Γνωριμία με τα μορφοκλασματικά σύνολα

Β. Δρακόπουλος
vdrakop@uth.gr

Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική
Σχολή Θετικών Επιστημών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δυναμικά Συστήματα και Πολυπλοκότητα
19 Ιουλίου 2019

1. Πρόλογος

1. Πρόλογος

2. Η γεωμετρία των μορφοκλασμάτων
   - Προϊστορία
   - Περί διαστάσεων
   - Ομοιότητα

Αιτιοκρατία και χάος

Η αιτιοκρατία, όπως η Βασίλισσα της Αγγλίας, βασιλεύει – αλλά δεν κυβερνά.

Michael Berry

Αιτιοκρατία και χάος

Η αιτιοκρατία, όπως η Βασίλισσα της Αγγλίας,
βασιλεύει – αλλά δεν κυβερνά.

Michael Berry

- Χάος: Ἡ ἄβυσσος, μέγα βάραθρον || το άπειρο σκότος (διάστημα)˙ (μτφ) σύγχυση, αναστάτωση, ακαταστασία, αταξία.

Αιτιοκρατία και χάος

Η αιτιοκρατία, όπως η Βασίλισσα της Αγγλίας, βασιλεύει – αλλά δεν κυβερνά.

Michael Berry

- Χάος: Ἡ ἄβυσσος, μέγα βάραθρον || το άπειρο σκότος (διάστημα)· (μτφ) σύγχυση, αναστάτωση, ακαταστασία, αταξία.
- Χάος: Απρόβλεπτη κατάσταση στην οποία περιέρχεται ένα αιτιοκρατικό σύστημα λόγω ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες.

Αιτιοκρατία και χάος

Η αιτιοκρατία, όπως η Βασίλισσα της Αγγλίας, βασιλεύει – αλλά δεν κυβερνά.

Michael Berry

- Χάος: Ἡ ἄβυσσος, μέγα βάραθρον || το άπειρο σκότος (διάστημα)· (μτφ) σύγχυση, αναστάτωση, ακαταστασία, αταξία.
- Χάος: Απρόβλεπτη κατάσταση στην οποία περιέρχεται ένα αιτιοκρατικό σύστημα λόγω ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες.
- Κατάσταση αδυναμίας πρόβλεψης, φαινομενικής τυχαιότητας της συμπεριφοράς ενός αιτιοκρατικού συστήματος.

- Barnsley M. F. *Fractals everywhere*, 3rd ed. Dover Publications, Inc., 2012.
- Barnsley M. F. *Superfractals*. Cambridge Univ. Press, 2006.
- Barnsley M. F. and Anson L. F. *The fractal transform*. Jones and Bartlett Publishers, Inc, 1993.
- Barnsley M. F. and Hurd L. P. *Fractal image compression*. AK Peters, 1992.
- Crownover R. M. *Introduction to fractals and chaos*, 3rd ed. Jones and Bartlett Publishers, 1995.
- Encarnação J. L., Peitgen H.–O, Sakas G. and Englert Gabriele (eds.) *Fractal geometry and computer graphics*. Springer-Verlag, 1992.
- Falconer K. J. *Fractal Geometry: Mathematical foundations and applications*, 3rd ed. Wiley, 2014.
- Fisher Y. (ed.) *Fractal image compression*. Springer-Verlag, 1995.
- Lu N. *Fractal imaging*. Academic Press, 1997.
- Hoggar S. G. *Mathematics for computer graphics*. Cambridge Univ. Press, 1992.

- Mandelbrot B. B. *Fractals: Form, chance and dimension*. W. H. Freeman, 1977.
- Mandelbrot B. B. *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman, 1982.
- Massopust P. R. *Fractal functions, fractal surfaces and wavelets*. Academic Press, 1994.
- Nikiel S. *Iterated function systems for real-time image synthesis*. Springer-Verlag, 2007.
- Peitgen H.–O., Jürgens H. and Saupe D. *Fractals for the classroom*. Springer-Verlag, 1992.
- Peitgen H.–O. and Richter P. H. *The beauty of fractals*. Springer-Verlag, 1986.
- Peitgen H.–O. and Saupe D. (eds.) *The science of fractal images*. Springer-Verlag, 1988.

- Μπούντης Αν. Χ. *Δυναμικά συστήματα & χάος* Τόμος Α'. Βούλγαρη, 1989.
- Μπούντης Αν. *Δυναμικά συστήματα και χάος* Τόμος Α. Παπασωτηρίου, 1995.
- Ευαγγελάτου-Δάλλα Λεώνη *Στοιχεία fractal γεωμετρίας*. Τμήμα Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α., 2000.
- Αραχωβίτης Ιωάν. *Εισαγωγή στη χαοτική δυναμική και στα fractals (κλασμοειδή)*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2001.
- Μπούντης Τ. *Ο θαυμαστός κόσμος των fractal*. Leader Books, 2004.
- Bak P. *Πως λειτουργεί η φύση: Η επιστήμη της αυτοοργανούμενης κρισιμότητας*. Εκδόσεις Κάτοπτρο, 2008.

- Πολλά φυσικά και τεχνητά φαινόμενα

- Πολλά φυσικά και τεχνητά φαινόμενα
  - έχουν το πολύ θεμελιώδες χαρακτηριστικό του αναλλοιώτου υπό διαφορετικές κλίμακες,

- Πολλά φυσικά και τεχνητά φαινόμενα
  - έχουν το πολύ θεμελιώδες χαρακτηριστικό του αναλλοιώτου υπό διαφορετικές κλίμακες,
  - έχουν άπειρη λεπτομέρεια σε κάθε σημείο,

- Πολλά φυσικά και τεχνητά φαινόμενα
  - έχουν το πολύ θεμελιώδες χαρακτηριστικό του αναλλοιώτου υπό διαφορετικές κλίμακες,
  - έχουν άπειρη λεπτομέρεια σε κάθε σημείο,
  - είναι αυτοόμοια κατά μήκος διαφορετικών κλιμάκων και

- Πολλά φυσικά και τεχνητά φαινόμενα
  - έχουν το πολύ θεμελιώδες χαρακτηριστικό του αναλλοιώτου υπό διαφορετικές κλίμακες,
  - έχουν άπειρη λεπτομέρεια σε κάθε σημείο,
  - είναι αυτοόμοια κατά μήκος διαφορετικών κλιμάκων και
  - δύνανται να περιγραφούν από μία διαδικασία καθορίζουσα μια επαναλαμβανόμενη λειτουργία για την παραγωγή των λεπτομερειών.

- Πολλά φυσικά και τεχνητά φαινόμενα
  - έχουν το πολύ θεμελιώδες χαρακτηριστικό του αναλλοιώτου υπό διαφορετικές κλίμακες,
  - έχουν άπειρη λεπτομέρεια σε κάθε σημείο,
  - είναι αυτοόμοια κατά μήκος διαφορετικών κλιμάκων και
  - δύνανται να περιγραφούν από μία διαδικασία καθορίζουσα μια επαναλαμβανόμενη λειτουργία για την παραγωγή των λεπτομερειών.
- Ο όρος «fractal» προέρχεται από το λατινικό επίθετο *fractus* (θρυμματισμένος, σπασμένος, συντεθλιμμένος, κομματιασμένος) ομόρριζο του *fraction* (κλάσμα) και του *fragment* (τέμαχος, θραύσμα) και σημαίνει «ακανόνιστος, τεμαχισμένος, θραυσμένος»· σχετίζεται με το ρήμα frangere, το οποίο σημαίνει θραύω ή σπάω ή κλάω (κλῶ).

Η απαρχή

- Σχεδιάστε μια ευθεία επί κομματίου χάρτου.

Η απαρχή

- Σχεδιάστε μια ευθεία επί κομματίου χάρτου.
- Τι μας λέει η Ευκλείδεια Γεωμετρία για τη διάσταση του σχήματος;

Η απαρχή

- Σχεδιάστε μια ευθεία επί κομματίου χάρτου.
- Τι μας λέει η Ευκλείδεια Γεωμετρία για τη διάσταση του σχήματος;
- Τώρα επεκτείνετε την ευθεία.

Η απαρχή

- Σχεδιάστε μια ευθεία επί κομματίου χάρτου.
- Τι μας λέει η Ευκλείδεια Γεωμετρία για τη διάσταση του σχήματος;
- Τώρα επεκτείνετε την ευθεία.
- Στρέψτε τη γύρω γύρω, οπίσω, εμπρός χωρίς να διασταυρώνεται, μέχρις ότου γεμίσει όλο το κομμάτι του χάρτου.

Η απαρχή

- Σχεδιάστε μια ευθεία επί κομματίου χάρτου.
- Τι μας λέει η Ευκλείδεια Γεωμετρία για τη διάσταση του σχήματος;
- Τώρα επεκτείνετε την ευθεία.
- Στρέψτε τη γύρω γύρω, οπίσω, εμπρός χωρίς να διασταυρώνεται, μέχρις ότου γεμίσει όλο το κομμάτι του χάρτου.
- Τι μας λέει τώρα η Ευκλείδεια Γεωμετρία για τη διάσταση του σχήματος;

Η απαρχή

- Σχεδιάστε μια ευθεία επί κομματίου χάρτου.
- Τι μας λέει η Ευκλείδεια Γεωμετρία για τη διάσταση του σχήματος;
- Τώρα επεκτείνετε την ευθεία.
- Στρέψτε τη γύρω γύρω, οπίσω, εμπρός χωρίς να διασταυρώνεται, μέχρις ότου γεμίσει όλο το κομμάτι του χάρτου.
- Τι μας λέει τώρα η Ευκλείδεια Γεωμετρία για τη διάσταση του σχήματος;
- Τι μας λέει η διαίσθηση όταν η γραμμή γεμίσει πλήρως όλο το επίπεδο του χάρτου;

Η γένεση

- Αυτή η σκέψη εκκίνησε μία επανάσταση στη μαθηματική προ εκατό περίπου ετών.

Η γένεση

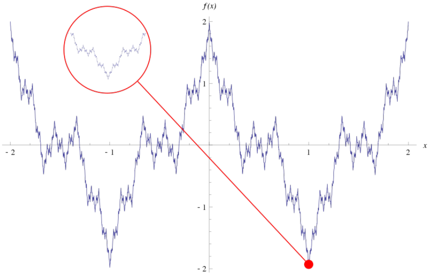
- Αυτή η σκέψη εκκίνησε μία επανάσταση στη μαθηματική προ εκατό περίπου ετών.
- Μαθηματικοί, όπως οι **Georg Cantor**, **Giuseppe Peano**, **David Hilbert**, **Felix Hausdorff**, **Helge von Koch** και **Waclaw Sierpiński** σχεδίασαν καμπύλες οι οποίες ονομάσθηκαν «Τέρατα», «ψυχωτικές» και «παθολογικές» από τους παραδοσιακούς μαθηματικούς.

Η γένεση

- Αυτή η σκέψη εκκίνησε μία επανάσταση στη μαθηματική προ εκατό περίπου ετών.
- Μαθηματικοί, όπως οι **Georg Cantor**, **Giuseppe Peano**, **David Hilbert**, **Felix Hausdorff**, **Helge von Koch** και **Waclaw Sierpiński** σχεδίασαν καμπύλες οι οποίες ονομάσθηκαν «Τέρατα», «ψυχωτικές» και «παθολογικές» από τους παραδοσιακούς μαθηματικούς.
- Προτάθηκε ένα νέο είδος διάστασης κατά το οποίο μία καμπύλη εδύνατο να έχει κλασματική, και όχι μόνον ακεραία, διάσταση.

Η συνάρτηση Weierstrass (1872)

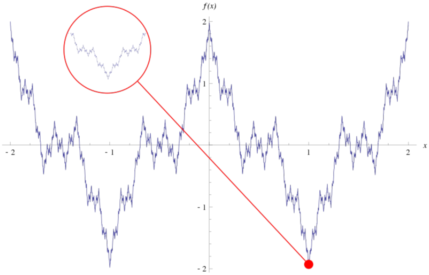
- Η συνάρτηση Weierstrass $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$, όπου $0 < a < 1$, b θετικός περιττός ακέραιος και $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ αποτελεί παράδειγμα μίας παθολογικής, πραγματικών τιμών, συνάρτησης επί της πραγματικής ευθείας.



Υποτύπωση της συνάρτησης Weierstrass υπεράνω του διαστήματος $[-2, 2]$. Όπως μερικά μορφοκλάσματα, η συνάρτηση παρουσιάζει αυτοομοιότητα: κάθε μεγέθυνση (ερυθρός κύκλος) είναι όμοιος προς την συνολική υποτύπωση.

Η συνάρτηση Weierstrass (1872)

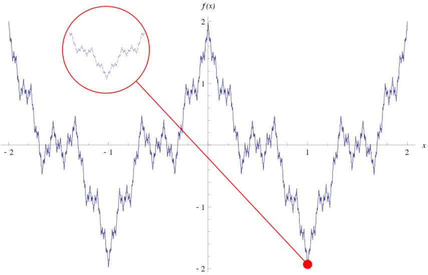
- Η συνάρτηση Weierstrass $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$, όπου $0 < a < 1$, b θετικός περιττός ακέραιος και $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ αποτελεί παράδειγμα μίας παθολογικής, πραγματικών τιμών, συνάρτησης επί της πραγματικής ευθείας.
- Η συνάρτηση έχει την ιδιότητα της απανταχού συνεχείας αλλά της ουδαμού διαφορισιμότητας.



Υποτύπωση της συνάρτησης Weierstrass υπεράνω του διαστήματος $[-2, 2]$. Όπως μερικά μορφοκλάσματα, η συνάρτηση παρουσιάζει αυτοομοιότητα: κάθε μεγέθυνση (ερυθρός κύκλος) είναι όμοιος προς την συνολική υποτύπωση.

Η συνάρτηση Weierstrass (1872)

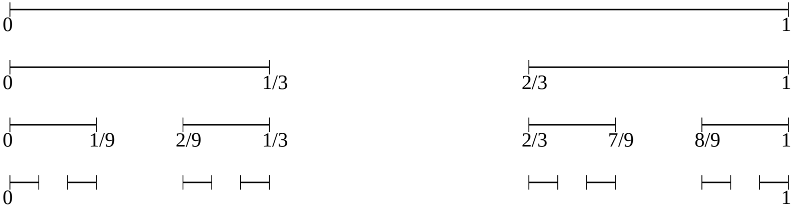
- Η συνάρτηση Weierstrass $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$, όπου $0 < a < 1$, b θετικός περιττός ακέραιος και $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ αποτελεί παράδειγμα μίας παθολογικής, πραγματικών τιμών, συνάρτησης επί της πραγματικής ευθείας.
- Η συνάρτηση έχει την ιδιότητα της απανταχού συνεχείας αλλά της ουδαμού διαφορισιμότητας.
- Ονομάσθηκε έτσι προς τιμήν του ανακαλύψαντός την Karl Weierstrass.



Υποτύπωση της συνάρτησης Weierstrass υπεράνω του διαστήματος $[-2, 2]$. Όπως μερικά μορφοκλάσματα, η συνάρτηση παρουσιάζει αυτοομοιότητα: κάθε μεγέθυνση (ερυθρός κύκλος) είναι όμοιος προς την συνολική υποτύπωση.

Το (τριαδικό) σύνολο Cantor (1883)

Ανακαλυφθέν το 1874 από τον Henry John Stephen Smith και παρουσιασθέν το 1883 από τον Georg Cantor



- Αρχικώς, θεωρούμε το κλειστό σύνολο $c_0 = [0, 1]$.

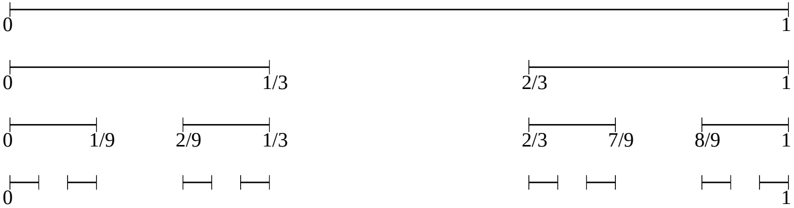
Το (τριαδικό) σύνολο Cantor (1883)

Ανακαλυφθέν το 1874 από τον Henry John Stephen Smith και παρουσιασθέν το 1883 από τον Georg Cantor

- Αρχικώς, θεωρούμε το κλειστό σύνολο $c_0 = [0, 1]$.
- Απομακρύνουμε από το c_0 το μεσαίο τρίτο του. Το εναπομείναν σύνολο είναι το $c_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$.

Το (τριαδικό) σύνολο Cantor (1883)

Ανακαλυφθέν το 1874 από τον Henry John Stephen Smith και παρουσιασθέν το 1883 από τον Georg Cantor



- Αρχικώς, θεωρούμε το κλειστό σύνολο $c_0 = [0, 1]$.
- Απομακρύνουμε από το c_0 το μεσαίο τρίτο του. Το εναπομείναν σύνολο είναι το $c_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$.
- Απομακρύνουμε τα μεσαία τρίτα των $[0, 1/3]$ και $[2/3, 1]$.

Το (τριαδικό) σύνολο Cantor (1883)

Ανακαλυφθέν το 1874 από τον Henry John Stephen Smith και παρουσιασθέν το 1883 από τον Georg Cantor

- Αρχικώς, θεωρούμε το κλειστό σύνολο $c_0 = [0,1]$.
- Απομακρύνουμε από το c_0 το μεσαίο τρίτο του. Το εναπομείναν σύνολο είναι το $c_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$.
- Απομακρύνουμε τα μεσαία τρίτα των $[0,1/3]$ και $[2/3,1]$.
- Συνεχίζοντας επ' άπειρον, λαμβάνουμε το σύνολο Cantor

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Μία σύντομη ιστορία

- Το 1890, ο Ιταλός μαθηματικός Giuseppe Peano ανεκάλυψε μία πυκνώς αυτοτέμνουσα καμπύλη διερχομένη δια μέσου κάθε σημείου του μοναδιαίου τετραγώνου.

