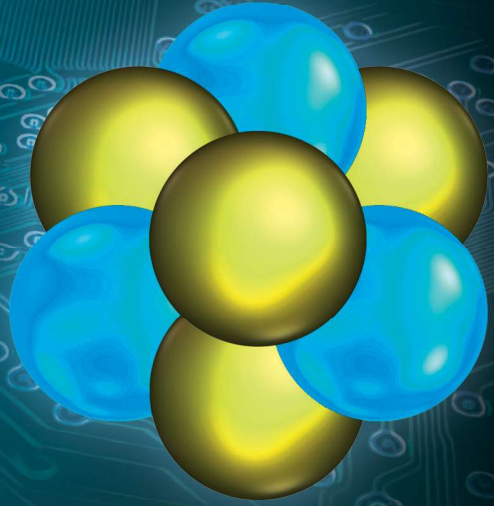


CSANÁD MÁTÉ



BEVEZETÉS  
A KLASSZIKUS  
ÉS A MODERN  
FIZIKÁBA



# Bevezetés a klasszikus és a modern fizikába







# Bevezetés a klasszikus és a modern fizikába

Csanád Máté

Budapest, 2018

A kötet az Eötvös Loránd Tudományegyetem tankönyv- és jegyzettámogatási pályázatán elnyert forrás felhasználásával jelent meg.

Szakmai lektor: Dr. Nagy Márton  
A kézirat lezárva: 2018. március 23.

© Csanád Máté, 2018  
ISBN 978-963-463-750-9



[www.eotvoskiado.hu](http://www.eotvoskiado.hu)

---

Felelős kiadó: az Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Természettudományi Karának dékánja  
Projektvezető: Sándor Júlia  
Kiadói szerkesztő: Brunner Ákos  
Tördelés: Csanád Máté  
Borítóterv: Csele Kmotrik Ildikó



# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>9</b>
1.1. A fizika a természettudományban és a környezetünkben . . . . .	10
1.2. A fizika története dióhéjban . . . . .	10
1.3. A fizika nyelve . . . . .	11
1.4. Fizikai mennyiségek és mértékegységeik . . . . .	12
<b>2. Klasszikus mechanika</b>	<b>15</b>
2.1. Kinematika . . . . .	16
2.1.1. A mechanika és a kinematika modellje, alapfogalmai . . . . .	16
2.1.2. A megfigyelő szerepe a kinematikában . . . . .	17
2.1.3. Egydimenziós mozgások . . . . .	18
2.1.4. Kétdimenziós mozgások . . . . .	20
2.2. Newton törvényei . . . . .	23
2.2.1. Isaac Newton . . . . .	23
2.2.2. Newton három törvénye . . . . .	24
2.2.3. Newton törvényeinek egyszerű alkalmazásai . . . . .	25
2.2.4. Lendület és tömegközéppont . . . . .	26
2.3. Látszólagos erők nem inerciális rendszerekben . . . . .	28
2.3.1. Tehetetlenségi erők . . . . .	28
2.3.2. A Coriolis-hatás . . . . .	29
2.4. Egyszerű dinamikai rendszerek . . . . .	34
2.4.1. Harmonikus oszcillátor, visszacsatolás, rezonancia . . . . .	34
2.4.2. Közegellenállás . . . . .	37
2.4.3. Kényszererők és súrlódás . . . . .	37
2.5. Gravitáció . . . . .	39
2.5.1. Megfigyelések . . . . .	39
2.5.2. Kepler törvényei . . . . .	41
2.5.3. Newton gravitációs törvénye . . . . .	43
2.6. Munkavégzés és energia . . . . .	45



2.6.1.	A munka fogalma és a teljesítmény . . . . .	45
2.6.2.	A mozgási és a gravitációs helyzeti energia . . . . .	47
2.6.3.	Konzervatív erők . . . . .	48
2.6.4.	Az energia megmaradása . . . . .	49
2.6.5.	Egyszerű gépek . . . . .	50
2.7.	Pontrendszerek mechanikája . . . . .	51
2.7.1.	Külső és belső erők . . . . .	51
2.7.2.	Tömegpontok egyszerű rendszerei . . . . .	51
2.7.3.	Szabadsági fokok, merev testek . . . . .	53
2.7.4.	Merev testekre ható erők, a forgatónyomaték . . . . .	53
2.7.5.	A súlypont, egyensúlyi helyzetek . . . . .	56
2.8.	A forgómozgás dinamikája . . . . .	58
2.8.1.	A tehetetlenségi nyomaték . . . . .	58
2.8.2.	A forgás mozgásegyenlete, a perdület . . . . .	59
2.8.3.	Forgó és haladó mozgások „dualitása” . . . . .	63
2.9.	Ellenőrző kérdések . . . . .	63
<b>3.</b>	<b>Folytonos közegek mechanikája</b>	<b>69</b>
3.1.	Folytonos közegek statikája . . . . .	70
3.1.1.	Rugalmasság . . . . .	70
3.1.2.	Folyadékok és gázok: alapfogalmak . . . . .	72
3.1.3.	A hidrosztatikai nyomás . . . . .	73
3.1.4.	A felhajtóerő . . . . .	75
3.1.5.	A felületi feszültség . . . . .	77
3.2.	Folytonos közegek dinamikája: áramlástan . . . . .	79
3.2.1.	Kontinuitás . . . . .	80
3.2.2.	A Bernoulli-törvény . . . . .	80
3.2.3.	A viszkozitás . . . . .	82
3.2.4.	Súrlódó áramlások, turbulencia . . . . .	84
3.3.	A hullámmozgás és a hullámeqyenlet . . . . .	86
3.3.1.	A hullámmozgás matematikai alapjai . . . . .	87
3.3.2.	Periodikus hullámok . . . . .	89
3.3.3.	A Fourier-tétel . . . . .	90
3.3.4.	A hullámeqyenlet . . . . .	92
3.3.5.	Térbeli hullámok . . . . .	93
3.3.6.	A Doppler-jelenség . . . . .	95
3.3.7.	Hullámok elhajlása, interferencia: a Huygens–Fresnel-elv . . . . .	96
3.4.	Mechanikai hullámok . . . . .	97
3.4.1.	Hullámtípusok, terjedési sebesség . . . . .	98

3.4.2.	A hang fizikájának alapjai . . . . .	100
3.4.3.	A hang által keltett érzet . . . . .	103
3.4.4.	A hang forrásai . . . . .	105
3.4.5.	Hangsorok, konszonancia és disszonancia . . . . .	106
3.5.	Ellenőrző kérdések . . . . .	108
<b>4.</b>	<b>Hőtan és termodinamika</b>	<b>111</b>
4.1.	A hőtan alapjai . . . . .	112
4.1.1.	A hőmérséklet mértékegységei és mérése . . . . .	112
4.1.2.	Hőmennyiség, fajhő . . . . .	114
4.1.3.	Fázisok, fázisátmenetek . . . . .	115
4.1.4.	A vízgőz, pára képződés . . . . .	117
4.1.5.	Hőtágulás . . . . .	118
4.1.6.	A hőátadás fajtái . . . . .	119
4.2.	Kinetikus hőtan . . . . .	122
4.2.1.	A hő kinetikus elmélete, az ekvipartíció . . . . .	122
4.2.2.	Az általános gáztörvény és következményei . . . . .	124
4.2.3.	Az entrópia . . . . .	126
4.3.	Axiomatikus termodinamika . . . . .	128
4.3.1.	A termodinamika alaptételei . . . . .	128
4.3.2.	Állapotváltozások, körfolyamatok . . . . .	131
4.4.	Ellenőrző kérdések . . . . .	135
<b>5.</b>	<b>Elektromosság és mágnesesség</b>	<b>138</b>
5.1.	Az elektromosság alapjelenségei . . . . .	139
5.1.1.	A Coulomb-törvény . . . . .	139
5.1.2.	Térerősség és erővonalak . . . . .	140
5.1.3.	A fluxus és a Gauss-törvény . . . . .	142
5.2.	Elektromos feszültség és elektromos áram . . . . .	145
5.2.1.	Az elektromos potenciál . . . . .	145
5.2.2.	Az elektromos áram . . . . .	148
5.2.3.	Az Ohm-törvény, az elektromos teljesítmény . . . . .	150
5.2.4.	Áramkörök . . . . .	151
5.3.	Mágneses tér és hatásai . . . . .	153
5.3.1.	Mágnesesség . . . . .	153
5.3.2.	A Lorentz-erő és a mágneses nyomaték . . . . .	154
5.3.3.	A mágneses fluxus és Gauss-törvény . . . . .	156
5.3.4.	A mágneses indukció . . . . .	157
5.4.	A mágneses tér forrásai . . . . .	159

5.4.1.	Mozgó töltések és az áram mágneses tere . . . . .	159
5.4.2.	Az Ampère-törvény . . . . .	160
5.4.3.	Önindukció és transzformátor . . . . .	161
5.4.4.	Váltakozó áramú áramkörök . . . . .	161
5.5.	Elektromágneses hullámok . . . . .	162
5.5.1.	Az Ampère-törvény módosítása: eltolási áram . . . . .	162
5.5.2.	A Maxwell-egyenletek . . . . .	164
5.5.3.	Az elektromágneses spektrum . . . . .	168
5.6.	Optika . . . . .	170
5.6.1.	A fény terjedése . . . . .	170
5.6.2.	Geometriai optika . . . . .	172
5.6.3.	Hullámoptika . . . . .	175
5.7.	Ellenőrző kérdések . . . . .	176
<b>6.</b>	<b>Modern fizikai bevezető</b>	<b>181</b>
6.1.	A téridő modern fogalmának kialakulása . . . . .	182
6.1.1.	A newtoni mechanika és a Maxwell-egyenletek ellentmondása . . . . .	182
6.1.2.	A speciális relativitáselmélet . . . . .	183
6.1.3.	Az általános relativitáselmélet . . . . .	186
6.2.	A részecske-hullám kettősség, a kvantumvilág . . . . .	188
6.2.1.	A fény kvantumtermészete . . . . .	188
6.2.2.	A részecskék hullámtermészete . . . . .	190
6.3.	Atom- és magfizika . . . . .	192
6.3.1.	Az atomok felépítése . . . . .	192
6.3.2.	Az atommagok kötési energiája . . . . .	195
6.3.3.	A maghasadás . . . . .	195
6.3.4.	A magfúzió . . . . .	199
6.4.	Ellenőrző kérdések . . . . .	200
<b>7.</b>	<b>A téridő modern fogalmának kialakulása</b>	<b>203</b>
7.1.	A speciális relativitáselmélet és a téridő . . . . .	204
7.1.1.	A megfigyelők szerepe, a Galilei-féle relativitás . . . . .	204
7.1.2.	Elektromágneses hullámok és relativitás . . . . .	205
7.1.3.	Einstein elmélete . . . . .	208
7.1.4.	Az energia és a tömeg ekvivalenciája . . . . .	211
7.1.5.	A relativitáselmélet Minkowski-diagramokon . . . . .	213
7.1.6.	A relativitáselmélet érdekes következményei és kísérleti bizonyítékai	215
7.1.7.	Látszólagos paradoxonok . . . . .	216
7.2.	Általános relativitáselmélet és a görbült téridő . . . . .	218

7.2.1.	Az általános relativitáselmélet alapjai . . . . .	218
7.2.2.	Az általános relativitáselmélet bizonyítékai . . . . .	220
7.2.3.	A Hubble-törvény és a világegyetem múltja . . . . .	223
7.2.4.	A világegyetem jövője, kozmológia . . . . .	225
7.3.	Ellenőrző kérdések . . . . .	227
<b>8.</b>	<b>Kvantumfizika: részecskék és hullámok</b>	<b>228</b>
8.1.	Atomfizikai bevezető . . . . .	229
8.1.1.	Az atomosság kémiai és makroszkopikus jelei . . . . .	229
8.1.2.	Az atomok szerkezete . . . . .	232
8.1.3.	A perdület iránykvantálása . . . . .	237
8.1.4.	A spin . . . . .	238
8.2.	A kvantumfizika elemei . . . . .	240
8.2.1.	A kvantumfizika első jelei: a fény kettős természete . . . . .	240
8.2.2.	Anyaghullámok, az anyag kettős természete . . . . .	243
8.2.3.	A hullámfüggvény és a kvantummechanika értelmezése . . . . .	245
8.2.4.	Összefonódott állapotok, az EPR-paradoxon és a Bell-kísérlet . . . . .	247
8.2.5.	A kvantummechanika matematikai képe, a Schrödinger-egyenlet . . . . .	249
8.2.6.	A kvantummechanika érdekes következményei . . . . .	251
8.3.	Ellenőrző kérdések . . . . .	254
<b>9.</b>	<b>Mag- és részecskefizika</b>	<b>255</b>
9.1.	Magfizika . . . . .	256
9.1.1.	Az atommag szerkezete . . . . .	256
9.1.2.	A maghasadás felfedezése . . . . .	257
9.1.3.	Az uránizotópok hasadási tulajdonságai . . . . .	259
9.1.4.	Az atombomba . . . . .	261
9.1.5.	Az atomreaktor . . . . .	262
9.1.6.	A Nap és a csillagok működése, a magfúzió és a nukleoszintézis . . . . .	265
9.1.7.	A termonukleáris fúzió . . . . .	269
9.2.	Részecskefizika . . . . .	272
9.2.1.	Részecskegyorsítók és -detektorok . . . . .	272
9.2.2.	Elemi részecskék és kölcsönhatásaik . . . . .	275
9.2.3.	Részecskegyorsítókkal az ősrobbanás nyomában . . . . .	278
9.3.	Ellenőrző kérdések . . . . .	280





# Előszó helyett

„Általában az alábbi módon keressük az új természeti törvényeket. Első lépésben felteszünk egy elméletet. Aztán megvizsgáljuk a feltételezésünk következményeit, hogy lássuk, mit jelentene, ha az elméletünk igaz lenne. Majd a számítások eredményeit összehasonlítjuk a Természettel, közvetlenül a megfigyelésekkel, kísérlet vagy tapasztalat által, hogy lássuk, működik-e. **Ha ellentmond a kísérleteknek, akkor az elméletünk téves. Ebben az egyszerű állításban van a tudomány kulcsa.** Nem számít, milyen szép az elméletünk, nem számít, milyen okosak vagyunk, hogy ki találta ki az elméletet, hogy őt hogy hívják – ha ellentmond a kísérleteknek, akkor téves.”

Richard P. Feynman

Jelen elektronikus jegyzet az Eötvös Loránd Tudományegyetem „Bevezetés a fizikába” és „Modern fizika közérthetően” című kurzusaihoz kapcsolódik. Az első hat fejezet az előbbi, míg az utolsó három fejezet az utóbbi kurzus anyagát képviseli. A jegyzet célja, hogy a klasszikus fizika alapjainak elsajátításában segítséget nyújtson, illetve (a tudományos ismeretterjesztés szintjén) megismertesse az olvasót az utóbbi 100-150 év fizikájával is. Az anyag megértéséhez alapfokú matematikai ismeretekre és mindenekelőtt természettudományos szemléletre, továbbá a gondolkodásra való hajlandóságra van szükség.

Fő szakaszonként csoportosítva minden témához kapcsolódóan megadunk néhány ellenőrző kérdést is. Ezek célja, hogy segítségükkel az olvasó felmérhesse, megértette-e a kurzus, illetve ezen jegyzet anyagát. Ezenfelül a klasszikus fizikai fejezetekben egyetemi órán, vagy éppen otthon elvégezhető kísérletekre, egyszerű mérésekre is adunk ötleteket. Ezek célja az, hogy a gyakorlati tapasztalat által a tanultak jobban rögzüljenek, illetve hogy megértsük: a fizikai tudományok kulcsa a kísérletezésben rejlik. Ez az egyetlen módszer arra, hogy az elméletek (adott mérési pontosság melletti) helyességéről döntsünk.



1. fejezet

Bevezetés

## 1.1. A fizika a természettudományban és a környezetünkben

A fizika minden természettudomány alapját képezi, miután az anyag és az azt alkotó molekulák, atomok és elemibb részecskék viselkedéséért és kölcsönhatásaiért felel. A hétköznapiak legtermészetesebb jelenségei mögött a fizika áll: például hogy miért nem „esik át” az asztalra tett toll az asztallapon, vagy miért halljuk a szomszéd szoba zajait, míg azok forrását nem látjuk. A kémia, a biológia, a meteorológia, a földtan folyamatainak jelentős részét szintén megérthetjük fizikai alapfolyamatok segítségével. Más természettudományos jelenségek, folyamatok persze annyira összetettek, hogy nem ásnak le a magyarázatot adó fizikai okokig – ennek ellenére ezek mögött is fizikai törvényszerűségek állnak. Álljanak azért itt példaként olyan környezeti jelenségek, amelyek működése a fizika törvényeinek segítségével vizsgálható:

- A földkéreg dinamikája, hegységek kialakulása, vulkánok
- Légköri folyamatok, az időjárás alakulása, csapadék, szél, légszennyezettség
- A Föld energia-háztartása, napsugárzás, üvegházhatás
- Folyók és tengeráramlatok viselkedése
- Elektromágneses sugárzások, hatásuk az emberre, elektromágneses zajszennyezés
- Nukleáris folyamatok, atomenergia, természetes radioaktivitás, sugárvédelem
- Az ember energiagazdálkodása, különféle energiaforrások
- A hang fizikája, zajszennyezés és zajvédelem
- Orvosi alkalmazások: CT, röntgen, PET, MRI

A jegyzet elolvasása és megértése után minden fenti jelenségnek ismerjük majd a fizikai alapjait, azaz képesek leszünk az általuk felvetett kérdéseket mélyebben megvizsgálni. Ennek nyomán további, a fizikán túlmutató (például társadalmi, politikai, gazdasági) kérdések tárgyalása során is teljesebb képet alkothatunk.

## 1.2. A fizika története dióhéjban

Hogy a fizika alapjait megértsük, fontos látnunk, hogyan jutott el az emberiség ezen tudásig, hogyan haladt a fizikai világ megismerésének útján. A tudomány története az ókori **Egyiptomban és Mezopotámiában** kezdtek el írni. Itt alakult ki az írás, az első számrendszerek, a mérések alapját képező első eszközöket itt fejlesztették ki, és itt kezdtek el módszeresen tanulmányozni a csillagos eget. A **görög-római kultúra** talaján fejlődött ki a geometria, jött létre az első (Föld-központú) kozmológiai világkép, itt ismerték fel az elektromosság jelenségét, megalkották az első atomhipotézist, továbbá lefektették a tudományos gondolkodás alapjait. Ugyanakkor ez még messze volt attól, amit ma természettudománynak nevezünk: inkább természetfilozófiának hívhatjuk az akkori gondolkodás és megfigyelés eredményeit. Elsősorban azért, mert a tudomány méréseket és egyenleteken alapuló nyelvezetét még nem alakították ki. A legjobb példa erre az arisztotelészi „négy elem”: Arisztotelész *A keletkezés és a pusztulás* című műve az első olyan tudományos munkák egyike, amely a minket körülvevő anyagi világ megér-

tését tűzi ki célul.<sup>1</sup> A mű egyik fontos pontja az, hogy az elemek természetes sorrendje alulról felfelé haladva a föld, víz, levegő, tűz. Ebből „vezette le” Arisztotelész a világ sok törvényét: ezért süllyed le a vízben a kő, ezért esik lefelé az eső, ezért „lobog felfelé” a tűz, és van a Nap fent az égen. Ez tulajdonképpen a tudomány esszenciája: egyszerű feltevésekkel megmagyarázni sok megfigyelt jelenséget. Ma a feltevéseket, törvényeket a matematika nyelvén megírt formulákkal adjuk meg, de a cél továbbra is ugyanaz: a minket körülvevő anyagi világ megértése.

A **korai újkorban** Kepler és Galilei járultak hozzá nagymértékben a mai világgép kialakulásához, de munkáikat még mindig filozofikus nyelven fogalmazták meg. Newton és Leibniz dolgozták ki a természettudomány matematikai alapjait: a sorozatokat, határértékeket, a differenciál- és integrálszámítás alapjait. Erre támaszkodva tudta maga Newton is később a klasszikus kinematika és mechanika törvényeit megfogalmazni. A **modern kor** több új tudományágot hozott a fizikán belül: Coulomb, Galvani, Volta és társaik az elektromosság elméletének alapjait fektették le, Guericke, Boyle, Carnot, Joule pedig a termodinamika alapfogalmait és főtételeit fogalmazták meg.

A **XX. század elején** ismét forradalmi változásokon ment keresztül a fizika. Thomson, Rutherford és Bohr atommodelleket alkottak, Einstein (Maxwell, Lorentz és Poincaré segítségével) megalkotta a speciális és az általános relativitás elméletét, Becquerel és a Curie-házaspár felfedezte a radioaktivitást, Planck, Heisenberg és Schrödinger pedig megalkotta a kvantumelméletet.<sup>2</sup> A **mai fizika** eszközei pedig ma már több kilométeres részecskegyorsítók, asztrofizikai óriástávcsövek. A nanofizika, biofizika és az anyagtudomány legújabb felfedezései a hétköznapi életünkre is egyre nagyobb hatást gyakorolnak. Jelen jegyzetben a modern fizika alapjait jutunk el.

## 1.3. A fizika nyelvezete

A **matematika** a fizika legfontosabb eszköze, ezért ismerete alapvető a fizika megértéséhez. Jelen jegyzet gondolatmeneteinek követéséhez feltétlenül szükség van biztos gyakorlati tudásra az alábbi területeken:

- Alapvető műveletek, törtek rendezése
- Egyenletek rendezése és megoldása
- Függvények kezelése és értelmezése
- Vektorok, összeadásuk, skaláris és vektoriális szorzásuk
- Koordináta-rendszerek
- Szögfüggvények és azonosságok
- A geometria alapjai
- A határértékek fogalma, infinitezimális mennyiségek
- A differenciálszámítás matematikai jelentése, fizikai felhasználása
- Az integrálás matematikai jelentése, fizikai felhasználása

A matematikai kifejezéseken és a számolások megértésén túl a legfontosabb, hogy egy-

<sup>1</sup>A négy elem elmélete jóval Arisztotelész előtt megszületett, lásd például Platón *Timaiosz* című művét, vagy az Empedoklésztól fennmaradt szövegeket. Az arisztotelészi elmélet jelentősége (egyes források szerint) abban áll, hogy az anyagi világ jelenségeire a természettudomány logikája szerint keresi a magyarázatokat.

<sup>2</sup>Elnézést mindazoktól, akik kimaradtak e felsorolásból.



egy képlet mögött lássuk a jelentést. A fizika alapjait a törvények képezik, ezeket az *egyszerűség kedvéért* képletekkel írjuk le. Mindent törvényt azonban elsősorban szavakkal kell tudni leírni. Fontos látni, hogy egy törvényben sosem

- az idő,
- $a$  hő vagy
- $a$  tömeg

szerepel, hanem konkrétan

- valamely adott út megtételéhez szükséges idő,
- valamely adott folyamathoz szükséges hő vagy
- valamely adott test tömege.

A törvényeket nem önmagukért tanuljuk, hanem azért, hogy a környezetünkben lejátszódó folyamatok megértése során alkalmazni tudjuk őket. Ezért akkor mondatjuk, hogy megértettünk egy fizikai tételt, törvényt, állítást, ha *hétköznapi példát tudunk mondani* az alkalmazására.

## 1.4. Fizikai mennyiségek és mértékegységeik

Sok fizikai mennyiség olyan, hogy értékét egy darab szám jellemezi, amely valamely alapegységhez viszonyított arányát fejezi ki. Ezeket a mennyiségeket **skalármennyiségeknek** hívjuk. Ilyen az energia, a tömeg, a térfogat, a megtett út, a hőmérséklet. Más mennyiségeknek viszont van iránya is, ezeket **vektormennyiségeknek** hívjuk: ezek közé tartozik az elmozdulás, a sebesség, a gyorsulás, az erő, a forgatónyomaték vagy az elektromos térerősség.<sup>3</sup> Ezeknek is sokszor csak a nagyságáról beszélünk, de fontos látni, hogy van irányuk is. Vannak olyan mennyiségek is, amelyeket legtöbbször skalárként használunk, de lehet vektorként is értelmezni őket, ilyen például egy felületdarab területe, amely vektorként értelmezve a felületre merőleges irányba mutat.

Érdeemes megemlíteni, hogy a **hely** érdekes mennyiség: vektorként gondolunk rá, de próbáljuk csak meg két hely összegét venni. Hol van például a szoba két sarkának az összege? Vagy melyik pont az asztal bal sarkának kétszerese? Ugyanakkor a térpontok különbsége már értelmezhető: ez az őket összekötő vektor. Mindennek az az oka, hogy a tér pontjai valójában nem vektorteret, hanem úgynevezett **affin teret** alkotnak. Csak akkor tekinthetünk rájuk vektorként, ha kijelölünk egy origót, amelyben ezek „kezdődnek”. Általában a jelenségeket egy rögzített origó mellett szemléljük, ennek kijelölése jelenti a „megfigyelő” meghatározását.

A vektorokat gyakran Descartes-féle derékszögű **koordinátákban** fejezzük ki, máskor polárkoordinátákban (a síkon) vagy henger-, illetve gömbi koordinátákban (a háromdimenziós térben). Persze a legjobb, ha egyáltalán nincs szükség koordinátázásra, hanem maguk a vektorok szerepelnek az összefüggésekben. Mindenesetre egy kétdimenziós  $\vec{a}$  vektor polárkoordinátái  $(a, \alpha)$  és derékszögű koordinátái  $(a_x, a_y)$  így függenek

<sup>3</sup>Vannak ennél bonyolultabb típusú mennyiségek is, amelyeket mátrixokkal fejezünk ki, ezeket azonban itt nem tárgyaljuk. Talán egy példát érdemes említeni: a tehetetlenségi nyomatékot ugyan többnyire skalárral fejezzük ki, de általános esetben mátrixként értelmezendő, amely a szögsebességvektorral szorozva a perdületet adja meg.

össze:

$$a_x = |\vec{a}| \cos(\alpha) \quad \text{és} \quad a_y = |\vec{a}| \sin(\alpha), \quad \text{azaz} \quad a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (1.1)$$

A vektorok összeadásának és  $k$  skalárral szorzásának szabályai így írhatók fel:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad (1.2)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \quad (1.3)$$

$$k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}. \quad (1.4)$$

Láthatólag ugyanúgy kezelhetjük őket összeadásuk és számmal szorzásuk során, mint a közönséges skalárokat, ezért egyes törvények felírásában nem számít, hogy az adott mennyiségre vektorként vagy skalárként gondolunk.

Vektorok között kétféle szorzást értelmezünk: a **skalárszorzat** eredménye skalár, a **vektorszorzat** eredménye vektor. Két vektor,  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  skalárszorzatának,  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ -nek a definíciója:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\alpha). \quad (1.5)$$

Ez többek között azt jelenti, hogy két vektor skalárszorzata nulla, ha a vektorok merőlegesek:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0. \quad (1.6)$$

Az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  vektorok vektorszorzatának,  $\vec{a} \times \vec{b}$ -nek a definíciója:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\alpha), \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}. \quad (1.7)$$

Szavakban: a vektorszorzat nagysága a vektorok által kifizített paralelogramma területe, iránya pedig mindkét eredeti vektorra merőleges. Az ezután maradó két lehetőség közül pedig azt kell választani, amivel  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  és  $\vec{a} \times \vec{b}$  jobbsodrású rendszert alkot.<sup>4</sup> Ez többek között azt jelenti, hogy párhuzamos vektorok vektorszorzata nulla:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0. \quad (1.8)$$

Tehát a skalárszorzat merőleges vektorokra nulla, a vektoriális szorzat pedig párhuzamosok esetén nulla.

A skalár- és vektormennyiségek skáláját **mértékegységek** definiálják. A klasszikus fizikában minden mértékegység alapja a tömeg, a távolság és az idő alapegysége. A metrikus (SI: Système International d'Unités) rendszerben ezek: a kilogramm, a méter és a másodperc. Minden további mértékegységet ezekből származtathatunk, például a joule (J, az energia mértékegysége) másképpen  $\text{kg m}^2/\text{s}^2$ , míg a newton (N, az erő mértékegysége)  $\text{kg m}/\text{s}^2$ . Egyes mennyiségeknek állandókon keresztül adunk új egységet: például a kelvin (K) a Boltzmann-állandón ( $1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K) keresztül adódik a joule-ból, a coulomb (C) az elemi töltés egységén keresztül ( $1,6 \cdot 10^{-19}$  C) darabban is kifejezhető lenne, az amper (A) pedig darab per másodpercben.

<sup>4</sup>Ahogy a jobb kezünk hüvelyk-, mutató- és középső ujjja áll, ha körülbelül egymásra merőlegesen hajlítjuk őket.

Érdekességként megemlítjük, hogy a modern fizika felismerései nyomán kiderül, hogy a három alapegység (kg, m, s) sem feltétlenül szükséges. A három legalapvetőbb fizikai állandó a speciális relativitáselméletben fontos **fénysebesség**:  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s, a kvantumelméletben fontos **Planck-állandó**:  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$  Js, és az általános relativitáselméletben (is) fontos **gravitációs állandó**:  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>. Ezekből „ki lehet keverni” tömeg, hosszúság és idő dimenziójú „alapegységeket”, ezek értékei és elnevezései a következők:

$$\text{Planck-tömeg: } m_P = \sqrt{\hbar c / \gamma} = 2,18 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ kg} = 4,59 \cdot 10^7 \cdot m_P, \quad (1.9)$$

$$\text{Planck-hossz: } l_P = \sqrt{\gamma \hbar / c^3} = 1,61 \cdot 10^{-35} \text{ m} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ m} = 6,19 \cdot 10^{34} \cdot l_P, \quad (1.10)$$

$$\text{Planck-idő: } t_P = \sqrt{\gamma \hbar / c^5} = 5,38 \cdot 10^{-44} \text{ s} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ s} = 1,86 \cdot 10^{43} \cdot t_P. \quad (1.11)$$

A többi egység pedig már ezekből származtatható. Ha tehát ezeket az állandókat egységnek választjuk, megszűnnek a mértékegységek, hiszen a tömeget, hosszúságot és időt is mérhetnénk „darabban”. Ez azonban furcsa, igen eltérő nagyságrendű és a hétköznapi tapasztalatoktól idegen számokat eredményezne, ezért maradunk a jól bevált metrikus egységrendszernél.

A mértékegységek használatának praktikus oldala, hogy bizonytalanság esetén segítenek egyszerű képletek ellenőrzésében. Tegyük fel, hogy tudjuk, hogy egy tárgy sebességének [m/s] kiszámításának képletében szerepel a tárgy által megtett távolság [m] és az ezalatt eltelt idő [s], más nem. Ekkor biztosak lehetünk benne, hogy a törvényben valahol szerepelnie kell a megtett távolság és az eltelt idő hányadosának, hiszen csak így jöhet ki a kívánt méter/másodperc eredmény.

A nagyon nagy vagy nagyon kis számok használatának elkerülése végett a mértékegységeket nagyságrendeket jelölő **prefixumokkal** láthatjuk el (kivéve a kilogrammot, amely már a gramm ezerszerese, így ott a grammot „fokozzuk”). Ezek a következők:

deka	dk	$10^1$	deci	d	$10^{-1}$
hekto	h	$10^2$	centi	c	$10^{-2}$
kilo	k	$10^3$	milli	m	$10^{-3}$
mega	M	$10^6$	mikro	$\mu$	$10^{-6}$
giga	G	$10^9$	nano	n	$10^{-9}$
tera	T	$10^{12}$	piko	p	$10^{-12}$
peta	P	$10^{15}$	femto	f	$10^{-15}$
exa	E	$10^{18}$	atto	a	$10^{-18}$
zetta	Z	$10^{21}$	zepto	z	$10^{-21}$
yotta	Y	$10^{24}$	yocto	y	$10^{-24}$

Az alsó sorokban lévő prefixumok ugyan ritkán kerülnek elő, de egyre gyakrabban: az emberiség éves energiafelhasználását exajoule-ban érdemes megadni, a legrövidebb létrehozható lézérimpulzusok pedig már az attomásodpercek tartományában vannak.

**2. fejezet**

# **Klasszikus mechanika**

## 2.1. Kinematika

### 2.1.1. A mechanika és a kinematika modellje, alapfogalmai

A mechanika a testeknek a térben való mozgásának, illetve geometriai átalakulásának (deformációjának) vizsgálata. Feladata ezen folyamatok leírása, illetve ezek okainak keresése (mint látni fogjuk, erőkre, erőhatásokra való hivatkozással). A kinematika, mint a mechanika része, a mozgás „okát” nem vizsgálja: a kinematika az anyagi és geometriai átalakulás nélküli rendszerek **térbeli mozgásának** leírása. Fő célja, hogy egy rendszer adott pillanatbeli („jelenlegi”) állapotának teljes leírásából következtessen a jövőre.

Ebben a szakaszban pontszerű testekkel foglalkozunk, azaz a vizsgált objektumokra **tömegpontként** gondolunk. Ez igen jó közelítés biliárdgolyók ütközéseinek vizsgálatakor, egy atom vagy részecske pedig még inkább tömegpontnak tekinthető sok esetben. Ugyanakkor egy összetett rendszer, mint például egy autó, szintén kezelhető pontszerűként, ha a helyzetét, sebességét, gyorsulását vizsgáljuk, hiszen ekkor egyáltalán nem lényeges a kiterjedése vagy a geometriája. Egy tömegpontot egy adott időpillanatban a helyzetével tudunk megadni, ez (megfigyelő, azaz „origó” választása esetén, lásd alább) az  $\vec{r}$  helyvektort jelenti. A tömegpont teljes (múlt-, jelen- és jövőbeli) leírása a helyzetének időfüggésén keresztül érhető el, azaz  $\vec{r}(t)$  megadásával. Az alábbiakban ezt a függvényt vetjük vizsgálat alá.

A tömegpont leírásának alapja tehát az  $\vec{r}$  **helyvektor**, erre az origó (azaz a megfigyelő) kiválasztása ad lehetőséget.<sup>1</sup> A  $\Delta t = t' - t$  időtartam alatt történő elmozdulás legyen  $\Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$ . Definiálhatjuk ekkor az ezen időtartam alatti átlagos sebességet:

$$\vec{v}_{t,t'} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \left[ \frac{m}{s} \right]. \quad (2.1)$$

Ez tehát a  $[t, t']$  időintervallum alatti **átlagsebesség** definíciója. Ennek szokásos mértekegysége méter per másodperc (m/s) vagy kilométer per óra (km/h).

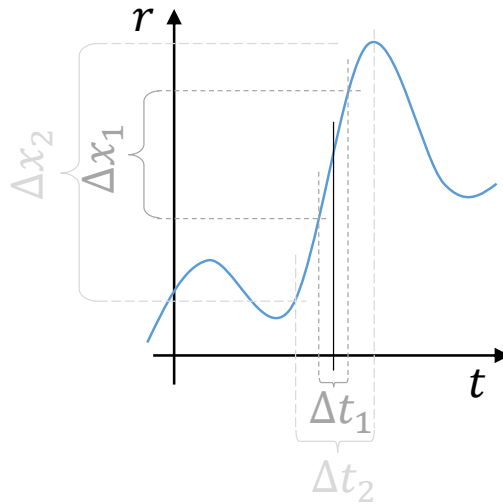
Sokszor azonban egy test **pillanatnyi sebességére** vagyunk kíváncsiak: mennyivel megy éppen most? Érdekes kérdés, hogy ezt hogyan lehet definiálni, hiszen egy időpillanat során a test egy helyen van, tehát a fenti hányados nevezője és számlálója is nulla. A határérték-számítás siet a segítségünkre: a fenti kifejezésben vegyük a  $\Delta t \rightarrow 0$  határátmenetet, azaz infinitezimális  $dt$  időtartamot és az ez alatti  $d\vec{r}$  elmozdulást:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t), \quad (2.2)$$

azaz ez éppen az  $\vec{r}(t)$  függvény idő szerinti deriváltja. Nagyon sokszor előfordul a fizikában, hogy ilyen „0/0” jellegű hányadost képezzünk a határérték-számítás segítségével. Ilyenkor mindig arra érdemes gondolni, hogy a hányadost egyre kisebb idő vagy egyéb mennyiség esetén vesszük, és ekkor a hányados maga egy adott értékhez konvergál, ahogy azt a 2.1. ábra illusztrálja. A pillanatnyi sebesség esetén gondolhatunk arra, hogy például egy autó átlagsebessége egy adott pillanat körüli másodpercben, tizedmásodpercben és századmásodpercben nagyjából ugyanannyi, és ha még kisebb időtartamokat vennénk, akkor határértékben éppen az adott pillanatbeli sebességet kapnánk meg.

<sup>1</sup>Ahogy fentebb említettük, beszélhetnénk a helyek affin teréről is, de az elmozdulás (két hely különbsége) origó választása nélkül is értelmezhető lenne vektorként.





2.1. ábra. A pillanatnyi sebesség értelmezése. Vegyünk az adott  $t$  időpillanat körül egyre kisebb  $\Delta t$  időtartamokat, és ezekben számítsuk ki az átlagsebességet. A  $\Delta t$  időtartam nullához tartása esetén az átlagsebesség határértéke éppen a  $v(t)$  pillanatnyi sebesség lesz. Ez az ábra tanúsága alapján éppen az  $r(t)$  grafikon  $\dot{r}(t)$  deriváltja.

A **átlagos** és a **pillanatnyi gyorsulás** hasonlóan értelmezhetőek:

$$\vec{a}_{t,t'} = \frac{\Delta \vec{v}}{t' - t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad (2.3)$$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) \frac{d \frac{d\vec{r}}{dt}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t). \quad (2.4)$$

A gyorsulás tehát a sebesség idő szerinti deriváltja, illetve a helyzet idő szerinti második deriváltja, azaz  $v = \dot{r}$  és  $a = \dot{v} = \ddot{r}$  (az idő szerinti deriváltat ponttal jelöljük). Mértékegysége többnyire méter per másodperc négyzet ( $\text{m/s}^2$ ). Lehetne a hely többi (még magasabb rendű) deriváltjait is vizsgálni, néha a harmadik deriváltat is definiálják (és „rándulásnak” nevezik). Ugyanakkor erre többnyire nincs szükség: a kinematika alapfogalmai a hely, a sebesség és a gyorsulás.

### 2.1.2. A megfigyelő szerepe a kinematikában

Ahogy eddig is hangsúlyoztuk, a hely (és emiatt a sebesség és a gyorsulás is) **megfigyelőfüggő**: máshol és más sebességgel mozognak látja a levegőben szálló rovat az autópályán száguldó autó vezetője és a leállósávban vesztegelő kamionos. Egyszerűen beláthatjuk, hogy mozgó megfigyelők vagy objektumok egymáshoz képesti sebessége egy harmadik megfigyelőhöz, illetve objektumhoz képesti sebességük összege, azaz „a sebességek összeadódnak”: 100 km/h sebességű autóból 10 km/h-val kidobott teniszlabda az út mellett álló megfigyelő szerint 110 km/h-val mozog. Ezen hétköznapi tapasztalat bizonyítása a következő. Legyen egy adott megfigyelő (avagy vonatkoztatási rendszer) szerint egy tömegpont helye  $\vec{r}(t)$ . Ha az adott megfigyelőnkhez képest egy másik megfigyelő  $\vec{r}_m(t)$  vektorral „arrébb” található (ami persze időben is változhat), akkor szerinte

a tömegpont helye  $\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_m(t)$ . Ebből deriválással  $\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{v}_m(t)$ , továbbá  $\vec{a}'(t) = \vec{a}(t) - \vec{a}_m(t)$  adódik. Ennek van néhány alapvető következménye:

- Ha a megfigyelők egymáshoz képest egyenletesen mozognak ( $v_m =$  állandó, azaz  $a_m = 0$ ), akkor egy tetszőleges objektum gyorsulása szerintük megegyezik – ez később fontos lesz.
- Ha egy megfigyelő szerint két jármű  $\vec{v}_a$  és  $\vec{v}_b$  sebességgel mozog, akkor a  $b$  járműből nézve a jármű  $\vec{v}_a - \vec{v}_b$  sebességgel mozog.
- Ha egy megfigyelő szerint egy jármű  $\vec{v}_a$  sebességgel mozog, és a járművön egy ember a járművön ülő megfigyelő szerint  $\vec{v}_b$  sebességgel mozog, akkor az eredeti megfigyelő szerint az ember  $\vec{v}_a + \vec{v}_b$  sebességgel mozog.

A fentiekre rengeteg példát lehetne hozni: autóból kidobott labda, vonaton sétáló ka-lauz, bolygók körül keringő holdak és műholdak, az úrállomáson úrsétát végző úrhajós, a folyón haladó hajó, a repülő által észlelt szél és így tovább.

A megfigyelők azonban nemcsak az origót jelölhetik ki, de a derékszögű koordináta-rendszer három tengelyét is. Bizonyos mozgások esetében alkalmas koordináta-rendszert választva a folyamat egyszerűbben leírható: a célegyenesben haladó versenyautó helyvektora csak az  $x$  irányban nem nulla, ha a célegyenes irányában vesszük fel az  $x$  tengelyt. A foci pályán szaladó játékosok pozíciójának meghatározásához elég két komponens, ha a  $z$  irányt a pályára merőlegesen („felfelé”) vesszük fel. A tér tehát háromdimenziós, de sok mozgás maga csak egy- vagy kétdimenziós, és ezeket egyszerűen tudjuk kezelni. A következőkben erre látunk példákat.

