)$ , pre zabránenie falošným hlasom sa skontrolujú aj všetky podpisy. Od tejto chvíle volič dokáže overiť, že jeho hlas bol úspešne prijatý na ďalšie spracovanie. Následne je aktívna účasť voliča na protokole ukončená
5. **Spočítavanie hlasov** začína vygenerovaním kľúča zberateľmi kľúča za účelom následného dešifrovania hlasov. V tejto fáze elektronických volieb ľubovoľný pozorovateľ dokáže korektne spočítať hlasy na nástenke, a teda hlasovanie je univerzálne overiteľné

## 4.2 Schémy založené na homomorfnom šifrovaní

Využitie homomorfného šifrovania vo volebných schémach je zaujímavou možnosťou, ako získať pokročilé bezpečnostné vlastnosti a jednoduchú manipuláciu s hlasmi využitím vhodných kryptografických primitív. Označme  $E_r(m)$  správu zašifrovanú s využitím náhodného parametra  $r$ , správy  $P = \{m_1, m_2, \dots\}$  a šifrové texty  $C = \{c_1, c_2, \dots\}$ . Pre naše potreby homomorfné schémy budú využívať pravdepodobnostný šifrovací systém s priestorom správ  $P$  a priestorom šifrových textov  $C$ , kde  $(P, \oplus)$  a  $(C, \otimes)$  sú grupy.

Schému s parametrami  $(P, C, \oplus, \otimes)$  potom nazveme homomorfnou práve vtedy, keď platí:

$$\begin{aligned} (\forall E)((c_1 = E_{r_1}(m_1)) \wedge (c_2 = E_{r_2}(m_2))) \\ \Rightarrow ((\exists r)(c_1 \otimes c_2 = E_r(m_1 \oplus m_2))) \end{aligned}$$

Teda, zjednodušene povedané, ak vykonáme grupovú operáciu na zašifrovaných hlasoch, ide o operáciu platnú i vzhľadom na samotné hlasy.

Pre ilustráciu si uveďme inštanciu homomorfného šifrovania na šifrovacej schéme ElGamal; zvolíme príslušný parameter  $p$  tak, že

$$P = Z_p$$

$$C = \{(a, b) | a, b \in Z_p\}$$

Grupovou operáciou na správach (hlasoch) bude násobenie modulo  $p$  a grupovou operáciou na šifrových textoch bude násobenie modulo  $p$  po komponentoch. Dôkaz homomorfnosti takejto schémy je pomerne jednoduchý:

$$\begin{aligned} E_{k_0}(m_0)E_{k_1}(m_1) &= (g^{k_0}g^{k_1}, h^{k_0}h^{k_1}m_0m_1) = \\ &= (g^k, h^k m_0m_1) = E_k(m_0m_1) \end{aligned}$$

### 4.2.1 Schéma HS

Ako príklad homomorfného schémy uvidíme štandardný model HS (skratka je odvodená z mien autorov - Hirt a Sako) publikovaný v [Hirt and Sako, 2000]. HS nie je výlučne homomorfným modelom, pretože má aj prvky mixnetových protokolov založených na miešaní hlasov autoritami. Uvedený model vyberáme preto, že podľa [Laure Fouard, 2010] preukázateľne dosahuje receipt-freeness, súkromnosť, robustnosť, univerzálnu i individuálnu overiteľnosť, férovosť a má aj vlastnosť demokratickosti, a teda splnením prakticky všetkých základných kritérií kladebných na schémy elektronických volieb pôsobí ako veľmi nádejný kandidát na výber schémy (protokolu) pre v praxi realizovateľné elektronické voľby. Vo svojej podstate schéma HS stavia svoju bezpečnosť na pravdepodobnostnom šifrovaní všetkých potenciálnych hlasov<sup>15</sup>, ktoré sú v tejto obálke (pojem obálka preberáme z estónskeho modelu) vytvorenej šifrovaním verejne dostupné. Následne autority vo viacerých kolách hlasy náhodne premiešajú a iba volič má prehľad o rozložení možností vo výslednej permutácii; z tej následne zvolí ním preferovanú voľbu a hlas odovzdá.

<sup>15</sup>ako sme už naznačili, v niektorých prípadoch je potenciálnych hlasov príliš veľa, napr. v modeli  $1 : K : L$

<sup>14</sup>[Menezes et al., 1997], str. 475

**Predpoklady schémy** Schéma elektronických volieb HS vyžaduje splnenie nasledovných predpokladov:

- **Homomorfné šifrovanie** - použitý šifrovací systém je homomorfný (napr. ElGamal); teda,

$$Enc(m_1) \oplus Enc(m_2) = Enc(m_1 + m_2)$$

- **Overiteľné dešifrovanie** - požaduje sa možnosť bez vplyvu na súkromnosť jednotlivých hlasov pri použití schémy na zdieľanie tajomstva typu  $(t, N)$  schopnosť ľubovoľných  $t$  autorít vypočítať hodnotu súčtu hlasov  $T$  a poskytnúť dôkaz korektnosti dešifrovania hlasov
- **Náhodná re-enkrypcia**<sup>16</sup> - pre ľubovoľné  $e \in E(x)$ ,  $x$  je neznáme, existuje pravdepodobnostný algoritmus generujúci uniformne distribuované re-enkrypcie  $e' \in E(x)$ . Náhodný prvok použitý na generovanie  $e'$  budeme nazývať **svedok** re-enkrypcie
- **Dôkaz 1-L re-enkrypcie** - požadujeme existenciu protokolu so vstupmi  $e, e_1, \dots, e_L, v$ , kde  $v$  je svedok re-enkrypcie  $e$  v  $e_i$  (pre dané  $i$ ) takého, že bezznanostne (vzhľadom na  $i$ ) dokáže, že  $e_i$  je re-enkrypciou  $e$
- **Dôkaz re-enkrypcie pre určeného overovateľa**<sup>17</sup> znamená existenciu protokolu, v ktorom iba vybraný overovateľ dokáže overiť, že pre dané zašifrované  $e, e'$  a svedka pre  $e'$  ako re-enkrypciou  $e$  existuje svedok

Oba dôkazy re-enkrypcie možno štandardnou konštrukciou prepracovať na neinteraktívne dôkazy napríklad využitím modifikácie Fiat-Shamirovho postupu<sup>18</sup>.

Naplnenie predpokladov a príslušné protokoly sú popísané v [Rjašková, 2002] a [Hirt and Sako, 2000].

**Fázy schémy** Priebeh protokolu možno opäť zhrnúť do nasledovných fáz:

<sup>16</sup>re-enkrypcia znamená, že pre danú zašifrovanú správu  $x$  existuje zápis v danom zozname zašifrovaných správ, napr.  $x_1, x_2, \dots, x_L$

<sup>17</sup>príklad obdobnej schémy je publikovaný napríklad v [Saeednia et al., 2003]

<sup>18</sup>[Groth, 2005]; praktickým problémom takéhoto zneinteraktívnenia je jeho korektnosť iba na modeli náhodného orákula

1. **Miešanie hlasov** - autority postupne miešajú všetky potenciálne možné hlasy<sup>19</sup>; túto fázu protokolu možno formalizovať nasledovne:

- (a) Administračný server vytvorí štandardné šifry všetkých potenciálnych platných hlasov

$$E^{(0)} = \{e_1^{(0)}, e_2^{(0)}, \dots, e_L^{(0)}\}$$

kde  $e_i^{(0)}$  šifruje generátor  $G_i$  využívanej grupy a náhodný parameter  $k$

- (b) Autorita  $A_j$  vygeneruje  $j$ -tú permutáciu štandardných šifier platných hlasov. Autorita najprv zvolí náhodnú permutáciu  $\pi_j : \{1..L\} \rightarrow \{1..L\}$  a náhodné parametre  $k_1, \dots, k_L \in_R \mathbb{Z}_p$

Teda, označme, že  $e_{\pi_j(i)}^{(j)}$  = znova zašifrované  $e_i^{(j-1)}$  pomocou náhodného parametra  $k_j$ . Hlasy sú znova zašifrované pomocou súkromného kľúča príslušnej autority

2. **Generovanie dôkazov** - na základe predpokladu schémy autorita dokáže generovať dôkaz 1 –  $L$  re-enkrypcie, teda dôkaz korektnosti permutácie a zašifrovania výstupnej permutácie
3. **Zaslanie permutácie voličovi** - na základe predpokladu schémy autorita dokáže generovať 1 –  $L$  dôkaz re-enkrypcie pre určeného overovateľa, ktorým je v tomto prípade volič. Prakticky ide napríklad o zaslanie permutácie voličovi cez bezpečný kanál so zabezpečenou dôvernosťou a integritou správy
4. **Analýza dôkazu voličom** - podľa zvolených parametrov treshold systému volič môže odmietnuť až  $N - k$  dôkazov (permutácií) od ľubovoľných autorít
5. **Odvzdanie hlasu** - volič verejne oznámi index  $i$  ním zvolenej možnosti vo výslednej permutácii platných hlasov
6. **Spočítavanie hlasov** - hlasy sa spočítajú zašifrované. Korektnosť výsledku spočítania zašifrovaných hlasov je garantovaná homomorfnosťou použitého šifrovacieho systému

<sup>19</sup>predpokladáme model volieb  $1 : L$  alebo iný model prevedený do uvedenej formy

7. **Dešifrovanie výsledku volieb** - správcovia súkromného kľúča vygenerujú kľúč a dešifrujú výsledok volieb; po uverejnení kľúča môže ľubovoľná tretia strana overiť korektnosť výsledku a správnosť dešifrovania. Správcovia kľúča zverejnia dôkaz o korektnom využití im prislúchajúcej časti zdieľaného tajomstva v schéme na zdieľanie tajomstva (v tomto prípade tajného súkromného kľúča)

### 4.3 Schémy založené na anonymnom kanále

Anonymný kanál, ako názov naznačuje, umožňuje odosielať anonymné správy - teda, prijímateľ nie je schopný vystopovať odosielateľa správy. Podstatou schém elektronických volieb založených na anonymných kanáloch je zvyčajne sieť serverov a routrov, ktoré premiešavajú zašifrované hlasy, a zároveň poskytujú dôkazy, že pri miešaní žiaden hlas nestratili ani nepozmenili. Podobne ako pri schémach opierajúcich svoju bezpečnosť o anonymné podpisy, aj pri anonymných kanáloch je zvyčajne veľmi náročné dosiahnuť nedonútiteľnosť k voľbe či overiteľnosť hlasovania.

Keďže schémy TrustVote a HS využívajú myšlienku anonymného kanálu a premiešavania hlasov, neuvádzame ďalší príklad.

### 4.4 Hybridné a iné schémy

V praxi sa ukazuje potreba prepojiť prínosy jednotlivých schém a vytvoriť hybridné volebné systémy. Pre využitie v reálnom hlasovaní vo voľbách elektronickou cestou je často potrebné pristúpiť ku kompromisom, ktoré danú teoretickú schému zjednodušia a zefektívnia. Ako vzor funkčnej schémy sme zvolili estónsky model elektronických volieb.

#### 4.4.1 Estónsky model

Priebeh volieb v estónskom modeli možno vyjadriť nasledovnou postupnosťou aktivít. Uvedme ich postupnosť pre prípad úspešného vykonania voľby:

1. **Autentifikácia voliča** - volič vloží autentifikačné dáta a sieťový server ho autentifikuje
2. **Zaslanie zoznamu kandidátov** - sieťový server voličovi zašle zoznam kandidátov
3. **Označenie voľby** - volič označí zvoleného kandidáta, označme ho *hlas*
4. **Vygenerovanie náhodného parametra** - označme  $k \leftarrow \text{Random}()$
5. **Zašifrovanie hlasu** -  $\text{Enc}(\text{hlas}, k, PK)$ , kde  $PK$  je verejný kľúč servera
6. **Podpísanie a odoslanie hlasu** - volič podpíše hlas svojím elektronickým podpisom:  $\text{Sign}(\text{Enc}(\text{hlas}, k, PK), SK)$ , kde  $SK$  je súkromný kľúč voliča<sup>20</sup>
7. **Overenie podpisu voliča** - sieťový server overí platnosť podpisu prijatej správy
8. **Overenie opakovanej voľby** - volebný server overí, či volič už hlas odovzdal; ponechá sa iba najnovší z hlasov, čo je možné vďaka elektronickému podpisu voliča
9. **Autorizovanie voliča** - volebný server autorizuje voliča overením jeho práva voliť; zároveň sa priloží ID voliča
10. **Uloženie a podpísanie hlasu a ID voliča** - k hlasu voliča sa pripojí jeho ID a výsledná správa sa podpíše:  $\text{Sign}(ID, SK_S)$ , kde  $SK_S$  je súkromný kľúč volebného servera; táto správa sa odošle späť voličovi
11. **Overenie podpisu servera** - volič overí platnosť podpisu servera. Tu aktívne zapojenie voliča do procesu voľby končí
12. **Vygenerovanie výsledného zoznamu, spočítanie hlasov** - spočítavanie prebieha na druhom servere, ktorý je fyzicky oddelený od siete (dáta sa naň prenášajú ručne)

Ako možno vypozerovať zo schémy, estónsky model umožňuje viacnásobnú voľbu, čím z bezpečnostného hľadiska znižuje možnosť prinútenia voliča k voľbe. Navyše, po ukončení elektronického hlasovania volič môže svoj elektronický hlas zrušiť i v následnom konvenčnom hlasovaní (v estónskom modeli fáza elektronických volieb predchádza fáze konvenčných volieb).

<sup>20</sup>estónski občania disponujú ID kartami so vstavaným čipom umožňujúcim autentifikáciu a digitálne podpisovanie prostredníctvom RSA; Estónsko disponuje vlastným PKI (Public Key Infrastructure)

## 5 Modifikácie

Vo všeobecnosti k našim cieľom patrí znížiť závislosť elektronických volieb na aplikáciach či programoch, ktoré je volič nútený pre úspešné vykonanie voľby využívať na svojom osobnom počítači. Zaujímavou implementačnou možnosťou pre variant hlasovania z ľubovoľného PC pripojeného do siete Internet je preto integrovať ochranné prvky do používateľských PC, prípadne využiť osobitný jednocelový operačný systém alebo virtuálny operačný systém. Cieľom prakticky nasaditeľných schém by malo byť i znížiť komplikovanosť a zvýšiť transparentnosť softvéru potrebného na používateľských PC a tento softvér vystaviť kontrole odbornej verejnosti. Nepochybne nezanedbateľnou je i fyzická ochrana zariadení na strane volebných serverov.

### 5.1 Modifikácie HS

Zaujímavou modifikáciou Hirt-Sako protokolu je schéma publikovaná v [Rjašková, 2002], ktorú budeme ďalej označovať ako Rjaškovej model. Nad rámec predpokladov HS Rjaškovej model predpokladá, že použitý šifrovací systém zachováva hodnotu 0; formálnejšie, pre vstup  $e = Enc(m)$  je výstupnou hodnotou šifrovacieho systému  $e' = Enc(m')$ , kde  $m' = 0 \Leftrightarrow m = 0$ , inak  $m' \neq 0$  je náhodná, uniformne distribuovaná výstupná hodnota. Túto vlastnosť zachováva napríklad v práci navrhnutý upravený ElGamalov kryptosystém, kde  $Enc(m) = (g^k, h^k G^m)$ , teda pre  $Enc(m) = (x, y), m \in \mathbb{Z}_{p-1}^*$ <sup>21</sup> sa hodnoty reenkrypcie  $E(m') = (x', y')$  vypočítajú ako  $(x', y') = (x^r, y^r)$ , kde  $r \in_R \mathbb{Z}_{p-1}^*$ . Ak  $(x, y) = (g^k, h^k G^m)$ , potom  $(x', y') = (x, y)^r = (g^k, h^k G^m)^r = (g^{kr}, h^{kr} G^{mr}) = E(mr)$  a  $m' = mr$ . Platí  $\log_x x' = \log_y y'$ .

Ako sme už naznačili, schéma využíva robustný ElGamal kryptosystém s tresholdom. Procesy v nej sa vyskytujúce možno zhrnúť do nasledovných fáz:

1. Volič rozdelí svoj hlas  $v$  medzi authority, použije sa napríklad  $(t + 1, N)$  Shamirova schéma na zdieľanie tajomstva
2. Authority zašifrujú svoje podiely hlasu (podobne ako v HS schéme), volič opäť môže niektoré permutácie odmietnuť (konkrétny počet závisí od parametrov použitej Shamirovej schémy

3. Z voličom neodmietnutých podieloch sa pri spočítavaní hlasov zrekonštruuje hodnota hlasu voliča
4. Hlasy sa vynásobia a uverejní sa výsledok volieb

Pre problémy s dosiahnutím nedonútiteľnosti k voľbe v tomto rozšírení autorka uvádza ešte nasledovné dodatočné rozšírenie:

1. Authority samy vygenerujú náhodné správy  $s_j$  a zašifrujú ich;  $e_j = Enc(s_j)$
2. Takéto podiely sa zverejnia na nástenke a authority voličovi odošlú dôkaz re-enkrypcie pre vybraného overovateľa ( $e_j$  je re-enkrypcia  $e_j^0 = E^0(s_j)$ )
3. Volič overí dôkazy re-enkrypcie, zvolí aspoň  $t + 1$  pre neho dôveryhodných autorít a vypočíta  $e_v = Enc(v_i - \sum_{j \in AS} s_j)$ ; zvolené authority a vypočítanú hodnotu uverejní na nástenke
4. Authority overia hlasy, vypočítajú ich hodnoty a oznámia výsledky volieb

### 5.2 Modifikácie estónskeho modelu

Často kritizovanou slabinou estónskeho modelu je náchylnosť na problémy centralizovaných schém (napríklad single point of failure problém pri sieťovom serveri či volebnom serveri); ak by ich potenciálny útočník dokázal ovládnuť alebo zneškodniť, mohol by zmeniť výsledky volieb. Zaujímavým rozšírením by preto mohlo byť:

- Zvýšiť robustnosť systému zavedením zdieľanej schémy na správu kľúčov
- Zaviest' vhodný distribuovaný systém
- Zmeniť v schéme využívané RSA za homomorfný šifrovací systém

## 6 Zložitosť a bezpečnosť niektorých riešení

Z dôvodov ďalšej analýzy aplikovateľnosti jednotlivých schém či protokolov v praxi je dôležité analyzovať ich bezpečnostné parametre, výkonnostné parametre, opodstatnenosť či úroveň naplnenia predpokladov a prípadné ďalšie faktory zjednodušujúce alebo komplikujúce ich nasadenie pre účely

<sup>21</sup> $\mathbb{Z}_{p-1}^* = \{0, \dots, p-2\}$  pre  $p$  prvočíslo

elektronických voľbách. Nešpecifické požiadavky v prehľade neuvažujeme. Niektoré výsledky sme čerpali z [Laure Fouard, 2010], [Rjašková, 2002] a [Dr. Rolf Haenni, 2009].

## 6.1 Naplnenie bezpečnostných požiadaviek

V tejto časti porovnáme naplnenie bezpečnostných požiadaviek, ktoré sme uviedli v časti 3 tejto práce.

### 6.1.1 TrustVote

**Naplnené požiadavky** Schéma vďaka implementácii konceptu nástenky spĺňa požiadavky integrity a demokratickosti. Priamočiarym ignorovaním neplatných hlasov možno dosiahnuť naplnenie korektnosti, oprávnenosti k voľbe a súkromnosti. Využitie vodoznakov umožňuje individuálnu overiteľnosť korektnej manipulácie s hlasom príslušného voliča. Využitie schém na zdieľanie zvyšuje robustnosť schémy. Vlastnosti všeobecnej overiteľnosti a férovosti, ktoré táto schéma spĺňa, sú dôležité predovšetkým pre mimovládne organizácie.

**Nenaplnené požiadavky** Nepopierateľný dôkaz hlasu možno vygenerovať jednoducho, a to odhalením voličovho tajomstva v protokole. Tento problém je principiálny a pravdepodobne ho nemožno odstrániť systematicky; ako potenciálne čiastočné riešenie sa ponúka možnosť viacnásobného hlasovania v podobe uskutočnenia konvenčnej voľby po ukončení elektronickej časti volieb; problémom však ostáva, že volič je v takomto prípade nútený komisii odhaliť svoj hlas<sup>22</sup>.

### 6.1.2 HS

Schéma nadobúda alebo čiastočne nadobúda všetky hlavné požadované bezpečnostné charakteristiky. Ak odhliadneme od problematickej možnosti odovzdať náhodný hlas, oprávnenosť k voľbe bude dodržaná. Naplnená bude súkromnosť i robustnosť (vďaka využitiu schém na zdieľanie tajomstva); zabezpečená je individuálna i univerzálna overiteľnosť a férovosť, predpokladaná je demokratickosť schémy. Čiastočne problematickou je receipt-freeness, teda nedonútiteľnosť k voľbe; v schéme HS by si totiž volič bol nútený pre splnenie tejto vlastnosti ručne vygenerovať výslednú permutáciu hlasov a dôkaz jej správnosti.

<sup>22</sup>alternatívne možno k hlasom pripojiť token identifikujúci voliča alebo schému rozšíriť o elektronický podpis hlasu kľúčom voliča

### 6.1.3 Estónsky model

Pravdepodobne najočividnejším problémom estónskeho modelu je, ako sme naznačili v časti 5, jej nedostatočná robustnosť. Tiež absencia homomorfizmu alebo iného riešenia zrejme neumožňuje jej univerzálnu overiteľnosť. Naopak, nadobudnuté sú vlastnosti individuálnej overiteľnosti (priamo z protokolu), súkromnosti, nedonútiteľnosti k voľbe, demokratickosti či férovosti.

### 6.1.4 Rjaškovej model

Druhá uvedená modifikácia protokolu spĺňa požiadavky súkromnosti, nedonútiteľnosti k voľbe, robustnosti, univerzálnej i individuálnej overiteľnosti, ako aj férovosti. V [Laure Fouard, 2010] sa však uvádza existencia útoku na požiadavku oprávnenosti k voľbe v tejto schéme.

## 6.2 Zložitosť

Zložitosť až nerealizovateľnosť mnohých teoretických konceptov spočíva v ich nerealizovateľných predpokladoch. V tejto práci sme sa aj preto pokúsili vybrať schémy, ktoré stavajú svoje požiadavky na reálnych základoch.

**HS** Zložitosť budeme počítvať v počte potrebných prvkov grupy na nástenke. Pre  $1 : L$  model to bude  $2NL$  prvkov pre platné hlasy a  $NL(2L + 1)$  pre dôkazy  $1 - L$  re-enkrypcie. Tiež je potrebné zvážiť sťažnosti voličov a index zvoleného hlasu; výsledná zložitosť teda bude

$$O(NL^2)$$

**Rjaškovej model** Schéma výrazne znižuje zaťaženie bezpečného kanálu, čím je optimalizovaný prenos dát. Pamäťová zložitosť (počet potrebných prvkov grupy) však ostáva zachovaná.

Pre lepšiu názornosť uvádzame súhrn požiadaviek v tabuľke 1.

## 7 Diskusia a otvorené otázky

V ďalšej práci sa budeme zaoberať predovšetkým otázkami praktickej nasaditeľnosti (resp. nasaditeľnosti po úpravách) teoretických konceptov volebných schém, a to z pohľadu bezpečnosti, realizovate-

Tabuľka 1: Prehľad naplnenia požiadaviek uvažovanými modelmi

Požiadavka	TrustVote	HS	Estónsky model	Rjaškovej model
Demokratickosť	áno	áno	áno	<b>nie</b>
Férovosť	áno	áno	áno	áno
Overiteľnosť - individuálna	áno	áno	áno	áno
Overiteľnosť - univerzálna	áno	áno	nie	áno
Receipt-freeness	<b>nie</b>	áno	<b>iba viacnásobným hlasovaním</b>	áno
Robustnosť	áno	áno	<b>nepostačujúco</b>	áno
Súkromnosť	áno	áno	áno	áno

lnosti, efektívnosti a pružnosti. Nepochybne potrebné je zaoberať sa i potrebnými legislatívnymi úpravami pre potreby potenciálneho zavedenia elektronických volieb na Slovensku.

Ako ďalšia cesta sa ukazuje i modifikácia existujúcich schém elektronických volieb, a to najmä estónskeho modelu. Zvýšením ich bezpečnosti a modifikáciami vrátane tých, ktoré sme uvideli v sekcii 5, sa pokúsime vybudovať spoľahlivý a všeobecne akceptovateľný model.

## PodĎakovanie

PodĎakovanie patrí konzultantom podieľajúcim sa na kompilácii práce, menovite Petrovi Gažimu, Danieľovi Olejárvi, Martinovi Stanekovi a Filipovi Vojtkovi z KIFMFI UK, ako aj Marcelovi Martinkovičovi z Filozofickej fakulty TRUNI.

## Literatúra

- [IKT, 2007] (2007). Informácia o výsledkoch zisťovania o využívaní ikt v domácnostiach. Technical report, Štatistický úrad Slovenskej republiky, Odbor štatistiky trhových služieb.
- [de Haes, 2008] de Haes, A. U. (2008). Dutch government bans electronic voting.
- [Dr. Rolf Haenni, 2009] Dr. Rolf Haenni, Reto Koenig, D. S. F. D. E. D. (2009). Trustvote: A proposal for a hybrid e-voting system.
- [Dr. Rolf Haenni, 2008] Dr. Rolf Haenni, Dr. Eric Dubuis, D. U. U.-N. (2008). Research on e-voting technologie.
- [Groth, 2005] Groth, J. (2005). Non-interactive zero-knowledge arguments for voting. In *ACNS*, pages 467–482.
- [Hirt and Sako, 2000] Hirt, M. and Sako, K. (2000). Efficient receipt-free voting based on homomorphic encryption. In *Proceedings of the 19th international conference on Theory and application of cryptographic tech-*

*niques*, EUROCRYPT'00, pages 539–556, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag.

- [Laure Fouard, 2010] Laure Fouard, Mathilde Duclos, P. L. (2010). Survey on electronic voting schemes.
- [Menezes et al., 1997] Menezes, A. J., van Oorschot, P. C., and Vanstone, S. A. (1997). *Handbook of Applied Cryptography*. CRC Press. Available online at <http://www.cacr.math.uwaterloo.ca/hac/>.
- [Mägi, 2007] Mägi, T. (2007). Practical security analysis of e-voting system. Master's thesis.
- [Rjašková, 2002] Rjašková, Z. (2002). Electronic voting schemes. Master's thesis.
- [Saeednia et al., 2003] Saeednia, S., Kremer, S., Markowitch, O., and Bruxelles, U. L. D. (2003). An efficient strong designated verifier signature scheme. In *Proc. of ICISC 2003, Springer LNCS*, pages 40–54. Springer-Verlag.

# Implementácia vybraných algoritmov na spracovanie objemových dát

Ivan Kolesár\*

Školiteľ: Miloš Šrámek†

Katedra aplikovanej informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

**Abstrakt:** Cieľom práce je navrhnúť a implementovať iteratívny filter na prúdové spracovanie objemových dát po rezoch v prostredí OpenCL [OpenCL, 2010], pričom sa na jeho testovanie využijú operácie anizotropnej difúzie a difúzie riadenej geometriou. Pretože OpenCL je relatívne nový štandard, práca sa venuje aj implementácii neseparovateľnej konvolúcie a separovateľnej konvolúcie pomocou OpenCL a ich výkonnostnému porovnaniu s inými typmi implementácie pre GPU (CUDA, OpenGL) a CPU (CPU, SSE).

*Kľúčové slová:* spracovanie objemových dát, iteratívny filter, OpenCL, rezové prúdové spracovanie dát, anizotropná difúzia, difúzia riadená geometriou

## 1 OpenCL

OpenCL (Open Computing Language) je otvorený štandard na paralelné programovanie rôznych hardvérových platform, napríklad CPU, GPU, alebo CELL procesora od spoločnosti IBM. OpenCL pozostáva z API pre koordináciu paralelného programovania medzi platformami a programovacím jazykom s vyšpecifikovaným výpočtovým prostredím. Štandard

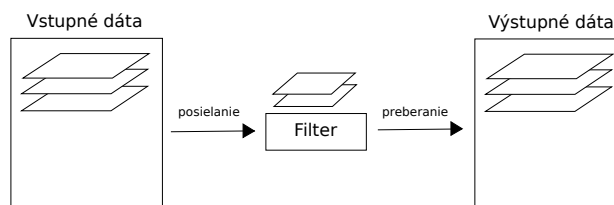
- zahŕňa podporu pre dátovo a cieľovo orientované modely paralelného programovania,
- využíva verziu jazyka C99 [ISO/IEC 9899:1999, 1999] s rozšírením pre paralelné programovanie,
- definuje konzistentné numerické požiadavky podľa IEEE 754 [IEEE 754-2008, 2008],
- definuje konfiguračný profil zariadení a
- efektívne spolupracuje s OpenGL [OpenGL 2.0, 2004], OpenGL ES [OpenGL ES, 2010] a inými grafickými API.

\*kolesar.ivan@gmail.com

†milos.sramek@oeaw.ac.at

## 2 Rezové prúdové spracovanie objemových dát

Objemové dáta sú v tejto práci spracované prúdovým filtrovaním po jednotlivých rezoch, čo znamená, že dáta prechádzajú cez filter, ktorý si ukladá iba minimálnu potrebnú časť dát z celého objemu [Šrámek et al., 2007]. Základnou dátovou jednotkou je rez. Množstvo uložených dát vo filtri je vo väčšine prípadov niekoľko rezov a ich počet závisí od typu filtra.



Obr. 1: Schéma rezového prúdového spracovania objemových dát

Výhodami prúdového spracovania sú

- znížené nároky na hlavnú pamäť počítača,
- vysoká podpora pre paralelizáciu výpočtu,
- vhodnosť pre bodové a lokálne typy operácií a
- zabezpečenie nezávislosti na veľkosti kernelu filtra.

Schéma (obrázok 1) na spracovanie dát sa dá ľahko použiť aj v prostredí výpočtov na grafických kartách. Rezy sa budú postupne z hlavného programu posielat' do pamäte grafickej karty, paralelne spracovávať a následne sa výsledné rezy budú kopírovať z pamäte grafickej karty späť do hlavného programu. Toto rozhranie rezového prúdového spracovania bolo pre GPU naimplementované pomocou štandardu OpenCL.

V jednotlivých sekciách práce sú opísané implementácie neseparovateľnej a separovateľnej konvolúcie a iteratívneho filtra. Tieto implementácie sú následne porovnané s inými implementačnými prístupmi.

Údaje meraní sú získané z počítačovej zostavy pozostávajúcej z grafickej karty GTX 460 s 2GB vnútornou pamäťou a procesorom Intel Core i7 so štyrmi procesormi.

### 3 Neseparovateľná konvolúcia

Objemové dáta sa získavajú ako výsledok simulácií alebo pomocou snímacích zariadení. Zatiaľ čo dáta získané simuláciami sú častokrát priamo pripravené pre vizualizáciu, pre dáta získané snímaním to neplatí. Napríklad, objemové dáta získané prostredníctvom rôznych tomografických skenerov (počítačová tomografia, magnetická rezonancia) sú pre vysokú rýchlosť skenovania častokrát zašumené. Tento nedostatok možno odstrániť vyhladzovaním. Na vyhladzovanie sa často používa operácia konvolúcie, s vopred určenými koeficientami:

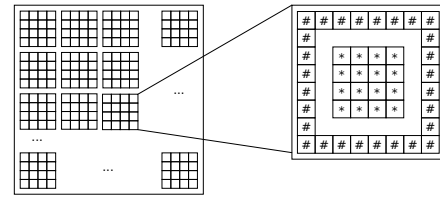
$$I_c(x, y, z) = \sum \sum \sum I(x+i, y+j, z+k) \cdot g(i, j, k) \quad (1)$$

Pre úspešnú implementáciu neseparovateľnej konvolúcie je teda potrebné mať v pamäti zariadenia uložené susedné rezy, voxely v rámci rezov musia mať prístup ku svojim susedom v rámci rezu aj v rámci susedných rezov a v priebehu celého výpočtu musí byť prístupná konvolučná matica.

V OpenCL je vhodné susediace rezy uložiť do globálnej pamäte vo forme jednorozmerného poľa. Do tejto globálnej pamäte majú prístup všetky výpočtové jednotky, čím sa splňa podmienka prístupnosti okolia v rámci jedného rezu i tých susedných. Konvolučnú maticu, ktorá sa po celý čas behu výpočtov nemení, je vhodné uložiť do konštantnej pamäte, čo zabezpečí rýchly prístup k jej prvkom.

V prostredí OpenCL je pre zvýšenie efektivity dôležité správne nastavenie využívania lokálnej pamäte. Pod lokálnou pamäťou sa myslí pamäť zdieľaná medzi jednotlivými paralelne bežiacimi kernelmi v rámci spoločnej pracovnej skupiny. Z hardvérového hľadiska sa jedná o registre procesora. Pri operácii neseparovateľnej konvolúcie je potrebné si uchovávať takú lokálnu pamäť, aby v nej boli obsiahnuté potrebné body z okolia pre výpočet výsledku. V zásade to znamená, že pre uložené rezy sa vytvorí trojrozmerná lokálna pamäť. Na obrázku 2 je zobrazené rozdelenie rezu do lokálnej pamäte v smere X a Y.

Implementácia bola vytvorená na základe schém pre posielanie rezov do grafickej karty (obrázok 1) a rozdeľovaním jednotlivých rezov na grafickej karte



Obr. 2: Rozdelenie rezu do pracovných skupín, z ktorých každá má vlastnú lokálnu pamäť.

(obrázok 2). Pre malú veľkosť lokálnej pamäte, ktorá sa pohybuje v rozmedzí 16 až 32 KB, môžu byť použité len relatívne malé konvolučné matice. V tabuľke 1 je vidieť zrýchlenie výpočtu na OpenCL oproti verzii s OpenGL, ktoré bolo dosiahnuté aj vďaka použitiu lokálnej pamäte.

Typ implementácie	Čas [s]
OpenCL(GPU)	8.5
OpenGL	14.1
OpenCL(CPU)	200.0
SSE	14.3
CPU	136.3

Tabuľka 1: Časová náročnosť neseparovateľného filtra s konvolučnou maticou  $3 \times 3 \times 3$  na dátach  $1024 \times 1024 \times 1024$

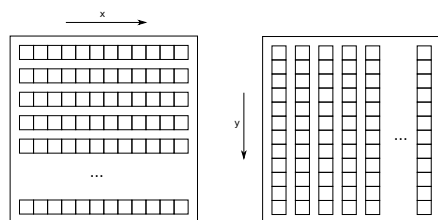
### 4 Separovateľná konvolúcia

Pri separovateľnej konvolúcii môžeme rozložiť trojrozmernú maticu konvolúcie na súčin troch jednorozmerných matic v smere osí X, Y a Z:

$$F(x, y, z) = F(x) * F(y) * F(z), \quad (2)$$

čím sa výpočet rozdelí na tri nezávislé akcie. Z pohľadu OpenCL sa jedná o spúšťanie troch nezávislých programov na dátach, kde každý robí filtrovanie v jednom smere. Pri posielaní rezu do filtra sa spustia programy pre filtrovanie v smere X a Y, a pri preberaní výsledku z filtra sa vykonáva spracovanie v smere Z. Tento sled operácií je vhodný hlavne na zjednodušenie implementácie, aby v pamäti filtra boli uložené už iba filtrované rezy v smere X a Y. Rovnako ako pri implementácii neseparovateľnej konvolúcie aj tu je využitá lokálna pamäť. Tá je teraz jednorozmerná a v zásade delí rez na stĺpce a riadky (obrázok 3), podľa smeru filtrovania.





Obr. 3: Rez rozdeľovaný do riadkov alebo stĺpcov pre filtrovanie v smere x alebo y.

S rovnakou schémou pre posielanie rezov ako v prípade neseparovateľnej konvolúcie, ale s prerozdelením lokálnej pamäte podľa obrázku 3 bola spravená implementácia separovateľnej konvolúcie na OpenCL.

Typ implementácie	čas [s]
OpenCL(GPU)	7.5
OpenGL	11.1
CUDA	5.6
SSE	10.8
CPU	52.6

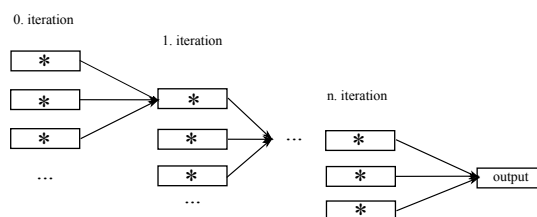
Tabuľka 2: Časová náročnosť separovateľného filtra s veľkosťou konvolučnej matice  $11 \times 11 \times 11$  na dátach  $1024 \times 1024 \times 1024$

## 5 Iteratívny filter

Iteratívny filter je, podobne ako konvolúcia, lokálna operácia. Pracuje podobne, teda využíva maticu váh v okolí bodu pre výpočet, avšak podstatným rozdielom je, že výpočet prebieha v iteráciách opakovane, prípadne s inými parametrami, ktoré sa však môžu meniť aj v závislosti na polohe. V podstate sa to dá predstaviť, tak akoby na jednom objeme bola niekoľkokrát opakovaná konvolúcia. Tento filter je vhodný na riešenie niektorých parciálnych diferenciálnych rovníc. Jednoduchým príkladom týchto rovníc je napríklad difúzna rovnica vedenia tepla, kde na počiatku máme základné dáta, ktoré postupom času odovzdávajú teplo okolitým susedným bodom.

Keďže sa jedná o lokálnu operáciu, na výpočet rezu prvej iterácie potrebujeme niekoľko počiatkových rezov, ktoré sú vstupom pre druhú iteráciu a tak ďalej, až nám vznikne strom výpočtu (obrázok 4), kde vstupné rezy sú listy, ich rodičia sú rezy prvej iterácie a tak ďalej až po koreň stromu, reprezentujúci

výsledný rez požadovanej iterácie.



Obr. 4: Príkladná schéma postupného výpočtu pre okolie  $3 \times 3 \times 3$ . \* - rez

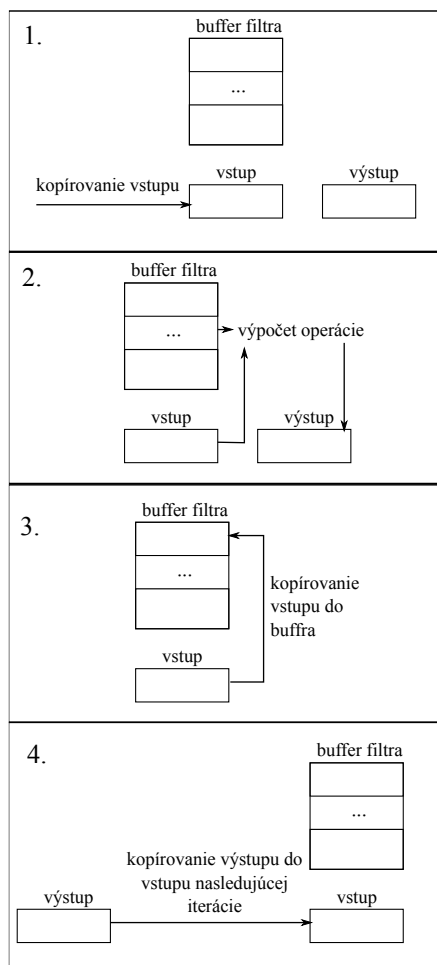
Pamäťová a výpočtová náročnosť tohto základného prístupu závisí najmä od zvolenej implementácie. V prípade, že výsledný rez danej iterácie by sa počítal rekurzívne jednalo by sa až o exponenciálnu výpočtovú zložitosť. Čiastočnou optimalizáciou je použitie princípu dynamického programovania, kde sa počíta postupne od prvej iterácie po poslednú a medzivýsledky sa ukladajú v tabuľke, v našom prípade v stromovej štruktúre.

V prípade, že chceme čo najviac znížiť pamäťové nároky filtra, je možné v každej iterácii vypočítavať celý strom, ktorého jednotlivé úrovne by sa priebežne ukladali do pamäte. Jednalo by sa teda o veľkosť pamäte rovnakej ako je najväčšia úroveň, čo je v podstate úroveň s listami, a tá má veľkosť  $n \times (k - 1) + 1$  rezov, kde  $n$  je počet iterácií a  $k$  je veľkosť okolia. Z výpočtového hľadiska by však bolo potrebné pre každý nový vstupný rez vytvárať celý strom, čo znamená  $\frac{n \times (n-1) \times (k-1)}{2} + n$  výpočtov.

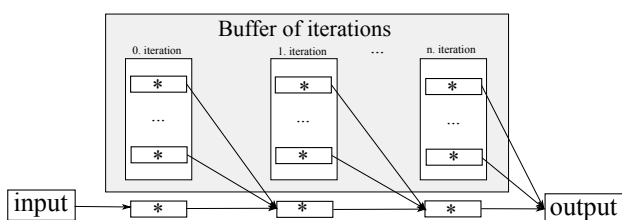
V prípade, že chceme dosiahnuť čo najnižšiu výpočtovú náročnosť, je možné si v pamäti ukladať celý strom, pričom s každým novým rezom by sa robilo  $n$  výpočtov. Je to najnižší možný rozsah výpočtov a z pohľadu výpočtového výkonu teda ide o optimálny prístup. V tomto prípade je potrebné si pamätať celú stromovú štruktúru rezov, ktorá má veľkosť  $\frac{n \times (n+1) \times (k-1)}{2} + n$  rezov.

Pri spracovaní rezu je viditeľné, že tento potrebuje len okolité rezy z predchádzajúcej iterácie. To znamená, že pri prúdovom spracovaní pri vstupnom reze nie je potrebné ukladať celý strom z obrázku 4. Namiesto toho sú potrebné iba rezy okolia vstupného rezu v každej iterácii, čo znamená, že je potrebná maximálne pamäť o veľkosti  $pocet\_iteracii \times velkost\_okolia$ . Pri tejto schéme (obrázok 6) je potrebný najmenší nutný počet výpočtov a zároveň má nízke pamäťové nároky. Priebeh výpočtu jednej iterácie je znázornený na obrázku 5. Znázornenie bufra iteratívneho filtra a jeho prepojenia s výpočtom je na

obrázku 6.



Obr. 5: Znázornenie výpočtu jednej iterácie.



Obr. 6: Schéma výpočtu rezu pre iteratívne filtre. \* - rez

### 5.1 Difúzia

Na testovanie implementácie iteratívneho filtra boli použité operácie anizotropnej difúzie [Perona and Malik, 1990] a difúzie riadenej geometriou [Bajla and Holländer, 1998]. Tieto operácie sú v zásade špeciálnym typom konvolúcie, ktorá je závislá na dátach. Na základe vyhodnocovacej funkcie

dokážu tieto operácie v danom okolí vyhladienie zvýrazniť, alebo naopak stlmiť. Výsledkom tohto prístupu je, že pri vhodnej vyhodnocovacej funkcii táto operácia dokáže vyhladiť šum vo vnútri oblastí, pričom ich hranice nechá neporušené, dokonca ich dokáže vyostriť. Na testovacie účely bola použitá nasledujúca jednoduchá numerická schéma v reze pre štyri smery v rámci rezu – sever, juh, východ, západ (N, S, E, W) a dva smery k susedným rezom – smer hore (U) – predchádzajúci rez a smer dole (D) – nasledujúci rez:

$$I_{i,j}^{t+1} = I_{i,j}^t + \lambda [c_N \cdot \nabla_N I + c_S \cdot \nabla_S I + c_E \cdot \nabla_E I + c_W \cdot \nabla_W I + c_U \cdot \nabla_U I + c_D \cdot \nabla_D I]_{i,j}^t,$$

kde  $\nabla_{smer} I$  označuje výpočet gradientu v danom smere a  $c_{smer}$  je zase výpočet vyhodnocovacej funkcie pre vyhladenie. Tá je pre základnú implementáciu určená ako

$$c_{smer} = g(|\nabla_{smer} I|) = e^{-(\frac{|\nabla_{smer} I|}{k})^2}. \quad (3)$$

Táto vyhodnocovacia funkcia, operujúca sa najmä o gradient okolia, nedokáže rozpoznať, či sa bod nachádza na hrane alebo na silne zašumenom bode. Práve pre túto nedokonalosť vyhodnocovacej funkcie pri anizotropnej difúzii vzniklo mnoho jej pozmenených verzií. Jednou z nich je geometry-driven diffusion [Bajla and Holländer, 1998], ktorá na vyhodnocovanie pridáva aj funkciu analyzujúcu okolie bodu parciálnymi deriváciami po jednotlivých smeroch, čím vzniká matica

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

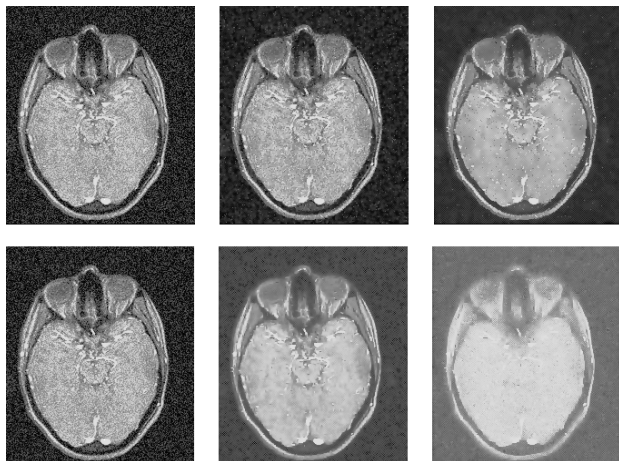
z ktorej sa získajú jej minimálna a maximálna vlastná hodnota a tie sa použijú pre výpočet geometrického odhadu  $h$ :

$$h(x,y) = \left( \frac{l_{max} - l_{min}}{l_{max} + l_{min}} \right)^n, \quad (5)$$

ktorým sa vynásobí vyhodnocovacia funkcia  $g$ .

### 5.2 Merania

Základom implementácie je rezovo prúdové spracovanie (obrázok 1), kde sa filtru zasiela vstup vždy po jednom reze. V prostredí filtra sa rezy spracovávajú podľa optimalizovanej schémy na obrázku 6. Pre porovnanie efektívnosti tejto schémy bola implementovaná i verzia podľa stromovej schémy, obrázok 4. V



Obr. 7: Ukážka iteratívnych filtrov anizotropnej difúzie(hore) a difúzie riadenej geometriou(dole) pre 0, 5 a 20 iterácií. Obrázok je pre lepšiu viditeľnosť ekvalizovaný.

tabuľke 3 s výsledkami meraní je jasne vidieť rýchlostné zlepšenie efektívneho prístupu oproti stromovému.

Typ implementácie	čas [s]
Čiastočná pamäťová opt.	667.8
Optimalizácia – anizotropná difúzia	37.9
Difúzia riadená geometriou	63.9

Tabuľka 3: Časová náročnosť teratívne filtra anizotropnej difúzie s 20 iteráciami na dátach s rozmermi  $1024 \times 1024 \times 1024$

### 5.3 Záver

V práci sa podľa zadaného cieľa podarilo implementovať vybrané algoritmy na spracovanie objemových dát v prostredí nového štandardu OpenCL. Počas samotnej práce sa tento štandard viac krát zmenil, a to najmä v rýchlosti výpočtu.

Implementovali sme separovateľnú a neseparovateľnú konvolúciu a všeobecný iteratívny filter, na ktorom pre testovacie účely boli spravené operácie anizotropnej difúzie a difúzie riadenej geometriou. Pri všetkých implementáciách sa dodatočne rozoberala optimalizácia pre konkrétne operácie, čím sa pri neseparovateľnej konvolúcii dosiahlo zrýchlenie 20% a pri separovateľnej konvolúcii 1.8-násobné urýchlenie oproti základným implementáciám.

Pri prúdovom iteratívnom filtri bola navrhnutá

a implementovaná nová schéma eliminujúca potrebu viacnásobného načítavania dát a minimalizujúca pamäťové nároky pri minimálne potrebnom rozsahu výpočtov. Vďaka tejto optimalizácii bolo dosiahnuté 18-násobné urýchlenie oproti základnej schéme. Všetky tieto implementácie boli testované na reálnych aj na generovaných dátach.

Pri porovnaní výsledkoch oboch typov difúzie bolo tiež pozorované, že na dosiahnutie vzájomne porovnateľného vyhladenia stačí len približne 5 až 7 iterácií difúzie riadenej geometriou, pričom pri anizotropnej difúzii je to až 20 a viac.

Navrhnutú schému iteratívneho filtra je možné ďalej zovšeobecniť, tak, aby v rôznych iteráciách boli vykonávané odlišné operácie, čo by viedlo k možnosti ich efektívneho zret'azenia.

### Pod'akovanie

Tento projekt bol podporovaný z grantu VEGA 1/0631/11.

### Literatúra

- [Bajla and Holländer, 1998] Bajla, I. and Holländer, I. (1998). Nonlinear filtering of magnetic resonance tomograms by geometry-driven diffusion. *Machine vision and applications*, 10:243–255.
- [IEEE 754-2008, 2008] IEEE 754-2008 (2008). *IEEE Standard for Floating – Point Arithmetic*. IEEE.
- [ISO/IEC 9899:1999, 1999] ISO/IEC 9899:1999 (1999). *Revision of the C standard*. ISO/IEC.
- [OpenCL, 2010] OpenCL (2010). *The OpenCL Specification*. Khronos OpenCL Working Group. [navštívené 5.5.2011].
- [OpenGL 2.0, 2004] OpenGL 2.0 (2004). *The OpenGL Graphics System: A Specification (Version 2.0)*.
- [OpenGL ES, 2010] OpenGL ES (2010). *Opengl es 2.x and the opengl es shading language*. [http://www.khronos.org/opengles/2\\_X/](http://www.khronos.org/opengles/2_X/). [navštívené 5.5.2011].
- [Perona and Malik, 1990] Perona, P. and Malik, J. (1990). Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell*, 12:629–639.
- [Šrámek et al., 2007] Šrámek, M., Varchola, A., Vaško, A., Solčány, V., and Dimitrov, L. I. (2007). Processing of volumetric data by slice- and process-based streaming. In Slay, H. and Bangay, S., editors, *Afrigraph'07*, pages 101–110, Grahamstown, South Africa. ACM Siggraph.

# Diskrétna tomografia cez SAT solver a ILP solver

Michal Malý\*

Školiteľ: Igor Farkaš†

Katedra aplikovanej informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

**Abstrakt:** Vývoj SAT solverov v posledných rokoch spôsobil, že mnoho problémov sa dá riešiť prevedením na problém splniteľnosti – prevedením na formulu v konjunktívnom normálnom tvare a jej následným vyriešením pomocou všeobecného SAT solvera. Efektivita takýchto postup je často porovnateľná so špecializovanými programami. Veľký vplyv na výkonnosť tu má spôsob zakódovania problému do CNF formuly. Obdobne možno problém zakódovať do inštancie lineárneho celočíselného programovania. V tomto článku sa zaoberáme riešením problému diskkrétnej tomografie. Ukazujeme, ako je tento problém možné riešiť pomocou SAT solvera a ILP solvera. Motiváciou bolo porovnanie, ktorý z týchto prístupov je na túto úlohu vhodnejší, a tiež porovnanie s prístupom cez genetické algoritmy, ktorý bol použitý v literatúre. Pri SAT solveri bolo navyše nutné skonštruovať sčítačku na prevod problému do podoby boolovských klauzúl, tu nás zaujímalo, ktorý prevod bude efektívnejší. Výsledky sú sľubné: SAT solver rieši dobre zadané úlohy rádovo rýchlejšie ako genetický algoritmus. ILP solver nedosahuje až také dobré výsledky.

*Keľúčové slová:* diskrétna tomografia; SAT solver; ILP solver

## 1 Úvod a motivácia

Diskrétna tomografia sa zaoberá problémom, ako zrekonštruovať pôvodný binárny obrázok z jeho niekoľkých priemetov. Tento problém bol riešený aj cez genetické algoritmy [Batenburg, 2005, Blažek, 2010], zaujalo nás, či „exaktnejší“ symbolový prístup môže byť efektívnejší. Rozhodli sme sa previesť problém diskkrétnej tomografie na problém splniteľnosti, ktorý je možné riešiť všeobecným SAT solverom. Pri tomto prevode je nutné riešiť prevod kardinalitného obmedzenia na boolovskú formulu – zapísanie počtu jednotiek. Vyskúšali sme tu dva prístupy.

Podobne sme tiež vyskúšali previesť problém na lineárneho celočíselného programovania. V posled-

nej dobe ILP solvery zaznamenali, podobne ako SAT solvery, významný nárast vo výkonnosti. Môže byť preto dobrou alternatívou namiesto písania špecializovaného programu skúsiť konkrétny problém previesť na inštanciu SAT alebo ILP, a použiť všeobecný program.

## 2 Diskrétna tomografia

Uvedieme jednoduchý príklad problému. Nech  $A$  je neznáma binárna matica. Poznáme počty jednotiek v jej riadkoch, stĺpcoch a prípadne aj po uhlopriečkach v jednom či v oboch smeroch. Vieme maticu  $A$  zrekonštruovať, čiže nájsť nejaké alebo všetky riešenia?