Μία σύντομη ιστορία

- Το 1890, ο Ιταλός μαθηματικός Giuseppe Peano ανεκάλυψε μία πυκνώς αυτοτέμνουσα καμπύλη διερχομένη δια μέσου κάθε σημείου του μοναδιαίου τετραγώνου.
- Σκοπός του ήταν να κατασκευάσει μια συνεχή απεικόνιση από το μοναδιαίο διάστημα επί του μοναδιαίου τετραγώνου.

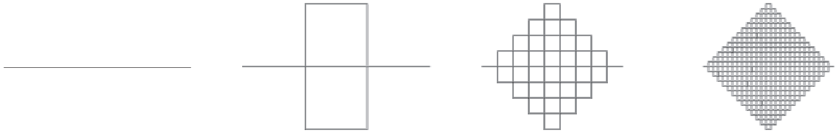
Μία σύντομη ιστορία

- Το 1890, ο Ιταλός μαθηματικός Giuseppe Peano ανεκάλυψε μία πυκνώς αυτοτέμνουσα καμπύλη διερχομένη δια μέσου κάθε σημείου του μοναδιαίου τετραγώνου.
- Σκοπός του ήταν να κατασκευάσει μια συνεχή απεικόνιση από το μοναδιαίο διάστημα επί του μοναδιαίου τετραγώνου.
- Είχε παρακινηθεί από το πρωθύστερο αντιδιαισθητικό αποτέλεσμα του Γερμανού μαθηματικού Georg Cantor, ότι το άπειρο πλήθος των σημείων ενός μοναδιαίου διαστήματος έχει ίσο πληθάριθμο με το άπειρο πλήθος των σημείων κάθε πεπερασμένης διαστάσεως πολλαπλότητας, όπως το μοναδιαίο τετράγωνο.

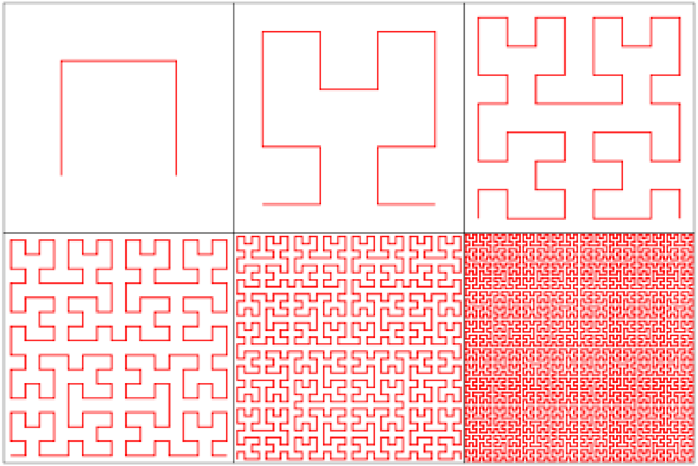
Μία σύντομη ιστορία

- Το 1890, ο Ιταλός μαθηματικός Giuseppe Peano ανεκάλυψε μία πυκνώς αυτοτέμνουσα καμπύλη διερχομένη δια μέσου κάθε σημείου του μοναδιαίου τετραγώνου.
- Σκοπός του ήταν να κατασκευάσει μια συνεχή απεικόνιση από το μοναδιαίο διάστημα επί του μοναδιαίου τετραγώνου.
- Είχε παρακινηθεί από το πρωθύστερο αντιδιαισθητικό αποτέλεσμα του Γερμανού μαθηματικού Georg Cantor, ότι το άπειρο πλήθος των σημείων ενός μοναδιαίου διαστήματος έχει ίσο πληθάριθμο με το άπειρο πλήθος των σημείων κάθε πεπερασμένης διαστάσεως πολλαπλότητας, όπως το μοναδιαίο τετράγωνο.
- Το λελυμένο εκ του Peano πρόβλημα ήταν, εάν μία τέτοια απεικόνιση εδύνατο να είναι συνεχής· δηλ., μία καμπύλη γεμίζουσα τον χώρο.

Η καμπύλη Peano (1890)

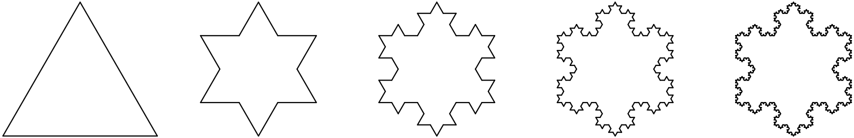


Η καμπύλη Hilbert (1891)



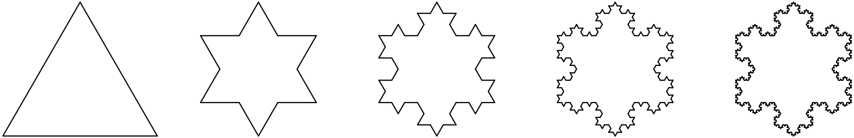
Οι πρώτες έξι επαναλήψεις της καμπύλης Hilbert.

Η χιονονιφάς Koch (1904)



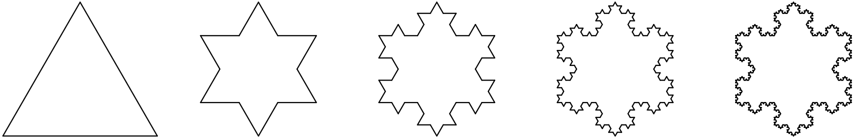
- Η χιονονιφάς Koch δύναται να κατασκευαστεί εκκινώντας με ένα ισόπλευρο τρίγωνο και εναλλάσσοντας αναδρομικώς κάθε ευθύγραμμο τμήμα ως ακολούθως:

Η χιονονιφάς Koch (1904)



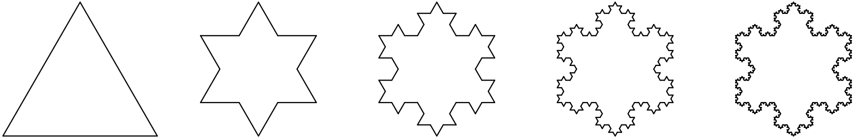
- Η χιονονιφάς Koch δύναται να κατασκευαστεί εκκινώντας με ένα ισόπλευρο τρίγωνο και εναλλάσσοντας αναδρομικώς κάθε ευθύγραμμο τμήμα ως ακολούθως:
  - Διαιρούμε το ευθύγραμμο τμήμα σε τρία τμήματα ίσου μήκους.

Η χιονονιφάς Koch (1904)



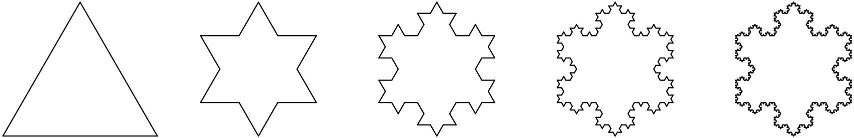
- Η χιονονιφάς Koch δύναται να κατασκευαστεί εκκινώντας με ένα ισόπλευρο τρίγωνο και εναλλάσσοντας αναδρομικώς κάθε ευθύγραμμο τμήμα ως ακολούθως:
  - Διαιρούμε το ευθύγραμμο τμήμα σε τρία τμήματα ίσου μήκους.
  - Σχεδιάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχον ως βάση το μεσαίο τμήμα από το βήμα 1 και δεικνύον προς τα έξω.

Η χιονονιφάς Koch (1904)



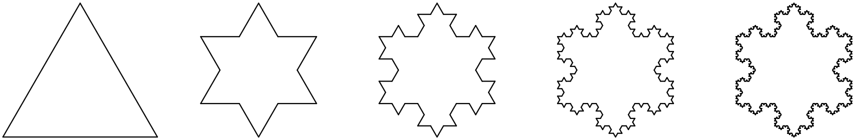
- Η χιονονιφάς Koch δύναται να κατασκευαστεί εκκινώντας με ένα ισόπλευρο τρίγωνο και εναλλάσσοντας αναδρομικώς κάθε ευθύγραμμο τμήμα ως ακολούθως:
  - Διαιρούμε το ευθύγραμμο τμήμα σε τρία τμήματα ίσου μήκους.
  - Σχεδιάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχον ως βάση το μεσαίο τμήμα από το βήμα 1 και δεικνύον προς τα έξω.
  - Απομακρύνουμε το ευθύγραμμο τμήμα αποτελούν τη βάση του τριγώνου από το βήμα 2.

Η χιονονιφάς Koch (1904)



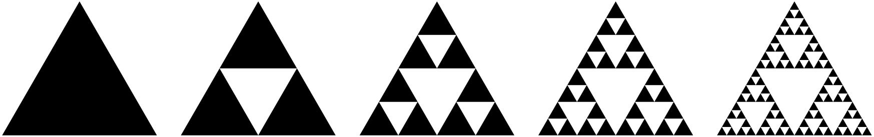
- Η χιονονιφάς Koch δύναται να κατασκευαστεί εκκινώντας με ένα ισόπλευρο τρίγωνο και εναλλάσσοντας αναδρομικώς κάθε ευθύγραμμο τμήμα ως ακολούθως:
  - Διαιρούμε το ευθύγραμμο τμήμα σε τρία τμήματα ίσου μήκους.
  - Σχεδιάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχον ως βάση το μεσαίο τμήμα από το βήμα 1 και δεικνύον προς τα έξω.
  - Απομακρύνουμε το ευθύγραμμο τμήμα αποτελούν τη βάση του τριγώνου από το βήμα 2.
- Μετά από μία επανάληψη αυτής της διεργασίας, έχουμε ως αποτέλεσμα ένα σχήμα όμοιο προς το άστρο του Δαβίδ.

Η χιονονιφάς Koch (1904)



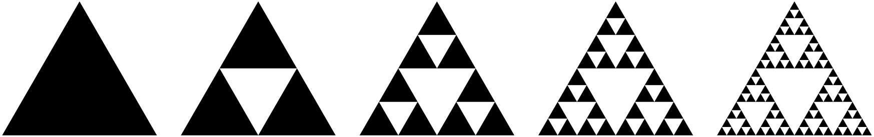
- Η χιονονιφάς Koch δύναται να κατασκευαστεί εκκινώντας με ένα ισόπλευρο τρίγωνο και εναλλάσσοντας αναδρομικώς κάθε ευθύγραμμο τμήμα ως ακολούθως:
  - Διαιρούμε το ευθύγραμμο τμήμα σε τρία τμήματα ίσου μήκους.
  - Σχεδιάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχον ως βάση το μεσαίο τμήμα από το βήμα 1 και δεικνύον προς τα έξω.
  - Απομακρύνουμε το ευθύγραμμο τμήμα αποτελούν τη βάση του τριγώνου από το βήμα 2.
- Μετά από μία επανάληψη αυτής της διεργασίας, έχουμε ως αποτέλεσμα ένα σχήμα όμοιο προς το άστρο του Δαβίδ.
- Η χιονονιφάς Koch είναι το προσεγγίζον όριο καθώς τα ανωτέρω βήματα ακολουθούνται επανειλημμένως.

Ο ηθμός Sierpiński (1915)



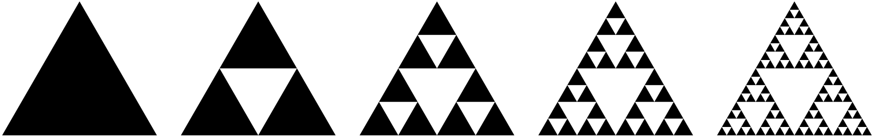
- Εκκινούμε με ένα στερεό (γεμισμένο) ισόπλευρο τρίγωνο $S(0)$.

Ο ηθμός Sierpiński (1915)



- Εκκινούμε με ένα στερεό (γεμισμένο) ισόπλευρο τρίγωνο $S(0)$.
- Διαιρούμε τούτο εις τέσσερα μικρότερα ισόπλευρα τρίγωνα χρησιμοποιώντας τα μέσα των τριών πλευρών του αρχικού τριγώνου ως νέες κορυφές και απομακρύνουμε το εσωτερικό του μεσαίου τριγώνου προς λήψη του $S(1)$.

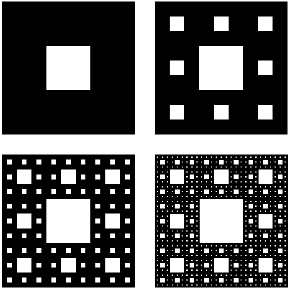
Ο ηθμός Sierpiński (1915)



- Εκκινούμε με ένα στερεό (γεμισμένο) ισόπλευρο τρίγωνο $S(0)$.
- Διαιρούμε τούτο εις τέσσερα μικρότερα ισόπλευρα τρίγωνα χρησιμοποιώντας τα μέσα των τριών πλευρών του αρχικού τριγώνου ως νέες κορυφές και απομακρύνουμε το εσωτερικό του μεσαίου τριγώνου προς λήψη του $S(1)$.
- Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία εφ' εκάστου εκ των τριών εναπομεινάντων στερεών ισόπλευρων τριγώνων προς απόκτηση του $S(2)$ και συνεχίζοντας λαμβάνουμε

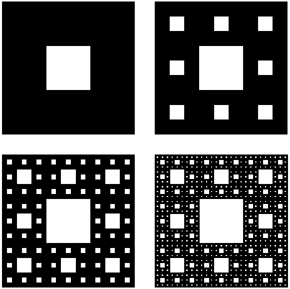
$$S = \bigcap_{i=0}^{\infty} S(i).$$

Ο τάπης Sierpiński (1916)



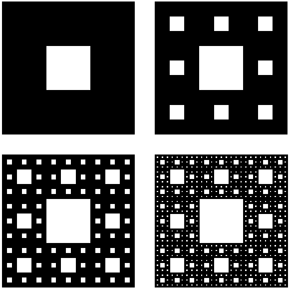
- Εκκινούμε με ένα τετράγωνο.

Ο τάπης Sierpiński (1916)



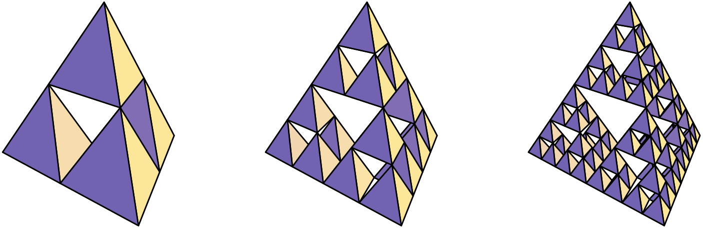
- Εκκινούμε με ένα τετράγωνο.
- Το τετράγωνο κόπτεται εις 9 ανάλογα υποτετράγωνα εις ένα 3-επί-3 πλέγμα και απομακρύνεται το κεντρικό υποτετράγωνο.

Ο τάπης Sierpiński (1916)



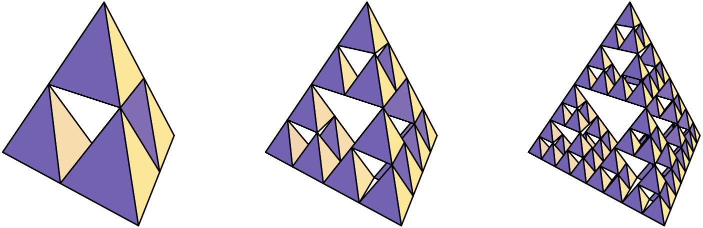
- Εκκινούμε με ένα τετράγωνο.
- Το τετράγωνο κόπτεται εις 9 ανάλογα υποτετράγωνα εις ένα 3-επί-3 πλέγμα και απομακρύνεται το κεντρικό υποτετράγωνο.
- Η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται εν συνεχεία αναδρομικώς εις τα εναπομείναντα 8 υποτετράγωνα, επ' άπειρον.

Το τετράεδρο Sierpiński



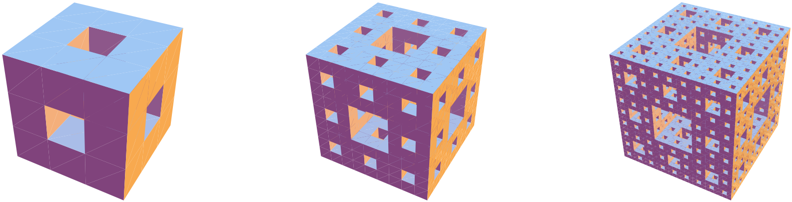
- Η τέτριξ είναι το τριδιάστατο ανάλογο του τριγώνου Sierpiński, σχηματιζόμενο συρρικνώνοντας επανειλημμένως ένα κανονικό τετράεδρο κατά το ήμισυ του αρχικού του ύψους, συναρμολογώντας τέσσερα αντίγραφα αυτού του τετραέδρου με εγγίζοντες γωνίες και εν συνεχεία επαναλαμβάνοντας τη διεργασία.

Το τετράεδρο Sierpiński



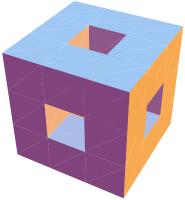
- Η τέτριξ είναι το τριδιάστατο ανάλογο του τριγώνου Sierpiński, σχηματιζόμενο συρρικνώνοντας επανειλημμένως ένα κανονικό τετράεδρο κατά το ήμισυ του αρχικού του ύψους, συναρμολογώντας τέσσερα αντίγραφα αυτού του τετραέδρου με εγγίζοντες γωνίες και εν συνεχεία επαναλαμβάνοντας τη διεργασία.
- Αυτό δύναται επίσης να πραγματοποιηθεί με μία τετράγωνη πυραμίδα και πέντε αντίγραφα αντί τεσσάρων.