### 2.1.3. Egydimenziós mozgások

Ha egyenes mentén való mozgásnál a koordináta-rendszert megfelelően vettük fel, akkor  $x$  iránya a mozgás irányába mutat: ekkor a helyvektornak csak egy komponense van. Így tehát a helyet, a sebességet és a gyorsulást is vektor helyett egyszerűen számként kezelhetjük. Lássuk az egydimenziós (egyenes vonalú) mozgások néhány egyszerű példáját.

Az **egyenletes mozgás** során a sebesség állandó (azaz a gyorsulás nulla). Ekkor

$$r(t) = r_0 + v \cdot t, \quad (2.5)$$

$$v(t) = v_0 \text{ (állandó)}, \quad (2.6)$$

$$a(t) = 0. \quad (2.7)$$

Figyeljük meg, hogy valóban igaz, hogy  $a(t) = \dot{v}(t)$  és  $v(t) = \dot{r}(t)$ . Egyenletes mozgásra példa a tempomattal közlekedő autó, a zuhanó esőcsepp (az út nagy részén már nem gyorsul, ahogy azt később látni fogjuk), vagy a guruló biliárdgolyó.

Az **egyenletesen gyorsuló mozgás** során a gyorsulás állandó:

$$r(t) = r_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2, \quad (2.8)$$

$$v(t) = v_0 + a \cdot t, \quad (2.9)$$

$$a(t) = a_0 \text{ (állandó)}. \quad (2.10)$$

Egy  $[0, t]$  időtartam alatt megtett út ez alapján  $s_{[0,t]} = v_0 t + \frac{a}{2} t^2$ , illetve ezen a szakaszon az átlagsebesség:  $v_{[0,t]} = v_0 + \frac{a}{2} t$ . Ilyen mozgásra példa a feldobott/leejtett tárgy mozgása, azaz a szabadesés, de az elrajtoló versenyautó is így mozog egy rövid ideig. Fontos látni, hogy a „lassulás” is gyorsulás, csak ekkor a sebesség és a gyorsulás iránya ellenkező.

A **harmonikus rezgőmozgás** is egydimenziós mozgás. Később látni fogjuk, hogy az ilyen mozgásnak kiemelten fontos szerepe van a természetben. Így mozog egy rugóra kötött test, vagy a kristályrácsban kötött atom is:

$$r(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi), \quad (2.11)$$

$$v(t) = A\omega \cdot \cos(\omega t + \phi), \quad (2.12)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \phi). \quad (2.13)$$

Az elnevezések:  $A$  a mozgás amplitúdója,  $\omega$  pedig a körfrekvencia. A körfrekvencia segítségével megadható a frekvencia, amely az adott mozgásállapot időegységenkénti ismétlődéseinek számát adja meg:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (2.14)$$

Az ismétlődés periódusideje (azaz azonos mozgásállapot kétszeri elérése között eltelt idő) ebből adódóan

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.15)$$

Továbbá a  $\phi$  fázis a mozgás kezdeti kitérését jelöli ki, ugyanis  $r(t=0) = A \sin \phi$ . A fázis változtatása lényegében egy időbeli eltolásnak felel meg, hiszen például  $t = T/2$  idővel későbbtől nézve a mozgás a szinuszhullám  $\phi = \pi$  szöggel arrébb lévő pontjából indul.

Rezgőmozgások összegei is előkerülhetnek: gondoljunk egy rugó végén lévő testre erősített másik rugóra, vagy találkozó hullámokra. Ha az összeadódó rezgések azonos frekvenciájúak, akkor az  $r_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1)$  és  $r_2(t) = A_2 \cdot \sin(\omega t + \phi_2)$  kitéréseket kell összeadni: ez  $r_1(t) + r_2(t)$ . Az összetétel is az eredeti frekvenciájú harmonikus rezgőmozgás lesz,  $A$  amplitúdója pedig  $A_1 + A_2$  és  $|A_1 - A_2|$  között bármi lehet, attól függően, hogy a  $\phi_1$  és a  $\phi_2$  fázisok hogyan viszonyulnak egymáshoz. A két rezgés tehát erősítheti, gyengítheti, és akár ki is olthatja egymást. Maximális erősítés ( $A = A_1 + A_2$ ) akkor lép fel, ha a két rezgés fázisa azonos, azaz  $\phi_1 = \phi_2$ . Maximális gyengítés ( $A = |A_1 - A_2|$ ) akkor történik, ha a rezgések fázisa ellentétes, azaz  $|\phi_2 - \phi_1| = \pi$ . Utóbbi eset azonos amplitúdók esetén kioltást eredményez.

Különböző  $\omega_1$  és  $\omega_2$  frekvenciájú rezgések összetétele bonyolult lehet, és nem is biztos, hogy periodikus mozgás. Többet mondhatunk, ha a két frekvencia,  $\omega_1$  és  $\omega_2$  alig különbözik egymástól:  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$ ,  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_2$ . Ilyenkor azt mondhatjuk, hogy az átlagos  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  frekvenciával jön létre rezgés (ez az átlagfrekvencia tehát alig különbözik akármelyiktől), és ennek a rezgésnek az amplitúdója lassan,  $|\omega_1 - \omega_2|/2$  frekvenciával változik (azaz  $\cos((\omega_1 - \omega_2)t/2)$  szerint): bizonyos időpillanatokban az amplitúdó a minimális, máskor a maximális. Ez a lebegés nevű jelenség: hangszerek (húrok) hangolásánál hasznos.

### Kísérlet: szabadesés vizsgálata

- Néhány méter magasságból ejtsünk le egy tárgyat, és többen is mérjük meg a zuhanási idejét.
- A leejtéskor elindított stopper a reakcióidőnkkel később indul, a beérkezésre viszont számítunk, így érdemes az indítást is egyeztetett módon megtenni, hogy a reakcióidő minél kevésbé befolyásolja a mérésünket.
- A mérést lassítható videofelvétellel is végezhetjük, ekkor a lassításból kikérhetjük az indulás és az érkezés időpontját.
- Mérjük meg a magasságot, és az átlagos mért zuhanási időből határozzuk meg a gyorsulást, az időmérések szórásából pedig a mért gyorsulás bizonytalanságát!

#### 2.1.4. Kétdimenziós mozgások

A tér harmadik dimenzióját „kihagyó” mozgások kétdimenziósak, ekkor a mozgás síkja az  $x$ ,  $y$  sík. A két irányban történő mozgás független egymástól, ezért kétdimenziós mozgások két darab egydimenziós mozgásból rakhatók össze.

Egyszerű eset, ha a gyorsulásvektor állandó (azaz a nagysága és az iránya is), de nem párhuzamos a kezdősebességgel, ekkor **hajításról** beszélhetünk. Így mozog egy eldobott kő, egy eldobott dartsnyíl, a megütött teniszlabda. A kezdősebességet így írjuk fel:

$$\vec{v}_0 = (v_x, v_y) = (|\vec{v}_0| \cos \alpha, |\vec{v}_0| \sin \alpha). \quad (2.16)$$

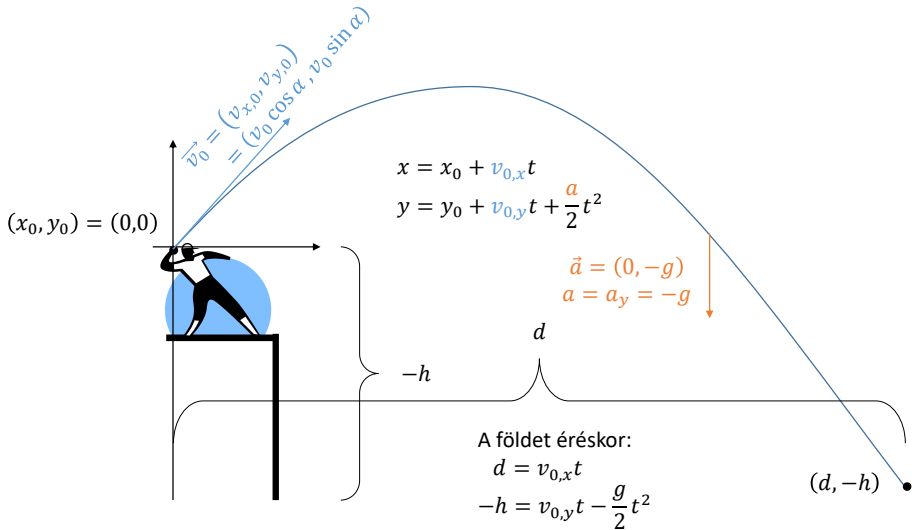
Az  $\alpha$  itt tehát a kezdősebességnek az  $x$  tengellyel bezárt szöge.

Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy a gyorsulás az  $y$  irányba mutasson (például egy tárgy elhajítása esetén a gyorsulás függőleges, legyen tehát ez az  $y$  irány, míg az  $x$  a vízszintes irány). Ekkor tehát az  $x$  irányban egyenes mozgás,  $y$  irányban lefelé mutató, egyenes gyorsulás alakul ki:

$$x(t) = x_0 + v_x t = x_0 + |\vec{v}_0| \cos(\alpha) t, \quad (2.17)$$

$$y(t) = y_0 + v_y t + \frac{a}{2} t^2 = y_0 + |\vec{v}_0| \sin(\alpha) t + \frac{a}{2} t^2. \quad (2.18)$$

Egy ilyen „hajítás” esetén gyakran feltett kérdés, hogy az eldobott tárgy milyen messzire repül, mekkora sebességgel ér földet, és mennyi repülés után. A kérdés megválaszolásához meg kell határozni a kezdőpozíciót: legyen ez az origó, az  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0, 0)$  pont. A vízszintes mozgás egyenes, tehát a földet érés  $x$  koordinátája (melyet  $d$ -vel jelölünk, ez az elért „messziség”) és  $t_f$  időpontja között teljesül, hogy  $d = v_x t_f$ . A mozgás teljes idejét,  $t_f$ -et a függőleges mozgásból határozhatjuk meg: ha a hajítás egy  $h$  magasságú épületről történt, akkor földet éréskor az  $y$  koordináta értéke  $-h$ , hiszen a kezdőpont volt az origó. A gyorsulás valójában lefelé mutat, tehát negatív előjellel vehetjük, a megoldandó egyenlet innen  $-h = v_y t_f - \frac{a}{2} t_f^2$ . Ezen formula segítségével kísérletet is végezhetünk: a repülési idő és távolságok mérésével a gyorsulás meghatározható. Fontos tapasztalat, hogy a Föld felszínéhez közel szabadon elengedett tárgyak gyorsulása  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  (a valóságban ezt a gyorsulást csökkenti a közegellenállás, ahogy látni fogjuk, illetve  $g$  értéke csekély mértékben a földrajzi koordinátáktól is függ). A hajítást illusztrálja a 2.2. ábra.



2.2. ábra. A hajítás kinematikája. Az ábrán látható módon kaphatjuk meg, hogy egy adott irányban adott sebességgel elhajított labda (tömegpont) milyen messzire repül. A gondolatmenet kiindulópontja, hogy a két dimenzióban független a mozgás, tehát a földet érésig megtett vízszintes út a függőleges zuhanás idejéből kapható meg.

A kétdimenziós mozgások másik egyszerű esete a **körmozgás**. Itt a pont pályája egy kör, amelynek definíciója szerint  $|\vec{r}| = R = \text{állandó}$  (ha célszerűen az origót a kör középpontjába tesszük). A pont helyzetét az  $x$  és  $y$  koordináta megadása helyett egy szöggel is definiálhatjuk, azaz megadhatjuk a helyet polárkoordinátákban:

$$\vec{r}(t) = (R \sin \alpha(t), R \cos \alpha(t)). \quad (2.19)$$

Definiálhatjuk továbbá a **szögsebességet** mint az időegység alatti elfordulást:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}. \quad (2.20)$$

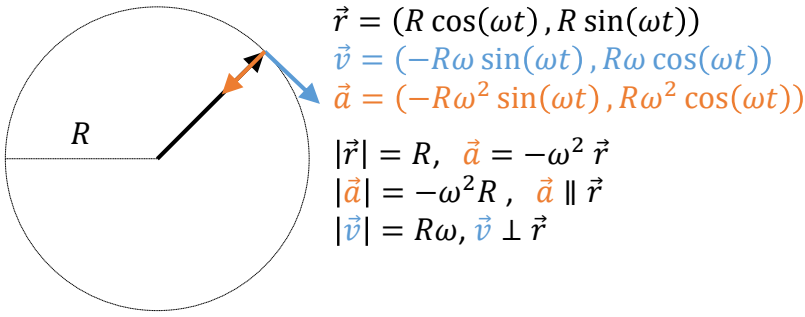
**Egyenletes körmozgásról** beszélünk, ha  $\omega$  állandó. Ekkor a  $T$  periódusidő (teljes kör, azaz  $2\pi$  megtételéhez szükséges idő) és a szögsebesség  $\omega = 2\pi/T$  módon függ össze. Az adott helyzethez tartozó szög pedig a szögsebesség állandósága miatt  $\alpha(t) = \omega t$ . A hely, a sebesség és a gyorsulás pedig:

$$\vec{r}(t) = (R \sin(\omega t), R \cos(\omega t)), \quad (2.21)$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (R\omega \cos(\omega t), -R\omega \sin(\omega t)), \quad (2.22)$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = (-R\omega^2 \sin(\omega t), -R\omega^2 \cos(\omega t)). \quad (2.23)$$

Innen könnyen belátható, hogy  $\vec{r} \perp \vec{v}$ , hiszen a  $\vec{r} \cdot \vec{v}$  skalárszorzatuk nulla (a komponensek szorzása és összeadása alapján). A sebességvektor nagysága is könnyen kiszámítható:  $|\vec{v}(t)| = \omega R = \text{állandó}$ , és miután ez a helyre merőleges, azaz kerületi irányú, kerületi sebességnek nevezzük. Szintén belátható, hogy  $\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$ , azaz a gyorsulás-



2.3. ábra. A körmozgás kinematikája. Látható, hogy míg a hely-, sebesség- és gyorsulásvektorok iránya egyenletesen forog, addig hosszuk állandó, és a kör sugarából és a szögsebességéből adódik.

és a helyvektor párhuzamosak. Előbbit (azaz körmozgás esetén a kör középpontja felé mutató gyorsulást) centripetális gyorsulásnak nevezzük, nagysága pedig

$$|\vec{a}_{cp}| = \omega^2 |\vec{r}| = \omega^2 R. \quad (2.24)$$

Mindezeket a 2.3. ábra illusztrálja. Az is belátható, hogy az egyenletes körmozgást végző test  $x(t)$  és  $y(t)$  koordinátája is éppen harmonikus rezgést végez, hiszen például  $x(t) = R \sin(\omega t)$ ; és itt a szögsebesség éppen a körfrekvenciával egyezik meg.

Az egyenletes körmozgásra jó példa a Föld Nap körüli keringése. Ennek során körülbelül 365 nap alatt tesz meg egy teljes kört, szögsebessége tehát  $\omega = 2\pi/(365 \text{ nap})$ , azaz körülbelül  $2 \cdot 10^{-7}$  1/másodperc. Az ehhez tartozó sebesség a pálya átlagosan 150 millió kilométeres sugarát figyelembe véve körülbelül 30 km/s, azaz 100 000 km/h! Ekkora átlagos sebességgel mozog tehát a Föld a Nap körüli pályáján. Érdekes azt is megemlíteni, hogy a Föld saját tengelye körüli forgásának szögsebessége  $2\pi/\text{nap}$ , a Földnek az egyenlítőnél vett 6378 km-es átlagos sugarával számolva ebből 463 m/s, azaz körülbelül 1700 km/h sebesség adódik. Ekkora sebességgel mozgunk tehát a Föld tengelye körül – az egyenlítőnél, máshol a kisebb sugár miatt a földrajzi szélesség koszinuszával szorzott érték adódik.

Nem egyenletes körmozgás esetén lehet **szöggyorsulásról** is beszélni, ennek definíciója értelemszerűen  $\beta = d\omega/dt = d^2\alpha/dt^2$ . Ha  $\beta \neq 0$ , akkor van érintőirányú gyorsulás is, ezt  $a_{\perp}$  módon jelölhetjük, és nagysága  $|\vec{a}_{\perp}| = R\beta$ . Változó módon gyorsuló körmozgást végez például az inga, amelynek függőlegessel bezárt szöge  $\alpha = \alpha_0 \cos(2\pi t/T)$  szerint változik.

Érdekes hozzáfűzni, hogy a szögsebességre (és a szöggyorsulásra is) sokszor vektorként tekintünk, amely a forgástengely irányába mutat, a jobbkéz-szabály szerint (azaz ha jobb kezünk behajlított ujjai irányába történik a forgás, akkor  $\vec{\omega}$  a hüvelykujjunk irányába mutat). A szögsebesség vektor jellegét is figyelembe véve a sebességre a  $\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$  összefüggés lesz érvényes az egyszerű  $v = R\omega$  helyett – mivel eddig síkbeli mozgásról beszélünk, az  $\vec{r}$  vektor mindig merőleges volt a forgástengelyre, ezért a két felírás egyenértékű. Általánosabb esetben, nem síkbeli körmozgás esetén azonban már a vektoriális összefüggést kell figyelembe vennünk: ilyen kerül elő például a forgó Föld felszínén való mozgások tanulmányozásakor.

## 2.2. Newton törvényei

### 2.2.1. Isaac Newton

Isaac Newton annyira jelentős alakja a klasszikus fizikának, hogy életét nagyon röviden itt is összefoglaljuk. Newton 1642. december 25-én született Woolsthorpe Manorban, Angliában, földműves apja halála után három hónappal. Tizenkét és tizenhét éves kora között a The King's Schoolba járt Granthamben, ahol matematikát nem tanult (de latint igen). 17 éves korában az időközben újrarázasodott anyja újra megözvegyült, ezért hazavitték azzal a céllal, hogy (akarata ellenére) a földeken dolgozzon. Iskolai tanára javaslatára azonban visszamehetett, és ekkor már éltanuló lett.

1661-ben nagybátyja ajánlásával felvették a cambridge-i Trinity College-ba. Itt előszörban Arisztotelész munkái alapján tanítottak, de Newton modern tudósok eredményeit is tanulta, mint például Descartes, Galilei vagy Kepler. 1665-ben felfedezte a binomiális tételt, és elkezdte kifejleszteni matematikai elméletét, amelyet később **kalkulusnak** neveztek el. Ezután a cambridge-i iskola a pestis miatt két évre bezárt. Newton ez alatt jelentős fejlődést ért el matematikai munkáival, valamint a **gravitáció** és az **optika** kutatása terén. 1667-ben visszatért Cambridge-be, és 1669-ben professzor lett. Ebben az évben írta meg a *De analysi per aequationes numeri terminorum infinitas* („A végtelen sorok elemzéséről”) és a *De methodis serierum et fluxionum* („A sorok és fluxiók módszeréről”) című műveit, amelyek lefektették a **differenciálszámítás és integrálszámítás** alapjait (a könyvek azonban fizikai megfontolásokon nyugvó levezetésekre épültek). Ugyanakkor Leibniz tőle függetlenül szintén kifejlesztette lényegében ugyanezeket a matematikai módszereket, és ezért komoly vita és ellenségeskedés volt közöttük. Ma Leibniz jelölésrendszerét használjuk, a brit matematikusok is ezt vették át az 1800-as években. Newton vitára kész, de nem teljesen jóindulatú természetét illusztrálja Hooke-nak írt levele, akivel szintén vitában állt (optikai felfedezésekkel kapcsolatban): „Ha messzebbre láttam, mint mások, csak azért volt, mert óriások vállán álltam”. Ezzel (az egyébként XII. századi metaforával) sokak szerint nem szerénységét fejezte ki, hanem Hooke alacsony termetén gúnyolódott.

Newton fő műve, a *Philosophiae naturalis principia mathematica* („A természetfilozófia matematikai alapjai”) avagy a „*Principia*” 1684-87 között íródott. Ebben (noha még nem a maga által kifejlesztett differenciálszámítási jelölést használta, hanem szóban fogalmazta meg állításait) lefektette a **klasszikus mechanika alapjait**, amelyek bizonyos keretek között (nem túl nagy sebességek, nem túl nagy vagy túl kicsi távolságok és méretek, nem túl nagy tömegek) máig érvényesnek bizonyultak. Könyvében definíciókat és axiómákat adott meg, majd részletezte a testek mozgásának leírását, bevezette a **gyorsulás**, a **tehetetlen tömeg** és az **erő** fogalmát, és beszélt a sűrűlődről és a gravitációról. Fő cél számára a mozgás okának kutatása volt. A megfigyelőkkel és koordináta-rendszerekkel is foglalkozott, bevezette az **inerciarendszer** fogalmát is.

Élete második felében politikai pályára lépett, az angol parlament tagja lett, a Királyi Pénzverde vezetője, 1705-ben pedig (sokak szerint az azon évben tartott választásokkal összefüggésben) lovaggá ütötték. 1727. március 20-án álmában hunyt el Londonban, sírja a westminsteri apátságban található.

### 2.2.2. Newton három törvénye

A görög természetfilozófia korában azt gondolták, hogy minden mozgás fenntartásához hatásra van szükség, a testek természetes állapota a nyugalom, ezért minden magától megáll. **Newton első törvénye** alapvetően megújította ezt a világgépet, kimondva, hogy

*egy test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását, amíg valami annak megváltoztatására nem kényszeríti.*

Ez persze nem minden megfigyelő szerint van így: az induló vonatból nézve a pályaudvar peronján álló bőrönd magától elindulni látszik („hátrafelé”). Azt a koordináta-rendszert (avagy megfigyelőt), ahol a fenti törvény, Newton első törvénye tényleg igaz, **inercia-rendszernek** nevezzük (a „tehetetlenség” jelentésű latin „inercia” szóból).

Ha megfelelő koordináta-rendszert, azaz inerciarendszert választunk, akkor tehát a mozgásállapot megváltozása csak kölcsönhatás eredményeként következhet be. Egyszerűen látható, hogy inerciarendszerek egymáshoz képest nem gyorsulhatnak, hiszen ha tennék, az egyik szerint nyugvó, magára hagyott test a másik szerint gyorsulna. Ezért néha azt mondjuk, hogy az inerciarendszerek „nem gyorsuló” koordináta-rendszerek, ami valamelyest pongyola fogalmazás, hiszen valójában egymáshoz képest nem gyorsulnak.

Gyorsuló koordináta-rendszerben viszont természetesen elmozdulhatnak tárgyak maguktól, ezekben nem érvényes Newton első törvénye (és a többi is csak módosított formában lesz az). Ilyen a gyorsuló lift, repülő, autó, vagy az éppen elinduló vonat: a padlóra rakott bőrönd magától elgurul/felborul. Ezt részletesebben a tehetetlenségi erőknél tárgyaljuk.

Newton első törvényének fenti megfogalmazása tehát mintha kicsit „körkörös hivatkozás” lenne. (Hol érvényes a törvény? Válasz: inerciarendszerben. Mi az inerciarendszer? Válasz: ahol érvényes Newton első törvénye.) Valójában azonban mégis kimondható pozitív tartalmú állítás, a következőképpen: *létezik* olyan rendszer (amit akkor inerciarendszernek hívhatunk), amiből nézve egy magára hagyott test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását. Ebből persze, mint láttuk, következik, hogy egy inerciarendszerhez képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző másik rendszer is inerciarendszer.

Egy konkrét inerciarendszert nem is olyan egyszerű megnevezni: a Föld eleve forog és kering, de a Naprendszer is kering a Tejútrendszer középpontja körül. Az ezekhez rögzített koordináta-rendszerek nem inerciarendszerek! A gyakorlatban elhanyagolható az ebből adódó hatás, jó közelítéssel igaz, hogy a Földön a magukra hagyott tárgyak nem mozdulnak meg maguktól.

**Newton második törvénye** azt is megadja, hogy mi történik, ha egy testet „nem hagyunk magára”, azaz valamilyen módon hatunk rá. Ekkor a test gyorsulni kezd, és a testre ható erő arányos a test gyorsulásával, azaz

$$\vec{F} = m\vec{a}, \text{ vagy ha több erő is van, akkor } \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}. \quad (2.25)$$

Mindez csak inerciarendszerben igaz.



A fenti definíció tulajdonképpen az  $m$ -mel jelölt tömeg definíciója is. Ez a test állandó tulajdonsága, amely a „gyorsíthatóságát befolyásolja”, azaz a tehetetlenségét jelenti. Az egyenletben  $F$  az erőt jelöli, ez a mennyiség hozza létre a gyorsulást. Mértékegysége a N (newton). Egy test akkor tarthatja meg mozgásállapotát (azaz akkor nem gyorsul), ha a rá ható erők összege nulla. A test egyensúlyának feltétele tehát a  $\sum_i \vec{F}_i = 0$  egyenlet, és ekkor  $a = 0$ . Vegyük észre, hogy ebből természetesen következik az első törvény: pontosan akkor nincsen gyorsulás, ha nincsen erő sem (vagy ezek összege nulla). Ez a legfontosabb mechanikai törvény, minden mechanikai probléma esetén ebből kell kiindulnunk.

Fontos ugyanakkor látni, hogy nem inerciarendszerben magától megmozdulhat egy tárgy: gyorsulhat erő nélkül, mert itt nem érvényes ez a Newton-törvény sem. Hogy mégis használhassuk, illetve hogy „megmagyarázzuk” az erő nélküli gyorsulást, bevezetünk képzeletbeli erőket, amelyeket figyelembe lehet venni a tényleges erőkön kívül. Ezen képzeletbeli erők a tehetetlenségi erők,  $\vec{a}$ -val gyorsuló rendszerben a tehetetlenségi erő nagysága  $-m\vec{a}$ . Egy gyorsuló rendszerben, ha csak a tehetetlenségi erő hat a testre, „kívülről” nézve nem gyorsul, de „belülről”, a gyorsuló rendszerből nézve igen, mivel „kimozog” alóla a koordináta-rendszer. A belülről nézett gyorsulása ekkor éppen a rendszer gyorsulásának az ellentettje, tehát  $-a$ . Ezt pedig csak egy  $-ma$  erő okozhatná, ha érvényes lenne a második Newton-törvény. Ezért vezetjük be egy ilyen erő létezését. Jó példa erre a forgó koordináta-rendszer, amelynek minden pontja a középpont felé gyorsul (ez a centripetális gyorsulás), így ezzel ellentétes  $m \cdot a$  tehetetlenségi erő „jön létre”: ez a centrifugális erő. A tehetetlenségi erőket részletesebben a 2.3.1. szakaszban tárgyaljuk.

**Newton harmadik törvénye** a következőképpen foglalható össze:

*Ha egy test erővel hat egy másikra, akkor a másik ugyanakkora, ellentétes irányú erővel hat az elsőre.*

Ez utóbbit ellenerőnek hívjuk, a törvény tehát az erő-ellenerő törvényének is nevezhető. Ezen törvény figyelembevételére is szinte minden mechanikai probléma esetén szükség van. Például az asztalon nyugvó tárgyat a súlyának megfelelő erővel tartja azt asztal (tehát a tárgy tényleg nem gyorsul, nem esik át az asztalra), így tehát a tárgy is ugyanekkora erővel nyomja az asztalt. A padló nyomja felfelé a rajta álló embert, az ember pedig lefelé a padlót. A Hold vonzza a Földet, a Föld pedig ugyanekkora erővel vonzza a Holdat. A puská nagy erővel gyorsítja a golyót – de a golyó is visszalöki a puskát ugyanekkora erővel, az pedig a lövést.

### 2.2.3. Newton törvényeinek egyszerű alkalmazásai

Newton első törvényét például egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén alkalmazhatjuk: ilyen mozgás esetén nincs gyorsulás, így Newton törvénye alapján az így mozgó tárgyra nem hatat erő. A második törvénnyel előrejelzést is tehetünk: állandó erő esetén egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás jön létre. Miután tapasztalataink szerint a Földön magukra hagyott (elengedett) testek állandó  $a = g$  **nehézségi” gyorsulással** zuhannak lefelé, ezért Newton második törvényéből adódóan rájuk  $F = mg$  erőnek kell hatnia. Ezt nevezzük nehézségi erőnek, vagy másképp az adott test súlyának.

Kétdimenziós mozgásokban is alkalmazhatjuk a második törvényt: ha  $\vec{F}$  állandó (mint például egy hajítás esetén), akkor  $\vec{a}$  állandó. Ha tehát csak a függőlegesen lefelé mutató  $mg$  nehézségi erő hat a testre, akkor a gyorsulásvektora is függőleges, nincs vízszintes komponense: vízszintesen tehát egyenletes mozgást végez az elhajított test. Egy másik példa az egyenletes körmozgásé, itt (ahogy korábban láttuk) a gyorsulás (a centripetális gyorsulás) a középpont irányába mutat, nagysága pedig  $|a| = \omega^2 R = |v|^2/R$ . Ilyen mozgást Newton második törvénye alapján csak olyan erő okozhat, amely mindig a középpont felé mutat, és nagysága pedig

$$F_{cp} = mR\omega^2. \quad (2.26)$$

Ha ilyen összefüggésben beszélünk róla, a körmozgást „okozó” erőt **centripetális erőnek** hívjuk. Minden körmozgást végző testre összesen éppen ekkora erőnek kell hatnia, ezért végezhet körmozgást. Hogy mi fejt ki az erőt, az már a konkrét példa kérdése, de lehet például a kötél (pörgetett tárgy esetén), a gravitáció (műholdak, bolygók mozgása) vagy a biztonsági öv (kanyarodó autó esetén).

### Kísérlet: gravitációs gyorsulás mérése

- Hasonlóan a korábbi kísérlethez, itt is ejtsünk le egy tárgyat néhány méter magasságból, és többen is mérjük meg a zuhanási idejét, stopperrel történő mérés esetén a reakcióidő szerepére ügyelve.
- Az átlagos zuhanási időből – egyenletes gyorsulást feltételezve – számítsuk ki, hogy mekkora volt a gyorsulás.
- Vessük ezt össze az ismert nehézségi gyorsulási értékkel, és a tárgy tömegét is ismerve határozzuk meg a gravitáción kívül fellépő (közegellenállási) erő nagyságát.

#### 2.2.4. Lendület és tömegközéppont

Newton második és harmadik törvényének fontos következménye, hogy bevezethetjük a **lendület** fogalmát, illetve beláthatjuk annak megmaradását. Newton egyenlete alapján  $F = ma$ , azaz  $F = m\dot{v}$ . Eszerint egy  $\Delta t$  idő alatt ható átlagos erő

$$F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t}, \quad (2.27)$$

azaz az  $mv$  mennyiség időegység alatti megváltozása. Ezt nevezzük el impulzusnak vagy magyarul lendületnek:

$$p = mv, \text{ tehát } F = \frac{\Delta p}{\Delta t}, \text{ innen } \Delta p = F\Delta t. \quad (2.28)$$

Az impulzus standard mértékegysége  $\text{kgm/s}$ . Egy  $36 \text{ km/h}$  ( $10 \text{ m/s}$ ) sebességű, egytonnás autó impulzusa például  $10\,000 \text{ kgm/s}$ , míg egy  $180 \text{ km/h}$  ( $50 \text{ m/s}$ ) sebességű,  $100 \text{ g}$  tömegű teniszlabdáié  $5 \text{ kgm/s}$ .

Alkalmazzuk most Newton harmadik törvényét. Eszerint két tárgy kölcsönhatásuk során  $F$ , illetve  $-F$  erővel hat egymásra. Ha külső erők nincsenek, akkor az impulzusok megváltozása:  $\Delta p_1 = F\Delta t$  és  $\Delta p_2 = -F\Delta t$ . Innen az összimpulzusuk megváltozása

$\Delta p = \Delta(p_1 + p_2) = \Delta p_1 + \Delta p_2 = 0$ . Azaz az összipulzus változatlan, másképpen:  $p_1 + p_2 = \text{állandó}$ . Ez az **impulzusmegmaradás törvénye**, amely igen nagy jelentőségű törvény a fizikában, minden körülmények között érvényes marad (még a kvantumfizika és a relativitáselmélet világában is, ahol sok más törvény megkérdőjeleződik vagy módosul). Ebből adódik, hogy egy falon/földön azonos sebességgel, rugalmasan visszapattanó labda által átadott impulzus  $\Delta p = 2mv$ , mivel  $mv$  lendületből  $-mv$  lesz. A labda által kifejtett erőhatás az impulzusátadás sebességétől függ, mivel  $F = \Delta p / \Delta t$ . Az előző bekezdés végén említett teniszlabda tehát  $10 \text{ kgm/s}$  impulzust ad át a Földnek, amely körülbelül  $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  tömege miatt ekkor  $10^{-24} \text{ m/s}$  nagyságrendű sebességgel kezd ellenkező irányú mozgásba. Ez persze lényegében elhanyagolható. (Ugyanakkor száz év alatt annyi teniszlabdát pattintanak le világszerte, hogy annak akár hatása is lehetne – vagy nem? A következőkben erre is választ kapunk.)

Az impulzusmegmaradás szerint tehát két tömegpont esetén  $m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{állandó}$ , azaz ugyanannyi minden pillanatban. Ezt úgy is írhatjuk, hogy  $m_1 \dot{r}_1 + m_2 \dot{r}_2 = \text{állandó}$ , azaz:

$$m_1 \frac{\Delta r_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta r_2}{\Delta t} = \frac{\Delta(m_1 r_1 + m_2 r_2)}{\Delta t} = \text{állandó}. \quad (2.29)$$

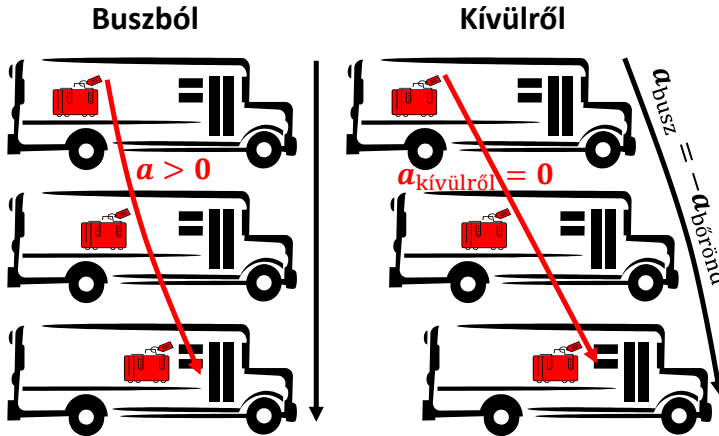
Ez tehát azt jelenti, hogy ha bevezetjük a tömegközéppont  $r_{\text{tkp}} = (m_1 r_1 + m_2 r_2) / (m_1 + m_2)$  helyét és az  $m = m_1 + m_2$  össztömeget, akkor:

$$m \frac{\Delta r_{\text{tkp}}}{\Delta t} = m v_{\text{tkp}} = \text{állandó}. \quad (2.30)$$

Ez az  $r_{\text{tkp}}$  hely jelöli ki a rendszer **tömegközéppontját**, amely háborítatlanul mozog, egyenes mozgást végez, ha nem hat a rendszerre kívülről semmilyen erő. Ennek oka az, hogy a rendszeren belül ható, belső erők nem tudják megváltoztatni a rendszer összesített impulzusát. A fentiekben ezt két tárgyából álló rendszerre vezettük le, de természetesen általánosságban is igaz. Tehát valójában akárhány labdát is pattintunk le a Földön, a Föld és a rajta lévő összes tárgy összesített tömegközéppontja akkor sem mozdul el sosem. Egy mozgó labda esetében is fontos ez: benne az atomok és molekulák mozgásban vannak, kölcsönhatnak, de a tömegközéppont úgy mozog, mint ha a labda egy pont lenne. Ezért kezelhetjük a sok pontból álló rendszereket is egy tömegpontként, ha csak az „egészében” való mozgásra vagyunk kíváncsiak.

### Kísérlet: tömegközéppont mozgásának vizsgálata

- Egy mérőszalag mellett vizsgáljuk meg két labda egydimenziós mozgás során történő ütközését.
- Néhány időpillanatban vizsgáljuk meg a tömegközéppont helyzetét.
- A helyzetek különbségéből következtessünk a sebességre.
- Ha az ütközésen kívül minden egyéb hatás elhanyagolható, akkor a tömegközéppont várhatóan állandó sebességű mozgást végez. Ellenőrizzük, hogy ez így van-e.



2.4. ábra. A tehetetlenség illusztrációja: a fékező buszból nézve a bőrönd „magától” gyorsul, míg kívülről nézve a busz lassul, a bőrönd pedig egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

## 2.3. Látszólagos erők nem inerciális rendszerekben

### 2.3.1. Tehetetlenségi erők

Ahogy a fentiekben láttuk, **nem inerciarendszerben** magától megmozdulhat egy tárgy, azaz **gyorsulhat erő nélkül**, mert itt nem érvényesek a Newton-törvények. Hogy mégis használhassuk őket, bevezetünk képzeletbeli erőket, amelyeket figyelembe lehet venni a tényleges erőkhöz kívül, és velük Newton második törvénye használható marad. A harmadik törvény ugyanakkor továbbra is sérül: ezen képzeletbeli erőknek nincs ellenerejük, ugyanis nem azonosítható egyetlen tárgy sem ezek kifejtőjeként, így „nincs kire visszahatni”.

Képzeljünk el egy gyorsuló (lassuló) rendszert, például egy fékező buszt, és ebben egy bőröndöt. Amikor a busz fékezik, a bőrönd kívülről nézve háborítatlanul mozog tovább, egyenletes mozgással, mivel nem hat rá erő. De belülről nézve gyorsul, mivel „kimozog” alá a koordináta-rendszer. A gyorsulása éppen a rendszer gyorsulásának az ellentettje, tehát  $-a$ . Ezt pedig csak egy  $-ma$  erő okozhatja, ha érvényben akarjuk tartani a Newton-törvényt. Ezen képzeletbeli erő a **tehetetlenségi erő**,  $a$ -val gyorsuló rendszerben a nagysága

$$F_{\text{tehetetlenség}} = -ma. \quad (2.31)$$

Ezt illusztrálja a 2.4. ábra, ahol a fékező (hátrafelé gyorsuló) buszból nézve a bőrönd kezd el előrefelé gyorsulni, míg kívülről nézve a bőrönd egyenletesen mozog, csak a busz „kifékezik” alá. A tehetetlenségi erő bevezetése megoldja ezt a furcsa problémát: az  $a$  gyorsulással hátrafelé gyorsuló buszban lévő  $m$  tömegű tárgyakra  $ma$  nagyságú, *előrefelé mutató* erő hat, ez „löki előre” a bőröndöt. Az utast ezzel az erővel szemben a biztonsági öv, a súrlódás vagy az előtte lévő ülés tartja a helyén.

A körmozgás esetében azt mondhatjuk, hogy minden keringő rendszer a keringés

középpontja felé gyorsul  $a = r\omega^2$  centripetális gyorsulással, ezért a keringő rendszerből nézve a fentiek értelmében egy ezzel ellentétes irányú tehetetlenségi erő jelenik meg: ez a **centrifugális erő**. Ez tehát forgó koordináta-rendszerben kifelé hat, minden, a koordináta-rendszerből megfigyelt testre. Nagysága:

$$F_{cf} = mr\omega^2. \quad (2.32)$$

Jó példa erre a kanyarodó autó, a körhinta, illetve a klasszikus ruhaszárító *centrifuga* is (ahol a ruha préselődik a dob széléhez). Érdekes továbbá, hogy a Földön ez csökkenti a mérhető súlyunkat ( $mg$ ) is, méghozzá  $r\omega^2/g$  arányban, ha  $\omega$  a Föld szögsebességének felszínre merőleges komponense. A Föld 24 órás periódusidejéből

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86\,400\text{ s}} \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}. \quad (2.33)$$

Ennek felszínre merőleges komponense  $\sin \phi$ -vel arányos, ha  $\phi$  a szélességi fok. Budapesten innen az adott tömeg mért súlyának csökkenése 0,001%, alig érzékelhető.

A tehetetlenségi erők szélsőséges példája az úgynevezett **súlytalanság** esete: ha a Földön vagy a Föld körül keringve valaki lefelé gyorsul  $g$  gyorsulással, akkor az ő rendszerében ébredő tehetetlenségi erő és a gravitációs erő éppen kiejtik egymást, így összességében látszólag (belülről nézve) nem hat erő az ebben a rendszerben megfigyelt tárgyakra. Ezért „lebeg” az elengedett toll vagy vízcsepp az űrállomáson, holott kívülről nézve a Föld középpontja felé gyorsul.

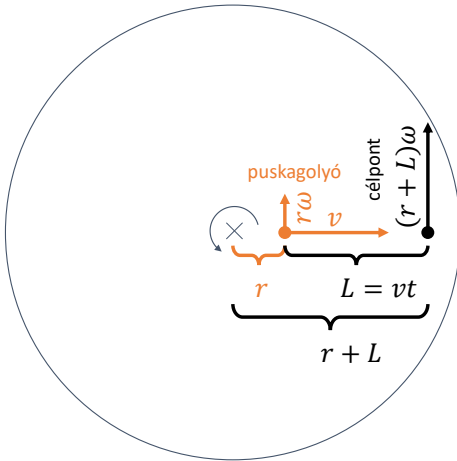
### Kísérlet: tehetetlenségi hatások

- Valamilyen mozgó (tömeg)közlekedési járművön helyezünk el egy labdát.
- Filmezzük le, ahogy fékezés vagy kanyarodás esetén „magától” elmozdul.
- Gondoljuk meg, mit láttunk volna, ha a labda mozgását kívülről figyeltük volna!