0	0	0	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0	4
1	1	0	0	0	1	1	1	5
0	1	1	1	1	1	1	0	6
0	0	1	1	1	1	0	0	4
0	0	0	1	1	1	0	0	3
0	0	0	0	1	1	0	0	2
2	3	2	3	4	6	4	1	

Obr. 1: Matica a jej riadkové a stĺpcové súčty

Tento problém bol riešený už v roku 1957 kde [Ryser, 1957, Gale, 1957] odvodili nutné a postačujúce podmienky pre riešenie, pričom v [Ryser, 1957] bol uvedený aj polynomiálny algoritmus na nájdenie riešenia z riadkových a stĺpcových súčtov. Problém však je, že takýchto riešení môže byť veľa. Tento algoritmus sa nedá efektívne použiť, ak máme riešenie dodatočne spresnené napr. ďalšou projekciou, vtedy je to NP-t'ážky problém [Gardner et al., 1999]. Podobne to platí, aj ak vieme, že riešenie je hvkonvexné (pozostáva z niekoľkých konvexných „ostrovoov“ jednotiek); v tomto prípade je to tiež NP-t'ážky problém [Barucci et al., 1996].

\*maly@ii.fmph.uniba.sk

†farkas@ii.fmph.uniba.sk

### 3 Existujúce riešenia

V poslednej desiatke rokov SAT solvery výrazne zlepšili svoj výkon. To spôsobilo, že viaceré problémy bolo možné prakticky riešiť zakódovaním do CNF formúl a ich následným vyriešením. Prvý postup, ako zakódovať kardinalitné obmedzenia sa objavil v [Bailleux and Boufkhad, 2003]. Autori vyskúšali svoje kódovanie aj na probléme diskkrétnej tomografie a zistili, že je dobre škálovateľné – riešenie pomocou SAT solvera zabralo síce viac času ako riešenie pomocou špecializovaného programu, ale pomer medzi časmi sa nemenil vzhľadom na veľkosť problému. Prehľad aplikácií a niektorých metód riešenia diskkrétnej tomografie je v [Herman and Kuba, 1999]. Použitie genetických algoritmov bolo skúmané v [Batenburg, 2005] a pre 3D prípad aj v [Blažek, 2010].

Podobný problém – japonské hlavolamy – bol riešený pomocou SAT solvera v [Park and Kwon, 2008]. Hra Sudoku bola riešená cez SAT solver v [Ist et al., 2006].

## 4 Riešenie cez SAT solver

### 4.1 Počet jednotiek v $n$ bitoch

Na riešenie problému potrebujeme určiť, aký je počet jednotiek v nejakom binárnom vektore  $x$  (riadku, stĺpci, uhlopriečke) dĺžky  $n$ . Pýtame sa vlastne na sumu  $\sum_{i=1}^n x_i = k$ . Poznamenajme, že ak by sme vyjadřili tento fakt v disjunktívnej normálnej forme, museli by sme do nej zakódovať všetky možnosti, čiže všetky podmnožiny veľkosti  $k$ , ktorých počet je  $\binom{n}{k}$ . Pre konjunktívnu normálnu formu (CNF), ktorá vstupuje do SAT solvera, máme viacero možností.

#### 4.1.1 Prvý sčítavač

Označme  $Z_{j,k} := \sum_{i=1}^j x_i \stackrel{?}{=} k$ . Potom platí  $Z_{j,k} = Z_{j-1,k} \wedge \neg x_j \vee Z_{j-1,k-1} \wedge x_j$ . Na základe tohoto vzťahu môžeme skonštruovať potrebný sčítavač jednotiek. Najprv rovnosť upravíme na CNF tvar tak, že ju prepíšeme ako obojsmernú implikáciu. Obe implikácie potom prepíšeme podľa vzťahu  $a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$  a de Morganových zákonov. To vedie k formule  $(Z(j,k) \vee x_j \vee \neg Z(j-1,k)) \wedge (\neg Z(j,k) \vee Z(j-1,k) \vee x_j) \wedge (Z(j,k) \vee \neg x_j \vee \neg Z(j-1,k-1)) \wedge (\neg Z(j,k) \vee \neg x_j \vee Z(j-1,k-1))$ . Potom pre všetky prípustné hodnoty  $j,k$  vyhradíme predikátu  $Z_{j,k}$  osobitnú pre-

mennú (grounding). Výrazy s neprípustnými hodnotami nahradíme logickou hodnotou *false* a zjednodušíme. Tento sčítavač používa  $\mathcal{O}(n^2)$  premenných.

#### 4.1.2 Druhý sčítavač

Skonstruovali sme aj druhý, alternatívny sčítavač, ktorý používa menej premenných ( $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$ ). Je postavený na princípe sčítavača, ktorý háda carry bit – prenos pri sčítaní. Predpokladajme znova, že máme binárny vektor  $x$  dĺžky  $n$ . Na binárny zápis súčtu potrebujeme  $\log_2 n$  bitov. Zavedieme predikát  $S(j,i)$ , ktorý vyjadruje, či po sčítaní prvých  $j$  bitov je v binárnom zápise sumy na pozícii  $i$  ( $0 \leq i \leq \log_2 n$ ) jednotka. Tiež zavedme predikát  $C(j,i)$ , ktorý vyjadruje, či po sčítaní prvých  $j$  bitov sa na  $i$ -tom bite vyskytne prenos, pričom položíme  $C(j,0) = x_j$ .

Pre tieto predikáty platia vzťahy  $C(j,i) = S(j-1,i-1) \wedge C(j,i-1)$  a  $S(j,i) = S(j-1,i) \oplus C(j,i)$ . Operáciu XOR ( $\oplus$ ) a rovnosti znova prevedieme pomocou de Morganových zákonov a dostaneme formuly  $(\neg C(j,i) \vee S(j-1,i-1)) \wedge (\neg C(j,i) \vee C(j,i-1)) \wedge (C(j,i) \vee \neg S(j-1,i-1) \vee \neg C(j,i-1))$  a  $(\neg S(j,i) \vee S(j-1,i) \vee C(j,i)) \wedge (S(j,i) \vee \neg S(j-1,i) \vee C(j,i)) \wedge (S(j,i) \vee S(j-1,i) \vee \neg C(j,i)) \wedge (\neg S(j,i) \vee \neg S(j-1,i) \vee \neg C(j,i))$ . Podobne ako v predchádzajúcom prípade, prevedieme každý predikát na boolovské premenné.

### 4.2 Použitie SAT solvera na úlohu a získanie výsledku

Pre načítané údaje sa s pomocou zvoleného sčítavača vygenerujú klauzy, zodpovedajúce zadaným obmedzeniam. Tieto klauzy sa uložia do súboru vo formáte akceptovanom SAT solverom (použili sme *mini-sat*) a na súbore sa spustí proces riešenia. Keď riešenie skončí, SAT solver uloží výsledok do výstupného súboru. Ak riešenie neexistuje, neexistuje ani matica zodpovedajúca daným obmedzeniam, ak riešenie existuje, zo súboru je možné zrekonštruovať maticu prečítaním premenných, zodpovedajúcim poliam matice.

## 5 Riešenie cez ILP solver

Technika lineárneho programovania vyžaduje zapísať obmedzenia v podobe nerovností. Každému poľu matice vyhradíme jednu neznámu, ktoré interne indexujeme od 1 po  $m \cdot n$  (ak  $m,n$  sú rozmery matice).

Každú z nich obmedzíme nerovnosťou na hodnotu  $x_k \leq 1$ . Príslušný súčet v riadku/stĺpci matice zapíšeme prirodzeným spôsobom pomocou týchto neznámych do rovnosti<sup>1</sup>, na druhú stranu rovnosti položíme požadovanú hodnotu súčtu. Uvedené obmedzenia postačujú na vyriešenie problému tomografie, preto účelovú funkciu zadeklarujeme len formálne. Na záver neznáme zadeklarujeme ako typ `int`.

Napríklad pre maticu na Obr. 1 a jej riadkovú, stĺpcovú a uhlopriečnu projekciu máme teda obmedzenia:

$$x_i \leq 1, \text{ pre } i \in 1, 2, \dots, 56$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1$$

$$x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 4$$

$$x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 5$$

$$x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29} + x_{30} + x_{31} + x_{32} = 6$$

$$x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} + x_{39} + x_{40} = 4$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} = 3$$

$$x_{49} + x_{50} + x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} = 2$$

$$x_1 + x_9 + x_{17} + x_{25} + x_{33} + x_{41} + x_{49} = 2$$

$$x_2 + x_{10} + x_{18} + x_{26} + x_{34} + x_{42} + x_{50} = 3$$

$$x_3 + x_{11} + x_{19} + x_{27} + x_{35} + x_{43} + x_{51} = 2$$

$$x_4 + x_{12} + x_{20} + x_{28} + x_{36} + x_{44} + x_{52} = 3$$

$$x_5 + x_{13} + x_{21} + x_{29} + x_{37} + x_{45} + x_{53} = 4$$

$$x_6 + x_{14} + x_{22} + x_{30} + x_{38} + x_{46} + x_{54} = 6$$

$$x_7 + x_{15} + x_{23} + x_{31} + x_{39} + x_{47} + x_{55} = 4$$

$$x_8 + x_{16} + x_{24} + x_{32} + x_{40} + x_{48} + x_{56} = 1$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 + x_9 = 1$$

$$x_3 + x_{10} + x_{17} = 2$$

$$x_4 + x_{11} + x_{18} + x_{25} = 1$$

$$x_5 + x_{12} + x_{19} + x_{26} + x_{33} = 1$$

$$x_6 + x_{13} + x_{20} + x_{27} + x_{34} + x_{41} = 1$$

$$x_7 + x_{14} + x_{21} + x_{28} + x_{35} + x_{42} + x_{49} = 4$$

$$x_8 + x_{15} + x_{22} + x_{29} + x_{36} + x_{43} + x_{50} = 4$$

$$x_{16} + x_{23} + x_{30} + x_{37} + x_{44} + x_{51} = 4$$

$$x_{24} + x_{31} + x_{38} + x_{45} + x_{52} = 4$$

$$x_{32} + x_{39} + x_{46} + x_{53} = 2$$

$$x_{40} + x_{47} + x_{54} = 1$$

$$x_{48} + x_{55} = 0$$

$$x_{56} = 0$$

Napokon deklarácia premenných

`int xi` pre  $i \in 1, 2, \dots, 56$

Takéto zadanie ILP solver vyrieši a poskytne priamo hodnoty premenných (pre uvedený príklad riešenie trvá menej ako 5 milisekúnd).

## 6 Výsledky

Implementovali sme spomenuté postupy v jazyku C++<sup>2</sup>. Riešenie sme testovali pre 3 alebo 4 projekcie (riadok, stĺpec a jedna alebo dve uhlopriečky). O SAT solveroch je známe, že majú iný priemerný čas behu pre splniteľné a pre nesplniteľné zadanie. Preto sme testovali aj nesplniteľné požiadavky tak, že sme do popisu existujúcej matice vniesli jednotkovú chybu v súčte pre jeden stĺpec. V prípade použitia SAT solvera s prvým sčítačom boli výsledky najrýchlejšie, a to približne 3 sekundy pre splniteľné zadanie matice rozmeru 40x40 so 4 projekciami a 120 sekúnd pre 3 projekcie (menej obmedzení predlžuje čas výpočtu – obmedzenia pomáhajú vylučovať neproduktívne vetvy pri hľadaní). Pre nesplniteľné zadanie SAT solver neskončil ani po 30 minútach<sup>3</sup>. Teoreticky môžeme nesplniteľné zadanie môžeme heuristicky detekovať podľa času a odmietť riešenie trvajúce nad určitý limit.

V porovnaní s genetickým algoritmom, kde bolo riešenie pre maticu rozmeru 40x40 v priemere nájdené za 25 minút [Batenburg, 2005] na porovnateľne výkonnom stroji je to obrovské zlepšenie.

ILP solver trval viac ako 15 minút pre maticu 40x40 s 3 projekciami.

### 6.1 Testovanie na náhodných maticiach

Ďalej sme testovali SAT solver na náhodných štvorcových maticiach veľkosti 10x10 až 40x40 (s krokom 10). Keďže pri riešení formúl hrá veľkú rolu aj previazanie premenných, skúšali sme aj meniť pomer jednotiek v matici (t.j. pravdepodobnosť, s ktorou bude na pozícii matice vygenerovaná jednotka). Výsledky možno vidieť v Tab. 1, každý výsledok je spriemerovaný čas 10 behov s uvedenou štandardnou odchýlkou. Všetky prípady boli splniteľné.

Vidíme, že čas behu je najväčší pre pomer 0.5 a že čas behu sa zvyšuje exponenciálne od počtu políčok, čiže  $p$

## 7 Záver

Zistili sme, že na riešenie problémov diskkrétnej tomografie môže byť SAT solver rýchlejšim riešením ako genetický algoritmus. Pre prevod inštancie problému

<sup>2</sup>K dispozícii na <http://mmm.ii.fmph.uniba.sk/diskretna-tomografia.zip>

<sup>3</sup>AMD Athlon(tm) 64 Processor 3500+, 512 MB RAM

<sup>1</sup>ILP solver umožňuje mať rovnice tvaru  $x_1 + x_2 = 2$ , ktoré interne považuje za nerovnosť  $x_1 + x_2 \leq 2$

čas	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
10x10	0.0±0.0	0.0±0.0	0.0±0.0	0.0±0.0	0.0±0.0	0.0±0.0	0.0±0.0	0.0±0.0	0.0±0.0	0.0±0.0
20x20	0.1±0.0	0.4±0.0	0.5±0.1	0.7±0.1	0.9±0.3	0.9±0.2	1.0±0.2	0.9±0.2	0.8±0.3	0.5±0.1
30x30	0.2±0.0	2.8±0.4	5.0±1.0	6.8±0.9	9.5±1.7	12.5±1.8	11.7±3.3	9.9±2.0	7.4±1.1	4.6±1.0
40x40	0.5±0.0	14.3±1.8	28.4±3.5	45.7±5.5	63.1±11.0	72.8±12.5	73.4±9.4	59.4±9.8	46.1±4.3	22.4±2.6

Tabuľka 1: Priemerný čas 10 behov a odchýlka pre náhodné matice s rôznym pomerom jednotiek, 3 projekcie

diskrétnej tomografie na inštanciu problému splniteľnosti je potrebné zapísať obmedzenie kardinality (počet jednotiek) ako boolovskú formulu, tu sme dosiahli lepšie výsledky s jednoduchšou, priamočiarou konštrukciou. Hoci počet premenných a kláuz pri jednoduchšom zápise je vyšší, premenné nemajú medzi sebou zložité závislosti a SAT solver teda dokáže optimalizovať hľadanie riešenia.

[Park and Kwon, 2008] Park, S. and Kwon, G. (2008). Japanese puzzle as a sat problem. In *SEKE*, pages 543–548. Knowledge Systems Institute Graduate School.

[Ryser, 1957] Ryser, H. (1957). Combinatorial properties of matrices of zeros and ones. *Canadian Journal of Mathematics*, pages 371–377.

## Literatúra

[Bailleux and Boufkhad, 2003] Bailleux, O. and Boufkhad, Y. (2003). Efficient cnf encoding of boolean cardinality constraints. In *Principles and practice of constraint programming-CP 2003: 9th international conference, CP 2003, Kinsale, Ireland, September/October 2003: proceedings*, volume 2833, page 108. Springer Verlag.

[Barcucci et al., 1996] Barcucci, E., Del Lungo, A., Nivat, M., and Pinzani, R. (1996). Reconstructing convex polyominoes from horizontal and vertical projections. *Theoretical computer science*, 155(2):321–347.

[Batenburg, 2005] Batenburg, K. (2005). An evolutionary algorithm for discrete tomography. *Discrete applied mathematics*, 151(1-3):36–54.

[Blažek, 2010] Blažek, S. (2010). Binárna tomografia 2d a 3d objektov pomocou evolučných algoritmov. In Kelemen, J. and Kvasnička, V., editors, *Kognice a umělý život X*, pages 43–54. Slezská univerzita, Opava.

[Gale, 1957] Gale, D. (1957). A theorem on ows in networks. *Pacific Journal of Mathematics*, 7:1073–1082.

[Gardner et al., 1999] Gardner, R., Gritzmann, P., and Prangenberg, D. (1999). On the computational complexity of reconstructing lattice sets from their X-rays. *Discrete Mathematics*, 202(1-3):45–71.

[Herman and Kuba, 1999] Herman, G. and Kuba, A. (1999). *Discrete Tomography: Foundations, Algorithms, and Applications*. Birkhauser.

[Ist et al., 2006] Ist, I. L., Lynce, I., and Ouaknine, J. (2006). Sudoku as a sat problem. In *Proceedings of the 9th International Symposium on Artificial Intelligence and Mathematics, AIMATH 2006, Fort Lauderdale*. Springer.

# Preferred Answer Sets – Banned Generating Set Approach

Alexander Šimko\*

Supervisor: Ján Šefrānek†

Katedra aplikovanej informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

**Abstract:** Our goal is to develop a descriptive approach to preference handling in logic programs that always selects a preferred answer set when standard one exists. Such an approach does not satisfy second principle stated by Brewka and Eiter. In our previous work, we have proposed new principles (viewed as a replacement for the second principle) that enable us to solve problematic examples even under such conditions. But we were not fully successful in construction of an approach that would satisfy mentioned principles.

In this paper, we propose descriptive approach that satisfies our principles. It is based on the two ideas: (1) only preferences on rules generating different answer sets should be considered, and (2) a preferred rule that blocks should not be overridden by a non blocking preferred rule. Blocks of preferred rules are transferred to attacks between generating sets of answer sets. Then generating set that is attacked cannot generate preferred answer set.

We also propose a new principle that defines our understanding of preference. Change of preference on rules that do not generate any answer set does not change the set of all preferred answer sets.

*Keywords:* answer set programming, prioritized logic program, preference handling, common sense reasoning

## 1 Introduction

A concept of preference is present in a common sense reasoning in various forms. One can prefer some result over another, e.g., doctors and patients tend to prefer non invasive procedures over invasive ones. One can also prefer a rule that comes from a higher authority; e.g., in a law domain, constitutional law has a preference over financial law. Preferences are typically used to solve conflicts among rules. Having two applicable rules with contradictory effects we want to apply only preferred one.

In the last two decades logic programming has

emerged as a favourite framework for knowledge representation. Answer set semantics of logic programming is widely used in particular. It has also been explored how to understand a preference and how to incorporate it to answer set semantics. Various approaches have been proposed in literature.

Approaches to preference handling are traditionally divided into the two groups: prescriptive and descriptive. Prescriptive approaches (e.g., [Brewka and Eiter, 1999], [Delgrande et al., 2003], [Wang et al., 2000]) view preference on rules as an order in which rules are to be applied in a process of generating answer set. Descriptive approaches (e.g., [Sakama and Inoue, 2000], [Šefrānek and Šimko, 2011]) do not follow this view. Instead, they see preferences as a wish list one tries to satisfy [Delgrande and Schaub, 2000].

In answer set programming, each answer set describes an alternative view of the world. When considering a selective approach, we select some standard answer sets to be the preferred answer sets [Schaub and Wang, 2001]. We only pick from existing answer sets and do not generate new ones. On the other hand, preferred answer set does not have to be standard answer set when considering a non selective approach. All approaches mentioned in this paper are selective.

Principles for preference handling relate a preference on rules with a preference on answer sets. First two principles were proposed in [Brewka and Eiter, 1999]. But as they showed, the second principle is violated if we assume additional condition that there is a preferred answer set of a program if standard one exists<sup>1</sup>. This additional condition is not satisfied in semantics of [Brewka and Eiter, 1999], [Delgrande et al., 2003], [Wang et al., 2000]. In [Brewka and Eiter, 1999], the authors also proposed a relaxation of their approach, that always yields a preferred answer set when standard one exists. But this approach satisfies none of their principles [Brewka and Eiter, 1999].

In our previous work [Šefrānek and Šimko, 2011]

\*simko@fmph.uniba.sk

†sefranek@fmph.uniba.sk

<sup>1</sup>To be exact, an approach must also give intuitive results on a particular program. We show it in the proof of Theorem 6.



we have proposed both an approach to preference handling that always has a preferred answer set if standard one exists and new principles to preference handling that enable us to correctly solve problematic examples from literature. Unfortunately, mentioned work is not complete in a sense that there are technical problems regarding the satisfiability of one of our principles. Moreover, the whole approach is defined in terms of something we call argumentation structure and a collection of derivation rules (consisting of nine rules altogether). Later on we have realized that our argumentation structure represents a set of generating rules of an answer set and the whole approach can be simplified.

In this paper we propose descriptive approach to preference handling in extended logic programs under answer set semantics. Intuitively, the proposed approach is based on comparison of generating sets. It can be viewed as an improvement of [Šefránek and Šimko, 2011]. Rather than trying to create an approach that would be equivalent, we propose the similar approach that satisfies our principles, and is based on the same understanding of preference on rules. We also formulate a new principle that represents our understanding of preference in a logic program.

## 2 Preliminaries and Notation

We use language of extended logic program.

**Definition 1** (Atoms, Objective and Default literals). Let  $At$  be a set of atoms. The set of objective literals is  $Obj = At \cup \{\neg A : A \in At\}$ . Default literal is expression of the form  $not L$  where  $L \in Obj$ . Set of all default literals is  $Def = \{not L : L \in Obj\}$ . Set of all literals is  $Lit = Obj \cup Def$ .

Let  $S \subseteq Lit$  be set of literals.  $S^+ = S \cap Obj$  and  $S^- = S \cap Def$ .

**Definition 2** (Rule). A rule is expression of the form  $L \leftarrow L_1, L_2, \dots, L_n$ , where  $n \in \mathbb{N}$ ,  $L \in Obj$  and  $L_i \in Lit$  for  $0 < i \leq n$ .

If  $r$  is a rule  $head(r) = \{L\}$  is called head of rule and  $body(r) = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$  is called body of rule.

If  $r$  is a rule  $body(r)^+ = body(r) \cap Obj$ . If  $r$  is a rule  $body(r)^- = body(r) \cap Def$ .

**Definition 3** (Extended logic program). Extended logic program  $P$  is a finite set of rules.

For simplicity, we will use term logic program instead of extended logic program.

**Definition 4** (Contradictory literals). Two literals  $a, b \in Lit$  are contradictory iff  $a = \neg b$ .

**Definition 5** (Inconsistent and consistent set). Set  $S \subseteq Lit$  of literals is inconsistent iff there are contradictory literals  $a, b \in S$ .

Set  $S \subseteq Lit$  of literals is consistent iff it is not inconsistent.

**Definition 6** (Total set of literals). Set  $S \subseteq Lit$  of literals is total iff for all  $a \in Obj$  either  $a \in S$  or  $\neg a \in S$ .

**Definition 7** (Interpretation). Interpretation is total set of literals.

**Definition 8** (Satisfiability). Interpretation  $I$  satisfies rule  $r$  iff  $head(r) \in I$  if  $body(r) \subseteq I$ .

**Definition 9** (Model). Interpretation  $I$  is model of logic program  $P$  iff:

- $I$  satisfies every rule  $r \in P$ .
- $I$  is consistent or  $I = Obj$ .

**Definition 10**. Let  $r$  be a rule. Then  $r^+$  is  $head(r) \leftarrow body(r)^+$ .

If  $P$  is a logic program then  $P^+ = \{r^+ : r \in P\}$ .

**Definition 11** (Definite logic program). Logic program  $P$  is definite iff  $P = P^+$ .

**Definition 12** (Minimal model of a definite logic program). Let  $P$  be a definite logic program.

Let  $M_1, M_2$  be models of  $P$ . Then  $M_1 \sqsubseteq M_2$  iff  $M_1^+ \subseteq M_2^+$ .

$\mathcal{M}_0(P)$  is least model of  $P$  under  $\sqsubseteq$  ordering.

**Definition 13** (Gelfond-Lifschitz transformation).

Let  $R$  be a set of rules and  $I$  be an interpretation. Then  $R^I = \{r^+ : r \in R \wedge body(r)^- \subseteq I\}$ .

**Definition 14** (Answer set). Interpretation  $I$  is an answer set of logic program  $P$  iff  $I = \mathcal{M}_0(P^I)$ .

Set of all answer sets of logic program  $P$  is denoted as  $AS(P)$ .

**Definition 15** (Prioritized logic program). Prioritized logic program is tuple  $(P, \prec)$  where  $P$  is logic program and  $\prec \subseteq P \times P$  is strict partial order on  $P$ .

Relation  $\prec$  represents preference on rules. If  $r_2 \prec r_1$  we say that  $r_1$  is preferred over  $r_2$ .

**Definition 16** (Generating set). *Let  $P$  be a logic program,  $R \subseteq P$  be a set of rules and  $A \in AS(P)$  be an answer set of  $P$ .*

*$R$  is a generating set of  $A$  iff*

- $A = \mathcal{M}_0(R^A)$  and
- for all  $r \in R$  holds that  $\text{body}(r) \subseteq A$ .

*We also say that  $R$  generates  $A$ .*

*Set of all generating sets of answer set  $A$  is denoted as  $GS(A)$ .  $AGS(P) = \bigcup_{A \in AS(P)} GS(A)$  is set of all generating sets of all answer sets of logic program  $P$ .*

**Definition 17** (Generating rule). *Let  $P$  be a logic program.  $r \in P$  is generating rule iff  $r \in R$  for some  $R \in AGS(P)$ .*

*$AGR(P) = \bigcup_{R \in AGS(P)} R$  is set of all generating rules of all answer sets of logic program  $P$ .*

**Definition 18** (Blocking of rules). *Let  $P$  be a logic program and  $r_1, r_2 \in P$  be rules. If not  $\text{head}(r_1) \in \text{body}(r_2)$  then we say that  $r_1$  blocks  $r_2$ .*

### 3 Design Decisions

Prescriptive approaches see preference on rules as an order in which rules are to be applied in a process of generating answer set. Descriptive approaches do not use this view. Instead, they see preferences as a wish list one tries to satisfy [Delgrande and Schaub, 2000].

We also do not see preference as an order in which rules are to be applied. It is well known that stratified program induces natural order [Schaub and Wang, 2003]. It tells us which rule must be applied before another. Moreover, every non stratified program is transformed to stratified one during the Gelfond-Lifschitz transformation – the guess phase of answer set semantics. Rules that are filtered out in this transformation are not applicable in an answer set candidate. We note that rules, which pass this transformation for a given answer set, form a set of generating rules.

We understand this in the following way. There is no need to consider order between rules from the same generating set of an answer set. Such order is already defined. On the other hand, the order of rules not being a part of any generating set is irrelevant.

There is also another view. A set of preferred answer sets is subset of a set of standard answer sets in a

selective approach. It means that we only select preferred one among given candidates and do not generate new one. When we accept the principle that there must be a preferred answer set when standard one exists and program has only one answer set, it clearly must be preferred one. In such a program there is no need to consider preference on rules since there is only one candidate we can choose from. Preference turns to be interesting if we have rules that produce alternative results – multiple answer sets.

In general, prescriptive approaches do not guarantee existence of a preferred answer set if there is standard one [Delgrande et al., 2004]. This behaviour is due to the fact that a designer of knowledge base can specify preference incompatible with a natural order in which rules must to be applied.

In accordance with this we see another interpretation of preference. We understand preference  $r_1 \prec r_2$  as follows. When rules  $r_1$  and  $r_2$  lead to alternative results (answer sets), prefer one that uses rule  $r_2$ . But when rules participate on same result or one of them is inapplicable, preference does not matter.

Condition "when rules lead to alternative results" fits well into the concept of generating sets. Rules from same generating set produce same result. Alternative results are represented by different generating sets. Same result can also be represented by different generating sets. It does not cause complication. In fact, it enables us to reason about alternative derivations. That is why we understand selection of preferred answer sets as a comparison of generating sets.

In every logic program there is another relation on rules besides preference. It is blocking. When a head of a rule is default negated in body of another, we say that first one blocks second one. If we have such rules they cannot be part of the same generating set. Only by using such rules we can generate alternative answer sets. It turns out that concept of blocking together with preference is important. We refer to it as attack. It can be seen as a strong form of preference.

### 4 Informal Description

First, we informally describe our approach on the following example.

**Example 1.** *Consider classical penguin program:*

$r_1 : \text{fly} \leftarrow \text{bird}, \text{not } \neg \text{fly}$

$r_2 : \neg \text{fly} \leftarrow \text{penguin}, \text{not fly}$   
 $r_3 : \text{bird} \leftarrow \text{penguin}$   
 $r_4 : \text{penguin} \leftarrow$

with preference  $r_1 \prec r_2$ .

It has two answer sets  $A_1 = \{\text{penguin}, \text{bird}, \text{fly}\}$  and  $A_2 = \{\text{penguin}, \text{bird}, \neg \text{fly}\}$ .  $A_1$  is generated by rules  $R_1 = \{r_1, r_3, r_4\}$  and  $A_2$  is generated by rules  $R_2 = \{r_2, r_3, r_4\}$ .

Now we want to choose which answer sets are also preferred answer sets. We do it by comparing generating sets  $R_1$  and  $R_2$  that generate answer sets.

$r_2$  is preferred over  $r_1$  and  $r_2$  blocks  $r_1$ . We say that  $r_2$  attacks  $r_1$ . Since  $r_2 \in R_2$  and  $r_1 \in R_1$  we also say that  $R_2$  attacks  $R_1$ .

The main idea is that a generating set being attacked cannot generate a preferred answer set. Hence  $A_1$  is not preferred and  $A_2$  is.

This was a rather simple case. There are also complicated situations when generating sets mutually attack each other or form a cycle of attacks. We will address this issue in the following section.

## 5 Attacks

In this section we formalize the role of blocking in preference handling.

**Definition 19** (Attack of rules). Let  $\mathcal{P} = (P, \prec)$  be a prioritized logic program and  $r_1, r_2 \in P$  be rules. We say that  $r_1$  attacks  $r_2$  iff

- $r_1$  blocks  $r_2$  and
- $r_2 \prec r_1$ .

**Definition 20** (Attack of generating sets). Let  $\mathcal{P} = (P, \prec)$  be a prioritized logic program,  $R_1, R_2 \in \text{AGS}(P)$  be generating sets of some answer sets of  $P$  and  $r_1 \in R_1$ ,  $r_2 \in R_2$  be rules.

Attack from  $R_1$  to  $R_2$  via  $r_1$  and  $r_2$  is four-tuple  $(R_1, R_2, r_1, r_2)$  where  $r_1$  attacks  $r_2$ .

We also say that  $R_1$  attacks  $R_2$  via  $r_1$  and  $r_2$ . When rules are not important we also say that  $R_1$  attacks  $R_2$ .

Set of all attacks in prioritized logic program  $\mathcal{P}$  is denoted as  $\text{Attacks}(\mathcal{P})$ .

**Theorem 1.** Let  $\mathcal{P} = (P, \prec)$  be a prioritized logic program,  $R_1, R_2 \in \text{GS}(A)$  be generating sets of same answer set  $A \in \text{AS}(P)$  of  $P$ .

Then there does not exist rules  $r_1 \in R_1$  and  $r_2 \in R_2$  such that  $r_1$  attacks  $r_2$ .

*Proof.* Suppose there are such rules  $r_1$  and  $r_2$ . We assume that  $r_1$  attacks  $r_2$ . From that we have that  $\text{not head}(r_1) \in \text{body}(r_2)^-$ . But  $\text{head}(r_1) \in A$  so  $\text{not head}(r_1) \notin A$  and hence  $\text{body}(r_2)^- \not\subseteq A$ . Therefore  $r_2 \notin R_2$ . A contradiction.  $\square$

**Definition 21** (Set of attacks). Let  $\mathcal{P} = (P, \prec)$  be a prioritized logic program,  $R_1, R_2 \in \text{AGS}(P)$  be generating sets of some answer sets of  $P$ .

Set of attacks from  $R_1$  to  $R_2$  is set  $A(R_1, R_2) = \{(R_1, R_2, r_1, r_2) \in \text{Attacks}(\mathcal{P}) : r_1 \in R_1 \wedge r_2 \in R_2\}$ .

The main idea of our approach is that a generating set, which is attacked, cannot generate a preferred answer set. But there are situations when generating sets attack one another or form a cycle of attacks. In such situations we do not want to loose preferred answer sets. We need to decide which attacks are effective – ones that can prevent generating set from generating preferred answer set. We show it in Example 2.

**Example 2.** Consider the following prioritized logic program:

$r_1 : a \leftarrow \text{not } b, \text{not } c$   
 $r_2 : b \leftarrow \text{not } a, \text{not } c$   
 $r_3 : c \leftarrow \text{not } a, \text{not } b$   
 $r_4 : d \leftarrow \text{not } a, \text{not } b$

$r_4 \prec r_2 \prec r_1 \prec r_3$

It has three answer sets:  $A_1 = \{a\}, A_2 = \{b\}, A_3 = \{c, d\}$ . Each is generated by one generating set:  $R_1 = \{r_1\}, R_2 = \{r_2\}, R_3 = \{r_3, r_4\}$ .  $r_1$  attacks  $r_2$ .  $r_2$  attacks  $r_4$ .  $r_3$  attacks  $r_1$ . Hence  $A(R_1, R_2) \neq \emptyset, A(R_2, R_3) \neq \emptyset, A(R_3, R_1) \neq \emptyset$ .

If we accepted simplified idea that an attacked generating set cannot generate a preferred answer set there would be no preferred answer set. We can solve it by making attacks of attacked generating sets ineffective. Since every generating set is attacked, all attacks are ineffective and hence all answer sets are preferred.

Following definition introduces killer attacks. We use them to make a set of attacks ineffective.

**Definition 22** (Set of killer attacks). Let  $\mathcal{P} = (P, \prec)$  be a prioritized logic program,  $R_1, R_2 \in \text{AGS}(P)$  be generating sets of some answer sets of  $P$ .

Set of killer attacks of attacks from  $R_1$  to  $R_2$  is set  $K(R_1, R_2) = \{(R, R_1, r, r_1) \in \text{Attacks}(\mathcal{P}) : R \neq R_2\}$ .

Note that in definition of killer attacks  $K(R_1, R_2)$  we do not consider attacks from  $R_2$  to  $R_1$ . We want to handle mutual attacks between two generating sets separately. We compare two generating sets based on number of attacks between them.

**Definition 23** (Effective and ineffective set of attacks). *Let  $\mathcal{P} = (P, \prec)$  be a prioritized logic program,  $R_1, R_2 \in \text{AGS}(P)$  be generating sets of some answer sets of  $P$ .*

*Set of attacks  $A(R_1, R_2)$  is ineffective iff  $A(R_1, R_2) = \emptyset$  or  $|A(R_1, R_2)| \leq |A(R_2, R_1)|$  or  $K(R_1, R_2) \neq \emptyset$ .*

*Set of attacks  $A(R_1, R_2)$  is effective iff it is not ineffective.*

Definition of attack effectiveness based on number of attacks is a heritage of our former approach [Šefránek and Šimko, 2011]. Motivation was to develop compatible semantics defined in terms of generating sets and to satisfy principles for preference handling.

**Corollary 1.** *Set of attacks  $A(R_1, R_2)$  is effective iff  $A(R_1, R_2) \neq \emptyset$  and  $|A(R_1, R_2)| > |A(R_2, R_1)|$  and  $K(R_1, R_2) = \emptyset$ .*

Next we give theorems that shed a light on relations between attacks.

**Theorem 2.** *Let  $\mathcal{P} = (P, \prec)$  be a prioritized logic program,  $R_1, R_2 \in \text{AGS}(P)$  be generating sets of some answer sets.*

*If  $A(R_1, R_2) \neq \emptyset$  then for every  $R_3 \neq R_1$  holds that  $K(R_2, R_3) \neq \emptyset$ .*

*Proof.* Follows directly from definitions 21 and 22.  $\square$

**Theorem 3.** *Let  $\mathcal{P} = (P, \prec)$  be a prioritized program,  $R_1, R_2 \in \text{AGS}(P)$  be generating sets of some answer sets.*

*If  $A(R_1, R_2)$  is effective then for every  $R_3 \neq R_1$  holds that  $A(R_2, R_3)$  is ineffective.*

*Proof.*  $A(R_1, R_2)$  is effective, so  $A(R_1, R_2) \neq \emptyset$ . From Theorem 2 we have that  $K(R_2, R_3) \neq \emptyset$ . Ineffectiveness of  $A(R_2, R_3)$  follows directly from definition 23.  $\square$

**Theorem 4.** *Let  $\mathcal{P} = (P, \prec)$  be a prioritized logic program,  $R_1, R_2 \in \text{AGS}(P)$  be generating sets for some answer sets.*

*Then  $A(R_1, R_2)$  is ineffective or  $A(R_2, R_1)$  is ineffective.*

*Proof.* Suppose both  $A(R_1, R_2)$  and  $A(R_2, R_1)$  are effective. Then  $|A(R_1, R_2)| > |A(R_2, R_1)|$  and  $|A(R_2, R_1)| > |A(R_1, R_2)|$ . A contradiction.  $\square$

## 6 Preferred Answer Sets

In this section we define preferred answer sets. As stated earlier, effective attacks prevent a generating set from generating a preferred answer set.

**Definition 24** (Banned and permitted generating set). *Let  $\mathcal{P} = (P, \prec)$  be a prioritized logic program and  $R \in \text{AGS}(P)$  be generating set of some answer set of  $P$ .*

*$R$  is banned iff there exists generating set  $Q \in \text{AGS}(P)$  of some answer set of  $P$  such that  $A(Q, R)$  is effective.*

*$R$  is permitted iff it is not banned.*

**Definition 25** (Preferred answer set). *Let  $\mathcal{P} = (P, \prec)$  be a prioritized logic program,  $A \in \text{AS}(P)$  be an answer set of  $P$ .*

*$A$  is preferred answer set iff there exists permitted generating set of  $A$ .*

*Set of all preferred answer sets of  $\mathcal{P}$  is denoted as  $\text{PAS}(\mathcal{P})$ .*

## 7 Principles

Principles shed a light on understanding of preference handling. They relate a preference on rules with a preference on answer sets. Principles I and II were formulated in [Brewka and Eiter, 1999]. Principle III reproduces condition from Proposition 6.1 from [Brewka and Eiter, 1999]. Principles IV and V are from [Šefránek and Šimko, 2011]. Additionally, we introduce new Principle VI.

We do not accept nor satisfy Principles I and II. We provide them for completeness. Discussion why not to accept Principle II is presented in [Šefránek and Šimko, 2011]. For Principle I see discussion under Theorem 5.

**Principle I.** *Let  $\mathcal{P} = (P, \prec)$  be a prioritized logic program,  $A_1, A_2 \in \text{AS}(P)$  be two answer sets of logic*

program  $P$ . Let  $R \subset P$  be a set of rules and  $d_1, d_2 \notin R$  are rules. Let  $A_1, A_2$  be generated by the rules  $R \cup \{d_1\}$  and  $R \cup \{d_2\}$ , respectively. If  $d_1$  is preferred over  $d_2$  then  $A_2$  is not a preferred answer set of  $\mathcal{P}$ .

**Principle II.** Let  $A$  be a preferred answer set of a prioritized logic program  $\mathcal{P} = (P, \prec)$  and  $r$  be a rule such that  $\text{body}(r)^+ \not\subseteq A$ . Then  $A$  is preferred answer set of  $(P \cup \{r\}, \prec')$  for  $\prec'$  such that  $\prec' \cap (P \times P) = \prec$ .

Principle III expresses one of our main goals. There should be a preferred answer set when standard one exists.

**Principle III.** Let  $\mathcal{P} = (P, \prec)$  be a prioritized logic program.

If  $AS(P) \neq \emptyset$  then  $PAS(\mathcal{P}) \neq \emptyset$ .

Principle IV expresses our position: the use of preference relation is focused on the blocking of less preferred rules and not on their application [Šeřfránek and Šimko, 2011].

**Definition 26** (Warranted generating set). Let  $\mathcal{P} = (P, \prec)$  be a prioritized logic program. Let  $R \in AGS(P)$  be a generating set of some answer set of  $P$ .

We say that  $R$  is warranted iff there does not exist  $Q \in AGS(P)$  such that  $Q$  attacks  $R$ .

**Principle IV.** Let  $\mathcal{P} = (P, \prec)$  be a prioritized logic program,  $A \in AS(P)$  be an answer set of  $P$ .

If for every generating set  $R \in GS(A)$  of  $A$  holds that there exists some generating set  $Q \in AGS(P)$  such that  $Q$  is warranted and  $Q$  attacks  $R$  then  $A$  is not preferred answer set of  $\mathcal{P}$ .

Principle V expresses the condition when an answer set is preferred one.

**Principle V.** Let  $\mathcal{P} = (P, \prec)$  be a prioritized logic program,  $A \in AS(P)$  be an answer set of  $P$ .

If there exists warranted generating set  $R \in GS(A)$  of  $A$  then  $A$  is preferred answer set of  $\mathcal{P}$ .

Principle VI expresses our understanding of preference on rules. If we change preference on rules that are not part of any generating set then set of preferred answer sets doesn't change.

**Principle VI.** VI Let  $\mathcal{P} = (P, \prec)$  and  $\mathcal{P}' = (P, \prec')$  be prioritized logic programs such that  $\prec \cap (AGR(P) \times AGR(P)) = \prec' \cap (AGR(P) \times AGR(P))$ . Then  $PAS(\mathcal{P}) = PAS(\mathcal{P}')$

## 8 Properties of Preferred Answer Sets

In this section we state and prove satisfiability of principles.

**Theorem 5.** Principle I is not satisfied.

*Proof.* Consider prioritized logic program from Example 2.

It has three answer sets:  $A_1 = \{a\}, A_2 = \{b\}, A_3 = \{c, d\}$ . Each is generated by one generating set:  $R_1 = \{r_1\}, R_2 = \{r_2\}, R_3 = \{r_3, r_4\}$ .  $r_1$  attacks  $r_2$ .  $r_2$  attacks  $r_4$ .  $r_3$  attacks  $r_1$ . But every attack  $A(R_i, R_j)$ , for  $1 \leq i, j \leq 3$ , is ineffective. Hence every  $A_i$ , for  $1 \leq i \leq 3$  is preferred. A contradiction with principle I –  $A_2$  shouldn't be preferred.  $\square$

The reason why Principle I is not satisfied is that we use a global view. In a previous example, only generating sets  $R_1$  and  $R_2$  are interesting from the viewpoint of Principle I. But they are not the only generating sets. Altogether there are four generating sets that form a cycle of attacks. Our solution in such situations is to prefer every answer set rather than to prefer none. Thus we choose to favour Principle III over Principle I.

**Theorem 6.** Principle II is not satisfied.

*Proof.* Consider a following situation from [Brewka and Eiter, 1999]. We have a program:

$$\begin{aligned} r_1 : c &\leftarrow \text{not } b \\ r_2 : b &\leftarrow \text{not } a \end{aligned}$$

$$r_2 \prec r_1$$

It has only one answer set  $A_1 = \{b\}$  generated by  $R_1 = \{r_2\}$ . There is no attack to  $r_2$ , so  $A_1$  is preferred.

When we add rule  $r_3 : a \leftarrow c$  and preference  $r_1 \prec r_3$  program has two answer sets:  $A_1$  and  $A_2 = \{a, c\}$ .  $A_2$  is generated by  $R_2 = \{r_1, r_3\}$ . But now, there is an attack:  $r_3$  attacks  $r_2$ , and hence  $A_2$  is no longer preferred. A contradiction.  $\text{body}(r_3)^+ \not\subseteq A_1$  but  $A_1$  is not preferred.  $\square$

**Theorem 7.** Principle III is satisfied.

*Proof.* Assume there is no preferred answer set of  $\mathcal{P}$ . Every generating set  $R$  is then banned. For every  $R$  there exists  $Q$  such that  $A(Q, R)$  is effective. From

this we have that there is a cycle of generating sets with respect to attack:  $R_1, R_2, \dots, R_n$  where  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , and  $R_i \neq R_j$  for  $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ , and  $A(R_i, R_{i+1})$  and  $A(R_n, R_1)$  are effective sets of attacks for  $1 \leq i < n$ .

If  $n = 2$  then we have that  $A(R_1, R_2)$  and  $A(R_2, R_1)$  are effective. A contradiction with Theorem 4.

If  $n > 2$  then we have that  $A(R_1, R_2)$  and  $A(R_2, R_3)$  are effective. A contradiction with Theorem 3.  $\square$

**Theorem 8.** *Principle IV is satisfied.*

*Proof.* Since  $Q$  attacks  $R$  then  $A(Q, R) \neq \emptyset$ . Also  $Q$  is warranted, so  $A(Q, R)$  is effective. Hence  $R$  is banned. All  $R$ s are banned. Therefore  $A$  is not preferred answer set of  $\mathcal{P}$ .  $\square$

**Theorem 9.** *Principle V is satisfied.*

*Proof.*  $R$  is warranted so there is no attack to  $R$ . Hence  $R$  must be permitted and consequently  $A$  is preferred answer set of  $\mathcal{P}$ .  $\square$

**Theorem 10.** *Principle VI is satisfied.*

*Proof.* Preferred answer sets are defined in terms of attacks between generating sets of answer sets. If we change preference on rule that is not part of any generating set  $\text{Attacks}(\mathcal{P})$  does not change.  $\square$

## 9 Examples

In this section we show that despite the fact that our approach does not satisfy Principles I and II we are able to correctly solve problematic examples from literature (due to the Principle IV).

**Example 3.** *Consider the following prioritized logic program (Example 5.2 from [Brewka and Eiter, 1999], problem with Rintanen's approach):*

$$\begin{aligned} r_1 : b \leftarrow a, \text{not } \neg b \\ r_2 : \neg a \leftarrow \text{not } a \\ r_3 : a \leftarrow \text{not } \neg a \end{aligned}$$

$$r_3 \prec r_2 \prec r_1$$

*There are two answer sets  $A_1 = \{\neg a\}$  and  $A_2 = \{a, b\}$  generated by generating sets  $R_1 = \{r_2\}$  and  $R_2 = \{r_1, r_3\}$ , respectively.*

*[Brewka and Eiter, 1999] use Principle II to solve this problem. On the other hand we use Principle*

*IV. It yields  $A_2$  to be not preferred:  $r_2$  attacks  $r_3$ .  $R_1$  is warranted and attacks  $R_2$ . (Alternatively only  $A(R_1, R_2)$  is effective.)*

**Example 4.** *Consider the following prioritized logic program (Example from Proposition 6.6 from [Brewka and Eiter, 1999]):*

$$\begin{aligned} r_1 : a \leftarrow \text{not } \neg a \\ r_2 : \neg a \leftarrow \text{not } a \\ r_3 : \neg a \leftarrow \text{not } c, a \\ r_4 : c \leftarrow \text{not } \neg c \\ r_5 : \neg a \leftarrow \text{not } b, a \\ r_6 : b \leftarrow \text{not } b \end{aligned}$$

$$r_6 \prec r_5 \prec r_4 \prec r_3 \prec r_2 \prec r_1$$

*It has two answer sets  $A_1 = \{a, b, c\}$  and  $A_2 = \{\neg a, b, c\}$  generated by generating sets  $R_1 = \{r_1, r_4, r_6\}$  and  $R_2 = \{r_2, r_4, r_6\}$ , respectively.*

*There is only one attack among the rules:  $r_1$  attacks  $r_2$ .  $A(R_1, R_2)$  is effective.  $R_2$  is banned,  $R_1$  is permitted and consequently only  $A_1$  is preferred. Again, problem is solved due to Principle IV.*

*The approach of weakly preferred answer sets from [Brewka and Eiter, 1999] does not work on this example.  $A_1$  is preferred in their semantics.*

## 10 Problems

We have also identified class of situations our approach is unable to solve. The program from Example 5 represents this class.

**Example 5.** *Consider the following prioritized logic program:*

$$\begin{aligned} r_1 : c \leftarrow a \\ r_2 : d \leftarrow b \\ r_3 : a \leftarrow \text{not } b \\ r_4 : b \leftarrow \text{not } a \end{aligned}$$

$$r_2 \prec r_1$$

*It has two answer sets  $A_1 = \{a, c\}$  and  $A_2 = \{d, b\}$  generated by generating sets  $R_1 = \{r_1, r_3\}$  and  $R_2 = \{r_2, r_4\}$ , respectively.*

*Since  $r_1$  does not block  $r_2$  there is no way to form an attack. Hence every generating set is permitted and consequently both answer sets are preferred.*

*But one would expect a different result. There is only one preference between rules. So there cannot be any "collision" between preferences. Furthermore, the preference is specified between rules from different generating sets. Hence the answer set generated by the preferred rule should be preferred.*

This kind of behaviour is caused by the strong focus on attacks. Now, only preferences that form attacks are considered. But from definition of attack on rules we see that we can understand it as a "special case" of preference (strong preference). A possible direction how to modify our approach is to consider both regular preferences and attacks giving more priority to attacks.

## 11 Conclusion and Future Work

In this paper, we have presented the descriptive approach to preference handling in extended logic programs. It is based on two ideas: (1) only preferences on rules generating different answer sets should be considered, and (2) a preferred rule that blocks should not be overridden by a non blocking preferred rule. Blocks of preferred rules are transferred to attacks between generating sets of answer sets. Then a generating set that is attacked cannot generate a preferred answer set. The presented approach is based on our previous work [Šefránek and Šimko, 2011].

Our approach always selects preferred answer set when standard one exists (third principle). We do not satisfy first and second principle from [Brewka and Eiter, 1999]. On the other, hand we satisfy fourth and fifth principle from [Šefránek and Šimko, 2011] that allows us to solve problematic situations. We have also formulated sixth principle that expresses our understanding of preference: preferences on non generating rules do not matter.

As shown in section 10 there is also space for improvements. Our approach is too strict in a sense that it only considers preferences on blocking-blocked pairs of rules. We would like to refine in order to be able to handle broader class of problems.

## References

- [Brewka and Eiter, 1999] Brewka, G. and Eiter, T. (1999). Preferred answer sets for extended logic programs. *Artificial Intelligence*, 109(1-2):297–356.
- [Delgrande et al., 2003] Delgrande, J., Schaub, T., and Tompits, H. (2003). A framework for compiling preferences in logic programs. *Theory and Practice of Logic Programming*, 3(2):129–187.
- [Delgrande et al., 2004] Delgrande, J., Schaub, T., Tompits, H., and Wang, K. (2004). A classification and survey of preference handling approaches in non-monotonic reasoning. *Computational Intelligence*, 20(2):308–334.
- [Delgrande and Schaub, 2000] Delgrande, J. P. and Schaub, T. (2000). Expressing preferences in default logic. *Artificial Intelligence*, 123(1-2):41–87.
- [Sakama and Inoue, 2000] Sakama, C. and Inoue, K. (2000). Prioritized logic programming and its application to commonsense reasoning. *Artificial Intelligence*, 123(1-2):185–222.
- [Schaub and Wang, 2001] Schaub, T. and Wang, K. (2001). A comparative study of logic programs with preference. In *IJCAI*, pages 597–602.
- [Schaub and Wang, 2003] Schaub, T. and Wang, K. (2003). A semantic framework for preference handling in answer set programming. *Theory and Practice of Logic Programming*, 3(4):39.
- [Šefránek and Šimko, 2011] Šefránek, J. and Šimko, A. (2011). Warranted derivation of preferred answer sets, <http://kedrigern.dcs.fmph.uniba.sk/reports/>. Technical Report TR-2011-027, Comenius University, Faculty of Mathematics, Physics, and Informatics.
- [Wang et al., 2000] Wang, K., Zhou, L., and Lin, F. (2000). Alternating fixpoint theory for logic programs with priority. In *Computational Logic*, pages 164–178.

# Yon—design and implementation of a new programming language (Extended Abstract)

Michal Antonič\*

Supervisor: Andrej Blaho†

Katedra aplikovanej informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

Yon is a new multi-paradigm programming language with type inference. The design of the language was influenced by many older programming languages, namely Objection [Antonič, 2009], Smalltalk, Self, Python, Pascal, Javascript, C, Haskell and Objective-C (listed in decreasing order of their impact).

Yon supports three major programming paradigms: object-oriented programming, functional programming and traditional imperative (structured) programming. Every value in Yon is a first-class object, which makes it a pure object-oriented programming language. It supports higher-order functions very well and allows users to write programs using a familiar syntax inspired by classic structured languages. Yon also features automatic garbage collection, duck typing, lexical closures, tail call elimination, coroutines, lazy lists (via generators), properties, operator overloading, functors, static typing, type inference and optional type annotations.

As many modern programming languages, Yon is neither purely compiled nor an entirely interpreted language. Instead, the source code is first compiled to a bytecode, which is then interpreted by a custom virtual machine. Both the compiler and the virtual machine were written in C++ from scratch. Moreover, Yon also sports a type checker written in Yon itself.