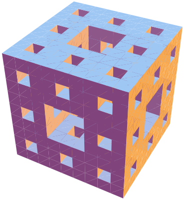
Ο σπόγγος Menger (1926)

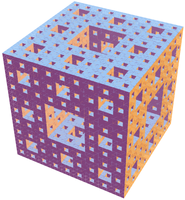


- Εκκινούμε με έναν κύβο.

Ο σπόγγος Menger (1926)

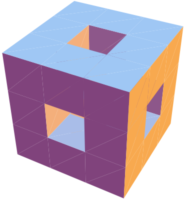


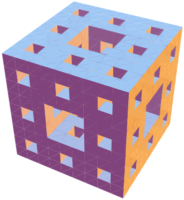


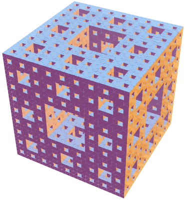


- Εκκινούμε με έναν κύβο.
- Διαιρούμε κάθε έδρα του κύβου εις 9 τετράγωνα, όπως ο κύβος του Rubik. Τοιούτως υποδιαιρούμε τον κύβο εις 27 μικροτέρους κύβους.

Ο σπόγγος Menger (1926)

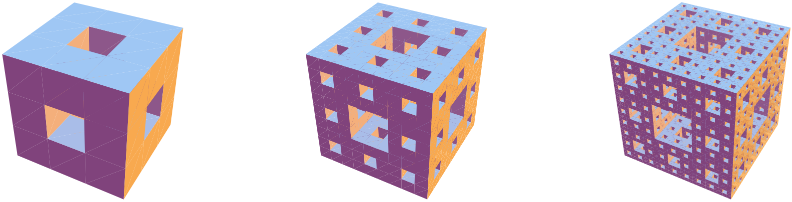






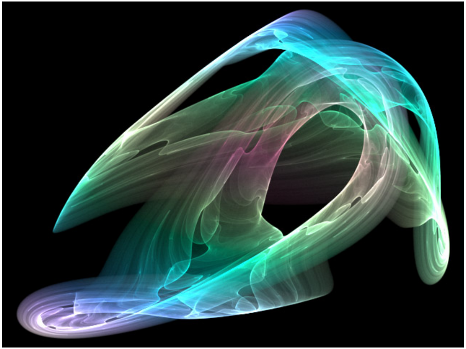
- Εκκινούμε με έναν κύβο.
- Διαιρούμε κάθε έδρα του κύβου εις 9 τετράγωνα, όπως ο κύβος του Rubik. Τοιούτως υποδιαιρούμε τον κύβο εις 27 μικροτέρους κύβους.
- Απομακρύνουμε τον μεσαίο κύβο κάθε έδρας και τον κεντρικό κύβο, αφήνοντας 20 κύβους, ομοιάζοντες προς έναν κενό κύβο. (Πρώτη εικόνα). Αυτός είναι ένας σπόγγος Menger επιπέδου-1.

Ο σπόγγος Menger (1926)



- Εκκινούμε με έναν κύβο.
- Διαιρούμε κάθε έδρα του κύβου εις 9 τετράγωνα, όπως ο κύβος του Rubik. Τοιούτως υποδιαιρούμε τον κύβο εις 27 μικροτέρους κύβους.
- Απομακρύνουμε τον μεσαίο κύβο κάθε έδρας και τον κεντρικό κύβο, αφήνοντας 20 κύβους, ομοιάζοντες προς έναν κενό κύβο. (Πρώτη εικόνα). Αυτός είναι ένας σπόγγος Menger επιπέδου-1.
- Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1–3 για κάθε έναν από τους εναπομείναντας μικροτέρους κύβους.

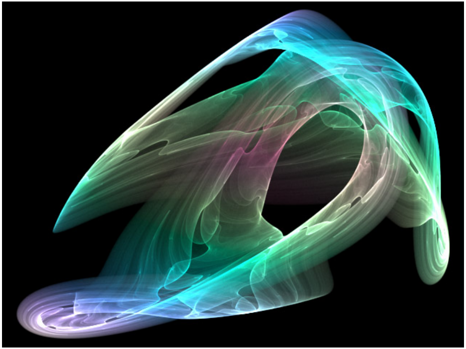
Παράξενοι έλκτες (1963)



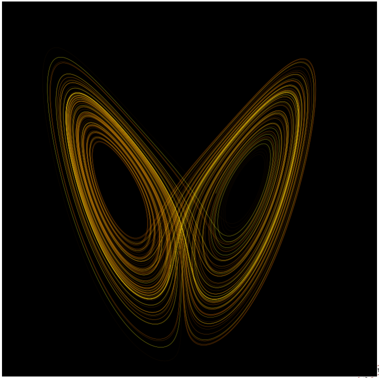
Οπτική αναπαράσταση ενός παράξενου έλκτη

Ο έλκτης του Lorenz

Παράξενοι έλκτες (1963)



Οπτική αναπαράσταση ενός παράξενου έλκτη



Ο έλκτης του Lorenz

Η φτέρη του Barnsley (1986)

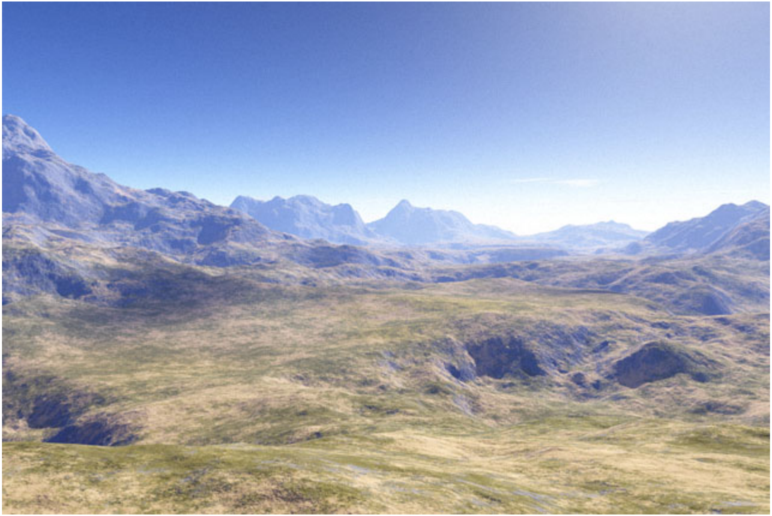
Η φτέρη του Barnsley (1986)

- Πρόκειται περί μορφοκλάσματος το όνομα του οποίου οφείλεται στον Michael Barnsley ο οποίος πρώτος το περιέγραψε στο βιβλίο του Fractals everywhere.

Η φτέρη του Barnsley (1986)

- Πρόκειται περί μορφοκλάσματος το όνομα του οποίου οφείλεται στον Michael Barnsley ο οποίος πρώτος το περιέγραψε στο βιβλίο του Fractals everywhere.
- Αυτός το έκανε να ομοιάζει προς τη Μελανή Άσπληνο, Asplenium adiantum-nigrum.

Τοπία



Αυτός ο κόσμος ο μικρός ο μέγας

- Επιφανειακή παρατήρηση οδηγεί σε κοινοτοπίες.

Αυτός ο κόσμος ο μικρός ο μέγας

- Επιφανειακή παρατήρηση οδηγεί σε κοινοτοπίες.
- Υπάρχουν δύο βράχοι, δύο ακτές, δύο έρημοι, δύο γαλαξίες των οποίων η μορφή και οι διαστάσεις συμπίπτουν απολύτως;

Αυτός ο κόσμος ο μικρός ο μέγας

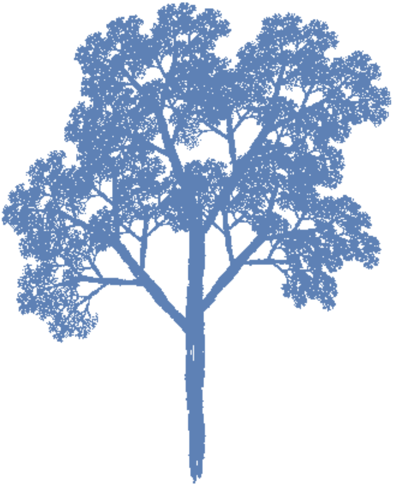
- Επιφανειακή παρατήρηση οδηγεί σε κοινοτοπίες.
- Υπάρχουν δύο βράχοι, δύο ακτές, δύο έρημοι, δύο γαλαξίες των οποίων η μορφή και οι διαστάσεις συμπίπτουν απολύτως;
- Ο φυσικός κόσμος προσπαθεί να αναπαραχθεί με μνήμη του αρχετύπου.

Αυτός ο κόσμος ο μικρός ο μέγας

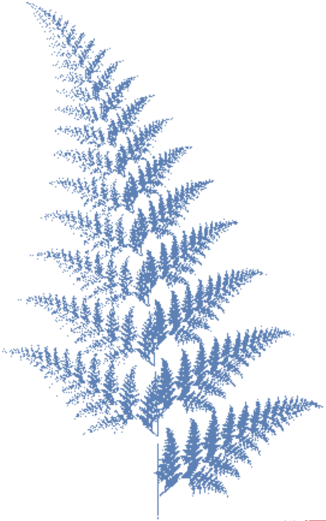
- Επιφανειακή παρατήρηση οδηγεί σε κοινοτοπίες.
- Υπάρχουν δύο βράχοι, δύο ακτές, δύο έρημοι, δύο γαλαξίες των οποίων η μορφή και οι διαστάσεις συμπίπτουν απολύτως;
- Ο φυσικός κόσμος προσπαθεί να αναπαραχθεί με μνήμη του αρχετύπου.
- Ευκλείδεια Γεωμετρία (ευθείες, τρίγωνα, κώνοι κλπ.).

Αυτός ο κόσμος ο μικρός ο μέγας

- Επιφανειακή παρατήρηση οδηγεί σε κοινοτοπίες.
- Υπάρχουν δύο βράχοι, δύο ακτές, δύο έρημοι, δύο γαλαξίες των οποίων η μορφή και οι διαστάσεις συμπίπτουν απολύτως;
- Ο φυσικός κόσμος προσπαθεί να αναπαραχθεί με μνήμη του αρχετύπου.
- Ευκλείδεια Γεωμετρία (ευθείες, τρίγωνα, κώνοι κλπ.).
- Γεωμετρία της φύσης (μεγάλη πολυπλοκότητα, περιπλοκότητα αλλά και αυτοομοιότητα).



Ένα δένδρο



Ένα φύλλο φτέρης

Η έννοια

- Η **διάσταση** ενός χώρου ή αντικειμένου ορίζεται ατύπως ως το πλήθος των απαιτούμενων συντεταγμένων για να προσδιορισθεί με βεβαιότητα η θέση ενός σημείου (Ευκλείδεια).

Η έννοια

- Η **διάσταση** ενός χώρου ή αντικειμένου ορίζεται ατύπως ως το πλήθος των απαιτούμενων συντεταγμένων για να προσδιορισθεί με βεβαιότητα η θέση ενός σημείου (Ευκλείδεια).
- Για να χωρίσουμε ένα σχήμα σε ασύνδετα τμήματα, αρκεί να αφαιρέσουμε ένα σύνολο του οποίου η διάσταση είναι κατά 1 μικρότερη (Επαγωγική).

Η έννοια

- Η **διάσταση** ενός χώρου ή αντικειμένου ορίζεται ατύπως ως το πλήθος των απαιτούμενων συντεταγμένων για να προσδιορισθεί με βεβαιότητα η θέση ενός σημείου (Ευκλείδεια).
- Για να χωρίσουμε ένα σχήμα σε ασύνδετα τμήματα, αρκεί να αφαιρέσουμε ένα σύνολο του οποίου η διάσταση είναι κατά 1 μικρότερη (Επαγωγική).
- Ακέραια (Ευκλείδεια, Επαγωγική ή τοπολογική κ.ά.)

Η έννοια

- Η **διάσταση** ενός χώρου ή αντικειμένου ορίζεται ατύπως ως το πλήθος των απαιτούμενων συντεταγμένων για να προσδιορισθεί με βεβαιότητα η θέση ενός σημείου (Ευκλείδεια).
- Για να χωρίσουμε ένα σχήμα σε ασύνδετα τμήματα, αρκεί να αφαιρέσουμε ένα σύνολο του οποίου η διάσταση είναι κατά 1 μικρότερη (Επαγωγική).
- Ακέραια (Ευκλείδεια, Επαγωγική ή τοπολογική κ.ά.)
- Μη ακεραία (Hausdorff-Besicovitch, ομοιότητας, καταμέτρησης κυτίων κ.ά.). Μέτρο για το σχετικό βαθμό «τραχύτητας» ή πολλαπλότητας.

Η έννοια

- Η **διάσταση** ενός χώρου ή αντικειμένου ορίζεται ατύπως ως το πλήθος των απαιτούμενων συντεταγμένων για να προσδιορισθεί με βεβαιότητα η θέση ενός σημείου (Ευκλείδεια).
- Για να χωρίσουμε ένα σχήμα σε ασύνδετα τμήματα, αρκεί να αφαιρέσουμε ένα σύνολο του οποίου η διάσταση είναι κατά 1 μικρότερη (Επαγωγική).
- Ακέραια (Ευκλείδεια, Επαγωγική ή τοπολογική κ.ά.)
- Μη ακεραία (Hausdorff-Besicovitch, ομοιότητας, καταμέτρησης κυτίων κ.ά.). Μέτρο για το σχετικό βαθμό «τραχύτητας» ή πολλαπλότητας.
- Μετρήσιμο μέγεθος των φυσικών συστημάτων.

Η έννοια

- Μία γραμμή έχει διάσταση ένα επειδή χρειάζεται μόνο μία συντεταγμένη για να προσδιοριστεί ένα σημείο επ’ αυτής.
- Μία επιφάνεια, όπως ένα επίπεδο ή η επιφάνεια ενός κυλίνδρου ή σφαίρας, έχει διάσταση δύο επειδή χρειάζονται δύο συντεταγμένες για να προσδιοριστεί ένα σημείο επ’ αυτής.
- Το εσωτερικό ενός κύβου, ενός κυλίνδρου ή μίας σφαίρας είναι τριδιάστατο επειδή χρειάζονται τρεις συντεταγμένες για να εντοπίσει κάποιος ένα σημείο εντός αυτών των χώρων.
- Όπως αναμενόταν, η (τοπολογική) διάσταση είναι πάντοτε ένας φυσικός αριθμός.

Επαγωγική διάσταση

- Θεωρήστε ένα διάκριτο σύνολο σημείων (όπως μία πεπερασμένη συλλογή σημείων) ως διάστασης μηδέν.

Επαγωγική διάσταση

- Θεωρήστε ένα διάκριτο σύνολο σημείων (όπως μία πεπερασμένη συλλογή σημείων) ως διάστασης μηδέν.
- Σύροντας ένα αντικείμενο διάστασης μηδέν προς κάποια κατεύθυνση, αποκτά κάποιος ένα αντικείμενο διάστασης ένα.

Επαγωγική διάσταση

- Θεωρήστε ένα διάκριτο σύνολο σημείων (όπως μία πεπερασμένη συλλογή σημείων) ως διάστασης μηδέν.
- Σύροντας ένα αντικείμενο διάστασης μηδέν προς κάποια κατεύθυνση, αποκτά κάποιος ένα αντικείμενο διάστασης ένα.
- Σύροντας ένα αντικείμενο διάστασης ένα προς μία νέα κατεύθυνση, αποκτά κάποιος ένα αντικείμενο διάστασης δύο.

Επαγωγική διάσταση

- Θεωρήστε ένα διάκριτο σύνολο σημείων (όπως μία πεπερασμένη συλλογή σημείων) ως διάστασης μηδέν.
- Σύροντας ένα αντικείμενο διάστασης μηδέν προς κάποια κατεύθυνση, αποκτά κάποιος ένα αντικείμενο διάστασης ένα.
- Σύροντας ένα αντικείμενο διάστασης ένα προς μία νέα κατεύθυνση, αποκτά κάποιος ένα αντικείμενο διάστασης δύο.
- Γενικώς, αποκτά κάποιος ένα αντικείμενο διάστασης $(n+1)$ σύροντας ένα αντικείμενο διάστασης n προς μία νέα κατεύθυνση.

Επαγωγική διάσταση

- Θεωρήστε ένα διάκριτο σύνολο σημείων (όπως μία πεπερασμένη συλλογή σημείων) ως διάστασης μηδέν.
- Σύροντας ένα αντικείμενο διάστασης μηδέν προς κάποια κατεύθυνση, αποκτά κάποιος ένα αντικείμενο διάστασης ένα.
- Σύροντας ένα αντικείμενο διάστασης ένα προς μία νέα κατεύθυνση, αποκτά κάποιος ένα αντικείμενο διάστασης δύο.
- Γενικώς, αποκτά κάποιος ένα αντικείμενο διάστασης $(n+1)$ σύροντας ένα αντικείμενο διάστασης n προς μία νέα κατεύθυνση.
- Η επαγωγική διάσταση ενός τοπολογικού χώρου δύναται να αναφέρεται στη μικρή επαγωγική διάσταση ή στη μεγάλη επαγωγική διάσταση και βασίζεται επί της αναλογίας ότι οι σφαίρες διάστασης $(n+1)$ έχουν σύνορα διαστάσεων n, επιτρέποντας έναν επαγωγικό ορισμό βασισμένο επί της διάστασης των συνόρων ανοικτών συνόλων.

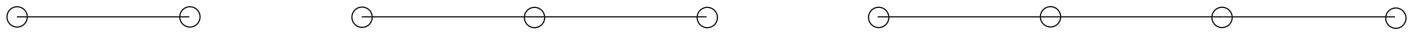
Διάσταση 1

- Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα.

$N = 3, r = 1/3, d = 1$

Διάσταση 1

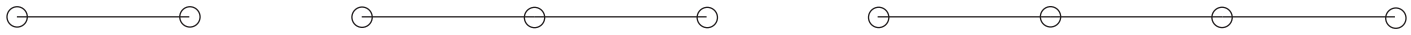
- Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα.
- Εκτινάσσουμε το τμήμα κατά έναν παράγοντα δύο. Το τμήμα είναι τώρα $(2 = 2^1)$ φορές μακρύτερο.