### 2.3.2. A Coriolis-hatás

A **Coriolis-hatás** forgó koordináta-rendszerben megfigyelt mozgó testek esetében jelentkezik. Megmagyarázható a **Coriolis-erő** segítségével, amely egy tehetetlenségi erő: forgó koordináta-rendszerben jelentkezik, de különbözik a már látott centrifugális erő-től. Eredetileg Foucault kísérlete hívta fel rá a figyelmet: ennek során egy hosszú ingát állítottak fel a párizsi Panteonban, amelynek lengési síkja elforgott (lassan, órák alatt, a Föld forgásával összefüggően). Ez rámutatott arra, hogy a Föld nem inerciarendszer.

A Coriolis-hatást megérthetjük a következő leegyszerűsített példán. Tekintsünk egy forgó korongon a középpont irányából  $v$  sebességgel kifelé kilőtt puskagolyót. Az eredeti sugárkoordinátája legyen  $r$ , és utazzon  $t$  ideig: ekkor megtesz  $L = vt$  utat, azaz  $t$  idő múlva a sugárirányú helye  $r+L$  lesz. A kilövés pillanatában a kerületi sebesség  $v_{\perp} = r\omega$ , így érintőirányban a puskagolyó megtett útja  $v_{\perp}t = r\omega t$ . Az  $L$  távolságban lévő célpont helyén a kerületi sebesség viszont  $(r+L)\omega$ , azaz a célpont érintőirányban  $(r+L)\omega t$  utat tesz meg, többet, mint a kilőtt puskagolyó. A korongról nézve tehát a célpont „elmozog” a puskagolyó elől: a puskagolyó  $s = (r+L)\omega t - r\omega t = L\omega t$  oldalirányú elmozdulással elvéteti a célt. Ezt felírhatjuk a  $v$  sugárirányú sebességgel is:  $s = L\omega t = v\omega t^2$ . Ezt a kerületi elmozdulást egy  $a_{\perp}$  kerületi gyorsulással értelmezhetjük, amivel  $s = a_{\perp}t^2/2$  utat



$$\text{sebességkülönbség: } L\omega = vt\omega$$

$$\text{eltérés: } s = L\omega t = v\omega t^2$$

$$\text{egyenletes gyorsulás esetén: } s = \frac{a_{\perp}}{2} t^2$$

$$\text{innen a Coriolis-gyorsulás: } a_{\perp} = 2v\omega$$

2.5. ábra. A Coriolis-erő nagysága és iránya megérthető, ha a test mozgása közben az „alóla kiforgó” korongon lévő célpont által megtett utat és a kiindulási pont útját is figyelembe vesszük.

tennénk meg: hogy megkapjuk az előző kiszámolt eredményt, az kell, hogy  $a_{\perp} = 2v\omega$  legyen. Tehát a puskagolyó a forgó korongról nézve úgy mozog, hogy a sebességére merőleges  $a = 2v\omega$  nagyságú gyorsulása van: ez a Coriolis-hatás. A fenti levezetés illusztrációjaként lásd a 2.5. ábrát.

Ha a sebesség és a szögsebesség irányát is figyelembe vesszük (azaz a  $v$  sebesség nem feltétlenül merőleges az  $\omega$  szögsebességre), akkor a gyorsulás

$$\vec{a}_{\text{Coriolis}} = 2\vec{v} \times \vec{\omega}, \quad (2.34)$$

ahol ugye az  $\vec{\omega}$  szögsebességvektor a forgástengely irányába mutat. A Coriolis-gyorsulást tehát az okozza, hogy nem vagyunk inerciarendszerben, és emiatt a fenti,  $a_{\text{Coriolis}}$  mértékű „ok nélküli” gyorsulás lép fel. Ezért bevezethetjük a szokásos tehetetlenségi erőt, amelynek neve ebben az esetben Coriolis-erő:

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}. \quad (2.35)$$

Ez a Coriolis-erő a  $\vec{v}$  sebességre és az  $\vec{\omega}$  szögsebességre is merőleges irányú. Tehát például a Föld felszínén, mérsékelt égövi szélességeknél észak-déli mozgás esetén a felszínnel párhuzamosan kelet-nyugati irányba mutat, hiszen ez az irány merőleges mind a forgástengelyre, mind a felszíni sebességre. Ez téríti el az észak-déli irányban mozgó tárgyakat, amelyre jó példa a kilőtt puskagolyó, légáramlatok és szélrendszerek mozgása, illetve a Foucault-inga (amelynek lengési síkjára mindig merőleges a fellépő erő, ezért ez a sík elforog).

Ha az északi vagy a déli sarkon vagyunk (ahol a felszíni sebességünk pontosan merőleges a Föld szögsebességvektorára), és a megteendő távolság  $L$ , az ilyen irányú sebesség pedig  $v$ , akkor  $t = L/v$ , azaz

$$s = vt^2\omega = \frac{L^2\omega}{v}, \quad (2.36)$$

a relatív elmozdulás pedig  $s/L = L\omega/v$ . Ennek nagysága határozza meg, hogy szükséges-e az eltérítő hatással egyáltalán foglalkozni: ha  $s/L \ll 1$ , azaz  $s \ll L$ , akkor az eltérítés nem lényeges.

Ha nem éppen az egyik sarkon vagyunk, hanem alacsonyabb szélességi körökön mozgunk É-D irányban, akkor a szögsebesség és a sebesség nem merőleges egymásra, hanem  $\phi$  szöget zárnak be, ahol  $\phi$  a földrajzi szélességi kör szöge (az Egyenlítőn  $\phi = 0$ ). Így a Coriolis-gyorsulás (és az erő) nagysága a keresztszorzás miatt  $|\sin(\phi)|$  mértékben változik, azaz ekkor ezek nagysága

$$a_{\text{Coriolis}} = 2v\omega |\sin \phi|, \quad (2.37)$$

$$F_{\text{Coriolis}} = 2mv\omega |\sin \phi|. \quad (2.38)$$

A szélességi kör hatását figyelembe véve végső soron az eltérülés  $L$  nagyságú észak-déli irányú távolság  $v$  sebességgel való megtétele esetén

$$s = \frac{a}{2}t^2 = v\omega |\sin \phi|t^2 = \frac{L^2\omega \sin \phi}{v}, \quad (2.39)$$

a relatív eltérülés pedig

$$\frac{s}{L} = \frac{L\omega \sin \phi}{v}. \quad (2.40)$$

Ahogy az előző szakaszban említettük, a Föld forgásának szögsebessége  $\omega \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}$ . Budapesten (ahol a szélességi fok kb 47 fok, azaz  $\sin \phi \approx 0,74$ ) 1 m/s É-D irányú sebesség esetén, 1 m megtételénél körülbelül 0,05 mm az eltérülés. Az elterjedt vélekedés tehát, hogy a lefolyókban a körkörös lefolyás irányát a Coriolis-hatás szabja meg, biztosan *nem* igaz. Ugyanakkor  $v = 10$  m/s sebesség esetén az eltérülés 1 km megtétele után 5 m, 10 km-nél 500 m, 100 km-nél 50 km, azaz itt már a Coriolis-erő a legjelentősebb hatás lehet!

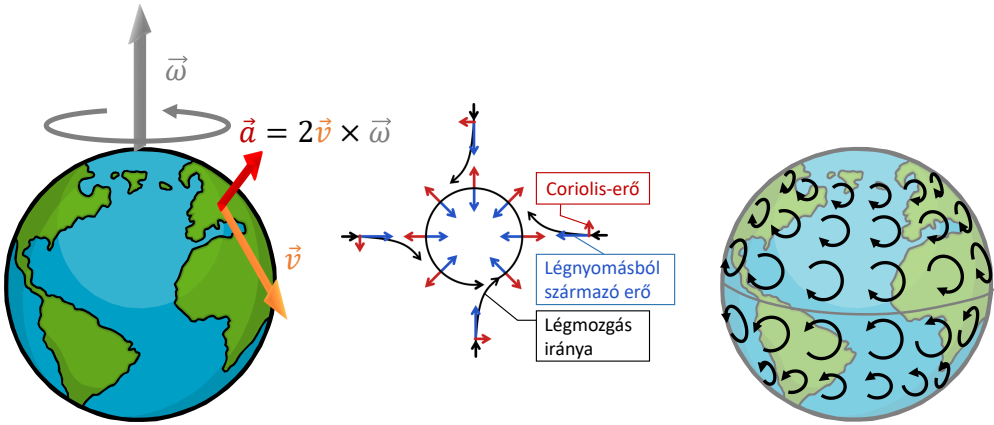
A nyomáskülönbség irányába fújó szelet valóban eltéríti a Coriolis-erő, és az izobár vonal mentén fog fújni. Körkörös áramlatok alakulnak ki mind az alacsony, mind a magas nyomású területek körül; előbbieket **ciklonoknak**, utóbbiakat **anticiklonoknak** nevezzük. A ciklonok áramlási iránya az északi féltekén az óra járásával ellentétes, délen megegyező irányú. Ezt illusztrálja a 2.6. ábra. További érdekes jelenség, hogy a Coriolis-erő miatt a folyók a hosszú egyenes szakaszokon az északi féltekén a jobb partot<sup>2</sup> erősebben mossák.

Érdemes azt is megemlíteni, hogy különböző áramlások leírása esetén gyakran hasznosak a dimenzió nélküli számok, amelyek a különböző sebesség- vagy méretskálával rendelkező rendszerek hasonlóságát mutatják. A Coriolis-hatás erősségét jelző ilyen dimenziótlan mérőszám az úgynevezett **Rossby-szám**, amely tulajdonképpen a Coriolis-erő miatti relatív eltérülés inverze, azaz  $L/s$ , pontosabban ennek fele:

$$\text{Ro} = \frac{v}{2L\omega \sin(\phi)}. \quad (2.41)$$

Kis Rossby-szám esetén a Coriolis-erő hatása nagy. Tornádóban  $\text{Ro} = 10^3$ , alacsony nyomású cellákban 1 körüli vagy kisebb lehet. Hétköznapi példát említve észrevehetjük,

<sup>2</sup>A folyó jobb partja a jobb kezem felé van, ha a folyó felett a folyás irányába nézek. Ennek megfelelően a Dunán például a budai a jobb part.



2.6. ábra. Alacsony nyomású légtömegek körül a Coriolis-jelenség következtében kialakuló légáramlatok. A Coriolis-erő a szögsebesség és a sebesség vektoriális szorzatából adódik, így az északi féltekén ez az erő jobbra térít el, a délin pedig balra. Alacsony nyomású területek körül az északi féltekén az óramutató járásával ellentétes irányú áramlás alakul ki, ezt ciklonnak nevezzük. Az anticiklonokban (az ábra jobb oldalán látható módon) éppen ellentétes áramlás alakul ki: az északi féltekén az óramutató járásának megfelelő, délen azzal ellentétes.

hogyan a víz mosdóbeli lefolyása esetén is igen nagy Rossby-számok adódhatnak (a kis távolság miatt), így ezen rendszer viselkedését tipikusan nem a Coriolis-erő határozza meg.

Ha a mozgás nem észak-déli irányú, úgy a Coriolis-erőnek lesz a felszínre merőleges (függőleges) komponense is (hiszen ekkor  $\vec{\omega}$  és  $\vec{v}$  keresztiszorzata nem párhuzamos a felszínnel). Ha adott egy  $v_{\text{kny}}$  kelet-nyugati irányú sebesség, akkor ez egy részben észak-déli Coriolis-erőt, részben azonban egy függőleges irányú erőt fog eredményezni. Pontosabban maga az erő  $2mv_{\text{kny}}\omega$  nagyságú lesz, de ennek  $\cos \phi$  része függőleges lesz (azaz a test súlyát változtatja meg),  $\sin \phi$  része pedig észak-déli irányú lesz (és eltérítő erőként működik). A súlyváltozást Eötvös Loránd munkája nyomán Eötvös-hatásnak nevezzük. A tárgy eredeti súlyához képest a változás Budapesten, 10 m/s kelet-nyugati irányú sebességnél 0,01% nagyságrendbe esik.

Érdekes megemlíteni, hogy nagy, világháborús csatahajók ágyúival való célzásakor (ilyen hajóágyúk tonnás lövedékeket lőttek ki akár 20 km-es távolságra is) már jelentős hatást okozhat a Coriolis-erő. Az eltérülés függ az ütközet helyétől (földrajzi szélességtől), illetve attól is, hogy milyen égtáj irányában lövik ki a lövedéket. Akár nagyságrendileg 100 méteres céltévesztést jelenthet a Coriolis-erő figyelembe nem vétele, ami már összemérhető az egyéb zavaró hatásokkal (légellenállás, a hajó billegése stb.).

Érdekes az 1915-ös falklandi tengeri csata példája, amely a déli szélesség körülbelül 50. fokánál játszódott le. Az angolok célzóberendezései ebben az időben igen nagy távolságra megfelelőek voltak, akár több 10 km-re lévő célt is eltalálhattak. Ez esetben azonban a legenda szerint eleinte több tíz vagy száz méterrel elvétették a célt, a Coriolis-erő miatt – ugyanis az Angliában fellépő hatás itt ugyanakkora, de ellentétes irányú eltérülést eredményez, a korrekciós berendezéseik tehát éppen hogy növelték a céltévesztést! Ez a történet ugyanakkor valószínűleg csak legenda, a valóságban a



Coriolis-hatás okozta eltérélnél kevésbé voltak pontosak az ágyúk, így minden bizonytalansággal nem léteztek ilyen „korrekciós” berendezések. A legenda valóságtartalmának ennél részletesebb elemzését az olvasóra bízunk.

### **Kísérlet: víz lefolyása mosdóban**

- Engedjük tele egy mosdót vízzel, majd húzzuk ki a dugót.
- A vízbe színezéket vagy porszemeket cseppentve vizsgáljuk meg, milyen irányban kering a víz a lefolyás során.
- Végezzük el a kísérletet többször, több mosdóval, és határozzuk meg, van-e egyértelmű törvényszerűség a keringés irányát illetően.
- Ha van rá lehetőségünk, a déli féltekén élő ismerőseinkkel is végeztessünk el hasonló kísérletet, és vessük össze a tapasztaltakat!

## 2.4. Egyszerű dinamikai rendszerek

### 2.4.1. Harmonikus oszcillátor, visszacsatolás, rezonancia

A 2.1.3. szakaszban láttuk, hogy a rezgőmozgás során a helyzet  $r = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$  módon függ az időtől, így a gyorsulás  $a = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \phi)$ , azaz  $a = -\omega^2 r$ . Az ezt létrehozó erő  $F = -m\omega^2 r$  kell hogy legyen, tehát az egyensúlyi helyzettől való eltéréssel arányos, és azzal ellentétes irányú. Ezt **negatív visszacsatolásnak** nevezzük, hiszen az erő az azt „okozó” kitérés ellenében hat. Az ilyen erő a fentiek értelmében rezgőmozgást hoz létre az egyensúlyi helyzet körül, ha a rendszert „kitérítjük”, majd magára hagyjuk. A rendszer ekkor felvett frekvenciája a „sajátfrekvencia”, amelyen magától oszcillál.

Induljunk most visszafelé: abból, hogy egy testre a nyugalmi helyzetéből való kitérése esetén  $F = -Dr$  erő hat. Az erő tehát arányos a kitéréssel, és azzal ellentétes irányú. Ha figyelembe vesszük, hogy a gyorsulás a helyzet második deriváltja, és felírjuk Newton második törvényét, akkor a negatívan visszacsatolt rendszer, a **harmonikus oszcillátor** differenciálegyenletét kapjuk meg:

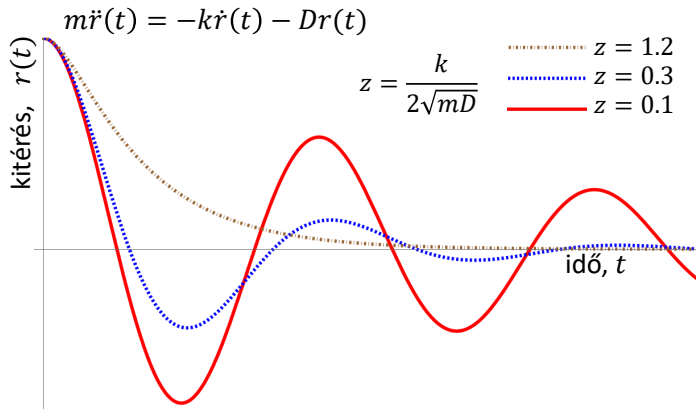
$$m\ddot{r}(t) = -Dr(t), \quad \text{ebből tehát} \quad r(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi), \quad \text{ahol} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (2.42)$$

Az  $\omega = \sqrt{D/m}$  a rendszer saját körfrekvenciája, illetve ebből  $f = \sqrt{D/m}/2\pi$  a sajátfrekvencia. Ennek egyszerű következménye az, hogy minél nagyobb az adott kitéréshez tartozó visszatérítő erő (azaz minél nagyobb a  $D$  együttható), annál nagyobb lesz a rendszer sajátfrekvenciája. Azonos erő, de nagyobb tömegű test esetében viszont lassabb lesz a rezgés.

A természetben sokszor fordul elő negatív visszacsatolás (gazdaság, ökológia, kémia, fizika), ezért a fentiekben leírt harmonikus oszcilláció gyakori. A negatívan visszacsatolt rendszereket **önszabályozónak** is nevezzük, hiszen a rendszerben fellépő erő vagy hatás az egyensúlyi helyzetbe való visszatérést segíti. Ilyen rendszerre példa a rugó, amely  $F = -Dr$  erőt hoz létre. Populációs modelleket is lehet példának hozni: legyen egy faj számára rendelkezésre álló táplálék fix mennyiségű. Ekkor ha alacsony az egyedszám, akkor könnyű a táplálékhoz való hozzáférés, magas a szaporulat. Ha viszont magas az egyedszám, akkor épp emiatt alacsony a szaporulat. Ezen egyszerű modellben az ideális egyedszám körüli harmonikus oszcillációt figyelhetünk meg.<sup>3</sup> Hasonlóan a gazdaságban is oszcillációkat figyelhetünk meg, a ciklusok élénkülés, virágzás, válság és pangás egymásutánjának ismétlődését jelentik. Mindegyik rendszer közös jellemzője az egyensúly felé visszatérítő hatás, azaz a negatív visszacsatolás.

A **pozitív visszacsatolás** annyiban különbözik ettől, hogy ekkor az erő a kitéréssel azonos irányba hat. Így minél nagyobb a kitérés, annál nagyobb az erő, így még nagyobb a kitérés, és ezért még nagyobb az erő, és így tovább (ez a pozitív visszacsatolás lényege). Ennek differenciálegyenlete  $m\ddot{r}(t) = +Dr(t)$  és az így működő rendszerek minden határon túl erősödnének, mert az egyenlet megoldása exponenciális függvény,  $r(t) = Ae^{\bar{\omega}t}$ , ahol  $\bar{\omega}^2 = D/m$ . Egy idő után a rendszer fizikai korlátai gátolják a további

<sup>3</sup>Ez csak személtetése a problémának; valójában használatos, értelmes modell például a Lotka–Volterra-egyenletek által felállított rendszer, amely ragadozó és zsákmány populációdinamikájának kölcsönhatását írja le.



2.7. ábra. Test kitérésének időfüggése csillapított rezgés esetén. Látható, hogy a  $z$  csillapítási hányadostól függ a rezgés lecsengése.

erősödést. Pozitívan visszacsatolt rendszer például egy ritka, de sikeres faj egyedszámának változása: minél többen vannak, annál több utódot nemzenek, ezért kezdetben akár exponenciálisan nőhet a számuk. Ugyanígy, egy piaci vákuumban megjelenő vállalat bevételei is exponenciálisan nőhetnek: a hasznot visszaforgatva nő a termelés, ami tovább növeli a hasznot. Mindkét esetben egy idő után egyfajta telítődés indul be, és megszűnik a pozitív visszacsatolás.

A fentiekben idealizált, súrlódástól, közegellenállástól és egyéb „lassító” erőktől mentes rendszereket tárgyaltunk. A valóságban ezen csillapító erőket is figyelembe kell venni, amelyek a rendszerben tárolt energia csökkenését, disszipációját eredményezik. Egyszerűen tárgyalhatóak az úgynevezett **csillapított rezgések**, amelyekben a mozgást a sebességgel arányos erő lassítja. A megoldandó differenciálegyenlet ekkor

$$m\ddot{r}(t) = -kr(t) - Dr(t), \quad (2.43)$$

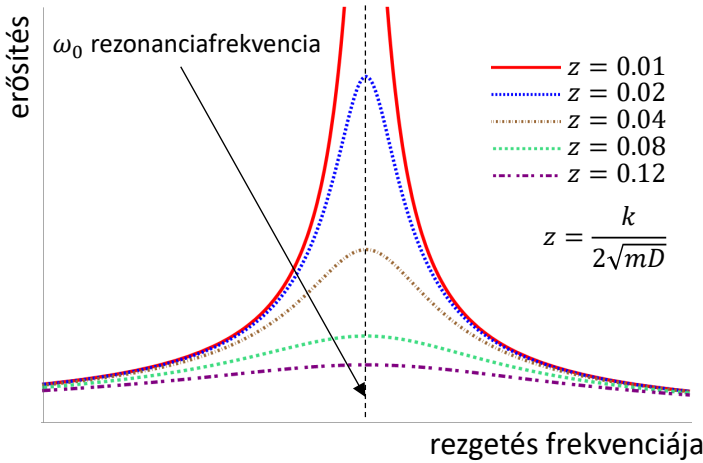
és ennek megoldása egyre csökkenő amplitúdójú oszcilláció, ahogy azt a hétköznapi rezgések során láthatjuk.

A differenciálegyenlet megoldása alapján a rezgés amplitúdója a  $z = k/2\sqrt{mD}$  csillapítási hányadostól függően csökken az időben, ahogy azt a 2.7. ábra mutatja. Mindez azonban csak  $z < 1$  esetén igaz,  $z \geq 1$  esetén a rendszer oszcilláció nélkül visszatér a kezdeti helyzetébe (még hozzá  $z = 1$  esetén a leggyorsabban). A  $z$  hányados a rezgésben tárolt energia rezgési periódusonként elvesztett (disszipálódott) részét jelképezi.

**Kényszerrezgés** esetén egy  $\omega$  körfrekvenciájú periodikus rezgető erő hozza létre az oszcillációt. Ekkor a rendszer differenciálegyenlete

$$m\ddot{r}(t) = -kr(t) - Dr(t) + F_0 \sin(\omega t), \quad (2.44)$$

Ennek megoldása bonyolult, itt most nem írjuk fel. Azt azonban fontos tudni, hogy adott  $F_0$  amplitúdójú rezgetés hatására egy idő után beáll valamekkora amplitúdóval egy oszcilláció. Hogy mekkora maximális rezgési amplitúdó jöhet létre, az a csillapítástól és a rezgető erő  $\omega$  körfrekvenciájától függ. A rezgető erőhöz képest az amplitúdó



2.8. ábra. A kényszerrezgés során létrejövő erősítés a rezgés frekvenciájának függvényében, különböző csillapításokra. Maximális az erősítés, ha a rezgés frekvenciája megegyezik a rendszer sajátfrekvenciájával (azaz a rezonanciafrekvenciával). Csillapítás híján ilyenkor az erősítés minden határon túlnő, azaz a rendszer eléri fizikai korlátait.

jelentősen felerősödhet, különösen akkor, ha a rezgés frekvenciája közel van a rendszer  $\omega_0 = \sqrt{D/m}$  saját körfrekvenciájához: ez a **rezonancia** jelensége. Ezt úgy érthetjük meg, ha a hinta példájára gondolunk: ha mindig a jó pillanatban lökjük meg, akkor mindig gyorsítunk rajta kicsit, ezért a rezgés amplitúdója nagyon nagyra nőhet, kis „lökdösés” hatására is. Gondolhatunk egy jó ütemmel rázott fára is: ha a fa saját „lengésének” frekvenciáját eltaláljuk, igen nagy kilengésre kényszeríthetjük. Az erősítés az  $1/\sqrt{(2z\omega_0)^2 + (1 - \omega^2/\omega_0^2)^2}$  alak szerint írható fel, ahol  $z = k/2\sqrt{mD}$  továbbra is a csillapítási hányados,  $\omega_0 = \sqrt{D/m}$  pedig a rendszer sajátfrekvenciája. A 2.8. ábrán láthatjuk az erősítés csillapítás- és frekvenciafüggését. Az erősítés nő, ahogy  $\omega$  közeledik  $\omega_0$  értékéhez (hiszen ekkor a gyök alatti kifejezés egyre kisebb), azaz egyre inkább eltaláljuk a rendszer sajátfrekvenciáját.<sup>4</sup> Nagyon kis csillapítás esetén ekkor extrém nagy erősítés léphet fel, azaz a rendszer eléri a fizikai korlátait (összedől, eltörik satöbbi). Ez a **rezonanciakatasztrófa** jelensége.

### Kísérlet: rezonancia létrehozása

- Szemeljünk ki egy rögzített, de rezgésre képes tárgyat: a tábla, egy pad, egy oszlop megfelelő lehet.
- Próbáljuk meg kilengetni, különféle gyorsasággal és erősséggel megmozgatva.
- Állapítsuk meg, hogy magára hagyva milyen frekvenciával rezeg tovább.
- Vegyük észre, hogy ezen a sajátfrekvencián rezgetve igen kis erősségű hatással is nagy kilengés érhető el.

<sup>4</sup>Az erősítés valójában akkor a legnagyobb, ha a rendszer éppen az  $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2z^2}$  rezonanciafrekvencia értékét veszi fel, amely kis csillapítás ( $z \ll 1$ ) esetén körülbelül megegyezik a rendszer  $\omega_0$  sajátfrekvenciájával.

### 2.4.2. Közegenállás

A csillapító erők egyik jó példája a **közegenállás**, amely bizonyos körülmények között a sebességgel arányos, azzal ellentétes irányú erőt hoz létre:  $F \sim -v$ .<sup>5</sup> Ha a közegenállási együttható  $\alpha$ , akkor az erő

$$F = -\alpha v. \quad (2.45)$$

A légkörben való zuhanás során a sebesség egyre nő, emiatt viszont a légellenállás is egyre nő. Ha a légellenállás éppen megegyezik a gravitációs erővel, kiejtik egymást. Ekkor tehát a testre ható erők összege nulla, azaz egyenletes mozgás jön létre. Ennek feltétele tehát  $F = mg - \alpha v = 0$ , innen a zuhanás határsebessége

$$v_{\max} = \frac{mg}{\alpha}. \quad (2.46)$$

Az esőcseppek ezen jelenség miatt nem ütnek lyukat az esernyőkbe (vagy annak híján a fejünkbe): az  $s = at^2/2$  és  $v = at$  összefüggésekből egyenletes gyorsulás esetén  $v = \sqrt{2sa}$  sebességet érnének el. Ezért 1000 m magasságból 10 m/s<sup>2</sup> gyorsulással zuhanva körülbelül 140 m/s, azaz körülbelül 500 km/h sebességük lenne. Ehelyett sokkal korábban beáll egy egyenletes sebességük, és azzal érnek földet.

Nagy sebességeknél azonban a sebesség négyzetével arányos erő lép fel, pontosabban ekkor a közegenállás

$$F = \frac{1}{2} \rho c A v^2 \quad (2.47)$$

nagyságú, ahol  $c$  a test alakjára jellemző arányossági tényező,  $A$  a tárgy sebességre merőleges felülete (keresztmetszete),  $\rho$  a közeg sűrűsége.<sup>6</sup> Az alaktényező 0,1–1,0 körüli szám („áramvonalas” testre 0,05 is lehet, autók esetén 0,3 körüli, kockára 1,05). Autókra a  $cA$  szorzat 0,5–1 m<sup>2</sup> körüli értéket vesz fel, tehát a  $v^2$  előtti tényezők szorzata 0,3–0,6 kg/m nagyságrendben van, azaz a közegenállási erő összességében 10 m/s (36 km/h) sebességnél 30–60 N, míg 30 m/s (108 km/h) esetén 270–540 N, és 50 m/s (180 km/h) esetén 750–1500 N. Ekkora erőt kell tehát kifejtenie az autónak, ha a légellenállás ellenében egyenletes sebességgel akar haladni.

### 2.4.3. Kényszererők és súrlódás

A felületek között fellépő **nyomóerő** úgynevezett **kényszererő** típusú erő, ugyanis éppen akkora értéket vesz fel, hogy megakadályozza az egyik felület (test) „beszakadását” a felületbe. Síklapra helyezett  $m$  tömegű tárgy esetén  $F_{\text{ny}} = mg$  nagyságú nyomóerő lép fel, ugyanis éppen ekkora erőre van szükség, hogy kiegyenlítsük a testre ható gravitációt. Van többnyire egy maximális lehetséges értéke, amely felett mégis beszakad a felület. Ez a maximális érték azonban függhet a felület nagyságától is (ezért nem sülyed

<sup>5</sup>Az állítás alacsony sebességek esetén igaz, ha a test körüli áramlás lamináris, és nem turbulens. Később látni fogjuk, hogy a közegenállási erőt az úgynevezett Stokes-törvény adja meg ilyen esetekben.

<sup>6</sup>Ekkor a test körüli áramlás turbulenssé válik, emiatt már nem lesz érvényes a Stokes-törvény.

be a hóba a nagy felületű síléc, míg a kis felületű láb igen; lásd még a szög és a fal viszonyát).<sup>7</sup> Hasonló kényszererő a kötélerő és a tartóerő, amelynek maximális értéke az adott anyag szakítószilárdságától függ (lásd még a rugalmasságról szóló szakaszban).

A **tapadás** (amelyet néha tapadási súrlódásnak is neveznek) is egy kényszererő, értéke éppen akkora, hogy a test a felülethez tapadjon, azaz ne csússzon meg. Van ugyanakkor egy maximális lehetséges értéke, ez az  $F_{ny}$  nyomóerővel arányos, az arányossági tényező pedig a  $\mu_0$  tapadási együttható. Az alábbi állítás igaz tehát a tapadási erőre:

$$F_t < \mu_0 F_{ny}. \quad (2.48)$$

A tapadási együttható értéke az érintkező anyagokra jellemző állandó. Gumi és aszfalt között 0,8, míg vas-vas viszonylatban körülbelül 0,25 a tapadási együttható. Ez utóbbi „hajtja” a vonatot, míg az előbbi az autót: a kerék súrlódás híján úgy forogna, hogy az alja hátrafelé mozdulna el (a teteje pedig előre felé). A tapadás ezt az elmozdulást gátolja meg, ami végeredményben egy előre felé mutató erő.

Egy  $\phi$  szögű lejtőn megcsúszás akkor következik be, ha a tapadási erő nem tud elég nagy lenni ahhoz, hogy ellentartsa a gravitáció lejtővel párhuzamos komponensének, azaz ha  $F_{t,max} < mg \sin \phi$ . Mivel azonban

$$F_{t,max} = \mu_0 F_{ny} = \mu_0 mg \cos \phi, \text{ ezért a megcsúszás feltétele} \quad (2.49)$$

$$\mu_0 mg \cos \phi < mg \sin \phi, \text{ azaz } \mu_0 < \tan \phi. \quad (2.50)$$

Ebből  $\phi$  ismeretében  $\mu_0$  mérhető, ahogy az alábbi kísérletben azt meg is tesszük.

A tárgyak felületei között mozgás esetén egy másik típusú erő lép fel, a **súrlódás** (amelyet a tapadástól megkülönböztetendő csúszási súrlódásnak is nevezhetünk). Ez egy, a nyomóerőhöz kapcsolódó csillapító jellegű erő, amely azonban nem függ a sebesség nagyságától, csak az irányától: azzal ellentétes irányba mutat. Ez az erő a súrlódó felületek közötti  $F_{ny}$  nyomóerővel arányos. Az arányossági tényező  $\mu$ , a súrlódási együttható, és ezzel az erő így írható fel:

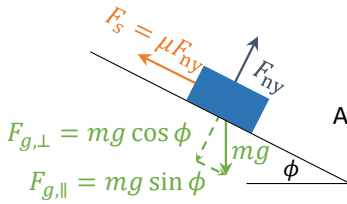
$$F_s = \mu F_{ny}. \quad (2.51)$$

Néhány példa csúszási súrlódási együtthatóra: fa-fa: 0,5, acél-acél: 0,1, acél-jég: 0,01. A súrlódási és a tapadási együttható többnyire  $\mu_0 > \mu$  módon viszonyul egymáshoz, az érintkező anyagokra jellemző állandó mindkettő.

Nézzünk meg egy konkrét példát: a súrlódási erő hatását egy test  $\phi$  meredekségű **lejtőn** való csúszása esetén. Ekkor az első feladatunk rajz készítése és az erők felírása. A megoldás kulcsa az **erők felbontása** egy lejtővel párhuzamos, illetve arra merőleges komponensre. A lejtőre merőleges irányban nincs mozgás (hiszen ekkor „felszálna” vagy „beszakadna” a test), de a lejtővel párhuzamosan igen: ebből adódóan a merőleges erők eredője nulla kell hogy legyen, míg a párhuzamos erők eredője nem – éppen ez utóbbira vagyunk kíváncsiak. Bontsuk tehát fel az erőket erre a két komponensre. A nyomóerő csak a lejtőre merőleges irányban hat. A súrlódás csak a lejtővel párhuzamos irányban hat. A gravitáció viszont mindkét irányban hat, tehát ezt tényleg két komponensre kell bontani:

$$F_{g,\perp} = mg \cos \phi \text{ és } F_{g,\parallel} = mg \sin \phi. \quad (2.52)$$

<sup>7</sup>Valójában a nyomástól függ, és adott súlyt tartó felület esetén a nyomás a súlyerő osztva a felülettel.



Mivel  $\perp$  irányban nincs gyorsulás:

$$F_{ny} = F_{g,\perp} = mg \cos \phi$$

A  $\parallel$  az erők eredője határozza meg a gyorsulást:

$$\Sigma F_{\parallel} = \mu mg \cos \phi - mg \sin \phi$$

2.9. ábra. Lejtőn mozgó test viselkedése a súrlódás figyelembevételével. A gravitációs erőt a lejtőre merőleges és azzal párhuzamos komponensekre kell felbontani. Előbbi a nyomóerővel éppen megegyezik majd, ez garantálja, hogy a test a lejtő felszínén maradjon. A párhuzamos komponens és a súrlódási erő fogja meghatározni a (lejtővel párhuzamos) gyorsulást.

A nyomóerő merőleges a lejtőre, tehát a gravitációs erő megfelelő komponensével ki kell egyenlíteniük egymást (mivel ebben az irányban nincs gyorsulás). Ebből adódóan

$$\Sigma F_{\perp} = F_{g,\perp} + F_{ny} = 0, \text{ azaz } F_{ny} = mg \cos \phi \quad (2.53)$$

Ebből meghatározható a súrlódási erő:

$$F_s = \mu F_{ny} = \mu mg \cos \phi. \quad (2.54)$$

Ez az erő a lejtővel párhuzamos, lassítja a test mozgását. A gravitáció lejtővel párhuzamos komponense ( $F_{g,\parallel}$ ) pedig gyorsítja a testet, a súrlódási erő ellenében. Ezért tehát a lejtővel párhuzamos erők eredője, az irányokat is figyelembe véve:

$$\Sigma F_{\parallel} = F_s + F_{g,\parallel} = \mu mg \cos \phi - mg \sin \phi \quad (2.55)$$

A test lefelé gyorsul, ha  $\Sigma F_{\parallel} > 0$ ; lassul, ha  $\Sigma F_{\parallel} < 0$ ; és egyenletesen csúszik, ha  $\Sigma F_{\parallel} = 0$ . Az egyenletes csúszás feltétele innen  $\mu \cos \phi = \sin \phi$ , azaz  $\mu = \tan \phi$ . Ha ennél meredekebb a lejtő, a test gyorsulva csúszik, ha kevésbé meredek a lejtő, akkor pedig lassulva. Mindezeket a 2.9. ábra illusztrálja.

### Kísérlet: megcsúszás lejtőn

- Készítsünk lejtőt könyvek, tálcák vagy hasonló merev lapok segítségével.
- Helyezzünk el ezen egy tárgyat, és vizsgáljuk meg, milyen meredekség esetén csúszik meg.
- A meredekséget folytonosan változtatva (és például okostelefonos szögmérővel mérve) határozzuk meg a megcsúszás szögét.
- Ebből számítsuk ki a tapadási együtthatóját!

## 2.5. Gravitáció

### 2.5.1. Megfigyelések

A fizika alapélménye a **csillagok mozgása**, az „égi mechanika”. Már az ókorban megfigyelték, hogy a csillagok együtt mozognak, 24 órás ciklusban, de vannak máshog

mozgó égitestek, amelyek vándorolnak az égbolton: ezek a bolygók (a görög planétész szó jelentése vándorló). A görögök korában alakultak ki az első **csillagászati világgépek**, azaz modellek a Föld, a Nap, a bolygók és a csillagok törvényeiről. Arisztotelész (Kr. e. IV. század) szerint a Föld van a mindenség középpontjában, és körülötte szférákban rendeződnek el az égitestek. Ptolemaiosz (Kr. u. I–II. századi alexandriai tudós) *Almagestum* című műve számít az első csillagászati könyvnek. Ez egyben az egyik legnagyobb hatású tudományos könyv, Európában a kora reneszánsz korig (12 évszázadon át) meghatározó jelentőségű. Ez is Arisztotelész szféráiból indul ki, de a korábbinál sokkal részletesebben írja le a bolygók és a csillagok mozgását (nagyreszt Hipparkhosz felfedezéseire alapozva). Kitér a Nap égi pályájára, a napéjegyenlőségek váltakozására, a Hold és az ismert bolygók pályájának részleteire, és katalogizál 1022 csillagot.

A csillagászat következő forradalmi újítója Kopernikusz volt a XV–XVI. században. Könyvében, melynek címe *De revolutionibus orbium coelestium* (Az égi szférák körforgásairól), heliocentrikus világgépet vázol fel, amelyben a Föld egy a bolygók közül, azokkal szomszédos szférán mozog. Megválaszolja azt a kérdést is, hogy miért hihették korábban a Föld központi elhelyezkedését. Táblázatokat közöl, amelyek alapján a bolygók (összerint még vándorló csillagok) pillanatnyi helyzetét meghatározhatjuk. Filozófiai okokból ragaszkodott ahhoz az elképzeléshez, hogy az égitestek pályája tökéletes kör.

Ugyanebben a korban élt Tycho Brahe is, aki szintén hozzájárult a reneszánsz kor tudományos forradalmához. Egy 1577-ben feltűnt üstökös pályáját megfigyelve és mozgását előrejelezve több tudományos dogmát is megdöntött. Brahe *De mundi aetherei recentioribus phaenomenis* („Az éteri világ új jelenségeiről”) című könyvében Kopernikuszhoz hasonló nézeteket vall. Elfogadja a Nap körüli forgást, de a Földet mozdulatlan, abszolút középpontnak gondolja, arra alapozva filozófiáját, hogy a tárgyak a Föld, és nem a Nap felé esnek. Az ő segédje és tanítványa volt Kepler, akit azonban köznépi származása miatt lenézett.

Kepler 1571–1630 között élt, kiváló matematikai érzékkel megáldott tudós volt. Az *Astronomia Nova* („Új csillagászat”) és *Harmonices Mundi* („A világ harmóniája”) című könyveiben alapvető fontosságú megfigyeléseket tett a bolygók mozgásával kapcsolatban: ezeket nevezzük ma Kepler-törvényeknek. Igen nagy jelentőségű *Dioptrice* („Optika”) című könyve is, amellyel lényegében a fizika egy új ágát teremtette meg. Élete végén adta ki a *Tabulae Rudolphinae* („Rudolf-féle táblázatok”) című művét, amelyben az addigi legpontosabb bolygópálya-leírásokat adta meg. Newton később ezekre is támaszkodva alkotta meg gravitációs törvényét.

Ezen jegyzet nem lehet teljes anélkül, hogy megadjuk a Naprendszer bolygóinak legfontosabb adatait, ezek a 2.1. táblázatban olvashatóak. Érdekes megemlíteni, hogy a Plútó 2006 óta nem számít bolygónak, néhány más Kuiper-övi<sup>8</sup> objektummal (például a 2006-ban felfedezett, a Plútó „defenesztrációját” okozó, nála 27%-kal nehezebb Erisszel) együtt a törbebolygók közé sorolják. A Mars és Jupiter között a kisbolygóövben további rengeteg (>1600) objektum kering, amelyek közül a legnagyobb a Ceres.

<sup>8</sup>A Kuiper-öv a Naprendszernek a Neptunusz pályáján túli része, a Föld pályájának 30–50-szeresének megfelelő távolságban.