The language tries to combine some of the best properties of both static and dynamic languages, namely static error checking, implicit types, duck typing and other high-level features. This means that programs written in Yon contain very few explicit type annotations and may use duck typing, among other features. Yet, these programs are fully statically type checked, providing compile-time error messages.

The implementation of the type checker of Yon is based on the Cartesian Product Algorithm [Agesen, 1995](CPA). CPA views the type inference

process as a constraint satisfaction problem. The type checker of Yon makes several contributions to the original algorithm, namely the adaptation to an entirely different programming language, support for error reporting and handling of explicit type annotations. While the CPA used only a single kind of type constraint, Yon introduces several kinds of parameterized type constraints in order to support some of the language features.

The type checker of Yon is capable of analyzing its own source code and even found a few bugs in itself in the process. To provide the infrastructure for the type checker, the scanner (C++, 700 lines, 104 type annotations) and the parser (C++ / 930 / 187) of the language have also been re-implemented in Yon itself. Not only are the Yon re-implementations of the scanner (Yon / 240 / 6) and the parser (Yon / 530 / 18) shorter, they also require much less type annotations. Additionally, the type checker also performs null-analysis, which catches some of the problems associated with null references at compile time.

The type information is not yet used for performance optimizations. Nevertheless, even without them, Yon appears to be faster than both Python and Ruby in preliminary benchmarks. The future work includes generational garbage collector, a better support for data polymorphism in the type checker (as suggested by [Salib, 2004]) and a complete migration to a Yon-based compiler.

## References

- [Agesen, 1995] Agesen, O. (1995). The cartesian product algorithm - simple and precise type inference of parametric polymorphism.
- [Antonič, 2009] Antonič, M. (2009). Objection - návrh a implementácia nového programovacieho jazyka.
- [Salib, 2004] Salib, M. (2004). Starkiller: A static type inferencer and compiler for python.

\*misoantonich@gmail.com

†blaho@fmph.uniba.sk



# Flash Mob Like Crowd Motion Control (Extended Abstract)

Jana Dadová\*

Supervisor: Andrej Ferko†

Department of algebra, geometry and didactics of mathematics, Faculty of mathematics, physics and informatics,  
Comenius University, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava,

This paper presents an approach for a motion control in a group. We use cellular automaton for this control and present situation where it could be shown. For our purpose we have chosen Flash Mob situation, which is phenomenon of the 21st century [Duran, 2006]. Definition of a Flash Mob according to the MacmillanDictionary is *to suddenly gather in a public place, do something for a short time, and quickly go away again*. Slightly different definition could be also applied.

We refer to the Flash Mob situation where group of informed people suddenly gather in the public space and start to move evenly. Rest of the group starts to move the same way after some time. Movement of an individual depend on the surrounding people. Principles of social networking include behavior of an individual affected by the group and this principle is also used in Flash mob situation.

For the automatic definition of a group animation we use cellular automaton as a system that has various uses [Wolfram, 2002]. It could be successfully used for the group behavior control in emergency situations [Wang et al., 2010]. Our solution is the same in the meaning of group control, but different, because we not define only behavior but also motion itself. In Flash Mob situation, motion and behavior are highly connected, because behavior of the group defines how individuals move.

Moreover we need to create database of the motions and define them manually. Afterwards we could join different motions to create one longer. Smooth motion is left to the future work. By now, motions need to start and end in the same pose so there are no jumps in the spatial properties of the motion, but still could be in the temporal.

To use cellular automaton as a control for the group we associated cells of an automaton to the individuals in a way that state of the cell is mapped to the motion. Position of an individual in the space does not need

to be the same as in the automaton, but spatial relationship of the cells and position in the 3d space need to be the same. If this condition is not satisfied relationships are omitted and whole behavior and motion will not be Flash Mob-like.

At first there are some seeds - cells that are occupied by the informed person, that will move alike. Other cells has some random state - this means that these individuals move with another motion. In this state not only stated to the cells are set, but also orientation to the individuals is set. Informed cells are oriented in the same direction, to create uniform motion.

In each other stage we calculate number of informed cells in Moore's neighborhood (8-neighborhood) that are in the Field Of View (this depend on the orientation). If there is one informed than in the next step cell is changed to the informed. If there are enough informed cells, after some time whole group will be informed. The exact number that is needed for the believable behavior is left for the further discussion as is the lowest number needed for the control that will lead to only informed cells.

In conclusion we presented idea of group motion control for the flash mob situation. There are still problems left for the further discussion. These problems include better rules and possible solution of implementation problems.

## References

- [Duran, 2006] Duran, A. (2006). Flash mobs: Social influence in the 21st century. *Social Influence*, 1(4):301–315.
- [Wang et al., 2010] Wang, D. et al. (2010). A cellular automata based crowd behavior model. In *Proceedings of AICI'10: Part II*, pages 218–225, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag.
- [Wolfram, 2002] Wolfram, S. (2002). *A New Kind of Science*. Wolfram Media.

\*dadova@sccg.sk

†ferko@sccg.sk

# Prenos pohybu medzi artikulovanými štruktúrami (rozšírený abstrakt)

Roman Franta\*

Katedra informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

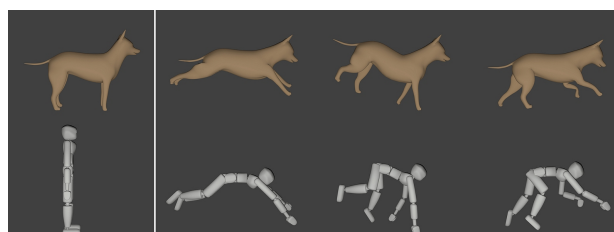
V práci sa zaoberáme návrhom a implementáciou riešenia pre prenos animovaného pohybu medzi artikulovanými štruktúrami. Sú to štruktúry zložené z postupnosti pevných častí, ktoré sú medzi sebou prepojené a v každom spojení je možné časťami otáčať. V práci riešime problém adaptácie pohybu z jednej artikulovanej štruktúry, ktorej pohyb bol vytvorený metódou skeletálnej animácie, na druhú štruktúru, ktorá má totožnú topológiu, avšak odlišné fyzické parametre segmentov. Takéto riešenie poskytuje animátorom možnosť recyklácie už vytvorených pohybov, čo znamená zjednodušenie práce pri vytváraní skeletálnych animácií.

Všeobecný problém adaptácie animovaného pohybu z jednej postavy na druhú ako prvý definoval Michael Gleicher [1]. Väčšina publikovaných prác z tejto oblasti sa zaoberá predovšetkým prenosom pohybu z dát získaných z pohybov reálnych štruktúr na virtuálne štruktúry[2, 3] a nie prenosom medzi dvomi virtuálnymi štruktúrami ako v našom prípade. V skutočnosti však ide o veľmi podobný problém, pretože pri oboch spôsoboch sme schopní pohyb vyjadriť rovnakým typom dát. I keď sú kostry oboch objektov izomorfné, pohyb jednej nemusí byť triviálne aplikovateľný na druhú a preto môže potrebovať nejaký druh adaptácie. Dobré adaptácie zachovávajú dôležité aspekty pohybu a zanedbávajú tie menej dôležité.

Väčšina publikovaných riešení je výpočtovo a algoritmicke pomerne náročná a ich použitie je často podmienené zadávaním veľkého množstva vstupných podmienok pre adaptáciu pohybu. Navyše, ich implementácie nie sú bežne používateľom prístupné pre použitie. Preto bolo naším cieľom vytvoriť jednoduchšie riešenie prenosu pohybu medzi artikulovanými štruktúrami s izomorfnými kostrami, ktoré zachováva základné vlastnosti pohybu a je prístupné a využiteľné pre čo najväčší okruh používateľov.

V tejto implementácii prenos pohybu prebieha vo viacerých fázach. Prvou je analýza prenášaného pohybu. Nasleduje základný prenos, ktorého úlohou je kosťu cieľového objektu upraviť do polohy, v ktorej kosti navzájom zvierajú uhly totožné s

uhľami medzi zodpovedajúcimi kosťami zdrojového modelu. Po tejto fáze sa preverí, či jednotlivé časti cieľového modelu navzájom nepenetrujú a v prípade potreby sa rotácie zodpovedajúcich kostí upraví, aby sa takýmto nežiaducim artefaktom predišlo. V poslednej fáze sa upraví poloha objektu tak, aby bol v správnej vzdialenosti od podlahy. Taktiež sa tu prevedú úpravy polôh a rotácií častí cieľového modelu v závislosti od ich dôležitosti [2]. Faktorom ovplyvňujúcim, nakoľko sa poloha cieľových kostí bude prispôsobovať polohe kostí v zdrojovom modeli, je v tomto prípade vzdialenosť týchto kostí od výškovej úrovne podlahy v scéne. Naše riešenie je implementované v skriptovacom jazyku Python, konkrétne v jeho aplikačnom programovom rozhraní pre modelovací a animačný nástroj Blender, čo zaručuje jeho prístupnosť pre široký okruh používateľov.



Obr. 1: Ukážka výsledkov prenosu

## Literatúra

- [1] M. Gleicher, "Retargetting motion to new characters," in *Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, SIGGRAPH '98*, (New York, NY, USA), pp. 33–42, ACM, 1998.
- [2] H. J. Shin, J. Lee, S. Y. Shin, and M. Gleicher, "Computer puppetry: An importance-based approach," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 20, pp. 67–94, 2001.
- [3] K.-J. Choi and H.-S. Ko, "On-line motion retargetting," *Journal of Visualization and Computer Animation*, vol. 11, pp. 223–235, 1999.

\*roman.franta@gmail.com

# Rekonštrukcia historickej udalosti s využitím zmiešanej reality (rozšírený abstrakt)

Zuzana Haladová

Katedra aplikovanej informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

Zmiešaná realita je v súčasnosti jednou z najrýchlejších sa rozvíjajúcich oblastí počítačovej grafiky. S tým súvisí aj vzrastajúca popularita aplikácií zmiešanej reality v oblasti múzejníctva a zachovania kultúrneho dedičstva. Táto práca prezentuje rekonštrukciu historickej udalosti, ktorá pozostáva z pridania virtuálneho ohňa k papierovému modelu zámku. Aplikácia prezentuje požiar Bojnického zámku v roku 1950. Hardvér potrebný pre spustenie aplikácie je webkamera, ktorá zaznamenáva scénu so zámkom a počítač, ktorý dostáva záznam z kamery, registruje ho a v reálnom čase produkuje zmiešanú realitu, ktorú zobrazuje na monitore.

Prvým krokom vo vývoji práce bolo vytvorenie virtuálneho 3D modelu papierového zámku, ktorý je potrebný pri registrácii videozáznamu reálneho zámku a 3D virtuálneho ohňa. Na vytvorenie virtuálneho modelu bola použitá metóda Tomáša Kovačovského [2] SMISS (Scalable Multifunctional Indoor Scanning System). Najskôr bol model zoskennovaný zo 4 strán a boli vytvorené mračná bodov pre každý pohľad. Tieto mračná boli potom zlúčené v 3D modelovacom softvéri a bol vytvorený virtuálny 3D model.

V ďalšom kroku boli navrhnuté 2 metódy na registráciu modelu. Prvá metóda používa na určenie vonkajších parametrov kamery čierno biele markery, tradične používané v zmiešanej realite, pripevnené k základni hradu. Druhá metóda je založená na lokálnych príznakoch invariálnych k afinným transformáciám. V oboch metódach je predpoklad predkalibrovanej kamery so známymi vnútornými parametrami. Na určenie relatívnej pozície kamery voči modelu potrebujeme detekovať 4 koplanárne rohy markeru, alebo aspoň 3 body v druhej metóde.

Metóda založená na markeroch bola prvý raz použitá v práci J. Rekimota [4] a je pri nej kľúčový výber umiestnenia a počtu markerov. Pre korektnú registráciu je tiež dôležité, aby sa na každom zábere videozáznamu vyskytoval aspoň jeden celistvý marker. Výhoda tejto metódy spočíva v jej robustnosti a rýchlosti. Najväčšou nevýhodou je fakt, že markery pôsobia rušivo na modely historického zámku a kvôli

viditeľnosti markerov na videu je nutné snímať zámok zo vzdialenosti aspoň 0,6 metra od jeho stredu.

Druhý prístup používa párovanie príznakov medzi zábermi z videozáznamu a databázou kľúčových objektov. Databáza pozostáva z kľúčových bodov detekovaných na fotografiách vybraných častí zámku so známou polohou na virtuálnom 3D modeli (korešpondujúce pozície boli určené manuálne). Párovací proces zahŕňa detekciu a popis kľúčových bodov (KP) a párovacej fáze. V práci sme sa rozhodli testovať 2 rôzne techniky SIFT [1] a SURF [3]. Obe metódy pôvodne neboli vyvinuté pre párovanie v reálnom čase, ale v posledných rokoch sa v rôznych úpravách používajú v aplikáciách zmiešanej reality. Výhodou metódy je možnosť spustenia aplikácie pre papierový model bez pridávania akýchkoľvek značiek a markerov. Nevýhodou je zložitosť a tiež nutnosť vytvoriť databázu kľúčových objektov.

Cieľom ďalšej fáze projektu je vytvorenie kompletnej aplikácie, komplexná validácia navrhnutých registračných metód a výber najlepšej z nich. Vytvorenie ohňa a jeho správna registrácia v 3D modeli a následne vo videu budú vykonané v poslednej fáze.

## Literatúra

- [1] Herbert Bay and *et al.* Speeded-up robust features (surf). *Computer Vision and Image Understanding*, 110(3):346 – 359, 2008. Similarity Matching in Computer Vision and Multimedia.
- [2] Tomas Kovacovsky. Smiss - scalable multifunctional indoor scanning system. In *SVK FMFI UK, Bratislava*, 2010.
- [3] David G. Lowe. Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International Journal of Computer Vision*, 60(2):91–110, 2002.
- [4] J. Rekimoto. Matrix: A realtime object identification and registration method for augmented reality. *Asia-Pacific Computer and Human Interaction*, 0:63, 1998.

# Cued Speech Recognition Method in Video (Extended Abstract)

Petra Heribanova<sup>1\*</sup>  
supervisor: Jaroslav Polec<sup>2‡</sup>

<sup>1</sup> Department of Algebra, Geometry and Didactics of Mathematics, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

<sup>2</sup> Department of Telecommunications, FEI STU, Ilkovičova 3 , 812 19 Bratislava

*This paper discusses the cued speech and fingers alphabet recognition methods in video. There are the criteria for sentence intelligibility according to answers of testing subjects (deaf people). Additionally, we define the criteria for consonant sign recognizability in single-handed finger alphabet (dactyl) analogically to acoustics. From the results we construct the minimum coded bit-rate recommendations for every spatial resolution.*

Cued speech is a specific gesture language that is used for communication between deaf people. Finger alphabet (single-handed and double-handed) is a system of finger and movement configurations that represent alphabetic characters [Hefty, 2009].

Similarly as in [Makáň, 1995], we can explore the intelligibility of video recordings: sentence and word intelligibility using gestures, while logatom and consonant recognizability using the signs of finger alphabet.

[Mordelová, 2010] shows a new objective method for examining the sentence intelligibility (as used in telephonometry for speech sentence articulation) with use of subjective ACR method (full categorical evaluation). In tests is used 30 sample videos coded by H.264 codec with various bit-rates and various speed of cued speech (slow, normal, fast).

Conversely, in special cases one needs to use finger alphabet to address the meaning. We shows a new objective method for examining the logatom recognizability (as used in telephonometry for speech sound articulation) with a use of subjective ACR method (full categorical evaluation). In logatom recognizability evaluation we use artificial monosyllabic words without meaning (logatoms) to mitigate people's tendency to correct the incorrectly understood consonants or words according to the meaning. We create so-called "sign logatoms" – one sign in finger alphabet represents one speech sound in logatom. We use another 12 sample videos coded by H.264 codec with various bit-rates in four different video formats.

See Fig. 1, the result in single-handed finger alphabet used by children. Minimal video transfer speed depends on video format settings.

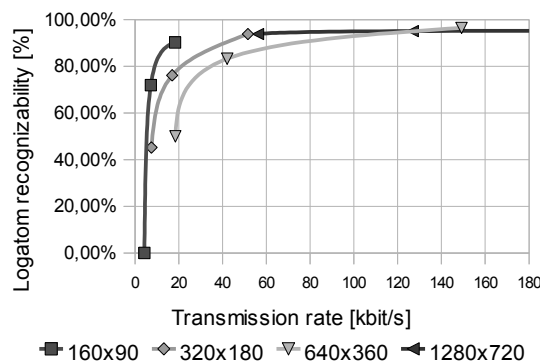


Fig. 1 Dependency logatom recognizability on the transmission rate.

To interpret the results we apply the standard scale for subjective video quality evaluation and the percentual evaluation of intelligibility as in acoustics. Subjective and Objective Methods for the Quality and Intelligibility [Granat, 2009].

## Acknowledgements

Research described in the paper was financially supported by the Slovak Research Grant Agencies: KEGA under grant No. 119-005TVU-4/2010 and VEGA under grant No. 1/0602/11.

## References

- [Granat, 2009] M. Granat, *Objective methods for evaluation of audio signal quality* (in Slovak), Brno University of Technology. Brno, 2009.
- [Hefty, 2009] M. Hefty, *Finger alphabet* (in Slovak), Organization Myslím – development of thinking not only for hearing-impaired (in Slovak), 2009, www.zzz.sk
- [Makáň, 1995] F. Makáň, *Elektroacoustics* (in Slovak), Vydavateľstvo STU Bratislava, 1995.
- [Mordelová, 2010] A. Mordelová, J. Polec, S. Ondrušová, J. Filanová, *New Objective Method of Evaluation Cued Speech Recognition in Videoconferences*, Proceedings Redžúr 2010, Bratislava, STU v Bratislave FEI, 2010, 4 p., CD-Rom.

\*petra.heribanova@fmph.uniba.sk

‡polec@ktl.elf.stuba.sk

# Decentralized Lightweight Communication Platform for Heterogenous Multi-context Systems (Extended Abstract)

Michal Vince\*

Michal Čertický†

Vladimír Dziuban‡

Katedra aplikovanej informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

In heterogeneous multi-context systems (MCS), a number of components, running on separate machines and implemented in different languages, need to cooperate and communicate with each other. Standards for such interoperability are defined in FIPA [FIPA, 2000-A] specifications. Majority of FIPA implementations, however, involve overly complex, mostly Java-based platforms, offering different services and hosting multiple agents. To facilitate simpler and more agile development of small agents in different languages, we present a lightweight decentralized communication platform.

Agents implemented in our framework are standalone processes, that communicate via FIPA ACL based messages [FIPA, 2000-B], transported through a RESTful peer to peer TCP/IP connections. They are identified by unique *agent name* and a list of *services* they provide.

Even despite the lack of any central server, the framework provides an implicit *agent management system* [FIPA, 2000-C] based on a discovery service that allows each agent to identify other agents on the local network along with the services they provide. Communication with agents outside of local network is achieved through the use of *gateway agents*.

From the implementation viewpoint, our framework consists merely of the set of libraries allowing any process to become a part of such MCS. These libraries are available for Python and C++ at the moment, while Java implementation is planned.

Following example implements MCS organizing the seminars of a research group. Individual agents run on different devices/programming languages, taking advantage of our platform's properties.

**Example 1.** *The system consists of:*

- a set of **personal** Java-based agents (**PER**) running on the mobile phone/PDA of every group member, providing information about him,

- **sensoric** C++ agents (**SEN**) that use web cameras to observe certain rooms at the university,
- **timetable** agent (**TIM**) that provides access to the university timetable and room reservations,
- and a logic-based **scheduling** agent (**SCH**) written in Python as a frontend to a logic formalism such as ASP solver.

Now imagine, that one of the group members wants to organize a meeting. He orders his **PER** to arrange this meeting. **PER** then contacts all the other **PERs**, and finds out (using the GPS on their devices) which of them are currently out of town. If the sufficient number of them are available, he asks the **SCH** for the most appropriate time and place for the meeting. The **SCH** collects information from the **SENs** to find out which rooms are empty and also checks if they aren't reserved for the next 2 hours. After receiving this information, the invitation can be sent to all the **PERs** of available members of the group.

In future, we plan to make every agent capable of starting a gateway service whenever needed, thus maintaining the structural integrity, and improving the durability of MCS by automatic reorganization.

## References

- [FIPA, 2000-A] Foundation for Intelligent Physical Agents. FIPA Standard Specification. <http://www.fipa.org/repository/standardspecs.html>. 2000.
- [FIPA, 2000-B] Foundation for Intelligent Physical Agents. FIPA ACL Message Structure Specification. <http://www.fipa.org/specs/fipa00061/index.html>. 2000.
- [FIPA, 2000-C] Foundation for Intelligent Physical Agents. FIPA Agent Management Specification. <http://www.fipa.org/specs/fipa00023/index.html>. 2000.

\*vince.michal@gmail.com

†certicky@fmph.uniba.sk

‡dziuban@ii.fmph.uniba.sk

## Porovnanie mier kvality trojuholníka

Veronika Weissová\*  
 Školiteľ: Andrej Ferko†

FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

**Abstrakt.** Náš projekt sa venuje ohodnocovaniu trojuholníkov podľa ich vybraných geometrických vlastností a následnou vizualizáciou takýchto dát. Na vstupe je triangulovaný objekt, súbor trojuholníkov, trojice súradníc ich vrcholov. Na výstupe je ohodnotenie ich kvalít pomocou reálnych čísel a vizualizácie. Autora novej metódy triangulácie alebo aj bežného používateľa triangulácií možno upozorniť na nevhodné trojuholníky, aby svoju metódu alebo model primerane upravili. Naša vizualizácia umožní skontrolovať, či daná triangulácia neobsahuje nevhodné trojuholníky (s príliš malým najmenším či priveľkým najväčším uhlom atď.). Vizualizáciu sme implementovali v prostredí Mathematica.

**Kľúčové slová:** Triangulácia, Trojuholník, Miera kvality, Kvalita meshu

**Miery kvality.** Ohodnotenie kvality mesh-u je dôležitou požiadavkou aj pri výbere konečného počtu prvkov, aj pri mesh-och, ktoré sú podrobené úprave. Je známe, že nevhodne tvarované trojuholníky môžu viesť k nepresnostiam a nestabilným aproximáciám. Preto je veľmi dôležité skúmať vzťah geometrických vlastností a tvaru týchto prvkov. Po prešetrení rôznych mier kvality trojuholníka [Pébay and Baker] zistili, že máme päť známych mier kvality a ostatné sú s nimi ekvivalentné. Tabuľka uvádza ich vybrané vlastnosti.

	pekný	SB	ihlovité	vejárovité
$\rho$	~rovnostranný	má	$\gg 1$	$\gg 1$
$\iota$	~rovnostranný	nemá	$\gg 1$	$\gg 1$
$\tau$	~rovnostranný	nemá	$\gg 1$	$\sim 2$
$\upsilon$	~rovnostranný	má	$\sim 1,299$	$\gg 1$
$R /  t $	~pravouhlý	má	$\sim 1$	$\gg 1$

Tabuľka č.1 Vybrané miery a ich vlastnosti

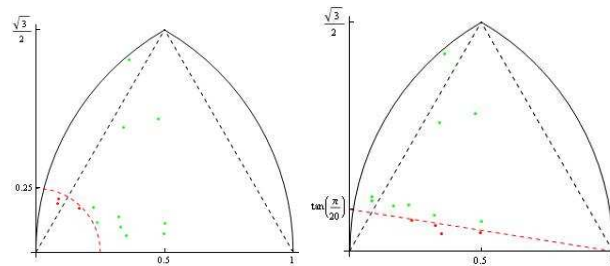
Pričom trojuholník je „pekný“, ak má vhodný tvar podľa danej miery, SB je stacionárny bod v hodnotách kedy je kvalita optimálna, ihlovitý

trojuholník má jeden uhol veľmi malý a vejárovitý zase jeden uhol príliš veľký.

- $\rho$  pomer polomeru opísanej a vpísanej kružnice
- $\iota$  pomer strán
- $\tau$  pomer najdlhšej a najkratšej strany
- $\upsilon$  pomer polomeru opísanej kružnice a obvodu
- $R/|t|$  pomer polomeru opísanej kružnice a strany

**Návrh na vizualizáciu.** Prístupom k vizualizácii vlastností trojuholníkov nás inšpiroval [Niepel et al.] Pozostáva z poukladania všetkých trojuholníkov na ich najdlhšie strany a rovnomerného preškálovania všetkých súradníc vrcholov trojuholníka tak, aby dĺžka najdlhšej strany bola rovná jednej. Potom nasleduje určenie polohy vrcholov im protíahlych.

Svoju pozornosť sme upriamili na mieru  $\tau$ , kde si používateľ zvolí, aká najkratšia hrana je prípustná a náš systém vyhodnotí už len nevyhovujúce prípady a k nim určí aj ich reálnu polohu. Vďaka čomu je možná jednoduchá úprava zadateľových vstupných dát. Naša metóda pracuje na overovaní, či vrchol so škálovanými súradnicami patrí do množiny akceptovateľných hodnôt alebo nie. Podobný nápad sme použili aj pri ohraničení minimálneho uhla.



Obrázok č.1 Vizualizácia miery  $\tau$  Obrázok č.2 Vizualizácia najmenšieho uhla

### References.

[Pébay and Baker] P.P. Pébay;T. J. Baker (2003). Analysis of triangle quality measures. Math. Comput. 72 (244): 1817-1839.

[Niepel et al.] Eudovít, Niepel et al. (1998). Computing minimum weight triangulation for smaller point sets. P. 95-102 in 60th Anniversary of the Faculty of Civil Engineering at the STU Conference Proceedings. Bratislava : STU 1998.

\* veronika.weissova@gmail.com

† ferko@sccg.sk

# RNA Structural Motif Search is NP-complete

Ladislav Rampášek\*

Supervisor: Bronislava Brejová†

Department of Computer Science, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics,  
Comenius University in Bratislava, Slovakia

**Abstract:** In this paper, we study computational complexity of RNA structural motif search. This problem has applications in discovering new sequences capable of forming the desired fold [Webb et al., 2009]. There are several tools performing this search in exponential time complexity, but no hardness results are known. Here, we present a formal definition of structural motif search problem (SMS) and its special instance RNA-SMS which is our object of interest. Subsequently we prove both SMS and RNA-SMS to be NP-complete by reduction on ONE-IN-THREE 3SAT.

**Keywords:** RNA, structural motif, motif search, NP-completeness, ONE-IN-THREE 3SAT

## 1 Introduction

In this paper we study the computational complexity of finding structural patterns in RNA sequences. In the rest of this section we introduce necessary background from molecular biology (for more details we refer the reader to [Durbin et al., 1998, Brazma et al., 2001]) and describe the RNA motif search problem and some of the existing tools for solving it. In Section 2 we formally define the structural motif search problem and its special instance, RNA structural motif search problem. Subsequently we provide a proof of NP-completeness of both these problems. In the last section of the paper we briefly analyse the computational complexity of weaker variants of the problems.

### 1.1 Biological Background

Ribonucleic acid (RNA) is a polymer constructed from nucleotides, similar to DNA. A chain of nucleotides is called an RNA sequence or an RNA primary structure, whose ends are marked 5' and 3', respectively. The four nucleotides are abbreviated A, C, G and U, what stand for Adenine, Cytosine, Guanine and Uracil. In contrast, DNA uses thymine

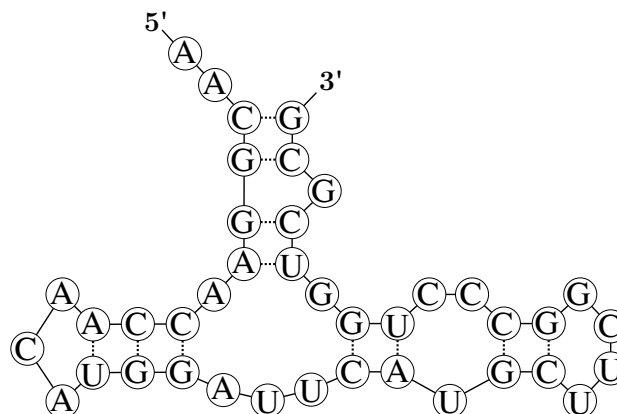


Figure 1: An example of an RNA structure. Full lines represent the order of the sequence from 5' beginning to 3' end. Dotted lines represent base pairs that form the secondary structure.

(T) instead of uracil. The nucleotide sequence of RNAs produced by an organism generally encoded in the DNA of the organism and then, by the process called transcription, translated to the form of RNA. Therefore scientists search for RNA motifs directly in DNA. An example of an RNA secondary structure can be seen in Figure 1.

RNA does not form a double helix like DNA does, instead it is usually single stranded, but may have complex three-dimensional structure due to complementary bonds between the parts of the same strand. This happens as some nucleotides can bind together to form a pair. G-C and A-U (A-T in DNA) form hydrogen bonded base pairs and are said to be complementary. These two canonical base pairs are also known as Watson-Crick pairs, named after James D. Watson and Francis Crick, who discovered the helical DNA structure in 1953. In addition to canonical base pairs, non-canonical pairs also occur in RNA secondary structure. The most common non-canonical pair is G-U pair, which is almost as thermodynamically stable as Watson-Crick pairs. Other pairs form as well.

The first widely known RNA function was its role of a *passive* intermediary messenger in translation machinery of genes and proteins from DNA. In this

\*rampasek@gmail.com

†brejova@dcs.fmph.uniba.sk

scenario, RNA carries the information about the composition of a gene (or protein). This information is encoded in the RNA sequence, therefore this type of RNA is called coding RNA.

However, the research over past decades has shown that there exist many RNAs that do not code any protein. These types of RNA are called non-coding RNAs (ncRNA). Non-coding RNAs adopt sophisticated three-dimensional structures. They are involved in gene regulation, RNA processing, and other roles. Since the first discoveries of catalytic RNAs in the early 1980s, a number of new structural and catalytic RNAs have been discovered. For this type of RNA the structure to which it folds in space is often more important than the actual sequence. New technologies allow us to obtain DNA sequences of various species. Given known examples of functional RNA we would like to locate RNAs with similar function (homologs) in newly sequenced genomes. One option is to use searches based purely on sequence similarity. However, often we obtain higher sensitivity by allowing sequence to vary and searching for certain typical structural motifs [Webb et al., 2009].

As stated above, RNA, unlike DNA, is typically produced as a single stranded molecule which then folds intramolecularly to form a number of short base-paired stems (or also called as helices). The base-paired structure is called the secondary structure of the RNA, and the form which it adopts in 3D space is called the tertiary structure. Helices may overlap to form so-called pseudoknots. This happens when a helix starts before another one has already ended, this irregularity is similar to an incorrectly parenthesized expression, e.g. “( [ ] )”.

For an example of a pseudoknotted structure please refer to Figure 2.

For many purposes, the secondary structure is a good approximation of the tertiary structure as it contains enough information on the spatial structure, while keeping the complexity and time performance of related algorithms at reasonable level. However, even if considering only the secondary structure, specially pseudoknots make some problems harder – often NP-complete [Durbin et al., 1998, Lyngsø, 2004]. Therefore for many purposes, as for example database searching for RNA homologues or RNA secondary structure prediction, it is usually acceptable to sacrifice the information in pseudoknots in return for efficient algorithms

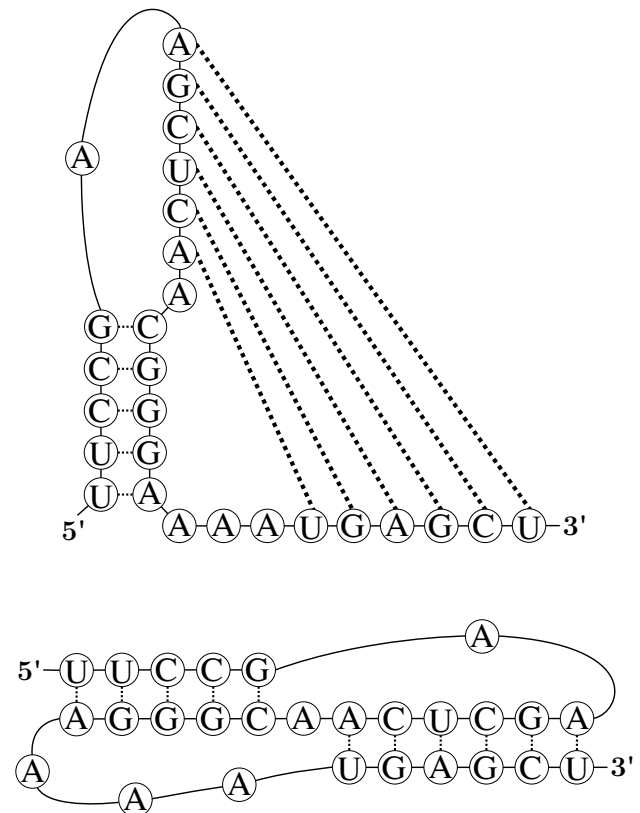


Figure 2: Two different representations of a pseudoknotted structure. The representation in the top emphasizes which base interactions (thick dotted lines) cause the pseudoknot.

[Durbin et al., 1998]. In this paper we consider pseudoknots without any restrictions and we will use them in our proof.

More formally, we can define a secondary structure of an RNA strand of length  $n$  indexed  $1 \dots n$  (starting at the 5' end) as a set of pairing interactions  $(i, j)$  between  $i$ -th and  $j$ -th base of the strand, where every base may participate in at most one pair.

By this definition, we can distinguish two fundamental elements of RNA secondary structure – single-stranded regions and helical (paired) regions.

## 1.2 Existing Search Tools

The problem of RNA structural motif search was first addressed in late 80's. The first tool enabling the structural search was RNAMot [Gautheret et al., 1990], which introduced a backtracking method. RNAbob [Eddy, 1996] is its more efficient reimplementation based on a nondeterministic finite state automaton with node rewriting rules. Afterwards, numerous



stand-alone and web-service based tools were developed allowing users to define RNA motifs according to their requirements and search for these motifs in sequence databases. These tools differ in the way a user defines a structure that is to be searched for, then in allowing and handling defects permitted in found matches (e.g. mismatches, mispairing, insertions), and post-processing filters applied on found matches. Examples include Palingol [Billoud et al., 1996], RNAMotif [Macke et al., 2001], PatSearch [Grillo et al., 2003], RNAMST [Chang et al., 2006]; for an extensive overview of current search tools see [George and Tenenbaum, 2009]. Besides general purpose motif search tools, tools optimized for search of specific structural RNA molecules were devised as well. In 2010 we implemented a new search tool RNArabo [Rampášek, 2010], which enables a user to permit insertions to the structure in a unique way. What all these algorithms have in common is the exponential time complexity. Despite the number of tools, no serious time complexity analysis of the RNA structural search problem has been published yet.

## 2 RNA Structural Motif Search Problem Definition

In this section we formally define the problem in a form suitable for the analysis of computational complexity. It is important to note here, that search tools usually solve a more general problem. Our simpler definition captures the essence of the problem and suffices to show its NP-hardness. First, we will define a structural motif – an abstraction of RNA structural motif.

### 2.1 Structural Motif

Structural motif specifies both primary and secondary structure constraints. The primary structure deals with sequence constraints, while the secondary structure describes the relations of the nucleotide bases forming the primary structure. By the definition of secondary structure as a set of base pairings, we can distinguish two fundamental elements of RNA structure – *single-stranded regions* and *helical (paired) regions*. On this observation we are going to build the definition of a structural motif, as an abstraction of RNA structural motif. First we introduce necessary terminology.

*Sequence*  $A = a_1 \dots a_n$  is a string over a finite alphabet  $\Sigma$ .

*Sequence constraint alphabet*  $\Sigma_+$  will be used to express constraints on primary structure and we define it as

$$\Sigma_+ = (\mathcal{P}(\Sigma) \setminus \{\emptyset\}) \cup \{\{*\}\}$$

where ‘\*’ is a wildcard which matches every character from  $\Sigma$  or may be omitted, so that patterns of variable length are possible. Note that  $\Sigma_+$  is not a set of characters, but a set of sets of characters.

*Fitting function*  $FIT$  describes which symbols satisfy a given sequence constraint:

$$FIT : \Sigma_+ \times \Sigma \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\forall s \in \Sigma_+, \forall a \in \Sigma$$

$$FIT(s, a) = \begin{cases} 1 & \text{iff } a \in s \vee s = \{*\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

We will state later on, how a wildcard ‘\*’ may be left out.

*Single-stranded element*  $S = s_1 \dots s_n$  is a string over the alphabet  $\Sigma_+$ .

*Helical element*  $(H, H')$  represents a paired region, thus consists of two parts  $H$  and  $H'$ . Both  $H = s_1 \dots s_m$  and  $H' = s'_1 \dots s'_m$  are strings of the same length  $m \in \mathbb{N}$  over the alphabet  $\Sigma_+$ .

In a valid occurrence of a helical element  $(H, H')$  in a sequence, the matched occurrences of  $H$  and  $H'$  must be complementary, i.e. to form pairs character by character. To respect how a motif folds, we have to take the matched occurrence of  $H'$  in reverse order, thus the first matched character of  $H$  must pair with (be complementary to) the last matched character of  $H'$ , and so forth. The relation “to be complementary” is expressed by a complementarity function  $COMP$ .

*Complementarity function*  $COMP$  is the same for all helical elements, however may differ for different instances of the problem.  $COMP(a, b) = 1$  if  $a, b \in \Sigma$  are considered to be complementary in the problem instance. Otherwise,  $COMP(a, b) = 0$ .

*Structural motif*  $M$  can now be defined as an ordered sequence of single-stranded and helical elements. The position of an element in the ordered sequence corresponds to its position in the motif. Between the two strands of a helical element, there can be arbitrary number of single-stranded elements as well as parts or whole other helical elements. This allows arbitrary pseudoknotted structures. For example  $M = (H_1, S_1, H_2, S_3, H'_1, S_4, H'_2)$  would correspond<sup>1</sup> to

<sup>1</sup>further specification of the elements is required

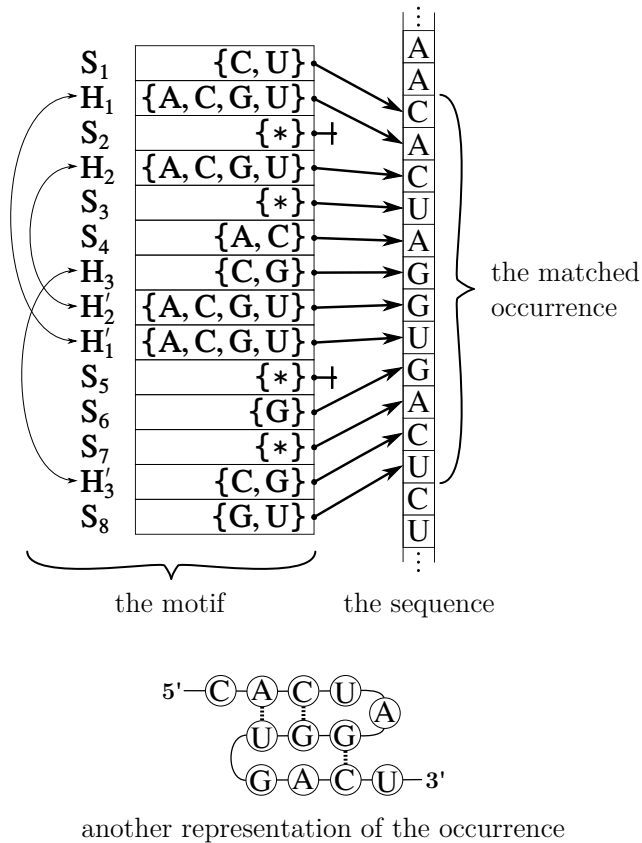


Figure 3: An example of RNA motif and of its occurrence in a sequence. For simplicity, the elements are only one character long. The thick arrows represent a matching that defines the motif occurrence.

the motif represented in the Figure 2, starting from 5' beginning and ending at 3'. Another example of RNA motif is shown in the Figure 3.

If we are speaking about *sequence constraints* of a motif  $M$ , we refer to the concatenation of sequence constraints of all the elements which form the motif  $M$ .

## 2.2 Structural Motif Search Problem

We say that a structural motif  $M$  (in context of a complementarity function  $COMP$ ) *occurs* in a sequence  $A$ , if and only if there exists an *partial increasing function*  $\varphi$  of the sequence constraint indices of motif  $M = m_1 \dots m_d$  to the indices in sequence  $A = a_1 \dots a_e$ , that satisfies:

- (i) the image of function  $\varphi$  is one continuous subinterval of indices in  $A$

- (ii) only wildcards '\*' may be omitted, i.e.

$$\forall i: \varphi(i) = \perp \Rightarrow m_i = \{*\}$$

- (iii) every sequence constraint from  $M$  fits the character to which it is projected, i.e.

$$\forall m_i \in M: \varphi(i) \neq \perp \Rightarrow FIT(m_i, m_{\varphi(i)}) = 1$$

- (iv) for every helical element  $(H, H')$  from  $M$ :

- (a) let  $A_{\varphi(H)} = p_1 \dots p_l$  be the string of characters from  $A$  to which  $H$  is projected in  $\varphi$
- (b) denote  $A_{\varphi(H')} = q_1 \dots q_k$  similarly
- (c)  $A_{\varphi(H)}$  and  $A_{\varphi(H')}$  must be of the same length, i.e.  $l = k$
- (d)  $A_{\varphi(H)}$  and  $A_{\varphi(H')}$  must be complementary character by character in terms of complementarity given by the function  $COMP$ , i.e.

$$COMP(p_i, q_{k-i+1}) = 1 \text{ for } i = 1, 2, \dots, k$$

*Structural Motif Search Problem* (in abbreviation *SMS*) is then a decision problem defined as follows:

*SMS*: For given alphabet  $\Sigma$ , complementarity function  $COMP$ , structural motif  $M$  and sequence  $A$  decide, whether  $M$  occurs in  $A$ , i.e. whether there exists a correct projection  $\varphi$  of  $M$  to  $A$ .

## 2.3 RNA Motif Search Problem

The RNA motif search problem is a special case of *SMS* problem over RNA alphabet  $\Sigma_{RNA} = \{A, C, G, U\}$ , with complementarity function  $COMP_{RNA}$  allowing only the canonical base pairs (C-G and A-U). We name this problem *RNA-SMS*.

## 3 NP-completeness of RNA-SMS

Similarly to the previous section, we will first discuss the *SMS* problem, as it is more general and allows us to perform the proof more illustratively. Afterwards we show how to modify the proof to prove NP-completeness of the *RNA-SMS* problem.

Our proof of NP-completeness of *SMS* is inspired by [Lathrop, 1994] where the author proves Protein Threading Problem to be NP-complete.

### 3.1 SMS is NP-complete

It is easy to see that SMS is in NP. For an SMS instance  $\Sigma, A, M, COMP$ , we can non-deterministically guess a correct occurrence of the structural motif  $M$  in the sequence  $A$ , i.e. a projection  $\phi$  of  $M$  to  $A$ , and then check its correctness in polynomial time.

We will prove NP-hardness by a reduction of ONE-IN-THREE 3SAT to SMS. ONE-IN-THREE 3SAT is known to be NP-complete [Schaefer, 1978]. It is a variant of the 3SAT problem with a restriction that every clause must be satisfied by exactly one literal. Our goal is to construct an encoding from ONE-IN-THREE 3SAT to SMS, i.e. to construct an equivalent instance of SMS for every instance of ONE-IN-THREE 3SAT. A solution to the equivalent SMS instance, i.e. a mapping of a motif  $M$  to a sequence  $A$ , encodes a solution to the original ONE-IN-THREE 3SAT instance, i.e. a boolean assignment to the variables such that the formula is one-in-three satisfied.

Let us consider a ONE-IN-THREE 3SAT instance: a formula  $I$  in conjunctive normal form, where each clause is composed of exactly three literals. We will construct an equivalent instance of SMS:  $\Sigma, A, M, COMP$ , as follows.

- (i) Let the alphabet be  $\Sigma = \{T, F, \#\}$ , where T will denote TRUE, F FALSE, and # will serve as a delimiter.
- (ii) Sequence  $A$  will consist of two parts, the first one dedicated to the composition of the formula  $I$ , and the second to an encoding of assignment to the boolean variables of  $I$ .

- (a) For every clause we construct three gadgets. Each gadget is a triplet of characters from  $\{T, F\}$  and expresses the assignment to the boolean variables of the clause, such that the clause is satisfied by exactly one literal. Since there are three such assignments, we use three gadgets per clause.

The three gadgets are concatenated using # as a separator. All these gadget triplets are also concatenated together, using # as a separator, to form the first part of the sequence  $A$ .

For example a clause  $(a \vee \neg b \vee c)$  would be encoded by the string  $TTF\#FFF\#FTT\#\#$ , expressing assignments  $(a = 1, b = 1, c = 0)$ ,  $(a = 0, b = 0, c = 0)$ , and  $(a = 0, b = 1, c = 1)$ , respectively.

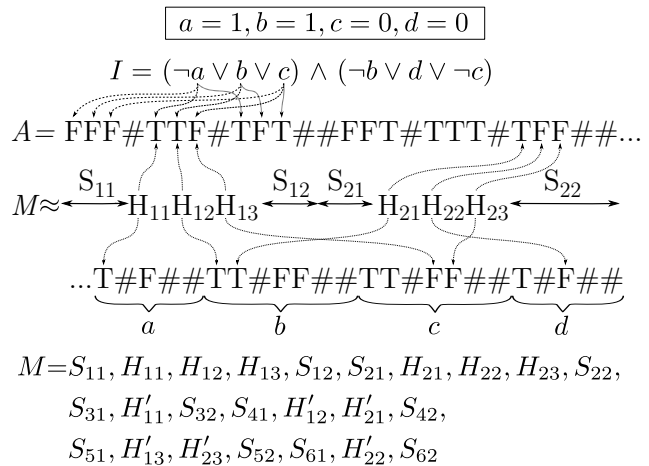


Figure 4: An example of the reduction. The figure shows a formula  $I$ , corresponding sequence  $A$ , and motif  $M$ . For better illustration the motif  $M$  is pictured also in a schematic way, to demonstrate how an occurrence of the motif encodes an assignment to boolean variables of  $I$ . The illustrated assignment is shown in the box in top part of the figure.

- (b) For every boolean variable in the formula  $I$  we construct a gadget that will be used to enforce consistent assignment to all occurrences of the given variable. This gadget is simply  $T^n\#F^n\#$ , where  $n$  is the number of occurrences of the variable in  $I$ .

These gadgets are then concatenated, using # as a separator, to form the second part of the sequence  $A$ .

- (iii) The complementarity function  $COMP$  is defined as follows:

$$COMP(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{iff } a = b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- (iv) Finally, we will show how to construct the structural motif  $M$ . The job of the motif  $M$  is to join satisfying assignments from the first part of  $A$  with consistent boolean assignments from the second part. For this purpose helical (paired) elements will be especially useful.

Similarly to the sequence  $A$ , motif  $M$  has two major parts. The first part will force the assignment to be one-in-three satisfaction for the formula  $I$  and the second part of the motif  $M$  will enforce consistency of this assignment. Each paired element in the motif  $M$  will have its first

strand in the first half of the motif and the complementary strand in the second part.

- (a) For every clause we construct two unpaired regions and three paired regions, ordered  $S_1, H_1, H_2, H_3, S_2$ . Sequence constraints for the elements are:

$$S_1 = s_1 \dots s_8, (\forall j)s_j = \{*\}$$

$$\forall i: H_i = s, H'_i = s, s = \{T, F\}$$

$$S_2 = s_1 \dots s_8 s_9 s_{10}, \\ (1 \leq j \leq 8) s_j = \{*\}, s_9 = \{\#\}, s_{10} = \{\#\}$$

The triplet  $H_1, H_2, H_3$  is intended to match in sequence  $A$  one of the three possible assignments to the three variables forming the clause.

The two single stranded elements  $S_1$  and  $S_2$  are of variable length and allow the triplet  $H_1, H_2, H_3$  to have enough freedom to be fitted to any of the three possible assignments encoded in  $A$ . In addition, the element  $S_2$  ensures that the triplet cannot be moved any farther, as it requires  $\#\#$  in the end.

- (b) When constructing the first part of the motif, for every clause we left behind the complementary parts of helix elements  $H'_1, H'_2, H'_3$ . We group all these  $H'_i$  by the variable that is used in the  $i$ -th literal of the corresponding clause. For a variable  $x$  with  $k$  occurrences in formula  $I$ , we create a submotif starting with a single stranded element  $S_{x1}$ , continuing with all  $H'_i$  elements corresponding to the variable  $x$  and ending with a single stranded element  $S_{x2}$ . Sequence constraints for  $S_{x1}$  and  $S_{x2}$  are:

$$S_{x1} = s_1 \dots s_{k+1}, (\forall j)s_j = \{*\}$$

$$S_{x2} = s_1 \dots s_{k+1} s_{k+2} s_{k+3}, \\ (1 \leq j \leq k+1) s_j = \{*\}, \\ s_{k+2} = \{\#\}, s_{k+3} = \{\#\}$$

Note that  $S_{x2}$  requires  $\#\#$  in the end. By this construction we enforce that the entire group of  $H'_i$  matches the block of Ts or the block of Fs in the sequence  $A$ . This denotes the assignment of TRUE and FALSE, respectively, to the variable  $x$ .

Recall, that in a valid occurrence of a paired element  $(H_j, H'_j)$  must both  $H_j$  and  $H'_j$  match the same character in  $A$ . Since the first parts of paired elements can only match a one-in-three satisfiable assignment of a clause and the second parts corresponding to a variable  $x$  must all match the same boolean value, then a correct occurrence of  $M$  indeed encodes a one-in-three satisfaction of the formula  $I$ .

An example construction is shown in Figure 4.

In the instance of SMS, that we have just constructed,  $M$  occurs in  $A$  if and only if the original formula is in ONE-IN-THREE 3SAT.

The reduction is polynomial, since the construction of sequence  $A$  is linear<sup>2</sup> in the size of formula  $I$ , as well as the construction of motif  $M$ . Thus, if we could solve SMS in polynomial time, then we could solve also ONE-IN-THREE 3SAT in polynomial time. Since ONE-IN-THREE 3SAT is NP-complete, SMS is NP-complete, too.

### 3.2 RNA-SMS is NP-complete

The proof of RNA-SMS NP-completeness is analogous. Denote the corresponding sequence  $A'$  and motif  $M'$ .

The construction of  $A'$  and  $M'$  is the same as for SMS, with the following adjustments.

- (i) In construction of motif  $M'$ , we change  $\{T, F\}$  to  $\{C, G\}$  and  $\{\#\}$  to  $\{U\}$  everywhere it is applicable.
- (ii) In the construction of sequence  $A'$  we substitute character  $\#$  for character  $U$ . When encoding a possible one-in-three satisfiable assignment to variables of a clause, we encode TRUE as  $C$  and FALSE as  $G$ . In the second part of  $A'$ , where gadgets for assignment consistency enforcement are located, we switch the symbols, encoding TRUE as  $G$  and FALSE as  $C$ . This switch is necessary as the function  $COMP$  in the SMS proof allows only pairs composed of the same two characters, however  $COMP_{RNA}$  allows only  $C-G, G-C, A-U,$  and  $U-A$  pairs. Since every paired element from  $M'$  has the first strand in the first part of  $A'$  and the second strand in the second part of  $A'$ , this construction of  $A'$  is correct.

<sup>2</sup>For grouping all  $H'_i$  by the corresponding variable we can use counting sort, that has linear complexity.

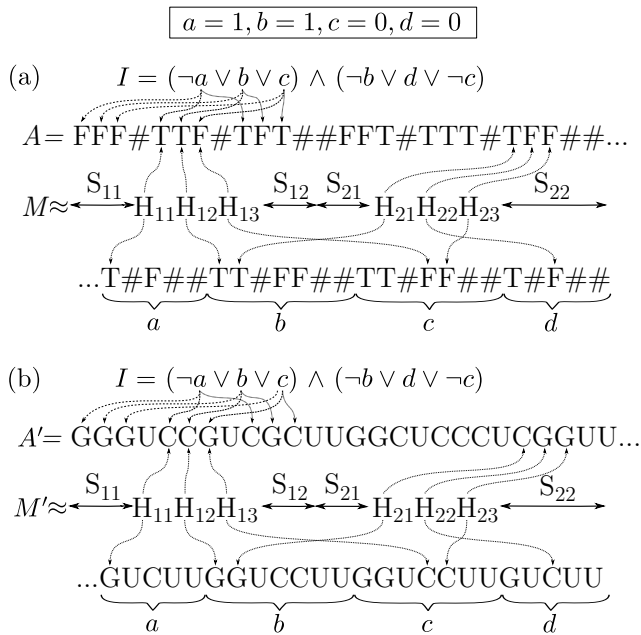


Figure 5: An example of the RNA-SMS reduction. Figure (a) shows sequence  $A$  and a sketch of motif  $M$ , both constructed in the original way from the SMS proof. Part (b) shows sequence  $A'$  and a sketch of motif  $M'$  which form an instance of RNA-SMS equivalent to formula  $I$ .