$N = 3, r = 1/3, d = 1$

Διάσταση 1

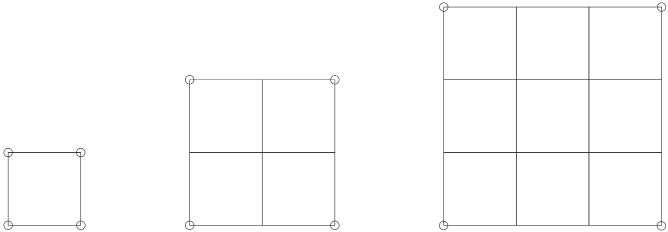
- Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα.
- Εκτινάσσουμε το τμήμα κατά έναν παράγοντα δύο. Το τμήμα είναι τώρα $(2 = 2^1)$ φορές μακρύτερο.
- Εκτινάσσοντας το τμήμα κατά έναν παράγοντα τρία, το τμήμα είναι τώρα $(3 = 3^1)$ φορές μακρύτερο.



$N = 3, r = 1/3, d = 1$

Διάσταση 2

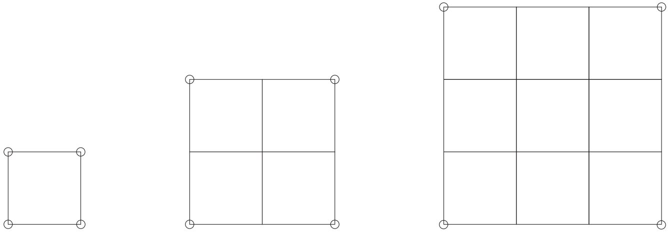
- Θεωρούμε τετράγωνο μοναδιαίας πλευράς.



$N = 9, r = 1/3, d = 2$

Διάσταση 2

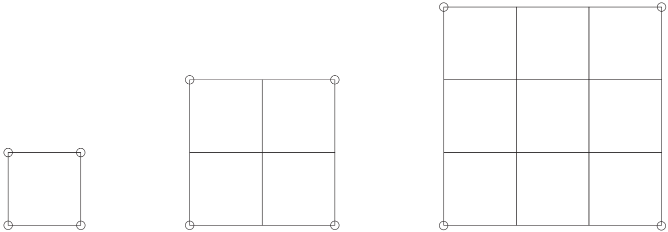
- Θεωρούμε τετράγωνο μοναδιαίας πλευράς.
- Εκτινάσσουμε το τετράγωνο κατά έναν παράγοντα δύο. Το τετράγωνο είναι τώρα $4 = 2^2$ φορές μεγαλύτερο (δηλ. 4 αρχικά τετράγωνα δύνανται να τοποθετηθούν επί του αρχικού τετραγώνου).



$N = 9, r = 1/3, d = 2$

Διάσταση 2

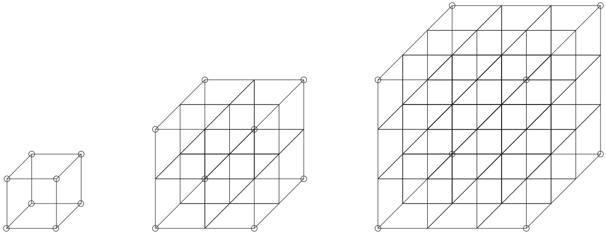
- Θεωρούμε τετράγωνο μοναδιαίας πλευράς.
- Εκτινάσσουμε το τετράγωνο κατά έναν παράγοντα δύο. Το τετράγωνο είναι τώρα $4 = 2^2$ φορές μεγαλύτερο (δηλ. 4 αρχικά τετράγωνα δύνανται να τοποθετηθούν επί του αρχικού τετραγώνου).
- Εκτινάσσοντας το τετράγωνο κατά έναν παράγοντα τρία, το τετράγωνο είναι τώρα $9 = 3^2$ φορές μεγαλύτερο.



$N = 9, r = 1/3, d = 2$

Διάσταση 3

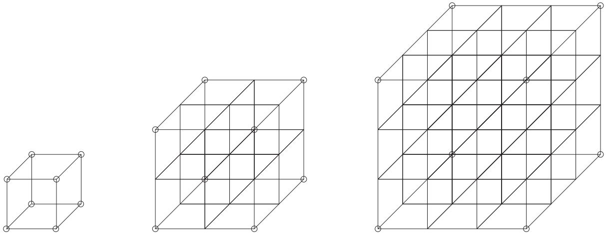
- Θεωρούμε κύβο μοναδιαίας ακμής.



$N = 27, r = 1/3, d = 3$

Διάσταση 3

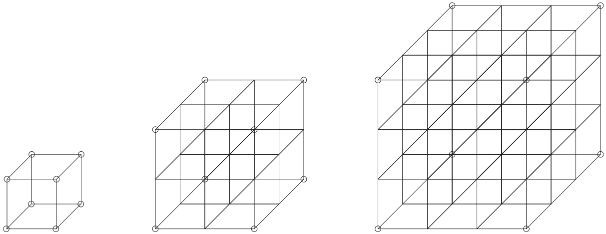
- Θεωρούμε κύβο μοναδιαίας ακμής.
- Εκτινάσσουμε τον κύβο κατά έναν παράγοντα δύο. Ο κύβος είναι τώρα $8 = 2^3$ φορές μεγαλύτερος (δηλ. 8 αρχικοί κύβοι δύνανται να τοποθετηθούν επί του αρχικού κύβου).



$N = 27, r = 1/3, d = 3$

Διάσταση 3

- Θεωρούμε κύβο μοναδιαίας ακμής.
- Εκτινάσσουμε τον κύβο κατά έναν παράγοντα δύο. Ο κύβος είναι τώρα $8 = 2^3$ φορές μεγαλύτερος (δηλ. 8 αρχικοί κύβοι δύνανται να τοποθετηθούν επί του αρχικού κύβου).
- Εκτινάσσοντας τον κύβο κατά έναν παράγοντα τρία, ο κύβος είναι τώρα $27 = 3^3$ φορές μεγαλύτερος.



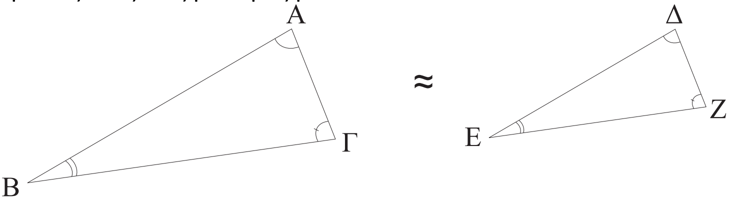
$N = 27, r = 1/3, d = 3$

- Όταν μιλούσαμε για τρίγωνα στο σχολείο εννοούσαμε συνήθως επίπεδα τρίγωνα, δηλ. τρίγωνα κατασκευασμένα στο επίπεδο.

- Όταν μιλούσαμε για τρίγωνα στο σχολείο εννοούσαμε συνήθως επίπεδα τρίγωνα, δηλ. τρίγωνα κατασκευασμένα στο επίπεδο.
- Για να συγκρίνουμε δύο τρίγωνα, έπρεπε και τα δύο να ευρίσκονται επί του ιδίου επιπέδου.

- Όταν μιλούσαμε για τρίγωνα στο σχολείο εννοούσαμε συνήθως επίπεδα τρίγωνα, δηλ. τρίγωνα κατασκευασμένα στο επίπεδο.
- Για να συγκρίνουμε δύο τρίγωνα, έπρεπε και τα δύο να ευρίσκονται επί του ιδίου επιπέδου.
- Θυμηθείτε τα *όμοια τρίγωνα*.

- Όταν μιλούσαμε για τρίγωνα στο σχολείο εννοούσαμε συνήθως επίπεδα τρίγωνα, δηλ. τρίγωνα κατασκευασμένα στο επίπεδο.
- Για να συγκρίνουμε δύο τρίγωνα, έπρεπε και τα δύο να ευρίσκονται επί του ιδίου επιπέδου.
- Θυμηθείτε τα *όμοια τρίγωνα*.
- Δύο τρίγωνα λέγονται όμοια, όταν είναι ισογώνια, δηλ. όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.



Δύο όμοια τρίγωνα.

- Ήρθε η ώρα να γενικεύσουμε την ιδιότητα της ομοιότητος, αφού προηγουμένως ορίσουμε την έννοια του μετρικού χώρου.

- Ήρθε η ώρα να γενικεύσουμε την ιδιότητα της ομοιότητος, αφού προηγουμένως ορίσουμε την έννοια του μετρικού χώρου.
- Στα μαθηματικά ο όρος *χώρος* παραπέμπει συνήθως σε ένα σύνολο έχον κάποια πρόσθετη δομή, όπου δομή σημαίνει ότι υπάρχουν κάποιου είδους σχέσεις μεταξύ των μελών του συνόλου.

- Ήρθε η ώρα να γενικεύσουμε την ιδιότητα της ομοιότητος, αφού προηγουμένως ορίσουμε την έννοια του μετρικού χώρου.
- Στα μαθηματικά ο όρος *χώρος* παραπέμπει συνήθως σε ένα σύνολο έχον κάποια πρόσθετη δομή, όπου δομή σημαίνει ότι υπάρχουν κάποιου είδους σχέσεις μεταξύ των μελών του συνόλου.
- Ένας μετρικός χώρος είναι ένα σύνολο όπου ορίζεται μία έννοια απόστασης μεταξύ των μελών (στοιχείων) αυτού.

- Ήρθε η ώρα να γενικεύσουμε την ιδιότητα της ομοιότητος, αφού προηγουμένως ορίσουμε την έννοια του μετρικού χώρου.
- Στα μαθηματικά ο όρος *χώρος* παραπέμπει συνήθως σε ένα σύνολο έχον κάποια πρόσθετη δομή, όπου δομή σημαίνει ότι υπάρχουν κάποιου είδους σχέσεις μεταξύ των μελών του συνόλου.
- Ένας μετρικός χώρος είναι ένα σύνολο όπου ορίζεται μία έννοια απόστασης μεταξύ των μελών (στοιχείων) αυτού.
- Ο μετρικός χώρος ο οποίος αντιστοιχεί περισσότερο στη διαισθητική μας κατανόηση του χώρου είναι ο τριδιάστατος Ευκλείδειος χώρος.

- Ήρθε η ώρα να γενικεύσουμε την ιδιότητα της ομοιότητος, αφού προηγουμένως ορίσουμε την έννοια του μετρικού χώρου.
- Στα μαθηματικά ο όρος *χώρος* παραπέμπει συνήθως σε ένα σύνολο έχον κάποια πρόσθετη δομή, όπου δομή σημαίνει ότι υπάρχουν κάποιου είδους σχέσεις μεταξύ των μελών του συνόλου.
- Ένας μετρικός χώρος είναι ένα σύνολο όπου ορίζεται μία έννοια απόστασης μεταξύ των μελών (στοιχείων) αυτού.
- Ο μετρικός χώρος ο οποίος αντιστοιχεί περισσότερο στη διαισθητική μας κατανόηση του χώρου είναι ο τριδιάστατος Ευκλείδειος χώρος.
- Η Ευκλείδεια μετρική του χώρου αυτού ορίζει ως απόσταση μεταξύ δύο σημείων το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος το οποίο τα συνδέει.

Μετρικοί χώροι

Ένα μη κενό σύνολο V γίνεται **μετρικός χώρος** όταν εφοδιασθεί με μία απεικόνιση (μετρική) της μορφής: $\rho\colon V \times V \to \mathbb{R}$ με τύπο $(x, y) \mapsto \rho(x, y)$, η οποία για κάθε $x, y, z \in V$ έχει τις ιδιότητες:

(M1) $\rho(x, y) \geq 0$, (μη αρνητικότητα)

και

$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (ταυτότητα)

(M2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (συμμετρία)

(M3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (τριγωνική ανισότητα)

Τα στοιχεία του V καλούνται *σημεία* και ο μη αρνητικός, πραγματικός αριθμός $\rho(x, y)$ *απόσταση* από το σημείο x προς το σημείο y.

- Το σύνολο $\mathbb{R}$ όλων των πραγματικών αριθμών με τη *συνήθη μετρική* $\rho(x, y) = |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι ένας μετρικός χώρος, ο οποίος καλείται *πραγματική ευθεία*.

- Το σύνολο $\mathbb{R}$ όλων των πραγματικών αριθμών με τη *συνήθη μετρική* $\rho(x, y) = |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι ένας μετρικός χώρος, ο οποίος καλείται *πραγματική ευθεία*.
- Δια έναν φυσικό αριθμό n θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ με n παράγοντες ίσους με το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

- Το σύνολο $\mathbb{R}$ όλων των πραγματικών αριθμών με τη *συνήθη μετρική* $\rho(x, y) = |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι ένας μετρικός χώρος, ο οποίος καλείται *πραγματική ευθεία*.
- Δια έναν φυσικό αριθμό n θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ με n παράγοντες ίσους με το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.
- Κάθε στοιχείο $\vec{x}$ του $\mathbb{R}^n$ έχει την μορφή $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, όπου $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ είναι μία διατεταγμένη πλειάδα n πραγματικών αριθμών.

- Το σύνολο $\mathbb{R}$ όλων των πραγματικών αριθμών με τη *συνήθη μετρική* $\rho(x, y) = |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι ένας μετρικός χώρος, ο οποίος καλείται *πραγματική ευθεία*.
- Δια έναν φυσικό αριθμό n θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ με n παράγοντες ίσους με το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.
- Κάθε στοιχείο $\vec{x}$ του $\mathbb{R}^n$ έχει την μορφή $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, όπου $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ είναι μία διατεταγμένη πλειάδα n πραγματικών αριθμών.
- Επομένως, για κάθε $n = 1, 2, \ldots,$ το σύνολο των n διατεταγμένων πραγματικών αριθμών είναι το

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.\end{aligned}$$

- Ορίζουμε τις μετρικές

$$\rho_1(\vec{x},\vec{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|,$$

και

$$\rho_2(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

- Ορίζουμε τις μετρικές

$$\rho_1(\vec{x},\vec{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|,$$

  και

$$\rho_2(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

- Η ρ_2 ονομάζεται *Ευκλείδεια ή Πυθαγόρεια μετρική*, η ρ_1 ονομάζεται *Ιπποδάμειος μετρική* ή *μετρική κυτίου* ή *μετρική οικοδομικού τετραγώνου* ή *μετρική Manhattan* ή *μετρική τροχοδρόμησης*.

- Ορίζουμε τις μετρικές

$$\rho_1(\vec{x},\vec{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|,$$

και

$$\rho_2(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

- Η ρ_2 ονομάζεται *Ευκλείδεια ή Πυθαγόρεια μετρική*, η ρ_1 ονομάζεται *Ιπποδάμειος μετρική* ή *μετρική κυτίου* ή *μετρική οικοδομικού τετραγώνου* ή *μετρική Manhattan* ή *μετρική τροχοδρόμησης*.
- Η

$$\rho_\infty(\vec{x},\vec{y}) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

ονομάζεται *απόσταση σκακιέρας* και αντιστοιχεί στο ελάχιστο πλήθος των κινήσεων οι οποίες απαιτούνται από το πιόνι του Βασιλιά, ώστε να μετακινηθεί από το x προς το y, δηλαδή μια διαγώνια μετακίνηση προσμετράται όπως και μία οριζόντια.

- Ορίζουμε τις μετρικές

$$\rho_1(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|,$$

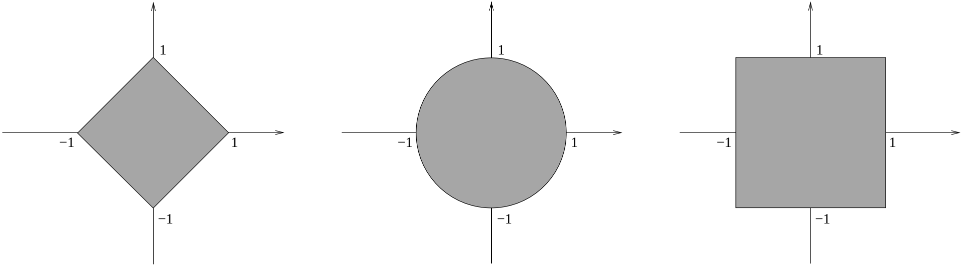
και

$$\rho_2(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

- Η ρ_2 ονομάζεται *Ευκλείδεια ή Πυθαγόρεια μετρική*, η ρ_1 ονομάζεται *Ιπποδάμειος μετρική* ή *μετρική κυτίου* ή *μετρική οικοδομικού τετραγώνου* ή *μετρική Manhattan* ή *μετρική τροχοδρόμησης*.
- Η

$$\rho_\infty(\vec{x}, \vec{y}) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

ονομάζεται *απόσταση σκακιέρας* και αντιστοιχεί στο ελάχιστο πλήθος των κινήσεων οι οποίες απαιτούνται από το πιόνι του Βασιλιά, ώστε να μετακινηθεί από το x προς το y, δηλαδή μια διαγώνια μετακίνηση προσμετράται όπως και μία οριζόντια.
- Εάν $\vec{x} = (2, 2, 2, 2)$ και $\vec{y} = (0, 0, 1, 1)$, τότε $\rho_1(\vec{x}, \vec{y}) = 6$, $\rho_2(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{10}$ και $\rho_\infty(\vec{x}, \vec{y}) = 2$.



(α) (β) (γ)

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων x για τα οποία $\rho_p(x,0) \leq 1$; (α) $p=1$, (β) $p=2$, (γ) $p=\infty$.