Bolygó	Átlagos pályasugár [millió km]	Keringési idő [földi év]	Átmérő [ $10^6$ m]	Tengelyforgási idő [földi nap]	Felszíni gravitáció [földi g]
Merkúr	57,9	0,24	4,878	58	0,37
Vénusz	108,2	0,62	12,104	243	0,88
Föld	149,6	1	12,756	1	1
Mars	227,9	1,88	6,794	1,0	0,38
Jupiter	778,3	11,9	142,984	0,4	2,64
Szaturnusz	1427	29,5	120,536	0,4	1,15
Uránusz	2870	84,0	51,118	0,7	0,93
Neptunusz	4497	165	50,530	0,7	1,22
Plútó	5913	249	2,290	6,3	0,06
Nap	-	-	1392,7	25	27,9
Hold	$0,384 \cdot 10^9$ m	29,5	3,475	27,3	0,16

2.1. táblázat. A Naprendszer bolygóinak adatai a Nappal és a Holddal való összehasonlításban.

### 2.5.2. Kepler törvényei

Az alábbiakban áttekintjük Kepler három csillagászati törvényét (amelyeket ő a megfigyelések gondos rendszerezésével, tehát tapasztalati úton szűrt le), illetve a törvények newtoni mechanika szerinti következményeit. Ez azért is érdekes, mert maga Newton is ehhez hasonló gondolatmenet alapján jött rá a tömegvonzás – később róla elnevezett – törvényére.

**Kepler első törvénye** azt állítja, hogy

*a bolygók ellipszispályán mozognak, amelynek egyik fókuszpontjában a Nap található.*

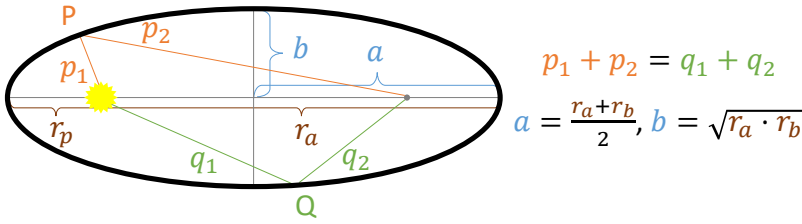
Az ellipszisnek két fókuszpontja (gyújtópontja) van, és magát az ellipszist azon pontok alkotják, amelyekről a két fókuszpont távolságának összege fix, ahogy a 2.10. ábra is mutatja. Az ellipszisnek két tengelye van, amelyek hossza  $a$  és  $b$ . A bolygónak a Naphoz legközelebbi és a Naptól legtávolabbi helyzete a nagyobbik tengely mentén (annak két végén) helyezkedik el.<sup>9</sup> A legkisebb lehetséges távolság neve perihélium ( $r_p$ ), a legnagyobb aphélium ( $r_a$ ). Az ellipszis tengelyei és a legkisebb/legnagyobb távolság közötti összefüggés  $a = (r_a + r_p)/2$  és  $b = \sqrt{r_a r_p}$ .

Ezeket túl definiálhatjuk még a pálya úgynevezett excentricitását,  $\varepsilon$ -t is:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}. \quad (2.56)$$

A Föld pályájának jelenlegi excentricitása  $\varepsilon = 0,0167$ , mivel  $r_p = 147,1$  millió km, és  $r_a = 152,1$  millió km. Érdekesség, hogy a naptávol (azaz amikor a Föld–Nap távolság a legnagyobb) július elején, míg a napközeli januárban következik be. Ez persze nincs

<sup>9</sup> Az egyik fókuszpontban van a Nap. Ha felmerül a kérdés, hogy „mi van a másik fókuszpontban?“, arra a válasz: **semmi**.



2.10. ábra. Az ellipszist az definiálja, hogy minden pontjának a két fókuszponttól vett távolságainak összege állandó. Az ábrán a  $P$ -vel és a  $Q$ -val jelölt pontok távolságainak összege szerepel. Az ábra ezenfelül a tengelyek és a perihélium/aphélium közötti összefüggést is mutatja.

összefüggésben az évszakok során kialakuló jellegzetes átlaghőmérséklettel, utóbbit a forgástengely ferdesége okozza, ugyanis a laposan beérkező sugárzásból több nyelődik el a légkörben (kevesebb melegíti a Földet), mint a meredeken beérkezőből. A Plútó pályájának excentricitása a Földénél lényegesen nagyobb,  $\varepsilon = 0,249$ , mivel  $r_p = 4437$  millió km,  $r_a = 7376$  millió km. Ezek az értékek százezer éves időskálán változókéonyak, a Földé néhány század és néhány tized között is – de ez a soktestprobléma analitikus kezelhetetlensége miatt bizonytalan. Jelenleg a Föld pályája jó közelítéssel kör alakú, amit az alacsony excentricitás, illetve  $r_a$  és  $r_p$  hasonló értéke is mutat.

### Kepler második törvénye szerint adott bolygó esetén

*a Napot és a bolygót összekötő szakasz egyenlő idők alatt egyenlő területeket sűrol.*

Ahogy a 2.11. ábrán is látható, a  $t$  idő alatt sűrolt (kis középponti szög esetén közelítőleg háromszög alakú) ív területe az aktuális sugár és az ezen idő alatt megtett ívhossz sugárra merőleges vetülete szorzatának a fele, azaz  $A = Rs/2 = R^2\phi/2$ . Miután ezen terület időegységre vetítve állandó, azt mondhatjuk, hogy  $\Delta A/\Delta t = \text{állandó}$ , azaz  $\dot{A} = \text{állandó}$ . Ebből

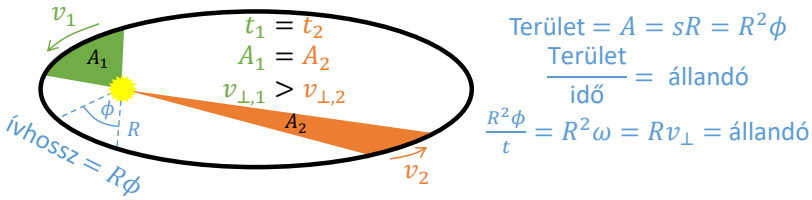
$$R^2\dot{\phi} = R^2\omega = Rv_{\perp} = \text{állandó} \quad (2.57)$$

következik, ahol  $v_{\perp}$  a sebességnek a sugárra merőleges komponensét jelöli. Tehát  $R$ ,  $v$  és  $\omega$  időben változik az ellipszispályán való haladás során, de a fenti kifejezés végig állandó, ami egyúttal azt is jelenti, hogy a bolygó naptávolban gyorsan, napközelpben pedig lassan halad. Később látni fogjuk, hogy az  $Rv_{\perp}$  mennyiség (a bolygó tömegével szorozva) éppen a perdület: Kepler második törvénye azt fejezi ki, hogy a perdület állandó. Ez pedig azt jelenti, hogy az erő „centrális”, egy állandó középpont irányában hat.

### Kepler harmadik törvénye szerint

*a keringési idő négyzete osztva a nagytengely köbével minden bolygóra ugyanannyi,*

azaz  $T^2/a^3$  minden bolygóra ugyanannyi. Ha  $R$  sugarú kör alakúnak gondoljuk a bolygók pályáit, a keringési időt pedig  $T = 2\pi/\omega$  módon kifejezzük a szögsebességéből,



2.11. ábra. Kepler második törvénye szerint a Napot a bolygóval összekötő szakasz két azonos időintervallum alatt azonos területet sűrol, azaz ha az ábrán  $t_1 = t_2$ , akkor  $A_1 = A_2$ . Az ábrától jobbra (és a szövegben is) olvasható levezetés alapján ebből az is következik, hogy a Nap-bolygó távolságnak ( $R$ ) és a sebesség sugárra merőleges komponensének ( $v_{\perp}$ ) szorzata az ellipszispálya pontjain végig állandó, azaz a Naphoz közel a bolygó gyorsan megy, távolban pedig lassan.

akkor az  $R^3/T^2 = C$  (állandó) megállapításból  $R^3\omega^2 = 4C\pi^2$  következik. Ugyanakkor a körmozgáshoz szükséges erő (a centripetális erő) nagysága  $F = mR\omega^2$ . Ezt az előző kifejezéssel kombinálva a következőt kapjuk:

$$F = mR\omega^2 = \frac{C'm}{R^2}, \quad (2.58)$$

ha bevezetjük az új  $C' = 4C\pi^2$  állandót. Kepler harmadik törvényéből tehát az következik, hogy a bolygókat körpályán tartó erő a távolsággal inverz négyzetesen, illetve a bolygó tömegével egyenesen arányos. Ebből tulajdonképpen már összerakhatjuk a tömegvonzás Newton-féle törvényét. A Nap bolygókra ható ereje arányos a bolygó tömegével. A bolygó Napra ható erejének (ami ugyanekkora nagyságú, Newton harmadik törvénye miatt) viszont a Nap tömegével kell arányosnak lennie (ha elfogadjuk, hogy a gravitáció nem „tudja”, melyik égitestet hívjuk Napnak, és melyiket bolygónak). Végeredményben tehát az erő mindkét tömeggel arányos, a távolsággal pedig inverz négyzetesen arányos.

### 2.5.3. Newton gravitációs törvénye

Newton szerint a bolygók mozgását a **tömegvonzás törvénye** irányítja, ahogy a tárgyak Föld felé zuhanását is: forradalmi a felismerés, hogy a két nagyon különböző jelentéget ugyanaz egy, egyszerűen megfogalmazható erő irányítja! Eszerint minden tömeggel rendelkező test vonzó hatással van az összes többire, az erő nagysága:

$$F_{\text{grav}} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.59)$$

az erő iránya pedig  $r$ -rel párhuzamos (azaz a két tárgyat összekötő irányban hat), vonzó típusú. A formulában szerepel a gravitációs állandó, melynek értéke  $\gamma = 6,67259 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ . Ez a törvény alapértelmezés szerint pontszerű objektumokra (tömegpontokra) vonatkozik. A Nap–Föld rendszer esetében ez elég jó közelítés lehet, hiszen 150 millió kilométerről a körülbelül 1,4 millió km átmérőjű Nap elég kicsinek látszik. A Holdról nézve a Föld 400 ezer kilométerre van, átmérője körülbelül 13 ezer km, ez már rosszabb közelítésnek tűnik. Hogyan alkalmazhatjuk tehát a fenti törvényt kiterjedt

objektumok esetében? A kérdésre egyszerű a válasz: bontsuk a kiterjedt objektumokat kis részekre, és ezek tömegvonzását egyesével adjuk össze. A felbontás javulásával, a kis részek térfogatának nullához tartásával (azaz térfogati integrálással) megkapjuk az erő valódi értékét. Az az érdekes helyzet áll fenn, hogy gömb alakú tárgyak rajtuk kívül található objektumokra ható vonzereje éppen akkora, mintha a gömb teljes tömege a középpontban lenne jelen – a közelebbi és a távolabbi részek ereje éppen így átlagolódik ki. Gömb alakú tárgyak esetében a középpontok távolságát figyelembe véve használhatjuk tehát a fenti törvényt. Égitestek esetében az így történő számolás ezért nem jelent pontatlanságot.<sup>10</sup>

Hogyan vehető mindez össze a nehézségi gyorsulással? A Földön az a tapasztalat, hogy  $m$  tömegű tárgyra  $F = mg$  erő hat, ahol  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Természetesen mindkét törvény egyszerre érvényes, amiből

$$mg = \gamma \frac{mM_{\text{Föld}}}{R_{\text{Föld}}^2} \quad (2.60)$$

következik, mivel a felszín közelében a tárgy a Föld gravitációs középpontjától  $R_{\text{Föld}}$  távolságra van (és azért számolhatunk így, mert a Föld jó közelítéssel gömb alakú). Ebből a Föld adataira a következő adódik:

$$g = \gamma \frac{M_{\text{Föld}}}{R_{\text{Föld}}^2}, \quad (2.61)$$

azaz ha  $R_{\text{Föld}} = 6378 \text{ km}$ , akkor  $M_{\text{Föld}} = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ .

Azt már láttuk, hogy Kepler törvényei hogyan inspirálhatnak minket a Newton-féle tömegvonzási törvény felismerésére, illetve hogy a második és a harmadik Kepler-törvény tulajdonképpen egyenértékű Newton fenti egyenletével. Most megmutatjuk, hogy a pálya ellipszis formája is levezethető, ha tudjuk, hogy az erőtér centrális. Ebben az esetben egyszerűen felírhatjuk a központ felé történő gyorsulást, figyelembe véve, hogy nem körmozgásról van szó, tehát az  $r$  sugár is változhat. Ez a gyorsulás két részből tevődik össze: egyrészt a sugár  $\ddot{r}$  gyorsulásából, másrészt az  $r\omega^2$  centripetális gyorsulásból. Innen a középpont felé mutató erőre Newton törvényéből

$$F = m(\ddot{r} - r\omega^2) = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = \gamma \frac{mM}{r^2} \quad (2.62)$$

adódik. Vezessük be az  $u = 1/r$  változót, és az  $r(t)$  és  $\phi(t)$  függvények helyett térjünk át az  $u(\phi)$  függvényre. A levezetés matematikáját most nem részletezve ebből egy

$$u''(\phi) + u(\phi) = \text{állandó} \quad (2.63)$$

differenciálegyenlet adódik. Ennek megoldása  $u(\phi) \sim 1 + \varepsilon \cos \phi$ , ahonnan viszont

$$r \cdot (1 + \varepsilon \cos \phi) = \text{állandó} \quad (2.64)$$

adódik. Ez  $0 < \varepsilon < 1$  esetén éppen az  $\varepsilon$  excentricitású ellipszis egyenlete. Az  $\varepsilon = 0$  határesetben kör alakú pályát kapunk, míg  $\varepsilon = 1$  esetén parabolát, továbbá  $\varepsilon > 1$

<sup>10</sup>Hacsak az nem, hogy ezek nem pontosan gömb alakúak, de ez már tényleg elhanyagolható a legtöbb esetben. Fontos kiegészítés még, hogy az egyenetlen sűrűség is módosíthatja ezt az egyszerű képet, de a valóságban ez is elhanyagolható hatás.

esetén hiperbolát. A Nap (vagy bolygó-rakéta viszonylatot vizsgálva a bolygó) vonzását elhagyó tárgy esetén tehát a pálya parabola vagy hiperbola alakú lesz, illetve a Naprendszeren átszáguldó üstökösök pályája is ilyen.

Különösen érdekes tény, hogy a newtoni gravitációs törvényben szereplő **gravitáló tömeg megegyezik a tehetetlen tömeggel**, annak ellenére, hogy a tehetetlenségnek és a tömegvonzásnak látszólag semmi köze egymáshoz. Ez a felismerés, amelyet Eötvös Loránd igazolt igen nagy kísérleti pontossággal, később az általános relativitáselmélet, a gravitáció új elméletének alapjává szolgált. Ezt az új elméletet azért is kellett bevezetni, mert a newtoni gravitációval van egy jelentős probléma: azonnali, közvetítő nélküli **távvolhatást** ír le, azaz azonnal terjedő információt (például ha a Nap elmozdulna vagy megszűnne létezni, azt a gravitáción keresztül mi azonnal éreznénk). A speciális relativitáselméletben azonban súlyos érvek szólnak amellett, hogy semmilyen információ nem terjedhet a fénynél gyorsabban. A problémára megoldásként az általános relativitáselmélet adódott. Ennek jelentőségét és részleteit lásd a 6.1. és a 7. fejezetekben.

### Kísérlet: gravitáció a Marson

- A Mars tömegét és sugarát ismerve számítsuk ki, hogy a Mars felszínén mekkora a gravitációs erő.
- Mérjük meg, hogy milyen magasra tudunk ugrani itt a Földön, és számítsuk ki, hogy mekkora kezdősebességgel hagytuk el a talajt.
- Számítsuk ki, hogy ugyanakkora kezdősebességgel milyen magasra tudnánk ugrani a Marson!

## 2.6. Munkavégzés és energia

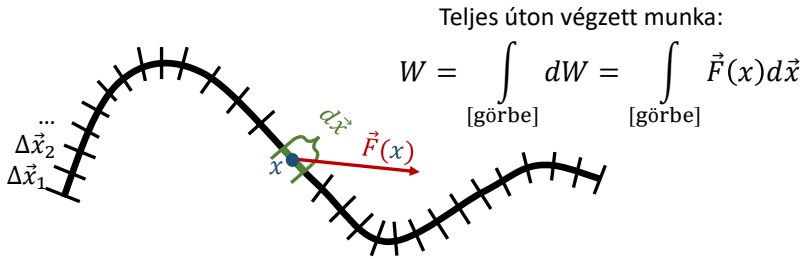
### 2.6.1. A munka fogalma és a teljesítmény

A most következő részekben néhány fontos új fizikai mennyiséget definiálunk. Ezek közül az első a **munkavégzés**, amelynek a definícióját fokozatosan fogjuk finomítani. Állandó  $F$  erő hatására, ezzel párhuzamos szakasz mentén történő  $s$  elmozdulás esetén azt mondjuk, hogy az erő  $W = Fs$  munkát végzett. A munka mértékegysége ennek megfelelően Nm (newtonszor méter), vagy másképpen joule (J). Ha az erő és az elmozdulás nem párhuzamos (de továbbra is állandó, illetve egyenes mentén történik), hanem  $\alpha$  szöveget zár be, akkor a munkavégzés definíció szerint  $W = Fs \cos \alpha$ . Vektorként tekintve az erőre és az elmozdulásra ezt skaláris szorzatként írhatjuk fel:

$$W = \vec{F} \vec{s}. \quad (2.65)$$

A munka tehát az elmozdulás során ható erő és az erő irányába végzett elmozdulás szorzata (hiszen merőleges vektorok skaláris szorzata nulla).<sup>11</sup> Sokszor elhagyjuk az erő és az elmozdulás vektor jellegét, és egyszerűen az elmozdulás irányába ható erőkomponenst értjük  $F$  alatt: ekkor továbbra is  $W = Fs$  igaz. A fenti definíció azonban csak akkor alkalmazható, ha az  $\vec{s}$  elmozdulás során  $\vec{F}$  végig állandó. Egyéb esetre hogyan

<sup>11</sup>Ez látszólag ellentétben áll azzal a hétköznapi tapasztalattal, hogy elfáradunk, ha egy nehéz tárgyat vagy csomagot függőleges irányú erővel tartva vízszintes irányban mozgatunk. Ilyenkor biológiai értelemben dolgoznak az izmaink, de mechanikai munkát valójában nem végzünk.



Munkavégzés infinitezimális intervallumon:

$$dW = \vec{F}(x) d\vec{x}$$

2.12. ábra. Görbevonali pályán, változó erő által végzett munka és a vonalintegrál kapcsolata. Ilyenkor a görbét infinitezimális  $dx$  szakaszokra bontjuk, amelyek már „egyenestek” tekinthetők, és ahol az erő már állandó. Ekkor kiszámíthatjuk az infinitezimális  $dW$  munkamennyiséget, és ezt integrálva kaphatjuk meg a teljes munka  $W$  értékét.

Általánosíthatjuk ezt? A fizikában gyakran előforduló, szokásos módon járunk el: felbontjuk a mozgást infinitezimálisan kicsi  $d\vec{x}$  darabokra, ahol már az erő állandó, azaz az itt végzett munka  $dW(x) = \vec{F}(x)d\vec{x}$  módon számolható, ahogy azt a 2.12. ábra mutatja. Ezeket a  $dW$  infinitezimális munkákat összeadjuk, azaz integráljuk az erőt ezeken a szakaszokon. Ebből tehát a teljes görbén a munkavégzés

$$W = \int_{[\text{görbe}]} \vec{F}(x) d\vec{x}. \quad (2.66)$$

Ha az út helyett az időre szeretnénk integrálni,  $x \rightarrow t$  változóhelyettesítést hajthatunk végre, ekkor  $d\vec{x} = \vec{v}(t)dt$ , így a  $dt$  időegység alatti infinitezimális munka  $dW = \vec{F}(t)\vec{v}(t)dt$ . Ezt visszahelyettesítve a  $W = \int_0^T F(t)v(t)dt$  összefüggésre jutunk. Ez által inspirálva bevezethetjük a munkavégzés „sebességét”, azaz az időegységre jutó munkát, másképpen szólva a **teljesítményt**:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}, \text{ másképpen } P = \dot{W} = \frac{dW}{dt}. \quad (2.67)$$

Ennek mértékegysége J/s vagy watt (W). Így  $1 \text{ J} = 1 \text{ Ws}$ , illetve  $1 \text{ kWh} = 3600 \text{ kJ}$ , mivel  $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$  és  $1 \text{ kW} = 1000 \text{ W}$ ; a kWh tehát energia-mértékegység. Teljesítmény-mértékegység viszont a lóerő, méghozzá  $1 \text{ LE} = 735,5 \text{ W}$  (ez másképpen körülbelül 75 kg egy másodperc alatt egy méterre emeléséhez szükséges teljesítmény). Az eddigiek alapján könnyen belátható, hogy  $P = \frac{dW}{dt} = F \frac{ds}{dt} = Fv$ .<sup>12</sup> Ahogy a 2.4.2. részben írtuk, egy egyenletesen haladó autónak  $F = 0,5\rho c A v^2$  nagyságú közegellenállási erőt kell legyőznie, amely egy átlagos autóra ( $cA = 0,8 \text{ m}^2$  esetén)  $F = (0,4 \text{ kg/m})v^2$  nagyságú. A leadott teljesítmény tehát  $P = (0,4 \text{ kg/m})v^3$ , ami 30 m/s 11,3 kW (15 LE), míg 50 m/s esetén 52,5 kW (70 LE). Ezenfelül persze további ellenállást is le kell győznie az autónak (gördülési ellenállás, az alkatrészek súrlódása, emelkedőn a gravitáció sötöbbi).

<sup>12</sup>Itt a korábbiakban említetteknek megfelelően a vektor jelölést elhagytuk, és  $F$  alatt az elmozdulás irányában ható erőre gondolunk.

Ugyanakkor csak ez alapján egy maximum 70 LE teljesítményt leadni képes motor segítségével 50 m/s a fenti légellenállású autó végsebessége. Fontos még megemlíteni, hogy az emberiség által egy év alatt felhasznált energia 2000–2018 között átlagosan körülbelül 500 EJ (1 EJ =  $10^{18}$  J), avagy körülbelül 150 000 TWh. Ez teljesítményre lefordítva körülbelül 15 TW, azaz fejenként valamivel több, mint 2 kW. Ennek nagyjából az egyhetede (körülbelül 20 000 TWh) elektromos energia formájában jelenik meg, a többi közvetlenül (elektromos energiát előállító erőművek közbeiktatása nélkül) fűtésre, közlekedésre és egyéb ipari, lakossági célokra felhasznált energia.

### 2.6.2. A mozgási és a gravitációs helyzeti energia

Vizsgáljuk meg, hogy egyes konkrét példák esetén mekkora a munkavégzés. Például mekkora munkát végzünk, ha egy tárgyat  $v$  sebességre gyorsítunk? Legyen tehát  $F$  egy állandó erőhatás, amelyek hatására  $a = F/m$  gyorsulás jön létre (Newton második törvénye szerint). Ha a kezdősebesség nulla, akkor a végsebesség ( $t$  idő eltelte után)  $v = at$  lesz. Az elmozdulás ugyanezen idő alatt  $s = at^2/2$ , vagyis  $s = vt/2$ . Ha az erő  $F = ma = mv/t$  módon írjuk fel, akkor a munkára

$$W = Fs = \frac{mv}{t} \cdot \frac{vt}{2} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.68)$$

adódik, tehát ennyi munkát végzünk, ha egy testet nulláról  $v$  sebességre gyorsítunk. Ez a levezetés egyenletes gyorsulásra vonatkozott, ugyanakkor általános esetben (változó gyorsítás) is hasonló igaz:

$$W = \int F ds = \int F v dt = \int m a v dt = \int m \frac{dv}{dt} v dt = \int m v dv = \frac{1}{2}mv^2, \quad (2.69)$$

ahol az utolsó előtti lépésben úgy tűnhet, hogy „egyszerűsítettünk”  $dt$ -vel, de valójában  $t \rightarrow v$  integráltranszformációt végeztünk.

A fenti levezetés egy fordított esetre is alkalmazható: ha egy  $v$  sebességgel mozgó tárgy megáll, akkor ennek során  $mv^2/2$  munkát végez (meglök egy másik tárgyat vagy súrlódásával felmelegíti a felületét). Ez a munkamennyiség valamilyen értelemben tehát „eltárolódik” a  $v$  sebességgel mozgó tárgyban, annak pillanatnyilag érvényes jellemzője lesz. Ezért definiáljuk a  $v$  sebességgel mozgó tárgy **mozgási, avagy kinetikus energiáját**, amely tulajdonképpen a **munkavégző képességét** jelenti:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.70)$$

Ezzel tehát a végzett munka és a kinetikus energia kapcsolata  $W = \Delta E_{\text{kin}}$  lesz, tehát a tárgyon végzett munka a mozgási energia megváltozását okozza (ha más, az energiaviszonyokat érintő hatás nincs). Ez az erők eredője által végzett munkára igaz, tehát közegellenállás, súrlódás jelenléte esetén nem a teljes húzóerő növeli a mozgási energiát. Ezen egyenletben  $\Delta$  azt jelképezi, hogy ha volt kezdeti sebesség is, akkor a munka a végállapotbeli és a kezdeti mozgási energia különbségével egyezik meg, azaz  $W = E_{\text{kin},1} - E_{\text{kin},2}$ .

Nézzük meg, hogy mekkora munkát végzünk, ha egy tárgyat adott magasságba emelünk (illetve mekkora munkát végez a gravitáció, ha a tárgy az adott magasságból

lezuhan). Az emeléshez szükséges erő  $F = mg$ , azaz állandó. Az erő irányú elmozdulás éppen a zuhanás vagy emelés során leküzdött magassággal,  $h$ -val azonos, tehát

$$W = Fs = mgh. \quad (2.71)$$

Ez a munkamennyiség is a  $h$  magasságban lévő tárgy állapotának jellemzője lesz, valamilyen módon ezt a munkát „elraktározza” (és amikor zuhan, a gravitációs erő által visszakapja). Így bevezetjük a gravitációs **helyzeti, avagy potenciális energiát**, amely  $h$  magasságban lévő  $m$  tömegű tárgyra

$$E_{\text{pot}} = mgh \quad (2.72)$$

Ekkor a mozgási energiánál említettekhez hasonlóan a tárgyon végzett munka és a gravitációs helyzeti energiája a  $W = \Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot},1} - E_{\text{pot},2}$  egyenlet szerint kapcsolódik egymáshoz (ha a kinetikus energia nem változik, és más, az energiaviszonyokat érintő hatás sincsen).

Feltehetjük azt a kérdést is, hogy a nyugalmi helyzetéből kitérített rugón mekkora munkát végeztünk, azaz mekkora ennek potenciális energiája. Ekkor az adott helyzetbe mozgatás során az erő nem állandó, de egyszerű integrálással kiszámolhatjuk a végzett munkát, amivel tehát megkapjuk az  $x$  távolságra megnyújtott rugó által tárolt  $E_{\text{pot}}$  potenciális energiát is:

$$F = D \cdot x, \quad W = \int F(x)dx = \int Dxdx = \frac{1}{2}Dx^2 \quad \Rightarrow \quad E_{\text{pot}} = Dx^2/2. \quad (2.73)$$

### 2.6.3. Konzervatív erők

A gravitációs erő vagy a rugóerő által végzett munka esetén azt láttuk, hogy az csak a kiindulási és a végső helyzettől függ, az útvonaltól nem: azaz ugyanannyi munkát végzünk, akárhogy is emeljük fel a tárgyat  $h$  magasságba. Az ilyen erőteret, amelynek munkája nem függ az útvonaltól (csak a kezdeti és a végső helyzettől) **konzervatív erő-térnek** nevezzük. Súrlódás fellépése esetén ez nem igaz, hiszen a súrlódási erő a megtett útvonaltól függ, nem csak a kezdeti és a végállapotbeli helyzettől: minél hosszabb úton jutunk el ugyanoda, annál nagyobb munkát fordítunk a súrlódás legyőzésére. A súrlódás tehát nem konzervatív erő, míg a rugóerő és a gravitáció igen. Konzervatív erőknél van értelme (a gravitáció esetének megfelelően általánosított) **potenciális energiáról** beszélni, hiszen ekkor a végzett munka nem függ az adott pontba jutás útvonalától, tehát az valamilyen módon az adott pontban lévő tárgy állapotát jellemzi. A potenciális energiát ekkor egyszerűen potenciálnak nevezzük (és sokszor  $V$ -vel jelöljük). Két pont közötti mozgás során a munka ezen potenciál kezdeti- és végpontbeli különbsége, tehát az  $a$  pontból  $b$  pontba elmozdulván

$$W_{a,b} = \int_a^b F(x)dx = [-V(x)]_a^b = V(a) - V(b). \quad (2.74)$$

Ha  $x$  pontban  $F(x)$  nagyságú erő hatására egy kis  $dx$  elmozdulást szenved a tárgy, akkor ehhez a potenciális energia  $dE_{\text{pot}} = -F(x)dx$  változása társul (ahol a negatív előjel a



potenciális energia csökkenése miatt jelenik meg). Innen

$$\frac{dV}{dx} = -F(x), \text{ avagy } V(x) = - \int F(x) dx \quad (2.75)$$

adódik, tehát a potenciál és az erő integrál/derivált kapcsolatban van egymással (konzervatív erők esetén).

A fentiek akkor érvényesek, ha a kezdeti- és a végpontban azonos (például nulla) a vizsgált tárgy mozgási energiája. Általánosságban konzervatív erők munkája a helyzeti és a mozgási energiát is módosíthatja, azaz ekkor

$$W = \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}}. \quad (2.76)$$

Ez azt jelenti, hogy a helyzeti és a mozgási energia összege pontosan a testen végzett munka mértékében változik meg.

#### 2.6.4. Az energia megmaradása

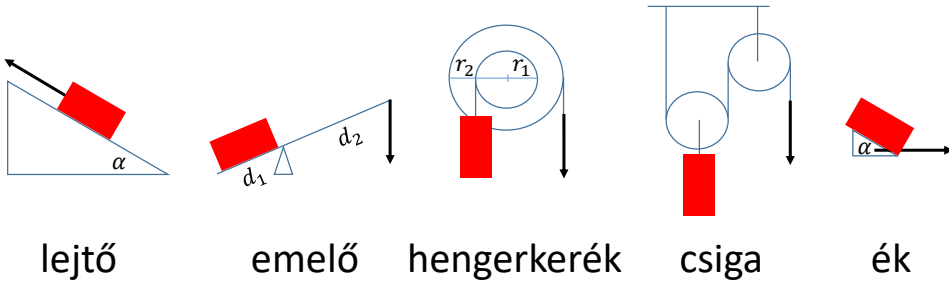
Zárt rendszerben, amelybe nem avatkozunk be, amelyen nem végzünk munkát ( $W = 0$ ), a fentiek szerint a rendszerben lévő összes energiára a  $\Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} = 0$  összefüggés lesz igaz. Ez másképpen  $\Delta(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) = 0$ , ahonnan az

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{állandó} \quad (2.77)$$

megmaradási törvényt következik.

Ez zárt rendszerre igaz, ugyanis nyílt rendszer összenergiája bármikor megváltozhat, hiszen bevihetünk energiát a rendszerbe. További feltétele a fenti állításnak, hogy nincsenek nem konzervatív erők a rendszeren belül (például súrlódás vagy légellenállás). A nem konzervatív erők természetesen nem „emésztik fel” az energiát, hanem egyéb energiaformákat hoznak létre: hőenergiát, elektromos vagy mágneses energiát, kémiai energiát, atommag-energiát. A lehető legáltalánosabban megfogalmazva a fizika egyik legfontosabb törvényét kapjuk: zárt rendszer *összes* energiája állandó. Ez az energia mindenféle formát ölthet (sőt a relativitáselmélet szellemében tömegként is megjelenhet), de **nem vész el**, és **nem keletkezik**. Még egyszer hangsúlyozzuk: ez zárt rendszerben igaz, hiszen ebben az esetben nem juthat energia se ki, se be, ettől zárt a rendszer.

A fenti energiafogalom általános definíciója a munkavégzésre való képesség. Ha megtörténik a munkavégzés, akkor ez valamely más objektum energiáját növeli. Az energiával számolni praktikus, például ugyanis egy  $h$  magasságból légellenállás nélkül zuhanó test vége sebességét kinematikai összefüggésekből bonyolultabb kiszámolni, de az energiamegmaradással egyszerű: az energiája kezdetben  $mgh$ , a végén  $mv^2/2$ , ezek egyenlőségéből  $mgh = mv^2/2$ , azaz a vége sebessége  $\sqrt{2gh}$ .



2.13. ábra. Egyszerű gépek működési mechanizmusa. Ezek használatakor  $G$  súllyal rendelkező test mozgatásához szükséges  $F$  erő lecsökken, a szövegben részletezett mértékben.

### Kísérlet: energiaveszteség rugalmatlan ütközésben

- Egy labda pattanása során valamennyi mozgási energiát elveszít. Magasról ejt-sünk le egy labdát, és vizsgáljuk meg, hogy az egymás utáni „pattanások” során milyen magasra jut fel. A méréshez vegyük fel az eseménysorozatot kamerával, és használjunk nagyméretű, jól látható magasságmérőt a háttérben.
- Számítsuk ki, hogy az egymást követő maximumok során milyen magasra jutott a labda.
- Ebből határozzuk meg, hogy egy pattanás során átlagosan mennyi energiát veszített a labda.

### 2.6.5. Egyszerű gépek

Az energiamegmaradást aknázzák ki az **egyszerű gépek** (ezek illusztrációját lásd a 2.13. ábrán). Ezeknél egy tárgyat úgy juttatunk a magasba, hogy ugyanazt a munkát „hosszabb úton” végezzük el. Miután azonban a munka ugyanannyi (hiszen a helyzeti energia változása is ugyanannyi), ezért az erő és a megtett út szorzata is ugyanannyi. Ha tehát az út hosszabb, a szükséges erő lecsökken. Ezért megyünk a hegyre (többnyire) szerpentinre, ezért tekerjük hosszan az autó kézi emelőjét, míg az csak néhány centit emelkedik. A dolog lényege, hogy  $G$  súlyú testet a súlyánál kisebb,  $F < G$  nagyságú erővel fel tudunk emelni. Alább megadunk néhány konkrét példát is az egyszerű gépekre (a  $G$  súlyú test emeléséhez szükséges  $F$  erő megadásával):

- Lejtő (melynek dőlésszöge  $\alpha$ ):  $F = G \sin \alpha$ .
- Emelő ( $d_1$  és  $d_2$  karral):  $F = \frac{d_1}{d_2} G$ .
- Hengerkerék ( $r_1$  és  $r_2$  sugarakkal):  $F = \frac{r_1}{r_2} G$ .
- Mozgó csiga:  $F = G/2$ .
- Csavar ( $h$  menetemelkedés és  $r$  sugar):  $F = \frac{h}{2\pi r} G$ .
- Ék ( $\alpha$  szög esetén):  $F = G \sin \alpha$ .

## 2.7. Pontrendszerek mechanikája

### 2.7.1. Külső és belső erők

Tömegpontok bármely halmazát egy rendszernek vehetjük, amelyben hatnak **belső és külső erők**. Előbbiek a rendszer részei között lépnek fel, utóbbiak forrása a rendszeren kívül van. A belső erők összege mindig nulla, hiszen mindkét fél a rendszer része, így az ellenerő is belső erő, és kiejti az erőt az összegzés során (Newton harmadik törvényének értelmében). Éppen ez vezetett minket az impulzusmegmaradás felismeréséhez: **a belső erők nem változtatják meg az impulzust**, ezért elszigetelt (külső hatások elől elzárt) rendszer összipulzusa állandó.

Ilyen rendszert alkot a Nap a bolygókkal: itt a Nap-bolygó gravitáció belső, a Tejútrendszer (és az extragalaktikus objektumok) gravitációja külső erő. A Naprendszer összipulzusát a belső erők nem változtatják meg, és a Naprendszer tömegközéppontja a Tejútrendszeren belül úgy halad, mintha egyetlen tömegpontról lenne szó. Az ütköző biliárdgolyók rendszerét is hozhatjuk példaként: az asztal által kifejtett súrlódás külső, az ütközéskor ható erő belső erő. A súrlódást elhanyagolva a két biliárdgolyó zárt rendszernek tekinthető, azaz összipulzusuk állandó. Ennek következményeit a következő szakaszban vizsgáljuk. Egy darab biliárdgolyó is tekinthető összetett rendszernek, ugyanis rengeteg atomból áll, amelyek között bonyolult erők hatnak. Ezen erők azonban nem változtatják meg a golyó impulzusát.

### 2.7.2. Tömegpontok egyszerű rendszerei

Golyók ütközése során tehát külső és belső erők lehetségesek, de az összipulzust csak a külső erők módosíthatják. Erre jó példa biliárdgolyók ütközése (ahol a gravitáció és az asztal nyomóereje kiejti egymást, a súrlódást pedig többnyire elhanyagoljuk), vagy atommagok fúziója (ahol egy deutérium-atommag és egy tríciumatommag egyesül egy héliummaggá, továbbá keletkezik még egy neutron és némi energia, azaz  ${}^3\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + n + 3 \text{ pJ}$  energia), vagy a radioaktív bomlások, például a béta-bomlás, ahol egy neutronból proton és elektron keletkezik, plusz egy neutrínó ( $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ ). Az összipulzus állandó a fenti folyamatokban, de az összes mozgási energia nem – pont ez a lényeg, hogy az energia különböző formái átalakulhatnak egymásba, például belső erők végezhetnek munkát, amitől a mozgási energia nőhet vagy csökkenhet.

**Rugalmas ütközésnek** nevezzük az olyan ütközési folyamatokat, ahol a mozgási energia megmarad. Nézzük meg például, mi történik egy  $v_1$  sebességű és  $m_1$  tömegű golyó  $m_2$  tömegű, álló golyóval való ütközése során, ha a mozgás végig egy egyenesben történik! Ekkor felírhatjuk az impulzus és az energia megmaradását (mivel rugalmas ütközésről beszélünk):

$$m_1 v_1 + 0 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad \text{és} \quad (2.78)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2. \quad (2.79)$$

Innen az

$$m_2 v'_2 = m_1 (v_1 - v'_1), \quad \text{és} \quad (2.80)$$

$$m_2 v_2'^2 = m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_1 (v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) \quad (2.81)$$

egyenletekre jutunk. Ezeket egymással elosztva  $v_2' = v_1 + v_1'$  adódik, amit az eredeti, impulzusmegmaradásra vonatkozó egyenletbe visszahelyettesítve  $m_2(v_1 + v_1') = m_1(v_1 - v_1')$  jön ki, ahonnan pedig már megkapjuk az ütközés utáni sebességeket:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{és} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1. \quad (2.82)$$

Azonos tömegek esetén, azaz ha  $m_1 = m_2 = m$ , a következő eredményre jutunk:

$$v_1' = 0 \quad \text{és} \quad v_2' = v_1. \quad (2.83)$$

Ez azt jelenti, hogy azonos tömegű golyók esetén az első golyó megáll, a második pedig az első kezdeti sebességével megy tovább, mintha kicserélődtek volna egész egyszerűen. Ha azonban  $m_2 \gg m_1$ , azaz például a földön lepattintott labda esetében, ahol a másik ütköző „golyó” a Föld,

$$v_1' = -v_1 \quad \text{és} \quad v_2' = 0 \quad (2.84)$$

adódik, tehát a könnyebbik tárgy azonos nagyságú, de ellentétes sebességgel halad tovább („visszapattan”), míg a sokkal nehezebb tárgy (a Föld) továbbra is egy helyben marad.

Rugalmatlan ütközés esetén az impulzus ugyan megmarad (hiszen ez általános erejű törvény), de a mozgási energia nem. **Tökéletesen rugalmatlan ütközésről** akkor beszélünk, ha a két test összetapad, azaz a fenti jelölésekkel  $v_1' = v_2' = v'$ , azonos lesz az ütközés utáni sebességük. Ekkor erre az ütközés utáni sebességre a

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.85)$$

kifejezés adódik.