Figure 5 illustrates these changes and compares it to the original encoding used in the SMS proof.

Note that the reduction remains polynomial. Therefore, we prove that RNA structural motif search problem is NP-complete.

## 4 Discussion

Note that the proof described above could be also done by reduction from standard 3SAT. The main idea of encoding would remain the same. However, for every clause in the formula, we would construct seven, instead of three, gadgets encoding the satisfactory assignments to the variables of the clause. This is because in 3SAT a clause has the condition that the three literals must not be all FALSE at the same time. The number of all satisfactory assignments is then at most  $2^3 - 1 = 7$ .

Further, we identified two critical motif properties that govern the computational complexity of RNA structural motif search: (i) pseudoknots, and (ii) structural elements of variable length. Leaving out one of these properties would lead to an efficient search algorithm.

If we left out pseudoknots, we could use techniques of dynamic programming to proceed from short parts of the motif to the longer. This approach is similar to the RNA secondary structure prediction algorithm discussed in [Durbin et al., 1998] and leads to polynomial time complexity.

On the other hand, allowing only structural elements of fixed length, we could check each position in a sequence  $A$  for an occurrence of the motif  $M$  in linear time by a simple check of all primary and secondary constraints of  $M$ . Recall that the number of the constraints is linear in length of  $M$ . This approach would lead to quadratic time complexity in the length of  $A$ .

In further work, we would like to investigate, whether some weaker restrictions on one of these properties would also enable us to devise an efficient search algorithm. Examples might include limited number of pseudoknots or limits on their relative position. Restricting pseudoknots in some way in return for efficient algorithm has already been studied for RNA secondary structure prediction problem [Crochemore et al., 2005, Rivas and Eddy, 1999], however not for RNA structural motif search.

## Acknowledgements

The authors thanks to Andrej Lupták for inspiring this research. Last but not least, we express heartfelt thanks to Tomáš Vinař and Jakub Kováč for their contribution in creative discussions.

This research is funded by European Community FP7 grants IRG-224885 and IRG-231025, and VEGA grant 1/0210/10.

## References

- [Bengert and Dandekar, 2004] Bengert, P. and Dandekar, T. (2004). Riboswitch finder—a tool for identification of riboswitch RNAs. *Nucleic acids research*, 32(Web Server Issue):W154.
- [Billoud et al., 1996] Billoud, B., Kontic, M., and Viari, A. (1996). Palingol: a declarative programming language to describe nucleic acids' secondary structures and to scan sequence database. *Nucleic Acids Research*, 24(8):1395.
- [Brazma et al., 2001] Brazma, A., Parkinson, H., Schlitt, T., and Shojaatlab, M. (2001). A quick introduction

- to elements of biology - cells, molecules, genes, functional genomics, microarrays. "http://www.ebi.ac.uk/microarray/biology\_intro.html", European Bioinformatics Institute.
- [Chang et al., 2006] Chang, T.-H., Huang, H.-D., Chuang, T.-N., Shien, D.-M., and Horng, J.-T. (2006). RNAMST: efficient and flexible approach for identifying RNA structural homologs. *Nucl. Acids Res.*, 34:W423–428.
- [Crochemore et al., 2005] Crochemore, M., Hermelin, D., Landau, G., and Vialette, S. (2005). Approximating the 2-interval pattern problem. *Algorithms–ESA 2005*, pages 426–437.
- [Durbin et al., 1998] Durbin, R., Eddy, S., Krogh, A., and Mitchison, G. (1998). *Biological sequence analysis: Probabilistic models of proteins and nucleic acids*. Cambridge University Press.
- [Eddy, 1996] Eddy, S. (1996). RNABob: a program to search for RNA secondary structure motifs in sequence databases. unpublished.
- [Garey and Johnson, 1979] Garey, M. and Johnson, D. (1979). *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*. WH Freeman and Company, San Francisco, California.
- [Gautheret et al., 1990] Gautheret, D., Major, F., and Cedergren, R. (1990). Pattern searching/alignment with RNA primary and secondary structures: an effective descriptor for tRNA. *Comput Appl Biosci*, 6(4):325–31.
- [George and Tenenbaum, 2009] George, A. D. and Tenenbaum, S. A. (2009). Informatic resources for identifying and annotating structural RNA motifs. *Mol Biotechnol*, 41(2):180–93.
- [Grillo et al., 2003] Grillo, G., Licciulli, F., Liuni, S., Sbisà, E., and Pesole, G. (2003). PatSearch: a program for the detection of patterns and structural motifs in nucleotide sequences. *Nucleic Acids Research*, 31(13):3608.
- [Gusfield, 1997] Gusfield, D. (1997). *Algorithms on strings, trees, and sequences: computer science and computational biology*. Cambridge University Press.
- [Lathrop, 1994] Lathrop, R. (1994). The protein threading problem with sequence amino acid interaction preferences is NP-complete. *Protein Engineering Design and Selection*, 7(9):1059.
- [Lupták, 2010] Lupták, A. (2010). personal communication.
- [Lyngsø, 2004] Lyngsø, R. (2004). Complexity of pseudoknot prediction in simple models. *Automata, Languages and Programming*, pages 171–211.
- [Macke et al., 2001] Macke, T. J., Ecker, D. J., Gutell, R. R., Gautheret, D., Case, D. A., and Sampath, R. (2001). RNAMotif, an RNA secondary structure definition and search algorithm. *Nucl. Acids Res.*, 29(22):4724–4735.
- [Rampásek, 2010] Rampásek, L. (2010). RNA motif search in genomic sequences. *Bachelor thesis*, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University.
- [Rivas and Eddy, 1999] Rivas, E. and Eddy, S. (1999). A dynamic programming algorithm for RNA structure prediction including pseudoknots1. *Journal of molecular biology*, 285(5):2053–2068.
- [Rivas and Eddy, 2000] Rivas, E. and Eddy, S. (2000). The language of RNA: a formal grammar that includes pseudoknots. *Bioinformatics*, 16(4):334.
- [Schaefer, 1978] Schaefer, T. (1978). The complexity of satisfiability problems. In *Proceedings of the tenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 216–226. ACM.
- [Schattner et al., 2005] Schattner, P., Brooks, A., and Lowe, T. (2005). The tRNAscan-SE, snoscan and snoGPS web servers for the detection of tRNAs and snoRNAs. *Nucleic acids research*, 33(Web Server Issue):W686.
- [Webb et al., 2009] Webb, C. H., Riccitelli, N. J., Ruminiski, D. J., and Luptak, A. (2009). Widespread occurrence of self-cleaving ribozymes. *Science*, 326(5955):953.

# Prechodovo vyvážená automaty (rozšírený abstrakt)

Peter Kostolányi\*

Školiteľ: Branislav Rován

Katedra informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

V práci definujeme a skúmame niekoľko tried deterministických konečných automatov s rovnomerným využívaním *prechodov*. Výskum rovnomerne zaťažených výpočtových modelov je inšpirovaný predovšetkým oblasťou počítačového hardvéru, kde rovnomerné využívanie prostriedkov môže mať za následok napríklad dlhšiu životnosť, efektívnejšiu činnosť, či menšie zahrievanie sa hardvérového systému. Prvé práce v oblasti vyvážených výpočtových modelov sa zaoberali rovnomerným využívaním *stavov* v konečných automatoch [Kováč, 2010].

Prehľad vypracovaných definícií prechodovo vyvážených automatov a zhrnutie dosiahnutých výsledkov:

**Definícia 1.** Automát  $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$  nazveme *prísne prechodovo vyváženým*, ak existuje kladné reálne  $k$  také, že pre všetky slová  $w \in L(A)$  a všetky *prechody*  $(p, c, p'), (q, d, q') \in D_A$  platí

$$|\#_A[p, c, p', w] - \#_A[q, d, q', w]| \leq k.$$

Jazyk  $L$  nazveme *prísne prechodovo vyváženým*, ak existuje prísne prechodovo vyvážený automat  $A$  taký, že  $L(A) = L$ . Triedu prísne prechodovo vyvážených jazykov označíme  $\mathcal{L}_{\delta\text{-SEQA}}$ .

(Symbolom  $\#_A[q, c, q', w]$  (resp.  $\#_A[q, c, q', L]$ ) označujeme počet použítí *prechodu*  $(q, c, q')$  počas výpočtu automatu  $A$  na slove  $w \in L(A)$  (resp. na slovách konečného jazyka  $L \subseteq L(A)$ ).

Našli sme úplnú charakterizáciu prísne prechodovo vyvážených automatov – automat so súvislou grafovou reprezentáciou je prísne prechodovo vyvážený práve vtedy, keď akceptuje konečný jazyk alebo keď má tvar orientovaného cyklu cez všetky stavy. Z toho vyplýva aj úplná charakterizácia pre triedu  $\mathcal{L}_{\delta\text{-SEQA}}$ .

Ďalšie triedy prechodovo vyvážených automatov definujeme pomocou pojmov *kvocientu* a *miery vyváženosti*.

**Definícia 2.** Nech  $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$  je DKA. *Kvociantom vyváženosti na slovách dĺžky  $n$  nazveme hodnotu*

$$B_A(n) = \frac{\min_{(p,c,p') \in D} (\#[p, c, p', L(A) \cap \Sigma^n]) + 1}{\max_{(q,d,q') \in D} (\#[q, d, q', L(A) \cap \Sigma^n]) + 1}$$

a mierou vyváženosti nazveme hodnotu

$$B_A = \liminf_{n \rightarrow \infty} B_A(n).$$

**Definícia 3.** Automát  $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$  nazveme *prechodovo vyváženým*, ak  $B_A = 1$  a *slabo prechodovo vyváženým*, ak  $B_A > 0$ .

Triedy prechodovo vyvážených jazykov  $\mathcal{L}_{\delta\text{-EQA}}$  a slabo prechodovo vyvážených jazykov  $\mathcal{L}_{\delta\text{-WEQA}}$  definujeme analogicky, ako pri  $\mathcal{L}_{\delta\text{-SEQA}}$ .

Dokázali sme, že automat so súvislou grafovou reprezentáciou je slabo prechodovo vyvážený práve vtedy, keď akceptuje konečný jazyk alebo keď má silne súvislú grafovú reprezentáciu. Tiež sme dokázali, že ak je jazyk slabo prechodovo vyvážený, je aj minimálny automat, ktorý ho akceptuje, slabo prechodovo vyvážený.

Našli sme spôsob, ako získať uzavretý tvar pre  $|L(A) \cap \Sigma^n|$  a  $\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]$  pomocou riešenia systémov rekurentných vzťahov. To umožňuje pre daný automat vypočítať mieru vyváženosti, ako aj pre slabo prechodovo vyvážené automaty dokázať rôzne analytické vlastnosti veličín  $|L(A) \cap \Sigma^n|$  a  $\#[q, c, q', L(A) \cap \Sigma^n]$ . Tie umožňujú dokázať napríklad alternatívnu definíciu prechodovej vyváženosti.

Dokázali sme tiež, že triedy  $\mathcal{L}_{\delta\text{-EQA}}$  a  $\mathcal{L}_{\delta\text{-WEQA}}$  nie sú uzavreté na žiadnu z deviatich vybraných štandardne skúmaných operácií, a že trieda  $\mathcal{L}_{\delta\text{-SEQA}}$  nie je uzavretá na žiadnu z týchto operácií okrem prieniku. Dokázali sme taktiež vety o vzájomných vzťahoch definovaných tried jazykov a vety o ich vzťahoch k triedam stavovo vyvážených jazykov.

## Referencie

- [Kováč, 2010] Kováč, I. (2010). Equiloading automata. Diplomová práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

\*pkostolanyi@gmail.com

# Cycle space and the maximum genus of a graph (Extended Abstract)

Michal Kotrbčík<sup>\*†</sup>

Supervisor: Martin Škoviera<sup>‡</sup>

Department of Computer Science, FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

The maximum genus of a graph  $G$ , denoted by  $\gamma_M(G)$ , is the maximum integer  $g$  such that  $G$  has a cellular embedding into the orientable surface of genus  $g$ . The maximum genus has several characterizations [Xuong, 1979, Nebeský, 1993] and is one of only few topological graph invariants computable in polynomial time [Furst et al., 1988, Glukhov, 1981]. The maximum genus is related to many graph parameters, most notably connectivity [Xuong, 1979], girth, and the minimum degree [Ouyang et al., 2010]. In this paper we focus on the relation between maximum genus and the cycles space of a graph.

Let  $\mathcal{B}$  be a basis of the cycle space of a graph  $G$ . The intersection graph of the cycles in  $\mathcal{B}$  is denoted by  $J(G, \mathcal{B})$ . In the particular case when all cycles in  $\mathcal{B}$  are fundamental cycles with respect to a spanning tree  $T$ , the intersection graph is denoted by  $G\#T$ . The size of the maximum matching in  $G$  is denoted by  $\nu(G)$ . For a fixed graph  $G$  the graph  $J(G, \mathcal{B})$  has always the same number of vertices regardless of the basis, this number is denoted by  $\beta(G)$ . Clearly  $\nu(J(G, \mathcal{B})) \leq \lfloor \beta(G)/2 \rfloor$ . It is known that the maximum genus is related to the matching numbers of intersection graphs of bases of the cycle space by the following theorem.

**Theorem 1** ([Fu et al., 1998]). *Let  $G$  be a connected graph. Then  $\gamma_M(G) = \min_{\mathcal{B}} \nu(J(G, \mathcal{B}))$ .*

Our main results consist of determining the precise range of values of  $\nu(J(G, \mathcal{B}))$ .

**Theorem 2.** *Let  $G$  be a connected graph. Then  $G$  has a cycle basis with  $\nu(J(G, \mathcal{B})) = k$  if and only if  $\gamma_M(G) \leq k \leq \lfloor \beta(G)/2 \rfloor$ .*

A graph  $G$  is called *upper-embeddable* if  $\gamma_M(G) = \lfloor \beta(G)/2 \rfloor$ .

**Corollary 1.** *If  $G$  is an upper-embeddable graph, then  $\nu(G\#T_1) = \nu(G\#T_2)$  for any two spanning trees of  $G$ .*

Assume  $G$  is not upper-embeddable. When we restrict our attention to bases of the cycle space corresponding to fundamental cycles, then the matching numbers behave differently.

**Theorem 3.** *For every positive integer  $n$  there exists a 2-edge-connected graph  $G_n$  such that*

$$\max_T \nu(G_n\#T) - \min_T \nu(G_n\#T) = n$$

where  $T$  ranges over all spanning trees of  $G_n$ . Moreover, for every spanning tree  $S$  of  $G_n$  the value of  $\nu(G_n\#S)$  coincides with one of the two extremal values.

Similar results are obtained for 3-edge-connected graphs. However, the following problem remains open.

**Problem.** Does there exist, for any given  $n \geq 1$ , a 3-edge-connected graph  $G$  such that the range of matching numbers of  $G\#T$  contains a gap of size  $n$ ?

## References

- [Fu et al., 1998] Fu, H., Škoviera, M., and Tsai, M. (1998). The maximum genus, matchings and the cycle space of a graph. *Czechoslovak Math. Journal*, 48(123):329–339.
- [Furst et al., 1988] Furst, M. L., Gross, J. L., and McGeoch, L. A. (1988). Finding a maximum-genus embedding. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 35:523–534.
- [Glukhov, 1981] Glukhov, A. D. (1981). A contribution to the theory of maximum genus of a graph. In *Structure and Topological Properties of Graphs*, pages 15–29. Inst. Mat. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Kiev. in Russian.
- [Nebeský, 1993] Nebeský, L. (1993). Characterizing the maximum genus of a connected graph. *Czechoslovak Math. Journal*, 43(118):177–183.
- [Ouyang et al., 2010] Ouyang, Z., Wang, J., and Huang, Y. (2010). On the lower bounds for the maximum genus for simple graphs. *European Journal of Combinatorics*, 31(5):1235 – 1242.
- [Xuong, 1979] Xuong, N. H. (1979). How to determine the maximum genus of a graph. *J. Combinatorial Theory ser. B*, 26:217–225.

<sup>\*</sup>Partially supported by UK/477/2011 and APVV 0111-07.

<sup>†</sup>kotrbcik@dcs.fmfi.uniba.sk

<sup>‡</sup>skoviera@dcs.fmfi.uniba.sk



# Rozšíriteľnosť párení na niektorých triedach grafov (rozšírený abstrakt)

Ján Kováč\*

Školitelia: Michal Kotrbčík, Martin Škoviera†

Katedra informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

Graf  $G$  je equimatchable, ak je ľubovoľné párenie v  $G$  obsiahnuté v nejakom najväčšom párení. Z toho vyplýva, že v každom equimatchable grafe sa najväčšie párenie dá nájsť greedy algoritmom. Pri skúmaní štruktúry equimatchable grafov sa používa  $(D, A, C)$ -dekompozícia [Gallai, 1963, Edmonds, 1965]. Nech  $G$  je graf, jeho  $(D, A, C)$ -dekompozícia je definovaná nasledovne. Množina  $D$  obsahuje práve tie vrcholy z  $V(G)$ , ktoré nepokrýva nejaké najväčšie párenie. Množina  $A$  obsahuje vrcholy z  $V(G) - D$ , ktoré v  $G$  susedia z vrcholmi z  $D$  a množina  $C$  obsahuje práve vrcholy z  $V(G) - D - A$ .

Štruktúra všeobecných equimatchable grafov je pomocou  $(D, A, C)$ -dekompozície popísaná v [Summer, 1979, Lesk et al., 1984]. V špeciálnych triedach grafov bola rozšíriteľnosť párení na hyperkockách skúmaná v [Vandenbussche and West, 2009]; v [Freundrup et al., 2010] sú charakterizované equimatchable grafy s obvodom aspoň 5. Chordálne grafy sú grafy, v ktorých každá kružnica dĺžky aspoň 4 obsahuje tetivu. V našej práci sa okrem iného zaoberáme štruktúrou equimatchable chordálnych grafov.

Prienikový graf fundamentálnych cyklov  $G\#T$  vzhľadom na kostru  $T$  je definovaný vzťahmi takto:  $V(G\#T) = \{v_e | e \in E(G - T)\}$ ;  $v_{e_i} v_{e_j} \in E(G\#H)$  práve vtedy, keď fundamentálne kružnice prislúchajúce hranám  $e_i$  a  $e_j$ , majú neprázdny prienik. Počet vrcholov grafu  $G\#T$  nezávisí od kostry  $T$  a je rovný Bettiho číslu  $\beta(G)$  grafu  $G$ , kde  $\beta(G) = |E| - |V| + c_G$ , číslo  $c_G$  označuje počet komponentov grafu  $G$ . Grafy, ktoré majú po odobratí ľubovoľného vrcholu perfektné párenie, sa nazývajú faktorovo kritické.

**Veta 1.** Nech  $H$  je equimatchable chordálny graf, ktorý nie je faktorovo kritický. Potom existuje graf  $G$  taký, že  $G\#T \cong H$  pre každú kostru  $T$  grafu  $G$ .

Takéto grafy popisuje nasledujúca veta.

\*jankovac10@gmail.com

†kotrbcik@dcs.fmph.uniba.sk, skoviera@dcs.fmph.uniba.sk

**Veta 2.** Nech  $G$  je dvojsúvislý graf taký, že pre každú kostru  $T$  je graf  $G\#T$  equimatchable. Potom ak je  $\beta(G)$  párne, tak pre každú kostru  $T$  je  $G\#T$  izomorfné s  $K_{\beta(G)}$ . Ak je  $\beta(G)$  nepárne, potom  $G\#T$  má jeden z nasledujúcich tvarov: buď obsahuje práve jeden vrchol  $a \in A$ , alebo je faktorovo kritický. Ak obsahuje vrchol  $a \in A$ , potom v tomto grafe existujú práve dva komponenty  $D_1, D_2 \in D$ , ktoré sú obidva izomorfné s nepárnym kompletným grafom.

Ak je graf  $H\#T$  izomorfný s kompletným grafom pre každú kostru  $T$  grafu  $H$ , tak v grafe  $H$  nie sú žiadne dve kružnice nezávislé. Dôsledkom toho je, že graf  $H$  patrí do jednej z tried popísaných v [Lovász, 1965].

Ďalej sa v práci venujeme equimatchable karteziánskym súčinom grafov, náš hlavný výsledok je nasledujúca veta.

**Veta 3.** Nech  $G$  a  $H$  sú súvislé a  $V(G) \geq V(H) \geq 2$ . Ak  $G \square H$  je equimatchable, tak  $G \cong H \cong K_2$ .

## Literatúra

- [Edmonds, 1965] Edmonds, J. (1965). Paths, trees, and flowers. *Canad. J. Math.*, 17:449–467.
- [Freundrup et al., 2010] Freundrup, A., Hartnell, B., and Vestergaard, P. D. (2010). A note on equimatchable graphs. *Australas. J. Combin.*, 42:185–190.
- [Gallai, 1963] Gallai, T. (1963). Kritische Graphen II. *Magyar ad. Akad. Mat. Kutatd Int. Kozl.*, 8:373–395.
- [Lesk et al., 1984] Lesk, M., Plummer, M., and Pulleyblank, W. (1984). Equi-matchable graphs. *Graph Theory and Combinatorics*, pages 239–254.
- [Lovász, 1965] Lovász, L. (1965). On graphs not Containing Independent Circuits. *Mat. Lapok*, 16:289–299. (in Hungarian).
- [Summer, 1979] Summer, D. P. (1979). Randomly matchable graphs. *Journal of Graph Theory*, 3(2):183–186.
- [Vandenbussche and West, 2009] Vandenbussche, J. and West, D. B. (2009). Matching extendability in hypercubes. *SIAM J. Discret. Math.*, 23:1539–1547.

# Grafový model alternatívneho zostrihu DNA (rozšírený abstrakt)

Martin Králik\*

Školiteľ: Tomáš Vinar†

Katedra informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

Hľadanie génov je jedným z popredných problémov bioinformatiky. Ľudský genóm totiž nepozostáva len z úsekov kódujúcich proteíny. Zatiaľ nepoznáme pravidlá, pomocou ktorých by sme vedeli jednoznačne určiť, ktorá časť genómu je kódovacia. Tento problém sa v súčasnosti rieši pomocou pravdepodobnostných modelov, ako napríklad skryté Markovove modely.

Rozdelenie genómu na kódujúce a nekódujúce časti sa nazýva zostrih, pretože pri výrobe proteínov podľa DNA sa nekódujúce časti vystrihnú. Za určitých podmienok sa môže zostrih vykonať inak, k takémuto alternatívne zostrihu dochádza v ľudskom genóme až v 74% prípadoch [Johnson et al., 2003]. Jednotlivé varianty zostrihu nazývame izoformy. Väčšina súčasných hľadačov génov však alternatívny zostrih vôbec nehľadá, používa vzorkovanie [Stanke et al., 2006], alebo ho dokáže detekovať len lokálne v krátkom úseku DNA [Allen and Salzberg, 2006].

V tejto práci sa venujeme štúdiu pravdepodobnostných modelov alternatívneho zostrihu. Naším cieľom bolo jednak vytvoriť pravdepodobnostné modely popisujúce vlastnosti alternatívneho zostrihu ako náhodných grafov, ako aj navrhnúť metódy, ktorými je takýto model možné využiť na zlepšenie predikcie génov. V budúcnosti môže naša práca viesť k praktickým metódam na predikciu alternatívneho zostrihu v DNA sekvencii, ako aj k lepšiemu pochopeniu fungovania alternatívneho zostrihu v živých organizmoch.

Jednotlivé izoformy alternatívneho zostrihu reprezentujeme pomocou grafu, v ktorom vrcholy predstavujú kódujúce úseky DNA a sú prepojené orientovanými hranami tak, aby každá cesta grafom zodpovedala jednej izoforme. Na tento graf sa pozeráme ako na náhodný graf, ktorý vznikol jednoduchým stochastickým procesom s malým počtom parametrov. Tieto parametre možno nastaviť pomocou skutočných dát na základe princípu maximálnej vierohodnosti. Na tento účel používame UCSC databázu zná-

mych alternatívnych zostrihov ľudského genómu.

Náš prvý model popisuje grafy generované nasledovným postupom: Zvolíme si počet vrcholov. Tie si usporiadame vedľa seba na priamku. Pravdepodobnosť, že hrana spája dva vrcholy, závisí len od toho, koľko iných vrcholov sa medzi nimi nachádza.

Hlavná výhoda prvého modelu je jeho jednoduchosť. Z nej vyplýva okrem iného jednoduché trénovanie parametrov. Na druhú stranu tento model zahŕňa aj tie grafy, ktoré by nemohli vzniknúť ako reprezentácia alternatívneho zostrihu. K modelu sme navrhli algoritmus pre inferenciu založený na princípe dynamického programovania. Tento algoritmus predpovedá najpravdepodobnejšie rozdelenie danej DNA sekvencie na kódujúce a nekódujúce úseky. Jeho časová zložitosť je  $O(N^5)$ , kde  $N$  je počet potenciálnych miest zostrihu.

Druhý model je motivovaný najčastejšími javmi spôsobujúcimi alternatívny zostrih: posuny začiatkov a koncov jednotlivých kódujúcich úsekov, prípadne vypustenie celého kódovacieho úseku. Ich zahrnutie má za dôsledok komplikovanejšie generovanie grafov ako z prvého modelu. V každom kroku generovania sa pridávajú vrcholy, ktoré reprezentujú jednu triedu týchto javov. Výhodou je, že tieto grafy sa svojimi vlastnosťami viac približujú skutočným grafom alternatívneho zostrihu obsiahnutých v UCSC databáze. Pre tento model sme vytvorili inferenčný algoritmus s časovou zložitosťou  $O(N^5)$ .

## Literatúra

- [Allen and Salzberg, 2006] Allen, J. and Salzberg, S. (2006). A phylogenetic generalized hidden markov model for predicting alternatively spliced exons. *Algorithms for Molecular Biology*, 1(1):14.
- [Johnson et al., 2003] Johnson, J. M. et al. (2003). Genome-wide survey of human alternative pre-mrna splicing with exon junction microarrays. *Science*, 302(5653):2141–2144.
- [Stanke et al., 2006] Stanke, M. et al. (1 July 2006). Augustus: ab initio prediction of alternative transcripts. *Nucleic Acids Research*, 34(suppl 2):W435–W439.

\*majak@ksp.sk

†vinar@fmph.uniba.sk

# MCMC algoritmus na rekonštrukciu duplikačných histórií (rozšírený abstrakt)

Martin Kravec<sup>1\*</sup>

Školiteľ: Tomáš Vinař<sup>2†</sup>

<sup>1</sup> Katedra informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava,

<sup>2</sup> Katedra aplikovanej informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

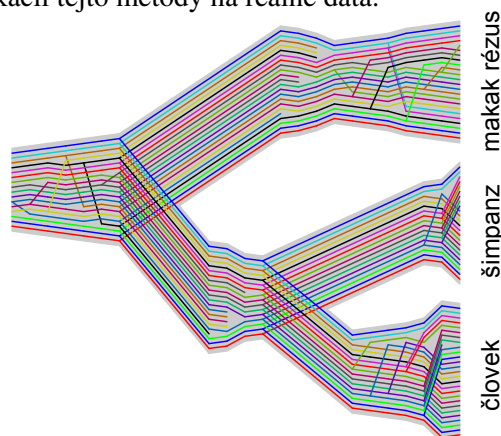
V bunkách živých organizmov sa nachádza DNA, ktorá je nosičom genetickej informácie. Rôznymi biotechnologickými procesmi sa dá extrahovať z buniek a premeniť (osekvenovať) na reťazec nad abecedou  $\{A, C, G, T\}$ . Evolučná teória predpokladá, že každá dvojica organizmov rôznych druhov vznikla zo spoločného predka. Ak máme DNA sekvencie súčasných druhov, zaujímavou úlohou je predikcia ancestrálnej DNA sekvencie.

Za predpokladu, že v rámci evolúcie uvažujeme iba proces jednoduchých mutácií, t.j. substitúcia jedného znaku za iný, je rekonštrukcia ancestrálnych sekvencií pomerne jednoduchá. Existuje množstvo pravdepodobnostných modelov (napr. Jukes-Cantorov model), na základe ktorých je možné pre danú pozíciu predpovedať najpravdepodobnejší ancestrálny znak na danej pozícii. Situácia sa komplikuje, ak začneme uvažovať zložitejšie operácie väčšieho rozsahu. [Vinař et al., 2009] uvažujú problém rekonštrukcie ancestrálnych sekvencií za prítomnosti duplikácií. Duplikácia skopíruje časť sekvencie na iné miesto a postupný zoznam duplikácií vytvorí duplikačnú históriu, ktorá je akoby návodom, ako sa z jedného pôvodného organizmu vyvinuli súčasné druhy. Zavedú pravdepodobnostný model duplikácií a používajú inferenciu vzorkovaním za pomoci MCMC algoritmu. Neoddeliteľnou súčasťou takéhoto algoritmu je počítanie vierohodnosti jednotlivých duplikačných histórií a pravdepodobnostný algoritmus pre navrhovanie jednotlivých duplikácií, z ktorých sa potom skladajú duplikačné histórie.

Vinař et al. navrhujú iba veľmi jednoduchý algoritmus pre navrhovanie duplikácií, ktorého implementácia je pomerne neefektívna, čoho dôsledkom je značne pomalá iterácia v rámci MCMC algoritmu. Vo svojej práci som sa pokúsil o iný prístup. DNA sekvencie mám rozdelené na súvislé úseky nazývané atómy, pri ktorých sa predpokladá, že už v rámci nich nenastala v minulosti žiadna duplikácia. Atómy rov-

nakého typu museli vzniknúť zo spoločného predka. Lokálnym zarovnaním dvoch rovnakých sekvencií atómov, v ktorom sú dva rozdielne atómy zarovnané, len ak majú rovnaký typ, viem nájsť jednu konkrétnu duplikáciu. Globálnym zarovnaním dvoch rozdielnych sekvencií atómov nachádzam speciáciu, rozdelenie organizmu na dva druhy, ktorých sekvencie sa ďalej vyvíjajú nezávisle. V zarovnaníach dovoľujem aj medzery a každý súvislý úsek medziér predstavuje jednu deléciu, časť sekvencie, ktorá sa v histórii vymazala. Pomocou dynamického programovania nachádzam hodnoty všetkých lokálnych/globálnych zarovnaní a stochastickým spätným prechodom si vyberiem jedno konkrétne, ktoré bude predstavovať jednu duplikáciu/speciáciu v duplikačnej histórii. Takýmto postupným spätným „odrábaním“ duplikácií a speciácií znižujem celkovú dĺžku ancestrálnej sekvencie, až kým v nej neexistujú dva atómy rovnakého typu.

Predbežné výsledky ukazujú, že moja implementácia tohto algoritmu umožní rapídne zrýchliť MCMC vzorkovanie a získať oveľa kvalitnejšie výsledky pri aplikácii tejto metódy na reálne dáta.



Duplikačná história vygenerovaná programom.

## Literatúra

[Vinař et al., 2009] Vinař, T., Brejová, B., Song, G., and Siepel, A. (2009). Reconstructing histories of complex gene clusters on a phylogeny. *Comparative Genomics*, pages 150–163.

\*martinkravec@gmail.com

†vinar@fmph.uniba.sk

# A New Algorithm for Using External Information in Gene Finding (Extended Abstract)

Marcel Kucharík\*

Supervisor: Bronislava Brejová†

Department of Computer Science, Faculty of Mathematic, Physics and Informatics, Comenius University, Bratislava, Slovakia

One of the main fields of bioinformatics is gene finding in DNA sequences. DNA describes all genetic information of living organisms. Gene is a continuous part of DNA sequence and can be further decomposed to exons and introns. Proteins – molecules necessary for living – are encoded in exons of genes. For purpose of this work, DNA sequence can be viewed simply as a sequence of letters A,C,T,G and the goal of gene finding is to mark these characters with a label from set {exon, intron, intergenic region}. This problem is mainly solved by the Viterbi algorithm on Hidden Markov models (HMM) – generative probabilistic automata.

External information gained from experiments or comparison of different species can be used to increase accuracy of gene-finding. For example, alignment of known protein sequences to the DNA sequence can approximately locate positions of exons. Each such external hint can be represented as a sequence of consecutive intervals, where each interval delineates position of an exon or intron.

Actual gene-finders (for example *Augustus* [Stanke et al., 2006]) can process only simple hints consisting of a single interval, because more complex hints are not easy to incorporate into the Viterbi algorithm. This is unwanted information loss, and therefore we developed an algorithm able to process complex information. It is based on the Viterbi algorithm as previous gene-finders, but uses a different approach of adding external information into the model. Our algorithm is trying to find the sequence of state labels of the HMM with the best score, where a sequence gets a bonus for each respected hint. Hints are modeled as alternative paths in a graph representation of the problem (Fig. 1).

Nodes in the graph represent HMM states for each character of sequence, edges represent possible transitions between them. Edge weights include HMM probabilities (in log space) and bonuses for hints.

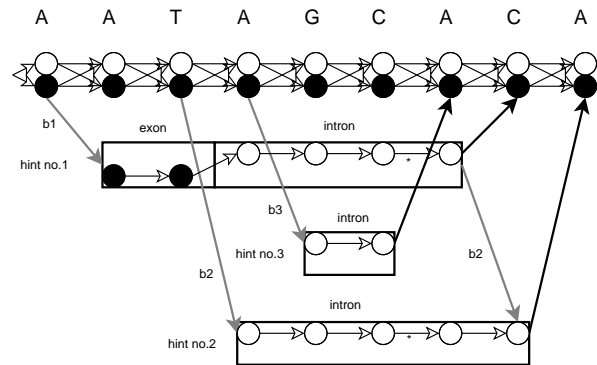


Figure 1: Graph representation of the algorithm – edges contain transition and emission probabilities of the underlying HMM; an edge leading to a hint contains also bonus of this hint (b1-b3); edges marked \* contain bonus for hint no.3; nodes are colored according to their labels

Hints, that are subset of another hint are the only exception. Bonus of these hints can be added to super-set hint only after end of the subset hint. Otherwise, this bonus would be counted multiple times in some paths. The goal of the algorithm is to find the longest (most probable) path through this graph.

This problem can be solved in time linear in the number of edges -  $O((s + h + c^2)n^2)$ , where  $s$  is the sequence length,  $h$  is the total length of hints,  $c$  is number of hints, and  $n$  is the number of states in underlying HMM.

We implemented the proposed algorithm and compared the gene prediction accuracy of simple and complex hints. The complex hint set achieved slight improvement in the gene prediction accuracy on real data.

## References

- [Stanke et al., 2006] Stanke, M., Schoffmann, O., Morgenstern, B., and Waack, S. (2006). *Gene prediction in eukaryotes with a generalized hidden Markov model that uses hints from external sources*. *BMC bioinformatics* 2006, 7:62.

\*marcel.kucharik@gmail.com

†brejova@dcs.fmph.uniba.sk

# Black-box property of Cryptographic Hash Functions (Extended Abstract)

Michal Rjaško\*

Supervisor: Martin Stanek†

Department of Computer Science, FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

The primary security goal for cryptographic hash functions has historically been collision resistance. For a collision resistant hash function  $F : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^y$  it is hard to find a pair of messages  $(M, M')$  such that  $F(M) = F(M')$ . Currently used hash functions, such as the SHA family or MD5, are designed using the Merkle-Damgård (MD) construction. The MD construction is a domain extension transform, i.e. it extends a domain of a fixed-input-length (FIL) compression function  $f : \{0, 1\}^{(y+d)} \rightarrow \{0, 1\}^y$  to a variable-input-length (VIL) hash function  $F$ . The key security feature of the MD construction is that it preserves collision resistance. If the compression function  $f$  is collision resistant, then so is the resulting hash function  $F$ .

However, collision resistance is not enough to prove the security of many important applications which involve hash functions. Hence, Bellare and Rogaway [1] introduced a so called random oracle model, which models a hash function as a publicly available random function (random oracle). A proof in the random oracle model is believed to ensure that there are no structural flaws in the scheme and thus one can heuristically hope that the scheme remains flawless when the random oracle is replaced with a “well designed” hash function.

Real hash functions are often built using some smaller components such as compression function in the case of the MD construction. On the other hand, in the random oracle model, hash functions are modeled as a monolithic oracle without any subcomponents. In order to avoid such a contrast between theory and practice, Coron et. al defined a property for hash functions called pseudo-random oracle [2]. A pseudo-random oracle  $F$  can be used in any cryptosystem instead of the random oracle without losing the security. The pseudo-random oracle property assumes that a hash function is built from a publicly available FIL random function  $f$ . Thus, the pseudo-random oracle property still requires the random ora-

cle model.

We introduce a black-box (BB) property for hash function families. If a hash function family  $H : \{0, 1\}^k \times \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^y$  has the BB property, then everything “non-trivial” we are able to compute having access to the randomly chosen key  $K$ , we are able to compute only with oracle access to the hash function  $H_K$ . A “non-trivial” thing we define as an information which is hard to compute for a random oracle. We show that a pseudo-random hash function family with the BB property (a Prf-BB hash function family for short) is resistant to all “non-trivial” attacks.

We prove that the MD construction does not preserve the Prf-BB property and on the contrary that the HMAC construction [3] is Prf-BB preserving. Moreover we show that every pseudo-random oracle preserving domain extension transform is Prf-BB preserving and vice-versa. Hence Prf-BB property can be seen as a replacement of the pseudo-random oracle property, which is defined only in the random oracle model. Since Prf-BB is defined in the standard model, it is a good candidate to become a new primary security goal for hash function families.

**Acknowledgment.** This paper was supported by VEGA grant No. 1/0266/09 and Comenius University grant No. UK/429/2010.

## References

- [1] M. Bellare and P. Rogaway. Random oracles are practical: a paradigm for designing efficient protocols. In *1st ACM Conference on Computer and Communications Security*, pages 62–73. ACM, 1993.
- [2] J.S. Coron, Y. Dodis, C. Malinaud, and P. Puniya. Merkle-Damgård Revisited: How to Construct a Hash Function. In *Advances in Cryptology – CRYPTO 2005, LNCS vol. 3621*, pages 430–448. Springer, 2005.
- [3] M. Bellare, R. Canneti, and H. Krawczyk. Keying Hash Functions for Message Authentication. In *Advances in Cryptology – Crypto 96, LNCS vol. 1109*, pages 1–15. Springer, 1996.

\*rjasko@dcs.fmph.uniba.sk

†stanek@dcs.fmph.uniba.sk

# Antidilatácia stromov (rozšírený abstrakt)

Ivana Selečéniová<sup>1\*</sup>

Školiteľ: Rastislav Kráľovič<sup>1†</sup>

Katedra informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina 842 48 Bratislava

V práci sa venujeme problému antidilatácie na špeciálnych podtriedach stromov. Hľadáme exaktné výsledky a polynomiálne algoritmy pre niektoré typy grafov pre tento vo všeobecnosti NP-úplný problém.

**Definícia 1.** Majme grafy  $G = (V_1, E_1)$ ,  $H = (V_2, E_2)$ . Antidilatácia grafu  $G$  na graf  $H$  je

$$\text{adil}(G, H) = \max_{\varphi \in \Phi_{G,H}} \left( \min_{uv \in E(G)} \text{dist}_H(\varphi(u), \varphi(v)) \right),$$

kde  $\Phi_{G,H}$  je množina všetkých injektívnych zobrazení (vnorení) z  $V(G)$  do  $V(H)$ .

Problém antidilatácie patrí spolu so svojim duálnym problémom, dilatáciou, k triede problémov označovania vrcholov v grafoch. Tento problém vo všeobecnej podobe nie je preskúmaný. Existujú výsledky pre špeciálne prípady antidilatácie – antibandwidth a cyklický antibandwidth. [Török, 2007]

V práci prezentujeme výsledky pre antidilatáciu cesty na špeciálne podtriedy pavúčich grafov. Pavúči graf je strom s práve jedným vrcholom stupňa aspoň 3 (ktorý nazývame význačný vrchol) a ostatnými vrcholmi stupňov najviac 2. Nohou v pavúčom grafe označujeme cestu od význačného vrchola k listu. Špeciálne, pavúči graf s  $k_1$  nohami dĺžky  $n_1$  a  $k_2$  nohami dĺžky  $n_2$  označujeme  $S_{k_1, n_1, k_2, n_2}$ .

Prvým výsledkom práce je určenie antidilatácie cesty  $P_n$  do pavúčieho grafu  $S_{1, n-k-1, k, 1}$ . Ukázali sme, že antidilatácia je v takomto prípade rovná  $\lfloor (n+3)/2 \rfloor - k$ , ak  $2k+1 \leq n$ .

Podobne sme určili aj antidilatáciu cesty  $P_{kn+l(n-1)+1}$  do pavúčieho grafu  $S_{k, n, l, n-1}$ , ktorá dosahuje hodnotu  $n$  ak  $k > 0$ .

Neskôr sa v práci venujeme olivovníkom. Olivovníky sú trieda pavúčich grafov, ktoré majú  $k$  nôh dĺžok  $1, \dots, k$ . ( $i$ -ta noha v poradí má dĺžku  $i$ .) Horné odhady podobné tým, ktoré sme použili v predchádzajúcich prípadoch, neboli tesné. Preto predkladáme

vylepšenú metódu na horný odhad antidilatácie cesty do stromu.<sup>1</sup>

**Metóda 1.** Začneme s odhadom  $d = \text{exc}(v)$ , kde  $v$  je význačný vrchol. Pre všetky  $i \in \mathbb{N}$  od 0 budeme konštruovať množiny  $A_i = \{w \in V \mid \text{dist}(v, w) \leq i\}$  a  $B_i = \{w \in V \mid \exists u \in A_i, \text{dist}(u, w) \geq d\}$ . Ak  $A_i \cap B_i \neq \emptyset$ , odhadom je  $d$ . V prípade, že  $|A_i| - 1 = |B_i| \wedge A_i \cup B_i = V$ , tiež je odhad  $d$ . Inak ak  $|A_i| > |B_i|$ , tak sa hodnota  $d$  nedá dosiahnuť, pokračujeme od začiatku s odhadom  $d = d - 1$ . Inak pokračujeme s  $i$  o jedna väčším.

V práci ukazujeme, že odhad počítaný touto metódou je pre olivovníky tesný, ako tvrdí Veta 1.

**Veta 1.** Antidilatácia cesty  $P_{(k^2+k)/2+1}$  do olivovníka  $O_k$  je rovná hodnote vyrátanej Metódou 1.

Aj keď sme Metódu 1 tvorili pri hľadaní hodnoty antidilatácie cesty do olivovníka, tak je použiteľná aj pre iné typy stromov, ako ukazujeme v nasledovných vetách a hypotézach.

**Veta 2.** Antidilatácia cesty  $P_{k_1 n_1 + k_2 n_2 + 1}$  do  $S_{k_1, n_1, k_2, n_2}$  pre  $k_1 \geq 3$  a  $n_1 \geq n_2$  je rovná hodnote vyrátanej Metódou 1.

**Hypotéza 1.** Antidilatácia cesty  $P_{k_1 n_1 + k_2 n_2 + 1}$  do  $S_{k_1, n_1, k_2, n_2}$  pre  $k < 3$  je rovná hodnote vyrátanej Metódou 1.

Húsenica je strom, ktorého všetky vrcholy sú vo vzdialenosti 1 od centrálnej cesty. V húsenici  $C_{n,k}$  je každý vrchol centrálnej cesty incidentný s  $k$  vrcholmi mimo tejto cesty. Navyše táto cesta má dĺžku  $n$ .

**Hypotéza 2.** Antidilatácia cesty do húsenice  $C_{n,k}$  je rovná hodnote vyrátanej Metódou 1. Táto hodnota je  $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ .

## Literatúra

[Török, 2007] Török, L. (2007). *Two problems in graph layouts*. PhD thesis.

\* ivana.seleceniova@gmail.com

† kralovic@dcs.fmfi.uniba.sk

<sup>1</sup>Tu uvedená metóda platí len pre pavúče grafy. Dá sa však upraviť aj pre všeobecné stromy.

# Využitie interaktívnej tabule v MŠ: prípadová štúdia z Budapešti

Anita Krommerová<sup>1</sup>  
Školiteľ: Ivan Kalaš<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Katedra základov a vyučovania informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

V príspevku popisujem model získavania prvých skúseností s digitálnymi technológiami (ďalej niekedy len DT) v predškolskom veku v materskej škole Nyitnikék v Budapešti. Stručne predstavím, ako sa do materskej školy (ďalej niekedy len MŠ) dostala interaktívna tabuľa a predstavím priebeh aktivít s edukačnými softvérmi.

**Kľúčové slová:** interaktívna tabuľa, materská škola

## 1 Úvod

V dnešnej dobe sú digitálne technológie, počítače, komunikačné zariadenia a internet prirodzenou súčasťou každodenného života. Isté je aj to, že prítomnosť digitálnych technológií bude naďalej narastať, budú samozrejmom súčasťou každého vzdelávacieho prostredia a procesu.

V súčasnosti aj rodičia malých detí využívajú doma počítač, či už rekreačne alebo pracovne. Pravdepodobne sa mnoho rodičov zamýšľa nad vhodnosťou používania počítača už v predškolskom veku. Zaujímavá otázka je aj to, ako a čo našim deťom ukázať na počítači. V krajinách Európy, na Strednom východe a v Afrike (teda v regióne EMEA) realizovali prieskum týkajúci sa rodičovských predstáv, odkedy by podľa nich malo mať dieťa prístup k počítaču. Takmer štvrtina (24 %) rodičov z regiónu EMEA si myslí, že **dieťa od 5 rokov by malo mať možnosť spoznať prácu s digitálnymi technológiami**, upozorňujúc na vnímanie počítačov ako modernej súčasti života, pri ktorej by bolo skôr kontraproduktívne nevyužiť ju ako učebný nástroj už v takomto skorom veku [Matliak, 2009]. Dôležité je reagovať na skúsenosti detí z domáceho prostredia aj vo vzdelávaní. Preto je využívanie digitálnych technológií v materských školách plne opodstatnené.

Využívanie DT v slovenských materských školách sa postupne stáva realitou. Pre rozvíjanie digitálnej gramotnosti pedagógov materských škôl na Slovensku vznikol národný projekt **Vzdelávanie**

*pedagogických zamestnancov MŠ ako súčasť reformy vzdelávania*, súčasťou ktorého je aj **rozvoj digitálnej gramotnosti pedagógov MŠ**. V rámci projektu sa zapojené MŠ vybavili digitálnymi technológiami, ako sú počítač, digitálny fotoaparát, digitálna hračka Bee-Bot atď.

V súčasnosti som na študijnom pobyte v Budapešti, kde okrem iného aktívne navštevujem materskú školu Nyitnikék. V tejto MŠ žiaci pracujú s počítačom a interaktívnou tabuľou už od predškolského veku.

## 2 Kurikulum materských škôl v Maďarsku

V maďarských MŠ je hlavnou výchovno-vzdelávacou metódou hra. Hru považujú za najdôležitejšiu činnosť detstva, a prostredníctvom nej sa rozvíjajú kľúčové kompetencie detí. Pomocou hier sa deti v prvom rade učia základné pravidlá slušného správania a spoznávajú hygienické zásady. Podľa maďarského kurikula hlavné formy činností vzdelávania v MŠ sú: hra, verš, rozprávka, spev, kreslenie, modelovanie, ručné práce, pohyb, „pracovné“ činnosti a učenie sa (napodobňovaním, alebo objavovaním). Na rozdiel od slovenských MŠ, v roku 2009, maďarská vláda zrušila učenie prostredníctvom pedagógmi zahájených aktivít.

V slovenskom štátnom vzdelávacom programe pre predprimárne vzdelávanie v tematickom okruhu „JA SOM“ sa spomínajú **elementárne základy práce s počítačom**. Špecifické ciele tohto štandardu znamenajú zvládnuť, na základe nápodoby a slovných inštrukcií dospelého, na elementárnej úrovni prácu s počítačom – pracovať s detskými edukačnými programami.

V maďarskom štátnom vzdelávacom programe pre predprimárne vzdelávanie práca s počítačom, alebo s digitálnymi technológiami sa vôbec nespomína. Napriek tomu počítače sa objavili aj v niektorých maďarských materských školách. S tematikou digitálne technológie pre deti v predškolskom veku sa zaoberajú aj naši zahraniční susedia pomerne dlho.

<sup>1</sup> anita.krommerova@fmph.uniba.sk

<sup>2</sup> ivan.kalas@fmph.uniba.sk

### 3 MŠ Nyitnikék

Materská škola Nyitnikék v Budapešti je štátna MŠ. Jej špecifikom je zameranie na deti s rečovou poruchou. Spolupracuje s logopedickým centrom, ktorého zamestnanci priamo v MŠ realizujú sedenia pre problémové deti.

Zaujímavosťou tejto škôlky je to, že je prvou referenčnou SMART Board materskou školou.

#### 3.1 MŠ Nyitnikék a jeho prvé stretnutie s interaktívnou tabuľou

Približne pred rokom sa dostala interaktívna tabuľa do tejto MŠ. Jedna mamička oslovila učiteľku, či by mohla s deťmi vytvoriť promočné video o tom, ako využívajú deti tabuľu v predškolskom veku. Pedagogička v tom čase ešte ani netušila, čo to je, ale požiadavka ju zaujala, preto súhlasila s nahrávkou. Firma Smart Board ako prejav vďaky, požičala tejto MŠ na mesiac interaktívnu tabuľu. Učiteľku v krátkosti vyškolili na využitie tabule, pričom jej zdôraznili, že *nič sa nedá pokaziť*. Ukázali jej, ako sa tabuľa zapojí a technici odišli. Motom učiteľky sa stalo, že *pokaziť sa to nedá* a hneď ďalší deň spolu s deťmi zapli tabuľu. Pre učiteľku bol veľký úspech, že sa jej podarilo všetko rozbehnúť, keďže počítač predtým využívala len zriedka.



Obr. 1 Interaktívna tabuľa v MŠ

Učiteľka si zvolila ako úvodnú aktivitu s deťmi **kreslenie**. Dodnes odporúča začínať s touto aktivitou, keďže pre deti je to nesmierne silný pocit kresliť na takú obrovskú čistú bielu plochu. Ďalšie pozitívum vidí v tom, že dieťa môže hocikedy **opraviť svoju kresbu, vymazať časť, alebo prefarbiť úseky**. Detské kresby sa dajú **ukladať, vytlačiť**.

Skúšobný mesiac veľmi rýchlo ubehol. Učiteľka však bola až natoľko nadšená z možností, ktoré ponúkala tabuľa, že MŠ začala zvažovať možnosti zakúpenia tejto pomôcky. Mamička, ktorá prišla s požiadavkou nahrávania videa, sprostredkovala

firme informácie o plánoch MŠ. Takto vznikla idea, že interaktívna tabuľa možno nepatrí len do základných a stredných škôl. Firma sa rozhodla pridať MŠ Nyitnikék referenciu SMART Board, pričom ponúkli inštitúcii využívať a objavovať možnosti s tabuľou v priebehu ďalšieho jedného roku.

#### 3.2 Aktivity s interaktívnou tabuľou

Prvé aktivity s digitálnymi technológiami spravili v kresliacom programe. Vznikli zaujímavé kresby, deti sa realizovali čoraz smelšie.

Postupne sa tabuľa dostala aj do ďalších tried danej MŠ. Malý problém nastal vtedy, keď učiteľky už mali pocit, že len kresliaci program nestačí.

Keďže riaditeľka MŠ Nyitnikék je veľmi inovatívna a ako sama hovorí, tiež ju zaujímajú možnosti využitia digitálnych technológií, v celej materskej škole sa zaviedol internet.

Možnosti, ktoré ponúka svetová komunikačná sieť, je veľmi veľa. Učiteľky pred predstavením danej webovej stránky prísne skontrolujú obsah a edukačné ciele stránok / aktivít.

Prešlo pár mesiacov a do MŠ Nyitnikék prišla jedna doktorandka z ELTE (Eötvös Loránd University), ktorá robí výskum s deťmi predškolského veku. Predstavila pedagogičkám svoj **rozprávkový editor**, ktorý navádza deti, aby vykúzlili známu rozprávku v digitálnej forme. Editor ponúka importovanie ručne, alebo elektronicky kreslených postavičiek, pričom k príbehu je možné nahráť aj zvuky, či dialóg.



Obr. 2 Rozprávkový editor - Ťahal dedko repu

S rozprávkovým editorom sa najprv zoznámili učiteľky MŠ, následne mohli deti vytvárať svoje príbehy (podľa slov doktorandky ELTE: „možnosti editora niekedy deti pochopili omnoho rýchlejšie ako dospelí“).

Interaktívna tabuľa sa stala populárnou pomôckou tejto MŠ hlavne v dvoch predškolských triedach. Často sa učiteľky dohodnú, ktorá kedy využije tabuľu vo výchovno-vzdelávacom procese.