- Μία απεικόνιση $f\colon X \to Y$, όπου (X,ρ) και (Y,σ) είναι μετρικοί χώροι, ονομάζεται *ομοιότητα* με *λόγο ομοιότητος* r, εάν $\sigma(f(x),f(y)) = r\,\rho(x,y)$ για κάθε $x,y \in X$ και κάποιο σταθερό $r \in \mathbb{R}_+$.

- Μία απεικόνιση $f\colon X \to Y$, όπου (X, ρ) και (Y, σ) είναι μετρικοί χώροι, ονομάζεται *ομοιότητα* με *λόγο ομοιότητος* r, εάν $\sigma(f(x), f(y)) = r\,\rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$ και κάποιο σταθερό $r \in \mathbb{R}_+$.
- Εάν ο λόγος ομοιότητος είναι μεγαλύτερος της μονάδος έχουμε *διαστολή*, ενώ εάν ο λόγος ομοιότητος είναι μικρότερος της μονάδος έχουμε *συστολή*.

- Μία απεικόνιση $f\colon X \to Y$, όπου (X,ρ) και (Y,σ) είναι μετρικοί χώροι, ονομάζεται *ομοιότητα* με *λόγο ομοιότητος* r, εάν $\sigma(f(x),f(y)) = r\,\rho(x,y)$ για κάθε $x,y \in X$ και κάποιο σταθερό $r \in \mathbb{R}_+$.
- Εάν ο λόγος ομοιότητος είναι μεγαλύτερος της μονάδος έχουμε *διαστολή*, ενώ εάν ο λόγος ομοιότητος είναι μικρότερος της μονάδος έχουμε *συστολή*.
- Εάν $r = 1$, τότε η f ονομάζεται *ισομετρία*.

- Μία απεικόνιση $f\colon X \to Y$, όπου (X, ρ) και (Y, σ) είναι μετρικοί χώροι, ονομάζεται *ομοιότητα* με *λόγο ομοιότητος* r, εάν $\sigma(f(x), f(y)) = r\,\rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$ και κάποιο σταθερό $r \in \mathbb{R}_+$.
- Εάν ο λόγος ομοιότητος είναι μεγαλύτερος της μονάδος έχουμε *διαστολή*, ενώ εάν ο λόγος ομοιότητος είναι μικρότερος της μονάδος έχουμε *συστολή*.
- Εάν $r = 1$, τότε η f ονομάζεται *ισομετρία*.
- Μία απεικόνιση ενός συνόλου εντός του εαυτού του ονομάζεται **μετασχηματισμός**.

- Μία απεικόνιση $f\colon X \to Y$, όπου (X, ρ) και (Y, σ) είναι μετρικοί χώροι, ονομάζεται *ομοιότητα* με *λόγο ομοιότητος* r, εάν $\sigma(f(x), f(y)) = r\,\rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$ και κάποιο σταθερό $r \in \mathbb{R}_+$.
- Εάν ο λόγος ομοιότητος είναι μεγαλύτερος της μονάδος έχουμε *διαστολή*, ενώ εάν ο λόγος ομοιότητος είναι μικρότερος της μονάδος έχουμε *συστολή*.
- Εάν $r = 1$, τότε η f ονομάζεται *ισομετρία*.
- Μία απεικόνιση ενός συνόλου εντός του εαυτού του ονομάζεται **μετασχηματισμός**.
- Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας επίπεδος μετασχηματισμός ο οποίος στέλνει κάθε μία κορυφή του ενός τριγώνου προς την αντίστοιχη κορυφή του άλλου ώστε το μήκος των πλευρών του δευτέρου τριγώνου να προκύπτει από το μήκος των πλευρών του πρώτου πολλαπλασιασμένο επί τον λόγο ομοιότητος.

Ομοιότητα προς εαυτόν

- Ένα *αυτοόμοιο* αντικείμενο είναι ακριβώς ή περίπου όμοιο προς ένα μέρος του ιδίου (δηλ. το όλον έχει το ίδιο σχήμα με ένα ή περισσότερα εκ των μερών).

Ομοιότητα προς εαυτόν

- Ένα *αυτοόμοιο* αντικείμενο είναι ακριβώς ή περίπου όμοιο προς ένα μέρος του ιδίου (δηλ. το όλον έχει το ίδιο σχήμα με ένα ή περισσότερα εκ των μερών).
- Πολλά αντικείμενα στον πραγματικό κόσμο, όπως οι ακτογραμμές, είναι *στατιστικώς αυτοόμοια*: μέρη τους δεικνύουν τις ίδιες στατιστικές ιδιότητες σε πολλές κλίμακες.

Ομοιότητα προς εαυτόν

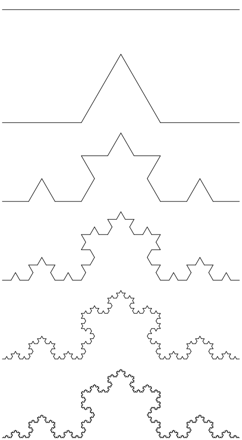
- Ένα *αυτοόμοιο* αντικείμενο είναι ακριβώς ή περίπου όμοιο προς ένα μέρος του ιδίου (δηλ. το όλον έχει το ίδιο σχήμα με ένα ή περισσότερα εκ των μερών).
- Πολλά αντικείμενα στον πραγματικό κόσμο, όπως οι ακτογραμμές, είναι *στατιστικώς αυτοόμοια*: μέρη τους δεικνύουν τις ίδιες στατιστικές ιδιότητες σε πολλές κλίμακες.
- Η αυτοομοιότητα είναι μία χαρακτηριστική ιδιότητα των μορφοκλασμάτων.

Ομοιότητα προς εαυτόν

- Ένα *αυτοόμοιο* αντικείμενο είναι ακριβώς ή περίπου όμοιο προς ένα μέρος του ιδίου (δηλ. το όλον έχει το ίδιο σχήμα με ένα ή περισσότερα εκ των μερών).
- Πολλά αντικείμενα στον πραγματικό κόσμο, όπως οι ακτογραμμές, είναι *στατιστικώς αυτοόμοια*: μέρη τους δεικνύουν τις ίδιες στατιστικές ιδιότητες σε πολλές κλίμακες.
- Η αυτοομοιότητα είναι μία χαρακτηριστική ιδιότητα των μορφοκλασμάτων.
- Το *αναλλοίωτον υπό κλίμακα* είναι μια ακριβής μορφή της αυτοομοιότητας όπου σε οιαδήποτε μεγέθυνση υπάρχει ένα μικρότερο κομμάτι του αντικειμένου όμοιο προς το όλον.

Η καμπύλη Koch

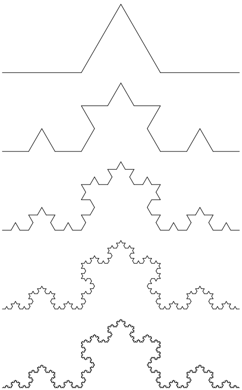
- Το απλό ευθύγραμμο τμήμα στο Βήμα 0 χωρίζεται σε τέσσερα τμήματα ίσου μήκους στο Βήμα 1.



Η καμπύλη Koch

- Το απλό ευθύγραμμο τμήμα στο Βήμα 0 χωρίζεται σε τέσσερα τμήματα ίσου μήκους στο Βήμα 1.
- Αυτός ο ίδιος «κανών» εφαρμόζεται άπειρες φορές με αποτέλεσμα ένα σχήμα άπειρης περιμέτρου, διότι

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty.$$

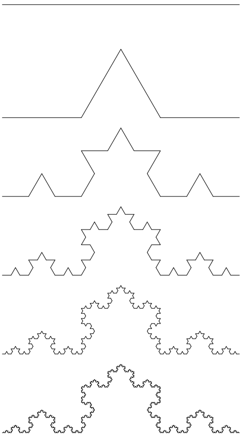


Η καμπύλη Koch

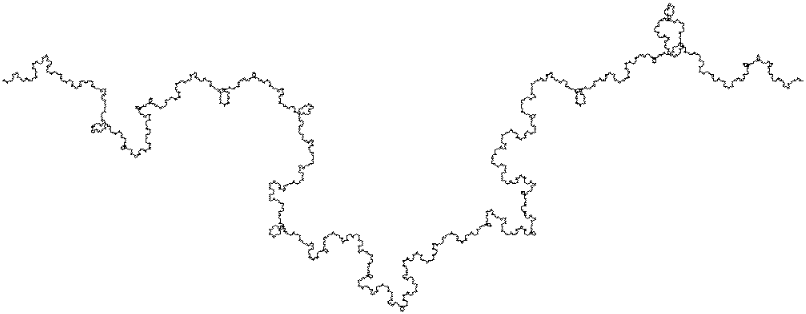
- Το απλό ευθύγραμμο τμήμα στο Βήμα 0 χωρίζεται σε τέσσερα τμήματα ίσου μήκους στο Βήμα 1.
- Αυτός ο ίδιος «κανών» εφαρμόζεται άπειρες φορές με αποτέλεσμα ένα σχήμα άπειρης περιμέτρου, διότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty.$$

- Τα πέντε πρώτα στάδια φαίνονται εκ δεξιών.



Τυχαίως τοποθετημένος γεννήτωρ



- Θεωρούμε μία καμπύλη Koch, όπου εκάστη εκ των 4 νέων γραμμών είναι το 1/3 του μήκους της παλαιάς γραμμής.

- Θεωρούμε μία καμπύλη Koch, όπου εκάστη εκ των 4 νέων γραμμών είναι το 1/3 του μήκους της παλαιάς γραμμής.
- Εκτινάσσοντας την καμπύλη Koch κατά έναν παράγοντα 3 λαμβάνουμε μία καμπύλη 4 φορές μακρύτερη (μία εκ των παλαιών καμπύλων δύναται να τοποθετηθεί εφ’ εκάστου των 4 τμημάτων).

- Θεωρούμε μία καμπύλη Koch, όπου εκάστη εκ των 4 νέων γραμμών είναι το 1/3 του μήκους της παλαιάς γραμμής.
- Εκτινάσσοντας την καμπύλη Koch κατά έναν παράγοντα 3 λαμβάνουμε μία καμπύλη 4 φορές μακρύτερη (μία εκ των παλαιών καμπύλων δύναται να τοποθετηθεί εφ' εκάστου των 4 τμημάτων).
- Επομένως $4 = 3^d$ ή

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3}.$$

Διάσταση ομοιότητος

- Ένα σύνολο F καλείται *αυτοόμοιο*, εάν

$$F = w_1(F) \cup w_2(F) \cup \cdots \cup w_N(F),$$

όπου w_i είναι ομοιότητες με κοινό λόγο ομοιότητας r και τα σύνολα $w_i(F)$ «δεν επικαλύπτονται».

Διάσταση ομοιότητος

- Ένα σύνολο F καλείται *αυτοόμοιο*, εάν

$$F = w_1(F) \cup w_2(F) \cup \cdots \cup w_N(F),$$

όπου w_i είναι ομοιότητες με κοινό λόγο ομοιότητας r και τα σύνολα $w_i(F)$ «δεν επικαλύπτονται».

- Για ένα αυτοόμοιο σχήμα F κατασκευασθέν από N αντίγραφα του εαυτού του, όπου έκαστο κλιμακούται από μία ομοιότητα με λόγο ομοιότητος r, η *διάσταση ομοιότητας* είναι

$$\dim_s F = \frac{\log N}{\log(1/r)}.$$

Παραδείγματα

- Το γράφημα της συνάρτησης Weierstrass $2 + \frac{\log a}{\log b}$ υπό περιορισμούς
- Το σύνολο Cantor
  $N = 2, r = 1/3, \dim_s \mathcal{C} = \log 2/\log 3 = 0,630929\ldots$
- Η χιονονιφάς Koch
  $N = 4, r = 1/3, \dim_s K = \log 4/\log 3 = 1,261859507\ldots$
- Ο ηθμός Sierpiński
  $N = 3, r = 1/2, \dim_s S = \log 3/\log 2 = 1,584962500\ldots$
- Ο τάπης Sierpiński
  $N = 8, r = 1/3, \dim_s C = \log 8/\log 3 = 1,892789260\ldots$
- Η καμπύλη Peano $N = 9, r = 1/3, \dim_s P = \log 9/\log 3 = 2$
- Το τετράεδρο Sierpiński $N = 4, r = 1/2, \dim_s T = \log 4/\log 2 = 2$
- Ο σπόγγος Menger
  $N = 20, r = 1/3, \dim_s M = \log 20/\log 3 = 2,726833028\ldots$

Η διάσταση καταμέτρησης κυτίων

- Έστω A σύνολο ενός μετρικού χώρου.

Η διάσταση καταμέτρησης κυτίων

- Έστω A σύνολο ενός μετρικού χώρου.
- Για κάθε $\varepsilon > 0$, έστω $N(A, \varepsilon)$ το ελάχιστο απαιτούμενο πλήθος κλειστών σφαιρών ακτίνος $\varepsilon > 0$ προς κάλυψη του A.

Η διάσταση καταμέτρησης κυτίων

- Έστω A σύνολο ενός μετρικού χώρου.
- Για κάθε $\varepsilon > 0$, έστω $N(A, \varepsilon)$ το ελάχιστο απαιτούμενο πλήθος κλειστών σφαιρών ακτίνος $\varepsilon > 0$ προς κάλυψη του A.
- Εάν

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{\ln(1/N(A, \varepsilon))}{\ln(\varepsilon)} \right\}$$

υπάρχει, τότε D είναι η *διάσταση καταμέτρησης κυτίων* του A.

Εκτιμώντας την διάσταση καταμέτρησης κυτίων της ακτής της Μεγάλης Βρετανίας

Η διάσταση Hausdorff-Besicovitch

- Έστω X ένας μετρικός χώρος. Εάν $S \subset X$ και $d \in [0, +\infty)$, το *περιεχόμενο Hausdorff* διάστασης d του S ορίζεται ως

$$C_H^d(S) = \inf \left\{ \sum_i r_i^d : \text{υπάρχει κάλυμμα του } S \text{ εκ σφαιρών ακτίνος } r_i > 0 \right\}.$$

Η διάσταση Hausdorff-Besicovitch

- Έστω X ένας μετρικός χώρος. Εάν $S \subset X$ και $d \in [0, +\infty)$, το *περιεχόμενο Hausdorff* διάστασης d του S ορίζεται ως

$$C_H^d(S) = \inf \left\{ \sum_i r_i^d : \text{υπάρχει κάλυμμα του } S \text{ εκ σφαιρών ακτίνος } r_i > 0 \right\}.$$

- Με άλλα λόγια, $C_H^d(S)$ είναι το μέγιστο κατώτερο φράγμα του συνόλου των αριθμών $\delta \geq 0$ τέτοιο, ώστε υπάρχει κάποια (δεδειγμένη) συλλογή σφαιρών $\{B(x_i, r_i) : i \in I\}$ καλύπτουσα το S με $r_i > 0$ για κάθε $i \in I$ ικανοποιούσα την

$$\sum_{i \in I} r_i^d > \delta.$$

Η διάσταση Hausdorff-Besicovitch

- Έστω X ένας μετρικός χώρος. Εάν $S \subset X$ και $d \in [0, +\infty)$, το *περιεχόμενο Hausdorff* διάστασης d του S ορίζεται ως

$$C_H^d(S) = \inf \left\{ \sum_i r_i^d : \text{υπάρχει κάλυμμα του } S \text{ εκ σφαιρών ακτίνος } r_i > 0 \right\}.$$

- Με άλλα λόγια, $C_H^d(S)$ είναι το μέγιστο κατώτερο φράγμα του συνόλου των αριθμών $\delta \geq 0$ τέτοιο, ώστε υπάρχει κάποια (δεδειγμένη) συλλογή σφαιρών $\{B(x_i, r_i) : i \in I\}$ καλύπτουσα το S με $r_i > 0$ για κάθε $i \in I$ ικανοποιούσα την

$$\sum_{i \in I} r_i^d > \delta.$$

- Η *διάσταση Hausdorff* του S ορίζεται ως

$$\dim_H(S) = \sup\{d \geq 0 : C_H^d(S) = \infty\} = \inf\{d \geq 0 : C_H^d(S) = 0\}.$$

Παραδείγματα

- Έστω F ένας ισόπεδος δίσκος μοναδιαίας ακτίνος εν $\mathbb{R}^3$.
- Από οικείες ιδιότητες του μήκους, του εμβαδού και του όγκου $C_H^1(F) = \text{length}(F) = \infty$, $0 < C_H^2(F) = (4/\pi)\times \text{area}(F) = 4 < \infty$ και $C_H^3(F) = (6/\pi)\times \text{vol}(F) = 0$.
- Άρα, $\dim_H(F) = 2$, με $C_H^d(F) = \infty$, εάν $d < 2$ και $C_H^d(F) = 0$, εάν $d > 2$.

Φυσική ερμηνεία

- Η ποσότητα της μεταβολής εις τις λεπτομέρειες του αντικειμένου.

Φυσική ερμηνεία

- Η ποσότητα της μεταβολής εις τις λεπτομέρειες του αντικειμένου.
- Ένα μέτρο της τραχύτητας (κατακερματισμού) ενός αντικειμένου.

Φυσική ερμηνεία

- Η ποσότητα της μεταβολής εις τις λεπτομέρειες του αντικειμένου.
- Ένα μέτρο της τραχύτητας (κατακερματισμού) ενός αντικειμένου.
- Η έννοια εισήχθη το 1918 από τον Γερμανό μαθηματικό Felix Hausdorff.

Φυσική ερμηνεία

- Η ποσότητα της μεταβολής εις τις λεπτομέρειες του αντικειμένου.
- Ένα μέτρο της τραχύτητας (κατακερματισμού) ενός αντικειμένου.
- Η έννοια εισήχθη το 1918 από τον Γερμανό μαθηματικό Felix Hausdorff.
- Πολλές από τις χρησιμοποιηθείσες τεχνικές αναπτύξεις προς υπολογισμό της διάστασης Hausdorff για πολύ ακανόνιστα σύνολα εκτήθησαν από τον Ρώσο μαθηματικό Abram Samoilovitch Besicovitch.