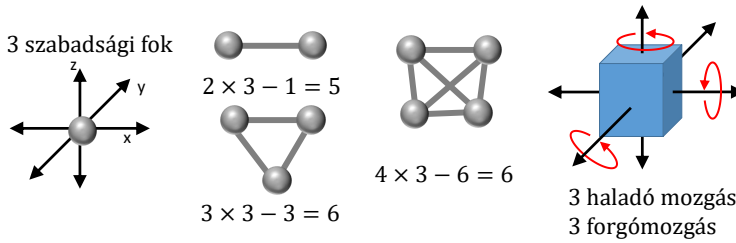
Érdekes alkalmazás továbbá a rakétameghajtás esete. Az eredetileg  $m_0$  tömegű rakétában van  $m_{\text{üzemanyag}}$  tömegnyi üzemanyag. Ebből minden  $\Delta t$  időtartam alatt kiáramlik  $\Delta m$  tömegnyi üzemanyag, amelynek a rakétához viszonyított sebessége  $v_h$ . Hogy ez mennyi, azt az üzemanyag fajtája („minősége”) már egyértelműen meghatározza. Miután a kirepülő üzemanyag impulzusa a pillanatnyi tömegközéppontból nézve  $\Delta m v_h$ , ezért ez  $-\Delta m v_h$  impulzust ad át a rakétának az impulzusmegmaradás miatt. Így a rakéta impulzusára  $m \Delta v = -\Delta m v_h$ . Ez infinitezimális időtartamokra a következőt jelenti:

$$\frac{\Delta v}{\Delta m} \rightarrow \frac{dv}{dm} = -\frac{v_h}{m} \quad (2.86)$$

Ez egy differenciálegyenlet a rakéta  $v$  sebességének és adott pillanatban érvényes  $m$  tömegének összefüggésére, amelynek megoldása a  $v(m) = v_h \ln(m_0/m)$ , ha  $m_0$  a rakéta kezdeti tömege (a kezdeti sebessége viszont nulla). Miután az összes üzemanyag felhasználása után a rakéta tömege  $m_{\text{rakéta}} = m_0 - m_{\text{üzemanyag}}$ , így az ebben a pillanatban érvényes végsebesség a rakéta és a hajtóanyag tömegének arányától függ:

$$v = v_h \ln \left( 1 + \frac{m_{\text{üzemanyag}}}{m_{\text{rakéta}}} \right) \quad (2.87)$$

Ha tehát a rakétából 100 m/s sebességgel áramlik ki a hajtóanyag, és az indulótömeg fele hajtóanyag, akkor a végsebessége csak  $100 \cdot \ln 2 = 69$  m/s lesz. Ezt a Földön kilőtt rakéta esetében még a gravitáció is módosítja, de ettől most eltekintettünk.



2.14. ábra. Tömegpontok és kötött rendszerek szabadsági fokai. Egyetlen tömegpontnak három szabadsági foka van, a két pontból álló kötött objektumnak öt, nagyobb (merev) testeknek pedig hat (három mozgási és három forgási szabadsági fok).

### 2.7.3. Szabadsági fokok, merev testek

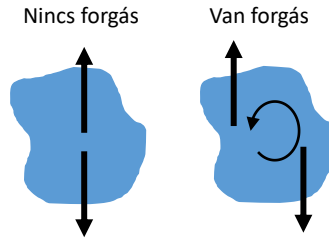
Szabad pontrendszernek azt nevezzük, ahol minden részecske mozoghat kényszer nélkül, csak ütközések vannak: ilyen például egy nemesgáz atomjainak rendszere egy gáztartályban. Ebben az esetben minden részecskének **3 szabadsági foka** van, azaz a tér 3 irányában mozoghat szabadon, ahogy a 2.14. ábra bal oldalán látható.

Kötött rendszerekben azonban kényszerek lépnek fel, ezáltal csökken a szabadsági fokok száma. Például egy súlyzó két végén lévő súlyok nem mehetnek akármerre, a köztük lévő távolság ugyanis állandó (ezt a súlyzó rúdja hosszúságának állandósága biztosítja). Kötött rendszerre a legegyszerűbb példa egy kétatomos molekula három dimenzióban. Itt mindkét atomnak három szabadsági foka van, azaz a rendszernek összesen  $2 \times 3 = 6$  szabadsági foka lenne, de az atomok közötti kötés (azaz a rögzített távolságuk) miatt egy kényszer is fellép, azaz végül a szabadsági fokok száma 5 lesz, ahogy azt a 2.14. ábra illusztrálja. Ez azt is jelenti, hogy egy kétatomos molekula öt darab adattal írható le: helyzete a középpontjának három koordinátájával, míg orientációja (iránya) két szöggel. A háromatomos molekulák három pontból álló, kötött rendszert alkotnak. Az atomok között három kényszer (kötés) van, ugyanis egyik atompár távolsága sem változhat meg. Így ebben az esetben a szabadsági fokok száma  $3 \times 3 - 3$ , azaz 6.

Érdekes módon több pont esetén sem lesz nagyobb a szabadsági fokok száma: hat adattal tetszőleges merev test (azaz sok tömegpont maximálisan kötött rendszere, ahol bármely két pont távolsága állandó) leírható. Jegyezzük meg például, hogy négy pont esetén hat kötésre van szükség, így a szabadsági fokok száma  $4 \times 3 - 6$ , azaz továbbra is 6. Ennek oka persze az, hogy összességében a teljes testnek három forgási és három mozgási szabadsági foka van, akárhány pontból is áll – még egy pont hozzátevése nem hoz létre új szabadsági fokot. Mindezek illusztrálására lásd a 2.14. ábrát.

### 2.7.4. Merev testekre ható erők, a forgatónyomaték

A több pontból álló merev rendszert **merev testnek** nevezzük, ha tetszőleges két pontjának távolsága állandó, illetve tetszőleges három pontja által kijelölt háromszög szögei állandóak. Ezen merev testeknek hat szabadsági foka van, ahogy fent láttuk. Ez azt jelenti, hogy ennyi független paraméterrel írhatjuk le őket, avagy azt is mondhatjuk, hogy ennyiféle független mozgást tudnak végezni. Ebből három a tér három irányába való mozgás, a többi három pedig a tér három irányába mutató tengelyek körüli forgás.



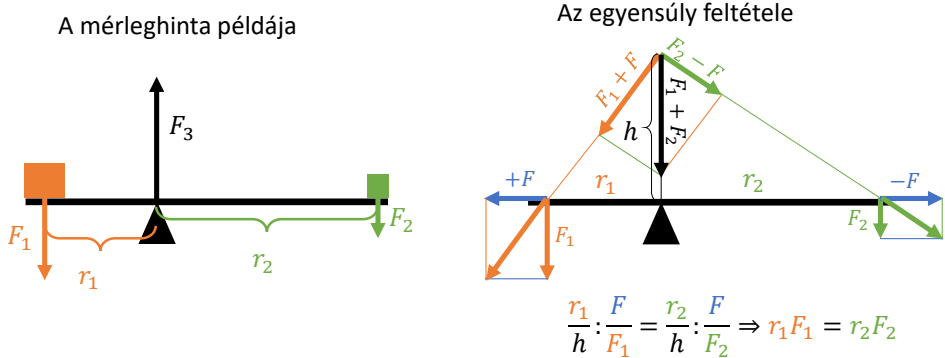
2.15. ábra. Forgás nélküli egyensúly két erő esetén csak akkor lehetséges, ha a két erő egy vonalba esik. Több erő esetén tehát arra van szükség, hogy ezeket egy vonalba eső erőpárrá lehessen redukálni.

Két alapvető mozgástípus van tehát: adott irányba való haladás, valamint a forgás. Ezek kombinációjából a merev testek minden mozgása felépíthető. A haladó mozgást Newton második törvénye írja le (amely szerint a test akkor marad nyugalomban, ha az összes erő összege nulla). Hogyan írhatjuk le a forgó mozgást, mit mondanak erről a Newton-törvények?

Tudjuk, hogy az egész rendszer gyorsulása szempontjából elég az erők (vektori) összeget megadni. A forgató hatás azonban nem ennyire egyszerű. Mindennapi tapasztalat, hogy a merev testre ható két, nulla összegű (azaz azonos nagyságú, de ellentétes irányú) erő is okozhat forgást. Csak akkor nem okoz egy merev testre ható két erő forgást, ha a két erő hatásvonala egybeesik. (Egy erő hatásvonalán az erőre, mint vektorra fektetett egyenest értjük.) Sőt: ha a rendszerre ható erőkhöz hozzáveszünk még két erőt, amelyek összege nulla, és egy egyenesben hatnak, az nem változtatja meg sem a rendszer mozgását, sem a forgását (vagy éppen hogy egyensúlyban maradását).

Azt is mondhatjuk tehát, hogy egy merev testre ható erőt a hatásvonala mentén eltolhatunk: ez nem változtatja meg a rendszer dinamikáját. Ha egy testre két erő hat, amelyek összege ugyan nulla (azaz párhuzamosak, de ellentétes irányúak), de különböző a hatásvonaluk, akkor a test biztosan elfordul (ez a mindennapi tapasztalatunk). Tehát a forgás szempontjából nyugalomban maradás feltétele az, hogy az erők összege nulla legyen, továbbá egy pontba redukálhatóak legyenek (azaz hatásvonalaik egy pontban messék egymást – két erő esetén ezek essenek egybe), ahogy azt a 2.15. ábra mutatja.

Egy mérleghinta példáját véve, a 2.15. ábra alapján vizsgáljuk meg ezt! Legyen  $\vec{F}_1$  az egyik végén ható függőleges erő,  $\vec{F}_2$  a másik végén (a két hintázó súlya miatt fellépő erők). Az alátámasztásnál fellépő  $\vec{F}_3$  erő kiegyenlíti ezeket, tehát éppen  $\vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  nagyságú, és felfelé mutat. A rendszer geometriája szerint  $\vec{F}_1$  és  $\vec{F}_2$  hassanak  $r_1$  és  $r_2$  távolságra az alátámasztástól. A rendszer nem mozdul el lefelé vagy felfelé (mivel az erők összege nulla), de elforoghat, ahogy azt tapasztaljuk is. Mi a feltétele annak, hogy ne következzen be forgás? Az előző bekezdés végén említettek szerint a hinta akkor marad egyensúlyban, akkor nem fordul el, ha az  $\vec{F}_1$  és  $\vec{F}_2$  erők összege az alátámasztás vonalába redukálható, ekkor ugyanis ez az összeg és  $\vec{F}_3$  kiejtik egymást – egyébként elforgatják a hintát. De hogyan redukálhatjuk egy pontba a két párhuzamos erőt? Vezessünk be egy hatásvonalban két „segéderőt”,  $+\vec{F}$  és  $-\vec{F}$  mértékben, a mérleghinta vonalában (azaz merőlegesen az  $\vec{F}_1$  és  $\vec{F}_2$  erők függőleges hatásvonalára). Ezeket az  $\vec{F}_1$  és  $\vec{F}_2$  vektorhoz hozzáadva az új  $\vec{F}_1 + \vec{F}$  és  $\vec{F}_2 - \vec{F}$  erőket kapjuk, amelyek viszont már egy



2.16. ábra. Az ábrákon egy mérleghinta látható, a szöveg alapján az derül ki, hogy az egyensúly feltétele az  $F_3 = F_1 + F_2$  szokásos egyenlőségen túl az is, hogy  $r_1 F_1 = r_2 F_2$  legyen.

pontba redukálhatóak, a hatásvonalaik metszik egymást. Ezt illusztrálja a 2.16. ábra. Ezen látható, hogy az összesített  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$  erő akkor esik az alátámasztás vonalába, ha az erők alkotta háromszögek hasonlóak az  $r_1$ ,  $r_2$ , illetve az erők irányába húzott egyenesek metszéspontjáig tartó  $h$  magasság alkotta háromszögekkel. Ebből az ábrán látható  $\frac{r_1}{h} : \frac{F_1}{F_1} = \frac{r_2}{h} : \frac{F_2}{F_2}$  feltétel adódik, amiből  $r_1 F_1 = r_2 F_2$  jön ki. Azt mondhatjuk tehát, hogy ebben az esetben a nyugalomban maradás, azaz az egyensúly feltétele az, hogy az  $rF$  mennyiségek megegyeznek.

Ez által motiválva bevezetjük az alátámasztásra mint forgástengelyre vonatkoztatott **forgatónyomatékokat**  $M = rF$  módon. Ekkor a két erőre  $M_1 = r_1 F_1$ , illetve  $M_2 = r_2 F_2$ , ha mindezt az  $r_1$  és  $r_2$  erőkarok előjelét is figyelembe véve tesszük, akkor az adódik, hogy az összesített  $M = M_1 + M_2$  forgatónyomatéknak kell nullának lennie, azaz a nyugalomban maradás feltétele  $M = 0$ .

Forgómozgások vizsgálata során a forgatónyomaték a legfontosabb fizikai mennyiség. Ennek pontos definíciója az adott forgástengelyt és az erőt összekötő  $\vec{r}$  erőkar, illetve  $\vec{F}$  ismeretében

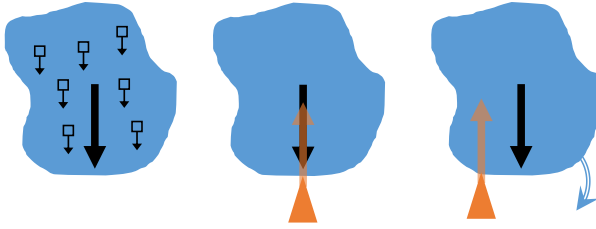
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.88)$$

ahol tehát vektoriális szorzást használunk, ami azt jelenti, hogy a forgatónyomatékvektor iránya a forgástengely iránya (hiszen ez merőleges  $r$ -re és  $F$ -re is). A forgatónyomaték nagysága pedig  $\alpha$  szöveget bezáró erő és erőkar esetén

$$|M| = rF \sin \alpha. \quad (2.89)$$

Itt  $r \sin \alpha$  az erő hatásvonalának távolsága az adott tengelytől (síkbeli rajz esetén a tengely általában egy pont, és az iránya általában a rajzra merőleges – hiszen a forgás a rajz síkjában történik). Azt mondhatjuk tehát, hogy a forgatónyomaték nagysága az erő szorozva az erő és a választott tengely távolságával. Ebből az is adódik, hogy a forgatónyomaték a tengelyt metsző hatásvonálú erő esetén nulla, hiszen ekkor az erő és a tengely távolsága nulla (vagy párhuzamos az erővel, azaz  $\alpha = 0$ ).

A forgatónyomatékokat tehát a fentiekben definiáltuk. Ezután Newton első törvényének (erő nélkül nincs gyorsulás) az fog megfelelni, hogy a nyugalomban maradás (el nem



2.17. ábra. A súlypont a testet alkotó tömegpontokra ható gravitációs erők összegzési pontja, azaz a pontok tömeggel súlyozott átlagos helye, ahogy az a szövegben is olvasható. A súlypontban (vagy valahol alatta) alátámasztott test nem billen fel. A súlypont megegyezik a tömegközépponttal.

fordulás) feltétele

$$\Sigma M = 0, \quad (2.90)$$

azaz az összes forgatónyomaték összege nulla<sup>13</sup>.

Mivel, mint láttuk, a forgatónyomaték függ attól, hogy melyik pontra vonatkoztatjuk (hiszen szerepel benne az erő hatáspontjába mutató  $\vec{r}$  helyvektor, az erőkar), felmerül a kérdés, hogy melyik pontra kell felírni a  $\Sigma \vec{M} = 0$  feltételt, ha az egyensúly feltételét akarjuk megfogalmazni. A válasz az, hogy ha már egyszer azt is kikötöttük, hogy  $\Sigma \vec{F} = 0$  legyen, azaz a testre ható összes erő is eltűnik (ez ugye kellett ahhoz, hogy ne mozduljon el a test), akkor mindegy: ha egyik pontra (feltételezett „forgástengelyre”) nézve nulla a forgatónyomatékok összege, akkor egy másik forgástengelyre nézve is igaz lesz ez.<sup>14</sup> Tehát egyensúly keresése esetén tetszőleges pontot választhatunk viszonyítási pontnak.

A mérleghinta esetében az alátámasztásnál választva a forgástengelyt ebből  $r_1 F_1 + r_2 F_2 = 0$  adódik, mivel az alátámasztás forgatónyomatéka nulla (hiszen éppen a forgástengelyben hat ez az erő).

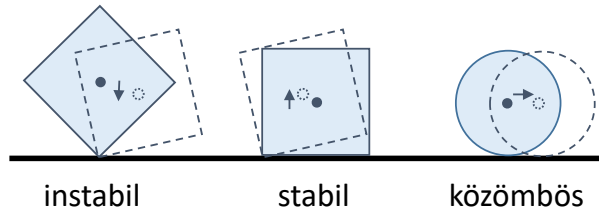
### 2.7.5. A súlypont, egyensúlyi helyzetek

A Földön bármely tárgy esetén a gravitáció annak minden pontjára hat, tehát hogy nyugalomban marad-e, a súlyerőből származó erők és forgatónyomatékok összege alapján dől el. Az erők összege egyszerűen megadható, hiszen a testet kis  $m$  tömegű részekre felbontva egyszerűen minden kis  $m$  tömegről össze kell adni ezeknek  $mg$  súlyát, azaz a gravitációs erő nagyságát: az erők iránya ugyanis megegyezik, mindegyik függőleges (a Földnél lényegesen kisebb kiterjedésű test esetén). A test akkor van nyugalomban, ha egy ennek megfelelő nagyságú, függőlegesen felfelé mutató tartóerő van jelen. A forgatónyomaték esetében már bonyolultabb a helyzet, ugyanis a gravitáció forgatónyomatékát egyesével ki kell számolni a kis  $m$  tömegekre, és megvizsgálni, hogy ez a tartóerő forgatónyomatékát kiejti-e. Érdekes azonban, hogy létezik egy pont (azaz egy ezen átmenő,

<sup>13</sup>A  $\Sigma \vec{M} = 0$  feltétel szükséges az egyensúlyhoz, de ez még megengedne persze állandó szögsebességű forgást. Ha viszont  $\Sigma \vec{M} \neq 0$ , az a szögsebesség megváltozását okozza, azaz biztosan nem lesz egyensúly.

<sup>14</sup>Egyszerű belátni ezt: ha  $\Sigma \vec{r} \times \vec{F} = 0$  és  $\Sigma \vec{F} = 0$ , akkor  $\Sigma \vec{r} \times \vec{F} + \vec{R} \times \Sigma \vec{F} = 0$ , azaz  $\Sigma (\vec{r} + \vec{R}) \times \vec{F} = 0$  is igaz, azaz ha  $\vec{R}$ -rel odébb képzeljük a forgástengelyt (a forgatónyomaték viszonyítási pontját), akkor is igaz marad a  $\Sigma \vec{M} = 0$ .





2.18. ábra. A stabil, instabil és közömbös egyensúly. Az egyensúly minősége azon múlik, hogy az abból való kikerülés esetén a súlypont merre mozdul el, azaz a test helyzeti energiája csökken (mozgási energiává konvertálódik) vagy nő (azaz energiabefektetésre van szükség).

vízszintes tengely), amelyre nézve a gravitáció összesített forgatónyomatéka nulla: ez a **súlypont**, ahova az összes kis súlyerő redukálható. Ha ezen átmenő hatásvonalú erővel tartjuk a testet, akkor a tartóerő forgatónyomatéka is nulla (erre a tengelyre nézve), így a test nyugalomban maradhat. Egyébként viszont biztosan elforog, hiszen a két forgatónyomaték nem ejti ki egymást. A gravitációs erő tehát egyetlen, a súlypontban ható erőként képzelhető el. A súlypont helye éppen a test pontjainak tömegükkel súlyozott átlagos helye:

$$\vec{r}_{\text{súlypont}} = \frac{\sum m\vec{r}}{\sum m}, \quad (2.91)$$

ahogy az a 2.17. ábrán is látható. Az így definiált súlypont homogén testek esetén tulajdonképpen éppen a geometriai középpont. Érdekes (de egyúttal természetes is, ha mélyebben belegondolunk), hogy ez éppen a tömegközépponttal egyezik meg, amit az impulzusnál vezettünk be! Ahogy ott is, két pontból álló rendszerre itt is  $\vec{r} = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)/(m_1 + m_2)$ . A mérleghinta esetét így is megoldhatjuk: ezen pontban kell alátámasztani a hintát, hogy ne billenjen el.

Fontos továbbá látni, hogy a gravitációs erő munkája a súlypont magasságváltozásától függ. Ezért akkor **stabil** egy rendszer alátámasztással való rögzítése, ha kis elmozdulás esetén a súlypont felfelé mozdulna el; ekkor ugyanis energiabefektetésre van szükség a kimozdításhoz. **Instabil** viszont az egyensúly, ha kis elmozdulásra a súlypont lefelé mozdul el, mert ekkor energia szabadul fel, ami a test további elbillenését segíti elő. Közömbös egyensúlyról beszélünk, ha a súlypont magassága kis elmozdítások esetén nem változik. Ezeket a 2.18. ábra illusztrálja.

### Kísérlet: mérleg készítése

- Egyensúlyozzunk ki egy vonalzót vagy könyvet egy palack vagy egy másik könyv tetején.
- Helyezzünk el egy ismert tömegű tárgyat az így létrehozott mérlegen, és egyensúlyozzuk ki a mérleget egy másik tárggyal.
- Az egyensúly feltételének egyenletét felhasználva határozzuk meg az ismeretlen tömegű tárgy tömegét, majd vessük össze a mérési eredményt a tárgy tényleges (máshogy megmért) tömegével.

## 2.8. A forgómozgás dinamikája

### 2.8.1. A tehetetlenségi nyomaték

A fentiekben áttekintettük, hogy mikor marad nyugalomban egy merev test, mik az egyensúlyi helyzetei. A következőkben pedig nézzük át, hogy ha nem marad nyugalomban, mert az összes rá ható forgatónyomaték nem nulla, akkor hogyan kezd el forogni. Először (bár ehhez szintén összesen nulla forgatónyomatéokra van szükség) vizsgáljuk meg az egyenletes forgás jellemzőit. Adott tengely körüli forgás esetén az  $\vec{\omega}$  szögsebességvektor iránya a forgástengely iránya. A tengelytől  $r$  távolságra (vagy a tengely egy pontjától  $\vec{r}$  vektornyíra) lévő pont sebessége, ahogy már a körmozgásnál láttuk,  $\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$ . A vektorjelölést elhagyhatjuk, ha mindig észben tartjuk, hogy  $r$  mit jelent, és hogy  $\omega$ -nak is van iránya.

A forgatónyomaték által végzett munka egyenletes körmozgás esetén könnyen kiszámítható. Ekkor a középponttól  $r$  távolságban  $\alpha$  elfordulás történik, azaz az elmozdulás  $s = r\alpha$ , tehát  $W = Fs = Fr\alpha = M\alpha$ . A teljesítmény innen  $P = dW/dt = M\Delta\alpha/\Delta t = M\omega$ . Az adott,  $\omega$  szögsebességhez tartozó mozgási energia szintén levezethető, ha a test egyes  $m$  tömegű darabjai a forgástengelytől  $r$  távolságra vannak, és itt  $v = r\omega$  sebességgel mozognak. Nem kell mást tennünk, mint a kis  $m$  tömegű darabokra összegezni:

$$E_{\text{kin}} = \sum \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum mr^2 = \frac{1}{2}\Theta\omega^2, \quad (2.92)$$

és itt bevezettük egy test adott tengelyre vonatkoztatott **tehetetlenségi nyomatékát**:

$$\Theta = \sum mr^2, \quad (2.93)$$

ahol  $r$  az egyes részek forgástengelytől vett távolsága. Összetett testek (például folytonos anyageloszlású testek, vagy néhány tömegpontból álló molekulák)  $\Theta$  tehetetlenségi nyomatéka pedig az egyes pontjaik tehetetlenségi nyomatékainak összege (vagy folytonos anyageloszlás esetén integrálja). A tehetetlenségi nyomaték tehát a forgástengely választásától függ. A 2.2. táblázatban megadjuk néhány geometriai alakzat tehetetlenségi nyomatékát (adott forgástengely esetén).

Érdeemes ehhez még hozzátenni, hogy ha egy  $m$  tömegű test esetén adott, a súlyponton átmenő tengelyre a tehetetlenségi nyomaték értéke  $\Theta$ , akkor az ezzel a tengellyel párhuzamos, de attól  $L$  távolságban vett tengelyre a tehetetlenségi nyomaték értéke  $\Theta + mL^2$  lesz.<sup>15</sup> A tehetetlenségi nyomaték a forgással szembeni „ellenállást”, tehetetlenséget jellemzi. Minél nagyobb egy test tehetetlenségi nyomatéka, annál nehezebb forgásba hozni, vagyis a szögsebességét növelni. Ebből adódik, hogy ha egy  $m$  tömegű,  $\Theta$  tehetetlenségi nyomatékkal rendelkező testet a súlypontjától  $L$  távolságú tengely körül engedünk ingaként „lengeni”, akkor a lengés periódusideje

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{mgL}} \quad (2.94)$$

<sup>15</sup>Példák: a 2.2. táblázatban a vékony rúdnak a középponton, illetve a végén átmenő tengelyre, illetve a gömbnek a középpontra és az érintőre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékai.

Test	forgástengely	$\Theta$
Tömegpont	$r$ távolságra	$mr^2$
Két $d$ távolságú tömegpont	középen, merőlegesen	$\frac{1}{2}md^2$
Két $d$ távolságú tömegpont	az egyik ponton át, merőlegesen	$md^2$
Üreges $r$ sugarú henger	a szimmetriatengely	$mr^2$
Tömör $r$ sugarú henger	a szimmetriatengely	$\frac{1}{2}mr^2$
Rúd ( $l$ hosszúságú)	középen, a rúdra merőlegesen	$\frac{1}{12}ml^2$
Rúd ( $l$ hosszúságú)	az egyik végén át, merőlegesen	$\frac{1}{3}md^2$
Üreges gömb ( $r$ sugarú)	a közepén át	$\frac{2}{3}mr^2$
Tömör gömb ( $r$ sugarú)	a közepén át	$\frac{2}{5}mr^2$
Tömör gömb ( $r$ sugarú)	egy érintő	$\frac{7}{5}mr^2$
Gömbhéj ( $d$ átmérőjű)	a közepén át	$\frac{2}{3}md^2$
Lapos korong ( $r$ sugarú)	az egyik átmérő	$\frac{1}{4}mr^2$
Kocka ( $a$ élhosszúságú)	bármilyen, a középponton átmenő	$\frac{1}{6}ma^2$

2.2. táblázat. Egyes testek tehetetlenségi nyomatéka (adott forgástengelyre vonatkoztatva).

lesz. Érdekes alkalmazása, hogy ezzel ki lehet választani két azonos tömegű és méretű, oldalt lezárt henger közül az üregeset, hiszen ennek (a fenti táblázat szerint) kétszer akkora a tehetetlenségi nyomatéka, mint a tömörnek. További érdekes következmény, hogy egyetlen,  $L$  hosszúságú fonálon felfüggesztett tömegpontból álló inga (azaz úgynevezett matematikai inga) lengésének periódusideje (a  $\Theta = mL^2$  összefüggés miatt)  $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ , azaz független a tömegtől.

### Kísérlet: tehetetlenségi nyomatékok vizsgálata

- Rögzítsünk egy merev hengert az egyik végén átmenő forgástengelyre. Ekkor a forgástengely és a tömegközéppont távolsága a henger hosszának fele lesz.
- Térítsük ki nyugalmi helyzetéből, majd vizsgáljuk meg a lengés periódusidejét.
- A fenti  $T = 2\pi\sqrt{\Theta/mgL}$  összefüggés alapján határozzuk meg a tehetetlenségi nyomatékát, és vessük ezt össze a 2.2. táblázatban olvasható értékekkel.
- Készítsünk matematikai ingát is, azaz függesztünk fel egy kis tárgyat egy fonálra. Mérjük meg a fonal hosszát a periódusidő segítségével, majd vessük ezt össze a fonal tényleges hosszával!

### 2.8.2. A forgás mozgásegyenlete, a perdület

Merev testek forgásának mozgásegyenlete is könnyen megadható Newton második törvényének mintájára, abból kiindulva. Vegyük egy  $m$  tömegű, pontszerű test  $r$  sugarú



$$\begin{aligned}\Theta &= \Sigma mr^2 \text{ csökken} \\ J &= \Theta\omega \text{ állandó} \\ \omega &\text{ nő, a forgás gyorsul}\end{aligned}$$

2.19. ábra. Piruettező korcsolyázó. Ha behúzza a karját, egyes pontjai közelebb kerülnek a forgástengelyhez, így ezek tehetetlenségi nyomatékhoz adott járuléka lecsökken, és így a teljes tehetetlenségi nyomaték is lecsökken. Mivel azonban a súrlódás forgatónyomatéka elhanyagolható, így a perdület állandó, ezért a forgás szögsebessége megnő.

körön való keringését. Ekkor a forgatónyomaték

$$M = Fr = mar = mr \frac{\Delta v}{\Delta t} = mr^2 \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = mr^2 \beta \quad (2.95)$$

módon írható fel, ahol kihasználtuk a szöggyorsulás  $\beta = d\omega/dt$  definícióját. Ugyanakkor ha ez a forgatónyomaték több tömegpont forgó gyorsításáért is felel, akkor ezekre a tömegpontokra mind összegezni kell. Ezt figyelembe véve tehát forgó mozgás esetén a Newton második törvényének megfelelő **mozgásegyenlet** ez lesz:

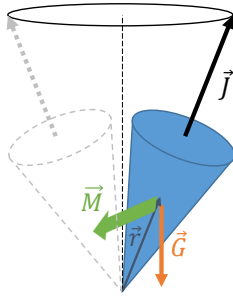
$$M = \Sigma mr^2 \beta = \Theta \beta. \quad (2.96)$$

Ez alapján a **perdületet** is definiálhatjuk, az impulzushoz hasonlóan. Az előző egyenletről kiindulva

$$M = \Theta \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\Delta(\Theta\omega)}{\Delta t} = \frac{\Delta J}{\Delta t} \quad \text{adódik, azaz legyen} \quad J = \Theta\omega. \quad (2.97)$$

A forgatónyomaték tehát a perdületet változtatja meg,  $\Delta J = M \Delta t$ , és nulla forgatónyomaték esetén a perdület állandó. Egy keringő tömegpont esetén (amelynek perdülete a fentiek szerint  $J = mr^2\omega = mrv$ ), amelyre centrális (a középpont felé mutató) erő hat, a középpontra nézve nincs forgatónyomaték, tehát ekkor a **perdület állandó**. Mivel a perdület  $rv_{\perp}$ -vel arányos, ezért ebből éppen Kepler második törvénye következik. A perdület megmaradásának szép példája a piruettező korcsolyázó. Rá ugyanis lényegében csak a súrlódási erő hat, de ha ez (szinte) csak a forgástengelyben jelentkezik (mert csak ezen az egy ponton érintkezik a korcsolya a talajjal), akkor a rá ható forgatónyomaték (közel) nulla, tehát a piruettező korcsolyázó perdülete (szinte) állandó. Ekkor, ha behúzza a kezét, lecsökken a  $\Theta = \Sigma mr^2$  tehetetlenségi nyomatéka (mivel néhány pontja a tengelyhez közelebb, kisebb  $r$ -rel jellemezhető pozícióba kerül). Ugyanakkor a  $J = \Theta\omega$  perdület állandósága miatt ez azt jelenti, hogy nő a szögsebessége, azaz gyorsul a pörgése, ahogy azt a 2.19. ábra mutatja.

Fontos továbbá látni, hogy a perdület vektormennyiség, csakúgy, mint az  $\vec{\omega}$  szögsebesség is. Gömb alakú, vagy nagyon szimmetrikus testeknél (például kockánál) a perdület mindig  $\vec{\omega}$  irányába mutat. Nem egészen szimmetrikus testeknél, ha az  $\vec{\omega}$  éppen a test egy „fő” szimmetriatengelyének irányába mutat, akkor is  $\vec{J} \parallel \vec{\omega}$  (ez a helyzet áll



Súlypont helye:  $\vec{r}$

Súlyerő forgatónyomatéka:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{G}$$

Perdület megváltozása:

$$\Delta \vec{J} = \vec{M} \Delta t$$

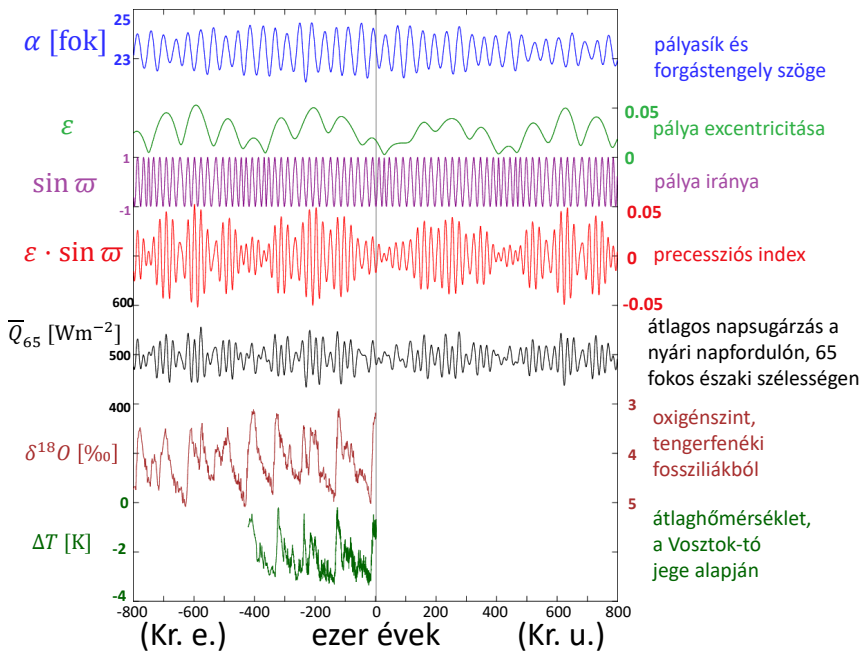
Miután  $\vec{J} \perp \vec{M}$ , ezért  $\vec{J}$  nagysága nem változik, csak az iránya, egy kör mentén forog körbe

2.20. ábra. Ferde tengelyű pörgettyű precessziós mozgása. A ferde tengely miatt a gravitációs erő forgatónyomatéka nem nulla, hanem az alátámasztási pontot és a tömegközéppontot összekötő  $\vec{r}$  vektorra és a  $\vec{G}$  gravitációs erőre merőleges irányú  $\vec{M}$  vektor. Ez megváltoztatja a  $\vec{J}$  perdületet, amely így végeredményben egy függőleges tengely körül precesszál majd.

fenn például a fentebbi 2.2. táblázatban feltüntetett összes testre és megfelelő forgástengelyre). A perdület ilyenkor  $\vec{J} = \Theta \vec{\omega}$  módon definiálható vektorként. Megemlítjük, hogy a perdület általában is vektor, viszont nem ilyen szimmetrikus helyzetekben a  $\Theta$  tehetetlenségi nyomaték már mátrixként (avagy tenzorként) értelmezendő, és ekkor a perdület iránya eltérhet a szögsebességétől.

Ha  $\vec{J}$  állandó, akkor természetesen a nagysága és az iránya sem változik, tehát (a fentebb mondottak értelmében szimmetrikus helyzetekben) forgatónyomaték híján nemcsak a forgás sebessége, hanem a tengelye sem változik meg. Erre jó példa a megpörgetett bűgőcsiga (vagy tengelyére állított biciklikerek, ahogy az alábbi kísérletben), amely sokáig nem dől el, mivel a perdület állandósága miatt nem változhat a forgástengely iránya sem. Ugyanakkor az alátámasztási pont nem tökéletesen pontszerű, a tengelynek van kiterjedése, tehát az itt ható súrlódásnak van forgatónyomatéka, még ha nagyon kicsi is. Ezért előbb-utóbb mégis eldől a forgó kerék, ahogy lelassul. A ferde tengelyű bűgőcsiga mozgását **pörgettyűmozgásnak** vagy **precesszióknak** nevezzük: ennek során konstans (gravitációs) erő hat a döntött pörgettyűre. A forgatónyomaték az erő és a tengely síkjára merőleges (a vektoriális szorzás miatt). Ez tehát ilyen irányban változtatja a perdületet, amely amúgy a tengely irányába mutat. A perdület, és így a forgástengely is, egy függőleges tengely körül forog majd, ahogy azt a 2.20. ábra mutatja.

A Föld mozgása is a pörgettyűmozgás bonyolult alkalmazása, a Nap és a Hold forgatónyomatéka miatt jön létre (mivel a Föld nem pontosan gömb alakú, ezért hathat rá forgatónyomaték), de a többi bolygó gravitációja is szerepet játszik ebben. A fentiekben leírt precesszió miatt 26 ezer éves ciklusban forog a Föld forgástengelye a galaxis csillagaihoz képest – ugyan most a Sarkcsillag tényleg pontosan a Föld északi tengelye irányában van, de körülbelül tízezer év múlva a Vega nevű csillag veszi majd át a szerepét. Ugyanakkor a pálya síkja is ingadozik, és összességében 41 000 éves ciklusban változik a forgástengely és a pálya szöge, nagyjából 22,1 és 24,5 fok között, most 23,4 fok. Ez adja a napév (azaz két tavaszi nap-éj egyenlőség közötti időtartam) változásait, illetve ezek miatt a (Rák-, Bak-) térítők egyre közelebb lesznek az Egyenlítőhöz, évente nagyjából 14 méterrel. Fontos továbbá megemlíteni, hogy körülbelül 100 ezer éves ciklusban változik a földpálya excentricitása is (körülbelül  $\varepsilon = 0-0,07$  között). Ugyanakkor



2.21. ábra. A Föld egyes jellemzőinek évezredes váltakozása. Látható, hogy a keringésből, forgásból és precesszióból adódó jellemzők alapján kiszámított átlagos beeső sugárzás, a mért oxigénszint és a hőmérséklet hasonló mintázatokat mutat. Az ábra forrása az angol Wikipedia „Milankovic cycles” szócikke, ahol további érdekes részletek olvashatóak.

a bolygók miatt 134 ezer év alatt meg körbe is forog a pályaellipszis (azaz a tengelyek) iránya. Ezentúl évente 0,02 másodperccel nő a nap hossza az árapálymozgás miatt, és még további változásokat is lehetne említeni. Mindenesetre a fenti váltakozások jelentik a Föld **éghajlati jelenségeinek** egyik fontos okát. Például most a pálya Naptól legtávolabbi pontján van nyár, míg a legközelebbin tél, de körülbelül 10 000 év múlva éppen fordítva lesz. Ugyanakkor a naptávolban való gyorsabb keringés miatt ekkor hosszabb és melegebb nyár várható. A fentieket foglalják össze a 2.21. ábrán jelzett, Milutin Milanković szerb csillagász és geofizikus után elnevezett ciklusok, amelyeket egyrészt klimatológiai mérési adatok is igazolnak, másrészt azonban rengeteg kérdést vetnek fel, amelyeket itt most nem tárgyalunk.

Érdekes ezen a ponton megemlíteni, hogy valójában a Naprendszer bolygóinak mozgása **kaotikus**: ha van néhány méter pontatlanság a mostani pozíció mérésében (márpedig biztosan van), akkor lehetetlen megmondani, hogy például 100 millió év múlva hol lesz a bolygó. Ez a több testből álló rendszerek esetében általában így van, különös tekintettel például a levegő részecskéinek mozgására, azaz az időjárásra. Ez nem azt jelenti, hogy Newton törvényei alapján elméletben nem lehetne megmondani a vizsgált részecskék vagy bolygók tetszőleges jövőbeli helyzetét és sebességét. Arról van „csupán” szó, hogy az adott pillanatban tett mérésünk pontatlansága igen közeli előrejelzés esetén is már olyan bizonytalanságot okoz, hogy a rendszer lényegében előrejelezhetlenné válik. Ez a káosz jelensége.

### Kísérlet: precesszió létrehozása

- Helyezzünk egy biciklikereket az asztalra, függőleges tengellyel, és pörgessük meg. A súrlódás kis forgatónyomatéka miatt a pörgés nagyon lassan változik csak.
- Kicsit lökjük meg a forgó kereket, és vizsgáljuk meg a kialakuló precessziót!
- Indítsuk a forgást ferde tengellyel, és határozzuk meg a tengelyferdeség és a precesszió sebességének kapcsolatát.

### 2.8.3. Forgó és haladó mozgások „dualitása”

A forgó és a haladó mozgásokra vonatkozó mennyiségek párokba rendezhetőek, egyfajta **szótárt** alkotva a két jelenségkör nyelvezete között:

$$\text{megtett út, } s \Leftrightarrow \text{szögelfordulás, } \alpha; \quad (2.98)$$

$$\text{tömeg, } m \Leftrightarrow \text{tehetetlenségi nyomaték, } \Theta; \quad (2.99)$$

$$\text{erő, } F \Leftrightarrow \text{forgatónyomaték, } M. \quad (2.100)$$

Ezek alapján további származtatott mennyiségekkel bővül a szótár:

$$\text{sebesség, } v = \dot{s} \Leftrightarrow \text{szögsebesség, } \omega = \dot{\alpha}; \quad (2.101)$$

$$\text{gyorsulás, } a = \dot{v} \Leftrightarrow \text{szöggyorsulás, } \beta = \dot{\omega}; \quad (2.102)$$

$$\text{impulzus, } p = mv \Leftrightarrow \text{perdület, } J = \Theta\omega. \quad (2.103)$$

Mindezekkel pedig törvénypárok állíthatóak fel, illetve a haladó mozgás összefüggései egy az egyben lefordíthatóak a forgómozgás nyelvére, és így ott is érvényes törvényeket kapunk:

$$F = ma \Leftrightarrow M = \Theta\beta, \quad (2.104)$$

$$\Delta p = F\Delta t \Leftrightarrow \Delta J = M\Delta t, \quad (2.105)$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2} \Leftrightarrow E_{\text{kin}} = \frac{\Theta\omega^2}{2}, \quad (2.106)$$

$$s = v_0t + \frac{at^2}{2} \Leftrightarrow \alpha = \omega_0t + \frac{\beta t^2}{2}, \quad (2.107)$$

$$v = v_0 + at \Leftrightarrow \omega = \omega_0 + \beta t. \quad (2.108)$$

A fentiek közül az utolsó kettő az egyenletes gyorsulásra, illetve az egyenletesen gyorsuló körmozgásra vonatkozik. Mindez azért hasznos, mert elég a szótár első három elemét tudni, és onnan a haladó mozgás mennyiségeinek és törvényeinek ismeretében a forgómozgásra vonatkozóak kikövetkeztethetőek.