Počas mojich návštev MŠ Nyitnikék som uskutočnila výskum s deťmi aj vtedy, keď tabuľa bola práve v druhej triede. V takýchto prípadoch



som pripravila pre deti edukačný softvér a riešili sme zadania na mojom notebook-u. Práca pri tabuli, ale aj pri notebooku bola podobná. Deti si radili navzájom, skupinovo riešili úlohy. Postupom času som objavila jeden nezvyčajný zvyk detí. Často prstom ukazovali na monitor, dokonca niektoré deti mali tendenciu riešiť úlohu podobne, ako pri práci interaktívnou tabuľou, čiže dotykovo. Pre niektoré deti bola ťažká úloha pracovať s myšou. Aj keď deti porozumeli zadaniu, niekedy riešenie dlho neprichádzalo práve kvôli nedostatočným skúsenostiam s počítačovou myšou.

### 3.3 Prínos aktivít

S učiteľkami MŠ Nyitnikék som spravila rozhovor, prostredníctvom ktorého sme spoločne hodnotili prínos aktivít. Jedna z učiteliek, ktorá sa nebráni využívaniu DT v materskej škole je v strednom veku, kým druhá učiteľka len nedávno ukončila vzdelávanie.

Staršia pedagogička bola tá, ktorá sa mohla prvýkrát zoznamovať s tabuľou. V tých časoch prácu na počítači ovládala len na slabej úrovni, ale postupom času sa jej podarilo zbaviť zábran. V súčasnosti aktívne vyhľadáva možnosti využitia DT v materskej škole.

Na moje prekvapenia, tá mladšia učiteľka mi porozprávala, ako nemá rada počítač a prácu s ním. Zo začiatku sa jej ani nepáčilo, že sa v MŠ objavila taká „veľká tabuľa“. Keď však zobrala svoje deti do triedy s interaktívnou tabuľou, zistila jej čarovný vplyv na deti.



Obr. 3 Učiteľka a nadšené dieťa

Na základe informácií, ktoré skúsenejšia učiteľka nadšene rozprávala, aj mladšia učiteľka pristúpila k využitiu DT v jej triede. Dnes aktívne hľadá rôzne edukačné softvéry.

Dôležitým prínosom interaktívnej tabule v živote predškôľakov je rozvoj ich grafomotoriky. Predškôľáci, ktorí majú možnosť kresliť

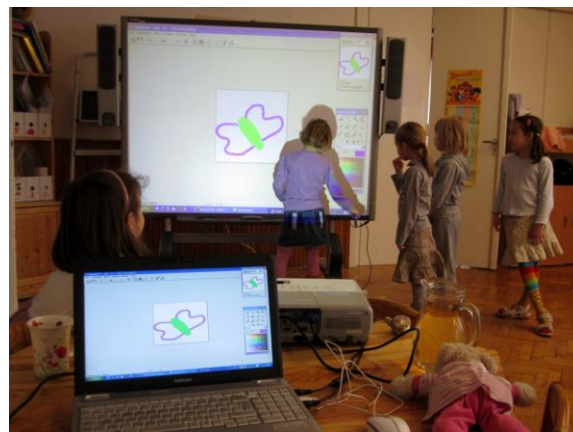
na interaktívnej tabuli sú väčšinou vo veku 6 rokov, čiže o rok sa im odložil nástup do základnej školy. Podľa slov učiteľky ešte pred rokom mala strach o tieto deti, ako zvládnu prvé kroky na základnej škole, kde sa učia písať. Grafomotorika deti bola slabá a deti, hlavne chlapci neradi kreslili na papier. Po inštalácii interaktívnej tabule v triede začali postupom času tieto deti kresliť. Posmelila ich tvorba na tabuli. Keď niečo chceli nakresliť inak, ako sa im to podarilo na prvýkrát, tak použili tlačidlo „krok späť“ a nemuseli gumovať „nevydarené“ časti kresby. Deti boli tak motivované a nadšené, že sa za ten rok nesmierne zlepšili v kreslení. Dokonca deti, ktoré predtým vôbec nechceli kresliť na papier, dnes samé chytia do ruky ceruzky a snažia sa kresliť ručne. Pravdaže, stále to nie sú „dokonalé“ kresby, ale výrazne sa zlepšila ich grafomotorika.



Obr. 4 Rozprávkový editor – rytieri s mečom

Rozprávkový editor hravou formou rozvíja u detí rôzne kompetencie, ktoré potrebujú školopovinné deti. Pomocou editora vieme rozvíjať u detí schopnosť vyjadriť sa a tvoriť vlastné kresby. Keďže v rozprávke chce vystupovať každé dieťa, nadšene sa učia krátke texty dialógu. Počas vytvárania rozprávky máme možnosť rozvíjať u detí aj ich priestorovú orientáciu.

Aktivity s DT značne podporujú komunikáciu a kolaboráciu medzi deťmi a takisto rozvíjajú ich sociálne zručnosti [Kalaš, 2010]. S touto myšlienkou plne súhlasia aj učiteľky MŠ Nyitnikék.



Obr. 5 Spolupráca pri interaktívnej tabuli

Ako som už spomínala, niektoré deti navštevujúce túto MŠ majú rečovú poruchu. Obzvlášť prekvapilo pedagógov, ktoré integrujú digitálne technológie do výchovno-vzdelávacieho procesu, že u niektorých zakríknutých detí práve počítač a interaktívna tabuľa vyvolali ich aktívne zapájanie sa do rôznych činností.

## Záver

Vďaka študijnému pobytu získavam predstavu o využití interaktívnej tabule v materskej škole. V ďalšej fáze môjho výskumu by som rada využila tieto skúsenosti vo svojom výskume.

## Literatúra

- [Kalaš, 2010] Kalaš, I. *Recognizing Potential of ICT in Early Childhood Education*. Moscow : UNESCO IITE/INS/AS, 2010, ISBN: 978-5-905175-03-9.
- [Matliak, 2009] Matliak, B. *Sú súčasní rodičia dostatočne digitálne IN?* Portál Media Info Servis – webová informačná agentúra [online, cit. 9.4.2011] <http://www.mediainfoservis.sk/modules.php?name=News&file=article&sid=896>

# Rozvoj tvorivosti žiakov v kontexte školskej informatiky

Katarína Mikolajová

Školiteľ: Ivan Kalaš

Katedra základov a vyučovania informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

V príspevku sa zaoberáme rozvojom tvorivosti žiakov v kontexte školskej informatiky. Bližšie sa zameriavame na osobnosť učiteľa a tvorivý edukačný proces. Skúmame tiež možnosti digitálnych technológií pri rozvíjaní kreativity žiakov.

Konkrétnejšie popisujeme programovacie prostredie Scratch, ktoré umožňuje žiakom zmeniť sa z pasívnych konzumentov multimedialného obsahu na jeho aktívnych tvorcov – vytváraním vlastných interaktívnych príbehov, hier, animácií, tutoriálov, výtvarných a hudobných projektov a zdieľaním svojich výtvorov na webe. Pomocou tohto prostredia môžeme žiakov oboznámiť so základnými programátorskými konceptmi veľmi praktickou a názornou cestou, zároveň nám Scratch umožňuje podporovať ich tvorivosť a seba-vyjadrenie.

**Kľúčové slová:** tvorivosť, tvorivý učiteľ, programovanie, Scratch

## Úvod

V našom príspevku sa zmysľáme nad podporou rozvoja tvorivosti žiakov v kontexte školskej informatiky.

V prvej časti sa zaoberáme osobnosťou učiteľa a tvorivým edukačným procesom.

V ďalšej časti budeme uvažovať, aké charakteristiky by mali mať digitálne technológie podporujúce tvorivosť a aké procesy a spôsoby učenia sa žiakov by mali umožňovať.

V príspevku ďalej skúmame možnosť rozvíjania tvorivosti prostredníctvom programovania a konkrétneho digitálneho nástroja – programovacieho prostredia Scratch. Pomocou tohto prostredia môžeme žiakov oboznámiť so základnými programátorskými konceptmi veľmi praktickou a názornou cestou, zároveň nám Scratch umožňuje podporovať ich tvorivosť a seba-vyjadrenie.

V poslednej časti uvádzame aktivity – hry, ktoré sme realizovali v tomto programovacom prostredí v rámci informatického krúžku pre 6. a 7. ročník na ZŠ Karloveská.

## 1 Osobnosť učiteľa a tvorivý edukačný proces

Osobnosť učiteľa je v tvorivom procese veľmi dôležitá. Práve on dokáže stimulovať žiakov výberom správnych aktivít a vhodnou motiváciou k tvorivej činnosti. Dôležité je i to, ako riadi a podporuje samotný tvorivý proces, v neposlednom rade i jeho hodnotenie výsledného produktu alebo záveru tvorivej činnosti.

Výskum v kontexte vzdelávania ukazuje, že sebadôvera, nadšenie a odhodlanie sú spoločné vlastnosti tvorivých učiteľov. Pre sebadôveru učiteľa, a napokon aj pre jeho vlastnú tvorivosť, je dôležitá tiež dobrá znalosť predmetu.

Podľa viacerých autorov sú kreatívni učitelia ochotní riskovať – či už v profesionálnom alebo aj v osobnom živote (Bodenová, 2001; OfSTED, 2003), zlyhanie budú s veľkou pravdepodobnosťou vnímať ako príležitosť (po)učiť sa. Bez rozpakov demonštrujú svoje vlastné tvorivé schopnosti, ako aj nejednoznačnosť, pochybnosť či neistotu, ktoré sú vlastné tvorivému procesu (Halpin, 2003 v Cremin, 2009). Woods & Jeffrey (1996 v Cremin, 2009) zdôrazňujú humanistický prístup tvorivých učiteľov, ich otvorenosť emóciám a pocitom a silnú morálnu angažovanosť vo svojej práci.

Tvoriví učitelia nabádajú svojich žiakov ísť „za hranice vlastných obmedzení“, nazerať na veci nezvyklým spôsobom, rozmyšľať mimo zaužívaných štruktúr a nespoliehať sa na predvídateľné výsledky. Takýto prístup ilustruje veta učiteľa, ktorý svojej triede povedal: „Na mojej hodine môžete s istotou očakávať jednu vec: neočakávané“ (OfSTED, 2003).

Ako reakcia na správu NACCCE (National Advisory Committee on Creative and Cultural Education) pre DfEE (1999) bol v Anglicku v Národnom kurikulu ako jeden zo šiestich kľúčových cieľov vytýčený rozvoj spôsobilosti myslenia<sup>1</sup>, ktorého súčasťou je aj tvorivé myslenie umožňujúce žiakom generovať a rozširovať idey a myšlienky, navrhovať hypotézy, využívať predstavivosť a hľadať inovatívne alternatívne riešenia (QCA, 1999b). Na podporu učiteľov vytvorila QCA (Qualifications and Curriculum Authority) webovú stránku s názvom „Tvorivosť: Hľadájme ju! Podporujme ju!“ (pozri aj QCA,

<sup>1</sup> *Thinking skills*, v preklade podľa Švec (2008)

2004), ktorá im mala pomáhať podporovať tvorivosť svojich žiakov počas vzdelávacieho procesu. Na tejto stránke nájdeme aj niekoľko odporúčaní pre učiteľa. Ten by mal počas tvorivého procesu (QCA, 1999a):

- aktívne **povzbudzovať žiakov ku kladeniu otázok**, k vytváraniu si spojitostí, k predstavovaniu si „čo by mohlo byť, ak...“, k objavovaniu myšlienok; podporovať a odmeňovať predstavivosť a originalitu,
- **klásť otvorené otázky**, napr. „Čo ak...“, „Ako by si mohol...“, aby sme pomohli žiakom vidieť problém z rôznych perspektív,
- **hodnotiť a chváliť to**, čo žiaci robia a hovoria, vytvoriť atmosféru, v ktorej sa cítia bezpečne na to, aby mohli prezentovať svoje názory a myšlienky, aby sa nebáli riskovať a kreatívne reagovať,
- pripraviť **čo možno najviac nepredpokladaných udalostí**, ak je to vhodné, odložiť na bok plán hodiny a dynamicky reagovať na momentálnu situáciu, samozrejme, stále so zreteľom na učebné ciele,
- byť ochotný **postaviť sa ako učiteľ bokom** a nechať žiaka nachvíľu viesť hodinu, vždy ale ostať pripravený pomôcť, byť poruke a promptne zasiahnuť alebo podporiť žiaka, ak to potrebuje,
- zapojiť sa do aktivít a modelovať kreatívne zmýšľanie a správanie sa, ukázať žiakom, že **aj samotný učiteľ sa učí** – to pomáha vytvoriť priateľskú, otvorenú atmosféru,
- umožniť **žiakom pracovať v skupine** – aj rôznych vekových kategórií.

Podpora tvorivosti v školskej informatike je komplexný proces. Ako sme už naznačili, dotýka sa foriem a metód výučby, vhodného výberu aktivít a DT (digitálnych technológií), pomocou ktorých budeme aktivity realizovať (tejto problematike sa venujeme v ďalšej časti tohto príspevku), osobnostných charakteristík učiteľa a jeho „tvorivej praxe“, a napokon celkovej atmosféry v triede i étosu celej školy (Cremin, 2009). V nasledujúcej tabuľke uvádzame niekoľko odporúčaní a prístupov, ktoré by mali počas vyučovacej hodiny podporiť tvorivý proces. Inšpirovali sme sa stránkou <http://www.funlearning.de/>.

#### Aká je úloha alebo aktivita:

- ✓ subjektívne nová (v systéme žiakových skúseností) a inšpirujúca,
- ✓ divergentná – otvorená rôznym výstupom, prístupom, spôsobom riešenia,
- ✓ aplikujúca nové znalosti.

#### Čo umožníme žiakom:

- ✓ identifikovať sa s úlohou,
- ✓ skúšať, robiť omyly, samostatne nachádzať správne riešenia,
- ✓ experimentovať a byť originálnymi.

#### Akú rolu má učiteľ:

- ✓ intelektuálny „tréner“,
- ✓ radí, podporuje, usmerňuje,
- ✓ jeho vlastný výklad nie je v centre diania, svoju pozornosť sústreďuje najmä na žiakov a ich aktivitu.

#### Aké podmienky a atmosféru vytvoríme:

- ✓ dostatok času,
- ✓ atmosféru plnú experimentovania,
- ✓ atmosféru, v ktorej je rôznorodosť vítaná.

## 2 Vzťah digitálnych technológií a tvorivosti

Americký psychológ Benjamin Bloom navrhol taxonómiu vzdelávacích cieľov, ktorá nám pomáha sústrediť sa pri učení aj na náročnejšie myšlienkové operácie.

Na vrchole tejto pyramídy stojí tvorivosť, ktorú Bloom chápe ako najvyšší vzdelávací cieľ. Stojí však na zvyšných piatich pilieroch, ktoré sú zároveň súčasťou a predpokladom tvorivého procesu.

Podľa Resnicka (2007) zohrávajú nové technológie v tvorivej spoločnosti dvojakú úlohu. Na jednej strane neustály prienik DT do rôznych sfér nášho života zvyšuje rýchlosť zmien a zdôrazňuje potrebu tvorivého myslenia vo všetkých aspektoch ľudského bytia. Na druhej strane majú DT potenciál – ak sú vhodne navrhnuté a správnym spôsobom použité, pomáhať ľuďom rozvíjať svoje tvorivé schopnosti, aby tak boli lepšie pripravení na život v tvorivej spoločnosti. DT teda na jednej strane urýchľujú tempo zmien, a tým implikujú potrebu tvorivých nápadov a nových ideí, na strane druhej môžu DT proces hľadania a generovania nových tvorivých myšlienok a ideí výrazne podporiť. Pritom je dôležité, aby sme v tomto procese vedeli zvoliť „vhodné“ DT a „správnym“ spôsobom ich aj využili. Ďalej preto budeme uvažovať nad tým, aké charakteristiky by mali mať DT podporujúce tvorivosť a aké procesy by mali umožňovať.

## 2.1 Aké charakteristiky majú DT podporujúce tvorivosť?

Loveless (2002) identifikuje 4 kľúčové vlastnosti DT, ktoré dáva do súvislosti priamo s podporou tvorivosti a tvorivým procesom:

- provizórnosť alebo **podpora pokusných krokov** – robiť zmeny a v prípade potreby sa vrátiť späť, skúšať alternatívy, načrtávať a zaznamenávať vývoj myšlienok či riešenia,
- **interaktívnosť** – na mnohých úrovniach, príkladom sú interaktívne hry, ktoré priamo reagujú na naše rozhodnutia alebo hodnotia riešenia, virtuálne laboratória alebo simulácie, kde môžeme dynamicky meniť rôzne parametre a bezprostredne sledovať zmeny,
- **kapacita a rozmanitosť v spôsobech**, akým DT poskytujú prístup k obrovskému množstvu informácií na lokálnej aj globálnej úrovni v rôznom čase a na rôznych miestach; môžeme to chápať aj ako **bohatú paletu možností**, ktoré nám DT ako podpora pri riešení rôznych typov problémov poskytujú,
- **rýchlosť** a automatizácia operácií, ktoré umožňujú pracovať s informáciami efektívnejšie.

Greene (2002) a Schneiderman (2002) sa zameriavajú na konkrétne digitálne nástroje a programy, ktoré podporujú tvorivý proces. Definujú určité požiadavky, ktoré by mali tieto nástroje spĺňať:

- podporujú „bezbolestné“ objavovanie a experimentovanie,
- jednoduchým spôsobom umožňujú kroky späť a dopredu,
- chyby netrestajú, úspech zmysluplne odmenia,
- po akcii nasleduje okamžitá a užitočná spätná väzba,
- podporujú pocit kontroly nad procesmi a akciami,
- vizualizujú dáta a procesy za účelom pochopenia a objavovania vzťahov a závislostí,
- umožňujú objavovať možné riešenia, vytvárať „čo-keby“ scenáre,
- umožňujú prehľadávať a skúmať ďalšie zdroje a digitálne knižnice za účelom získavania nových poznatkov a inšpirácií,
- umožňujú šíriť výsledky svojej práce za účelom uznania a rozšírenia databázy dostupných zdrojov.

DT podporujúce tvorivosť by zároveň mali podporovať laterálne myslenie<sup>2</sup>, ktoré sa nezameriava na hľadanie len jednej, tej „najlepšej“ cesty, naopak, snaží sa objaviť čo najviac alternatív, hľadá aj neobvyklé, málo pravdepodobné riešenia.

Ku spomínaným charakteristikám by sme v kontexte digitálnych nástrojov zameraných na programovanie vytvárané multimediálne projekty<sup>3</sup> (interaktívne animácie, príbehy, obrázky, videá, hry atď.) pridali ešte jednu vlastnosť, a to možnosť rýchlej a jednoduchšej personalizácie, ktorú v tomto kontexte chápeme ako prispôbenie objektov, scén, postáv, príbehovej línie požiadavkám vlastného vkusu a svojim predstavám. Znamená to dovoliť používateľovi vybrať si z bohatej knižnice hotových objektov a umožniť mu importovať či vytvoriť si svoj vlastný obrázok, postavu, scénu, obrázok.

## 3 Tvorivosť a programovanie

Digitálne technológie sa stali bežnou súčasťou života mladej generácie. Počiatkové nadšenie z nového, ťažko dostupného a výnimočného postupne opadlo. Mnoho mladých ľudí je vo využívaní digitálnych technológií veľmi zručných – navštevujú sociálne siete, chatujú, hrajú hry, prehrávajú videá, vyhľadávajú a browsujú na internete – povrchný pohľad by mohol naznačovať, že sú digitálne gramotní. Nie sú však schopní vytvoriť vlastnú hru, animáciu, či zmysluplný (interaktívny) obsah. Podľa (Resnick, 2009) sa v kontexte digitálnych technológií naučili „čítať“, ale nie „písať“. Schopnosť vytvárať, vyjadrovať sa, dizajnováť a efektívne k tomu využívať rôzne digitálne nástroje je to, čo im k digitálnej gramotnosti chýba.

Široké možnosti vytvárať interaktívny obsah a vyjadrovať sa dáva žiakom do rúk programovanie. Rozvíja u nich algoritmické myslenie, schopnosť riešiť problémy, učí ich navrhovať externé reprezentácie štruktúr, ktoré sa vynoria počas analýzy problému, ako aj reflektovať vlastný proces uvažovania (metakognícia). Otvára im aj nové možnosti, ako sa vyjadriť.

Napriek spomínaným možnostiam a sile, ktorú programovanie dáva do rúk žiakovi, i napriek tomu, že má už dlhé roky v školskej informatike svoje pevné miesto, stále nezískava na popularite. Zostáva v záujme úzkeho okruhu žiakov (prevažne chlapcov). Je potom o to prekvapivejšie, že existuje rozsiahla komunita ľudí, ktorá vo svojom voľnom čase a bez nároku na mzdu vytvára nové programy, ktoré potom využíva obrovská skupina ľudí. Hlavným hnacím motorom k vytváraniu slobodných a otvorených programov je veľká vnútorná motivácia autorov týchto programov.

Knobelsdorf a Romeike (2008) skúmali, ktoré faktory stimulujú motiváciu programátorov open-source programov k tomu, aby dlhé hodiny bez nároku na mzdu strávili programovaním voľne

<sup>2</sup> Podľa Edwarda de Bona

<sup>3</sup> V origináli *programmable media* (Monroy-Hernández a Resnick, 2008)

širitel'nych aplikácií. Identifikovali nasledujúce faktory: použitie/využitelnosť, intelektuálna výzva, reputácia, identifikácia so skupinou, učenie sa a altruizmus. Významným faktorom je i to, že takéto programovanie poskytuje autorom značný priestor pre tvorivosť a sebaujadrenie.

Niektorí výskumníci sa nazdávajú, že práve tvorivosť, možnosť sebaujadrenia (Pepler a Kafai, 2005; Resnick, 2002; Romeike, 2007) a realizácie vlastných myšlienok, nápadov a projektov (Meisalo a kol., 1997) môže byť výrazným motivačným faktorom, ktorý povedie k zmene postojov žiakov k programovaniu, a následne jeho väčšej popularite na školách, a to rovnako u dievčat aj chlapcov.

Romeike (2007) naznačuje, že motiváciu k programovaniu môžeme podporiť aj tým, že:

- **budeme dbať na využitelnosť** – snažme sa navrhovať a vyberať také aktivity, ktoré vedú k vytvoreniu zmysluplného programu (aplikácie, hry, interaktívneho príbehu); zadanie by malo byť zrozumiteľné a adresovať záujmy študentov, teda to, s čím sa reálne stretávajú a čomu aj v živote mimo školy venujú svoju pozornosť,
- **budeme podporovať prezentovanie výsledných projektov a ich zdieľanie on-line** – podporujeme žiakov v tom, aby svoje projekty zdieľali v rôznych on-line komunitách alebo na webových stránkach. Mnoho programov pre mladých ľudí zameraných na tvorbu interaktívnych animovaných príbehov, hier, na vytváranie a upravovanie obrázkov, pohľadníc, rozprávok, či komponovanie alebo editovanie hudby funguje ako webová aplikácia<sup>4</sup> bez požiadavky stiahnuť si program na svoj počítač. Prihlásený používateľ si svoj výtvor môže uložiť na príslušný server, alebo sa inšpirovať a učiť sa prezeraním, sťahovaním a upravovaním projektov ostatných členov komunity. Rovnako môže zdieľať svoj vlastný projekt – dovoliť ostatným členom on-line komunity prehrať si ho, vyskúšať či zahráť, komentovať alebo aj stiahnuť a ďalej projekt upravovať. Pre žiakov je motivujúce jednak to, že sa ich projekt vzápätí objaví v on-line galérii najnovších projektov dostupný a viditeľný pre kohokoľvek na svete, kto v danej chvíli webovú stránku navštívi, a jednak istá forma spolunáležitosti, ktorú členstvo v danej komunite prináša
- **podporíme skupinovú prácu** – stotožnenie sa jednotlivca so skupinou môže viesť k silnej identifikácii sa s cieľmi tejto skupiny, žiaci sa tiež môžu učiť od seba navzájom a využiť svoje špecifické silné stránky,

- podporíme **zmysluplné učenie sa** – hovorme žiakom, ako a kde budú môcť získať poznatky a vedomosti využiť, motivujme ich tým, že im ukážeme, aké zaujímavé projekty budú schopní s novými poznatkami sami vytvárať.

V ďalšej časti príspevku sa zameriame na prostredie Scratch a možnosti, ktoré nám pri rozvíjaní tvorivosti poskytujú.

### 3.1 Scratch

V tejto podkapitole predstavíme programovacie prostredie Scratch, ktoré podporuje učenie sa objavovaním a tvorivosť žiaka. Prvá vlastnosť vyplýva z intuitívneho ovládania, vhodnej vizualizácie a reprezentácie programovacích štruktúr, drag-and-drop rozhrania, okamžitej odozvy na príkaz alebo program vo forme akcie. Druhú vlastnosť budeme skúmať na základe porovnania s požiadavkami Greene a Schneiderman, ktoré sme bližšie popísali v predchádzajúcej časti.

Scratch začal vyvíjať tím Lifelong Kindergarten Group v roku 2003 s pôvodným zámerom vytvoriť intuitívny, jednoduchý no zároveň „silný“ a atraktívny nástroj na programovanie pre žiakov vo veku 8 až 16 rokov. Pôvodne mal byť súčasťou neformálneho vzdelávania odohrávajúceho sa mimo školy – v počítačových kluboch (v miestach so znevýhodnenou ekonomickou situáciou), krúžkoch, knižniciach, alebo aj doma (Utting a kol., 2010). Postupne sa však tento jazyk dostal do škôl, dokonca sa využíva aj na niektorých univerzitách v základných kurzoch programovania pre študentov, ktorí s programovaním nemajú predošlú skúsenosť (napr. na Harvardovej univerzite alebo na univerzite v Berkeley, kde vedie kurzy B. Harvey v rozšírenej verzii prostredia Scratch s názvom BYOB).

Scratch je voľne stiahnuteľný open-source program, dostupný takmer v 50 jazykových lokalizáciách (aj slovenskej, pozri Drahošová, 2010), o. i. distribuovaný aj vzdelávacími organizáciami, napríklad One Laptop per Child v XO laptopoch. Stránka projektu i samotný program ku stiahnutiu sa nachádza na adrese <http://scratch.mit.edu>.

Scratch umožňuje žiakom zmeniť sa z pasívnych konzumentov multimediálneho obsahu na jeho aktívnych tvorcov (Schorow, 2007) – vytváraním vlastných interaktívnych príbehov, hier, animácií, narodeninových pohľadníc, vedeckých simulácií, tutoriálov, výtvarných a hudobných projektov a zdieľaním svojich výtvorov na webe. Pomocou prostredia Scratch môžeme žiakov oboznámiť s fundamentálnymi programátorskými konceptmi praktickou cestou, zároveň nám toto prostredie umožňuje podporovať ich tvorivosť (Romeike, 2007) a sebaujadrenie. Aby boli projekty pre žiakov zmysluplnejšie a motivujúcejšie, umožňuje Scratch do projektu jednoducho importovať

<sup>4</sup> Pozri napr. [www.kerpoof.com](http://www.kerpoof.com), [www.aviary.com](http://www.aviary.com), [www.designblocks.net](http://www.designblocks.net)

obrázky, zvuky alebo hudbu. Toto prostredie má tiež vlastný editor kreslenia a nástroj na nahrávanie zvuku.

Dôležitý je aj sociálny rozmer tohto projektu. Webová stránka celosvetovej Scratch komunity umožňuje projekty prezentovať, vzájomne zdieľať, komentovať iné projekty, cez komentáre reflektovať svoje vlastné, vzájomne sa povzbudzovať, oceňovať, spoločne projekty vytvárať. Každý, kto chce na portál umiestniť svoj vlastný projekt, príp. stiahnuť si alebo komentovať projekt niekoho iného, musí mať na portáli vytvorený svoj vlastný profil. Členovia tejto on-line komunity medzi sebou komunikujú a nadväzujú priateľstvá – kladú si otázky, radia jeden druhému, zakladajú skupiny (zamerané napr. na vytváranie kvalitných hier).

Na stránke Scratch komunity môžeme vyhľadávať pomocou galérie, do ktorých sa projekty zadeľujú podľa tagov, čiže spoločných tém alebo znakov. V januári 2011 bolo na nej nahraných vyše 1 500 000 projektov. Viac ako 15 percent z nich sú nadstavbou predchádzajúcej práce (Monroy-Hernández a Resnick, 2008) – keďže projekty sú pre prihlásených členov voľne dostupné, môžu si ich stiahnuť, skúmať, ďalej upravovať a upravené na portál znovu umiestniť. Ak vznikol nový projekt na základe už existujúceho, objaví sa v popise nového projektu odkaz aj na pôvodný. Žiaci sa takto učia od seba navzájom – skúšaním, experimentovaním a porozumením kódu hotových projektov, ktoré ich zaujali. Podľa Monroy-Hernández a Resnick (2008) prináša takéto učenie sa v prostredí on-line komunity viac povzbudenia, pocit spolunáležitosti a ocenenia.

### 3.1.1 Scratch a požiadavky na digitálne nástroje podporujúce tvorivosť podľa Greene (2002) a Schneiderman (2002)

Jazyk Scratch vychádza z filozofie jazyka Logo. Procesy vizualizuje rovnakým spôsobom – na scéne je umiestnená postava (objekt), ktorá zvolené príkazy alebo skupiny príkazov vykonáva. Príkazy sa vykonávajú vzápätí po kliknutí na konkrétny dielik alebo skupinu dielikov (alebo po spustení programu napr. vstupom z klávesnice). Žiak dostáva okamžitú a zrozumiteľnú spätnú väzbu, a to na základe akcie, ktorá sa na scéne vzápätí odohrá (postava sa pohne, otočí, čosi povie atď.). Práve takýto typ spätnej väzby – formou akcie, ktorá okamžite na obrazovke prebehne – vyvoláva u žiakov pocit väčšej kontroly v procese objavovania, a tým podporuje aj vlastné učenie sa (Romeike, 2007).

Podporou pre samostatné objavovanie je aj ďalší princíp – omyly sa „netrestajú“. V tomto programe je dobre ošetrené, v princípe vylúčené, aby žiak urobil závažný chybný krok, ktorý spôsobí, že mu program napr. "padne". Vlastný program vzniká skladaním už hotových dielikov s rôznymi príkazmi do väčších blokov. Dieliky rôznych skupín majú

odlišný tvar, dajú sa teda spojiť len v prípade, že je to formálne správne. Navyše môže „nesprávny“ dielik veľmi jednoducho – ako stavebnicu, z programu odobrať. Jednotlivé príkazy alebo programy tak môže žiak „bezbolestne“ objavovať, skúšať a overovať. Spomínané vlastnosti umožňujú žiakom slobodne pohrávať sa s objektmi a programovými štruktúrami, dovoľujú im experimentovať a vytvárať „čo-keby“ scenáre.

Keďže žiak nepíše žiaden text ale skladá hotové príkazy, vyhne sa syntaktickým chybám a upriamenu sa na detaily, a môže tak v plnej miere sústrediť svoju pozornosť na logiku hry (Malan a Leitner, 2007).

Ako sme už spomenuli, nespornou výhodou a vlastne i jednou z hlavných myšlienok projektu Scratch je aj webový portál projektov a obrovská on-line komunita, ktorá v rámci neho vznikla. Žiaci sa môžu inšpirovať a učiť sa od seba navzájom – z projektov iných členov komunity, ktoré sú na portáli umiestnené. Rovnako môžu na portál umiestniť svoj vlastný projekt, napr. za účelom uznania, spätnej väzby či rozšírenia databázy prístupných zdrojov.

### 3.1.2 Aktivity v prostredí Scratch

V tejto časti predstavíme niekoľko aktivít, ktoré sú popri rozvíjaní informatických kompetencií (najmä algoritmické myslenie) zamerané na podporu rozvoja tvorivosti žiakov. Bližšie sme ich popísali v článku publikovanom na konferencii Didinfo 2011 [Mikolajová, 2011]. Realizovali sme ich v rámci informatického krúžku so žiakmi 6. a 7. ročníka. Jedna aktivita spravidla trvala hodinu až hodinu a pol, čo charakter informatického krúžku dovoľoval. Je dôležité podotknúť, že žiaci nemali žiadne skúsenosti s programovaním. Vybrané aktivity nasledovali po štyroch úvodných hodinách zameraných na oboznámenie sa s prostredím, kreslenie rôznych útvarov a pochopenie základných programátorských konceptov (cyklus, podmienený príkaz).

#### Šikovná ruka

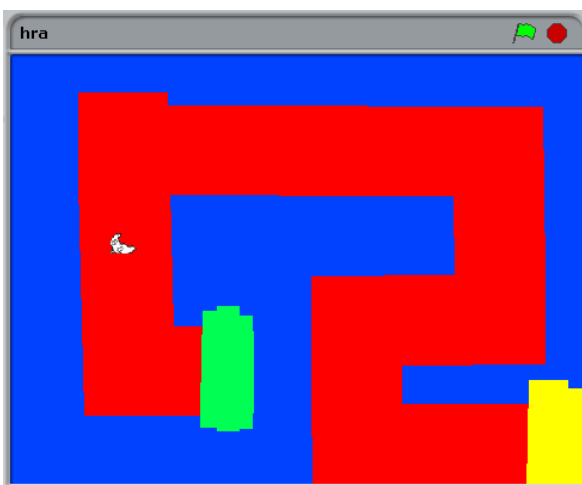
Táto hra bola prvá, ktorú sme so žiakmi naprogramovali – hrali ju on-line pred začatím krúžku. Zadanie hry i jej realizácia je pomerne jednoduchá – postavička sa pohybuje za ukazovateľom myši, ktorý sa posúva po vyznačenej trase, nesmie sa pritom dotknúť steny (inej farby, ktorá je mimo trasy). Hráč vyráža zo štartovacej pozície a snaží sa dostať do cieľa. Ak doň úspešne dorazí, dostáva sa na ďalšiu, náročnejšiu úroveň. V prípade, že sa postavička dostane mimo trasy, obrazovka sa zmení a oznámi koniec hry. Ak dorazí až do cieľa na poslednej úrovni, záverečná obrazovka oznámi víťazstvo.

Kontrolu toho, či sa hráč dostal do cieľa alebo toho, či nevybočil z trasy a nenastal koniec hry

vyriešime tým, že sa opýtame na farbu pozadia, ktorej sa hráč dotýka (nad ktorou sa ľubovoľnou časťou tela nachádza).

Scéna i postavička sú dva samostatné objekty s vlastnými skriptami. V skripte jedného objektu nemôžeme zavolať príkazy pre iný objekt. Tento problém je vyriešený tzv. broadcastovaním, čiže posielaním správ. V skripte ktoréhokoľvek objektu vieme vyslať správu všetkým ostatným objektom, ktoré vedia reagovať na prijatie správy.

Ak sa teda hráč dotkne farby mimo vyznačenej trasy resp. dorazí do cieľa, ktorý má svoju špecifickú farbu, vyšle správu všetkým objektom (v tomto prípade len scéne), ktorá zasa po prijatí správy zmení pozadie na to správne.



Obr. 1 Ukážka bludiska



Obr. 2 Ukážka skriptu hráča

## Pacman

Táto hra je zaiste dobre známa: z hľadiska programátorských konceptov i dĺžky realizácie ide o náročnejší projekt. Postavička – pacman – zbiera guľôčky, ktoré sú rozmiestnené na hracej ploche. Ulohou je vyzbierať všetky guľôčky a nenechať sa pri tom chytiť ďalšou postavou, ktorá pacmana naháňa (pohybuje sa náhodne alebo systematicky smerom k pacmanovi). Ak navyše pacman pri zbieraní vybočí z trasy, nastane koniec hry.

Pri programovaní tejto hry sa museli žiaci zamyslieť nad viacerými náročnejšími konceptmi: rátanie skóre – ak narazí pacman na guľôčku, tá sa schová, skóre sa zvýši o jeden bod,

- kontrola skóre – po vyzbieraní všetkých guľôčok je hra úspešne zakončená,
- zmena kostýmu pacmana po určitom počte krokov – otváranie a zatváranie úst (na to slúži premenná počítadlo),
- ovládanie postavičky, ktorá pacmana naháňa.

## Súboj

Táto jednoduchá a obľúbená hra je hrou pre dvoch hráčov. Každý z nich ovláda svoju postavu smerom nahor a nadol a popritom strieľa (žiak z ukážky zvolil ako náboje autobusy a lietadlá). Súčasne môže letieť „vzduchom“ od jedného hráča viacero striel, v našom prípade tri.



Obr. 3 Ukážka obrazovky z hry





Obr. 4 Ukážka skriptu hráča

### Trafím ťa, alebo kto je rýchlejší

V tejto hre hráč ovláda postavičku, ktorá po stlačení klávesu vystrelí strelu (napr. tenisovú loptičku alebo šíp). Zhora v náhodnom čase a náhodnou rýchlosťou padajú predmety, ktoré sa vystrelenou strelou snaží hráč zasiahnúť. Ak trafi, pripočíta sa mu ku skóre bod, ak predmet padne na zem, bod sa mu odráta.

Pri programovaní tejto hry sa žiaci oboznámili s novými konceptmi:

- zjavenie sa padajúceho predmetu v náhodnom intervale od 0 do 10 sekúnd od spustenia hry,
- padanie predmetu smerom nadol náhodnou rýchlosťou,
- vygenerovanie náhodnej pozície padajúceho predmetu (x-ovej súradnice).



Obr. 5 Ukážka obrazovky z hry 1



Obr. 6 Ukážka obrazovky z hry 2

## Záver

V príspevku sme sa zamýšľali nad konkrétnymi faktormi, ktoré môžu podporiť rozvoj tvorivosti žiakov v kontexte školskej informatiky. Zamerali sme sa na osobu učiteľa a jeho úlohu v tvorivom edukačnom procese.

Snažili sme sa identifikovať tie vlastnosti digitálnych technológií, ktoré podporujú učenie sa a rozvoj tvorivosti žiaka. Podrobnejšie sme čitateľa oboznámili s programovacím prostredím Scratch.

Uviedli sme ukážky niekoľkých hier, ktoré sme so žiakmi 6. a 7. ročníka ZŠ programovali v rámci informatického krúžku. Keďže hranie hier je aktivita pre žiakov veľmi lákavá a atraktívna, dá sa ich vytváranie vhodne využiť ako motivácia i v rámci vyučovania programovania. Pri ich vytváraní sa otvára priestor pre tvorivosť a sebaujavenie – žiaci si môžu navrhnúť a vytvoriť vlastné postavy alebo scénu, prípadne pravidlá hry podľa svojich predstáv modifikovať.

## Literatúra

- [Boden, 2001] Boden, M. (2001) Creativity and Knowledge. In: Creativity in Education (eds. A. Craft, B. Jeffrey & M. Leibling) p. 95-102. London: Continuum.
- [Cremin, 2009] Cremin, T. (2009) Creative teachers and creative teaching. In: Wilson, Anthony ed. Creativity in Primary Education (2nd ed.). Achieving QTS Cross-Curricular Strand. Exeter: Learning Matters, p. 36 – 46.
- [DfEE, 1999] DfEE (1999) All Our Futures: Creativity, Culture and Education. London: DfEE. Dostupné on-line 25.10.2010: <<http://www.creativitycultureeducation.org/data/files/naccce-all-our-futures-249.pdf>>.
- [Greene, 2002] Greene, S. L. (2002) Characteristics of applications that support creativity. Communications of the ACM, Vol. 45, No. 10 (October 2002), p. 100-104.
- [Knobelsdorf a Romeike, 2008] Knobelsdorf, M., Romeike, R. (2008) Creativity as a Pathway to Computer Science. In Proc. of the 13th annual conference on Innovation and technology in computer science education, Madrid, Spain, p. 286 - 290. ISBN 978-1-60558-078-4. Dostupné on-line 25.10.2010: <[http://www.inf.fu-berlin.de/inst/ag-ddi/docs/Paper/ITICSE\\_08.pdf](http://www.inf.fu-berlin.de/inst/ag-ddi/docs/Paper/ITICSE_08.pdf)>.
- [Loveless, 2002] Loveless, A., M. (2002) Literature review in creativity, new technologies and learning. Futurelab series, Report 4, School of education, University of Brighton. ISBN 0-9544695-4-2. Dostupné on-line 25.10.2010: <[http://archive.futurelab.org.uk/resources/documents/lit\\_reviews/Creativity\\_Review.pdf](http://archive.futurelab.org.uk/resources/documents/lit_reviews/Creativity_Review.pdf)>.
- [Malan a Leitner, 2007] Malan, D. J., Leitner, H. H. (2007) Scratch for budding computer scientists. In Proceedings of the 38th SIGCSE Technical Symposium on Computer Science Education (SIGCSE'07), p. 223–227
- [Meisalo, 1997] Meisalo, V., Sutinen, E., Tarhio, J. (1997): CLAP: teaching data structures in a creative way. In Proc. of the 2nd conference on Integrating technology into computer science education. Uppsala, Sweden, 117-119.
- [Mikolajová, 2011] Mikolajová, K. (2011) Vytváranie hier v prostredí Scratch - cesta k programovaniu na II. stupni ZŠ. Rukopis. Článok bol prijatý na konferenciu DidInfo 2011. Banská Bystrica: Univerzita Mateja Bela.
- [Monroy-Hernández a Resnick, 2008] Monroy-Hernández, A., Resnick, M. (2008) Empowering Kids to Create and Share Programmable Media. In: interactions - Pencils before pixels: a primer in hand-generated sketching, Magazine, Vol. 15 Issue 2.
- [OfSTED, 2003] Office for Standards in Education (OfSTED) (2003) Expecting the unexpected: developing creativity in primary and secondary schools. HMI 1612. [on-line]. Dostupné na internete 10.2.2011: <<http://www.ofsted.gov.uk/Ofsted-home/Publications-and-research/Browse-all-by/Documents-by-type/Thematic-reports/Expecting-the-unexpected2>>.
- [Peppler a Kafai, 2005] Peppler, K., Kafai, Y. (2005): Creative Coding: Programming for Personal Expression. Dostupné on-line 13.1.2011: <<http://download.scratch.mit.edu/CreativeCoding.pdf>>.
- [QCA, 2004] Qualifications and Curriculum Authority (QCA) (2004) Creativity Find It! Promote It! – promoting pupils' creative thinking and behaviour across the curriculum at Key Stages 1, 2 and 3 -practical materials for schools. London: QCA. ISBN 1-85838-551-2. Dostupné on-line 18.1.2011: <<http://orderline.qcda.gov.uk/gempdf/1847211003.PDF>>.
- [QCA, 1999a] Qualifications and Curriculum Authority (QCA) archív (1999a) How can teachers promote creativity? [webová stránka] Dostupné on-line 4.2.2011: <<http://webarchive.nationalarchives.gov.uk/20100823130703/http://curriculum.qcda.gov.uk/key-stages-1-and-2/learning-across-the-curriculum/creativity/howcanteacherspromotecreativity/index.aspx>>.
- [QCA, 1999b] Qualifications and Curriculum Authority (QCA) (1999b) The national curriculum: Handbook for primary teachers in England, key stage 1 and 2. Dostupné on-line 22.2.2011: <<http://www.education.gov.uk/publications/eOrderingDownload/QCA-99-457.pdf>>.
- [Resnick, 2009] Resnick, M. (2009) Scratch: Programming for All. Communications of the ACM, Vol. 52 No. 11, p. 60-67, ISSN:0001-0782. Dostupné on-line 15.2.2011: <<http://web.media.mit.edu/~mres/papers/Scratch-CACM-final.pdf>>.
- [Resnick, 2007] Resnick, M. (2007) Sowing the Seeds for a More Creative Society. The Media Laboratory, Massachusetts Institute of Technology. Dostupné on-line 25.10.2010: <<http://web.media.mit.edu/~mres/papers/Learning-Leading-final.pdf>>.
- [Resnick, 2002] Resnick, M. (2002) Rethinking Learning in the Digital Age. The Media Laboratory, Massachusetts Institute of

Technology Dostupné on-line 2.2.2011:

<<http://llk.media.mit.edu/papers/mres-wef.pdf>>.

[Romeike, 2007] Romeike, R. (2007) Three Drivers for Creativity in Computer Science Education. In Proc. of the IFIP-Conference on "Informatics, Mathematics and ICT: a golden triangle".

Boston, USA. Dostupné on-line 20.11.2010:

<<http://www.informatikdidaktik.de/forschung/scriften/romeikeimict2007.pdf>>.

[Schneiderman, 2002] Schneiderman, B. (2002)

Creativity support tools. Communications of the ACM, Vol. 45, Issue 10 (Oct. 2002), p. 116-120.

[Schorow, 2007] Schorow, S. (2007) Creating from Scratch. In: Mit Tech Talk, Vol. 51 No 27, p 7.

Dostupné on-line 9.2.2011:

<<http://web.mit.edu/newsoffice/2007/resnick-scratch.html>>.

[Švec, 2008] Švec, Š. (2008) Anglicko-slovenský lexikón pedagogiky a andragogiky. Bratislava: IRIS. ISBN 978-80-89256-21-1.

[Utting a kol., 2010] Utting, I., Cooper, S., Kölling, M., Maloney, J., Resnick, M. (2010) Alice, greenfoot and scratch – A discussion. ACM Trans. Comput. Educ., Vol.10 No.4, Article 17, 11 pages.

# Tvorba úvodného kurzu počítačovej grafiky. Počítačová grafika z pohľadu študenta

Daniela Onačilová<sup>1\*</sup>  
Školiteľ: Andrej Ferko<sup>2‡</sup>

<sup>1</sup>Katedra základov a vyučovania informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

<sup>2</sup>Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Venujeme sa výskumu didaktiky počítačovej grafiky a problematike tvorby úvodných kurzov. Časť výskumu je orientovaná na študenta. V tomto článku skúmame jeho pohľad na počítačovú grafiku pred a po absolvovaní úvodného kurzu. Výsledky aplikujeme na niekoľko modelov počítačovej grafiky a zisťujeme, ktoré vedomosti u študenta absentujú. Vyjadrenia po kurze nám pomáhajú zistiť, ako študenti vnímajú nadobudnutý prehľad v problematike.

**Kľúčové slová:** didaktika, úvodný kurz, počítačová grafika

## 1 Úvod

Náš výskum sa venuje procesu tvorby úvodného kurzu. Snažíme sa zistiť aké faktory môžu ovplyvniť tvorbu kurzu, jeho obsah a ciele.

Vyučovanie počítačovej grafiky nás zaujíma ako pedagógov a tiež by sme radi týmto výskumom prispeli rozšíreniu poznania v tejto populárnej oblasti aj na medzinárodnej úrovni. Vyučovaniu počítačovej grafiky sa venuje aj medzinárodná organizácia ACM SIGGRAPH a jej komisia pre vzdelávanie [1]. Navrhla komplexné sylaby pre informaticky [2] a umelecky [3] orientované odbory počítačovej grafiky na vysokých školách. Na ich tvorbe spolupracovala aj Rosalee Wolflee [6], ktorá za posledných 20 rokov publikovala výskumné správy z tejto oblasti. Tieto výskumy sú komplexné a nevenujú sa iba úvodným kurzom. My sme sa rozhodli zamerať iba na ne.

## 2 Výskumný projekt

Celkovou výskumnou metodológiou je kvalitatívny výskum. Ten nám umožňuje skúmať jav z rôznych pohľadov a hľadať a odhaľovať v ňom nové súvislosti.

Pri výskume sme sa zamerali na rôzne zdroje súvisiace s naším výskumom a jedným z nich sú

názory študentov a ich vnímanie počítačovej grafiky pred a po absolvovaní kurzu. Chceli sme zistiť, s čím sa študenti už skôr stretli, ako to ovplyvnilo ich vnímanie a ako ho môžeme doplniť a ovplyvniť úvodným kurzom počítačovej grafiky.

### 2.1 Zdroje dát a ich analýza

Názory študentov sme získavali pomocou ankiet a otvorených otázok. Študenti v roku 2009 absolvovali tri ankety a rovnako aj študenti v roku 2010. Výber a formulácia otázok vychádzala najmä z učiva v prvej polovici prvého semestra predmetu. Prvú anketu (ďalej A1) sme študentom predložili na druhej hodine. Z nej vyberáme prvú, tretiu a štvrtú otázku. Tieto otázky ako jediné obsahovali názory študentov na odbor počítačovej grafiky. V úvode ankety sme skratku PG definovali ako počítačovú grafiku.

O 1: V čom je podľa Vás hlavný prínos PG?

O 3: Aké slová/slovné spojenia Vám napadnú pri pojme „počítačová grafika“?

O 4: Charakterizovali by ste PG tými istými slovami, ktoré ste práve vymenovali? Ak nie, tak akými?

Po absolvovaní kurzu dostali študenti ďalšiu anketu (ďalej A3), v ktorej sme sa pýtali na zmenu ich názoru.

O 4: Napíšte. Zmenil sa nejaký váš pohľad na počítačovú grafiku (všeobecne na odbor)? Ako?

Pri analýze otázok sme použili metódu otvoreného kódovania textu. Z kódov sme vytvárali kategórie, ktoré spájali kódy podľa určitej vlastnosti. Jednotlivé kódy mohli spadať do viacerých kategórií.

### 2.2 Výsledky analýzy ankety A1

Výsledky analýzy ankety A1 otázok O1, O3, O4 boli prívateľmi všeobecné. Rozhodli sme sa pre hľadanie vhodnej definície, analógie, modelu počítačovej grafiky, aby sme výsledky vedeli vyhodnotiť.

Prvým krokom bola ISO definícia [4]:

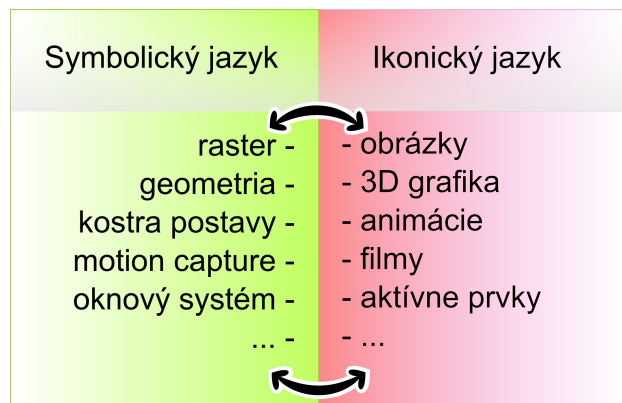
\*daniela.onacilova@fmfi.uniba.sk

‡ferko@sccg.sk

Počítačová grafika sa zaoberá metódami a technikami konštrukcie, manipulácie, ukladania a zobrazovania obrazov pomocou počítača.

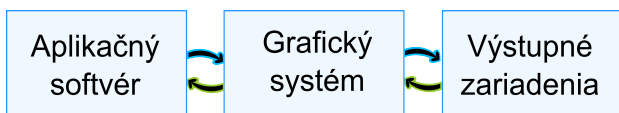
Pomocou tejto definície sme sa k výsledku nedostali, pretože študenti sa vyjadrili ku každej metóde alebo technike. Tým sme nevedeli ukázať, čo študenti poznajú a čo nepoznajú.

Ďalšou analógiou počítačovej grafiky sú jej jazyky, ktorými komunikuje. Definovali sme



Obrázok 1: Jazyky počítačovej grafiky.

dvaikonický a symbolický [5]. Ikonický odovzdáva obrazovú informáciu pomocou zobrazovacích zariadení a symbolický reprezentuje obrazovú informáciu (obrázok 1). Symbolický jazyk v počítačovej grafike jednoznačne odkazuje na matematiku, vrátane geometrie, a informatiku.



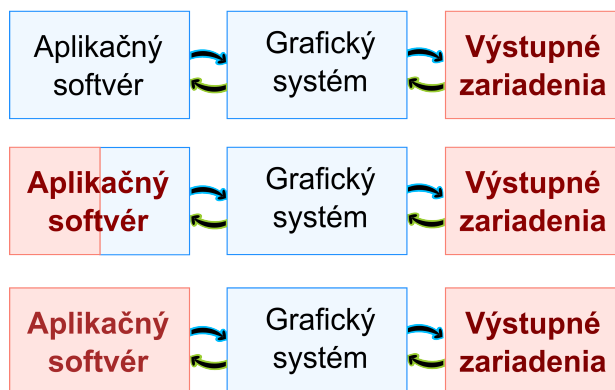
Obrázok 2: Referenčný model počítačovej grafiky.

Ak by sme chceli byť presnejší a chceli zachytiť prechod medzi ikonickým a symbolickým jazykom, pomohli by sme si referenčným modelom počítačovej grafiky [4]. Ten pozostáva z troch častí (obrázok 2). Aplikačný program (symbolický jazyk), zobrazovacie zariadenie (ikonický jazyk) a grafický systém ako analógia prechodu z jedného jazyka do druhého.