Η έννοια των μορφοκλασμάτων (fractals)

- Πρόβλημα με τα μήκη των ακτών, συνόρων κ.ά. λόγω «απείρου» χρόνου μέτρησης.

Η έννοια των μορφοκλασμάτων (fractals)

- Πρόβλημα με τα μήκη των ακτών, συνόρων κ.ά. λόγω «απείρου» χρόνου μέτρησης.
- O Benoit Mandelbrot κατόρθωσε, με τη βοήθεια ενός Η/Υ, να συλλάβει την πρώτη εικόνα αυτής της νέας γεωμετρίας: Ένα σύνολο είναι μορφοκλασματικό, εάν η Hausdorff - Besicovitch διάστασή του είναι γνησίως μεγαλύτερη της τοπολογικής του διάστασης.

Η έννοια των μορφοκλασμάτων (fractals)

- Πρόβλημα με τα μήκη των ακτών, συνόρων κ.ά. λόγω «απείρου» χρόνου μέτρησης.
- Ο Benoit Mandelbrot κατόρθωσε, με τη βοήθεια ενός Η/Υ, να συλλάβει την πρώτη εικόνα αυτής της νέας γεωμετρίας: Ένα σύνολο είναι μορφοκλασματικό, εάν η Hausdorff - Besicovitch διάστασή του είναι γνησίως μεγαλύτερη της τοπολογικής του διάστασης.
- Αν η λεπτομέρεια είναι ασύμμετρη, τότε έχουμε «πολυμορφόκλασμα».

Η έννοια των μορφοκλασμάτων (fractals)

- Πρόβλημα με τα μήκη των ακτών, συνόρων κ.ά. λόγω «απείρου» χρόνου μέτρησης.
- O Benoit Mandelbrot κατόρθωσε, με τη βοήθεια ενός Η/Υ, να συλλάβει την πρώτη εικόνα αυτής της νέας γεωμετρίας: Ένα σύνολο είναι μορφοκλασματικό, εάν η Hausdorff - Besicovitch διάστασή του είναι γνησίως μεγαλύτερη της τοπολογικής του διάστασης.
- Αν η λεπτομέρεια είναι ασύμμετρη, τότε έχουμε «πολυμορφόκλασμα».
- Η κυριότερη διαδικασία η οποία ακολουθείται κατά τη δημιουργία τέτοιων αντικειμένων ή συνόλων είναι η «επανάληψη» ή η, συνώνυμη προς αυτή, «ανάδραση».

Η έννοια των μορφοκλασμάτων (fractals)

- Πρόβλημα με τα μήκη των ακτών, συνόρων κ.ά. λόγω «απείρου» χρόνου μέτρησης.
- Ο Benoit Mandelbrot κατόρθωσε, με τη βοήθεια ενός Η/Υ, να συλλάβει την πρώτη εικόνα αυτής της νέας γεωμετρίας: Ένα σύνολο είναι μορφοκλασματικό, εάν η Hausdorff - Besicovitch διάστασή του είναι γνησίως μεγαλύτερη της τοπολογικής του διάστασης.
- Αν η λεπτομέρεια είναι ασύμμετρη, τότε έχουμε «πολυμορφόκλασμα».
- Η κυριότερη διαδικασία η οποία ακολουθείται κατά τη δημιουργία τέτοιων αντικειμένων ή συνόλων είναι η «επανάληψη» ή η, συνώνυμη προς αυτή, «ανάδραση».
- Η γεωμετρία των μορφοκλασμάτων είναι η γεωμετρία του χάους.

Οπτικά ερεθίσματα

Συμφώνως προς τον Falconer, αντί να ορίζονται αυστηρώς, τα μορφοκλάσματα πρέπει, εκτός του ότι είναι πουθενά διαφορίσιμα και ικανά να έχουν μία μορφοκλασματική διάσταση, να χαρακτηρίζονται γενικώς από μία Gestalt (μορφή) των ακόλουθων χαρακτηριστικών:

- Αυτοομοιότητα

Οπτικά ερεθίσματα

Συμφώνως προς τον Falconer, αντί να ορίζονται αυστηρώς, τα μορφοκλάσματα πρέπει, εκτός του ότι είναι πουθενά διαφορίσιμα και ικανά να έχουν μία μορφοκλασματική διάσταση, να χαρακτηρίζονται γενικώς από μία Gestalt (μορφή) των ακόλουθων χαρακτηριστικών:

- Αυτοομοιότητα
- Λεπτή ή λεπτομερής δομή σε αυθαιρέτως μικρές κλίμακες

Οπτικά ερεθίσματα

Συμφώνως προς τον Falconer, αντί να ορίζονται αυστηρώς, τα μορφοκλάσματα πρέπει, εκτός του ότι είναι πουθενά διαφορίσιμα και ικανά να έχουν μία μορφοκλασματική διάσταση, να χαρακτηρίζονται γενικώς από μία Gestalt (μορφή) των ακόλουθων χαρακτηριστικών:

- Αυτοομοιότητα
- Λεπτή ή λεπτομερής δομή σε αυθαιρέτως μικρές κλίμακες
- Τοπική ή γενική μη κανονικότητα

Οπτικά ερεθίσματα

Συμφώνως προς τον Falconer, αντί να ορίζονται αυστηρώς, τα μορφοκλάσματα πρέπει, εκτός του ότι είναι πουθενά διαφορίσιμα και ικανά να έχουν μία μορφοκλασματική διάσταση, να χαρακτηρίζονται γενικώς από μία Gestalt (μορφή) των ακόλουθων χαρακτηριστικών:

- Αυτοομοιότητα
- Λεπτή ή λεπτομερής δομή σε αυθαιρέτως μικρές κλίμακες
- Τοπική ή γενική μη κανονικότητα
- Απλοί ή αναγωγικοί ορισμοί

Ο χώρος όπου ζουν τα μορφοκλάσματα

- Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Τότε, $\mathcal{H}(X)$ συμβολίζει το σύνολο του οποίου σημεία είναι τα συμπαγή, διαφορετικά του κενού, υποσύνολα του X, δηλ.

$$\mathcal{H}(X) = \{\emptyset \neq A \subset X : A \text{ συμπαγές}\}.$$

Ο χώρος όπου ζουν τα μορφοκλάσματα

- Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Τότε, $\mathcal{H}(X)$ συμβολίζει το σύνολο του οποίου σημεία είναι τα συμπαγή, διαφορετικά του κενού, υποσύνολα του X, δηλ.

$$\mathcal{H}(X) = \{\emptyset \neq A \subset X : A \text{ συμπαγές}\}.$$

- Ενίοτε το $\mathcal{H}(X)$ αναφέρεται ως ο «χώρος των μορφοκλασμάτων εν X» (αλλά σημειώσατε ότι δεν είναι όλα τα μέλη του $\mathcal{H}(X)$ μορφοκλασματικά).

Ο χώρος όπου ζουν τα μορφοκλάσματα

- Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Τότε, $\mathcal{H}(X)$ συμβολίζει το σύνολο του οποίου σημεία είναι τα συμπαγή, διαφορετικά του κενού, υποσύνολα του X, δηλ.

$$\mathcal{H}(X) = \{\emptyset \neq A \subset X : A \text{ συμπαγές}\}.$$

- Ενίοτε το $\mathcal{H}(X)$ αναφέρεται ως ο «χώρος των μορφοκλασμάτων εν X» (αλλά σημειώσατε ότι δεν είναι όλα τα μέλη του $\mathcal{H}(X)$ μορφοκλασματικά).
- Η διαφορά μεταξύ ενός υποσυνόλου του $\mathcal{H}(X)$ και ενός μη κενού, συμπαγούς υποσυνόλου του X είναι ότι, το $\mathcal{H}(X)$ είναι ένα σύνολο συνόλων, άρα κάθε υποσύνολό του είναι ένα σύνολο συμπαγών συνόλων.

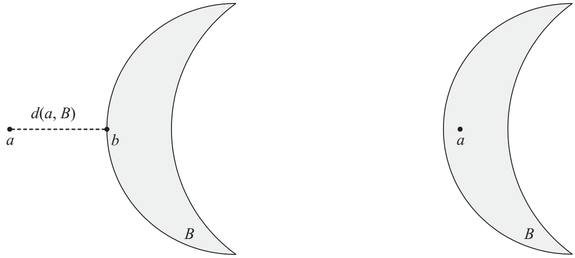
Απόσταση μεταξύ σημείου και συνόλου

- Το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών $\{\rho(x, y) : y \in B\}$, όπου $x \in X$ και $B \in \mathcal{H}(X)$ έχει μία ελάχιστη τιμή.

Απόσταση μεταξύ σημείου και συνόλου

- Το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών $\{\rho(x, y) : y \in B\}$, όπου $x \in X$ και $B \in \mathcal{H}(X)$ έχει μία ελάχιστη τιμή.
- Τότε, ως *απόσταση του σημείου x από το υποσύνολο B* θεωρούμε την

$$\min\{\rho(x, y) : y \in B\}.$$



$d(a, B) = \rho(a, b)$ $\qquad$ $d(a, B) = 0$

Αποστάσεις μεταξύ συνόλων

- Έστωσαν A και B δύο μη κενά, συμπαγή υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, ρ).

Αποστάσεις μεταξύ συνόλων

- Έστωσαν A και B δύο μη κενά, συμπαγή υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, ρ).
- Ορίζουμε ως

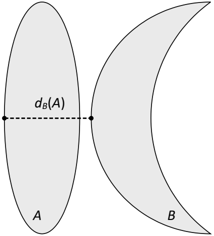
$$d_A(B) = \max\{d(x, A) : x \in B\}$$

και

$$d_B(A) = \max\{d(x, B) : x \in A\}.$$

Αποστάσεις μεταξύ συνόλων

- Έστωσαν A και B δύο μη κενά, συμπαγή υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, ρ).
- Ορίζουμε ως
$$d_A(B) = \max\{d(x, A) : x \in B\}$$
και
$$d_B(A) = \max\{d(x, B) : x \in A\}.$$
- Η συνάρτηση $d_B(A)$ ονομάζεται συνήθως *κατευθυνόμενη απόσταση Hausdorff* από το A προς το B.



Η μετρική Hausdorff

- Μετρά το πόσο απέχουν μεταξύ τους δύο υποσύνολα ενός μετρικού χώρου.

Η μετρική Hausdorff

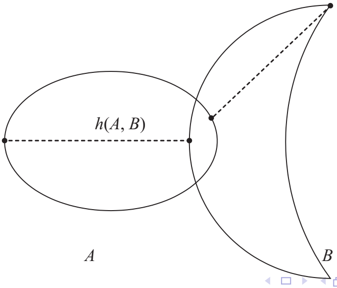
- Μετρά το πόσο απέχουν μεταξύ τους δύο υποσύνολα ενός μετρικού χώρου.
- Μετατρέπει το σύνολο των μη κενών, συμπαγών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου εις έναν αυτοτελή μετρικό χώρο.

Η μετρική Hausdorff

- Μετρά το πόσο απέχουν μεταξύ τους δύο υποσύνολα ενός μετρικού χώρου.
- Μετατρέπει το σύνολο των μη κενών, συμπαγών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου εις έναν αυτοτελή μετρικό χώρο.
- Εάν

$$h(A,B) = \max\{d_A(B), d_B(A)\},$$

τότε το $(\mathcal{H}(X), h)$ είναι ένας μετρικός χώρος.



- Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, με f^k συμβολίζουμε τη σύνθεση της f με τον εαυτό της k φορές, δηλ.

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ παράγοντες}},$$

όπου f^0 είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

- Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, με f^k συμβολίζουμε τη σύνθεση της f με τον εαυτό της k φορές, δηλ.

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ παράγοντες}},$$

όπου f^0 είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

- Σύστημα: Ένα σύνολο αλληλεξαρτημένων, αλληλεπιδρώντων και συνεργαζομένων μεταξύ τους στοιχείων ή τμημάτων προς επίτευξη συγκεκριμένου στόχου ή σειρά στόχων.

- Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, με f^k συμβολίζουμε τη σύνθεση της f με τον εαυτό της k φορές, δηλ.

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ παράγοντες}},$$

όπου f^0 είναι η ταυτοτική απεικόνιση.
- Σύστημα: Ένα σύνολο αλληλεξαρτημένων, αλληλεπιδρώντων και συνεργαζομένων μεταξύ τους στοιχείων ή τμημάτων προς επίτευξη συγκεκριμένου στόχου ή σειρά στόχων.
- Δυναμική: Εμφάνιση εξελικτικής τάσης ή κίνησης λόγω σχετικής θέσεως.

- Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, με f^k συμβολίζουμε τη σύνθεση της f με τον εαυτό της k φορές, δηλ.

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ παράγοντες}},$$

όπου f^0 είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

- Σύστημα: Ένα σύνολο αλληλεξαρτημένων, αλληλεπιδρώντων και συνεργαζομένων μεταξύ τους στοιχείων ή τμημάτων προς επίτευξη συγκεκριμένου στόχου ή σειρά στόχων.
- Δυναμική: Εμφάνιση εξελικτικής τάσης ή κίνησης λόγω σχετικής θέσεως.
- Έστωσαν $S \subset \mathbb{R}^n$ και $f\colon S \to S$ μία συνεχής απεικόνιση. Ένα επαναληπτικό σχήμα $\{f^k\}$ ονομάζεται *διακριτό δυναμικό σύστημα*.

- Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, με f^k συμβολίζουμε τη σύνθεση της f με τον εαυτό της k φορές, δηλ.
$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ παράγοντες}},$$
όπου f^0 είναι η ταυτοτική απεικόνιση.
- Σύστημα: Ένα σύνολο αλληλεξαρτημένων, αλληλεπιδρώντων και συνεργαζομένων μεταξύ τους στοιχείων ή τμημάτων προς επίτευξη συγκεκριμένου στόχου ή σειρά στόχων.
- Δυναμική: Εμφάνιση εξελικτικής τάσης ή κίνησης λόγω σχετικής θέσεως.
- Έστωσαν $S \subset \mathbb{R}^n$ και $f \colon S \to S$ μία συνεχής απεικόνιση. Ένα επαναληπτικό σχήμα $\{f^k\}$ ονομάζεται *διακριτό δυναμικό σύστημα*.
- Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της ακολουθίας των επαναλήψεων, ή *τροχιών*, $\{f^k(x)\}$ για διάφορα αρχικά σημεία $x \in S$, ιδιαιτέρως για μεγάλα k.

- Έστω $\{X; f\}$ ένα δυναμικό σύστημα.
- Ένα *περιοδικό σημείο* περιόδου n μιας συνάρτησης $f: X \to X$ είναι ένα σημείο $x \in X$ τέτοιο, ώστε $f^n(x) = x$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.
- Ένα περιοδικό σημείο της f περιόδου 1 ονομάζεται *σταθερό σημείο* της f.
- Το σύνολο $\emptyset \neq A \subset X$ καλείται *σταθερό σύνολο* για την $f: X \to X$, αν $f(A) = A$.
- Γενικώς, μια συνάρτηση f δεν έχει σταθερό σύνολο.
- Η ύπαρξή του εξασφαλίζεται σε ειδικές περιπτώσεις.

Μερικά θεωρήματα σταθερού σημείου

Κάθε συνεχής μετασχηματισμός ενός κλειστού δίσκου έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.

Το επονομαζόμενο Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Luitzen Brouwer εγγυάται την ύπαρξη ενός τέτοιου σημείου του οποίου η κατασκευή δεν είναι εφικτή για αυθαίρετη συνεχή συνάρτηση.

Μερικά θεωρήματα σταθερού σημείου

Κάθε συνεχής μετασχηματισμός ενός κλειστού δίσκου έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.

Το επονομαζόμενο Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Luitzen Brouwer εγγυάται την ύπαρξη ενός τέτοιου σημείου του οποίου η κατασκευή δεν είναι εφικτή για αυθαίρετη συνεχή συνάρτηση.

Έστω $f\colon X \to X$ συνεχής συνάρτηση, όπου (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα μη κενό, κλειστό σύνολο $A \subset X$ τέτοιο, ώστε

$$f(A) = A.$$

Απεικόνιση συστολής

- Μία *απεικόνιση συστολής*, ή *συστολή*, επί ενός μετρικού χώρου (X, ρ) είναι μία συνάρτηση f από τον X προς τον εαυτόν του, με την ιδιότητα ότι υπάρχει ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $s < 1$ τέτοιος, ώστε για κάθε x και y εν X,

$$\rho(f(x), f(y)) \leq s \cdot \rho(x, y).$$

Απεικόνιση συστολής

- Μία *απεικόνιση συστολής*, ή *συστολή*, επί ενός μετρικού χώρου (X, ρ) είναι μία συνάρτηση f από τον X προς τον εαυτόν του, με την ιδιότητα ότι υπάρχει ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $s < 1$ τέτοιος, ώστε για κάθε x και y εν X,

$$\rho(f(x), f(y)) \leq s \cdot \rho(x, y).$$

- Η μικρότερη ταύτη τιμή του s ονομάζεται *σταθερά Lipschitz* της f.

Απεικόνιση συστολής

- Μία *απεικόνιση συστολής*, ή *συστολή*, επί ενός μετρικού χώρου (X, ρ) είναι μία συνάρτηση f από τον X προς τον εαυτόν του, με την ιδιότητα ότι υπάρχει ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $s < 1$ τέτοιος, ώστε για κάθε x και y εν X,

$$\rho(f(x), f(y)) \leq s \cdot \rho(x, y).$$

- Η μικρότερη ταύτη τιμή του s ονομάζεται *σταθερά Lipschitz* της f.
- Οι απεικονίσεις συστολής ενίοτε ονομάζονται *απεικονίσεις Lipschitz*.