## 2.9. Ellenőrző kérdések

1. Mi a kapcsolat a hely, a sebesség és a gyorsulás között?
2. Egyenletes mozgás esetén hogyan függ a helyzet az időtől?

3. Egyenletesen gyorsuló mozgás esetén hogyan függ a helyzet az időtől?
4. Egyenletesen gyorsuló mozgás esetén hogyan függ a sebesség az időtől?
5. Mondj három példát egyenletesen gyorsuló mozgásokra! Rajzold le a mozgás vázlatát!
6. Egyenletes lassulás esetén  $v_0$  sebességről mennyi idő alatt áll meg egy fékező autó, és ez idő alatt mekkora utat tesz meg?
7. Egy tárgyat beleejtünk a liftaknába, majd 8 másodperc után halljuk, hogy földet ér. Milyen mély a liftakna, és mennyi volt a tárgy végsebessége? (A légellenállástól tekintsünk el.)
8. Harmonikus rezgés esetén hogyan függ a kitérés (=helyzet) az időtől?
9. Harmonikus rezgés esetén hogyan függ a sebesség az időtől?
10. Hajítás esetén hogyan függ a helyzet az időtől?
11. Vízszintesen eldobunk egy tárgyat egy 100 méteres ház tetejéről. Ha elhanyagolható a légellenállás, milyen messzire repül ez a tárgy – azaz  $x$  irányban hol ér földet?
12. Mondj példát állandó gyorsulású kétdimenziós mozgásra! Mi itt a gyorsulás forrása?
13. Egyenletes körmozgás esetén hogyan függ a hely(vektor) az időtől?
14. Egyenletes körmozgás esetén hogyan függ a sebesség(vektor) az időtől?
15. Hogyan írható fel egy percenként 1200 fordulatot tevő, 60 cm sugarú autókerek futófelületének gyorsulásvektora?
16. Egy test 1 méter sugarú körpályán kering, másodpercenként kétszer körbeérve. Ha  $\alpha = 0$  pozícióból indul, hogyan írható fel a 2,25 másodperccel későbbi gyorsulásvektora?
17. Mit jelent a szögsebesség?
18. Mit jelent a szöggyorsulás?
19. Körmozgás esetén mit tudunk a gyorsulásról?
20. Mit mond ki Newton első törvénye?
21. Mi az inerciarendszer?
22. A Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszer inerciarendszer?
23. Honnan tudhatjuk, hogy nem inerciarendszerben vagyunk? Mondj egyszerű példát is!
24. Mit mond ki Newton második törvénye?



25. Mi a tehetetlen tömeg definíciója?
26. Egy 120 tonnás mozdony fékezőereje háromszázezer newton. Mekkora távolságon tud megállni 108 km/h sebességről?
27. Mekkora erővel kell fékezni egy 1000 kg tömegű autót, hogy 108 km/h sebességről 45 méteren megálljon?
28. Newton második törvényéből miért következik, hogy a Földön a testekre  $mg$  erő hat lefelé?
29. A körmozgásra nézve mi következik Newton második törvényéből?
30. Mit mond ki Newton harmadik törvénye?
31. Mi a lendület definíciója?
32. Mi a lendület és az erő kapcsolata?
33. Egy tárgyra 10 másodpercig 1000 N erő hat. Mennyivel nő meg az impulzusa? Ha 10 kg a tömege, mennyivel nő meg a sebessége?
34. Mikor marad meg egy rendszerben az impulzus?
35. Mekkora impulzust ad át egy visszapattanó labda a falnak?
36. Mi a tömegközéppont?
37. Miért vezetünk be tehetetlenségi erőket?
38. Mi a tehetetlenségi erő, és mekkora a nagysága?
39. Milyen nem-newtoni erőket ismersz?
40. Mekkora és milyen erő hat egy  $a$  gyorsulással (lassulással) fékező buszban lévő  $m$  tömegű testre, és miért?
41. A vidámpark egyik létesítményében  $5g$  gyorsulást próbálhatunk ki. Mekkora erőt kell ekkor kibírnia a 100 kg-os embert is elbíró biztonsági övnek?
42. Mi a kapcsolat/különbség a centrifugális és centripetális erő között?
43. Mi a Coriolis-hatás, mitől és hogyan függ a nagysága és az iránya?
44. Mekkora a Coriolis-erő eltérítő hatása adott szögsebesség, távolság és sebesség esetén?
45. Egy 300 m/s sebességű puskagolyó Budapesten kilőve mennyit térül el a 100 méterre délre lévő céljig való repülése során a Coriolis-erő miatt?
46. Mekkora Coriolis-erő hat egy 1000 kg tömegű autóra, ha Budapesten (a kivezető autópályán) dél felé halad 126 km/h sebességgel?
47. Milyen fizikai rendszerekben jelentős a Coriolis-erő?
48. Mi a Rossby-szám?

49. Mit jelent a pozitív és a negatív visszacsatolás?
50. Mit tudsz a rugóerőről?
51. Milyen erőhatás hoz létre harmonikus rezgőmozgást?
52. Mi a harmonikus oszcillátor?
53. Hogyan függ az időtől egy test kitérése csillapított rezgés esetén? Rajzolj ábrát!
54. Mi a rezonancia jelensége?
55. Mennyire erősíti fel egy rendszer a külső forrásból jövő rezgést rezonancia esetén? Rajzolj ábrát!
56. Mi a rezonanciakatasztrófa?
57. Hogyan hat a közegellenállási erő (mitől függ és hogyan)?
58. Mikor lineáris és mikor négyzetes a közegellenállás sebességfüggése?
59. Miért nem gyorsulnak az esőcseppek zuhanásuk teljes időtartama alatt?
60. Ha az egyenletes mozgáshoz nem kell erő, akkor miért van mégis az autóknak „végsebességük”?
61. Egy autóra  $F = (0,1 \text{ kg/m}) \cdot v^2$  nagyságú közegellenállási erő hat. Ha maximum 100 kW teljesítményt tud leadni, akkor mekkora a maximális sebessége (ha fékezőerőként csak a közegellenállást vesszük figyelembe)?
62. Hogyan hat a csúszási súrlódási erő?
63. Mitől és hogyan függ, hogy a lejtőn csúszó test tovább gyorsul, vagy lelassul és megáll?
64. Hogyan hat a tapadási súrlódási erő?
65. Mitől és hogyan függ, hogy egy test „megcsúszhat-e” egy lejtőn (vagy megcsúszása esetén egyből megállna)?
66. Milyen távolságra vannak a bolygók a Naptól nagyságrendileg?
67. Melyik bolygó van a Földhöz a legközelebb?
68. Nagyságrendileg mekkora a bolygók tömege, illetve átmérője?
69. Mi Kepler első törvénye?
70. Mi Kepler második törvénye?
71. Mi Kepler harmadik törvénye?
72. Mennyivel lenne hosszabb egy év, ha a Föld négyszer olyan messze lenne a Naptól?
73. Mi következik Kepler második törvényéből, illetve ez miből vezethető le?

74. Mi következik Kepler harmadik törvényéből a gravitációs erőre vonatkozóan?
75. Mit mond ki Newton gravitációs törvénye?
76. Mekkora erővel vonzza a Földet egy 1 kg tömegű vizespalack?
77. Mi a kapcsolat Kepler törvényei és Newton gravitációs törvénye között?
78. Mit tudsz a munkavégzésről?
79. Hogyan függ a munkavégzés az erő és az elmozdulás irányától?
80. Hogy számíthatjuk ki a változó erő által végzett munkát?
81. Mekkora egy  $v$  sebességgel mozgó,  $m$  tömegű test mozgási energiája?
82. Mekkora egy  $h$  magasságban lévő,  $m$  tömegű test gravitációs potenciális energiája?
83. Mekkora egy  $x$  hosszal összenyomott,  $D$  rugóállandójú rugó potenciális energiája?
84. Mi az a kinetikus energia?
85. Mikor definiálhatjuk a helyzeti energiát?
86. Mit jelent az, hogy egy erő konzervatív?
87. Mit jelent az energiamegmaradás törvénye?
88. Mikor állandó a kinetikus és potenciális energia összege?
89. Hogy függ össze az energia és a munka?
90. Milyen energia-mértékegységeket ismersz?
91. Ha nem állandó a kinetikus és potenciális energia összege, akkor nem teljesül az energiamegmaradás?
92. Mekkora egy  $h$  magasságból lezuhant test sebessége, ha a közegellenállást elhanyagoljuk?
93. Mi a teljesítmény definíciója?
94. Mekkora az emberiség teljesítményigénye egy emberre vonatkoztatva?
95. Hogyan csökkenthetjük az adott munka elvégzéséhez szükséges erőt?
96. Miért hasznosak az egyszerű gépek? Használatukkal kisebb energiabefektetésre van szükség?
97. Egy pontrendszer esetén mit jelentenek a külső és a belső erők? Mondj példát!
98. Mit tudunk a pontrendszerek teljes impulzusáról? Mondj példát!
99. Mi marad meg két test rugalmatlan ütközésében?
100. Mi marad meg rugalmas ütközés esetén?

101. Mit jelent a pontrendszerek szabadsági fokainak száma?
102. Hány szabadsági foka van egy két pontból álló kötött rendszernek, és miért?
103. Hány szabadsági foka van egy három pontból álló kötött rendszernek, és miért?
104. Mit nevezünk merev testnek?
105. Hány szabadsági foka van egy merev testnek, és miért?
106. Mi a merev testek egyensúlyban maradásának feltétele?
107. Mi az a forgatónyomaték, mire vonatkoztatva definiáljuk?
108. Lehet egy nullánál nagyobb mértékű erő forgatónyomatéka nulla? Mitől függ ez?
109. Mi a súlypont definíciója?
110. Mi a különbség stabil és instabil egyensúly között?
111. Mi a tehetetlenségi nyomaték, mire vonatkoztatva definiáljuk?
112. Mondj példát testek tehetetlenségi nyomatékára!
113. Mi a merev testek mozgásegyenlete (a Newton-egyenlet mintájára)?
114. Mi a perdület definíciója?
115. Mikor marad meg egy test perdülete?
116. Mit mondhatunk el a piruettező korcsolyázó perdületéről?
117. Egy 1 kg tömegű tárgy (tömegpont) 1 méter sugarú körpályán kering percnként egy fordulatot. Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka, illetve a perdülete a kör középpontjára nézve?
118. Mennyivel nő meg az autó kerekének tehetetlenségi nyomatéka, ha centrírozás céljából egy 50 g tömegű tárgyat rögzítenek a felnire, a középponttól 35 centiméterre? És percnként 50-es fordulatszám esetén mennyivel nő meg ettől a kerék mozgási energiája?
119. Miért nehéz egy forgó kerék forgási síkját megváltoztatni?
120. Mi a pörgettyűmozgás? Rajzold is le!
121. Hogyan mozog a Föld azon kívül, hogy a tengelye körül forog, és a Nap körül kering?
122. Mi a forgó- és a haladó mozgás mennyiségeinek analógiája?

### 3. fejezet

# Folytonos közegek mechanikája

## 3.1. Folytonos közegek statikája

### 3.1.1. Rugalmasság

Ahogy korábban tárgyaltuk, a merev test bármely két pontja közötti távolság állandó, azaz bármely három pontja által alkotott háromszög szögei és oldalai állandóak, és egyáltalán, a geometriája nem változik. Ugyanakkor valódi szilárd testek általánosságban mechanikai feszültség hatására **deformálódhatnak**, tökéletesen merev test nem létezik. Egy valódi test lineáris deformációját (megnyúlását)

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (3.1)$$

módon definiáljuk, azaz relatív hosszváltozásként. Ezt a megnyúlást valamilyen lineáris húzófeszültség hozza létre, amelyet  $\sigma = F_{\perp}/A$  módon definiálunk, ahol az  $F_{\perp}$  erő hat a test  $A$  felületére merőlegesen, ahogy azt a 3.1. ábra mutatja. Ezekből kiindulva ki mondhatjuk a rugalmasságtan **Young-törvényét**, amely a feszültség és a deformáció arányosságát mondja ki:

$$\sigma = E\epsilon, \text{ azaz a definíciókat behelyettesítve } \Delta L = \frac{F_{\perp}L}{AE}. \quad (3.2)$$

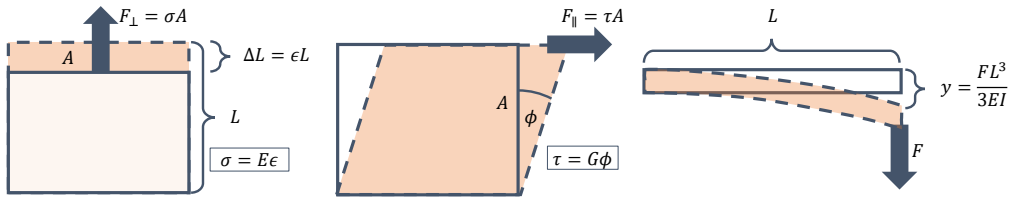
Itt  $E$  az úgynevezett Young-modulus, amely különféle anyagok esetén nagyon különböző lehet, például ( $10^9$  N/m<sup>2</sup> mértékegységben kifejezve) gumira 0,1, fára 10, betonra 30, üvegre 70, acélra 200, gyémántra pedig 1000. Általánosságban a Young-modulus függhet az összenyomódás mértékétől vagy a hőmérséklettől is, de bizonyos egyszerű esetekben, szobahőmérséklet környékén, kis összenyomódásokra lehet a fenti törvénnyel számolni.<sup>1</sup> Ezek alapján egy 1 m<sup>2</sup> felületű, 10 cm vastag betonlap 1 tonnának megfelelő súly ( $10^4$  N) hatására három század mikront, azaz „szinte semennyit sem” megy össze. Figyeljük meg, hogy a fenti törvény tulajdonképpen a rugóerőnek felel meg, és a  $D$  rugóállandó megfelelője itt  $AE/L$ .

Jegyezzük meg meg, hogy szinte minden szilárd test olyan, hogy egyik irányú húzás-kor a merőleges irányokban összeszűkül, illetve összenyomáskor a merőleges irányokban „kitüremkedik”. A fenti alakú, a Young-modulust tartalmazó törvény akkor érvényes, ha a testet a többi, a húzásra (vagy összenyomásra) merőleges irányokban szabadon hagyjuk tágulni vagy szűkülni; ha nem ez a helyzet (hanem például a többi irányú távolságot erőnek erejével fixen tartjuk), akkor is arányosság van a húzófeszültség és a megnyúlás között, de az együttható nem az  $E$  Young-modulus lesz, hanem valami más állandó.

Nyíró (azaz a felülettel párhuzamos) erők esetén **nyírófeszültség** jelenik meg, amelyet a fentiekhez hasonlóan,  $\tau = F_{\parallel}/A$  módon definiálunk (lásd a 3.1. ábrát). Ennek hatására szögelfordulás következhet be, ekkor

$$\tau = G\phi, \text{ azaz } \phi = \frac{F_{\parallel}}{AG}, \quad (3.3)$$

<sup>1</sup> A  $\sigma$  mennyiség nem feltétlenül skalár, egyes esetekben mátrixként kell kezelni, ekkor feszültség-tenzornak nevezzük. Ezzel a fenti egyenletet valójában  $\vec{F} = \sigma \vec{A}$ . Sőt az általánosított Hooke-törvény szerint a deformáció is másodrendű tenzor (mátrix), és ezt a feszültségtenzonnal a Young-modulus helyett egy negyedrendű tenzor (mátrixok mátrixa) köti össze.



3.1. ábra. Különböző rugalmas deformációk láthatóak az ábrákon: megnyúlás, nyírás, illetve lehajlás. A deformáció mértéke mindig a rugalmas feszültségtől ( $\sigma$ , illetve  $\tau$ ) vagy az azt létrehozó  $F$  erőttől függ. Kis deformációkra jó közelítéssel a kapcsolat lineáris, azaz a deformáció arányos a feszültséggel. Az ilyenkor megjelenő arányossági tényezőt rugalmassági modulusnak nevezzük.

ahol  $G$ , a nyíró modulus, többnyire fele/harmada a Young-modulusnak, értéke  $10^9$  N/m<sup>2</sup> mértékegységben gyémántra 500, acélra 90, üvegre 25, gumira 0,0006. Értéke szintén függhet a konkrét deformációtól.

Bonyolultabb objektumok lehajlása a tárgyat vékony rétegekre osztva levezethető, de ettől itt most eltekintünk. Azt azért megemlíjtjük, hogy a jelenség vizsgálatában az adott test keresztmetszete (ennek alakja) fontos szerepet tölt be, a lehajlás mértéke például az egyik végén terhelt, a másik végén befogott tartó esetén (lásd a 3.1. ábrát):

$$y = \frac{FL^3}{3EI}, \quad (3.4)$$

ahol  $F$  a terhelő erő,  $L$  a rúd hossza,  $E$  a rugalmassági modulus, és  $I$  az úgynevezett alaktényező, avagy másodrendű keresztmetszeti nyomaték. Minél kisebb  $I$  értéke, annál könnyebben hajlik le az adott rúd. Az  $I$  értéke a keresztmetszet nagyságától és alakjától függ, annak minden kis felületelemének és tengelytől vett távolságnégyzetének szorzatát kell hozzá felösszegezni  $I = \int r^2 dA$  módon. Egy  $r$  sugarú körre  $\pi r^4/4$ ,  $a$  és  $b$  oldalú téglalapra (ahol a  $b$  irányában történik a lehajlás)  $ab^3/12$ . Tehát egy lapos téglalapot a hosszabb éle irányában sokkal nehezebb lehajlítani. Ezért használnak I-alakú acéltartókat<sup>2</sup>, amelyek alaktényezője az azonos keresztmetszetű hengerének tízszerese is lehet.

A fenti törvények az elég kicsi, rugalmas (és visszafordítható) megnyúlások esetén igazak. Bizonyos határ felett permanens deformáció, esetleg szakadás vagy törés léphet fel. Ezzel kapcsolatban szokás beszélni a rugalmas tartományon túl egy folyáshatárról, ahol az anyag hirtelen megnyúlik („megfolyik”), és maradandó alakváltozást szenved. Még nagyobb feszültség esetén pedig a szakítószilárdság értékét érjük el, amely az anyag által törés vagy szakadás nélkül kibírt legnagyobb feszültséget jelenti. Ekkor többnyire az anyag még tovább nyúlik, de a feszültség már csökken benne, majd elszakad.

A folyáshatár (az a húzóerő vagy feszültség, amitől az anyag már maradandó alakváltozást szenved) erősen függhet a hőmérséklettől, nagyobb hőmérsékleten sokkal kisebb lehet. Ez egyrészt hátrány lehet (például ezért nem lehet acélból 600-700 °C-nál nagyobb hőmérsékletet tartósan kibíró gépeket készíteni). Másrészt éppen ezt használja

<sup>2</sup>Egy hosszú rúdról van szó, amelynek keresztmetszete mintegy I betű (vagy 90°-kal elforgatva, körülbelül nagy H betű) alakú: egy függőleges szárát két vízszintes lap fog közre. Ez azért előnyös, mert egyik irányban sem tud könnyen kihajlani.

ki a kovácsmesterség: a vasat (vagy acélt) nem kell az olvadáspontjáig hevíteni, elég néhány (600–700) fokra ahhoz, hogy maradandó alakváltozást érhessünk el kalapálással, hengereléssel (vagyis tetszőleges alakú eszközöket, rudakat lehessen kényelmesen készíteni).

### Kísérlet: rugalmas lehajlás

- Vizsgáljuk meg, mekkora erő hatására mennyire hajlik le egy vonalzó vagy hasonló tárgy.
- Az erőt adott tömegű könyvekkel vagy más (könnyű) tárgyakkal létrehozva határozzuk meg a vizsgált tárgy  $I$  alaktényezőjét.
- Hasonlítsuk össze, hogy merőlegesen tartva (azaz a hosszanti, vízszintes tengely körül derékszögben elforgatva) mekkora erő lenne szükséges észrevehető lehajlás eléréséhez.

### 3.1.2. Folyadékok és gázok: alapfogalmak

Az anyagok egy része nem követi a fenti törvényeket, hiszen eleve nem vesz fel egy meghatározott alakot, mivel a részecskék egymáshoz képest „szinte szabadon” mozognak: ezek a folyadékok és a gázok. Ezek többnyire kitöltik a rendelkezésükre álló teret, és egész más mechanikai törvények vonatkoznak rájuk. Ezek tárgyalásához néhány alapfogalmat kell bevezetnünk. A folytonos közegek fontos jellemzője a **sűrűség**, azaz a térfogategységre jutó tömeg:

$$\rho = \frac{m}{V}, \text{ azaz } m = \rho V. \quad (3.5)$$

Szilárd anyagok sűrűsége igen változó, többnyire  $10^3$ – $10^4$  kg/m<sup>3</sup> nagyságrendbe esik (érdekes kivételt jelentenek például az aerogélek, amelyek sűrűsége ennek akár az ezrede is lehet). Folyadékok sűrűsége többnyire tipikusan néhány száz vagy ezer kg/m<sup>3</sup>, gázokra pedig 1 kg/m<sup>3</sup> (de ezek erősen hozzávetőleges értékek, a gázok sűrűsége például a hőmérséklettől és nyomástól függően jelentősen változhat).

A sűrűségen kívül a legfontosabb fogalom ebben a témakörben a **nyomás**: ez a felületegységre jutó erőt jelenti. Mértékegysége N/m<sup>2</sup>, avagy pascal (Pa). Néha használjuk az atmoszféra és a bar mennyiségeket is, ezekre 1 atm = 1,013 bar = 101300 Pa. A nyomás definíciója tehát:

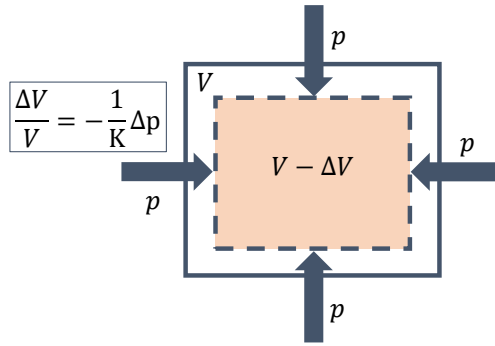
$$p = \frac{F}{A}. \quad (3.6)$$

A nyomás jelentőségére jó példa az, hogy hóban, ingoványban az „el nem sülyedés” például ettől függ: a felület adott nyomást bír ki — ugyanakkora súly nagyobb felületen szétesztva kisebb nyomást eredményez (lásd még hótalp, síléc satöbbi).

Minden irányból ható, háromdimenziós összenyomásokra definiáljuk a **térfogati rugalmassági modulust**, avagy kompresszibilitást, amely a  $\Delta p$  nyomásváltozás hatására létrejövő (kis)  $\Delta V/V$  összenyomódást vagy  $\Delta\rho/\rho$  relatív sűrűségváltozást adja meg:

$$K = -\Delta p \frac{V}{\Delta V} = \Delta p \frac{\rho}{\Delta\rho}, \quad (3.7)$$





3.2. ábra. Térfogati kompresszió, avagy adott nyomás hatására történő térfogatváltozás. A nyomás és a térfogatváltozás közötti összefüggés kis deformációk esetén lineáris, ilyenkor definiáljuk a  $K$  kompressziós együtthatót.

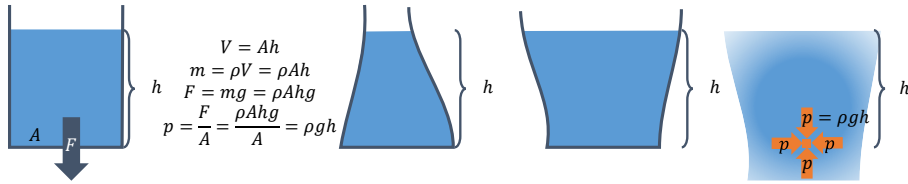
ahogy az a 3.2. ábrán látható. A  $K$  térfogati rugalmassági modulus mértékegysége is  $\text{N/m}^2$ , azaz Pascal. A definícióban azért szerepel a negatív előjel, hogy pozitív mennyiséget kapjunk: a térfogat csökken, ha növeljük a külső nyomást. A  $K$  kompressziómodulus bármilyen halmazállapotra értelmes, az előző szakaszban bevezetett  $E$  Young-modulus és  $G$  torziómodulus viszont csak szilárd testekre. Folyadékok és gázok esetén nincs konkrét alak, ami megváltozna: ezekre csak a  $K$  térfogati rugalmassági modulus értelmes. Szilárd testekre viszont összefüggenek az említett értékek:  $K = EG/(9G - 3E)$ .

A  $K$  értéke azt mondja meg, hogy az anyag mennyire összenyomható. A gázok összenyomhatóak: például a levegőre (a körülményektől függően)  $K$  100 kPa körül van. Folyadékokra a  $K$  modulus tipikusan sokkal nagyobb, mivel nagy  $\Delta p$  nyomásváltozásra a folyadék sűrűsége közel állandó. Ilyen például a víz: több ezer méter mélyen sem változik az óceán vizének sűrűsége érdemben, pedig a nyomás több százszorosára emelkedik.<sup>3</sup> Vízre a modulus értéke konkrétan  $K = 2,2 \text{ GPa}$  ( $1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa}$ ), üvegre ennek körülbelül hússzorosa, gyémántra kétszázszorosa. Az ideális folyadékokat úgy szoktuk definiálni, hogy ezeknek sűrűsége nem függ a nyomástól, azaz nem tudjuk őket összenyomni (mintha  $K$  végtelen nagy lenne). A gyakorlatban például a vizet sokszor ilyen ideális folyadéknak tekinthetjük.

### 3.1.3. A hidrosztatikai nyomás

Folyadékok és gázok egyensúlyi állapotait (nyugalmi helyzeteit) tárgyalja a hidrosztatika. Ennek legalapvetőbb kérdése, hogy mekkora nyomás alakul ki egy nyugvó közeg egyes pontjain. Erre könnyen válaszolhatunk, ha figyelembe vesszük, hogy a közegben  $h$  mélységben tulajdonképpen egy  $h$  magasságú folyadékoszlop van felettünk. (Most folyadékot mondunk; gázokra is érvényes mindez, csak gázoknál figyelni kell, hogy esetleg változik a sűrűségük a nyomástól.) Ha egy  $A$  felületet tekintünk, akkor az efeletti oszlop

<sup>3</sup> Később, a felhajtóerő tárgyalása során érthetjük majd meg, hogy ezért (a nagy  $K$ , avagy kis sűrűségváltozás miatt) tudnak egyes élőlények és búvárhajók igen mélyre süllyedni, majd felemelkedni – ha a nyomás nagy változása nem zavarja őket.



3.3. ábra. A hidrosztatikai nyomás törvénye: konstans  $\rho$  sűrűségű folyadék felszínétől számított  $h$  mélységben  $p = \rho gh$  nyomás alakul ki. Ez független a tárolóedény falától vagy az aljától vett távolságtól, csak a „mélységtől” függ. A Pascal-törvény szerint pedig ez a nyomás minden irányban egyformán jelen van.

tömege

$$m = \rho V = \rho hA, \quad (3.8)$$

konstans sűrűség esetén. Innen az oszlop által kifejtett nyomás (állandó  $g$  gravitációs gyorsulás esetén)

$$p = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho hAg}{A} = \rho gh. \quad (3.9)$$

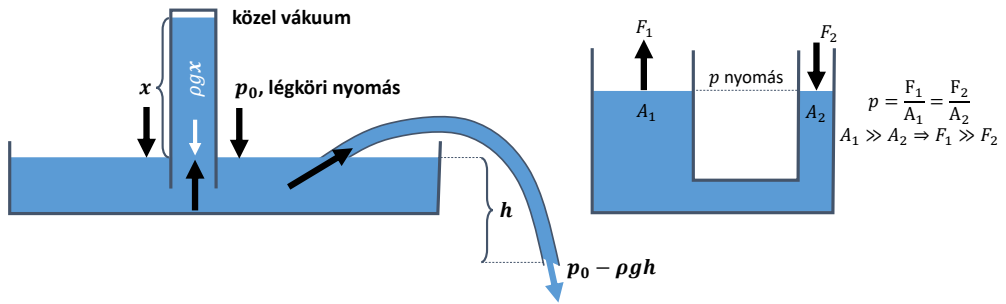
Ez a **hidrosztatikai nyomás törvénye**, amelyet a 3.3. ábra illusztrál. Eszerint 10 méterrel a vízszint alatt a nyomás éppen 1 bar mértékben nő meg (a víz tetején érvényes légköri nyomáshoz képest); 10 km magas,  $1 \text{ kg/m}^3$  sűrűségű légoszlop nyomása pedig  $100\,000 \text{ N/m}^2$  azaz 100 kPa, azaz szintén 1 bar. Ilyen magasan a  $g$  nehézségi gyorsulás csökkenése is szerepet játszhatna, de ennél sokkal fontosabb a levegő ritkulása, amely miatt a levegőoszlopra itt kapott érték erősen közelítő jellegű.

A fenti törvény érdekes módon nemcsak „oszlopra” igaz, hanem bármilyen alakú edényben is ekkora alul a nyomás. Ennek megfogalmazása a **Pascal-törvény**:

*Nyugvó folyadékban a nyomás gyengítetlenül továbbterjed minden irányban.*

Eszerint egy folyadékkal teli edényben a nyomás nemcsak az aljára, de a falára is hat – mélységtől függő mértékben.

Ez okozza azt is, hogy egy U alakú csőben a víz szintje mindkét oldalon ugyanakkora lesz (lásd a 3.4. ábrát), vagy hogy (bizonyos hatásokat elhanyagolva) a talajvíz szintje a tó mellett éppen a tó vízszintjének felel meg. További érdekes alkalmazás, hogy ezen okból tud egy vékony csőben benntartani a folyadék akkor is, ha fejjel lefelé fordítjuk: a légnyomás benntartja. Ez 10 m magas csőig igaz, hiszen a légköri nyomás éppen 10 m vízoszlop nyomásának felel meg. Ugyanerre alapul a Toricelli-cső: a légköri nyomás 760 mm higannyal tart egyensúlyt, és ebből származik a Hgmm (higanymilliméter) mértékegység is, amely 133,4 Pascalnak felel meg. Illetve ugyanezért lehet kifolytatni egy edényből a vizet úgy, hogy egy csővön először felfelé, majd lefelé kell a víznek áramolnia: a cső lenti végén  $\rho gh$  mértékben kisebb a nyomás, mint a vízbe mártott végén (ha a cső kinti vége  $h$  mélységben lóg), ahogy azt a 3.4. ábra mutatja. Erre alapul továbbá a szintén a 3.4. ábrán látható hidraulikus emelő működési elve is: ha kis  $A_2$  felületen kis  $F_2$  erőt fejtünk ki, ez egy U alakú csővön keresztül a túloldalt nagy  $A_1$



3.4. ábra. Az ábrán a hidrosztatikai nyomás és a Pascal-törvény néhány következménye látható. Bal oldalon az látható, hogy függőlegesen lefelé vízbe állított csőből nem folyik ki a víz, ha fent igen kevés levegő maradt, ekkor ugyanis itt közel vákuum alakul ki, alulról viszont a légköri nyomás tartja a vízoszlopot. Az ábra közepe azt mutatja, hogy a víz akár felfelé is folyik, ha utána lefelé folyhat: a cső alján kifolyik a víz, ez pedig „magával húzza” az edényből is a vizet. A jobb oldali ábrán közlekedőedények láthatóak. Ezekben a víz szintje mindig azonos, ha a felszínükön is azonos a nyomás. Ezt használja ki a hidraulikus emelő: nagyobb felszínen azonos nyomás nagyobb erőnek felel meg.

felületen nagy  $F_1$  erőt eredményez (a nyomás ugyanis gyengítetlenül továbbterjed, azaz  $p = F_1/A_1 = F_2/A_2$ ).

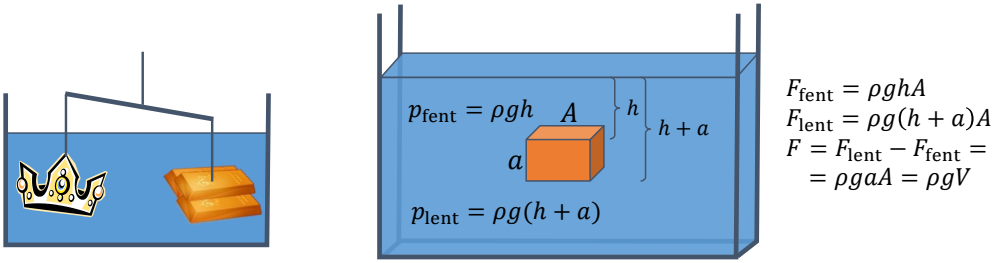
Megemlítjük még, hogy vákuumnak a fizikában a teljesen üres teret nevezzük – ahol még levegő sincs. Miután itt emiatt nyomás sincsen, ezért a vákuumhoz tartozó nyomás értéke 0 Pa (bonyolultabb jelenségek, mint például a fény vákuumban is okozhatnak nyomást, de ettől itt eltekinttünk).

### Kísérlet: hidrosztatikai nyomás

- Töltsünk meg egy edényt vízzel, majd próbáljuk meg úgy leereszteni, hogy az edényt nem mozdítjuk meg – segítségül egy csövet használhatunk.
- Egy egyik végén zárt, vízzel teli átlátszó csövet állítsunk bele egy vizet tartalmazó edénybe (a nyitott végével lefelé), és vizsgáljuk meg, hogy kifolyik-e a víz a csőből. Valamennyi levegőt a cső végén hagyva nézzük meg, mennyivel nő meg a levegő térfogata a cső vízbe állítása után.
- Helyezzük egy rugalmas cső egyik végét a vízbe, a közepét pedig engedjük le, a másik végét a víz felszíne felett tartva. Vizsgáljuk meg a csőben kialakuló vízszint változását.
- Úsztassunk egy könnyű tálkát a vízen. Nézzük meg, mennyivel merül bele jobban, ha egy tárgyat belehelyezünk. A bemerülő térfogatnak megfelelő mennyiségű víz tömegéből határozzuk meg a tárgy tömegét.

### 3.1.4. A felhajtóerő

Arhimédész a Kr. e. III. században élt görög tudós volt, az ókori világ egyik legnagyobbja. Több mechanikai jellegű találmánya (továbbá a kör kerületének és átmérőjének arányának, azaz a  $\pi$  értékének a meghatározása és még sok egyéb matematikai levezetés)



3.5. ábra. Herón király és Arkhimédész története (balra), illetve a felhajtóerő illusztrációja (jobbra). Ez utóbbi tulajdonképpen abból adódik, hogy a tárgyak teteje feljebb van, mint az alja, így az aljukra nagyobb hidrosztatikai nyomás hat.

mellett az ő nevéhez fűződik a felhajtóerő törvénye, azaz az **Arkhimédész-törvény**. Eszerint

*folyadékba (vagy gázba) mártott testre a kiszorított anyag súlyával megegyező felhajtóerő hat.*

A 3.5. ábrán illusztrált anekdota szerint Hérón király arra kérte Arkhimédészt, hogy állapítsa meg egy koronáról annak tönkretétele nélkül, hogy tiszta aranyból van-e. A tömege ismert (mérleggel megmérhető), a kiszorított víz mennyisége alapján megmérhető a térfogata, és így ismert a sűrűsége. Így már eldönthető, hogy aranyból van-e. Azt is mondhatnánk, hogy két egyforma tömegű anyagot mérlegre helyezve, majd a mérleget vízbe mártva a kevésbé sűrű (azaz nagyobb térfogatú) tárgyra nagyobb felhajtóerő hat, ezért ez a mérlegen könnyebbnek tűnik. Így a vizsgálandó tárggyal azonos tömegű aranytömböt mérlegre helyezve, az elrendezést vízbe mártva kiderülne, ha a vizsgált tárgy sűrűsége különbözne, azaz nem aranyból lenne. Mindezt könnyen levezethetjük, ha veszünk egy  $h$  mélységben lévő,  $a$  magasságú,  $A$  keresztmetszetű téglatestet. Ennek teteje ugyan  $h$  mélységben van, de az alja  $h + a$  mélységben, ezért arra nagyobb hidrosztatikai nyomás hat. Azt is mondhatjuk tehát, hogy a felhajtóerő oka az, hogy a tárgyak teteje feljebb van, mint az aljuk. A nyomás tehát fent  $p = \rho gh$ , míg lent  $p' = \rho g(h + a)$ . Ebből a nyomáskülönbség  $\rho g(h + a) - \rho gh = \rho ga$ , illetve az erőkülönbség  $\rho gaA = \rho gV$ . Ez maga a **felhajtóerő**:

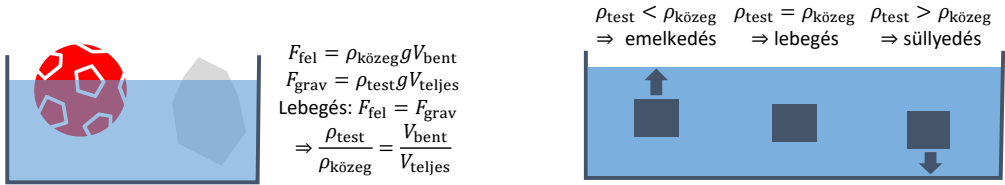
$$F_{\text{fel}} = \rho gV, \quad (3.10)$$

ahol  $\rho$  a közeg sűrűsége, a felhajtóerő tehát éppen a kiszorított víz súlyával egyezik meg. Mindezek illusztrálására a 3.5. ábra szolgál.

Miután a testre ható gravitációs erő  $mg = \rho_{\text{test}}Vg$ , míg a felhajtóerő  $\rho_{\text{közeg}}Vg$ , ezért a testre összesen

$$\Sigma F = (\rho_{\text{folyadék}} - \rho_{\text{test}})gV \quad (3.11)$$

erő hat. Ha tehát  $\rho_{\text{közeg}} < \rho_{\text{test}}$  (fémtömb vízben, labda levegőben), a tárgy lefelé süllyed (zuhan). Ugyanakkor  $\rho_{\text{közeg}} > \rho_{\text{test}}$  esetén (labda, hajó vízben, héliumos lufi levegőben) a tárgy felemelkedik. Ha a két sűrűség megegyezik, akkor a test „lebeg”. Ezt érdekesen



3.6. ábra. Vízben úszó test (bal oldali ábra) esetén megegyezik a felhajtóerő és a tárgy súlya, ebből levezethető, hogy a bent lévő térfogat aránya éppen a sűrűségek arányával egyezik meg. A jobb oldali ábra azt mutatja, hogy ha a felhajtóerő nagyobb, mint a tárgy súlya, akkor az emelkedik, ha kisebb, akkor pedig süllyed.

alkalmazza a vízi állatok jó része: sűrűséget változtatva tudnak emelkedni, süllyedni vagy lebegni. Ugyanígy a forró levegővel működő léggelben a levegő hőmérsékletét változtatva állítható a „jármű” sűrűsége, és így a léggelben függőleges mozgása. Ez okozza továbbá a melegebb (azaz ritkább) levegő felfelé irányuló mozgását és a hideg (azaz sűrűbb) levegő leszállását, azaz a légköri folyamatok jó részét. Ugyanez érvényes a vízre is: a meleg víz felfelé áramlik, a hideg lefelé. Sőt bizonyos kőzetek megszilárdulásában is ez a folyamat játszik szerepet! Egy további fontos következményt is érdemes megemlíteni. Mi történik a közegnél ritkább testtel? A közegbe (ami legyen most víz) mártva felúszik a felszínre, de hol lesz egyensúlyban? Ha ugyanis nem az egész tárgy merül a vízbe, akkor a felhajtóerő is csökken – hiszen a kiszorított víz mennyisége is csökken. Ezt (és az előzőeket) illusztrálja a 3.6. ábra.

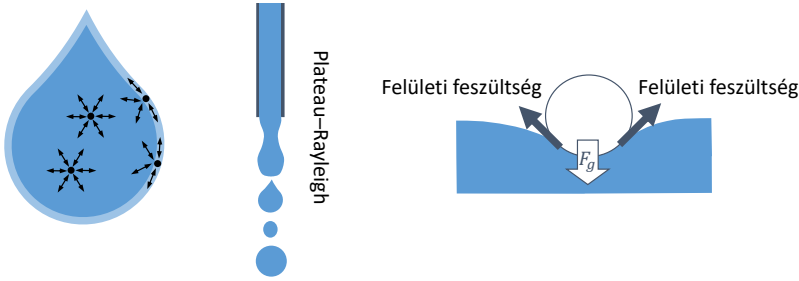
Ha a  $V_{\text{teljes}}$  térfogatú tárgy  $V_{\text{bent}}$  térfogata merül csak a vízbe, akkor a kiszorított víz súlya  $\rho_{\text{víz}}gV_{\text{bent}}$ , tehát ekkora felhajtóerő hat a testre. A rá ható gravitációs erő viszont  $m_{\text{test}} = \rho_{\text{test}}gV_{\text{teljes}}$ . Ezek egyenlősége esetén marad a tárgy nyugalomban, tehát

$$\rho_{\text{víz}}gV_{\text{bent}} = \rho_{\text{test}}gV_{\text{teljes}} \Rightarrow \frac{V_{\text{bent}}}{V_{\text{teljes}}} = \frac{\rho_{\text{test}}}{\rho_{\text{víz}}}, \quad (3.12)$$

tehát ha a test sűrűsége a közegének 70%-a, akkor a test 70%-a merül a közegbe. A jeg sűrűsége megközelíti a sós vizét, annak körülbelül 90%-a, ezért a jéghegyek 90%-a a víz alatt van – lásd a „jéghegy csúcsa” szókapcsolatot. A hajók átlagos sűrűsége általában igen kicsi, ezért nagy részük a víz felett van; a felborulással szembeni stabilitásukat speciális alakjuk és tömegeloszlásuk garantálja.