Tieto analógie nám pomohli rozdeliť vnímanie študentov na tri kategórie (obrázok 3). Študenti, ktorí vnímajú iba ikonický jazyk počítačovej grafiky a symbolický jazyk neprijali, nepoužívajú ho. Druhú skupinu tvoria študenti, ktorí majú skúsenosť s niektorým zo symbolických jazykov, používajú ho, ale bez prepojenia na počítačovú grafiku. Tretím typom sú študenti so skúsenosťou tvorby grafickej informácie v symbolickom jazyku, ale chýba im posledný prvok, grafický systém, ktorý tieto dva jazyky prepája, transformuje jeden na druhý.

Študenti tretieho typu by podľa modelu dvoch jazykov počítačovej grafiky už mali mať dostatočnú skúsenosť pre základ počítačovej grafiky. Preto

nám veľmi pomohol referenčný model, ktorý jasne definoval medzeru v poznaní. Podľa nás je cieľom úvodného kurzu vyplniť práve túto medzeru.



Obrázok 3: Dva pohľady študenta na počítačovú grafiku. Hore vnímanie iba ikonického jazyka počítačovej grafiky. V strede čiastočné skúsenosti so symbolickým jazykom ako nástrojom počítačovej grafiky. Dole skúsenosti so symbolickým jazykom počítačovej grafiky, ale žiadne skúsenosti s grafickým systémom a jeho funkciou.

## 2.3 Výsledky analýzy ankety A3

Pozrieme sa ešte na vyjadrenia študentov na počítačovú grafiku po skončení úvodného kurzu, ktoré sme získali z otázky O4 v ankete A3. Z našej analýzy vznikli tieto kategórie odpovedí:

1. predstavy a objavy o PG
2. teoretické vedomosti a ich uplatnenie
3. emócie
4. problémy
5. zručnosť – praktickosť
6. budúcnosť

Prvá kategória obsahuje rôzne všeobecné zistenia o počítačovej grafike.

Teoretické vedomosti nie sú bližšie špecifikované, ale z charakteru ostatných odpovedí vyplýva, že určite neopisujú ikonický jazyk ani programovanie (symbolický jazyk informatiky). Symbolický jazyk informatiky sa na hodinách nepreberal. Z obsahu prednášok preto dedukujeme, že môže ísť len o matematický symbolický jazyk a definovanie grafického systému a jeho fungovania. Uplatnenie teórie skôr súvisí s aplikáciou počítačovej grafiky v bežnom živote.

Študenti vyjadrovali často aj svoje emócie k počítačovej grafike, tie sme zhrnuli do jednej kategórie.

Pod problémy sme zaradili vyjadrenia týkajúce sa nezaujmu o predmet, ťažkosť s pochopením a obtiažnosťou.

Študenti na úvodnom kurze počas cvičení tvorili panorámy a 3D modely, čo priamo súvisí s praktickými zručnosťami. Tie často uvádzali ako novú zručnosť, ktorú nadobudli.

Z nášho pohľadu je veľmi dôležitou kategóriou „budúcnosť“. V nej študenti vyjadrovali svoje

rozhodnutia alebo úvahy nad budúcim štúdiom odboru počítačová grafika. Úvodné kurzy na FMFI UK prebiehajú počas bakalárskeho štúdia a jedným z ich cieľov je poskytnúť študentom dostatočný prehľad, ktorý by ich mohol posunúť k rozhodnutiu pre tento odbor. Vyhodnocovanie ankiet pokračovalo, no nie s ohľadom na výsledky prvej ankety, pretože sme sa zamerali na iné ciele. Tie sú opísané vo výskumnej správe.

### 3 Záver

V tejto časti výskumu sme si ujasnili, ktoré vedomosti študenti nemajú a s čím by ich mal úvodný kurz určite oboznámiť. Z ich vyjadrení v ankete po skončení kurzu vyplýva, že pochopili súvis medzi symbolickým a ikonickým jazykom, vnímajú počítačovú grafiku vo svojom živote a vnímajú teóriu, ktorá za celou počítačovou grafikou stojí. Zamýšľajú sa nad problematickými časťami a zvažujú budúce smerovanie svojho štúdia aj pre odbor počítačovej grafiky.

### Podakovanie

Tento projekt bol podporovaný Grantom UK 400/2010 a Grantom UK 379/2009.

### References

- [1] SIGGRAPH. 2011. ACM SIGGRAPH [Association for Computing Machinery's Special Interest Group on Graphics and Interactive Techniques] Education Committee [online]. 2009. [cit. 2011-04-09]. Dostupné na internete: <<http://education.siggraph.org/>>.
- [2] ALLEY, TONY ET AL. 2006. Computer Graphics Knowledge Base. 2006. 8 s. [cit. 2011-04-09]. Dostupné na internete: <[http://education.siggraph.org/resources/knowledge-base/FrontPage/CKB\\_report.pdf](http://education.siggraph.org/resources/knowledge-base/FrontPage/CKB_report.pdf)>.
- [3] TANZILLO, MICHAEL ET AL. 2008. Digital Art Curriculum Framework. ACM SIGGRAPH Education Committee, 2008. 42 s. [cit. 2011-04-09]. Dostupné na internete: <<http://education.siggraph.org/resources/artscurric/framework>>.
- [4] RUŽICKÝ, EUGEN - FERKO, ANDREJ. 1995. Počítačová grafika a spracovanie obrazu. Vyd. 1. Bratislava: SAPIENTIA, 1995. 334 s. ISBN 80-967180-2-9.
- [5] FERKO, ANDREJ. 2011. Poznámky pre prvákov, študentov počítačovej grafiky. Nepublikované poznámky.
- [6] WOLFE, ROSALEE. 1999. A Syllabus Survey: Examining the State of Current Practice in Introductory Computer Graphics Courses. Computer Graphics 33(1) February 1999, 32-33.

# Pedagogický softvér Labák

Andrej Bauer<sup>†</sup>

Školiteľ: Monika Tomcsányiová<sup>1‡</sup>

Konzultant: Veronika Toporcerová<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Katedra základov a vyučovania informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

<sup>2</sup> Ústav botaniky a zoologie, Přírodovědecká fakulta, MU, Kotlářská 267/2, 611 37 Brno

Žiaci 2. stupňa ZŠ si prostredníctvom predmetu Prírodopis rozvíjajú svoje poznatky o živých organizmoch. Štátny vzdelávací program predpisuje minimálne 3 hodiny ročne vyhraďiť praktických aktivítam. Námetov na ne je niekoľko, napríklad práca s mikroskopom. Tá je pre žiakov veľmi atraktívna, ale patrí medzi aktivity, ktoré sú realizačne náročné na technické pomôcky.

Jedna z ciest ako umožniť žiakovi nadštandardné poznávanie mikrosveta je využitie digitálnych technológií. Na vyučovanie prírodopisu existujú najmä inštruktívne programy. Rozhodli sme sa preto navrhnuť a realizovať také interaktívne prostredie, ktoré by hravou formou simulovalo prácu s mikroskopom. Nazvali sme ho *Labák*.

Softvér sme sa snažili navrhnuť tak, aby čo najviac korešpondoval s prostredím a situáciami, ktoré vzniknú pri reálnych vyučovacích hodinách.

Kvôli samotnej realizácii projektu sme sa najprv museli zoznámiť so školskou mikroskopickou technikou. V rámci doplnkového pedagogického štúdia na Prírodovedeckej fakulte UK sme absolvovali praktický seminár, kde budúci pedagógovia s použitím mikroskopov riešili stredoškolské a základškolské praktické úlohy. Bola to pre nás veľmi cenná skúsenosť, vďaka ktorej sme získali množstvo poznatkov týkajúcich sa zaobchádzania s mikroskopom. Tie sme potom využili pri samotnej simulácii používania mikroskopu v pedagogickom softvéri, hlavne čo sa týka ovládania a vizuálnej stránky používateľského rozhrania

Používateľa celou aplikáciou sprevádza postava učiteľa. Vychádzali sme z toho, že povaha učiteľa môže ovplyvniť priebeh vyučovacej hodiny. Vytvorili sme preto dvoch charakterovo odlišných učiteľov, ktorí ovplyvňujú priebeh laboratórneho cvičenia.

- **Dobrý učiteľ:** mladý flegmatik, ktorý dovoľí voľne používať mikroskop. Predstavuje režim, v ktorom žiak voľne skúma a učí sa.

- **Zlá učiteľka:** stará prísna učiteľka, ktorá kričí a skúša žiaka. Predstavuje režim, v ktorom si žiak preveruje svoje poznatky.

Ďalším našim cieľom bolo poskytnúť žiakom reálne pozorované objekty. Vďaka Veronike Toporcerovej, ktorá dohliadala na korektnosť informácii z biologického hľadiska, sme mohli na Prírodovedeckej fakulte Masarykovej Univerzity v Brne pracovať s modernou mikroskopickou technikou, na ktorej sme digitálne zaznamenávali pozorované objekty.

Okrem samotného programu, v ktorom môže žiak preskúmať odfotografované mikroorganizmy sme navrhli editor, ktorý vo fotografii umožňuje vyznačiť a pomenovať rôzne oblasti. Editor vygeneruje súbor, ktorý obsahuje informácie o oblastiach a spolu s grafickým súborom tvorí inventár možných pozorovaných objektov v samotnom softvéri *Labák*.

Rôznorodosť organizmov, ktoré sa nachádzajú v prírode nás tiež inšpirovala k vytvoreniu databázy pozorovaných objektov. Na stránke nášho pedagogického softvéru sme pripravili niekoľko objektov, na ktorých sme už vyznačili a pomenovali ich časti, ktoré žiak bude pozorovať cez virtuálny mikroskop v programe *Labák*. Túto databázu môže ktokoľvek obohatiť o svoj pozorovaný objekt vytvorený a zapísaný v editore. Vďaka tomu žiak dostane možnosť pozorovať objekty, ktoré mu bežná hodina neumožňuje.

## Literatúra

[Tomcsányiová, 2007] Tomcsányiová, M. (2007) Prednášky z tvorby pedagogického softvéru

[1] Dokument štátneho vzdelávacieho programu ISCED 2, dostupné online [http://www.kza.fpv.ukf.sk/subory/vz\\_uc\\_statny\\_vzdelavaci\\_program\\_biologia\\_zs.pdf](http://www.kza.fpv.ukf.sk/subory/vz_uc_statny_vzdelavaci_program_biologia_zs.pdf)

<sup>†</sup> andrej.bauer@gmail.com

<sup>‡</sup> tomcsanyiova@fmph.uniba.sk

# Vizualizácia aproximačných algoritmov pre Problém obchodného cestujúceho

Andrej Bauer

Školiteľ: Zuzana Kubincová

Katedra základov a vyučovania informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

Problém obchodného cestujúceho je jeden z najznámejších NP-úplných problémov. Populárny je hlavne kvôli širokému spektru jeho využitia v praxi. Väčšinou každý študent, ktorého odbor súvisí s informatikou, sa s ním stretne.

Metód ako riešiť tento problém je niekoľko. Napríklad riešenie hrubou silou, heuristické algoritmy, aproximačné algoritmy, simulované žihanie či genetické algoritmy.

Táto práca je zameraná na vizualizáciu aproximačných algoritmov: **Metóda zdvojenia kostry** a **Christofidesov algoritmus**. Vybrali sme si ich pre dobrú vlastnosť ohraničiť pomer optimálneho riešenia a riešenia, ktoré dostaneme aproximačným algoritmom. Ďalej preto, že ich implementácia je výrazne spojená s aplikovaním poznatkov z vyučovacích predmetoch *Diskrétna matematika* a *Algoritmy a údajové štruktúry*, ktoré sa učia na našej fakulte.

Pri implementácii spomínaných algoritmov je priam kľúčové pochopiť ich priebeh. Jednou z pomôcok na dosiahnutie tohto cieľa sú vizualizácie algoritmov. Napriek popularite problému obchodného cestujúceho sa na internete nenájde veľa vizualizácií, ktoré by prehľadne po krokoch premietali proces hľadania riešenia. Naším cieľom bolo vytvoriť vizualizáciu dvoch aproximačných algoritmov, ktorá by prezentovala priebeh algoritmov a uľahčovala ich pochopenie. Aplikáciu možno nájsť na adrese:

<http://www.st.fmph.uniba.sk/~bauer8/graf/>

## 1 Aproximačné algoritmy

Pre algoritmy, ktoré uvedieme, predpokladáme, že je daný kompletný graf  $G$  s ohodnoteniami hrán  $c(e) \geq 0$  spĺňajúcimi trojuholníkovú nerovnosť.

### 1.1 Metóda zdvojenia kostry

- **Krok 1:** V grafe  $G$  nájdeme najlacnejšiu kostru  $T$ .
- **Krok 2:** Zvolíme ľubovoľný vrchol  $v_0$  a utvoríme hamiltonovský  $v_0 - v_0$  sled  $S$  pre  $T$  (použitím Tarryho algoritmu), ktorý obsahuje každú hranu v  $T$  práve 2-krát.
- **Krok 3:** Sled  $S$  nahradíme cyklom  $Z$  takto: Prechádzame sledom  $S$  a kedykoľvek by sme mali ísť znova po prejdených vrchoch, tak príslušný  $i-j$  úsek sledu  $S$  nahradíme hranou  $ij$ .

Metóda zdvojenia kostry dáva vždy hamiltonovský cyklus  $Z$ , pre ohodnotenie ktorého platí

$$\frac{c(Z)}{c(OPT)} < 2.$$

### 1.2 Christofidesov algoritmus

- **Krok 1:** V  $G$  nájdeme najlacnejšiu kostru  $T$
- **Krok 2:** Určíme  $V_0 := \{v \in V(G) \mid \deg(T) \text{ je nepárne číslo}\}$
- **Krok 3:** V  $G(V_0)$  nájdeme najlacnejšie párenie  $X$ .
- **Krok 4:** Pridáme hrany párenia  $X$  ku kostre  $T$  a získaným eulerovskom multigrafe  $M$ , nájdeme eulerovský ťah  $S$
- **Krok 5:** K ťahu  $S$  vytvoríme cyklus  $Z$  preskakovaním vrcholov, ktoré sa opakujú.

Christofidesov algoritmus dáva vždy hamiltonovský cyklus  $Z$  s

$$\frac{c(Z)}{c(OPT)} < \frac{3}{2}.$$

## 2 Implementácia

Za veľmi dôležitú považujeme dostupnosť vizualizácií, preto sú vizualizácie programované v jazyku Java a sú prezentované ako Java Applet na internete.

Pri programovaní sme využívali rôzne zaujímavé dátové štruktúry a algoritmy, s ktorými sa študenti stretávajú na vyučovaní, a ktoré umožňujú relatívne dobrú časovú zložitosť. Napríklad pri vytváraní najlacnejšej kostry sme využili dátovú štruktúru disjunktné množiny.

Po užívateľskej stránke sme dbali na prehľadné, vizuálne atraktívne prostredie, ktoré by jasne znázorňovalo procesy vizualizovaného algoritmu.

## Literatúra

- [Plesník, 1983] Plesník, J. (1983). Grafové algoritmy  
[Hromkovič, 2004] Hromkovič, J. (2004) Algorithmics for Hard Problems  
[Palúch, 2008] Palúch, S. (2008). Algoritmická teória grafov.



# Bezpečnosť nielen na internete

Tatiana Gnidová<sup>1</sup>  
Školiteľ: Ľudmila Jašková<sup>2</sup>

Katedra základov a vyučovania informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Témou mojej práce je bezpečnosť nielen na internete. Snažila som sa nájsť najzaujímavejší spôsob pre deti, aby som ich zaujala a aby si naozaj uvedomili riziká, ktoré im hrozia na internete aj mimo neho. Aby mali dostatok odvahy upozorniť, keď vidia riziko a boli obozretní pri zverejňovaní informácii o sebe.

**Kľúčové slová:** bezpečnosť, bezpečnosť na internete, ovce.sk.

Bezpečnosť je prierezová téma na prvom stupni základnej školy. Snažila som sa na ňu pozrieť pohľadom učiteľa informatiky. Aj pri tejto téme sa dá využiť IKT. A preto som pripravila metodiku tematického celku bezpečnosť v živote a na internete.

Tejto tématike sa venuje mnoho webových stránok, ktoré som využila. Žiakovi veľmi bavilo učenie pomocou internetu.

Najprv som sa venovala bezpečnosti ako takej. Využila som stránku zachranari.sk. Najskôr sme s deťmi diskutovali o záchranároch, stretnutí s nimi a zopakovali sme si ich telefónne čísla. Rozprávali sa o rôznych situáciách a zvažovali, kedy treba volať záchranárov a kedy nie. Vysvetlila som im, čo je zneužívanie týchto dôležitých čísel. A dostali sme sa na stránku zachranari.sk, kde sme si spolu prečítali záložku „Ste tu prvý krát“ a prešli sme na „Prvá pomoc“. Je tam veľmi zaujímavý obrázok, o ktorom sa dá tiež porozprávať. Nasledovala samostatná práca, žiaci mohli prejsť na stránku **www.rescue.sk**, kde našli mnoho zaujímavých obrázkov, príbehov a fotografií. Na záložke „Kurzy“, sú pekné komiksy, ktoré sa deťom veľmi páčili, na základe nich potom vznikali aj diskusie. Ukázali sme si stránku, na ktorej sa dočítajú viac v prípade záujmu. Žiaci túto stránku nepoznali a veľmi sa im páčila, bolo pre nich zaujímavé sa dozvedieť nové informácie aj takou formou.

Postupne sme prešli ku téme bezpečnosť na internete. Hodinu sme začali opäť dialógom o tom, čo si myslia deti o rizikách, ktoré im hrozia na

internet. Bolo zaujímavé, že aj napriek tomu, že veľa času trávili na internete, nevedeli skoro o žiadnom nebezpečenstve. Samozrejme, že nám opäť pomohol internet – veľmi pekná, dnes už aj dosť známa stránka ovce.sk. Je to stránka, ktorá je určená deťom a zábavnou formou hovorí o nebezpečenstvách. Sú tu krásne videá. Zatiaľ sa na nej nachádza deväť videí, ale mali by pribudnúť ešte ďalšie. Každému videu predchádzala diskusia na danú tému a po ňom nasledoval opäť rozhovor, či sme dobre pochopili, čo nám chcel autor povedať. Videli sme nasledovné videá:

1. **Bez kožušeka** - venované problematike zverejňovania fotografií a videí z odhalenými časťami tela.
2. **Netancuj s vlkom**, ktoré je o zneužití fotografií a videí.
3. **Ogrgel** hovorí o tom, že internet si pamätá vždy naše chyby.
4. **Hlásna trúba** – v ňom nám poukazujú na to, prečo je ochrana súkromia taká dôležitá.
5. **Zatajovaný kamarát** je o nadväzovaní kontaktov za účelom sexuálneho zneužitia.
6. **Biele ovce** – stretávame sa v ňom s diskrimináciou a rasizmom na internete.
7. **Pomsta** - virtuálne prenasledovanie.
8. **Deväťdesiatdeväť** je o reťazových listoch.
9. **Korunka krásy** – anorexia a recepty “krásy” na internete.

Deťom sa tieto videá veľmi páčili a dokonca sme si ich ani nestihli za jednu hodinu všetky pozrieť. Samozrejme, že to nie je jediná stránka, ktorá sa danej problematike venuje, ale mňa zaujal spôsob, akým sa deťom prezentovala téma bezpečnosti a to nielen na internete.

V mojej práci je obsiahnutá aj ukážka, ako by mala vyzeráť príprava na hodinu. Poukazujem na to, čo všetko si musí učiteľ uvedomiť v príprave na hodinu.

## Bibliotéka:

Záchranári [cit. 2011-04-09] dostupné: [www.zachranari.sk](http://www.zachranari.sk)

Ovce [cit. 2011-04-09] dostupné: [ovce.sk](http://ovce.sk)

<sup>1</sup> tatiana.gnidova@post.sk

<sup>2</sup> jaskova@fmph.uniba.sk

# Informatická výchova (SK) vs. Informatika (RU) ŠVK 2011

## (Rozšírený abstrakt)

Monika Gujberová<sup>1</sup>

Konzultant: Monika Tomcsányiová<sup>2</sup>

Katedra základov a vyučovania informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

Od školského roku 2009/10 je súčasťou vyučovania na 1. stupni základných škôl na Slovensku aj predmet Informatická výchova. Reforma začala v druhom ročníku, v tomto školskom roku sa s ňou stretávajú aj tretiaci. V mojom dizertačnom projekte sa zaoberám problematikou vyučovania programovania, ktorá je nevyhnutnou súčasťou informatickej výchovy. Keďže na Slovensku je táto téma pomerne nová, je dôležité podrobne sa jej venovať.

Prvú časť svojho výskumu venujem analýze zahraničných modelov vyučovania informatiky na 1. stupni ZŠ. V tomto príspevku by som chcela porovnať ruské učebnice [Gorjačev et al., 2009 (1)], [Gorjačev et al., 2009 (2)] so slovenskou [Blaho et al., 2010]. Hoci sú ruské učebnice určené pre prvý ročník a slovenská pre druhý, napriek tomu sú porovnateľné, keďže sú vlastne úvodom do témy riešenia problémov a základov programovania.

Ako hlavný rozdiel by som uviedla, že ruské učebnice neobsahujú ani zmienku o počítačoch. Ich cieľom je rozvoj myslenia, nie zručností ovládania softvéru, či hardvéru. Aj v prípade, že škole chýba potrebné technické vybavenie, učiteľ môže používať tieto učebnice bez problémov. Na druhej strane, učiteľ si môže zvoliť aj prácu na počítačoch. Niektoré úlohy z učebníc sú ľahko realizovateľné aj takouto formou. Úlohy slovenskej učebnice, pozri [Blaho et al., 2010], sú striktné zamerané na jednotlivé informatické kompetencie žiakov, napr. klikanie myšou, vyfarbovanie obrázkov, kreslenie čiar, atď.

Ruská učebnica má dve časti [Gorjačev et al., 2009 (1)] a [Gorjačev et al., 2009 (2)]. Každá je rozdelená na tri kapitoly, z ktorých jedna obsahuje kontrolné úlohy. Po analýze jednotlivých úloh som ich rozdelila na niekoľko tém:

1. Časť: Farby; Tvary; Veľkosť; Spoločné pomenovanie – množiny; Odlišnosti, návod; Zvieratá - opakovanie.

2. Časť: Počty; Menej, viac; Smery; Vlastnosti; Poradie; Opakovanie.

3. Časť: Číslo; Poradie; Počet; Viac, menej; Kódovanie; Symetria; Opakovanie.

4. Časť: Protiklady; Pravda, nepravda; Grafy; Kombinatorika; Opakovanie.

Učebnica [Blaho et al., 2010] je rozdelená na 18 kapitol: O počítači; Klikáme myšou; Vyfarbujeme obrázky; Pečiatkujeme; Kreslíme čiary; Kreslíme a vyfarbujeme; Kreslíme rovné čiary; Krúžky a obdĺžniky; Presúvame a zoradujeme; Riešime podľa pravidiel; Pracujeme s klávesnicou; Píšeme text; Prezliekame písmená; píšeme čísla; Prezeráme web; Skúmame internet; Hráme sa so zvukmi; Riešime problémy s počítačom.

Na prvý pohľad sa môže zdať, že témy týchto učebníc sú dosť rozdielne. Po podrobnej analýze som objavila podobnosť medzi niektorými úlohami. Oba učebnice obsahujú zadania, ktoré sú zamerané napr. na vyfarbovanie podľa pravidiel, rozdelenie predmetov do skupín podľa určitých vlastností, rozvoj tvorivosti, kombinatorické myslenie, či kódovanie.

Hlavným prínosom tejto práce je zistenie, že hoci **prístup** k výučbe informatiky na prvom stupni základných škôl podľa uvedených učebníc na Slovensku a v Rusku je **rozdielny**, samotná **obsahová** náplň zadaní je **podobná**.

## References

- [Gorjačev et al., 2009 (1)] Gorjačev, A., Gorina, K., Volkova, T. (2009). Informatika. Informatika v igrach i zadačach. Časť 1. Škola 2010. OOO Balacc. ISBN 978-5-85939-130-1
- [Gorjačev et al., 2009 (2)] Gorjačev, A., Gorina, K., Volkova, T. (2009). Informatika. Informatika v igrach i zadačach. Časť 2. Škola 2010. OOO Balacc. ISBN 978-5-85939-131-8
- [Blaho et al., 2010] Blaho, A., Salanci, Ľ., Chalachánová, M., Gabajová, Ľ. (2010). Informatická výchova pre 2. ročník ZŠ. AITEC Bratislava. ISBN 978-80-89375-17-2

<sup>1</sup> monika.gujberova@fmph.uniba.sk

<sup>2</sup> monika.tomcsanyiova@fmph.uniba.sk

# ABeCeDa – návrh a realizácia pedagogického softvéru

Emília Hanková\*      Anita Bernerová  
Školiteľ: Monika Tomcsányiová‡

Katedra základov a vyučovania informatiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Žijeme v informačnej dobe a jednou z možností, ktoré nám poskytuje, sú počítače. Tie si už našli cestu aj do materských škôl. Rastie teda potreba kvalitných edukačných softvérov, ktoré by sa dali v praxi aplikovať a ktoré by deti motivovali k objavovaniu, skúmaniu a učeniu hrou.

**Kľúčové slová:** edukačný softvér, predškolská výchova, abeceda

## 1 Špecifikácia pedagogického softvéru „ABeCeDa”

Softvér „ABeCeDa“ je určený pre predškolákov, ale aj pre prvákov základnej školy, ktorí sa učia abecedu.

Snahou bolo vytvoriť softvér, pomocou ktorého sa deti naučia rozoznávať paličkové (tlačené veľké) písmená. Je určený na hodiny písania spojené s hodinami informatiky, ale aj na domáce vyučovanie za pomoci rodičov.

Je tiež zameraný na niekoľko zručností, ktoré by deti vo veku 5-7 rokov mali získať na hodinách informatiky. Deti by sa mali zoznámiť s počítačom ako pomocníkom pri učení. Ďalším cieľom je naučiť deti rýchlo sa oboznámiť s prostredím, rozoznávať detaily, zahrať sa jednoduchú logickú hru a pri tom sa aj nenápadne niečo naučiť, vedieť pospájať čiary tak, aby tvorili celok a naučiť ich rozoznávať jednotlivé hlásky v slove.

## 2 Popis projektu

Edukačný softvér „ABeCeDa“ je navrhnutý tak, aby svojim vzhľadom upútal pozornosť malého používateľa a rozvíjal jeho znalosť abecedy.

Softvér pozostáva z troch aktivít, každá je rozdelená na dve časti podľa náročnosti.

Deti pri spustení programu privíta pekný farebný obrázok s názvom projektu a so šípkou pre pokračovanie, ikonkou reproduktora pre vypočutie návodu a krížikom pre ukončenie.

Ak sa dieťa rozhodne pre spustenie hry, otvorí sa mu okno s výberom hier. Pri názvoch jednotlivých aktivít je charakteristický obrázok, ktorý sa

vzťahuje na danú hru. Takto si deti ľahko zapamätajú o čom sú jednotlivé hry a ľahko sa im bude orientovať v prostredí.

Po výbere hry pri prvých a posledných dvoch aktivitách sa objavia kocky s písmenkami, z ktorých si má dieťa jedno vybrať. Hra sa bude vzťahovať na toto zvolené písmenko.

## 2.1 Popis jednotlivých aktivít

### Aktivita č. 1

Aktivita je rozdelená na dve časti, ktoré majú názov: „*Kde som? / Kde nie som?*“ a sú zamerané na rozoznanie podobných písmen, na detaily písmena, v čom sa líši od iných. V prvej hre je úlohou nášho malého hráča nájsť písmená, ktoré zobrazujú jeho zvolené písmenko, v druhej naopak.

### Aktivita č. 2

V tejto aktivite nájdeme hry s názvom „*Písmenko po písmenku podľa ukážky / Písmenko po písmenku podľa zvuku*“, ktoré zahŕňajú v sebe ďalšie precvičovanie tvaru písmena tým, že sa aktuálne písmenko vyhľadáva v množine 24 písmen. Úlohou dieťaťa je pospájať postupne jednotlivé písmená abecedy na obrazovke tak, aby vznikol obrázok.

### Aktivita č. 3

Obsahuje dve hry: „*Kto ma potrebuje na začiatku? / Kto ma potrebuje v názve?*“, Ich cieľom je naučiť dieťa rozoznávať jednotlivé hlásky slova. V prvej hre majú na vyznačené miesto odložiť tie obrázky, ktoré sa začínajú daným písmenom, v druhej preniesť na vyznačené miesto všetky tie, v ktorých pomenovaní sa dané písmenko nachádza.

Druhá a tretia časť softvéru sú otvorené pre dospelých. Môžu pre deti pripraviť aj iné obrázky a nahráť ku nim zvuky.

## Použité zdroje:

[Šlabikár Lipka; Nemčíková M., Nemčík J., Slovenské pedagogické nakladateľstvo, r. 2002, ISBN:80-08-03509-9.

[metodické príručky:

<http://www.aitec.sk/files/metodika.pdf>

<http://www.aitec.sk/files/Metodika%20II.pdf>

\* emahankova@gmail.com

‡ tomcsanyiova@fmph.uniba.sk

# Matematický softvér pre 1. ročník ZŠ

Eva Hricková\*

Školiteľ: Daniela Bezáková†

Katedra základov vyučovania informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

Cieľom mojej práce bolo vytvoriť komplexný program, ktorý by mal zastrešiť celú matematiku prvého polroku 1. ročníka ZŠ. Jeho súčasťou je aj prostredie pre učiteľov, ktoré umožní nastaviť, ktoré typy úloh má žiak riešiť a s akými parametrami. Túto tému som si vybrala pretože, častým problémom učebníc je fakt, že obsahujú veľmi málo príkladov daného typu, na ktorých by si mohol žiak precvičiť danú problematiku. Deje sa tak z jednoduchého dôvodu: každé dieťa potrebuje iný čas na pochopenie úlohy. A preto ani autor knihy, akokoľvek vzdelaný, nevie predpovedať, čo bude robiť problémy dieťaťu, ktoré si práve vzalo do rúk učebnicu. Pomôckou, či už pre žiaka, rodiča alebo učiteľa, by bol určite softvér, ktorý by generoval príklady. Z toho dôvodu som vytvorila softvér určený na tento účel.

Na základe preštudovaných učebníc [Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, 2007], [Lehoťanová, 2010] som sa rozhodla do môjho softvéru zaradiť šesť druhov aktivít.

## Urči počet

Obsahuje tri druhy aktivít, v ktorých má žiak za úlohu určiť

- počet obrázkov pomocou iných symbolov v našom prípade pomocou paličiek
- počet obrázkov pomocou čísel
- číslo pomocou symbolov

## Spoj

Po spustení tejto aktivity sa zobrazia dva riadky obrázkov po päť (tri). Žiakovou úlohou je nájsť dva obrázky s rovnakým počtom objektov (alebo číslo a počet objektov, ktoré ho vyjadruje) a spojiť ich.

## Pokračuj

Žiakovi je predložená postupnosť farebných objektov. Žiak má tiež k dispozícii niekoľko "voľných" farebných objektov rovnakého typu ako v postupnosti sú vždy umiestnené v spodnej časti plochy. Jeho úlohou je postupne dopĺňať tieto voľné objekty do zadanej postupnosti.

## Porovnaj

Dieťaťu sú predložené dva obrázky, na ktorých sa nachádzajú obrázky alebo čísla. Dieťa si má vybrať, kde sa ich nachádza viac a ten obrázok vyfarbiť.

Znak nerovnosti sa objaví so spätnou väzbou, ale jeho funkcia je zatiaľ len druhotná.

## Sčítaj

Žiak sčítava čísla alebo objekty a výsledok vyjadruje pomocou čísel alebo bodiek.

## Krokuj

Na začiatku každej úlohy dostane dieťa určitú lineárnu sekvenciu obrázkov poprípade čísiel.

Dva typy riešenia.

- Podľa predpísaného počtu krokov má dieťa nájsť obrázok alebo číslo, na ktoré doskáče postavička po ich prejdení. Pri použití čísiel namiesto obrázkov, sa dieťa prvýkrát stretáva s číselnou osou (ktorá je nastaviteľná). Napr. ak je postavička postavená na čísle 5 a má spraviť štyri skoky čím sa následne dostáva na číslo 9. Matematicky zapísané  $5+4=x$ .
- Dieťa má pomocou šípok nakresliť počet krokov, ktoré musí postavička spraviť, aby sa dostala z obrázka na obrázok (obe je dané na začiatku aktivity). Pokiaľ sú použité čísla môžeme si všimnúť, že neznámou je tento raz sčítanec. Matematicky zapísané  $5+x=9$ .

K prostrediu patrí aj editor, v ktorom môžeme nastaviť parametre každej úlohy.

Softvér bol overovaná pomocou detí prvého ročníka ZŠ. Žiaci reagovali veľmi pozitívne a prejavili oň záujem aj po opakovaných návštevách. Zároveň náročnosť úloh bola prekonzultovaná s učiteľmi 1. stupňa.

Aj tu som sa stretla len s pozitívnymi ohlasmi.

## Literatúra

[Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, 2007] Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková-Kratochvílová, J. autori, Matematika 1, 1. diel, učebnice pro základní školy, Vydavatelstvo Fraus, Plzeň 2007, prvé vydanie, ISBN 978-80-7238-626-0,

[Lehoťanová, 2010] Lehoťanová B., Matematika pre 1. ročník základných škôl, 1. Časť, Vydavatelstvo Aitec s.r.o., Bratislava 2010, ISBN 978-80-89375-31-8

\* hrickova.eva@gmail.com

† bezakova@fmph.uniba.sk

# Softvérové prostredie na vyučovanie informatickej výchovy na 1. stupni ZŠ

Karolína Mayerová\*  
Školiteľ: Monika Tomcsányiová†

Katedra základov vyučovania informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

Reforma vo vzdelávaní, ktorá prebehla len pred pár rokmi sa dotkla v pozitívnom zmysle slova aj predmetu informatika. Zabezpečila kontinuálnu výučbu žiakov v oblasti digitálnych technológií (DT) od prvého stupňa základnej školy až po maturitu. Žiaľ, nestihlo vzniknúť ešte dostatočne veľa materiálov, či učebníc, ktoré by hovorili o tom, čo sa deti v jednotlivých ročníkoch majú učiť. Nehovoriac o pomôckach v podobe mikrosvetov, či rôznych edukačných prostredí.

Medzi najnovšie a ojedinelé učebnice patrí [Blaho, Gabajová, Chalachánová. a Salanci, 2010] - učebnica pre 2. ročník ZŠ, ktorá bola napísaná nie len odborníkmi z vysokoškolského prostredia zaoberajúcich sa touto tematikou, ale aj učiteľmi z praxe. Tí by mali vedieť odhadnúť, čo deti v danom veku môžu zvládnuť a čo nie. Preto sme sa pri odhade náročnosti nášho softvéru pridrižovali úloh z nej.

Je všeobecne známe, že školy majú nielen málo učebníc ale aj učební. Keď sa žiakov v triede podarí rozdeliť na viacero skupín, nikdy to nie je ideálne a v skupinke sa môžu ľahko ocitnúť žiaci s veľkým rozdielom v zručnosti ovládať a pracovať s DT. Vtedy je pre učiteľa obzvlášť náročné pripravovať sa na hodinu. Práca sa mu vtedy akoby zdvojnásobuje.

Náš softvér by mal slúžiť nie len ako pomôcka pre učiteľov na oživenie hodiny ale aj na zaujatie šikovnejších žiakov zmysluplnou prácou. Tí by sa inak nudili a vyrušovali. Keďže úlohy podobného typu sa nachádzajú až na úplnom konci učebnice, ktorá bola už spomínaná, tento softvér by sa dal využiť aj vo vyšších ročníkoch.

Predpokladáme, že toto prostredie sa bude naozaj využívať aj na školách. A teda je vysoko pravdepodobné, že nie všetci učitelia budú vedieť vytvoriť úlohy, ktoré by naplno využívali potenciál programu, ktorý im poskytuje. Preto sme vytvorili sadu úloh, ktoré sme rozdelili do štyroch pracovných listov. Tie sú určené pre deti. Úlohy sú zoradené podľa náročnosti a podľa oboznámenia užívateľa s prostredím.

## • Prvý pracovný list – vytvárame mapy

Je zameraný na oboznámenie žiaka s prostredím, funkciami jednotlivých komponentov a riešením úloh podľa pokynov.

## • Druhý pracovný list – plavíme sa

Pomocou graduujúcich logických úloh sa rozvíja logické a algoritmické myslenie žiaka. Jednotlivými úlohami si taktiež utvrdzuje poznatky nadobudnuté na predchádzajúcej hodine.

## • Tretí pracovný list – malí architekti

Tento list je trochu odlišný od predošlých. Je to súbor na seba nadväzujúcich úloh, ktorými žiak vytvára len jednu mapu.

## • Štvrtý pracovný list – kartičkujeme

Úvod do problematiky „Počítač vždy spraví len to, čo mu povieme.“. V našom prípade loď kormidluje opica a žiak jej musíme pripraviť kartičky, aby vedela, kade sa má plaviť. Úlohy boli tvorené náročnejšie, keby učiteľ chcel preberať túto časť až v treťom ročníku. Predpokladá sa, že tento list sa bude preberať na dvoch vyučovacích hodinách.

Tieto listy boli testované na vyučovacích hodinách a konzultované s viacerými učiteľmi z praxe. Podľa zistených nedostatkov z testovania a odporúčaní učiteľky, ktorá má skúsenosti s editovaním učebníc, boli viac ráz prerábané. Kompletnú verziu pracovných listov je možné si pozrieť v prílohe. Tam sa nachádza taktiež samotný program. V blízkej budúcnosti bude dostupný aj metodický materiál k programu a pracovným listom. Zatiaľ sa na ňom intenzívne pracuje.

## Literatúra

[Blaho, Gabajová, Chalachánová. a Salanci, 2010]  
Blaho, A., Gabajová, E., Chalachánová, M., Salanci, E., autori, Informatická výchova pre 2. ročník ZŠ, Vydavateľstvo AITEC, Bratislava 2010, prvé vydanie, ISBN 978-80-89375-17-2

\* karolina.mayerova@gmail.com

† tomcsanyiova@fmph.uniba.sk

# E-learningová podpora vyučovania matematiky pre maturantov a študentov vysokých škôl (tématický celok funkcie)

Martina Babinská<sup>1\*</sup>  
Školiteľka: Lilla Koreňová<sup>2#</sup>

<sup>1</sup> Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky,  
FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava  
<sup>2</sup> Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky,  
FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

V predkladanej práci sme si za cieľ zvolili vytvorenie interaktívnej elektronickej (e-learningovej) podpory vzdelávania z matematiky pre maturantov a pre študentov nižších ročníkov vysokých škôl.

Práca je rozdelená na teoretickú a praktickú časť. Teoretická časť práce sa venuje charakteristike e-learningu, dôvodom, prečo sme sa tejto forme vzdelávania rozhodli venovať, problémami, ktoré elektronickej forma vzdelávania prináša a s ktorými sme sa pri tvorbe elektronickej podpory vzdelávania stretli, prostriedkami e-learningovej podpory, s ktorými sme pracovali. Praktická časť práce je rozdelená na dve časti. Prvá z týchto častí popisuje východiská pre tvorbu elektronickej podpory vzdelávania z matematiky získané prostredníctvom prieskumov uskutočnených na Slovenských školách v roku 2010. Druhá časť sa venuje vytvorenej elektronickej podpore vzdelávania z matematiky (tvorbe, obsahu a overeniu).

Na záver ponúka práca návrhy na rozširovanie a zlepšovanie vytvorenej elektronickej podpory vzdelávania, ako aj zhodnotenie jej efektívnosti a využiteľnosti.

**Kľúčové slová:** e-learning, elektronicke vzdelávanie, elektronickej podpora vzdelávania z matematiky, prieskum, študenti, vyučujúci

## Úvod

Počítač sa počas posledných rokov stal bežnou súčasťou takmer každej domácnosti, pracoviska či dokonca školy. Deťom ponúka neobmedzené možnosti zábavy, dospelým zjednodušenie a zrýchlenie práce. Logickým dôsledkom tejto mnohostrannej využiteľnosti je nápad

s obohatením vzdelávania na školách o elektronickej formu (podporu) vzdelávania. Takáto forma je podľa nás študentom v dnešnej dobe blízka. Ponúka vysokú možnosť motivácie študentov, efektívnejšie predávanie informácií a individuálnejší prístup samotného študenta k preberanému učivu.

Cieľom predkladanej práce je vytvorenie elektronickej podpory vzdelávania z matematiky, pre maturantov a pre študentov nižších ročníkov vysokých škôl. Táto podpora má študentovi slúžiť ako doučovanie – doučovateľ na rozhraní medzi strednou a vysokou školou. Naším cieľom bolo vytvoriť túto elektronickej podporu tak, aby bola interaktívna, reagujúca na stupeň vedomostí študenta. Pre splnenie tohto cieľa sme sa rozhodli pri riešení úloh využívať formu dynamických otázok a odpovedí. Ďalším cieľom bolo vytvoriť elektronickej podporu, ktorá by bola pre študentov zaujímavá, objasňujúca praktické využitie matematiky v reálnom živote, nebola samoúčelná a nevyužiteľná. Z tohto dôvodu sme si stanovili cieľ zistiť stav využívania e-learningovej formy vzdelávania na Slovenských školách, ako aj postoj študentov a vyučujúcich k e-learningovej forme (podpore) vzdelávania.

## 1 Teoretická časť práce

### 1.1 E-learning ako forma vzdelávania

Chápanie elektronickeho vzdelávania, ako aj terminológia používaná v súvislosti s touto problematikou je v súčasnej dobe nejednotná. Odborníci na jednej strane e-learning chápu ako vzdelávanie s využitím digitálnych technológií, na druhej strane ho často stotožňujú s on-line

\* babinskam@aol.com

# korenova@fmph.uniba.sk

vzdelávaním, prípadne distančným vzdelávaním. (Hrušecký, 2009)

V práci ponúkame pohľady odborníkov, ktorí sa touto problematikou zaoberajú.

Elektronické vzdelávanie (angl. e-learning) je v súčasnej dobe najmodernejší spôsob multimediálnej výuky na báze internetu. Ak by sme chceli použiť formálnu definíciu dá sa povedať, že ide o: „Systém, ktorý využíva na tvorbu a poskytovanie obsahu, riešenie úloh, hodnotenie, komunikáciu, administráciu a riadenie vzdelávania elektronické metódy spracovania, prenosu a uskladňovania informácií.“ (Huba, 2006)

E-learning zahŕňa také výučbové procesy ako: web vzdelávanie, počítačom podporované vzdelávanie, virtuálne triedy a spoluprácu s využitím digitálnych informačných a komunikačných technológií (IKT). Výučba zvyčajne prebieha pomocou internetu, intranetu/extranetu (LAN, WAN), audio alebo video pásov, audio alebo video konferencií, satelitného vysielania alebo CD ROM. (Learning Circuits –glossary). (Orbánová, E-learning - základné črty a princípy, 2008)

Systém vzdelávania s e-podporou môže existovať súbežne s klasickou výučbou, môže byť integrované do vyučovania, či úplne samostatné, nahradzujúce výučbu v triede. Tieto formy môžeme pomenovať ako objasňujúce, dopĺňujúce a nahradzujúce. (Dillingerová, 2006-2008)

Neformálne sa dá povedať, že je to spôsob výuky, založený na komunikácii študenta a učiteľa prostredníctvom internetu, webových aplikácií a e-mailu. Podľa doterajších definícií takáto forma vzdelávania zahŕňa akékoľvek využívanie elektronických materiálov a elektronickej formy komunikácie, či už počas vyučovacieho procesu učiteľom, alebo počas samo štúdia študentom (forma distančného vzdelávania).

## 1.2 Prečo e-learning?

Dôvody prečo sme sa rozhodli pracovať s takouto formou vzdelávania popisujú nasledujúce úryvky spoločnosti e-learnmedia, (spoločnosť sa zaoberá tvorbou a distribúciou e-learningových kurzov) a PaedDr. Hrušeckého Romana, PhD:

„Klasické a osvedčené postupy vzdelávania sa využívajú aj dnes. Žijeme však v dobe zmien, dobe nových myšlienok, nápadov, ale aj úloh. E-learning prináša do škôl nový impulz a nové možnosti. Kombináciou klasického vzdelávania a e-learningu je možné dosiahnuť formu, v ktorej sa spájajú skúsenosti učiteľa - lektora a výhody

výpočtovej techniky a multimédií. Vzdelávanie sa tak stáva pútavejším, adresnejším a efektívnejším. E-learning dokáže učiteľa oslobodiť od každodenného opakovania výkladu, navyše dokáže často prostredníctvom obrázku, či animácie vysvetliť problém jednoduchšie a dostatočne názorne na to, aby si ho študent lepšie zapamätal.“ (E-learnmedia, 2008)

„Nejde o to, že by študenti aj bez takejto formy vzdelávania nemali dostatok informácií. K informáciám majú vďaka internetu naopak omnoho rozsiahlejší prístup ako sú schopní zvládnuť. Potenciál e-learningu zmeniť poznávací proces a priniesť doň nové hodnoty nevyplýva z nových možností prístupu k informáciám. Čo si e-learning vyžaduje a čo ponúka, sú nové spôsoby ako spracovávať, interpretovať a obnovovať informácie. Súčasné prístupy pasívneho prenosu informácií vo vyššom vzdelávaní ostro kontrastujú s interaktívnym a konštruktívnym potenciálom e-learningu. Hodnota e-learningu nie je v rýchlejšom prístupe k informáciám. Hodnota e-learningu spočíva v schopnosti napomáhať komunikácii a mysleniu, a tak novým spôsobom konštruovať zmysel a vedomosť.“ (Hrušecký, 2009)

Popísané vlastnosti elektronického vzdelávania – motivácia, individuálny prístup, názornejšie vysvetlenie učiva, interaktivita a podnecovanie kreatívneho a logického myslenia užívateľov, sme reálne využili pri tvorbe samotnej e-learningovej podpory.

## 1.3 Problémy e-learningu

Tak, ako má elektronická forma vzdelávania množstvo výhod ako pre študentov, tak aj pre vyučujúcich, stretávame sa pri jej aplikácii aj s problémami. Spomenieme niektoré, s ktorými sme sa osobne stretli počas tvorby e-learningovej podpory z matematiky:

- Príprava študijných materiálov je podstatne náročnejšia ako v prípade prezenčnej výučby. Často je potrebný celý tím odborníkov (tvorcovia obsahu, didaktici, technici, grafici, ...)
- Takáto forma vzdelávania kladie vyššie nároky (časové, zručnosti s digitálnymi technológiami, prístup na internet) na lektora i študenta.
- Pri dištančných on-line kurzoch je potrebná vyššia motivácia študenta a sebadisciplína.
- Pri takejto forme vzdelávania (dištančných a on-line kurzoch) hrozí vyššia miera izolovanosti študenta. (Hrušecký, 2009)

S popísanými problémami sme sa reálne stretli pri tvorbe a používaní nami vytvorenej e-learningovej podpory vyučovania z matematiky.

S prípravou tejto e-learningovej podpory sme začali na začiatku roku 2010. Rozhodli sme sa pre spracovanie tematického celku funkcie, ktorý sme rozčlenili na 18 celkov 3 kapitol obsahujúcich 218 riešených úloh. Predpokladali sme, že jej prípravu ukončíme v decembri 2010, no čas potrebný na vytvorenie takéhoto rozsahu príkladov a aplikácií bol podstatne dlhší. Dôvodom bola vysoká náročnosť nie len po stránke odbornej (vedomosti z požadovaného učiva), no aj po stránke technickej a grafickej. Pri tvorbe e-learningovej podpory sme spolupracovali v developerom, ktorý vytvoril celé prostredie, kde je v súčasnej dobe vytvorená e-learningová podpora umiestnená, ako aj so študentkou umeleckej školy, ktorá je autorkou obrázkov umiestnených vo vytvorenom kurze.

Ďalší problém, ktorý sme predpokladali už v čase tvorby e-learningovej podpory, vznikol po rozposlaní vytvorenej e-learningovej podpory študentom a vyučujúcim. Časová náročnosť, ktorá je nutná na pochopenie spracovaného učiva a sebadisciplína študentov, ktorú takáto forma vyžaduje (práca bez ohľadu na to, že by bol študent nútený učiteľom/ rodičom/ známami...) sa ukázali ako prekážky pre študentov nižších ročníkov stredných škôl (1 a 2 ročník). Tento fakt je možné pozorovať na základe komentárov, ktoré študenti poskytli v rámci ankety určenej na overenie vytvorenej e-learningovej podpory. (kapitola č.2.6)

## 1.4 Prostriedky e-learningovej podpory

Prostriedkov e-learningovej podpory je v súčasnej dobe na trhu veľké množstvo. Užívateľom umožňujú vnieť do vzdelávania dynamiku. Poskytujú konkrétnu grafickú podobu abstraktných pojmov. Na trhu sa nachádzajú softvéry algebraické, grafické tieto môžu byť platené, licencované pre školy no aj voľne sťahovateľné.

My sme sa pri tvorbe e-learningovej podpory rozhodli využívať grafický softvér GeoGebra.

GeoGebra je dynamický matematický softvér, ktorý vyvíja od roku 2001 ako Open Source program Mark Hohenwarter. Tento softvér prostredníctvom geometrie a algebry spája v sebe dva pohľady na riešený problém. Pre program je

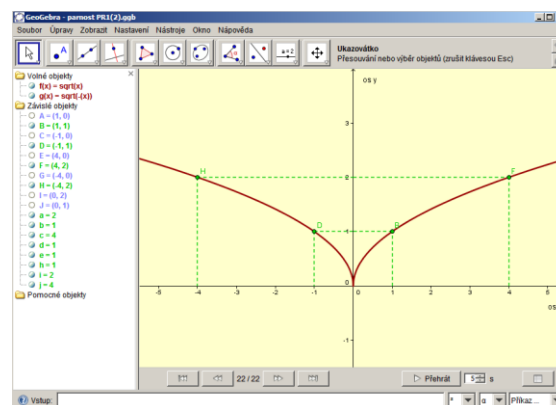
totiž charakteristické, že ku každému vyjadreniu v algebraickom okne je jednoznačne priradený jeden objekt v okne geometrickom a opačne. Z ponuky podobných softvérov vyniká tiež tým, že je voľne dostupný cez Internet, poskytuje on-line nápovedu v slovenskom jazyku a je vhodný pre rôzne operačné systémy (požiadavkou je len Java). Domovská stránka softvéru je [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org). (Drábeková). Ukážku prostredia softvéru znázorňuje **obrázok č.1**. Softvér GeoGebra umožňuje tvorbu apletov, animácií a obrázkov.

Aplety sú jednoduché aplikácie, ktoré sú spustiteľné z iného programu. Softvér GeoGebra umožňuje prekonvertovanie apletov priamo do podoby spustiteľnej prostredníctvom webového prehliadača. Takéto aplety môžu byť spustiteľné iba jedným tlačidlom (play), alebo môže byť užívateľom sprístupnené „krokovacie“ tlačidlá, ktoré umožňujú vykresľovanie apletu postupne, tak ako vznikal. Túto skutočnosť sme využívali napr. pri vysvetľovaní náčrtov grafov funkcií.

Animácie sú dosiahnuteľné pohybom jedného bodu (útvary). Tento sa dá chápať ako parameter v závislosti, od ktorého sa menia okolité útvary (grafy, obrázky) a tak vzniká ucelený pohyblivý obraz. Aj animácie je možné prostredníctvom funkcií softvéru GeoGebra prekonvertovať tak, aby boli spustiteľné z webového prehliadača.

Obrázky vznikajú ako skreen prostredia tohto softvéru. Takto je možné jednoducho získať napr. grafy funkcií.

**Obrázok č.1**



Softvér GeoGebra splnil naše očakávania po odbornej aj grafickej stránke. Pri tvorbe e-learningovej podpory nám umožnil vytvoriť množstvo zaujímavých materiálov.



## 2 Praktická časť práce

### 2.1 Získané východiská práce

Cieľom našej práce bolo vytvorenie e-learningovej podpory vyučovania matematiky pre maturantov a pre študentov nižších ročníkov vysokých škôl. Vytvárať takúto e-learningovú podporu by však nemalo zmysel, keby na Slovensku neboli možnosti či záujem túto podporu využívať. Z tohto dôvodu sme sa predtým, ako sme s tvorbou e-learningovej podpory začali, rozhodli zistiť, ako je to s využívaním e-learningovej formy vzdelávania na Slovensku a aký je postoj študentov a vyučujúcich k takejto forme vzdelávania.

V prvej časti prieskumu sme zistili, že čoraz viac škôl ponúka svojim študentom možnosť využívať elektronické materiály, ktoré pre nich slúžia či už na podporu výučby jednotlivých predmetov, na rozšírenie vedomostí z jednotlivých predmetov, alebo na spestrenie každodennej výučby. Tento fakt bol pre nás dôležitým ukazovateľom toho, že študenti a vyučujúci si začínajú zvykať na elektronickú podporu vzdelávania a že v prípade vytvorenia by e-learningová podpora mohla nájsť na školách uplatnenie.