Απεικόνιση συστολής

- Μία *απεικόνιση συστολής*, ή *συστολή*, επί ενός μετρικού χώρου (X, ρ) είναι μία συνάρτηση f από τον X προς τον εαυτόν του, με την ιδιότητα ότι υπάρχει ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $s < 1$ τέτοιος, ώστε για κάθε x και y εν X,

$$\rho(f(x), f(y)) \leq s \cdot \rho(x, y).$$

- Η μικρότερη ταύτη τιμή του s ονομάζεται *σταθερά Lipschitz* της f.
- Οι απεικονίσεις συστολής ενίοτε ονομάζονται *απεικονίσεις Lipschitz*.
- Εάν η ανωτέρω συνθήκη ικανοποιείται για $s \leq 1$, τότε η απεικόνιση ονομάζεται *μη επεκτατική*.

Το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach

- Γνωστό επίσης ως το *θεώρημα απεικονίσεων συστολής* ή *αρχή απεικονίσεων συστολής*.

Το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach

- Γνωστό επίσης ως το *θεώρημα απεικονίσεων συστολής* ή *αρχή απεικονίσεων συστολής*.
- Έστω (X, ρ) ένας μη κενός, πλήρης μετρικός χώρος. Έστω $T\colon X \to X$ μία απεικόνιση συστολής επί του X.

Το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach

- Γνωστό επίσης ως το *θεώρημα απεικονίσεων συστολής* ή *αρχή απεικονίσεων συστολής*.
- Έστω (X, ρ) ένας μη κενός, πλήρης μετρικός χώρος. Έστω $T\colon X \to X$ μία απεικόνιση συστολής επί του X.
- Τότε η απεικόνιση T επιδέχεται ένα και μόνον *σταθερό σημείο* x^* εν X (αυτό σημαίνει $T(x^*) = x^*$).

Το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach

- Γνωστό επίσης ως το *θεώρημα απεικονίσεων συστολής* ή *αρχή απεικονίσεων συστολής*.
- Έστω (X, ρ) ένας μη κενός, πλήρης μετρικός χώρος. Έστω $T\colon X \to X$ μία απεικόνιση συστολής επί του X.
- Τότε η απεικόνιση T επιδέχεται ένα και μόνον *σταθερό σημείο* x^* εν X (αυτό σημαίνει $T(x^*) = x^*$).
- Περαιτέρω, αυτό το σταθερό σημείο δύναται να ευρεθή ως ακολούθως: Εκκινούμε με ένα αυθαίρετο στοιχείο x_0 εν X και ορίζουμε μια επαναληπτική ακολουθία ως $x_n = T(x_{n-1})$ για $n = 1, 2, \ldots$. Αυτή η ακολουθία συγκλίνει και το όριό της είναι το x^*.

Ο έλκτης

- Ονομάζουμε ένα υποσύνολο F του S *έλκτη* για την f, εάν F είναι ένα κλειστό σύνολο έμπροσθεν αναλλοίωτο υπό την f (δηλαδή $f(F) = F$) τέτοιο, ώστε η απόσταση από το $f^k(x)$ έως το F συγκλίνει προς το μηδέν καθώς το k τείνει προς το άπειρο για κάθε x εντός ενός ανοικτού συνόλου V περιέχον το F.

Ο έλκτης

- Ονομάζουμε ένα υποσύνολο F του S *έλκτη* για την f, εάν F είναι ένα κλειστό σύνολο έμπροσθεν αναλλοίωτο υπό την f (δηλαδή $f(F) = F$) τέτοιο, ώστε η απόσταση από το $f^k(x)$ έως το F συγκλίνει προς το μηδέν καθώς το k τείνει προς το άπειρο για κάθε x εντός ενός ανοικτού συνόλου V περιέχον το F.
- Το σύνολο V ονομάζεται *λεκάνη έλξης* του F.

Επαναλαμβανόμενα συστήματα συναρτήσεων

Ένα (*υπερβολικό*) *επαναλαμβανόμενο σύστημα συναρτήσεων* (*Ε.Σ.Σ.*) επί του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ορίζεται ως ένα ζεύγος $\{\mathbb{R}^n; w_1, w_2, \ldots, w_M\}$ ή, κάπως πιο σύντομα, ως $\{\mathbb{R}^n; w_{1-M}\}$, όπου

$$\{w_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \ldots, M\}$$

είναι ένα πεπερασμένο σύνολο συστολών με *παράγοντες συσταλτικότητας* s_i, δηλ. για κάθε $i = 1, 2, \ldots, M$

$$\|w_i(\vec{x}) - w_i(\vec{y})\| \leq s_i \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

για κάποιο $0 \leq s_i < 1$.

Ο τελεστής Hutchinson

- Μία συλλογή συναρτήσεων επί ενός υποκειμένου χώρου X.

Ο τελεστής Hutchinson

- Μία συλλογή συναρτήσεων επί ενός υποκειμένου χώρου X.
- Τυπικώς, έστω $\{\mathbb{R}^n; w_{1-M}\}$ ένα Ε.Σ.Σ., ή ένα σύνολο M συστολών από ένα συμπαγές σύνολο X εντός του εαυτού του. Δυνάμεθα να καθορίσουμε τούτον ορίζοντας έναν τελεστή H επί του δυναμοσυνόλου 2^X ως

$$H\colon A \mapsto \bigcup_{i=1}^{M} w_i(A),$$

όπου A οιοδήποτε υποσύνολο του X.

Ο τελεστής Hutchinson

- Μία συλλογή συναρτήσεων επί ενός υποκειμένου χώρου X.
- Τυπικώς, έστω $\{\mathbb{R}^n; w_{1-M}\}$ ένα Ε.Σ.Σ., ή ένα σύνολο M συστολών από ένα συμπαγές σύνολο X εντός του εαυτού του. Δυνάμεθα να καθορίσουμε τούτον ορίζοντας έναν τελεστή H επί του δυναμοσυνόλου 2^X ως

$$H\colon A \mapsto \bigcup_{i=1}^{M} w_i(A),$$

  όπου A οιοδήποτε υποσύνολο του X.
- Η επανάληψη αυτών των συναρτήσεων δημιουργεί τον έλκτη ενός επαναλαμβανομένου συστήματος συναρτήσεων, για τον οποίον το σταθερό σύνολο είναι αυτοόμοιο.

Ο έλκτης ενός Ε.Σ.Σ.

- *Ο έλκτης* ενός (υπερβολικού) Ε.Σ.Σ. είναι το μοναδικό σύνολο

$$\mathcal{A}_\infty = \lim_{k\to\infty} H^k(A_0)$$

για κάθε σύνολο εκκίνησης A_0, όπου

$$H(A) = \bigcup_{i=1}^{M} w_i(A)$$

για κάθε $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.

Ο έλκτης ενός Ε.Σ.Σ.

- *Ο έλκτης* ενός (υπερβολικού) Ε.Σ.Σ. είναι το μοναδικό σύνολο

$$\mathcal{A}_\infty = \lim_{k\to\infty} H^k(A_0)$$

για κάθε σύνολο εκκίνησης A_0, όπου

$$H(A) = \bigcup_{i=1}^{M} w_i(A)$$

για κάθε $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.

- Η απεικόνιση H ονομάζεται επίσης *απεικόνιση αλληλοεπικάλυψης* προς επαγρύπνηση του γεγονότος ότι το $H(A)$ έχει σχηματισθεί ως ένωση ή «αλληλοεπικάλυψη» συνόλων.

Κηδεστικοί μετασχηματισμοί

Ένας μετασχηματισμός w είναι *κηδεστικός*, εάν δύναται να αναπαρασταθεί από ένα μητρώο $\mathbf{A}$ και μία *μετατόπιση* (ή *μεταφορά*) $\mathbf{t}$ ως $w(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{t}$. Π.χ. εάν $X = \mathbb{R}^2$,

$$w \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}, \tag{1}$$

ενώ εάν $X = \mathbb{R}^3$

$$w \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & k & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l \\ m \\ r \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 1. Το (τριαδικό) σύνολο Cantor

Εάν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τα Ε.Σ.Σ., ορίζουμε τις $3^1 - 1$ το πλήθος συστολές

$$w_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Τότε η $H\colon \mathcal{H}(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}(\mathbb{R})$ με $H(B) = w_1(B) \cup w_2(B)$, $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ είναι συνάρτηση συστολής με $s = 1/3$.

Για $B = [0,1]$,

$$\begin{aligned} H([0,1]) &= [0,1/3] \cup [2/3,1], \\ H^2([0,1]) &= H([0,1/3] \cup [2/3,1]) \\ &= [0,1/9] \cup [2/9,3/9] \cup [6/9,7/9] \cup [8/9,1] \end{aligned}$$

κ.ο.κ.

Τότε το σταθερό σημείο της H είναι το

$$\mathcal{C} = \lim_{n\to\infty} H^n([0,1]),$$

το οποίο είναι το *τριαδικό σύνολο Cantor*.

Το σύνολο Cantor είναι αυτοόμοιο.

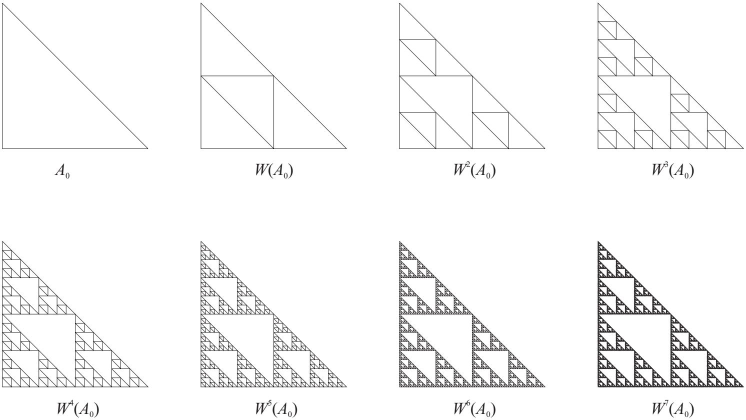
Παράδειγμα 2. Ο ηθμός Sierpiński

Το σύνολο $S(1)$ δύναται να ληφθεί ορίζοντας τις $2^2 - 1$ το πλήθος συστολές

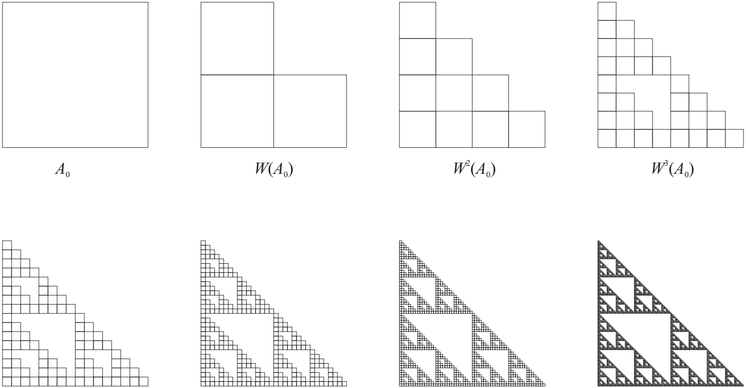
$$w_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$



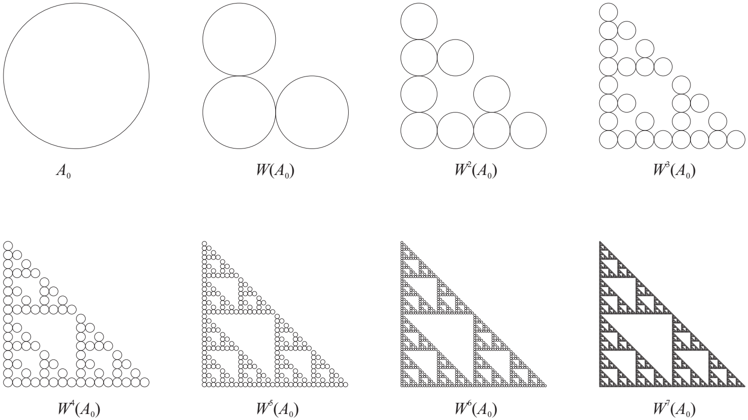
Το τρίγωνο Sierpiński εκκινώντας από τρίγωνο



A_0 $\quad W(A_0)$ $\quad W^2(A_0)$ $\quad W^3(A_0)$

$W^4(A_0)$ $\quad W^5(A_0)$ $\quad W^6(A_0)$ $\quad W^7(A_0)$

Το τρίγωνο Sierpiński εκκινώντας από τετράγωνο.



Το τρίγωνο Sierpiński εκκινώντας από κύκλο

- Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με f^n συμβολίζουμε τη σύνθεση της f με τον εαυτόν της n φορές, δηλ.

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\ \text{παράγοντες}},$$

όπου f^0 είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Ας προσέξουμε ότι η παράσταση $[f(z)]^n$ αναφέρεται σε δυνάμεις, ενώ η παράσταση $f^n(z)$ σε συνθέσεις.

- Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με f^n συμβολίζουμε τη σύνθεση της f με τον εαυτόν της n φορές, δηλ.

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ παράγοντες}},$$

όπου f^0 είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Ας προσέξουμε ότι η παράσταση $[f(z)]^n$ αναφέρεται σε δυνάμεις, ενώ η παράσταση $f^n(z)$ σε συνθέσεις.

- Η *έμπροσθεν τροχιά* ενός σημείου $x \in X$ είναι το σύνολο

$$O^+(x) = \{f^n(x) : n \geq 0, f^0(x) = x\}.$$

- Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με f^n συμβολίζουμε τη σύνθεση της f με τον εαυτόν της n φορές, δηλ.
$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ παράγοντες}},$$
όπου f^0 είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Ας προσέξουμε ότι η παράσταση $[f(z)]^n$ αναφέρεται σε δυνάμεις, ενώ η παράσταση $f^n(z)$ σε συνθέσεις.
- Η *έμπροσθεν τροχιά* ενός σημείου $x \in X$ είναι το σύνολο
$$O^+(x) = \{f^n(x) : n \geq 0, f^0(x) = x\}.$$
- Αν η f είναι αντιστρέψιμη, μπορούμε να ορίσουμε ολόκληρη την *τροχιά* του x ως
$$O(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}, f^0(x) = x\}$$
και την *όπισθεν τροχιά* του x ως
$$O^-(x) = \{f^{-n}(x) : n \geq 0, f^0(x) = x\}.$$

Ένας χρήσιμος μετασχηματισμός

Ένας μετασχηματισμός $R\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ της μορφής

$$R(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

όπου $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ με

$$det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow ad \neq bc,$$

καλείται *γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός* ή *μετασχηματισμός Möbius*.

Αν $c \neq 0$, τότε $R(-d/c) = \infty$ και $R(\infty) = a/c$. Αν $c = 0$, τότε $R(\infty) = \infty$. Ο αντίστροφός του είναι ο

$$R^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a},$$

αν $c \neq 0$.

Μετατροπή δευτεροβαθμίων πολυωνύμων

Ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο

$$q(z) = az^2 + 2bz + d \quad (a \neq 0),$$

όπου $a, b, d \in \mathbb{C}$, δύναται να απλοποιηθεί μέσω μίας γραμμικής αλλαγής συντεταγμένων

$$w = \Phi(z) = az + b \quad (a \neq 0)$$

προς τη μορφή

$$p_c(z) = z^2 + c,$$

όπου $c = ad - b^2 + b$. Έχουμε, δηλαδή, το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{q} & \overline{\mathbb{C}} \\ \Phi^{-1} \uparrow & & \downarrow \Phi \\ \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{p_c} & \overline{\mathbb{C}} \end{array}$$

όπου Φ είναι ένας μετασχηματισμός Möbius.

Το παράδειγμα αυτό μας δείχνει ότι για να κατανοήσουμε τη δυναμική όλων των δευτεροβάθμιων πολυωνύμων, χρειάζεται να μελετήσουμε μόνο την κλάση των δευτεροβάθμιων πολυωνύμων της μορφής $z \mapsto z^2 + c, c \in \mathbb{C}$.

Παράδειγμα

Έστω $f(z) = z^2$; τότε $f^n(z) = z^{2^n}$ για $z \in \mathbb{C}$. Η $f^n(z)$ για $|z| > 1$ συγκλίνει προς το άπειρο, ενώ για $|z| < 1$ συγκλίνει προς το μηδέν. Τα δύο αυτά υποσύνολα του $\mathbb{C}$ χωρίζονται από τον μοναδιαίο κύκλο S^1.

Γύρω στα 1918–1920, οι Γάλλοι μαθηματικοί G. Julia και P. Fatou, ανέπτυξαν, ανεξαρτήτως ο ένας του άλλου, τη θεωρία της «ρητής επανάληψης» έχοντας ως κύριο εργαλείο το Κριτήριο Φυσιολογικότητας του Montel.

Pierre Joseph Louis Fatou (1878–1929)

Gaston Maurice Julia (1893–1978)

Γύρω στα 1918–1920, οι Γάλλοι μαθηματικοί G. Julia και P. Fatou, ανέπτυξαν, ανεξαρτήτως ο ένας του άλλου, τη θεωρία της «ρητής επανάληψης» έχοντας ως κύριο εργαλείο το Κριτήριο Φυσιολογικότητας του Montel.

Pierre Joseph Louis Fatou (1878–1929)

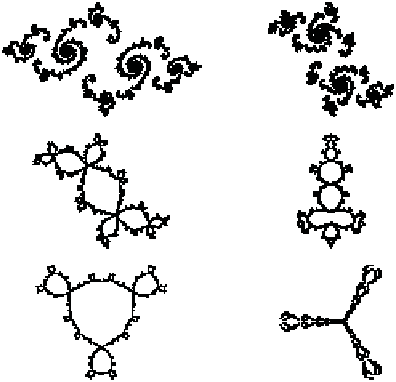
Ανεκάλυψαν τη διχοτόμηση της σφαίρας Riemann σε σύνολα φέροντα σήμερα το όνομά τους.