### 3.1.5. A felületi feszültség

A folyadékok felületén lévő atomok, molekulák „különleges” szerepet töltenek be, ők a környezet molekuláival vannak kapcsolatban, illetve a folyadékból kipárolgó gőzzel. Ezek (a folyadék molekulái között fellépő vonzóerő miatt) csak befelé éreznek vonzást, így tehát a felületen lévő molekulák az anyagba befelé törekednek. Azt is mondhatjuk, hogy a felszínen lévő molekulák energiaszintje nagyobb (kevesebb szomszédhoz való kötődést tudnak „kihasználni”), ezért minél több ilyen molekula van egy adott térbeli alakzat esetén, annál több energiára van szükség ezen konstrukció létrejöttéhez. Milyen térbeli alakzat esetén a legkisebb az adott mennyiségű (térfogatú) folyadék felszíne? Gömb esetén a felszín és a térfogat aránya  $A/V = 4R^2\pi/(4R^3\pi/3) = 3/R$ . Ezzel szemben



3.7. ábra. A felületi feszültség jellegzetes következményei: cseppalak kialakulása (balra), vízszugár felszakadása cseppekre (Plateau–Rayleigh-instabilitás, középen), illetve „vízen járás” (jobbra).

például kocka alak esetén  $A/V = 6a^2/a^3 = 6/a$ . Ez azt jelenti, hogy egy köbméter térfogatú test esetén a felszín tetraéder esetén  $7,21 \text{ m}^2$ , kocka esetén  $6 \text{ m}^2$ , oktaéder esetén  $5,72 \text{ m}^2$ , míg gömb esetén  $4,8 \text{ m}^2$ . A konkrét példán túl általánosságban is igaz, hogy adott térfogathoz a legkisebb felszín gömb alak esetén kapcsolódik.

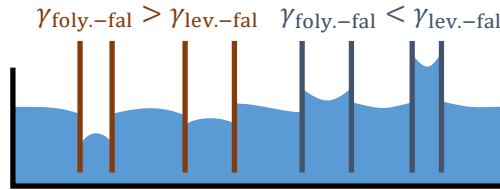
Adott térfogat esetén a felület növeléséhez tehát a fenti mikroszkopikusan értelmezhető magyarázat miatt energiára van szükség. A **felületi feszültség törvénye** szerint  $A$  mértékű felületnövekedéshez

$$W = \gamma A \quad (3.13)$$

munka (energia) szükséges, ahol  $\gamma$  az anyagra jellemző, úgynevezett felületi feszültségi állandó. Ha ezt az új felületet egy  $l$  vonal mentén, húzással érjük el, akkor  $x$  elmozdulás esetén  $W = Fx$  munkát végeztünk, az új felület pedig  $xl$ . Innen  $F = \gamma l$ , tehát a felületi feszültség így egyfajta húzóerőként jelenik meg. A  $\gamma$  állandó értéke a konkrét anyagtól függ, szobahőmérsékleten,  $10^{-3} \text{ J/m}^2$  mértékegységben alkoholra körülbelül 20, vízre 70, higanyra 500 (mindez a levegővel, vagyis még pontosabban az anyag saját gőzével való érintkezés esetén).

A felületi feszültség teszi lehetővé, hogy egyes rovarok a víz felszínén tudnak járni: ha belesüllyednek, az „jelentősen” növeli a víz felszínét (ahol a víz a rovar besüllyedt lábát körbevenné, az is „felszínnek” számít). Az ebből fakadó erő megtartja a rovar súlyát (lásd a 3.7. ábrát). Ezen jelenség az oka annak is, hogy az úrben lebegő folyadékok vagy a szappanbuborékok gömb alakot vesznek fel. A szabadon eső cseppek is többé-kevésbé gömb alakúak; a légellenállás miatt ez módosulhat. Ennek köszönhető a folyó vízszugár cseppekre szakadása is (Plateau–Rayleigh-instabilitás), és rengeteg egyéb hétköznapi jelenség. Ezeket a 3.7. ábra illusztrálja.

A felületi feszültség hozza létre a 3.8. ábrán ábrázolt **kapillaritást** is: ha egy cső fala és a levegő között nagyobb a felületi feszültség, mint a cső fala és a folyadék között, akkor a folyadék felszíne homorú lesz. Ilyenkor a felületi feszültségekből (fal-folyadék és levegő-folyadék; mindegyik a találkozó felületek irányába hat) összességében a folyadékra felfelé ható erő származik. Ha a cső nagyon keskeny, azaz a folyadék tömege kicsi, akkor a gravitáció ellenére a folyadék „felkúszik” a cső falán. Erre példa a talaj vizet felszívó hatása, az ecset szálai között felszívódó festék, de növényekben a sejtfalak járatai is kapillárisként működve szívják fel a vizet, és a kockacukorban felkúszó kávé jelensége



3.8. ábra. A kapillaritás jelensége: a folyadék és a fal, illetve a levegő és a fal közötti felületi feszültségtől függően a folyadék „felkúszik” a csőben, vagy lejjebb kényszerül, és ezt jellegzetes felszín kialakulása kíséri.

is ennek köszönhető.<sup>4</sup> Ha viszont a folyadék-cső felületi feszültség nagyobb a levegő-cső értéknél, akkor a folyadék felülete domború lesz, az erő pedig lefelé hat: ekkor a folyadék szintje a „vártnál” alacsonyabb lehet – erre példa higanyoszlop viselkedése üvegcsőben (lásd higanyos hőmérő).

## 3.2. Folytonos közegek dinamikája: áramlástan

A következőkben folyadékok és gázok **stacionárius**, azaz állandósult jellegű **áramlását** tárgyaljuk. Ekkor a közeg minden pontján időben változatlan az áramlás iránya vagy a közeg sűrűsége. Az áramlások kialakulása vagy leállása lényegesen bonyolultabb, egyszerű egyenletekkel ki nem fejezhető törvények vonatkoznak ezekre. Az állandósult áramlásokra azonban rengeteg egyszerű és fontos törvényt tudunk megfogalmazni. Először azonban osszuk további kategóriákra az áramlásokat. Először is fontos tisztázni, hogy van-e belső súrlódás a folyadékban. Ha nincs, akkor **tökéletes folyadékról** beszélünk,<sup>5</sup> ellenkező esetben viszkózus folyadékról – erről többet a 3.2.3. szakaszban mondunk. Az áramlási kép jellege alapján pedig megkülönböztetünk **turbulens és lamináris áramlásokat**. Utóbbi esetben az anyag részei párhuzamos rétegekben áramlanak, és ezen rétegek között nincs keveredés. Ezzel szemben turbulens áramlásokban (például egy csőben való gyors áramláskor) kisebb-nagyobb örvények alakulnak ki. Szigorú értelemben véve a turbulens áramlás sosem stacionárius, mégis sokszor tudunk valamiféle „átlagos” áramlásról beszélni, amely az idő nagy léptékű változásakor nem nagyon változik.<sup>6</sup>

<sup>4</sup>Bár egyesek szerint aki kockacukorral issza a kávéját, az inkább csak egyen cukrot, és fekdjön le korábban.

<sup>5</sup>Az ideális folyadék definíciójához hozzá szokták érteni azt is, hogy összenyomhatatlan. Megemlíthető továbbá, hogy a tökéletes folyadékoknak belső hővezetésük sincs, de ez a feltétel most számunkra nem lényeges.

<sup>6</sup>Például egy kerti locsolócső belsejében a vízáramlás turbulens: ha elég jó nagyítóval és elég gyors felvételen vizsgálánánk az áramlást, látnánk, hogy teljesen szabálytalan, időben változó és sosem pontosan ismétlődő áramlási képek váltakoznak benne. Ezek „átlaga” azonban jól meghatározott, mintegy „időben állandó”: másodpercről másodpercre határozottan ugyanannyi víz áramlik ki, jól megadható sebességgel.

### 3.2.1. Kontinuitás

A közeg anyagának megmaradásából következik a **kontinuitási törvény**. Eszerint bármely kiszemelt térfogatból ugyanannyi folyadék áramlik ki, mint amennyi be: különben nem lenne stacionárius az áramlás. Ezt a törvényt csőben történő áramlásra formalizálhatjuk is. Tegyük fel, hogy egy adott ponton  $A_1$  keresztmetszetű csőben  $v_1$  sebességgel áramlik a közeg, itt  $\rho_1$  a sűrűség. Később a cső leszűkül  $A_2$  felületre, ekkor a sebesség  $v_2$ , a sűrűség  $\rho_2$ . Mivel az  $A_1$  és az  $A_2$  felület közötti anyag nem veszhet el, amennyi tömeg bejön az egyik oldalon, annyi tömegnek ki kell mennie a másikon. Az  $A_1$  keresztmetszetű ponton  $\Delta t$  idő alatt  $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$  szakasznyi anyag áramlik be, míg az  $A_2$  keresztmetszetű ponton ugyanez  $\Delta x_2 = v_2 \Delta t$  módon írható le. Miután a bejövő térfogat  $A_1 \Delta x_1$  (és a kijövő is hasonlóan írható le), a ki- és beáramló tömeg az alábbi módon írható fel:

$$\Delta m_1 = \Delta m_2, \quad (3.14)$$

$$\rho_1 \Delta V_1 = \rho_2 \Delta V_2, \quad (3.15)$$

$$\rho_1 A_1 \Delta x_1 = A_2 \rho_2 \Delta x_2, \quad (3.16)$$

$$\rho_1 A_1 v_1 = A_2 \rho_2 v_2. \quad (3.17)$$

Ebből tehát  $\rho A v$  állandósága adódik. Még érdekesebb, hogy összenyomhatatlan folyadék esetén, mivel itt a sűrűség állandó, ezért

$$A v = \text{állandó} \quad (3.18)$$

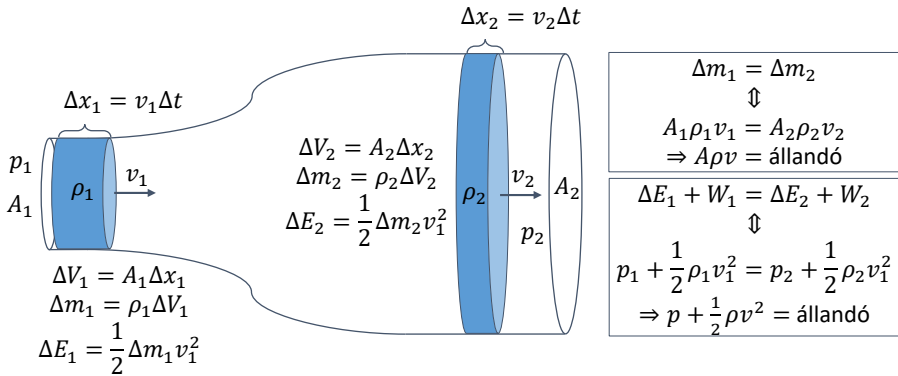
adódik. Itt tehát ha nagyobb a keresztmetszet, kisebb a sebesség. Ezt rengeteg helyen tapasztaljuk: locsolócsőben a szűk nyíláson gyorsan áramlik ki a víz, a törvényt átvitt értelemben használva pedig például megérthetjük, hogy autóúton az útszűkület kezdete után miért nő meg az autók haladási sebessége. Ez természetesen csak állandó sűrűség esetén igaz, azaz például ha az autók tömött sorokban közlekednek – ekkor két sávon feleakkora sebességgel jutnak át, mint egy sávon, különben a szűkület kezdeténél „feltorlódnának” az autók.

### 3.2.2. A Bernoulli-törvény

Stacionárius áramlások esetén az energia is megmarad az áramlás során, így azt csak az áramlás két „szélén” végzett munka változtatja meg (ha nincs belső súrlódás: az alábbiak tehát súrlódásmentes áramlásra vonatkoznak). Az adott térfogatba beérkezik  $\Delta m$  tömegű,  $v$  sebességű anyag, ennek mozgási energiája  $\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m v^2$ . A térfogat szélén lévő  $p$  nyomás az  $A$  felület  $\Delta x$  elmozdulása miatt  $W = F \Delta x = p A \Delta x$  munkát végez (hogy bepumpálja a folyadékunkat).

A folyadék áramlása során változhat a nyomás, ami munkát végez a folyadékon, azaz gyorsítja azt. (Ha lassul a folyadék, a munkavégzés mintegy negatív: ilyenkor a folyadék végez munkát a nyomást fenntartó tárgyakon, például egy lapátkerék lapjain.) Ugyanakkor ha stacionárius az áramlás, akkor a nyomás munkavégzése arra fordítódik, hogy a folyadék mozgási energiáját megváltoztassa: a nyomás munkavégzésének és a folyadék mozgási energiájának összege állandó kell hogy legyen az áramlás mentén. Ha változik a nyomás, változnia kell a sebességnek is. Figyelembe véve, hogy  $v$  áramlási sebesség





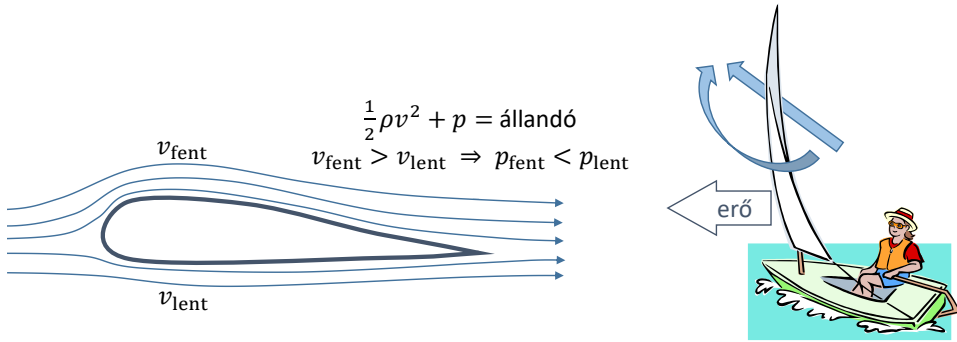
3.9. ábra. A kontinuitás és a Bernoulli-törvény. Előbbi szerint  $A\rho v = \text{állandó}$ , azaz a keresztmetszet, a sűrűség és az áramlási sebesség szorzata állandó: ha valamelyik nő, egy másiknak csökkennie kell. Utóbbi törvény szerint  $p + \rho v^2/2 = \text{állandó}$ , azaz ha a sebesség nő, a nyomás csökken, és fordítva.

esetén  $\Delta t$  idő alatt az elmozdulás  $\Delta x = v\Delta t$ , az alábbi rövid levezetést tehetjük. Ez szigorúan véve csak konstans sűrűség esetén érvényes, azaz ha a folyadék anyagának (ami lehet például gáz) összenyomására fordítódó munka elhanyagolható:

$$\begin{aligned} \Delta E + W &= \text{állandó} \\ \frac{1}{2} \Delta m v^2 + p A \Delta x &= \text{állandó} \\ \frac{1}{2} \rho A \Delta x v^2 + p A \Delta x &= \text{állandó} \\ \frac{1}{2} \rho A v \Delta t v^2 + p A v \Delta t &= \text{állandó} \\ \frac{1}{2} \rho v^2 + p &= \text{állandó} \end{aligned}$$

A fenti levezetés eredménye a **Bernoulli-törvény**, amely szerint tehát  $p + \rho v^2/2 = \text{állandó}$ . Ebből adódóan ha egy stacionárius áramlásban a sebesség megnő, lecsökken a nyomás. Ezt és a kontinuitási törvényt illusztrálja a 3.9. ábra. Fontos továbbá megemlíteni, hogy változó magasságú csőben még a potenciális energia is szerepet játszik a Bernoulli-törvényben, ekkor  $p + \rho gh + \rho v^2/2$  állandóságát kell kimondani, ahol  $h$  az áramlás adott pontjának magassága.

Rengeteg jelenség alapul ezekre a törvényekre, ilyen például a szárnyak felhajtóereje. A szárny egyik oldala hosszabb úton futható be: az egyik oldalon nagyobb áramlási sebesség alakul ki, ahogy az a 3.10. ábrán is látható. A nagyobb áramlási sebességű oldalon ezért kisebb lesz a nyomás; ez a nyomáskülönbség húzza felfelé a repülő szárnyát (és szorítja az aszfalthoz a versenyautót a szárnyánál fogva). Hasonló módon „működik” az oldalszéllal közlekedő vitorlás is: a széllal párhuzamos vitorla szárnyként viselkedik, az egyik oldalán nagyobb áramlási sebesség és alacsony nyomás alakul ki, ez húzza a hajót a kívánt irányba. Fontos látni, hogy a hátszéllal való közlekedés nem mindig optimális, mert a szélre merőleges vitorla csak kisebb sebességet engedne meg (és lehet, hogy az irány sem lenne jó): a szél vitorlához képesti sebessége lecsökken, ha együtt mozognak.



3.10. ábra. A Bernoulli-törvény alkalmazásai: szárnyprofil (balra) és vitorlahatás (jobbra).

Megcsavart (forgó) labda viselkedését, azaz elkanyarodását is a Bernoulli-törvény írja le (ezt Magnus-hatásnak nevezzük). Itt egy kicsit bonyolultabban érthető meg a jelenség, ugyanis több áramlás együttesét kell figyelembe vennünk. Ha a mozgást a labdáról nézzük, stacionárius az áramlás, és a labdának a széllel szemben forgó része a labdához képest lefékezi a levegőt, aminek ezért megnő a nyomása a másik oldalhoz képest. Ez a labdára ható oldalirányú eredő erőt eredményez: a labda pályája elhajlik a csavarás irányába.

A fenti törvények fontosak az emberi keringésben is: ha valahol egy kis értágulat jelentkezik, ott megnő a keresztmetszet, így a kontinuitás miatt lecsökken a sebesség, a Bernoulli-törvény miatt viszont emiatt megnő a nyomás, így a tágulat tovább nő – az értágulat tehát egy pozitívan visszacsatolt rendszer, amíg az ér rugalmas fala elég nagy erővel ellen nem áll.

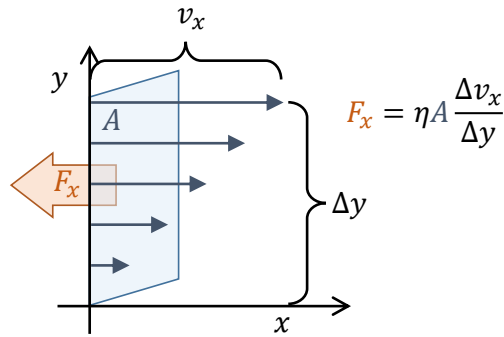
### Kísérlet: áramlás tölcsérben

- Rögzítsünk tölcsért egy cső végére, majd helyezzünk egy pingponglabdát a tölcsérbe.
- Fújjunk erősen a csőbe, és próbáljuk meg így lefújni a pingponglabdát.
- Észelve, hogy ez így nem lehetséges, próbáljuk meg „fújjással felemelni” a pingponglabdát.

### 3.2.3. A viszkozitás

Súrlódó folyadékokban a folyással ellenkező irányú, nyíró erők jelennek meg a folyadékrétegek egymáson való súrlódása miatt. Ez a **viszkozitás** jelensége, amelyet a 3.11. ábra illusztrál. Ilyen belső súrlódás állítja le például egy pohárban, edényben keringő (megkevert) víz mozgását: a fallal való súrlódás miatt a víz sebessége szinte nulla a fal mellett, bent viszont nem az, így a folyadék belső súrlódása a belsőbb rétegeket is leállítja előbb-utóbb.

Egy folyó példáján jól elmagyarázható a jelenség: a parton nulla a víz sebessége, de  $\Delta y$  távolságra a parttól már  $\Delta v_x$ , és az eltérő sebességű folyadékrétegek „elcsúsznak” egymáson. A létrejövő „súrlódási” erő ezzel a távolságegységre jutó sebességváltozással



3.11. ábra. A viszkozitás által létrehozott belső súrlódás. Nagysága az áramlási keresztmetszettől, a sebesség térbeli változásától és a viszkozitási együtthatótól függ.

arányos, illetve az áramlás  $A$  keresztmetszetével:

$$F_x = \eta A \frac{\Delta v_x}{\Delta y}. \quad (3.19)$$

Tehát minél kisebb távolságon minél többet változik a sebesség, annál nagyobb a belső súrlódás okozta erő.

A fenti egyenletben az  $\eta$  arányossági tényező neve viszkozitás, mértékegysége Pa·s. A viszkozitás a folyás tökéletességét jellemzi, a folyást gátló nyíró erők hatását.<sup>7</sup> Tökéletes folyadékban ilyen nyíró erők nincsenek (vagy elhanyagolhatók). Megemlítjük, hogy van *igazi, teljesen tökéletes folyadék* is, az úgynevezett szuperfolyékony hélium, illetve a modern kísérletek és elméletek szerint a világegyetemet az ősrobbanás utáni mikroszekundumban kitöltő anyag is tökéletes folyadék (kvark-gluon plazma) volt (lásd valamivel bővebben a 8.2.6. szakaszban). A folyás tökéletessége szemléletesen azt jelenti, hogy ha megkavarnánk egy pohárban ezt a folyadékot, az örökké keringene. A hagyományos folyadékok viszkózusak, azaz keringésük egy kis idő után leáll, ahogy azt egy pohár vízzel kipróbálhatjuk. A viszkozitás értéke nagyon különböző lehet különböző anyagokra. A méz például igen viszkózus folyadék; megkeverve el sem kezd keringeni. Az amorf szilárd anyagok (például az aszfalt, vagy akár az üveg) tulajdonképpen extrém viszkózus folyadékoknak is tekinthetők (több száz éves katedrálisok függőleges üvegablakai ma már láthatóan „folynak lefelé”, azaz alul vastagabbak lettek, mint felül).

A 3.1. táblázatban megadjuk néhány hagyományos folyadék viszkozitását. Megemlítjük, hogy a folyadékok viszkozitása erősen függhet a hőmérséklettől is: tipikus folyadékoké a hőmérséklettel csökken, például palacsintasütéskor a serpenyőben kicsit megmelegített olaj látványosan „jobban folyik”, mint a hideg olaj. A 3.1. táblázat a szobahőmérsékleten értelmezett körülbelüli értékeket adja meg.

A 3.1. táblázat utolsó oszlopában megadtuk a viszkozitás és a sűrűség

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (3.20)$$

<sup>7</sup>A nyíró erők szilárd testekre gyakorolt hatását lásd a 3.1.1. szakaszban.

Anyag	$\eta$ [Pa·s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\nu$ [m <sup>2</sup> /s]
gázok (tipikus értékek)	$10^{-5}$	1–2	$0,5-1 \cdot 10^{-5}$
víz	$10^{-3}$	1000	$10^{-6}$
vér	$3-4 \cdot 10^{-3}$	1000	$3-4 \cdot 10^{-6}$
olaj	1	900	$1,1 \cdot 10^{-3}$
méz	2–10	1400	0,001–0,007
szurok	kb. $10^8$	1200	kb. $10^5$
földköpeny (3000 fokon)	$10^{20}$	3–4000	$2-3 \cdot 10^{16}$
üveg	$10^{40}$	2500	$4 \cdot 10^{36}$

3.1. táblázat. Néhány anyag viszkozitási együtthatója (többnyire szobahőmérsékleten). Érdekes megfigyelni az  $\eta$  viszkozitás és a  $\nu$  kinematikai viszkozitás sorrendjében fellelhető eltéréseket, különösen a víz és a levegő összetételében. Míg a levegő viszkozitása kisebb a vízénél, addig a kinematikai viszkozitása nagyobb.

hányadosát, amelyet **kinematikai viszkozitásnak** nevezünk. Ennek értéke levegőre a vízének tízszerese (mivel a viszkozitása százada, de a sűrűsége az ezrede a vízének). Ez a mennyiség jelenik meg sok összefüggésben (azaz sokszor az áramlás „súrlódóságát” jobban jellemzi a  $\nu$ , mint az  $\eta$ ). Ennek oka az, hogy a belső súrlódási erőt  $\eta$  adja meg, de a tömeget, a „mozgatással szembeni ellenállást” viszont a sűrűség: kinematikailag a levegő viszkózusabb, mint a víz (tehát például egy áramlás hamarabb leáll magától a levegőben). Érdekes még megemlíteni, hogy a szurok viszkozitását egy majdnem 90 éve futó kísérletben mérik a Queenslandi Egyetemen: körülbelül tízévente cseppen egyet a tölcserben elhelyezett anyag.

Vannak folyadékok, amelyek esetében nem áll fenn a szakasz elején említett egyszerű összefüggés a visszahúzó erő (azaz a nyírófeszültség) és az áramlási sebesség változása között: egyes anyagok esetében nő a viszkozitás a nyírófeszültséggel (vízben oldott keményítő, vizes homok), más anyagok viszkozitása csökken növekvő nyírófeszültséggel (tejszínhab, vér, körömlakk, de jégrétegek is viselkednek így). Sőt olyanok is vannak, amelyekben az időtől függ a viszkozitás (gipsz vagy nyomtatófesték esetén nő, míg zselatin, pektin vagy joghurt esetén csökken). Mindezeket összefoglaló néven **nem newtoni folyadékoknak** nevezzük. Ezekkel roppant érdekes jelenségeket lehet bemutatni, érdemes akár otthon kísérleteket végezni keményítő és víz keverékével (de a kicsit vizes homok is hasonlóan működik).

### 3.2.4. Súrlódó áramlások, turbulencia

Most lássunk néhány, súrlódó áramlásokra vonatkozó egyszerű törvényt. Ezek közül legyen első a **Poiseuille-törvény**, amely megadja, hogy  $\Delta p$  nyomáskülönbség hatására másodpercenként hány köbméternyi anyag folyik át egy  $R$  sugarú,  $L$  hosszúságú csövön (ez a  $Q = \Delta V / \Delta t$  térfogatáram, mértékegysége m<sup>3</sup>/s). Ez is az anyag  $\eta$  viszkozitásától függ, méghozzá az alábbi módon:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta p. \quad (3.21)$$

Ez azt jelenti, hogy kétszer akkora nyomás kétszer annyi anyagot nyom át, de kétszer akkora viszkozitású folyadék esetén csak feleannyi anyag áramlik át. Megadhatjuk az átfolyó anyag időegységre jutó tömegét is:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \rho Q = \rho \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta p = \frac{\pi R^4}{8\nu L} \Delta p. \quad (3.22)$$

Ez viszont már a kinematikai viszkozitástól függ! A törvény jelentősége például abban áll, hogy kiszámíthatjuk, egy 10 km hosszú csövön mekkora nyomással tudunk annyi vizet átjuttatni, hogy azzal egy falut el lehessen látni; vagy hogy egy 100 km hosszú gázvezetéken mekkora nyomás juttat át egy város fűtéséhez elegendő gázt. Ugyanezt a törvényt lehet alkalmazni akkor is, ha kíváncsiak vagyunk arra, a szívnek mekkora nyomást kell létrehoznia a keringés fenntartásához.

Fontos észben tartani, hogy a Poiseuille-törvény csak nem turbulens (azaz lamináris) áramlás esetén érvényes. Ez akkor valósul meg, ha a sebesség (avagy a Reynolds-szám, lásd alább) nem túl nagy. A gyakorlatban előforduló csöbéli áramlások (víz, földgáz fali vezetékben, kipufogógáz a motorból, vér a fő verőerekben) általában turbulensek (az egész vékony erekben való véráramlás viszont lamináris). Turbulens áramlás esetén adott sebességhez a Poiseuille-törvényből kiszámoltnál lényegesen nagyobb az ellenállási erő (azaz a  $\Delta p$  nyomásesés), mégis „megéri”, hiszen összességében kisebb csövön több folyadékot vihetünk át.

A következő fontos állítás a **Stokes-törvény**, és megadja, hogy egy  $R$  sugarú golyóra  $\eta$  viszkozitású folyadékban  $v$  lamináris áramlási sebesség esetén mekkora erő hat:

$$F = -6\pi\eta Rv. \quad (3.23)$$

Ez tulajdonképpen a korábban említett, nem túl gyors mozgások esetén érvényes  $F = -\alpha v$  közegellenállási erő kifejtése. Nagyobb áramlási sebességek (vagy kisebb viszkozitás) esetén az áramlás turbulens lesz, erre az esetre vonatkozik a 2.4.2. részben említett  $F \propto v^2$  törvény.

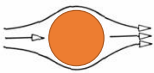
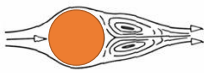




Kérdés, hogy meg tudjuk-e előre adni, hogy egy adott áramlás lamináris vagy turbulens lesz? Ebben van segítségünk az úgynevezett **Reynolds-szám**, amelynek definíciója a rendszer  $l$  méretskáláját és az áramlás tipikus  $v$  sebességét alapul véve

$$\text{Re} = \frac{\rho l v}{\eta} = \frac{r v}{\nu}. \quad (3.24)$$

Az ilyen jellegű dimenziótlan számok jelentősége az, hogy az áramlási kép kialakulása skálafüggetlen: feleakkora csőben kétszer akkora sebesség esetén (ugyanolyan folyadékra) hasonló áramlás alakul ki.<sup>8</sup> Erre alapulnak a szél- és vízcatornák, amelyekben a mérnökök a „valódinál” kisebb méretben ténylegesen pontosan tesztelhetik a tervezett repülőket, autót, vagy akár csőrendszert.

Hogy a Reynolds-szám definíciójában szereplő tipikus méret és tipikus sebesség mit jelent, az minden áramlási képre egyezményesen más és más lehet. Egy csőben való áramláskor „méretnek” a cső  $d$  átmérőjét, sebességnek pedig az áramlás átlagos sebességét (azaz a térfogati hozamnak és a keresztmetszetnek a hányadosát) szokták venni.

<sup>8</sup>Valójában ehhez még az úgynevezett Euler-szám hasonlósága is szükséges – ez a nyomásból származó és a tehetetlenségi erők arányát fejezi ki.

Reynolds-szám		Áramlási kép
$\dots - 5$		Lamináris áramlás
$5 - 40$		Két stabil örvény
$40 - 150$		Lamináris örvénysor
$150 - 3 \cdot 10^5$		Lamináris határreteg, turbulens sodrás
$3 \cdot 10^5 - 3,5 \cdot 10^6$		Turbulens átmenet
$3,5 \cdot 10^6 - \dots$		Turbulens örvénysor

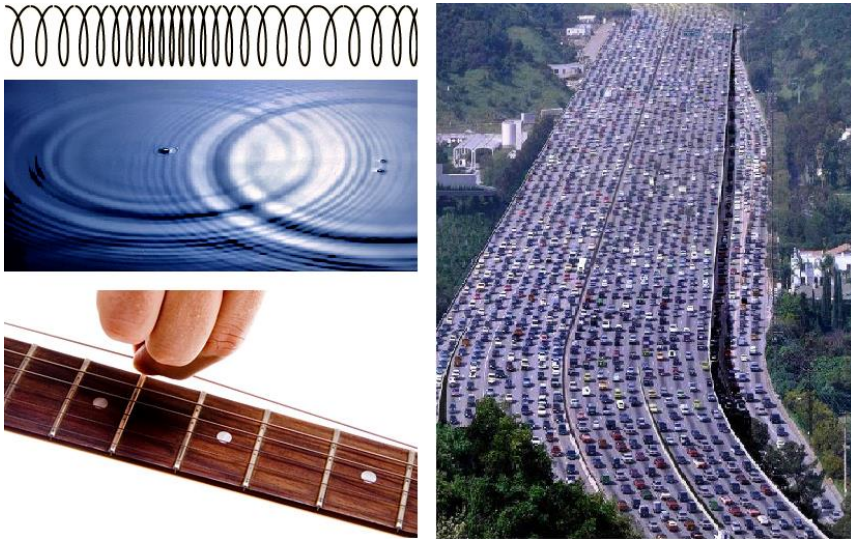
3.12. ábra. Különbféle Reynolds-számok esetén kialakuló áramlási képek. Ahogy egyre növekszik a Reynolds-szám (azaz csökken a viszkozitás, vagy éppen nő a sebesség), úgy lesz az áramlás egyre turbulensebb. Míg kis viszkozitású anyagokban az áramlás már igen kis sebességek esetén is turbulens lehet, addig viszkozózus folyadékoknál ehhez nagyobb sebességre (vagy éppen nagyobb méretre) van szükség.

Csőben történő áramlásra a kísérletek azt mutatják, hogy az így definiált Reynolds-számra  $Re \lesssim 2000$  esetén lamináris áramlás jön létre,  $Re \gtrsim 4000$  esetén pedig turbulens áramlás. A kettő között mindkettő lehetséges (szabálytalan időközönként keletkeznek örvények), és egyéb részletektől függ az áramlási kép.

A Stokes-törvényben is leírt, gömb alakú tárgy körül az áramlás képe a 3.12. ábrán látható módon függ a Reynolds-számtól. (Itt a sebesség a golyótól távoli közegsebességet, vagyis a golyónak a közeghez viszonyított sebességét jelöli, a méret pedig a golyó átmérője.) Láthatóan minél kisebb a kinematikai viszkozitás, annál inkább jellemző lehet az áramlásra a turbulencia megjelenése. Lamináris áramlások esetén érvényes az előző bekezdésben említett Stokes-törvény, míg turbulens áramlások esetén fellépnek örvények és sodrások – ezek a sebesség négyzetével arányos erőt eredményeznek. Az örvények felváltva érkezik kialakíthatnak egy, a 3.12. ábrán látható típusú áramlási profilt: ez lobogtatja a zászlót, hidak, épületek esetében pedig azok rezonanciafrekvenciáját eltalálva rezonanciát, illetve szélsőséges esetben rezonanciakatasztrófát idézhet elő.

### 3.3. A hullámmozgás és a hullámegyenlet

Ebben a fejezetben a **hullámok** konkrét jelenségtől független, **absztrakt tulajdonságaival** foglalkozunk. Az alapfogalom egy **térben és időben értelmezett függvény**,



3.13. ábra. Hullámmozgással leírható rendszerek, amelyekben az  $f$  tér- és időfüggő mennyiséget a rugó lokális „sűrűsége” (balra fent), a víz felszínének magassága (balra középen), a húr kitérése (balra lent) vagy éppen az autók lokális sűrűsége (jobbra) jelenti.

$f(t, x)$ . Másképpen kifejezve  $f$  egy tér- és időfüggő mennyiség, ami a 3.13. ábrán látható példákat is felsorolva lehet például

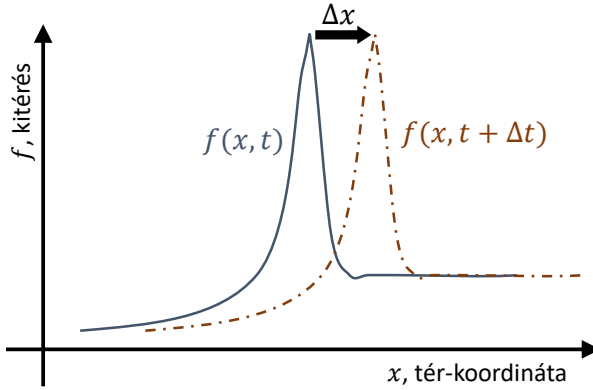
- egy húr kitérése (vonós hangszeren),
- egy folyadék szintjének értéke (víz felszínének alakja),
- az autók sűrűsége az autópályán,
- egy rugó spiráljainak sűrűsége,
- a levegő sűrűsége,

vagy bármi más, ami függ(het) a térbeli pozíciótól és az időtől.

### 3.3.1. A hullámmozgás matematikai alapjai

Ebben a szakaszban azt vizsgáljuk meg, hogy amit intuitívan **hullámmozgásnak** hívunk, azt hogyan formalizálhatjuk, azaz mit is jelent matematikailag egy hullám. Legyen tehát valamely  $f(x, t)$  tértől és időtől függő mennyiségünk. Egy adott  $x_0$  pontban véve  $f(t, x_0)$  csak az időtől függ: ez az autók (időfüggő) sűrűsége az autópálya egy adott kilométerkövénel, a húr kitérése annak egy adott pontján, vagy a víz magassága egy adott helyen. Ha viszont egy adott  $t_0$  időpontot veszünk, akkor  $f(t_0, x)$  csak a helytől függ: ez a húr vagy a vízfelszín alakjáról készített pillanatkép az adott időpontban. Ha egy hullám azonos alakban terjed mondjuk a vízben, akkor az intuitívan azt jelenti, hogy a víz mostani magassága egy adott pontban ugyanakkora, mint egy másik pontban valamivel korábban: onnan „jött” ugyanis a hullám. Ezt mutatja a 3.14. ábra.

Mindezt az  $f(x, t)$  függvényre vonatkozólag matematikailag úgy fogalmazhatjuk meg, hogy van olyan  $\Delta t$  időtartam és hozzá tartozó  $\Delta x$  távolság, amely esetén tet-



3.14. ábra. Azonos alakú hullám terjedése. Egy adott  $t$  időpillanatban a hullám alakja azonos a későbbi,  $t + \Delta t$  időpillanatban vett alakkal, csak térben  $\Delta x$  mértékben el van tolva, ahogy a szövegben írt (3.25) egyenlet mutatja.

szöveges helyen és időpontban igaz a következő egyenlet:

$$f(t + \Delta t, x) = f(t, x - \Delta x) \quad (3.25)$$

Az autópálya esetére ez szavakkal úgy fogalmazható meg, hogy az autók sűrűsége ( $f$ ) ugyanakkora lesz adott helyen ( $x$ ) öt perc múlva ( $t + \Delta t$ ), mint most ( $t$ ) egy kilométerrel visszább (a  $x - \Delta x$  helyen) volt. Az autópályán valóban így haladnak a torlódások, ezt nagyon egyszerű paraméterekkel szimulálva is lehet látni – elég hozzá egy reakcióidő miatti késleltetés és a kívánt sebességre való állandó visszagyorsítás, és bizonyos sűrűség felett automatikusan kialakul a dugó, amely aztán tényleg hullámszerűen halad.

A hullámterjedés matematikai megfogalmazása tehát a fenti egyenlet. Kérdés, hogy milyen függvények viselkednek így, azaz milyen függvények írják le haladó hullámokat? Bármely olyan függvény teljesíti ezt, amely nem függ külön az  $x$  és  $t$  változóktól, csak ezek egy  $x \pm ct$  kombinációjától. Tehát az  $f(x, t) = F(x \pm ct)$  függvény (ahol  $F$  tetszőleges egyváltozós, deriválható függvény) teljesíti a (3.25) egyenletet, hiszen behelyettesítve:

$$f(t + \Delta t, x) = f(t, x - \Delta x) \text{ az eredeti egyenlet, innen} \quad (3.26)$$

$$F(x \pm c(t + \Delta t)) = F(x - \Delta x \pm ct), \text{ ez biztosan teljesül, ha} \quad (3.27)$$

$$x \pm c(t + \Delta t) = x - \Delta x \pm ct, \text{ azaz} \quad (3.28)$$

$$\pm c\Delta t = -\Delta x, \text{ azaz} \quad (3.29)$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \mp c. \quad (3.30)$$

Tehát a függvény alakja  $\Delta t$  időtartam múlva ugyanaz, csak  $\mp c\Delta t$  mértékben eltol. Amennyiben az  $F$  függvényben  $x + ct$  szerepelt, akkor a függvény negatív irányban, balra tolódik el; míg ha  $x - ct$  szerepelt, akkor pozitív irányban, jobbra tolódik el, ahogy a fenti ábrán is látható. Ebből adódóan egyszerűen megérthető, hogy ezen  $f(x, t) = F(x \pm ct)$  függvényalak esetén  $c$  a hullám „terjedési sebessége”. Azt is mondhatjuk, hogy a  $t_0 = 0$  időpontban  $F(x)$  a hullám formája, míg később  $F(x \pm ct)$ , tehát ugyanolyan alakú, de



eltolt hullámot látunk. A fentiekben kétféle előjel fordult elő, amely a kétféle irányban haladó hullámoknak felel meg. Ennek azonban nincs jelentősége a mi szempontunkból, ezért a továbbiakban mindig csak az egyik esetre szorítkozunk.

Vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha a térben egyetlen pontot szemelünk ki: ekkor az  $x = 0$  helyen a „kitérés” (vagyis az adott fizikai mennyiség)  $F(ct)$  módon függ az időtől.

Végül megemlítjük, hogy a fenti tárgyalás igen absztrakt volt, kicsit jobban érthető az egész, ha  $f$  helyére valami konkrét fizikai mennyiséget képzelünk (a fejezet elején említettek közül egyet).

Megjegyzendő továbbá, hogy a fenti tárgyalás a legegyszerűbb hullámokat írja le. Valójában a fentitől eltérő esetek is lehetnek, ahol az idővel a hullám alakja is változik.