V druhej časti prieskumu sme sa už konkrétnejšie zameriavali na názory samotných študentov a vyučujúcich.

Zisťovali sme názor študentov a vyučujúcich na podporu výučby prostredníctvom internetu. Dosiahnuté výsledky veľmi jednoznačne posunuli takýto spôsob výuky na žiaducu stranu. Až 71% vyučujúcich a 78% študentov sa vyjadrilo, že by podpora výučby cez internet mohla priaznivo ovplyvniť dosahované výsledky študentov.

Hľadali sme odpovede na otázku, či by respondenti uvítali elektronické materiály príp. možnosť vytvárať takéto materiály, a ak áno, z ktorých predmetov. Výsledky prieskumu ukázali, že aj vyučujúci aj študenti zo všetkých typov škôl by na viac ako 65% elektronické materiály, príp. možnosť vytvárať takéto materiály na svojej škole uvítali. Najvyšší záujem vychádzal zo strany stredných škôl (85%) a základných škôl (76%). Respondenti prejavili záujem o elektronické materiály zo všetkých príp. prírodovedných predmetov.

Venovali sme sa konkrétne matematike a možnej tvorbe e-learningovej podpory (kurzu) z tohto predmetu. Zistili sme, že vyučujúci,

študenti stredných a vysokých škôl preferujú pri zaradení do kurzu softvérovú podporu. Hneď po nej testy na preverenie vedomostí a zábavné kvízy. Najnižší záujem prejavili respondenti o teóriu matematiky.

Počas uskutočňovania prieskumov sme dostali viaceré e-maily s pozitívnymi ohlasmi od zúčastnených respondentov a nadviazali sme cennú spoluprácu s respondentmi, ktorí prejavili záujem o zaslanie výsledkov prieskumu. (Podrobné výsledky uskutočnených prieskumov boli prezentované na ŠVK 2010. V prípade záujmu je možné prezentovanú prácu nájsť v zborníku ŠVK 2010 alebo v rozšírenej verzii predkladanej práce.)

Na základe výsledkov prieskumu, nadobudnutých skúseností a nadviazanej spolupráce sme sa rozhodli pre vytvorenie e-learningovej podpory z matematiky. Snažili sme sa zohľadniť názory a nápady ako študentov tak aj vyučujúcich. Veríme, že sa nám to podarilo. Vytvorenú e-learningovú podporu predstavujeme v nasledujúcej kapitole.

### 2.2 E-learningová podpora vyučovania matematiky

Na základe akých zistení sme sa e-learningovú podporu z matematiky rozhodli vytvoriť, sme opísali v predchádzajúcej kapitole. Ako však došlo k samotnému nápadu, venovať sa tejto problematike? Prečo práve e-learningová podpora z matematiky, keď kurzov z matematiky na slovenských a najmä českých internetových stránkach je určite veľké množstvo?

Odpoveď je možné nájsť v pohľade na cieľovú skupinu, pre ktorú je vytvorená e-learningová podpora určená a v spôsobe, akým je spracované samotné riešenie úloh nachádzajúcich sa v tejto e-learningovej podpore.

Komplexný bezplatný materiál, ktorý by tvoril premostenie medzi stredoškolským a vysokoškolským učivom sa dá nájsť len veľmi ťažko. Študent má možnosť pracovať so zbierkami príkladov určenými pre stredné školy, alebo naopak so zbierkami určenými pre školy vysoké. Avšak, keď sa pozrieme na osnovy matematiky preberanej v prvom semestri na ktorejkoľvek vysokej škole, alebo naopak na požiadavky, s ktorými sa stretávajú maturanti pri príprave na prijímacie pohovory na vysokú školu, nájdeme špeciálnu skupinu úloh vychádzajúcich zo základov preberaných na strednej škole zachádzajúcich do učiva nového, vysokoškolského. Samozrejme, k tomuto

problému sa dá pristupovať cez už jestvujúce matematické zbierky a rôzne podpory, no vytvorenie komplexného premostenia by stredoškolským a vysokoškolským študentom mohlo značne uľahčiť prácu a objasniť nadväznosť stredoškolskej a vysokoškolskej matematiky.

Naša predstava (aj do budúcnosti) je vytvoriť takú pomôcku, ktorá by odbúrala strach študentov prihlásiť sa na vysokú školu, kde je potrebné absolvovať predmet matematika.

Druhým spomínaným dôvodom je spôsob spracovávaní riešení úloh a príkladov, s ktorými sa študenti stretávajú. Naším cieľom nebolo vytvoriť zbierku úloh, ktorá by obsahovala zoznam príkladov a ich riešení, či postupov riešení s akými sa bežne stretávame. Chceli sme vytvoriť takú pomôcku, ktorá by študentovi slúžila ako doučovanie – doučovateľ. Konkrétne, interaktívnu podporu, ktorá by reagovala na stupeň vedomostí študenta, „nútila“ by študenta sa nad problémom zamýšľať. Podporovala by jeho kreativitu a schopnosť logicky pristupovať k riešeniu vznikajúcich problémov. Zvolili sme preto formu dynamických otázok a odpovedí, ktoré študenta pri hľadaní riešenia úlohy navigujú, aby sám dospel k správnej odpovedi.

Na nasledujúcich stranách popisujeme, na koľko sa nám tieto ciele podarilo splniť, aké názory na pripravenú e-learningovú podporu mali študenti a vyučujúci, čo všetko vytvorenie takejto podpory prinieslo nám.

### 2.3 Proces tvorby e-learningovej podpory

S prípravou e-learningovej podpory z matematiky sme začali na začiatku roku 2010. Táto príprava zahŕňala v sebe:

- skúmanie situácie v oblasti elektronického vzdelávania na slovenských školách
- zisťovanie názorov študentov a vyučujúcich na elektronickú podporu vzdelávania
- tvorbu osnov pripravovanej e-learningovej podpory
- prácu a oboznamovanie sa s grafickými a algebraickými softvérmi, nutnú pre výber softvéru najväčšmi vyhovujúceho potrebám vytvárajúcej e-learningovej podpory
- samotnú tvorbu e-learningovej podpory
- overenie vytvorenej e-learningovej podpory užívateľmi

Predpokladali sme, že tvorbu e-learningovej podpory ukončíme v decembri 2010 a získame tak

dostatočne dlhú dobu na jej overenie užívateľmi. Čas potrebný na vytvorenie zvoleného rozsahu príkladov, úloh a aplikácií však bol podstatne dlhší. Dôvodom bola vysoká náročnosť nie len po stránke odbornej (vedomosti z požadovaného učiva), no aj po stránke technickej a grafickej. Naš pôvodný zámer umiestniť vytvorenú podporu do prostredia Moodle sme zmenili z dôvodu nedostatočnej grafickej a technickej vybavenosti tohto prostredia. Pri tvorbe e-learningovej podpory sme spolupracovali s developerom Júliusom Koroncim (študent aplikovanej informatiky na UKF v Nitre), ktorý vytvoril celé prostredie, kde je v súčasnej dobe vytvorená e-learningová podpora umiestnená, ako aj so študentkou umeleckej školy Adélkou Babinskou, ktorá je autorkou obrázkov umiestnených vo vytvorenom kurze. E-learningová podpora bola dokončená vo februári 2011 a od 15.3.2011 do 2.4.2011 sme zaznamenávali výsledky jej používania a názory zaregistrovaných účastníkov. Získané výsledky popisujeme v kapitole č. 2.6.

V súčasnej dobe je e-learningová podpora pre všetkých užívateľov bezplatne prístupná na internetovej stránke:

<http://ematik.fmph.uniba.sk/~babinska/> .

### 2.4 Obsahová štruktúra vytvorenej e-learningovej podpory

Na základe štúdia štandardov z matematiky pre stredné školy a gymnáziá vydané ministerstvom školstva SR a štúdia osnov matematiky viacerých vysokých škôl (voľne dostupných na internete) sme vytvorili osnovy e-learningového kurzu, ktoré zahŕňajú učivo vyžadované na maturitách, prijímacích skúškach z matematiky a tiež učivo preberané počas prvého semestra na vysokej škole. Snažili sme sa obsahovo obsiahnuť čo najširšie spektrum požiadaviek tak, aby vytvorená e-learningová podpora mohla slúžiť ako univerzálna pomôcka pre študentov na rozhraní strednej a vysokej školy bez ohľadu na typ školy, ktorú navštevujú. Osnovy celkovo tvorilo 7 kapitol: výroková logika, množiny, matice, funkcie, limity, spojitosť funkcie, diferenciálny počet funkcií jednej premennej.

V prvej fáze tvorby e-learningovej podpory sme sa rozhodli spracovať časť kapitoly funkcie. K takémuto rozhodnutiu nás priviedlo vedomie, že kapitola funkcie sa vyskytovala v osnovách všetkých skúmaných vysokých škôl. Venuje sa im

nemalá časť štúdia na strednej škole, ich znalosť je potrebná k úspešnému zvládnutiu maturitnej skúšky, ako aj prijímacích pohovorov z matematiky. Funkcie sú tiež východiskom pre mnohé ďalšie kapitoly matematiky a predmety na vysokej škole, ako napr. optimalizácia či finančná matematika, s ktorými sa stretávajú nie len študenti FMFI UK, ale tiež študenti ekonomických a technických škôl. Venovali sme sa 3 podkapitolám (základy práce s funkciami, grafy funkcií, vlastnosti funkcií), ktoré sú ďalej členené na 18 celkov a 218 riešených úloh.

Rovnaké, či podobné kritériá samozrejme spĺňajú aj ďalšie kapitoly matematiky. V tejto časti tvorby e-learningovej podpory sme však nemali možnosť obsiahnuť väčší rozsah učiva, najmä z časových dôvodov. Veríme však, že ak sa vytvorená e-learningová podpora stretne s pozitívnou odozvou zo strany užívateľov, postupne sa bude rozširovať a splní sa tak náš cieľ o komplexnej interaktívnej pomôcke pre študentov na rozhraní strednej a vysokej. Z tohto dôvodu je e-learningová podpora aj developersky navrhnutá tak, aby v prípade spracovania ďalších kapitol, či vytvorenia samostatného kurzu, bolo jednoduché s vytvorenou stránkou pracovať a rozširovať jej obsah.

## 2.5 Formálna štruktúra vytvorenej e-learningovej podpory

Pre vytvorenie e-learningovej podpory z matematiky bolo navrhnuté prostredie, ktoré je rozdelené na 5 základných častí. Ukážku vytvoreného prostredia je možné vidieť na **obrázku č.2**. V nasledujúcich kapitolách sa budeme venovať každej z piatich základných častí: ich štruktúre, obsahu a funkcii.

### 2.5.1 Hlavná stránka

Hlavná stránka je úplne prvou stránkou e-learningovej podpory, s ktorou sa užívatelia stretnú. Jej funkciou je užívateľov privítať, predstaviť im pre koho je daná e-learningová podpora určená a čo je jej obsahom. Užívateľov v krátkosti oboznamuje s výsledkami prieskumu z roku 2010, ktorý sa stal „odrazovým mostíkom“ pre vytvorenie e-learningovej podpory. Hlavná stránka je voľne dostupná bez registrácie, či akejkoľvek inej ochrany.

Presný obsah je možné na internetovej stránke e-learningovej podpory:

<http://ematik.fmph.uniba.sk/~babinska/>.

### Obrázok č.2



### 2.5.2 Kurz Matematika 1

Celok „Kurz Matematika 1“ tvorí jadro celej e-learningovej podpory. V úvode užívateľom predstavuje samotný kurz, myšlienky, ktoré sme uplatňovali pri jeho tvorbe. Vysvetľuje ako sme zostavili osnovy, ale aj spôsob, akým sú riešené úlohy nachádzajúce sa v tejto e-learningovej podpore, čo má takýto spôsob riešenia užívateľom priniesť. Okrem toho popisuje návod na používanie celej e-learningovej podpory, vysvetľuje funkciu fóra, či ako sa orientovať v menu.

Štruktúrne túto stránku netvorí jedna celistvá plocha. Je rozdelená na menu v ľavej časti obrazovky, ktoré tvorí navigáciu pre celý kurz matematika 1 a na pracovné okno (zobrazovaciu plochu) v pravej časti obrazovky. Užívateľ má možnosť vybrať si ktorúkoľvek kapitolu, či podkapitolu, ktorú mu menu ponúka. V pravej časti – na pracovnej ploche sa mu následne zobrazí obsah vybraného celku.

Obsahovo, bolo našim cieľom vytvoriť nie len bohatý a precízne spracovaný kurz, ale aj kurz, s ktorým by bola práca pre užívateľov príjemná, zábavná a ktorý by ukazoval, na čo je matematika vlastne dobrá. Z tohto dôvodu sme úvodné kapitoly obohacovali o aplety a videá, krížovky a texty, kde sme vysvetľovali, využiteľnosť preberaného učiva v praktickom živote. V rámci podkapitol, obsahujúcich zoznamy príkladov, sme umiestnili „smajlíkov“, ktorí majú tematicky nadväzovať na popisované učivo. Pri riešení príkladov sme nepoužívali iba striktné formálny tón, ale aj tón priateľský a niekedy žartovný. Ukážku prostredia kurzu matematika 1 je možné vidieť na **obrázku č.3**

### Obrázok č.3



Na nasledujúcich riadkoch popisujeme jednotlivé kapitoly a podkapitoly tvoriace obsah kurzu matematika 1.

#### 2.5.2.1 Hlavná kapitola “Funkcie“

Po kliknutí na kapitolu funkcie, sa na pracovnej ploche užívateľovi zobrazí nedokončený vtíp s krížovkou. Na dokončenie vtípu musia užívatelia vyriešiť krížovku, ktorá v sebe ukrýva názvy funkcií. Tie môžu užívatelia spoznať na základe všeobecných predpisov týchto funkcií.

Krížovku sme vytvorili pomocou programu Eclipse Crossword. Naším cieľom bolo primäť študentov zábavnou formou k zopakovaniu si všeobecných predpisov a základných grafov funkcií, ktoré bezpodmienečne musia poznať pre úspešnú prácu s funkciami a ich grafmi. Krížovka obsahuje nie len funkcie preberané na strednej škole, ale aj napr. funkcie cyklometrické a hyperbolické. Užívatelia však majú možnosť požiadať o „pomoc“ – vyriešenie daného políčka, takže krížovku môže dokončiť každý, bez ohľadu na rozsah svojich vedomostí.

#### 2.5.2.2 Podkapitoly

V úvode každej podkapitoly odpovedáme študentom na otázku „Na čo nám to bude?“ (čiastočne vysvetľujeme využiteľnosť preberaného učiva v reálnom živote) a oboznamujeme užívateľov s problematikou podkapitoly prostredníctvom apletov a videí. V rámci kapitoly funkcie spracovávame 3 podkapitoly:

##### 1. Základy práce s funkciami.

Cieľom tejto podkapitoly je oboznámiť užívateľov s funkciou, ako takou – niečím, čo je vyjadrením závislosti dvoch príp. viacerých

javov. Na tento účel sme vytvorili aplet znázorňujúci množstvo natečenej vody za určitý čas. Na základe apletu majú užívatelia možnosť objasniť si nie len to, že funkcia je vlastne popisom závislých javov nachádzajúcich sa všade okolo nás, ale zároveň pochopiť princíp tvorby grafov funkcií. Podkapitola „Základy práce s funkciami“ je rozdelená na 4 celky. Spolu užívateľom ponúka riešenia 30 úloh, ktoré sú v rámci každého celku usporiadané od najľahších, až po tie, ktorých znalosť sa vyžaduje na vysokej škole. Úlohy sú farebne rozdelené (červené – stredná škola, modré – vysoká škola), ich obtiažnosť je znázornená pomocou hviezdíčiek (s pribúdajúcimi hviezdíčkami náročnosť stúpa). Pri zadávaní úloh sme sa snažili o rozmanitosť a širokú škálu formulácií zadaných úloh.

##### 2. Grafy funkcií.

Cieľom tejto podkapitoly je oboznámiť užívateľov so základnými grafmi funkcií, ich tvorbou, funkciou ako aj s prácou s týmito grafmi. Pochopenie práce s grafom funkcie býva často pre študentov veľkým problémom. Stáva sa, že študenti si nevedia zovšeobecniť funkciu jednotlivých parametrov, ktoré sa nachádzajú v predpisoch všetkých druhov funkcií. Ako pomôcku sme preto na tento účel vytvorili video znázorňujúce posunutia, otočenia, „natiahnutia“, „sploštenia“... ľubovoľnej funkcie (nezáleží na jej predpise) podľa jednotlivých parametrov (parametrov  $a, b, c$ :  $a * f(b * x) + c$ ;  $a, b, c \in R$ ). Podkapitola „Grafy funkcií“ je rozdelená na 9 celkov. Spolu užívateľom ponúka riešenia 125 – ich úloh. Úlohy v jednotlivých celkoch sú rozmanité. Nejde iba o zoznam predpisov funkcií, ktorých graf je potrebné načrtnúť. Vyberali sme ich tak, aby študentovi pomohli pochopiť prácu s grafmi funkcií, ich využitie v praktickom živote, ako aj na vyučovaní pri iných predmetoch (funkcia závislosti času a dráhy na fyzike...).

##### 3. Vlastnosti funkcií.

Cieľom tejto podkapitoly je oboznámiť užívateľov so základnými vlastnosťami funkcií, zisťovaním týchto vlastností na základe predpisov či grafov funkcií ako aj

objasnenie dôležitosti poznania vlastností funkcií v reálnom živote. Ako pomôcku sme na tento účel použili aplet vytvorený v grafickom softvéri GeoGebra, znázorňujúci optimalizačnú úlohu – hľadanie optimálneho rozmeru záhrady. Podkapitola „Vlastnosti funkcií“ je rozdelená na 5 celkov. Spolu užívateľom ponúka riešenia 63 úloh.

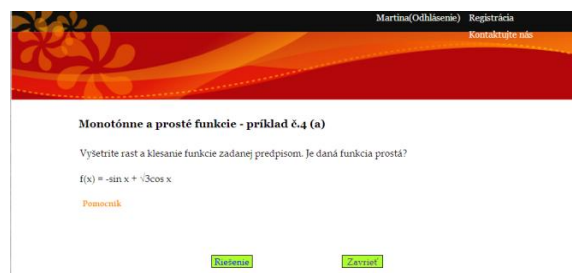
### 2.5.2.3 Konkrétne úlohy a ich riešenie

Vytvorená e-learningová podpora ponúka užívateľom 218 spracovaných úloh rozdelených do troch podkapitol a 18 – tich celkov zaoberajúcich sa problematikou funkcií. Ako sme už spomínali, našim cieľom nebolo vytvoriť zbierku úloh, ktorá by obsahovala zoznam príkladov a ich riešení, či postupov riešení s akými sa bežne stretávame. Snažili sme sa vytvoriť interaktívnu podporu, ktorá by reagovala na stupeň vedomostí študenta. „Nútila“ by študenta sa nad problémom zamýšľať, podporovala by jeho kreativitu a schopnosť logicky pristupovať k riešeniu vznikajúcich problémov. Pre takmer všetky úlohy sme preto zvolili formu riešenia prostredníctvom dynamických otázok a odpovedí, ktoré študenta pri hľadaní riešenia úlohy navigujú tak, aby sám dospel k správnej odpovedi, k riešeniu danej úlohy.

- V prípade, že študent na pomocnú otázku vie odpovedať a pochopil súvislosť medzi riešenou úlohou a pomocnou otázkou, mal by už dôjsť k pochopeniu princípu riešenia úlohy.
- Ak študent na pomocnú otázku odpovedať nevie alebo nenašiel súvislosť medzi riešenou úlohou a pomocnou otázkou, môže „požiadať“ o ďalšiu pomoc, až kým na správne riešenie napokon sám nepríde.

Nasledujúce **obrázky č.4, č.5, č.6** ponúkajú ukážku práce s dynamickými otázkami a odpoveďami:

Obrázok č.4



Obrázok č.5



Obrázok č.6



Formu riešenia úloh prostredníctvom pomocných a doplňujúcich otázok sme zvolili na základe skúseností získaných počas doučovania. Ukázalo sa, že študenti si preberané učivo ľahšie a najmä na dlhšiu dobu zapamätávajú, ak na odpoveď, ako nejaký problém vyriešiť, prídu sami a nie ak im je riešenie rovno predložené.

V priebehu riešenia majú užívatelia ďalej možnosť využívať softvérové pomôcky – aplety, grafy a videá, ktoré sme vytvorili pomocou grafického softvéru GeoGebra. Tieto slúžia nie len na názornejšie objasnenie problematiky, ale tiež ako motivácia na spestrenie doučovania.

### 2.5.3 Fórum

„Fórum“ je časť e-learningovej podpory určená na komunikáciu užívateľov medzi sebou komunikáciu s a tvorcami kurzu. Študenti tu majú možnosť diskutovať o problémoch, s ktorými sa stretli pri riešení úloh nachádzajúcich sa v Kurze matematiky 1, ale aj pri riešení vlastných úloh. Stránka fóra nie je voľne dostupná, pre jej využívanie je potrebná registrácia užívateľa. Takéto zabezpečenie je nutné z dôvodu kontroly príspevkov.

### 2.5.4 Anketa

Časť e-learningovej podpory „Anketa“ bola vytvorená s cieľom získať názory užívateľov na vytvorenú e-learningovú podporu a na ich základe ju zlepšovať, upravovať či rozširovať. V súčasnej dobe sa na tejto stránke nachádzajú 3 ankety. Prvé dve určené pre študentov a vyučujúcich matematiky. Venujú sa postojom študentov k matematike a názoru užívateľov na vytvorenú e-learningovú podporu. Znenie otázok ankety je možné nájsť v **prílohe č.1**, ich vyhodnotenie v kapitole 2.6.1. Do budúcnosti uvažujeme o zverejnení výsledkov v rámci vytvorenej e-learningovej podpory. Tretia anketa je určená pre vyučujúcich iných predmetov ako matematika. Táto anketa je totožná s dotazníkom z kapitoly 2.1 (anketu sme nevyhodnocovali z dôvodu nedostatočne veľkej štatistickej vzorky).

### 2.5.5 Odkazy

Posledná časť vytvorenej e-learningovej podpory ponúka užívateľovi možnosť pozrieť si autorov stránky, kde nájdú napr. kontaktné údaje, použitú literatúru, z ktorej sme čerpali pri tvorbe e-learningovej podpory, ako aj odkazy na zaujímavé matematické stránky. Túto časť môžu vytvoriť samotní užívatelia - majú možnosť napísať nám link na stránky, ktoré by podľa nich mohli pomôcť pri štúdiu či vyučovaní matematiky a my ich následne v rámci e-learningovej podpory na tomto mieste zverejníme.

## 2.6 Overenie vytvorenej e-learningovej podpory

E-learningová podpora bola dokončená vo februári 2011. Od 15.3.2011 bola internetová adresa vytvorenej e-learningovej podpory spolu

s popisom, pre koho je určená, rozoslaná respondentom, ktorí sa zúčastnili elektronického prieskumu popisovaného v kapitole č. 2.1 a ktorí prejavili záujem o zasielanie výsledkov našej práce. Tiež vyučujúcim, s ktorými sme nadviazali spoluprácu na konferencii „Učíme po novom“ v Považskej Bystrici. Niektorým účastníkom nachádzajúcim sa v databáze ematik na FMFI UK. Odkaz na vytvorenú e-learningovú podporu bolo (aj je) taktiež možné nájsť prostredníctvom internetových vyhľadávačov a na bezplatných stránkach zaoberajúcich sa problematikou doučovania.

Aby sme zistili, či vytvorená e-learningová podpora našla uplatnenie medzi užívateľmi, využili sme bezplatné služby „Google Analytics“. Táto služba umožňuje sledovať základné parametre používania internetových stránok: počet užívateľov, ktorí sa na stránku prídu pozrieť, priemerný čas strávený v rámci stránky, priemerný počet otvorených stránok či konkrétne stránky (v našom prípade príklady), ktoré si užívatelia najviac prezerajú.

Okrem služby „Google Analytics“, sme vytvorili anketu, určenú iba pre zaregistrovaných užívateľov. Registrácia, ako už bolo spomínané, je nutná iba v prípade, že užívateľ má záujem prezerať si už konkrétne riešenia úloh, ak si vytvorenú e-learningovú podporu podrobnejšie prezrel, príp. ju skutočne využíva ako pomôcku pri štúdiu.

### 2.6.1 Získané výsledky

Overenie využiteľnosti a efektívnosti vytvorenej e-learningovej podpory dopadlo pre vytvorenú e-learningovú podporu veľmi dobre. Získané výsledky, či už prostredníctvom služby „Google Analytics“, alebo prostredníctvom ankety, jednoznačne posunuli vytvorenú e-learningovú podporu na užívateľmi prijateľnú stranu. Za pomerne krátke obdobie, počas ktorého sme skúmali používanie e-learningovej podpory (15.3.2011 - 2.4.2011), ju navštívilo 439 užívateľov a z toho až 176 (približne 40%) sa v rámci e-learningovej podpory zaregistrovalo. Tento ukazovateľ je samozrejme ovplyvnený intenzívnou kampaňou, kedy sme e-learningovú podporu rozposlali viac ako 1000 užívateľom, ako je možné vidieť na základe výsledkov získaných prostredníctvom služby „Google analytics“ v **prílohe č.2**, viac ako 50% užívateľov sa k e-learningovej podpore vracia (navštívilo ju viac ako 1 krát).

Do ankety sa zapojilo 115 užívateľov (100 študentov, 13 učiteľov matematiky, 2 učители iných predmetov ako matematika ) čo je 65.34 % z 176 – ich zaregistrovaných užívateľov e-learningovej podpory. Takáto vysoká účasť vzhľadom na krátkosť obdobia prekročila naše pôvodné očakávania (odhadovali sme celkovo okolo 50 zaregistrovaných užívateľov e-learningovej podpory).

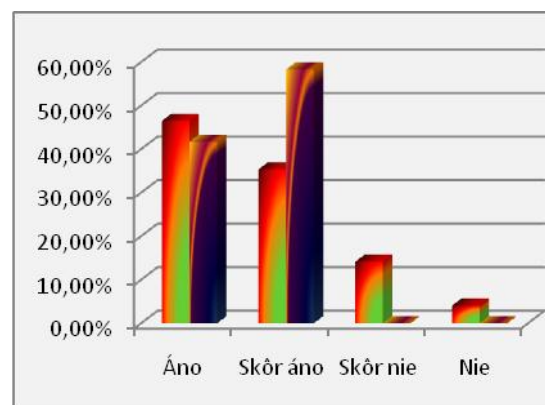
Prvá časť otázok ankety určenej pre študentov a ankety určenej pre vyučujúcich matematiky sa zameriavala na zistenie postoja študentov k predmetu matematika ako takému, resp. zisteniu názorov vyučujúcich na postoj študentov k matematike, ako aj na zistenie postoja študentov a vyučujúcich k výučbe matematiky. Výsledky ukázali, že viac ako 55% študentov má k matematike negatívny postoj a dokonca viac ako 60% študentov nevidí zmysel v tom, čo sa na matematike učí (praktické využitie matematiky). Z dobrovoľných príspevkov (komentárov) študentov vyplýva, že matematiku nemajú radi preto, že jej nerozumejú: „skoro nikdy jej nerozumiem, neznášam ju“. Rovnako vidieť, že študenti skutočne nevidia zmysel v tom, čo sa učia: „Určite nie, načo by mi bola kvadratická rovnica???", „Učíme sa to čo nikdy nevyužijeme.“, „možno tak násobilka :)“ Názory vyučujúcich sú ešte negatívnejšie. Takmer 77% vyučujúcich si myslí, že študenti nemajú matematiku radi a takmer 70% vyučujúcich je toho názoru, že študenti nevidia v matematike zmysel. Podrobné štatistické údaje je možné nájsť v **prilohe č.2**.

Ako sme spomínali v úvode práce, pôvodne sme sa v rámci e-learningovej podpory chceli podrobne venovať aj otázke „Na čo nám to bude?“ a tak užívateľom ukázať matematiku ako praktickú (v reálnom živote využiteľnú) vedu. Pre vysokú odbornú a časovú náročnosť, sa nám to v dostatočnej miere nepodarilo splniť. Výsledky získané prostredníctvom ankety ukazujú, že by naozaj malo zmysel sa touto problematikou zaoberať. Rozšírenie e-learningovej podpory o takúto prácu by mohlo priniesť zmenu negatívneho postoja študentov k predmetu matematika.

Druhá časť otázok ankety určenej pre študentov, ako aj ankety určenej pre vyučujúcich matematiky, sa zameriavala na samotnú e-learningovú podporu. Zisťovali sme, či sa užívateľom páči forma, akou je spracovaná celá e-learningová podpora, aký majú názor na formu riešených príkladov prostredníctvom pomocných otázok, čo si myslia o rozsahu a výbere úloh riešených v rámci kurzu matematika 1.

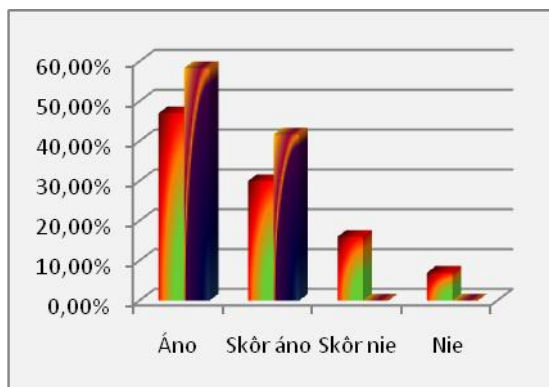
Výsledky, ktoré sme získali, môžeme považovať za veľmi uspokojivé. Ako môžeme vidieť na **grafe č.1**, viac ako 90% užívateľov, ktorí sa zúčastnili ankety, sa pozitívne pozerá na formu vytvorenej e-learningovej podpory – formu riešených úloh obohatených o softvérové aplikácie.

**Graf č.1**



Ešte uspokojivejšie výsledky demonštruje **graf č.2**. Viac ako 88% užívateľov sa pozitívne stavia k forme riešených úloh – forme riešenia cez pomocné, navádzajúce otázky. Práve reakcie na takúto formu riešenia sme sa najviac obávali. Ide totiž o náročnejší prístup, ako sú študenti zvyknutí. Menej náročné je naučiť sa postup riešenia, ako sa sám k postupu riešenia dospieť hľadáním súvislostí medzi doterajšími a novonadobudnutými vedomosťami. Užívatelia (vo veľkej miere študenti) v ankete však jednoznačne potvrdili, že náročnejší prístup im neprekáža. Na základe toho môžeme súdiť, že študenti majú skutočne záujem matematiku pochopiť a porozumieť jej. Toto otvára obrovský priestor pre rozširovanie obsahu vytvorenej e-learningovej podpory. Podrobnejšie výsledky je možné nájsť v **prilohe č.2**.

Graf č.2



Posledné dve otázky ankety boli otvorené. Užívateľia tu mali možnosť vyjadriť sa, aké úlohy a kapitoly by v budúcnosti v rámci e-learningovej podpory privítali. U študentov prevládala záujem o slovné úlohy a rovnice. Vyučujúci prejavili záujem o praktické úlohy zo života, spracovanie rezov telies, aj mnohých ďalších. Všetky odpovede študentov ako aj vyučujúcich je možné nájsť v **prílohe č.2**. Užívateľom sme za tieto nápady veľmi vďační. Veríme, že ich požiadavky bude v budúcnosti možné splniť.

Napriek nízkej štatistickej vzorke chceme na záver ponúknuť ešte jeden, pre nás veľmi dôležitý, získaný štatistický údaj: „e-learningová podpora bola užitočná pre 60% z 15 - tich študentov, ktorí sa skutočne pripravovali na skúšky (maturity) a práve z tohto dôvodu navštívili vytvorenú e-learningovú podporu“. Takéto vyhodnotenie sme získali vďaka porovnaniu ID adries zaregistrovaných užívateľov odpovedajúcich na 1 a 10 – tu otázku ankety (otázky o dôvode návštevy e-learningovej podpory a jej užitočnosti/neužitočnosti pri príprave na skúšky, maturity). Napriek tomu, že sa toto číslo môže zdať nízke, pre nás je vzhľadom na krátkosť doby, počas ktorej náš prieskum prebiehal, vynikajúce. Svedčí o tom, že vytvorenie e-learningovej podpory malo skutočne zmysel. Podarilo sa nám pomôcť pri štúdiu matematiky aspoň jednému študentovi, čo splnilo náš osobný cieľ.

## Podakovanie

Chcela by som sa poďakovať vedúcej mojej diplomovej práce, PaedDr. Koreňovej Lille, PhD. za cenné rady, podnety ktoré mi poskytovala počas tvorby tejto práce a za čas, ktorý mi venovala. Taktiež ďakujem Júliusovi Koroncimu

za vytvorenie prostredia (internetovej stránky), kde je vytvorená e-learningová podpora umiestnená, za technickú pomoc pri tvorbe práce a za nápady, ktoré v nemalej miere prispeli k zlepšeniu vytvorenej práce. Adelke Babinskej ďakujem za pomoc pri grafickej úprave e-learningovej podpory. Napokon ďakujem mojim rodičom a súrodencom za trpezlivosť a za rady, ktorými mi počas tvorby práce pomáhali.

## Záver

Cieľom tejto práce bolo vytvoriť a overiť e-learningovú podporu vyučovania matematiky pre maturantov a pre študentov nižších ročníkov vysokých škôl. V prvej časti práce sme prostredníctvom prieskumov zisťovali využívanie e-learningovej formy vzdelávania na Slovenských školách. Postoj študentov a vyučujúcich k takejto forme (podpore) vzdelávania a ich záujem o možnú e-learningovú podporu. Účelom uskutočnených prieskumov bolo vyhnúť sa vytvoreniu samoúčelnej a nepoužiteľnej pomôcky, ktorá by nenachádzala medzi študentmi a vyučujúcimi uplatnenie. Výsledky ukázali, že viac ako 65% respondentov by elektronické materiály príp. možnosť vytvárať takéto materiály na svojej škole uvítali.

V druhej časti práce sme sa venovali samotnej tvorbe e-learningovej podpory vyučovania z matematiky. Pri jej tvorbe sme zohľadnili získané poznatky, požiadavky a nápady študentov a vyučujúcich. Vytvorená e-learningová podpora je interaktívna, obohatená o softvérové aplikácie. Prostredníctvom dynamických otázok a odpovedí reaguje počas riešenia úloh na stupeň vedomostí študenta, čo považujeme za najväčší prínos našej práce. Počas skúmaného obdobia navštívilo vytvorenú podporu viac ako 400 užívateľov z ktorých sa viac ako 170 zaregistrovalo. Výsledky ankety ukázali, že viac ako 90% užívateľov, ktorí sa zúčastnili ankety, sa pozitívne pozerajú na formu vytvorenej e-learningovej podpory a viac ako 88% užívateľov sa pozitívne stavia k forme riešenia úloh.

Vytvorená e-learningová podpora teda splnila naše očakávania a ako ukazujú výsledky ankety, aj očakávania užívateľov. Veríme, že rady študentov, pre ktorých bude hodnotnou pomôckou pri štúdiu sa budú aj v budúcnosti rozširovať.

E-learningová podpora je navrhnutá tak, aby sa jej obsah v prípade pozitívnych ohlasov užívateľov dala jednoducho rozširovať. Na základe ohlasov užívateľov vidíme v budúcnosti zmysel v jej rozšírení o zábavnú formu testov a kvízov na



preverenie vedomostí ako aj o podrobnejšie spracovanie odpovedí na otázku „Na čo nám to bude?“. Týmto sme sa pôvodne chceli venovať, no z dôvodu vysokej časovej náročnosti tvorby podpory sa nám to v dostatočnej miere nepodarilo.

## Bibliografia

**Dillingerová, M. (2006-2008).** *Systémy pre e-learningové vzdelávanie*. Zborník príspevkov z konferencie EMATIK 2007. 2006-2008.

**Drábeková, J.** *Vizualizácia matematiky pomocou softvéru GeoGebra*. Citované marec 2011, z <http://www.fem.uniag.sk/itrv2010/zbornik/Drabekova.pdf>.

**E-learnmedia. (2008).** *E - learning a školstvo*. (e-learnmedia, s.r.o.) Citované 2010, z [http://www.elearnmedia.sk/main.php?menu=27\\_](http://www.elearnmedia.sk/main.php?menu=27_)

**Hrušecký, R. (2009).** *E-learning vo vzdelávaní budúcich učiteľov (dizertačná práca)*. Bratislava: Univerzita Komenského.

**Huba, M., Bisták, P., Fikar, M. (2007).** *Systémy na riadenie výučby (LMS)*. Bratislava: Slovenská e-akadémia.

**Orbánová, I. (2008).** *E-learning - základné črty a princípy*. (FVS UPJŠ) Citované 2010, z [http://www.google.sk/url?sa=t&source=web&cd=1&ved=0CBcQFjAA&url=http://www.fberg.tuke.sk/bergweb/organizacia/dekanat/spp/7/elearning\\_zakladne\\_crty\\_a\\_principy.ppt&rct=j&q=Orb%C3%A1nov%C3%A1,%20Elearning%20%20z%C3%A1kladn%C3%A9%20%20C4%8Drty%20a%20princ%C3%ADpy&ei=zWybTe6CF8nNswbp3IC7Bg&usg=AFQjCNFM6bVgIaZVG7m1qXGaZYQVgoKJLw](http://www.google.sk/url?sa=t&source=web&cd=1&ved=0CBcQFjAA&url=http://www.fberg.tuke.sk/bergweb/organizacia/dekanat/spp/7/elearning_zakladne_crty_a_principy.ppt&rct=j&q=Orb%C3%A1nov%C3%A1,%20Elearning%20%20z%C3%A1kladn%C3%A9%20%20C4%8Drty%20a%20princ%C3%ADpy&ei=zWybTe6CF8nNswbp3IC7Bg&usg=AFQjCNFM6bVgIaZVG7m1qXGaZYQVgoKJLw)

# Rozvíjanie priestorovej predstavivosti na základnej škole

Mária Gabajová<sup>1\*</sup>  
Školiteľ: Viera Uherčíková

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

Priestorová predstavivosť je dôležitá schopnosť potrebná k napredovaniu človeka. Rozvíjaním tejto schopnosti u detí na základe ich predchádzajúcich skúseností a prostredníctvom pomôcok môžeme napomôcť k výraznému napredovaniu a získavaniu nielen nových schopností, zručností, ale aj poznatkov.

**Kľúčové slová:** priestorová predstavivosť, stupne geometrického myslenia, tangram

## 1 Priestorová predstavivosť

Priestorová predstavivosť je jednou zo základných schopností človeka, bez ktorej by len ťažko dokázal existovať v reálnom svete. Je to schopnosť, s ktorou sa dieťa nerodí, ale dá sa získať a rozvíjať na základe skúseností. Priestorovú predstavivosť vníma Gardner [Gardner, 1999] ako priestorovú inteligenciu. Jadrom tejto inteligencie sú schopnosti, ktoré zabezpečujú presné vnímanie vizuálneho sveta, umožňujú transformovať a modifikovať pôvodné vnemy a vytvárajú z vlastnej skúsenosti myšlienkové predstavy, aj keď nepôsobia už žiadne ďalšie podnety. Hejný [Hejný a kol., 1990] definuje priestorovú predstavivosť ako:

- vytváranie si predstáv geometrických objektov a ich rozmiestnenia,
- vedieť v predstave s týmito objektmi manipulovať.

Avšak takúto definíciu súčasne môžeme použiť aj ako definíciu geometrickej predstavivosti.

Priestorovú predstavivosť môžeme rozvíjať podľa Del Grande a Morrow [Del Grande a Morrow, 1993] rozvíjaním siedmich schopností:

*Zrakovo-motorická koordinácia* je schopnosť koordinovať časti tela s inými časťami v rôznych aktivitách.

*Vnímanie objektov na pozadí* je schopnosť identifikovať útvar oproti pozadiu, voči ktorému je situovaný.

*Vnímanie stálosti* je schopnosť rozpoznávať osoby alebo objekty v priestore bez ohľadu na ich veľkosť, polohu alebo orientáciu.

*Vnímanie polohy v priestore* je schopnosť vnímať objekt v priestore vo vzťahu k sebe.

*Vnímanie priestorových vzťahov* je schopnosť vidieť dva alebo viaceré objekty vo vzájomných vzťahoch k sebe samým alebo vo vzťahu jeden k druhému.

*Vizuálna identifikácia* je schopnosť rozpoznať podobnosti a odlišnosti medzi jednotlivými objektmi.

*Vizuálna pamäť* je schopnosť spomenúť si na objekty, ktoré neboli dlhšie vnímané.

## Stupne geometrického myslenia podľa van Hiele

Pierre van Hiele [van Hiele, 1986, 1999] vypracoval jednotlivé stupne geometrického myslenia u žiakov: *Vizualizácia:* v tejto etape žiaci rozpoznávajú predmety len na základe predchádzajúcich skúseností, to znamená identifikujú predmety len v podobe, v ktorej ich už predtým videli, pre rozpoznanie je stále dôležitá veľkosť alebo orientácia útvaru.

*Analýza (opisná úroveň):* žiaci začínajú v tejto etape používať vhodné pojmy na pomenovanie jednotlivých charakteristík útvarov a dokážu opísať jednotlivé vlastnosti útvarov, veľkosť a orientácia útvaru sa stávajú pre identifikáciu útvaru menej dôležité. Jazyk je dôležitý pre opísanie určitých vlastností útvarov. Vlastnosti útvarov však ešte nie sú logicky poprepájané.

*Neformálna dedukcia:* žiaci dokážu identifikovať jednotlivé triedy útvarov, deliť ich do týchto tried (skupín) podľa jednotlivých vlastností. Vlastnosti útvarov sú už logicky usporiadané na rozdiel od predchádzajúcej úrovne. Žiaci si dokážu logicky odvodiť jednu vlastnosť geometrického útvaru od druhej.

*Dedukcia:* žiaci dokážu pomocou postulátov alebo axióm a definícií logicky argumentovať pri identifikácii a charakterizovaní jednotlivých útvarov.

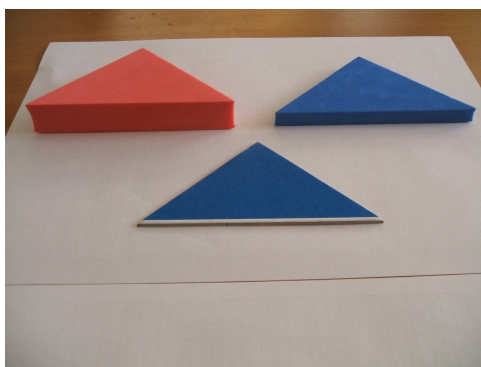
*Rigoróznosť:* žiaci v tejto etape dokážu pracovať v rôznych geometrických a axiomatických systémoch (zvyčajne je to až úroveň vysokých škôl, niektorí ľudia sa do tejto etapy nikdy nedostanú).

\* gabajova@fmph.uniba.sk

## 2 Práca s tangramom

Práca s deťmi má niekoľko veľkých výhod a to, že môžeme pri nej využiť ich veľkú tvorivosť, neviazanosť určitými pravidlami, hravosť a ochotu učiť sa nové veci. Pri rozvíjaní priestorovej predstavivosti u detí hlavne na primárnom stupni vzdelávania a na začiatku sekundárneho vzdelávania môžeme využiť ich predchádzajúce skúsenosti a zapojiť ich do matematického kontextu.

Pre našu prácu sme použili hlavolam tangram, ktorého dieliky mali rôznu hrúbku. Jeden tangram mal hrúbku len asi milimeter, druhý 1 cm a tretí približne 2 cm. (obr. 1.)



Obrázok 1

Pracovali sme na hodine matematiky s dvomi triedami, v jednej triede bolo 20 žiakov a v druhej 9 žiakov. Vek žiakov je približne 11 rokov (5. ročník ZŠ). Každý žiak mal k dispozícii jeden tangram, pričom v každej lavici mali k dispozícii jeden tenký a jeden hrubší.

Cieľom našej práce z hľadiska obsahovej náplne tematických plánov bolo zopakovanie si geometrických útvarov, ich základná charakteristika, rozdelenie a objavenie niektorých základných vlastností telies. Z hľadiska rozvíjania priestorovej predstavivosti sme sa snažili posunúť žiakov z úrovne analýzy na úroveň neformálnej dedukcie. Zároveň pomocou manipulovania jednotlivých dielikov tangramu si žiaci mali ujasňovať priestorové vzťahy medzi jednotlivými geometrickými útvarmi, vnímať rôzne polohy jednotlivých útvarov ako aj porovnávať jednotlivé vlastnosti útvarov a porovnávať ich navzájom.

### Priebeh experimentu

Na úvod hodiny žiaci vymenovali niekoľko geometrických útvarov: kocka, kváder, guľa, ihlan, trojuholník, štvorec, kosoštvorec atď. Na otázku aký je základný rozdiel medzi týmito geometrickými útvarmi žiaci odpovedali, že niektoré sa dajú chytiť do ruky a niektoré nie. Na tabuľu sme si preto nakreslili tabuľku (tab. 1), kde sme tieto geometrické útvary rozdelili, či sa dajú

chytiť alebo nie. Deti pomenovali útvary, ktoré sa dajú chytiť, telesami a niektoré si spomenuli, že je to vlastne „3D“. Ďalšia naša otázka bola ako by sme pomenovali tie geometrické útvary, ktoré sa chytiť nedajú a spontánna reakcia bola „2D“.

Telesá - 3D útvary	2D útvary
kocka	trojuholník
kváder	obdĺžnik
guľa	štvorec
ihlan	kruh

Tabuľka 1

Niektoré deti sa začali pýtať, čo to vlastne to „D“ znamená. A prečo vlastne sú tam práve tie čísla 2 a 3. Ukázali sme si, že sa na tabuľu dá pohybovať v dvoch smeroch, aj keď pre deti to boli vlastne 4 smery (hore - dole, doprava - doľava). Využili sme práve skúsenosť z reálneho života, že v rovine (aj keď tento pojem sme nepoužili), môžeme merať dva rozmery a to šírku a dĺžku. Keď sme sa teda spýtali, aký ďalší smer môže byť v 3D, odpoveď bola „pred tabuľu a za tabuľu“ a môžeme merať dĺžku, šírku a výšku. Jedného chlapca napadla otázka: „A čo vlastne bude 1D?“ Následne na to ďalšie deti prišli na to, že to bude priamka alebo úsečka a meriame dĺžku. A následne im z toho vyplynulo, že 0D by mohol byť bod. Potom niektoré deti zaujalo, či existuje aj 4D a postupne aj viac. Na to sme im odpovedali, že samozrejme, že áno a môžu sa s tým stretnúť neskôr v matematike alebo vo fyzike.

V ďalšom kroku sme sa dostali k meraniu - ako by sme zmerali dĺžku a v akých jednotkách, čo pre žiakov nebol problém. Pri otázke ohľadne merania plochy si žiaci spomenuli na „meter štvorcový“ pričom sme im ukázali aj matematický zápis  $m^2$ . Na otázku: „V akých jednotkách budeme merať objem?“, si deti spomenuli na jednotky z bežného života „liter, deci“ a niekoľko z nich napadlo, že bude napísané  $m^3$ , len nevedeli ako sa to číta. Ako náhle sme im odpovedali „meter kubický“ jedno dievčatko si spomenulo, že rodičia kupujú drevo v „kubíkoch“ a že to bude asi to isté.

Po tomto úvode sme sa dostali k jednotlivým dielikom tangramu. Dieliky deti nazývali podľa tvaru podstavy, teda „trojuholník, štvorec, kosodĺžnik“. Keď sme sa teda spýtali, či sú to naozaj tie naše „2D útvary“ zhodli sa, že nie a že to čo bol pôvodne štvorec si niektorý pomýlili s kockou, ale je to vlastne kváder. Následne sme sa zhodli na tom, že všetky dieliky, ktoré držia v ruke sú telesá, lebo majú vždy nejakú hrúbku a bočné steny našich dielikov sú tvorené obdĺžnikmi aj keď len úplne tenkými.

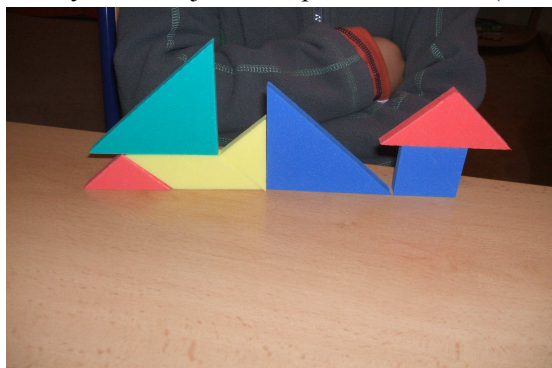
Na otázku, koľko vrcholov má teda náš kváder, spočítali 8, potom sme sa spýtali na trojboký hranol

(dielik s podstavou trojuholníka), vyšlo im, že 6, s podstavou kosodĺžnika bolo výsledok zas 8. Ukázali sme si, že aj trieda má tvar kvádra a má 8 rohov (vrcholov). Následne pri hranole s podstavou päťuholníka vedeli niektoré deti hneď odpovedať, že má 10 vrcholov. Niektorým nebolo jasné, prečo a bolo vidieť, že si pomáhajú pri svojich predstavách rukou. To znamená ako keby držali v ruke takýto hranol a pomaly ním otáčali a v duchu počítali. Takýto jav – kinestetický fenomén opisuje napríklad v svojich prácach Perný [Perný, 2009]. Tu môžeme vidieť, ako si dieťa vytvára vo svojom vnútri predstavu niečoho, čo malo len slovné opísané. Takto sme postupovali až k hranolu s podstavou 100 uholníka.

Ďalšia otázka bola na počet hrán kvádra. Najprv boli odpovede, že 4, 6, 8, 12. Preto sme sa spýtali na ten správny počet a spočítali sme ich spolu, pričom každé dieťa počítalo na tom svojom modeli. Dospeli k počtu 12. Následne sme sa spýtali na trojboký hranol (deti už vedeli, že je to ten dielik s podstavou trojuholníka) a tam ich spočítali 9. Pri hranole s podstavou kosoštvorca ich napočítali, že ich bude zas 12. Niektoré deti prišli na to, že keď vlastne vždy násobíme tromi počet strán podstavy a teda pre teleso s 5-uholníkovou podstavou to bude 15. Deti si potom navzájom dávali ako úlohu počet strán podstavy a hovorili počty hrán telies.

Na záver sme skúsili nájsť nejaký vzťah medzi počtom hrán v podstave a počtom stien hranolov. Najprv znovu spočítali steny na kvádri „6“ potom na trojbokom hranole „5“, na hranole s podstavou kosoštvorca „6“. Tu už ten vzťah nie je taký jednoduchý, lebo nie je to priamo násobok. Keď sme sa spýtali na hranol s päťuholníkovou podstavou, tak odpovedali: „7“. Opýtali sme sa, ako dospeli k tomuto číslu, nuž odpovedali, že je to počet strán v podstave plus 2. A znovu si dávali rôzne čísla ako počet strán podstavy, dospeli až k podstave stouholník.

Zadali sme im teda úlohu nech z jednotlivých dielikov vytvorí rôzne telesá a zistia či naozaj sedí počet strán, hrán a stien, pre ktoré si vytvorili takéto „vzorce“. Deti mali samozrejme snahu vytvoriť podstavy s čo najväčším počtom uhlov (obr. 2).



Obrázok 2

Následne si spočítali koľko uhlov majú ich podstavy a dokázali vypočítať, koľko vrcholov, hrán a stien má práve ten ich útvar.

### Zhrnutie

Počas tejto hodiny si žiaci upevnili pojmy: vrchol, stena, hrana. Tým, že v rukách mali priamo telesá, o ktorých sme sa rozprávali, získali s nimi priamu skúsenosť, na základe ktorej si mohli osvojiť nové pojmy. Tieto pojmy sa naučili rozlišovať a dokázali ich identifikovať na rôznych telesách. Uvedomili si vzťahy medzi počtom hrán, stien a vrcholov v závislosti od počtu strán podstavy kolmých hranolov:

počet stien = počet strán podstavy + 2

počet vrcholov = počet strán podstavy × 3

počet hrán = počet strán podstavy × 3

Väčšina žiakov v 5. ročníku základnej školy sa nachádza niekde medzi úrovňou vizualizácie a analýzy, teda dokáže identifikovať predtým videný útvar v rôznych polohách a veľkostiach. Teda dokáže rozpoznať napríklad rôzne druhy trojuholníkov v rôznych polohách, zatiaľ čo niektoré mladšie deti napríklad tupouhlý trojuholník za trojuholník nepovažujú, pretože pred tým nikdy taký trojuholník nevideli. Tým, že začali používať vhodné pojmy na identifikáciu útvarov sa žiaci dostali na opisnú úroveň – úroveň analýzy. Teda rozlišovali a dokázali opísať, koľko hrán, stien a vrcholov majú jednotlivé telesá. Počas vyučovacej hodiny sa však dokázali posunúť na ďalšiu úroveň a to neformálnej dedukcie primerane k ich veku. To znamená, že na základe jedinej informácie a to tvar podstavy kolmého hranola si dokázali odvodiť počet stien, vrcholov a hrán.