Gaston Maurice Julia (1893–1978)

Τα *σύνολα Julia* και *Fatou* της f είναι, αντιστοίχως, τα σύνολα

$$
\begin{aligned}
J(f) &= \{z \in \mathbb{C} : \text{ η } (f^n) \text{ δεν είναι φυσιολογική στο } z\} \\
&= \{z \in \mathbb{C} : \text{ η } (f^n) \text{ δεν είναι φυσιολογική σε κανένα} \\
&\quad \text{ανοικτό σύνολο περιέχον το } z\} \\
F(f) &= \mathbb{C} \setminus J(f) \\
&= \{z \in \mathbb{C} : \text{ η } (f^n) \text{ είναι φυσιολογική σε κάποιο} \\
&\quad \text{ανοικτό σύνολο περιέχον το } z\}
\end{aligned}
$$

Διάφορα σύνολα Julia



Το σύνολο αυτό ονομάζεται *σύνολο Julia* και σε κάθε σημείο του η f έχει χαοτική συμπεριφορά, δηλ. σε κάθε σημείο του συνόλου Julia υπάρχουν σημεία z_1, z_2 όσο θέλουμε κοντά του τέτοια, ώστε η $\{f^n(z_1)\}_{n=1}^{\infty}$ τείνει προς το άπειρο, ενώ η $\{f^n(z_2)\}_{n=1}^{\infty}$ τείνει προς μιγαδικό αριθμό.

Τα σταθερά σημεία του p_c προκύπτουν ως λύσεις της εξίσωσης $z^2 + c = z$ και είναι τα

$$\zeta_- = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c} \text{ και } \zeta_+ = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c}.$$

Ορισμός

Έστω $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *μία συνάρτηση. Αν* a *είναι ένα (υπερ)ελκυστικό περιοδικό σημείο της* f*, γράφουμε*

$$A(a) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \lim_{n\to\infty} f^n(z) = a\}$$

για τη λεκάνη έλξης του a*, δηλαδή λεκάνη έλξης είναι το σύνολο των σημείων τα οποία προσεγγίζουν μία δοθείσα (υπερ)ελκυστική περιοδική τροχιά.*

Παρατηρήσεις

Προφανώς, $O^-(a) \subset A(a)$ και $A(a) \neq \emptyset$, διότι $a \in A(a)$. Παρατηρούμε επίσης ότι αν a είναι ένα ελκυστικό σταθερό σημείο της f, τότε $f^k(z) \in A(a)$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ επάγει ότι $z \in A(a)$.

Ορισμός

Έστω $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *μία συνάρτηση. Το γεμισμένο σύνολο Julia,* $K(f)$*, της* f *είναι το σύνολο των σημείων των οποίων οι τροχιές δεν τείνουν προς το άπειρο, δηλ.,*

$$\begin{aligned} K(f) &= \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \lim_{n\to\infty} f^n(z) \neq \infty\} \\ &= \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \ \textit{το}\ \{|f^n(z)|\}_{n=0}^{\infty}\ \textit{είναι φραγμένο}\} \\ &= \overline{\mathbb{C}} \setminus A(\infty). \end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι το $\partial K(f) = J(f)$.

Υποθέτουμε ότι το $\zeta \in \mathbb{C}$ είναι ένα σταθερό σημείο μίας αναλυτικής συνάρτησης f και $\lambda = f'(\zeta)$. Τότε το ζ είναι:

(α) *υπερελκυστικό*, αν $\lambda = 0$,

(β) *ελκυστικό*, αν $0 < |\lambda| < 1$,

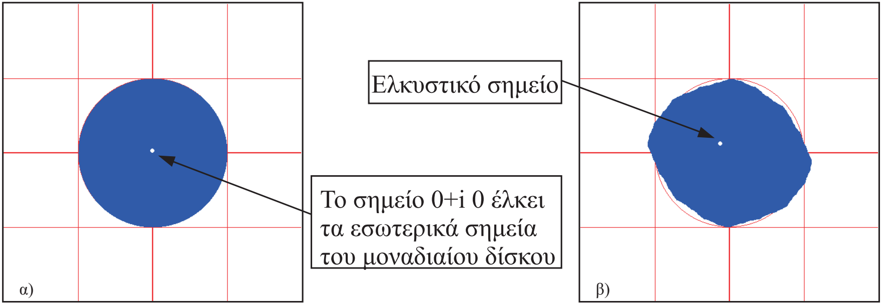
(γ) *απωστικό*, αν $|\lambda| > 1$,

(δ) *ρητώς αδιάφορο*, αν η λ είναι μία ρίζα της μονάδας,

(ε) *αρρήτως αδιάφορο*, αν $|\lambda| = 1$, αλλά η λ δεν είναι μία ρίζα της μονάδας.

Θεώρημα

Αν $\deg(p) = n > 0$, τότε το $z = \infty$ είναι ένα υπερελκυστικό σταθερό σημείο του p.



Σχηματισμός του ελκυστή α) $c = 0 + i0$; β) $c = -0.1 + i0.1$

Κρίσιμα σημεία

- Για να κατανοήσουμε τη δυναμική όλων των δευτεροβαθμίων πολυωνύμων, χρειάζεται να μελετήσουμε μόνο την κλάση των δευτεροβάθμιων πολυωνύμων της μορφής $z \mapsto z^2 + c, c \in \mathbb{C}$.

Κρίσιμα σημεία

- Για να κατανοήσουμε τη δυναμική όλων των δευτεροβαθμίων πολυωνύμων, χρειάζεται να μελετήσουμε μόνο την κλάση των δευτεροβάθμιων πολυωνύμων της μορφής $z \mapsto z^2 + c, c \in \mathbb{C}$.
- Η τιμή w είναι *κρίσιμη τιμή* μιας συνάρτησης f, εάν η εξίσωση $f(z) = w$ έχει λύση της οποίας η πολλαπλότητα είναι μεγαλύτερη της μονάδας.

Κρίσιμα σημεία

- Για να κατανοήσουμε τη δυναμική όλων των δευτεροβαθμίων πολυωνύμων, χρειάζεται να μελετήσουμε μόνο την κλάση των δευτεροβάθμιων πολυωνύμων της μορφής $z \mapsto z^2 + c, c \in \mathbb{C}$.
- Η τιμή w είναι *κρίσιμη τιμή* μιας συνάρτησης f, εάν η εξίσωση $f(z) = w$ έχει λύση της οποίας η πολλαπλότητα είναι μεγαλύτερη της μονάδας.
- Μία τέτοια λύση c καλείται *κρίσιμο σημείο*.

Κρίσιμα σημεία

- Για να κατανοήσουμε τη δυναμική όλων των δευτεροβαθμίων πολυωνύμων, χρειάζεται να μελετήσουμε μόνο την κλάση των δευτεροβάθμιων πολυωνύμων της μορφής $z \mapsto z^2 + c, c \in \mathbb{C}$.
- Η τιμή w είναι *κρίσιμη τιμή* μιας συνάρτησης f, εάν η εξίσωση $f(z) = w$ έχει λύση της οποίας η πολλαπλότητα είναι μεγαλύτερη της μονάδας.
- Μία τέτοια λύση c καλείται *κρίσιμο σημείο*.
- Χρησιμοποιώντας τοπικές συντεταγμένες και εφ' όσον η f είναι αναλυτική αυτό είναι ισοδύναμο με τη συνθήκη $f'(c) = 0$ (τουλάχιστον όταν $c \neq \infty$).

- Το μοναδικό κρίσιμο σημείο του πολυωνύμου

$$p_c(z) = z^2 + c, \quad c \in \mathbb{C}$$

είναι το 0, με κρίσιμη τιμή την c (παράμετρος).

- Το μοναδικό κρίσιμο σημείο του πολυωνύμου
$$p_c(z) = z^2 + c, \quad c \in \mathbb{C}$$
είναι το 0, με κρίσιμη τιμή την c (παράμετρος).
- Η *έμπροσθεν τροχιά* ενός σημείου $x \in X$ είναι το σύνολο
$$O^+(x) = \{f^n(x) : n \geq 0, f^0(x) = x\}.$$

- Το μοναδικό κρίσιμο σημείο του πολυωνύμου
$$p_c(z) = z^2 + c, \quad c \in \mathbb{C}$$
είναι το 0, με κρίσιμη τιμή την c (παράμετρος).
- Η *έμπροσθεν τροχιά* ενός σημείου $x \in X$ είναι το σύνολο
$$O^+(x) = \{f^n(x) : n \geq 0, f^0(x) = x\}.$$
- Οι έμπροσθεν τροχιές των κρίσιμων σημείων μιας απεικόνισης καθορίζουν τα γενικά χαρακτηριστικά της ολικής δυναμικής της.

- Εκκινώντας από το 0, λαμβάνουμε την ακολουθία των μιγαδικών αριθμών
$$\{0, p_c(0), p_c(p_c(0)), p_c(p_c(p_c(0))), \ldots\}.$$

- Εκκινώντας από το 0, λαμβάνουμε την ακολουθία των μιγαδικών αριθμών
$$\{0, p_c(0), p_c(p_c(0)), p_c(p_c(p_c(0))), \ldots\}.$$
- Υιοθετώντας τον προηγούμενο συμβολισμό λαμβάνουμε την ακολουθία των μιγαδικών αριθμών
$$\{0, p_c(0), p_c^2(0), p_c^3(0), \ldots\} \text{ ή την } \{0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \ldots\}.$$

- Εκκινώντας από το 0, λαμβάνουμε την ακολουθία των μιγαδικών αριθμών
$$\{0, p_c(0), p_c(p_c(0)), p_c(p_c(p_c(0))), \ldots\}.$$
- Υιοθετώντας τον προηγούμενο συμβολισμό λαμβάνουμε την ακολουθία των μιγαδικών αριθμών
$$\{0, p_c(0), p_c^2(0), p_c^3(0), \ldots\} \text{ ή την } \{0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \ldots\}.$$
- Για παράδειγμα, εάν $c = 1$ έχουμε την ακολουθία $0, 1, 2, 5, 26, \ldots$ τείνουσα προς το άπειρο, ενώ για $c = -1$ την $0, -1, 0, -1, 0, \ldots$ η οποία είναι φραγμένη.

- Εκκινώντας από το 0, λαμβάνουμε την ακολουθία των μιγαδικών αριθμών
$$\{0, p_c(0), p_c(p_c(0)), p_c(p_c(p_c(0))), \ldots\}.$$
- Υιοθετώντας τον προηγούμενο συμβολισμό λαμβάνουμε την ακολουθία των μιγαδικών αριθμών
$\{0, p_c(0), p_c^2(0), p_c^3(0), \ldots\}$ ή την $\{0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \ldots\}$.
- Για παράδειγμα, εάν $c = 1$ έχουμε την ακολουθία $0, 1, 2, 5, 26, \ldots$ τείνουσα προς το άπειρο, ενώ για $c = -1$ την $0, -1, 0, -1, 0, \ldots$ η οποία είναι φραγμένη.
- Η τροχιά του κρίσιμου σημείου της p_c για κάποια $z \in \mathbb{C}$ συγκλίνει προς το άπειρο και για άλλα συγκλίνει προς κάποιον μιγαδικό αριθμό.

- Εκκινώντας από το 0, λαμβάνουμε την ακολουθία των μιγαδικών αριθμών
$$\{0, p_c(0), p_c(p_c(0)), p_c(p_c(p_c(0))), \ldots\}.$$
- Υιοθετώντας τον προηγούμενο συμβολισμό λαμβάνουμε την ακολουθία των μιγαδικών αριθμών
$\{0, p_c(0), p_c^2(0), p_c^3(0), \ldots\}$ ή την $\{0, c, c^2+c, (c^2+c)^2+c, \ldots\}$.
- Για παράδειγμα, εάν $c = 1$ έχουμε την ακολουθία $0, 1, 2, 5, 26, \ldots$ τείνουσα προς το άπειρο, ενώ για $c = -1$ την $0, -1, 0, -1, 0, \ldots$ η οποία είναι φραγμένη.
- Η τροχιά του κρίσιμου σημείου της p_c για κάποια $z \in \mathbb{C}$ συγκλίνει προς το άπειρο και για άλλα συγκλίνει προς κάποιον μιγαδικό αριθμό.
- Τα διαφορετικά αυτά σύνολα περιέχοντα τα συγκλίνοντα σημεία διαχωρίζονται από κάποιο άλλο σύνολο το οποίο έχει ως διάσταση συνήθως μη ακέραιο αριθμό.

Σύνολα Julia δευτεροβαθμίων πολυωνύμων

Σε όλα τα επόμενα, $p_c(z) = z^2 + c$, όπου $z, c \in \mathbb{C}$ και $J(p_c) = J_c$.

Θεώρημα

Το p_c έχει το πολύ ένα πεπερασμένο ελκυστικό σταθερό σημείο ή ελκυστικό κύκλο.

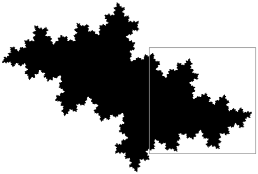
Θεώρημα

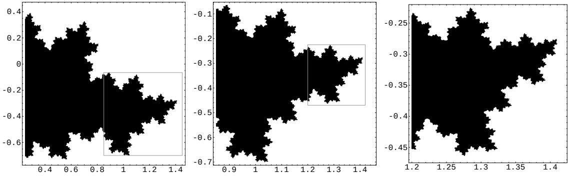
Αν $\lim_{n\to\infty} p_c^n(0) \neq \infty$, τότε το J_c είναι συνεκτικό.

Θεώρημα

Αν $\lim_{n\to\infty} p_c^n(0) = \infty$, τότε το J_c είναι ολικώς ασύνδετο.

Σχεδόν αυτοομοιότητα





$$c = -0.5 + 0.5i$$

Η διχοτόμηση μεταξύ των τιμών της παραμέτρου c του p_c για τις οποίες συνεπάγεται είτε σύγκλιση είτε απόκλιση, μελετήθηκε από τον Mandelbrot.

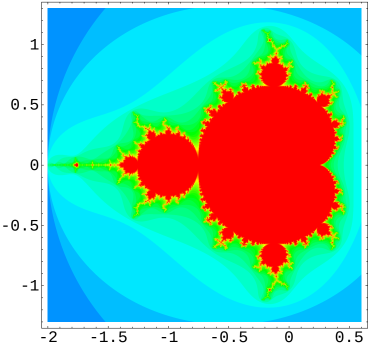
Ορισμός

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{c \in \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty} p_c^n(0) \neq \infty\} \\ &= \{c \in \mathbb{C} : \textit{το } \{p_c^n(0)\}_{n=1}^{\infty} \textit{ είναι φραγμένο}\}. \end{aligned}$$

Η διχοτόμηση μεταξύ των τιμών της παραμέτρου c του p_c για τις οποίες συνεπάγεται είτε σύγκλιση είτε απόκλιση, μελετήθηκε από τον Mandelbrot.

Ορισμός

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{c \in \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty} p_c^n(0) \neq \infty\} \\ &= \{c \in \mathbb{C} : \textit{το } \{p_c^n(0)\}_{n=1}^{\infty} \textit{ είναι φραγμένο}\}. \end{aligned}$$



Παραμετρικοί και δυναμικοί χώροι

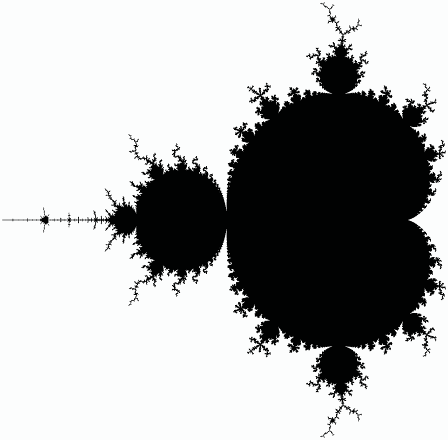
- Αυτό ήταν ένα σύνολο, το οποίο ορίσαμε σε έναν *παραμετρικό χώρο*.
- Για κάθε σημείο $c \in \mathcal{M}$ έχουμε ένα διαφορετικό δυναμικό σύστημα.
- Το γεμισμένο σύνολο Julia αποτελεί παράδειγμα συνόλου οριζόμενο στον *δυναμικό χώρο*.

Douady–Hubbard

Το σύνολο $\mathcal{M}$ είναι συνεκτικό.

Douady–Hubbard

Το σύνολο $\mathcal{M}$ είναι συνεκτικό.



Κατηγοριοποίηση

- Αυτοόμοια μορφοκλάσματα
  - Έχουν τμήματα αποτελούντα σμικρυμένες εκδοχές ολοκλήρου του αντικειμένου
  - Δύνανται να χρησιμοποιούν διαφορετικούς παράγοντες κλιμάκωσης για διαφορετικά τμήματα
  - Στατιστικώς αυτοόμοια, εάν εφαρμοσθούν τυχαίες παραλλαγές
  - Χρησιμοποιούνται συνήθως προς προτύπωση δένδρων, θάμνων, φυτών
- Αυτοκηδεστικά μορφοκλάσματα
  - Έχουν τμήματα σχηματιζόμενα από διαφορετικές παραμέτρους κλιμάκωσης (s_x, s_y και s_z) προς διαφορετικές κατευθύνσεις συντεταγμένων.
  - Στατιστικώς αυτοκηδεστικά, εάν εφαρμοσθούν τυχαίες παραλλαγές
  - Χρησιμοποιούνται συνήθως προς προτύπωση εδαφών, υδάτων και νεφών
- Αναλλοίωτα μορφοκλασματικά σύνολα
  - Σχηματιζόμενα από μη γραμμικούς μετασχηματισμούς
  - Αυτοτετραγωνισμένα μορφοκλάσματα, π.χ. το σύνολο Mandelbrot
  - Αυτοαντίστροφα μορφοκλάσματα