Počas hodiny sme rozvíjali schopnosť vizuálnej identifikácie geometrických útvarov tým, že ich priamo mohli porovnávať navzájom. Mohli si priamo spočítať jednotlivé vlastnosti útvarov. Napríklad ak porovnali počty jednotlivých prvkov u kvádra a u kolmého hranola s podstavou kosodĺžnika, zistili, že sú rovnaké. Napriek tomu dokázali slovné popísať čím sa tieto dva útvary líšia. Vnímание polohy útvarov v priestore si deti rozvíjali vlastne už samotnou manipuláciou s jednotlivými dielikmi. Tým, že ich otáčali, skúmali z každej strany, vytvárali rôzne obrazce, mali možnosť uvedomiť si rôzne polohy toho istého predmetu v priestore jednak vzhľadom na seba, ale súčasne vzhľadom aj na iné objekty.

Ak vychádzame z definície priestorovej predstavivosti, dokázali sme podporiť jej rozvoj jednoduchou manipuláciou s telesami. Pekným príkladom toho, kde sme mohli vidieť, či naša činnosť podporila priestorovú predstavivosť detí, bolo, keď si len na základe slovného popisu dokázali predstaviť teleso, ktoré predtým nikdy

nevideli a dokonca dokázali určiť niektoré jeho vlastnosti napríklad kolmý hranol s podstavou stouholníka.

Samozrejme počas jednej vyučovacej hodiny sa nedá uskutočniť rozvíjanie priestorovej predstavivosti. Toto bola ukážka akým spôsobom sa dá sklbiť dodržiavanie tematického plánu a zároveň efektívne rozvíjať priestorovú predstavivosť. Je potrebné v tejto práci pokračovať v dlhodobom horizonte, nielen na jednej vyučovacej hodine.

#### Niekoľko ďalších úloh na pokračovanie:

1. Zmení sa objem telesa (kolmého hranola), ak sa zmení tvar podstavy, ale nie jej obsah?  
*Realizácia:* Žiaci by použili napríklad dva rovnaké trojboké hranoly a ich vzájomným spájaním môžu vytvoriť niekoľko rôznych hranolov, pričom objem výsledného bude rovnaký bez ohľadu na to aký tvar bude mať podstava.
2. Odmerajte jednotlivé hrany dielikov tangramu a vypočítajte obvod stien týchto útvarov.
3. Vypočítajte obsah plochy jednotlivých dielikov tangramu ak použijete – štvorcový papier 1cm; 0,5 cm; 1mm. Kedy je meranie najpresnejšie?
4. Vypočítajte povrch dielikov tangramu.

Posledné tri úlohy nie sú zamerané priamo na rozvíjanie priestorovej predstavivosti, ale tým, že deti budú manipulovať s geometrickými útvarmi v priestore, otáčať ich, dokážu si prostredníctvom manipulácie lepšie uvedomiť vzájomné priestorové vzťahy útvarov, či polohu útvaru vzhľadom na seba. Tieto úlohy sme zvolili preto, aby ich učitelia mohli zaradiť priamo do svojich tematických plánov.

### 3 Záver

Deti sú schopné učiť sa veľmi rýchlo. Zaujíma ich všetko nové a sú schopné zájsť aj za hranice, ktoré im vymedzila školská matematika. Pozorovali sme, ako deti postupne prechádzajú z jednej úrovne myslenia vizualizácie (kde rozoznávajú len jednotlivé útvary na základe tých čo už videli) k neformálnej dedukcii (teda k opisovaniu a triedeniu jednotlivých útvarov na základe ich vlastností) až k dedukcii (kde si dokážu odvodiť jednotlivé vlastnosti útvarov na základe iných vlastností týchto útvarov (prípade odvodzovania počtu vrcholov, hrán a stien).

Pri práci s deťmi by sme mali využívať ich doterajšie skúsenosti zo života (2D, 3D, „mama si dáva deci kofoly“, „ocko kúpil kubik dreva“), čím môžeme priblížiť idealizáciu v matematike k ich reálnemu svetu.

V prípade, ak skúsenosti nemajú, mali by sme žiakom umožniť nadobudnúť takéto skúsenosti ako sme to urobili napríklad my využitím tangramu, kde

priamo počítali jednotlivé prvky hranolov. A neskôr dokázali sami prísť k zovšeobecneniu pre počty vrcholov, hrán a stien v závislosti od počtu strán podstavy pre kolmé hranoly.

Veľmi zaujímavý je bod, keď sa deti pýtajú niečo nad rámec školskej matematiky a to nielen na sekundárnom stupni, ale niečo v rámci aj napríklad v našom prípade z vysokoškolskej matematiky. Tu je práve vhodné miesto pootvoriť im dvere a ukázať, že aj matematika má v sebe skryté rozmery, ktoré oni budú môcť neskôr objavovať. Práve tieto miesta, tak záhadné pre nich, môžu byť neskôr hnacím motorom, čo ich bude pri matematike ako vednej disciplíne poháňať.

### Literatúra

- [Del Grande a Morrow, 1993] Del Grande, J., Morrow, L. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics: Addenda series, grades K-6, geometry and spatial sense*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1993.
- [Gardner, 1999] Gardner, H.: *Dimenze myšlení – teorie rozmanitých inteligencí*, Portál, Praha, 1999
- [Hejný a kol., 1990] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*, SPN, Bratislava, 1990, ISBN 80-08-01344-3
- [Perný, 2009] Perný, J.: *Niektoré faktory ovplyvňujúce priestorovú predstavivosť žiakov*, In Zborník Matematika z pohľadu primárneho vzdelávania, Univerzita Mateja Bela, Banská Bystrica, 2009, ISBN 978-80-8083-742-6
- [van Hiele, 1999] van Hiele, P.: *Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play*, Teaching Children Mathematics 6, National Council of Teacher of Mathematics, s. 310-316, 1999, www.nctm.org
- [van Hiele, 1986] van Hiele, P.: *Structure and Insight, A Theory of Mathematics Education*, Orlando, Fla: Academic Press, 1986

# Finančná matematika na SŠ

Martin Dovičák\*  
Školiteľ: Iveta Kohanová†

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Rozšírený abstrakt

V súvislosti s ostatnou školskou reformou z roku 2008 sa medzi témy vyučované na hodinách matematiky na základných a stredných školách dostala aj finančná matematika, ktorá je dôležitou pre praktický život v integrovanom európskom priestore. Od absolventov základných a stredných škôl sa očakáva, že budú vo všeobecnosti chápať všetky kľúčové aspekty osobných financií, teda budú finančne gramotní.

V predkladanej práci sa sústreďujeme na vyučovanie finančnej matematiky na gymnáziu, ktorá sa tam vyučuje len v prvom a druhom ročníku. Žiaci sa podľa Štátneho vzdelávacieho programu [Štátny pedagogický ústav, 2009] oboznamujú s elementárnymi pojmami z finančnej matematiky. V tomto veku už žiaci získavajú vlastné peniaze, učia sa s nimi hospodáriť, porovnávať hodnoty výrobkov a tiež sa snažia kriticky uvažovať o výhodnosti nákupov, ktoré urobia. Treba však brať do úvahy, že každý žiak je z inej sociálnej skupiny.

Finančná matematika spravidla vzbudzuje u väčšiny žiakov záujem, a tým si učiteľ získava ich pozornosť na svoju stranu. Preto musí dôkladne zvážiť, ako danú tému vyučovať, aby nestratil ich pozornosť. Snažiť sa o konštruktívne vyučovanie, v ktorom je žiak aktívny pri získavaní nových poznatkov. Preto cieľom tejto práce je navrhnúť učebnú pomôcku pre žiakov SŠ – Finančný kalendár, v ktorom jednotlivé témy finančnej matematiky budú spracované spôsobom, ktorý je žiakom blízky. K naplneniu tohto cieľa sme si stanovili čiastkové ciele: realizovať prieskum formou dotazníka, dotazník vyhodnotiť a výsledky použiť pri návrhu Finančného kalendára.

Prieskum bol realizovaný na vzorke 270 žiakov. Išlo o žiakov 1. a 3. ročníka gymnázií v Bratislave a v Žiline a dvoch stredných priemyselných škôl v Bratislave.

Na základe realizovaného prieskumu sme zistili, že väčšina žiakov 1. ročníka nezískava svoje vlastné financie na brigáde, ani žiadnou inou formou práce, z čoho sa dá usudzovať, že vyplňanie daňového priznania, ktoré sa ako aktivita nachádza v učebnici matematiky pre 1. ročník gymnázií [Kubáček, 2009],

je im cudzie a možno by bolo vhodné presunúť aktivity tohto typu do vyššieho ročníka, aj keď z matematického hľadiska nejde o nič zložité. Čím sú žiaci starší, tým viac z nich si robí prehľad o svojich financiách, pretože už aj viac z nich pracuje a stretávajú sa osobne so svetom financií. A práve vtedy by možno bolo vhodné predkladať im pojmy z finančnej matematiky. Uvedomujeme si však nesúlad so Štátnym vzdelávacím programom pre Matematiku – ISCED 3A.

Naša učebná pomôcka Finančný kalendár bude na základe zrealizovaného prieskumu pozostávať z nasledujúcich tém:

- Peniaze
- Euro
- Vlastný účet
- Sporenie
- Investovanie
- Finančná kreativita

Spôsob, ktorým chceme priblížiť žiakom finančnú matematiku spočíva v aktívnom používaní finančného kalendára, do ktorého si budú môcť žiaci zapisovať svoje príjmy, výdaje a úspory. Súčasťou kalendára bude aj tabuľka, slúžiaca na výpočet výšky úroku pri prípadnom zhodnocovaní žiakových financií. Kalendár bude tiež podporovať rozvíjanie kreativity žiaka.

## Literatúra

- [Kiyosaki, 2004] Kiyosaki T.R., Lechterová L.S., (2004), *Bohatý otec chudobný otec*
- [Štátny pedagogický ústav, 2009] ŠPÚ (2009), *Štátny vzdelávací program, Matematika, Príloha ISCED 3A*
- [Ministerstvo školstva SR, Ministerstvo financií SR, 2009] Ministerstvo školstva SR, Ministerstvo financií SR (2009), *Národný štandard finančnej gramotnosti*
- [Kubáček, 2010] Kubáček (2010), *Matematika pre 1. ročník gymnázií – 1. časť*

\* martin.dovicak@gmail.com

† kohanova@fmph.uniba.sk

# Aplikácia popularizačných textov vo vyučovaní fyziky (Rozšírený abstrakt)

Mária Figurová

Školiteľ: Peter Horváth

Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Cieľom práce je aplikovanie niektorých možností využitia popularizačných textov do vyučovacieho procesu.

Hypotézami pedagogického prieskumu uskutočneného v rámci práce sú:

- Vypracovanú metodiku práce s vybraným textom je možné efektívne využiť na vyučovaní fyziky na gymnáziu. Za efektívne využitie považujeme aplikovanie vo vyučovacom procese, kedy študenti aktívne pracujú na hodine a sú schopní odpovedať na otázky priložené k textom.
- Pozitívne postoje k vyučovaniu fyziky s využívaním popularizačných textov budú prevažovať nad negatívnymi postojmi.

V práci sa vyskytuje viacero ukážok popularizačných textov a praktické poznámky k niektorým konkrétnym aplikáciám.

Pojem popularizačná literatúra nemá presne vymedzené hranice. Jej hlavným motívom je približovanie fyziky verejnosti, jej zjednodušenie a podanie jednoduchým jazykom zrozumiteľným pre široké masy ľudí.

V práci bolo našou prioritou ukázať možnosti práce s popularizačnými textami pri vyučovaní fyziky na gymnáziách. Tejto téme sme sa rozhodli venovať preto, lebo by to mohla byť možnosť oživiť vyučovanie fyziky, ktorá zatiaľ nie je veľmi využívaná. Pritom sa nám popularizačné texty javia ako vhodný prostriedok na motiváciu, rozvoj čitateľskej gramotnosti žiakov, zvýšenie porozumeniu fyzike a takisto jej obľúbenosti. Práca by v budúcnosti mohla napomôcť implementácii popularizačných textov do vyučovania fyziky.

Z možných využití popularizačných textov pri vyučovaní fyziky môžeme uviesť napríklad:

- Zdokonaľovanie žiakov v čítaní textu s porozumením.
- Motivácia k téme.

- Text podporujúci lepšie pochopenie a priblíženie učiva.
- Materiál pre samostatné štúdium žiakov.
- Podnet na diskusiu.

Pedagogický prieskum, týkajúci sa aplikovania popularizačných textov do vyučovania fyziky, sme uskutočnili v jednej triede gymnázia v Bratislave. Študenti mali možnosť sa viackrát počas vyučovania stretnúť s popularizačnými textami z fyziky, a to predovšetkým s už uvedenými možnými spôsobmi využitia.

Niektoré možnosti aplikácie textov nám umožnili analyzovať odpovede študentov či zachytiť ich názory na aktivity v triede. Hlavný dôraz sme kládli na analýzu odpovedí na text s nami vypracovanou metodikou, čo nám umožnilo preskúmať platnosť prvej hypotézy. Následne sme pomocou dotazníka overovali platnosť našej druhej stanovenej hypotézy.

Obe stanovené hypotézy sa nám podarilo potvrdiť. Popularizačné texty sa v práci ukázali ako vhodný prostriedok na utváranie kompetencií študentov a zdroj možných aplikácií na vyučovaní fyziky.

**Kľúčové pojmy:** popularizácia, popularizačná literatúra, popularizačný text

## Vybraná literatúra

- FIGUROVÁ, Mária. 2009. *Popularizačné texty z jadrovej fyziky : Bakalárska práca.* vedúci/školiteľ Peter Horváth. Bratislava : 2009. 53 s.
- GAMOW, George. 1986. *Pan Tompkins v ríši divů.* 1.vyd. Praha : Mladá fronta, 1986, 232 s.
- GREENE, Brian. 2006. *Struktura vesmíru : Čas, priestor a povaha reality.* 1.vyd. Praha, Litomyšl : Paseka, 2006. 488 s. ISBN 80-7185-720-3.

# Prieskum postojov učiteľov fyziky k využívaniu hier vo vyučovaní

Jana Horváthová\*

Školiteľ: Viera Haverlíková†

Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

V krátkom príspevku sú uvedené výsledky elektronického prieskumu „Vyučovacie metódy“, ktorý bol realizovaný v mesiacoch október a november 2010. Do prieskumu sa zapojilo 327 učiteľov základných a stredných škôl všetkých aprobácií. Príspevok je zameraný na zmapovanie postojov učiteľov fyziky k využívaniu hier vo vyučovaní.

**Kľúčové slová:** hra, použitie hry vo vyučovaní, prieskum, postoje

## 1 Ciele a hypotézy prieskumu

Cieľ 1: Zistiť stav využívania hry vo vyučovaní, porovnať využívanie hry ako vyučovacej metódy učiteľmi fyziky a učiteľmi ostatných predmetov.

Cieľ 2: Zistiť, postoje učiteľov k využívaniu hry ako vyučovacej metódy, dedukovať príčiny predpokladaného nízkeho využívania hry vo vyučovaní fyziky.

## 2 Výsledky prieskumu

Učitelia fyziky i ostatných aprobácií vnímajú hru ako vzdelávaciu vyučovaciu metódu, ktorá pomáha žiakom rozvíjať tvorivosť, podporuje lepšie zapamätanie si zisteného / naučeného, motivuje a stimuluje k ďalšiemu učeniu.

Jej využitie vo vyučovaní **nepovažujú:**

- za stratu času. Aj napriek tomu ju mnohí, najmä učitelia fyziky, zaraďujú len, ak im ostane čas, čo môže ubrať učeniu hrou na vážnosti.
- za metódu, ktorá neprispieva k zodpovednej a cieľavedomej činnosti. Aj napriek tomu sa u učiteľov objavuje obava z vytvorenia neformálnej atmosféry, ktorá by mohla spôsobiť u žiakov rozptýlenie, príp. obava z nemožnosti udržať poriadok a disciplínu v triede, čo by malo za následok nedosiahnutie stanoveného didaktického cieľa.

Napriek deklarovanému pozitívnemu vnímaniu hry ako vyučovacej metódy učitelia fyziky používajú hru vo vyučovaní v porovnaní s učiteľmi ostatných predmetov výrazne menej a jej využívanie vo

vyučovaní klesá so zvyšujúcim sa stupňom vzdelávania.

Príčiny nízkeho využívania hry vo vyučovaní fyziky sú:

- väčšina učiteľov nepovažuje hru za časovo efektívnu vyučovaciu metódu,
- väčšina učiteľov fyziky, ktorí hry vo vyučovaní nepoužívajú, predpokladá, že hru by žiaci vnímali ako neviazanú zábavu (väčšina učiteľov fyziky, ktorí hry vo vyučovaní využívajú, však s týmto názorom nesúhlasí),
- viac ako polovica učiteľov fyziky, ktorí hry vo vyučovaní nepoužívajú, hry vhodné na vyučovanie fyziky ani nepozná,
- približne štvrtina učiteľov fyziky, ktorí hry vo vyučovaní nepoužívajú, predpokladá, že pri hre sa nedá udržať poriadok a disciplína v triede,
- približne štvrtina učiteľov fyziky, ktorí hry vo vyučovaní nepoužívajú, predpokladá, že ich žiaci sú na hru starí, že ich už hra nezaujíma, tento predpoklad je častejší u učiteľov na vyššom sekundárnom stupni vzdelávania.

## Pod'akovanie

Táto práca bola podporovaná Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe zmluvy č. LPP-0395-09.

## Literatúra

[Horváthová a Haverlíková, 2010] Horváthová, J., Haverlíková, V. (2010). *Využívanie metódy hry vo vyučovaní fyziky*. In: *Sborník konference: Mezinárodní Masarykova konference pro doktorandy a mladé vědecké pracovníky*. 1. vyd. Hradec Králové : MAGNANIMITAS, 2010. s. 153-158. ISBN 978-80-86703-41-1, ETTN 042-10-10003-11-4.

[Horváthová a Haverlíková, 2011] Horváthová, J., Haverlíková, V. (2011). *HRA ako vyučovacia metóda – predstavy učiteľov fyziky*. In: *Recenzovaný sborník příspěvků vědecké konference s mezinárodní účastí – Sapere Aude 2011*. Hradec Králové : MAGNANIMITAS, 1. vyd. 2011. ISBN 978-80-904877-2-7, ETTN 085-11-11006-03-8.

\* horvathova.jana@gmail.com

† Viera.Haverlikova@fmph.uniba.sk



# Dialektika vo vyučovaní matematiky (Rozšírený abstrakt)

Monika Porkertová<sup>1\*</sup>  
Školiteľ: Ivan Trenčanský<sup>2‡</sup>

<sup>1</sup> Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

<sup>2</sup> Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

Skúsenosti učiteľov, ale aj medzinárodné štúdie poukazujú na nízku úroveň chápania a schopností žiakov využiť vedomosti v neštandardných situáciách alebo v praxi. Jednu z možností ako zefektívniť poznávací proces žiakov a naučiť ich využívať poznatky a vedomosti v neštandardných situáciách ponúka práve Teória didaktických situácií (ďalej TDS) prostredníctvom dialektiky etáp poznávacieho procesu.

Na to, aby učitelia matematiky mohli využívať metódy TDS, musia byť najprv oboznámení s terminológiou a samotnými metódami teórie. Z tohto dôvodu je prvá časť článku venovaná základným pojmom TDS a podrobne charakterizuje etapy poznávacieho procesu (akcia, formulácia, validácia, inštitucionalizácia) a dialektiku akcie, formulácie a validácie. [Brousseau, 1997], [Sierpínska, 2011].

V druhej časti článku opisujeme dialektiku jednotlivých etáp poznávacieho procesu na konkrétnej úlohe - *Úloha so špirálou* [Berthelot et al., 1998]. Riešenie úlohy síce vyžaduje len vedomosti zodpovedajúce žiakom základnej školy, no je náročné z hľadiska analýzy, preto je vhodnejšie zaradiť ju do vyučovania na strednej škole. Spracovaná je formou vzostupnej analýzy a priori. Predpokladáme, že v praxi úlohu použijeme v rámci adidaktickej situácie, teda v situácii, keď žiaci budú pracovať samostatne, bez akéhokoľvek zásahu učiteľa.

V prvej etape – *akcia*, žiaci začínajú riešiť úlohu a vytvárajú rôzne stratégie, ktoré by ich mali doviesť k správne mu riešeniu. *Dialektika akcie* spočíva v prekonávaní jednotlivých stratégií, žiak na základe interakcie s prostredím odstraňuje nedostatky svojej stratégie a tým zlepšuje metódu svojho riešenia. Jeho myslenie sa tak vyvíja a dostáva sa na vyšší stupeň.

Ak si je žiak istý správnosťou svojej stratégie a výsledkom, ktorý touto stratégiou získal, začína etapa *formulácie*. Žiak musí sformulovať riešenie úlohy do tvrdenia, ktoré bude jednoznačné a zrozumiteľné. Žiaci sú zvyknutí predovšetkým na písomný prejav, preto im formulácia tvrdení robí

značné problémy. Vyjadrujú sa intuitívne, používajú nesprávne matematické pojmy a ich formulácie sú nejasné. *Dialektika formulácie* spočíva práve v zdokonaľovaní jazyka žiakov.

V etape *validácie* žiaci rozhodujú o pravdivosti predložených tvrdení. V rámci *dialektiky validácie* sa žiaci učia argumentovať, zdôvodňovať jednotlivé kroky svojho riešenia. Žiak by si mal totiž vedieť pred spolužiakmi (učiteľom) obhájiť každý krok svojej stratégie.

Etapou validácie končí adidaktická situácia a do procesu sa opäť zapája učiteľ. V rámci *inštitucionalizácie* by mal zhodnotiť celý priebeh činnosti, zhrnúť riešenie úlohy, upozorniť na kľúčové kroky, ale aj na najčastejšie chyby. Nový poznatok by mal začleniť do štruktúry predchádzajúcich poznatkov a upozorniť na vzťahy s príbuznými pojmami.

Dialektický prístup riešenia úloh sa javí ako efektívny spôsob rozvíjania žiackych schopností a vedomostí. Treba si však uvedomiť, že tento proces je dlhodobý a vyžaduje si nielen precíznu prípravu vhodných úloh zo strany učiteľov matematiky, ale aj aktívnu činnosť žiakov.

## Literatúra

[Brousseau, 1997] Brousseau, G.: *Theory of Didactical Situations*, Dordrecht/ Boston/London, Kluwer Academic Publishers, 1997, ISBN 0-7923-4526-6

[Sierpínska, 2011] Sierpínska, A.: *Lectures on the Theory of Didactical Situations*, [http://www.annasierpínska.wkrib.com/index.php?page=lecture\\_on\\_tds](http://www.annasierpínska.wkrib.com/index.php?page=lecture_on_tds). Prístupné 5.1.2011

[Berthelot et al., 1998] Berthelot R. – Briand J. – Duval A. – Rouchier A. – Uger P. – Vinant S.: *Concours externe de Recrutement des Professeurs d'Ecole Mathématiques – Annales 1998*, Paris, 1998, ISBN 2-86612-175-9

\* monika.porkertova@yahoo.com

‡ trencansky@fmph.uniba.sk

# Fyzikálna vzdelávacia hra „... a bolo svetlo“ (rozšírený abstrakt)

Michaela Velanová  
Školiteľ: Viera Haverlíková

Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

**Cieľom práce** je vytvorenie vzdelávacej hry, ktorá je priamo použiteľná vo vyučovacom procese za účelom utvrdzovania a rozširovania poznatkov a rozvoja kľúčových kompetencií.

**Východiskami práce** sú:

- Potreba nachádzať nové vyučovanie metódy, ktoré vzbudzujú záujem o prírodné vedy, predovšetkým fyziku.
- Potenciál vzdelávacích hier byť motiváciou študentov vo vyučovaní a prostriedkom aktívneho poznávania.
- Požiadavka rozvíjať kompetencie v intrapersonálnej oblasti, akými sú sebahodnotenie, nájdenie vlastného štýlu poznávania.

V práci uvádzame návrh originálnu vzdelávaciu hru týkajúcu sa časti Optika, ktorá je určená pre študentov gymnázií a stredných škôl.

Hra „... a bolo svetlo“ je kombináciou stolovej hry a hry na stanovištiach. V jej priebehu sa hráč stretáva so zadaniami troch typov: „Otázka“, „Úloha“ a „Trik“. Pri riešení zadaní má hráč možnosť použiť pomôcky, tzv. „Indície“, ktoré ho navádzajú k správne riešeniu. Hra obsahuje rôzne typy indícií – experiment, vzorec, obrázok, nápoved', pomocnú otázku, voľbu z troch možností, text s informáciou, a ďalšie. To poskytuje hráčom možnosť zvoliť si informačný zdroj, ktorý je v zhode s ich vlastným štýlom učenia sa.

Správne riešenia hrových úloh sú oceňované ziskom bodov - „centov“. Ich počet sa odvíja od náročnosti zadania.

Rovnako aj indície majú svoju cenu danú množstvom a úplnosťou informácií, ktoré poskytujú. To vyžaduje od hráča nájdenie stratégie pri voľbe indícií a ohodnotenie svojich poznatkov.

Odporúčaným miestom realizácie je školská trieda, resp. fyzikálne laboratórium.

Predpokladaný čas trvania sú 2 vyučovacie hodiny.

Hra zatiaľ nebola testovaná v školských podmienkach. Pri tvorbe hrových úloh sme však vychádzali z priamych pedagogických skúseností s vyučovaním tematického celku Optika na gymnáziu. Väčšina čiastkových úloh bola v praxi odskúšaná. Indície sú inšpirované otázkami a odpoveďami študentov počas hodín.

## Vybraná literatúra

NAHODIL, Jozef. 1996. *Fyzika v bežnom živote*. 1. vyd. Praha : Prometheus, 1996, 149s. ISBN 80-7196-005-5

## Násobilka v rytme rapu alebo rytmizovaná násobilka

Petra Jursová

Školiteľ: Zbyněk Kubáček.

Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

### Abstrakt

Malú násobilku treba ovládať úplne naspamäť a bez rozmýšľania. Učitelia hľadajú rôzne cesty, ako to dosiahnuť. V článku ukážeme jednu z možností.

### Úvod

Od žiakov piateho ročníka sa očakáva dokonalé osvojenie malej násobilky, aby boli schopní reagovať pohotovo bez zaváhania (pozri [3]). Je to potrebné pre zvládnutie učiva písomného delenia. Skúsenosti niektorých učiteľov ukazujú, že písomné delenie spôsobuje žiakom ťažkosti. Naše zistenia to potvrdzujú: na hodinách matematiky mala väčšina žiakov piateho ročníka ZŠ problém pohotovo odpovedať na príklady z malej násobilky. To bolo pre nás podnetom na navrhnutie netradičnej formy opakovania, ktorá by prispela k dôkladnejšiemu osvojeniu malej násobilky. V práci opíšeme navrhnutý spôsob a jeho realizáciu počas vyučovania.

### 1 Podnet

Podnetom bola situácia na vyučovacích hodinách matematiky piateho ročníka bežných žiakov štandardnej ZŠ. Ukončovala sa etapa písomného násobenia. Témy nasledujúcich hodín už mali podľa plánu patriť písomnému deleniu jednociferným, dvojciferným a trojciferným deliteľom. Avšak z výsledkov krátkych písomiek, ústneho skúšania a práce na hodine sa ukázalo, že žiaci si ešte dôkladne neosvojili malú násobilku. Počas ústneho skúšania okamžité správne odpovede zostávali stále zriedkavosťou. Značná väčšina triedy

však nemala najmenšiu potrebu svoju situáciu zlepšiť. Počas ústneho skúšania, keď takmer za každým vyšším násobkom čísel 6, 7, 8, 9 bolo nutné chvíľu čakať na správne odpovede, som poznamenala, že je treba doučiť sa násobilku. Reakcia mnohých bola takáto: „Veď my ale násobilku vieme...“ Z tejto poznámky sa odvinula krátka diskusia:

**učiteľka:** „Áno, povedali ste správny výsledok, ale po akej dobe?! A to nie len teraz výnimočne, ale jednoducho po takmer všetkých násobeniach medzi číslami 6, 7, 8, 9. Či nemám pravdu? Koľko je  $7 \times 8$ ?“

**(po chvíli ticha) jeden žiak:** „56“

**učiteľ:** „Vidíte, koľko vám to trvá? A to to ešte zrejme nevypočítal každý. Koľko je  $1 \times 7$ ?“

**(okamžite) žiaci hromadne:** „7“

**učiteľ:** „No vidíte? Toto vám ide. Takto pohotovo by ste mali odpovedať vždy.“

**po krátkom okamihu ticha sa odvážila prihlásiť jedna žiačka:** „A prečo nestačí, keď výsledok povieme o chvíľku?“

Ako reakciu na túto otázku som žiakom na niekoľkých jednoduchých príkladoch predviedla súvislosť medzi malou násobkou a nasledujúcou látkou – delením.

Cez prestávku som sa so svojou skúsenosťou podelila so staršou učiteľkou matematiky. Jej odpoveď ma prekvapila:

**„Písomné násobenie, to je ešte v norme, ale keď príde delenie, to je večne katastrofa. Priprav sa! Treba to s nimi veľmi drilovať a dlho to nepôjde, ale nebuď sklamaná. To je takmer vždy tak. Začni čo najskôr!“**

Začala som sa zamýšľať nad tým, či neexistuje nejaký spôsob, ako dosiahnuť, aby delenie nebolo nepríjemným zážitkom pre žiakov i učiteľa. Nezdalo sa mi rozumné prejsť k písomnému deleniu, pokiaľ pretrvávali ťažkosti s násobením. Predpokladala som, že ak docielime osvojenie malej násobilky spamäti a bez rozmýšľania, malo by sa zlepšenie prejaviť aj v delení. Otázka teda bola: „Ako motivovať žiakov, aby zvládli násobilku na požadovanej úrovni?“ Poznámam, že v danej situácii som pokladala za dôležité zlepšenie daného stavu, nie hľadanie príčin, prečo žiaci ešte nedosiahli precíznu automatizáciu malej násobilky – teda úroveň, ktorú výkonový štandard ISCED 1 ([2]) predpokladá už na prvom stupni ZŠ.

## 2 Dôležitosť motivácie

Existuje veľa teórií poznávacieho procesu, pozri napr. [8]. Spoločným menovateľom viacerých z nich je počiatočná etapa motivácie. Podľa Hejného ([4]) je motivácia „hýbateľom“ a jej kvalita určuje intenzitu nadobúdania nových skúseností v psychike žiaka. Možno rozlišovať dva hlavné typy motivácie: vnútornú a vonkajšiu. Zatiaľ čo pri vnútornej motivácii sú ľudia podnietení konať z radosti či vnútornej túžby, pri vonkajšej motivácii konanie osoby stimulujú vonkajšie faktory. Napriek zdanlivo výraznému účinku vonkajších stimulov, pôsobenie vnútornej motivácie je omnoho hlbšie a dlhodobejšie, pozri napr. [7]. Podľa Hejného ([4]) sa so zosúladenou motiváciou spája i spoločná radosť oboch interagujúcich strán. Hejný na základe vlastných skúseností v [4] poznámenáva, že najčastejším prípadom deformácie poznávacieho procesu pri vyučovaní matematiky je zanedbávanie etapy motivácie.

## 3 Niektoré v súčasnosti dostupné pomôcky pre osvojenie si násobilky

Ako vyplýva z predchádzajúcich častí, problémom nebolo samotné osvojenie malej násobilky (túto úroveň už žiaci dosiahli), ale motivácia na jej automatizáciu. Z tohto hľadiska sme posudzovali aj niektoré štandardne používané pomôcky pre osvojenie si násobilky. V súčasnosti sú to predovšetkým rôzne internetové stránky (ako príklad množstva stránok s veľmi podobným dizajnom uvádzame [1], [9] a [10]), ďalej v obchodoch dostupná hra Elektronická násobilka alebo jej staršia verzia, alebo stále využívaná „kartičková“ hra s príkladmi na kartách.

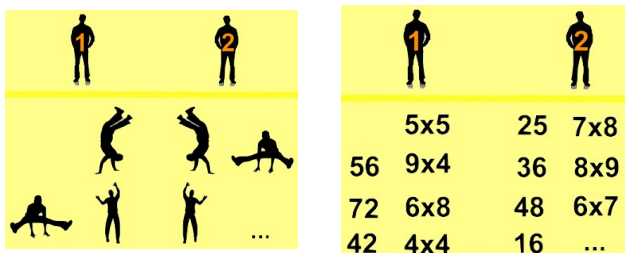
Všetky tieto pomôcky síce umožňujú osvojenie si malej násobilky, nenašli sme však takú, ktorá by obsahovala prvok zaručujúci automatizáciu výpočtu – teda rýchlu, prakticky okamžitú odpoveď.

## 4 Návrh pre pozitívnu vnútornú motiváciu dôkladného osvojenia násobilky

Na myšlienku možnej motivácie ma priviedlo oblečenie jedného zo žiakov, ktoré prezrádzalo, že sú mu blízke rap a štýl pouličného tanca. Zdalo sa, že aj medzi ostatnými žiakmi triedy sa nájde viacero nadšencov tohto typu. Tu sa zrodila celá myšlienka.

Povedala som žiakom, že i násobilku je možné hovoriť v rytme rapu a takisto i v násobilke si môžeme dať „battle“ (súboj). Pravidlá „battle“ sú podobné ako v tanci (viď Obr. 1) - najprv sa prvok zopakuje, potom sa pridá nový, resp. v našom prípade najprv vyslovíme výsledok k predloženému príkladu a potom nastolíme nový príklad pre súpera. Súper opäť najprv odpovedá výsledkom príkladu a následne predkladá ďalší príklad (viď Obr. 2).

Tento sled sa opakuje, pokiaľ jeden z hráčov neurobí chybu v odpovedi alebo rytme.



Obr. 1 „BATTLE“ v tanci Obr. 2 „BATTLE“ v násobilke

Dôležité je, že pri hovorení výsledku i nového príkladu nesmieme vypadnúť z rytmu rapu. Tento rytmus je svižný a niet v ňom priestor pre zaváhanie či premýšľanie nad výsledkami násobilky. Je skrátka nevyhnutné, aby žiaci reagovali okamžite a navyše i správne. To je možné len po skutočnom osvojení násobilky. Aby žiak v súboji obstál, nestačí teda len korektná odpoveď, ale je nutné, aby bola i pohotová.

## 5 Rap

Slovo rap môže u niektorých ľudí mať istú negatívnu konotáciu, v skutočnosti to však nie je namieste (pozri [6]). Rap je hudobný štýl s pravidelnou rytmickou štruktúrou, ktorý je založený na jazykovej kreácii. Použitie rapu pre učenie násobilky preto nemá nič spoločné s podporovaním delikvencie. Ide o využitie charakteristických črt tohto štýlu hudby pre matematiku. Keďže sa ukazuje, že rap je v kruhoch adolescentov populárny a obľúbený, mohla by byť táto forma učenia sa atraktívna i pre žiakov, ktorí nemajú radi školu a učenie. V tomto prípade by som sa priklonila k slovám Jaroslava Žáka: „Nie potláčať, ale zušľachťovať.“ Rozšírenosť a popularita rapu je prednosťou i z hľadiska zavádzania nami navrhovaného postupu do praxe. Nazdávam sa, že vo väčšine prípadov

nebude nutné podrobné vysvetľovanie pravidiel.

## 6 Realizácia návrhu

Realizácia návrhu sa skladá z dvoch hlavných fáz: prípravná fáza a súťažiacia fáza.

### A. Prípravná fáza

Prv ako pristúpime k samotnej hre, je veľmi dôležité oboznámiť žiakov s pravidlami aspoň deň vopred. Získajú tak možnosť trénovať a pripraviť sa na súboj v násobilke. Bez prípravy bude možno nutné urobiť ústupky v pravidlách, čím sa môže vytrátiť celková pútavosť hry.

### B. Súťažná fáza

Súťažnú fázu predstavuje samotná hra, ktorú je možné uskutočniť viacerými spôsobmi:

#### 1. učiteľ = zadávateľ príkladu, žiaci = všetci spoločne jednohlasne odpovedajú výsledkom

Každý nový príklad zadáva iba učiteľ v rytme rapu a úloha žiakov je presne v tom istom rytme na každý príklad zborovo odpovedať prislúchajúcim výsledkom. Žiaci môžu sedieť na svojich miestach.

Túto verziu je vhodné zaradiť na úvod ako „zahrievacie kolo“, v ktorom si žiaci vyskúšajú osvojenie tempa, pravidiel a môžu odhaliť vlastné nedostatky bez nežiaduceho upútania pozornosti. Stačí krátka realizácia. Učiteľ zároveň zistí, ako žiaci zvládajú tempo a pravidlá a možno získa i približný obraz o úrovni zvládnutia násobilky v triede.

#### 2. učiteľ = zadávateľ príkladu, žiaci = jednotlivo odpovedajú výsledkom

Úlohou učiteľa je aj naďalej zadávať každý príklad v rytme rapu, ale tentoraz je potrebné, aby zakaždým ukázal na konkrétneho

žiaka, ktorý má v danom rytme povedať výsledok príkladu nahlas. Žiaci môžu sedieť na svojich miestach.

### 3. žiaci (prípadne učiteľ a žiaci) = zadávateľa príkladov i odpovedajúci

V tomto prípade každý hráč po vyzvaní najprv odpovie správnym výsledkom, zadá nový príklad a následne ukáže na pokračujúceho. V tomto prípade je nevyhnutné, aby sa všetci navzájom videli. Celý priebeh sa odohráva v rytme rapu. Za chybu v správnosti odpovede alebo rytme hráč vypadáva, pričom hra pokračuje s menším počtom súperov, až pokým nezostane jeden víťaz. Odporúčam však nechať prvé tri kolá bez vypadávania.

### 4. „Battle“ (súboj) – dvaja hráči striedavo zadávajú príklad a odpovedajú

Battle sa odohráva v rytme rapu medzi vybranou dvojicou. Môžu to byť dvaja žiaci, alebo i dvojica učiteľ – žiak. Navzájom sa pravidelne striedajú v zadávaní príkladov i odpovedaní (odpoveď, zadanie príkladu a pokračuje spoluhráč). Striedanie pokračuje, pokým niektorý z hráčov neurobí chybu v rytme alebo vo výsledku.

Je možné pridávať i ďalšie vlastné pravidlá, nikdy by to však nemalo byť na úkor hlavného cieľa – precvičovania násobilky. Priveľa pravidiel spôsobí, že hra bude často prerušovaná kvôli nedodržaniu niektorého z nich.

Pridaním pravidla sa zvýši náročnosť hry, preto odporúčam ďalšie pravidlá pridávať až po bezproblémovom zvládnutí úrovne, v ktorej hra práve prebieha.

Príklad možných alternatív na zvýšenie stupňa obťažnosti:

- násobilka 1, 2, 3 sa nemôže používať

- dvakrát za sebou nesmú nasledovať rovnaké príklady
- príklady sa vôbec nemôžu opakovať
- postupné zrýchľovanie tempa

V prípade porušenia vopred dohodnutých pravidiel treba stanoviť následky. Na počiatočné rozcvičenie a osvojenie pravidiel je vhodnejšie zvoliť miernejší dôsledok – nové začatie hry bez vypadávania hráčov. V prípade, zautomatizovania tempa i pravidiel je možné aplikovať i vypadávanie hráčov.

## 7 Overenie

Hru som testovala počas kratších časových intervalov v rámci štyroch štandardných hodín vyučovania matematiky v piatom ročníku štandardnej ZŠ v Malackách a tiež počas záujmového krúžku pre dievčatá.

### Žiaci piatych ročníkov ZŠ

Zdalo sa, že žiakov táto myšlienka nadchla, i keď to nebola prvá matematická hra, ktorou sme si s týmito žiakmi spestrili vyučovanie.

Najprv som uviedla základné pravidlá a so žiakmi sme si ukázali krátke názorné ukážky. Poznamenala som, že násobenie v rytme rapu môžu skúšať i cez prestávky alebo doma a ak sa pripraví na nasledujúcu hodinu, tak sa túto hru môžeme zahrať o voľačo dlhšie (cca 5 minút). Ďalej sme už do konca hodiny pokračovali len v počítaní príkladov zo zadaní učebnice.

Bolo vidno, že žiaci sa na ďalšiu hodinu matematiky veľmi tešili. Všetci totiž v tichosti sedeli na svojich miestach ešte prv, ako som vkročila do triedy. Bežne sa takto nesprávajú. Žiaci si veľmi chceli skúsiť slúbený „battle“. Mnohí sa priznali, že doma trénovali. Pôvodne som mala plán ponechať hru ku koncu hodiny, ale vzhľadom na disciplinovanosť žiakov a na ich naliehavé prosby sme použili

hru ako rozcvičku. Najprv som tento ústupok nechcela urobiť, napokon som však dala žiakom šancu potvrdiť skutkom ich sľuby, že potom budú celú hodinu svedomito pracovať.

Po istom váhaní sa našli šiesti dobrovoľníci, teda pred tabuľou sa vystriedali tri dvojice. Bolo vidno, že si to každý z nich trénoval, pri niektorých príkladoch sa však ešte vyskytli drobné ťažkosti stíhať určený rytmus.

Bola som prekvapená, ako pohotovo a jednotne začal zvyšok triedy súťažiacej dvojici udávať rytmus rapu. Bolo tiež pozoruhodné, ako žiaci dávali pozor na chyby svojich spolužiakov a v prípade omylu ich bleskovo opravovali. Kontrolovali nielen správnosť výsledkov k príkladom, ale i rytmické vyslovovanie. Po piatich minútach sme aktivitu skončili. Dodala som, že ak ešte dotrénujú rytmus, na budúcu hodinu si môžu dať „battle“ i so mnou. Zvyšok hodiny sme pokračovali v preberaní látky podľa učebnice. Žiaci svoj sľub dodržali a boli skutočne disciplinovaní. Cez prestávku po skončení vyučovacej hodiny som zachytila, ako si medzi sebou dohadovali súboje z rapovania násobilky.

Nasledovala vyučovacia hodina matematiky vo vedľajšom piatom ročníku. Na základe pozitívnych skúseností v predchádzajúcej triede som sa rozhodla i tieto deti oboznámiť s rapovaním násobilky. Žiaci tejto triedy sú však omnoho temperamentnejší ako v predošlej triede. Uvedomovala som si, že tu za žiadnych okolností nemôžem povoliť takú rozcvičku ako v susednej triede. Negatívne by to ovplyvnilo následnú sústredenosť detí a ich ďalšiu spoluprácu na hodine. Na začiatku hodiny som im povedala len toľko, že pokiaľ budú po celú hodinu so mnou disciplinovane spolupracovať, tak pár minút pred koncom ich čaká

prekvapenie. Žiaci mali skutočne veľkú snahu a disciplínu počas hodiny. Prekvapilo ma, že i neposednejší jednotlivci (o ktorých pozornosť sa musím inokedy usilovať), tentoraz preukázali skoro maximálnu koncentráciu. Nečakala som, že ich prekvapenie na záver natoľko podnieti. Päť minút pred koncom ma upozornili. Stihla som im vysvetliť pravidlá a precvičiť s nimi zopár názorných ukážok. Žiakov nápad natoľko nadchol, že niektorí sa dostali akoby „do tranzu“ a viacerí chceli súperiť zároveň. Pri premýšľaní nad výsledkami niektorých príkladov však predsa len nastali drobné rytmické odchýlky. Aj tu sa spolužiaci navzájom kontrolovali a opravovali vo výsledkoch príkladov i rytme. Napr.: „To nemôžeš povedať osem! To je predsa o-o-sem.“ V tejto triede sa našli dvaja žiaci, ktorým sa podarilo úplne splniť podmienky hry v správnosti odpovedí aj v rytme. Dokonca k odpovediam pridali i jemné tanečné prvky. Bolo to prekvapujúce, pretože to boli priemerní žiaci a počas práce na hodine niekedy potrebovali i viac času pri cvičeniach.

Aj v tejto triede som žiakom navrhla, že v prípade záujmu môžu hru ďalej trénovať do budúcej hodiny. Po ceste na školský dvor som ešte začula žiacke debaty o tejto aktivite.

Pondelok, nasledujúca hodina matematiky v temperamentnejšej triede. Už pri vstupe do triedy som počula, ako sa žiaci medzi sebou skúšajú. Zdalo sa, že na nepovinnú domácu úlohu nezabudli. Pripomenula som, že k rapovaniu násobilky sa môžeme vrátiť až pred koncom hodiny, najprv treba splniť povinnosti podľa učebného plánu. Žiaci nenamietali a poslušne sa pustili do práce. Aj tento raz so mnou veľmi snaživo spolupracovali. Podarilo sa im všetky príklady vyrátať skôr a na hru zostalo sedem minút. Hru som realizovala

troma spôsobmi 1, 2, 4 (pozri kapitolu 5).

Žiaci boli disciplinovaní a zapájali sa. Bolo zrejmé, že naozaj dávali pozor a počúvali sa, pretože sa navzájom opravovali, a to nielen v správnosti výsledku, ale i v správnosti dodržiavania tempa a rytmu. V hre chceli pokračovať aj po zvonení na prestávku.

Podobná situácia nastala aj na ďalšej hodine v druhej triede. I tu si žiaci medzi sebou mrmlali násobilku, keď som vchádzala do triedy. Aj tu som žiakom prisľúbila hru až po splnení plánu na hodinu. Žiaci poctivo pracovali, plán sme splnili 13 minút pred koncom hodiny.

Keďže v tejto triede bolo viac času, vyskúšala som uplatniť námet aj tretím spôsobom (pozri 3 z kapitoly 5). Rozostavila som všetkých žiakov v triede okolo stolov stredného radu lavíc tak, aby každý na každého videl. Po krátkom čase sme začali hrať i na vypadávanie. Príklady sa nesmeli opakovať, musela platiť správnosť odpovede, a násobilka 1, 2 „nehrala“. V ďalšom kole sme postupne pribrali ako ďalšie kritérium aj rytmus. Bolo zaujímavé pozorovať žiakov. Na jednej strane boli ohľaduplní k slabším – dávali im zámerne čo najľahšie príklady, aby ich hneď nevyradili. Naopak, silnejší žiaci, ktorí si boli vzájomne konkurenciou, sa snažili jeden druhého vyradiť ťažšími príkladmi. Zazvonilo a žiaci sa mali prezliecť na telesnú výchovu. Ešte aj pri prezliekaní sa neprestávali hrať spomínanú hru.

### **Žiačky siedmeho ročníka ZŠ na záujmovom krúžku**

Na záujmovom krúžku pre dievčatá, ktorý vediem, sa zišli žiačky siedmeho ročníka ZŠ. V škole sa dozvedeli o hre, ktorú som hrala s piatakmi. Pýtali sa, či by som nebola ochotná zahrať sa túto hru i s nimi

počas prechádzky prírodou. Bola som prekvapená, že i staršie žiačky mali záujem o hru a vydržali sa ju hrať tridsať minút bez prestávky.

### **O zlepšení schopnosti aplikovať malú násobilku možno usudzovať z niektorých drobností:**

- pri písaní dátumu (25. januára) ho prakticky všetci žiaci rozložili na súčin dvoch čísel ( $25 = 5 \times 5$ ), navyše v rytme rapu,

- pri delení  $96 : 6$  žiaci sami od seba rozložili číslo 96 na súčet  $60 + 36$ , teda súčet dvoch násobkov čísla 6. To predtým nedokázali urobiť; keďže predtým nepoznali dobre násobilku, nedokázali v číslach vidieť násobky.

### **Zhrnutie**

Zo skúseností, ktoré sme získali pri overení, vyplýva, že rapovanie násobilky môže byť vhodnou motiváciou pre jej opakovanie a najmä zautomatizovanie. Jednou z príčin, prečo sme takúto formu uprednostnili napríklad pred automatizáciou násobilky prostredníctvom počítača (porovnaj s časťou 3), je aj motivačné pôsobenie sociálnych vzťahov (pozri napr. [11]) spojené s metódou skupinového vyučovania. Možno predpokladať, že motivácia zvýšiť svoj výkon v túžbe obstať v súťaži pred spolužiakmi je omnoho silnejšia ako motivácia zlepšiť sa v súperení s počítačom.

Odporúčame používať túto metódu skôr ku koncu hodiny, inak sa po skončení hry nemusí podariť navodiť potrebnú pracovnú atmosféru na ďalšie vyučovanie. Takisto odporúčame vysvetliť pravidlá vopred, aby žiaci mali možnosť trénovať.

### **Záver**

Hľadali sme motivačný nástroj na zautomatizovanie malej násobilky. Z našich skúseností vyplýva, že jednou z možností je násobenie v rytme rapu.



Dôležitá nie je iba atraktivnosť rapu, ktorý priláka i deti, ktoré učenie nebaví, ale najmä prirodzená a pravidelná rytmická štruktúra. Vďaka rýchlemu rytmu je možné zábavnou nenásilnou formou prinútiť žiakov k okamžitým odpovediam. Z realizácie vyplynulo, že táto forma je takmer všetkým žiakom veľmi blízka.

Po krátkej dobe aplikovania tejto hry sa na práci žiakov s malou násobilkou prejavilo niekoľko pozitívnych zmien pozorovateľných na hodinách. Hra sa dokonca dočasne stala jednou z obľúbených voľnočasových aktivít.

Takáto forma opakovania a automatizácie nie je univerzálne použiteľná. Na skutočnosť, či sa daný spôsob osvedčí, totiž vplýva veľa rôznych faktorov. Časť súvisí so žiakmi. U hanblivejších, tichších a uzavretejších žiakov, ktorí si veľmi neveria, by sa mohol vyskytnúť problém strachu vystúpiť pred ostatných. Ďalšie faktory ovplyvňujúce použiteľnosť tejto metódy súvisia s učiteľom. Ten sa s touto metódou musí do značnej miery stotožniť. Práve kvôli potrebe takéhoto stotožnenia sme nepokladali za vhodné ani potrebné použiť pri overovaní použiteľnosti navrhutej metódy inú metódu ako pozorovanie. Veríme, že sa nájdú učitelia, ktorých tento nápad inšpiruje a dostanú chuť skúsiť niečo podobné.

## Literatúra

[1] DIDA Deťom a rodičom, škola hrou. [online] [citované 20.5.2011]. Dostupné z <[http://www.dida.sk/volnycas\\_skola.asp?page=nasobilka](http://www.dida.sk/volnycas_skola.asp?page=nasobilka)>.

[2] Černek, P. a kol. 2010. *ŠVP, Matematika - príloha ISCED 1*. Bratislava : ŠPÚ, 2010, s. 11-27. [online] [citované 20.5.2011]. Dostupné z <[http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/1stzs/isced1/vzdelavacie\\_oblasti/matematika\\_isced1.pdf](http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/1stzs/isced1/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced1.pdf)>.

[3] Černek, P. a kol. 2010. *ŠVP, Matematika - príloha ISCED 2*. Bratislava : ŠPÚ, 2010, s. 4-14.

[online] [citované 20.5.2011]. Dostupné z <[http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/isced2/vzdelavacie\\_oblasti/matematika\\_isced2.pdf](http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/isced2/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced2.pdf)>.

[4] Hejný, M. a kol. 1990. *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava : SPN, 1990, s. 23-24. ISBN 80-08-01344-3

[5] Holtman, A. 1996. *A Generative Theory of Rhyme: An Optimality Approach*. PhD dissertation, Utrecht : Institute of Linguistics, 1996.

[6] Hirjee, H., Brown D. G. 2009. *Automatic Detection Of Internal And Imperfect Rhymes In Rap Lyrics*. ISMIR, 2009.

[7] Jedinák, D. 2009. Podstata a zásady motivačného pôsobenia (aj vo vyučovaní školskej matematiky). [online] Publikované 2009. [citované 20.5.2011]. Dostupné z <<http://www.era.topindex.sk/files/s93.pdf>>.

[8] Linhart, J. 1986. *Základy psychológie učení*. Praha : SPN, 1986.

[9] Matematika hrou, Hry a príklady pro výuku matematiky. [online] [citované 20.5.2011]. Dostupné z <<http://matematika.hrou.cz/nasobilka-procvicovani.php>>.

[10] Multiplication Flashcards. [online] [citované 20.5.2011]. Dostupné z <<http://www.aplusmath.com/Flashcards/multiplication.html>>.

[11] Zaťková, T. 2008. Voľba vyučovacích metód a vyučovacích štýlov učiteľa. In

Silvia Pokrivčáková a kol.: *Inovácie a trendy vo vyučovaní cudzích jazykov u žiakov mladšieho školského veku*.

Nitra : PF UKF v Nitre, 2008, s. 71-96. ISBN 978-80-8094-417-9