### 3.3.2. Periodikus hullámok

Az absztrakt tárgyalást megőrizve vizsgáljuk tovább a hullámokat. Ezek sokszor **térben periodikusak**: azaz nem egyetlen hullámhegyünk van, hanem ezek térben ismétlődnek bizonyos távolságonként: ez a távolság a  $\lambda$  hullámhossz. Ezt matematikailag úgy fogalmazhatjuk meg, hogy  $x \pm n\lambda$  és  $x$  helyen ugyanaz a függvény értéke tetszőleges  $n$  egész szám esetén, bármely  $t$  időpillanatban:  $f(x, t) = f(x \pm n\lambda, t)$ . Ez azonban azt jelenti, hogy **időben is periodikus** a hullám, hiszen az  $f(x, t) = F(x - ct)$  alakból kiindulva (tehát jobbra, „előre” haladó hullámot felírva), a  $T = \lambda/c$  periodusidőt bevezetve (és a hullámot  $\lambda$ -val jobbra mozdítva)

$$F(x - ct) = F(x - \lambda - ct) \text{ adódik, ahonnan} \quad (3.31)$$

$$F(x - ct) = F\left(x - c\left(t + \frac{\lambda}{c}\right)\right) \text{ azaz} \quad (3.32)$$

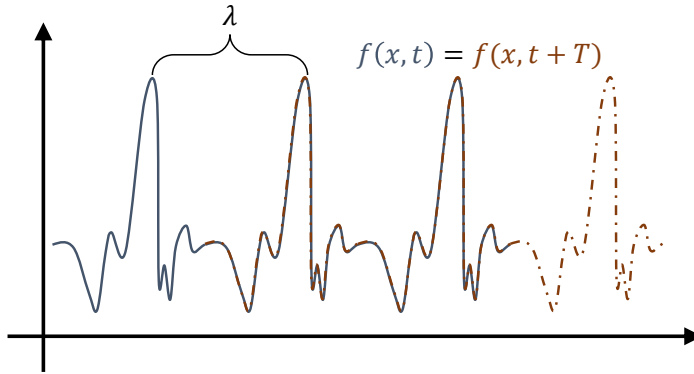
$$F(x - ct) = F(x - c(t + T)). \quad (3.33)$$

Ezt mutatja a 3.15. ábra is. Tehát ha térben  $\lambda$  periodicitással (hullámhosszal) rendelkezik a hullám, akkor  $T = \lambda/c$  periódusideje lesz (azaz adott pontban ennyi időnként ismétlődik a látott függvényalak). A frekvencia definíciója az időegységenkénti ismétlődések száma, azaz  $f = 1/T = c/\lambda$  (vigyázzunk, hogy az  $f$  frekvenciát ne keverjük össze a függvényt jelölő betűvel).

Nézzük most meg, hogy milyen  $F$  függvényalakot választhatunk! Ha egy egyszerű matematikai függvényt szeretnénk választani, mint valamely trigonometriai függvény, akkor az  $F(x)$  felírás nem működik – az  $x$  mennyiségnek ugyanis van mértékegysége (méter), míg a matematikai függvények argumentumába egyszerű számokat írhatunk csak.<sup>9</sup> Az  $F$  függvény argumentumának mértékegységét tüntessük el egy  $k$  faktorial, amelynek  $1/m$  a mértékegysége! Ekkor  $F(x - ct)$  helyett  $F(k(x - ct))$ -t írunk, illetve definiáljuk az  $\omega = kc$  mennyiséget, amelynek  $1/\text{másodperc}$  a dimenziója, és vegyük mostantól az

$$f(x, t) = F(kx - \omega t) \quad (3.34)$$

<sup>9</sup>Gondoljuk meg: mennyi egy méter szinusza? Hogyan írjuk be ezt a számológépbe,  $\sin(1)$ ? De ha centiméterben fejezzük ki, akkor  $\sin(100)$  lenne a jó megoldás? Vagy a végeredménynek is legyen valahogy mértékegysége, amelyet „méter szinusza” néven illetünk? Láthatólag ez nem működik. Különösen nyilvánvaló a dolog, ha  $\sin(x)$  hatványsorára tekintünk: ebben  $x$  különböző hatványai szerepelnek, márpedig a méter különböző hatványait nem adhatjuk össze!



3.15. ábra. Periodikus hullámok viselkedése. Ilyenkor a hullám térbeli ismétlődése ( $\lambda$ ) és időbeli ismétlődése ( $T$ ) összefügg,  $\lambda = Tc$  módon.

alakot, amelyben  $F$  már tényleg bármilyen matematikai függvény lehet. Ha tetszőleges periodikus függvény helyett szinuszhullámot választunk, azaz

$$f(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (3.35)$$

alakról beszélünk, akkor ennek hullámhossza  $\lambda = 2\pi/k$  lesz; hiszen a szinuszfüggvény  $2\pi$ -nként ismétlődik, így  $\sin(kx) = \sin(k(x - 2\pi/k)) = \sin(kx - 2\pi)$ . Ekkor a fentiek szerint  $T = \lambda/c = 2\pi/kc = 2\pi/\omega$  is igaz lesz. Mindezeket összefoglalva a szinusz jellegű periodikus hullámok alapvető paramétereire ezek az összefüggések igazak:

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad (3.36)$$

$$\lambda = 2\pi k, \quad (3.37)$$

$$T = \frac{\lambda}{c}, \quad (3.38)$$

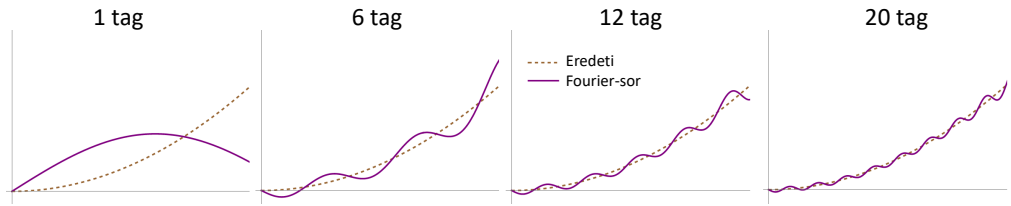
$$f = \frac{1}{T}, \quad (3.39)$$

$$\omega = 2\pi f. \quad (3.40)$$

### 3.3.3. A Fourier-tétel

Általában hullámok esetén bonyolult térbeli alakok képzelhetőek el, gondoljunk csak a víz felszínére viharos időben. Vajon hogyan kezelhetnénk ezen függvényeket egységesen? Joseph Fourier 1807-es *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* („Értekezés a szilárd testekben történő hőterjedésről”) című munkájában (a hőterjedés fizikai tárgyalását egyszerűsítendő) vezette be az azóta róla elnevezett **Fourier-tételt**: adott véges intervallumon bármely függvény felírható (számantani sorozat szerint növekvő frekvenciájú) szinusz- és koszinuszfüggvény (esetleg végtelen tagú) összegeként.<sup>10</sup> Ezek a

<sup>10</sup>A valós számok teljes halmazán értelmezett függvény esetén ez csak akkor igaz, ha a függvény periodikus – ahogy a hullámok többnyire.



3.16. ábra. Egy egyszerű négyzetes függvény közelítése a Fourier-sorával. Látható, hogy az első 20 tag figyelembevétele esetén már igen jó közelítést kapunk.



3.17. ábra. A zenelejátszók szokásos kijelzője az éppen hallható hang bizonyos zenei magasságokban eső átlagos Fourier-komponenseit mutatja.

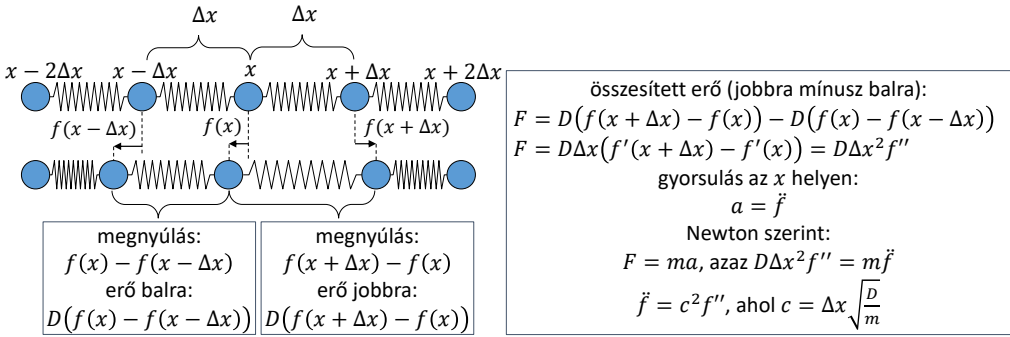
függvény úgynevezett **Fourier-komponensei**, az ezekből létrehozott összeg a **Fourier-sor**. Az egyes Fourier-komponensek relatív erősségét a függvény Fourier-együtthatóinak nevezzük. Az  $F(x)$  függvény Fourier-sora tehát így néz ki:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx). \quad (3.41)$$

A 3.16. ábrán az  $x^2$  függvény Fourier-sora látható: 20 tag figyelembevétele már egész jó közelítéssel visszaadja az eredeti függvényt. A Fourier-felbontást mutatja a zenelejátszók a 3.17. ábrán illusztrált kijelzője is: ez grafikusan mutatja az alacsony, közepesen alacsony, közepes, közepesen magas, magas hangok részarányát, azaz az ezeknek megfelelő Fourier-komponensek amplitúdóját. (A hallható hangok zenei magassága a frekvenciájukkal függ össze, tehát nagyobb frekvencia magasabb hangot jelent.)

A lényeg tehát az, hogy bármely hullámot felbonthatunk szinuszkomponensekre, és ezért sokszor elég csak szinusz hullámokról beszélni: minden másfajta hullámot ezután „összerakhatunk” ilyenekből.<sup>11</sup> A hullám prototípusa ezután tehát  $A \sin(kx - \omega t)$  lehet, ahogy a (3.35) egyenletben írtuk.

<sup>11</sup>A szinuszt és a koszoszt ebből a szempontból egységesen kezelhetjük, hiszen az egyik csak eltolja a másikat. Nem periodikus függvényekre pedig az úgynevezett Fourier-transzformáció vonatkozik: itt az  $A_n$  együtthatók helyére egy  $A(\omega)$  függvény lép, amellyel  $F(x) = \int A(\omega) \sin(\omega x) d\omega$ .



3.18. ábra. A hullámegyenlet megjelenése  $m$  tömegű testek  $D$  rugóállandójú rugóval összekötött,  $\Delta x$  távolságú sorozatának mozgása esetén.

### 3.3.4. A hullámegyenlet

A fentiekben láttuk, hogy mit hívunk hullámnak, hogyan írhatjuk le matematikailag, és mik a legalapvetőbb paraméterei. Kérdés, hogy valóban kialakulnak-e ilyen hullámok, és ha igen, ennek mi az oka.

Lássunk most egy egyszerű, mechanikai jellegű példát, ahol hullámok megjelenésére számítunk: vegyük  $m$  tömegű testek  $D$  rugóállandójú rugóval összekötött,  $\Delta x$  távolságú sorozatát (ez elég jó modellje egydimenziós szilárd testeknek), ahogy azt a 3.18. ábra mutatja. Ekkor az  $f(x, t)$  mennyiség az  $x$  helyen lévő test kitérése  $t$  időpontban, ahogy a 3.18. ábrán is látszik (az időfüggést az egyszerűség kedvéért nem mindig írtuk ki). Ekkor az  $x$  helyen lévő test gyorsulása az  $f(x, t)$  kitérés idő szerinti második deriváltja:

$$a = \frac{d^2 f(x, t)}{dt^2} = \ddot{f}(x, t). \quad (3.42)$$

Másrészt a testre ható erő az  $x + \Delta x$  és  $x - \Delta x$  helyen lévő szomszédokhoz kötött rugók megnyúlásától függ, ahogy a 3.18. ábrán is látjuk.

Az erő összességében (az előjelekre fokozottan kell figyelni):

$$F = -D(f(x, t) - f(x + \Delta x, t)) - D(f(x, t) - f(x - \Delta x, t)). \quad (3.43)$$

Itt éppen a hely szerinti derivált tűnik fel, mivel

$$f'(x, t) = \frac{df(x, t)}{dx} \simeq \frac{f(x, t) - f(x - \Delta x, t)}{\Delta x}, \text{ illetve} \quad (3.44)$$

$$f''(x, t) = \frac{d^2 f(x, t)}{dx^2} \simeq \frac{f'(x, t) - f'(x - \Delta x, t)}{\Delta x} \quad (3.45)$$

A (3.43) egyenlettel összevetve tehát  $m\ddot{f}(x, t) = D\Delta x^2 f''(x, t)$ , felírható az alábbi módon:

$$\ddot{f}(x, t) = c^2 f''(x, t), \text{ ahol} \quad (3.46)$$

$$c = \sqrt{\frac{D}{m}} \Delta x. \quad (3.47)$$

Ezt hívjuk **hullámeqyenletnek**, és eszerint az  $f(x, t)$  függvény második térbeli és időbeli deriváltja megegyezik egymással egy  $c^2$  konstans erejéig, amely a hullámok terjedési sebességének négyzete lesz. A fenti egyszerű esetre egzaktul levezettük ezt, de fontos tudni, hogy rengeteg különböző rendszerre kapunk hasonló egyenletet – a hullámeqyenlet a fizikában univerzális jellegű: nagyon sok különböző jelenségre felírható.

De miért hívjuk ezt hullámeqyenletnek, illetve hogyan mozog az ez által leírt rendszer? A kérdés matematikailag az, hogy mi a fenti parciális differenciálegyenlet megoldása. A válasz az, hogy tetszőleges,

$$f(x, t) = F(x \pm ct) \quad (3.48)$$

alakú függvény megoldja a hullámeqyenletet,  $F$  konkrét alakjától függetlenül. Ez az előző néhány szakasz alapján egy  $c$  sebességgel terjedő hullámot jelent!<sup>12</sup> A hullámmozgás oka tehát az, hogy a rendszer dinamikáját a hullámeqyenlet írja le, amelynek megoldásai hullámok. Az olvasóra bízunk annak ellenőrzését, hogy az  $f(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$  függvény valóban megoldja a (3.46) egyenletet.

Egy ilyen rugós rendszerben a rugók irányában történő hatás nyomán tehát  $c = \sqrt{D/m\Delta x}$  sebességű, a hatás irányában terjedő hullámok alakulhatnak ki.<sup>13</sup> Most nem tárgyaljuk részletesen, de merőleges hatás nyomán is hasonló hullámeqyenletre jutnánk, és a hullámok sebessége ekkor  $c = \sqrt{F\Delta x/m}$  lenne, ahol  $F$  a rendszert a két végén kifeszítő erő.

### Kísérlet: rugalmas kötélén kialakuló hullámok

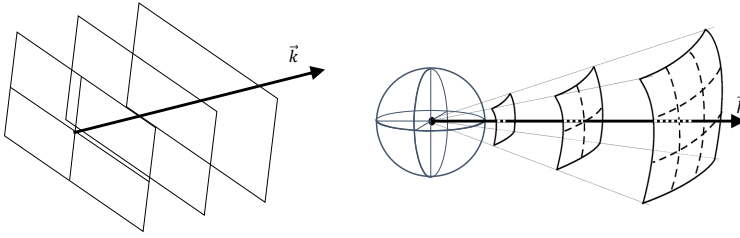
- Rögzítsük egy hosszú, rugalmas kötél két végét, és hozzunk rajta létre longitudinális (hosszanti) és transzverzális (merőleges) hullámokat. Vizsgáljuk ezek oda-vissza verődését.
- Mérjük meg, a hullám mennyi idő alatt megy végig a kötél körülbelül tízszer. A kötél hosszának ismeretében ebből határozzuk meg a hullám terjedési sebességét.
- Változtassuk meg a kötél feszességét, és nézzük meg, hogy ettől hogyan függ a hullám terjedési sebessége!

### 3.3.5. Térbeli hullámok

A fentiekben eddig a hullámok legegyszerűbb esetét tárgyaltuk, ahol egy térdimenzió van (azaz egy térkoordináta,  $x$ ), és a hullámzó fizikai mennyiség is skalár, „egydimenziós”. A világ azonban háromdimenziós, és a **valódi térben terjedő hullámok** az  $\vec{r}$  térpont mindhárom koordinátájától függhetnek. A hullámeqyenletben ekkor a második derivált

<sup>12</sup>Ahogy korábban, itt is  $x - ct$  jobbra,  $x + ct$  balra haladó hullámot jelent – spt, igazából e kettő kombinációja is megoldás.

<sup>13</sup>A bemutatott levezetés annyiban pongyola, hogy a  $\Delta x$ -szel való osztások során rögtön a deriváltakat helyettesítettük be, pedig valójában ez csak közelítőleg igaz, a  $\Delta x$  most véges távolság. Precízebben járnánk el, ha elvégeznénk azt a határártmenetet, amikor egyre több, de egyre kisebb tömegű golyók vannak, amelyeket egyre növekvő rugóállandójú rugók kötnek össze. Ekkor határesetben egy adott hosszanti sűrűségű folytonos közeget (rugalmas hűrt) kapunk, amelynek adott relatív hosszváltozásához adott erő kell: ez éppen a korábban bevezetett  $E$  Young-modulus. Ekkor a fent vázolt hullám sebességére  $c = \sqrt{E/\rho}$  adódik.



3.19. ábra. Síkhullám (balra) és gömbhullám (jobbra) terjedése a háromdimenziós térben.

helyébe a

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \quad (3.49)$$

Laplace-operátor lép, amely az egyes irányok (az  $\vec{r} = (x, y, z)$  egyes komponensei) szerinti második deriváltak összegét képzí. Ezzel a háromdimenziós hullámegyenlet

$$\ddot{f}(\vec{r}, t) = c^2 \Delta f(\vec{r}, t) \quad (3.50)$$

módon írható le. Kérdés, hogy ennek ugyanolyan egyszerűen írhatóak-e fel a megoldásai, mint a (3.46) egyenletben láttuk. Két esetben igen.

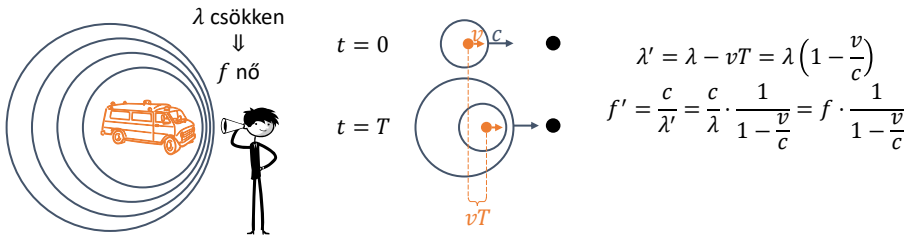
Az első a **síkhullám**, amelyet a 3.19. ábra bal oldala mutat: ekkor a hullám egy rögzített irányban halad, ezt az irányt adva a  $k$  hullámszámnak kapjuk a  $\vec{k}$  hullámszámvektort. Ebben az esetben a  $\vec{k}$ -ra merőleges síkokon konstans a hullámzó fizikai mennyiség, tehát tényleg olyan, mintha sík hullámfrontok haladnának előre  $\vec{k}$  irányában,  $c$  sebességgel. Ezt matematikailag (jobbra haladó hullám esetén) úgy írhatjuk, hogy

$$f(\vec{r}, t) = A \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t). \quad (3.51)$$

Mivel itt skalárszorzat szerepel, ezért  $\vec{r}$ -nek csak a  $\vec{k}$  irányú komponense számít, az erre merőleges nem: a  $k$ -ra merőleges felületeken adott időpillanatban véve  $f(\vec{r}, t)$  konstans. Megtehetjük, hogy a derékszögű koordináta-rendszerünket úgy választjuk meg, hogy az  $x$  tengely éppen  $k$  irányába mutasson, ekkor  $\vec{k} = (k, 0, 0)$ . Ezzel és az  $\vec{r} = (x, y, z)$  összefüggéssel  $f(\vec{r}, t) = A \sin(kx - \omega t)$ , tehát a síkhullámok tulajdonképpen egydimenziós hullámként is értelmezhetőek. Az olvasóra bízunk annak vizsgálatát, hogy ez kielégíti-e a fenti, Laplace-operátoros hullámegyenletet (nyilván igen, hiszen ha az  $y$ -től és a  $z$ -től semmi sem függ, akkor az ilyen irányú parciális deriváltak nullát adnak).

A térbeli hullámok másik egyszerű verziója a **gömbhullám** (lásd a 3.19. ábra jobb oldalát), ahol a hullámok kiindulópontja egyetlen pont, és a hullámfrontok gömbfelületeknek felelnek meg. Ekkor a hullámegyenlet megoldásában a hullámzó mennyiség csak a középponttól vett  $r = |\vec{r}|$  távolságtól függ. Állítás: a háromdimenziós hullámegyenlet részletesebb vizsgálatával belátható, hogy ilyenkor az amplitúdó az  $r$  távolsággal fordítottan arányosan csökken:

$$f(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} \sin(kr - \omega t). \quad (3.52)$$



3.20. ábra. A Doppler-jelenség. A közeledő hangforrás hangja magasabbnak, a távolodóé mélyebbnek tűnik. Az ábra jobb oldala mutatja, hogy  $v$  sebességgel egy  $T$  periódusidő alatt  $vT$  elmozdulás történik, így a hullámfrontok a mozgás irányában összesűrűsödnek, az álló megfigyelő szerint a hullámhossz tehát egy  $1 - v/c$  faktoriall redukálódik, az észlelt frekvencia pedig ugyanezzel a faktoriall szorozva megnő.

Érdeemes megemlíteni, hogy ez azonban csak három térbeli dimenzió esetében van így, síkfelületen kialakuló hullámok esetén ez nem megoldása a hullámeqyenletnek. Ezért (is) van az, hogy víz felszínén nem egyszerű „körhullámok” alakulnak ki egy kavics bedobásakor, hanem több gyűrű egymásutánja.

### 3.3.6. A Doppler-jelenség

Érdekes megvizsgálni, hogy hogyan észlelünk egy olyan hullámot, amelynek forrása mozog, azaz közeledik felénk vagy távolodik tőlünk. Ahogy a 3.20. ábrán is látható, ilyenkor az egymás után kibocsátott hullámfrontok között kisebb lesz a távolság, vagyis kisebb lesz a hullámhossz, hiszen a forrás „utánuk megy”. Ez a **Doppler-jelenség** alapja, és vizsgáljuk meg, milyen kvantitatív állítást tehetünk. Tegyük fel, hogy a forrás frekvenciája  $f$ , az ehhez tartozó periódusidő  $T = 1/f$ , a hullám terjedési sebessége pedig  $c$ . Ha a forrás  $v < c$  sebességgel közeledik<sup>14</sup>, akkor az első hullámfronthoz képest a második közelebről indul. Így a két hullámfront közötti távolság, azaz az álló megfigyelő szerinti hullámhossz  $\lambda' = \lambda - vT$  lesz, ahol  $\lambda$  lenne a hullámhossz, ha a forrás nem mozogna. Ezek alapján ( $T = 1/f = \lambda/c$  miatt)  $\lambda' = \lambda(1 - v/c)$ , azaz az észlelt frekvencia

$$f' = f \frac{1}{1 - v/c}, \quad (3.53)$$

ahol a sebesség előjele közeledés esetén pozitív, távolodás esetén negatív. Előbbi esetben tehát egy egynél kisebb számmal osztjuk a frekvenciát, ami növekszik: a közeledő forrás frekvenciája nő, például a közeledő mentőautó szirénája magasabbnak, a távolodóé pedig alacsonyabbnak hangzik (a hang frekvenciája annak magasságával függ össze, ahogy később látni fogjuk). A gyakorlatban sokszor azt tapasztaljuk, hogy a frekvencia (azaz a hangmagasság) valójában folyamatosan csökken, ahogy a mentőautó közeledik: ennek az az oka, hogy valójában ilyenkor a közeledési sebessége is csökken, mivel egyre kevésbé „jön felénk” – a mentőautó többnyire tényleg nem felénk jön, hiszen nem elütni készül minket.

<sup>14</sup>A hullám terjedési sebességénél nagyobb sebességű megfigyelőnél mindenféle furcsa jelenségeket lehet megfigyelni, mint például a hangsebesség átlépésekor keltett „hangrobbanás”, vagy fénynél az úgynevezett Cserenkov-sugárzás.

Hanghullám esetében érdemes azt is megvizsgálni, hogy mi történik, ha a megfigyelő közeledik a forráshoz, és a forrás áll. Ekkor a megfigyelő az első hullámfront után a másodikkal hamarabb találkozik, hiszen mozgása miatt „elébe megy”. Egymáshoz viszonyított relatív sebességük  $v + c$  módon számítható, ezért a megfigyelő szerint a periódusidő, azaz a  $\lambda$  távolságra lévő hullámfrontok észlelése között eltelt idő  $T' = \lambda/(v + c) = T/(1 + v/c)$  lesz, azaz

$$f' = f(1 + v/c), \quad (3.54)$$

ahol ismét a sebesség előjele közeledés esetén pozitív, távolodás esetén negatív. A hatás az előző esetben tárgyalthoz hasonló, sőt kis sebesség esetén, mivel ha  $v \ll c$ , akkor  $1 + v/c \simeq 1/(1 - v/c)$ , nagyságában is azonos<sup>15</sup>. A két jelenség összevonva így írható:

$$f' = f \frac{1 + v_m/c}{1 - v_f/c}, \quad (3.55)$$

ha  $v_m$  a megfigyelő,  $v_f$  a forrás közeghez képesti közeledési sebessége (és távolodás esetén negatív sebességet kell figyelembe venni mindkettőre).

A fenti levezetés fényre és más elektromágneses hullámokra nem érvényes, mert ahogy a következő fejezetekben látjuk majd, ezek a hullámok minden megfigyelőhöz képest ugyanazzal a  $c$  fénysebességgel haladnak (tehát nincs értelme megkülönböztetni azt az esetet, amikor a forrás áll, és a megfigyelő mozog, illetve amikor a forrás mozog, és a megfigyelő áll). Látni fogjuk, hogy ennek ellenére a fény esetén is létezik a Doppler-jelenség. A frekvenciaváltozást a fentiekől kicsit eltérő képlet adja meg, mindazonáltal itt is igaz lesz, hogy a távolodó fényforrás fénye vörösebbnek, a közeledő ibolyábbnak látszik. (A vörös a legkisebb, az ibolya a legnagyobb frekvenciájú látható fény.) Kiemelten fontos megfigyelés a (csillagászati) vöröseltolódás: eszerint szinte minden nem túl közeli galaxis távolodik tőlünk (a fényük vörösebbnek látszik), minél messzebb vannak, annál gyorsabban. Ez robbanásszerű tágulással magyarázható, ahol azért van tőlünk távol valami, mert eleve nagy volt a sebessége. Tehát a távoli galaxisok megfigyelt vöröseltolódása alapján lehetett először megsejteni, hogy az Univerzum egyfajta ősrobbanásban keletkezett.

### Kísérlet: a Doppler-jelenség vizsgálata

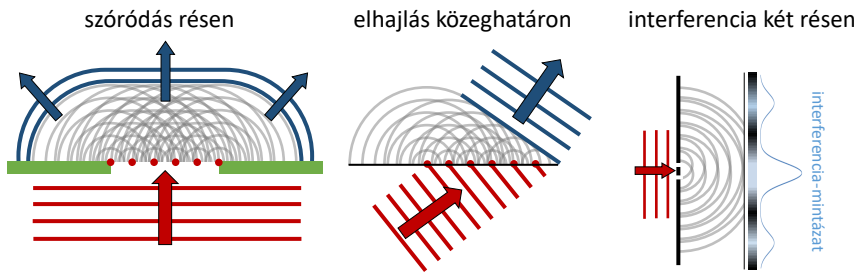
- Töltsünk le valamilyen állandó magasságú és erősségű hangot a telefonunkra.
- Minél nagyobb kitéréssel mozgassuk a mobiltelefont előre-hátra, és vizsgáljuk meg a kialakuló hangmagasságot.
- Ha bátrak vagyunk, pörgessük meg a telefont kötélre kötve, és értelmezzük a hallottakat! A telefont persze mindig rögzítsük nagyon jól, nehogy leesve eltörjön.

### 3.3.7. Hullámok elhajlása, interferencia: a Huygens–Fresnel-elv

A hullámok térbeli terjedése során sokféle érdekes jelenséget tapasztalunk. A hullámok néha eltérülnek, ha akadályba ütköznek vagy közeghatárra érnek. Mi ennek az alapja?

<sup>15</sup> Az  $1 + x \simeq 1/(1 - x)$  ellenőrzésére javasoljuk, hogy az olvasó próbálja ki ezt kis számokra, például hasonlítsa össze  $1 + 0,001$  és  $1/(1 - 0,001)$  értékét.





3.21. ábra. A Huygens–Fresnel-elv és fontosabb következményei: résen áthaladó hullám szóródása (balra), közegethatáron áthaladó hullám „törése”, azaz irányának megváltozása (középen) és a kétrés-kísérlet

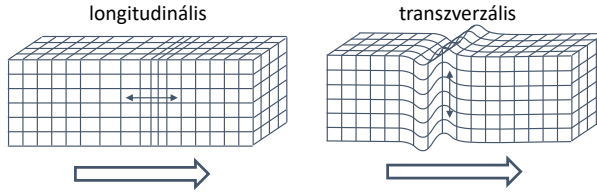
Hullámok terjedésének vizsgálata során a legalapvetőbb törvény a **Huygens–Fresnel-elv**, amely szerint a hullámfront minden pontja további elemi hullámok kiindulópontja.<sup>16</sup> A 3.21. ábra bal oldala alapján ez megmutatja, hogy miért hallatszik ki egy ajtón a hang akkor is, ha a beszélőt eltakarja előlünk a fal: a hullám az akadályon áthaladó hullámfront pontjaiból kiindulva jobbra és balra is elhajlik. Mindez csak akkor igaz, ha az akadály mérete a hullámhossz nagyságrendjébe esik: a fény már nem kanyarodik be az ajtón! Hasonlóan értelmezhető az a jelenség is, hogy közegethatáron a hullám elhajlik: az új közegeben lassabban terjedvén a határról induló hullámok a beérkezőtől eltérő irányú hullámfrontot alakítanak ki. Az utóbbi (a 3.21. ábrán középen ábrázolt) jelenség például a délibábnan mutatkozik meg: a különböző sűrűségű levegőrétegekben elhajlik a fény (és a hang is), és így egy tükrözött képet látunk a forró felületen. Mindezt az optikáról szóló 5.6.3. szakaszban részletesebben is megvizsgáljuk. Megemlítendő még, hogy a földrengések hullámjai is elhajlanak a Föld szerkezetének különböző rétegeinek határára érve, ezért ezekkel a hullámokkal tulajdonképpen a Föld belső szerkezetét is vizsgálhatjuk.

Fontos még az **interferencia** jelensége is, amely hullámok találkozásakor jelenik meg, ahogy azt a 2.1.3. szakaszban is tárgyaltuk: azonos fázisú hullámok találkozásakor erősítés jön létre, ellentétes fázis esetén gyengítés. Az interferencia jelensége például a 3.21. ábra jobb oldalán látható kétrés-kísérletben nyilvánul meg. Egy hullámot két résre bocsátva az utána elhelyezett ernyőn interferenciamentázat jelenik meg, ugyanis az ernyő különböző pontjaiig különböző fázisban ér a két résből kiinduló hullám. Ez is a hullámhosszal azonos nagyságrendbe eső (vagy kisebb) méretskálájú rések esetén érvényes, ahogy azt majd később az 5.6.3. szakaszban is tárgyaljuk.

### 3.4. Mechanikai hullámok

Mechanikai hullámokban valamilyen anyag mozgása, azaz a részecskék kitérése hullámzik, azaz a fentebb általánosságban  $f(x, t)$ -nek hívott függvény itt valamilyen elmozdulást/kitérést jelent. Az alábbiakban a mechanikai hullámok típusait és tulajdonságait

<sup>16</sup>Maga az elv nem egészen helyes alapokon nyugszik, matematikailag és fizikailag is korrekt verzióját Kirchhoff írta le később. A következtetések, amelyeket levonhatunk belőle, attól még érdekes módon helyesek, és az elv is kellően egyszerű és szemléletes ahhoz, hogy használjuk.



3.22. ábra. Longitudinális (balra) és transzverzális (jobbra) hullámok. Előbbi esetben a kitérés egyirányú a hullám terjedésével, míg utóbbi esetben arra merőleges.

vizsgáljuk, illetve azok környezeti vonatkozásait.

### 3.4.1. Hullámtípusok, terjedési sebesség

A mechanikai hullámok a 3.22. ábrán látható két fő csoportba sorolhatóak. Az egyik típus a **longitudinális hullám**, ahol a részecskék elmozdulása (kitérése) a hullám terjedési irányával azonos. Ilyen hullám a hang, illetve a földrengések P-hullámai is, vagy a robbanásban keletkező lökéshullámok. Ebben az esetben tulajdonképpen sűrűséghullámról is beszélhetünk, hiszen az anyag besűrűsödik, majd megritkul, ahogy a hullámfront elhalad (lásd a 3.22. ábra bal oldalát). Hasonlóan mondhatjuk ezt a típust nyomáshullámnak is, hiszen a sűrűsödési helyeken a nyomás is megnövekszik.

A mechanikai hullámok másik fő típusa a **transzverzális hullám**, amelyben a részecskék kitérése merőleges a hullám haladási irányára (lásd a 3.22. ábra jobb oldalát). Ilyen hullámok jönnek létre egy megpengetett húrbán vagy egy megütött dobban is, illetve bár nem mechanikai jellegű, de transzverzálisnak tekinthetőek az elektromágneses hullámok, például a fény is (itt nem a kitérés, hanem az elektromos és mágneses tér merőleges a hullám terjedési irányára).

Longitudinális mechanikai hullámok könnyen terjedhetnek mindenféle anyagban, hiszen itt a részecskék egész egyszerűen meglökik egymást. A transzverzális hullámokkal már más a helyzet: egy gáz vagy folyadék molekulájának fel-le mozgása nem hat a mellette lévőre, így ilyen hullám ezekben a közegekben nem terjedhet. Szilárd testekben viszont az egyes atomok vagy molekulák minden szomszédjukhoz kötöttek, és nyugalmi helyzetük körül kis oszcillációkra képesek. Egy adott részecske fel-le mozgása a mellette lévőt is magával rántja, így szilárd közegben transzverzális hullámok is terjedhetnek.

Lássuk most ezen hullámok **terjedési sebességét**. A hullámegyenletnél említett rugós példában a hullám terjedési sebességére  $c = \Delta x \sqrt{D/m}$  jött ki. Ez (többek között) azt fejezi ki, hogy minél erősebbek a részecskéket összekötő rugók, annál nagyobb a (példa szerint longitudinális) hullám terjedési sebessége. Ez valóban így van, a longitudinális hullámok terjedési sebessége a keménység gyökével arányos (és kicsit más törvény vonatkozik folyadékokra és gázokra, mint szilárd anyagokra), míg a transzverzálisoké a

nyíró erőkével:

$$c_{\text{long,gáz/foly.}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad (3.56)$$

$$c_{\text{long,szil.}} = \sqrt{\frac{K + 4G/3}{\rho}}, \quad (3.57)$$

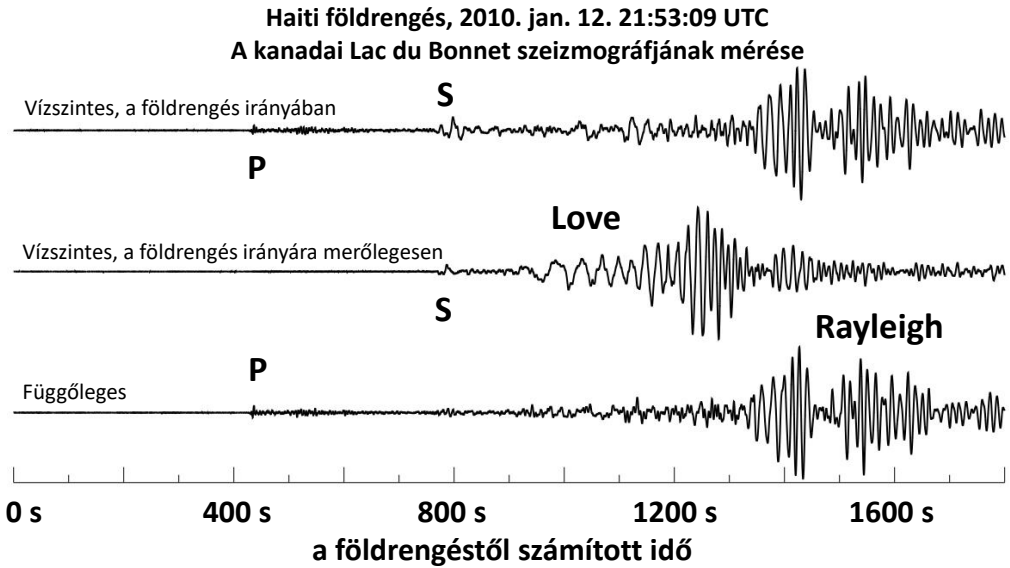
$$c_{\text{transz}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (3.58)$$

ahol  $\rho$  az anyag sűrűsége,  $p$  a nyomás,  $G$  és  $K$  pedig a 3.1.1 és a 3.1.2. fejezetekben említett nyíró és térfogati rugalmassági együtthatók, amelyek az összenyomhatóságot, illetve a keménységet befolyásolják. Ennek megfelelően a longitudinális mechanikai hullámok sebessége acélban 5–6000 m/s, gyémántban 12000 m/s, míg ólomban alig 1000 m/s fölötti. Szilárd anyagokban transzverzális hullámok is terjednek, ezek sebessége körülbelül fele a longitudinális hullámok imént számszerűsített sebességének. Folyadékokban 1000–2000 m/s körül van ez a sebesség, vízben 1500 m/s. Gázokban szintén a fenti formulának megfelelően ennél lényegesen alacsonyabb a terjedési sebesség, levegőben körülbelül 330 m/s (nulla Celsius-fokon, efelett eleinte körülbelül fokenként 0,6 m/s-mal nő). A fenti törvény szerint a sűrűséggel, azaz azon keresztül a móltömeggel fordítottan arányos a terjedési sebesség, ezért hidrogéngázban például az 1300 m/s értéket is eléri. Megemlítjük továbbá, hogy egyatomos gázokban 1,1-szer nagyobb a sebesség, mint (azonos egyéb tulajdonságokkal rendelkező) kétatomos gázban. Az ebben a bekezdésben tárgyalt sebességet hangsebességnek is hívhatjuk, hiszen a longitudinális mechanikai hullámot hanghullámnak is nevezzük, ahogy majd alább tárgyaljuk.

A fent tárgyalt térfogati jellegű (azaz a közeg belsejében terjedő) hullámokon túl úgynevezett **felületi hullámok** is kialakulnak, ha két közeg határát vizsgáljuk. Ezek közül kiemelten fontosak a **Rayleigh-hullámok**, amelyeknél a felszínhez közeli részecskék a haladási iránynak megfelelő, a felszínre merőleges körkörös mozgást végeznek. Ilyen tulajdonképpen a vízfelszín hullámozása is, de jó példát jelentenek a földrengések felszíni hullámai is. Az úgynevezett **Love-hullámok** olyan hullámok, amelynek során a felszín a haladási irányra merőlegesen, jobbra-balra mozog, földrengéseknél ezek is jelentősek. Ugyan bizonyos értelemben ez a hullám is transzverzális, de fontos, hogy itt csak a felszínhez közeli részek vesznek részt a hullámozásban.

A hullámok típustól függő módon terjednek: a térfogati hullámok közül a transzverzális a föld folyékony belső rétegein nem tud áthaladni, míg a longitudinális igen. Ez utóbbi gyorsabb is, előbb ér az adott megfigyelőállomásra, ezért ezt P (primary) hullámnak nevezik – a transzverzális hullámokat pedig S (secondary) hullámnak. A felületi hullámok mindkettőnél lassabban érnek a megfigyelőállomásra, viszont amplitúdójuk lényegesen nagyobb. Egy 2010-es haiti földrengés hullámainak beérkezése látható a 3.23. ábrán. A földrengések szeizmikus hullámai segítségével – azokat a Föld több pontján megfigyelve – lehet feltérképezni a Föld belső szerkezetét, mivel beérkezésük ideje megtett útvijukról árulkodik, amelynek során a réteghatárokon elhajlanak, ahogy azt a 3.24. ábra mutatja.

A víz nehézségi hullámain a vízfelszín részecskéi lényegében körmozgást végeznek, Rayleigh-hullámok módjára. Röviden említsük meg a víz hullámok sebességét: sekély



3.23. ábra. A különféle rengéshullámok által okozott jel egy szeizmográfban. A terjedési sebesség különbsége a beérkezési idők különbözőségében nyilvánul meg.

vízben  $h$  mélység esetén  $c \simeq \sqrt{gh}$  jó közelítéssel, míg mély vízben  $c \simeq \sqrt{g\lambda/2\pi}$  a hullámok terjedési sebessége (ahol  $\lambda$  az adott hullám hullámhossza). Ez utóbbi esetben tehát a nagyobb hullámhosszú hullámok gyorsabbak.

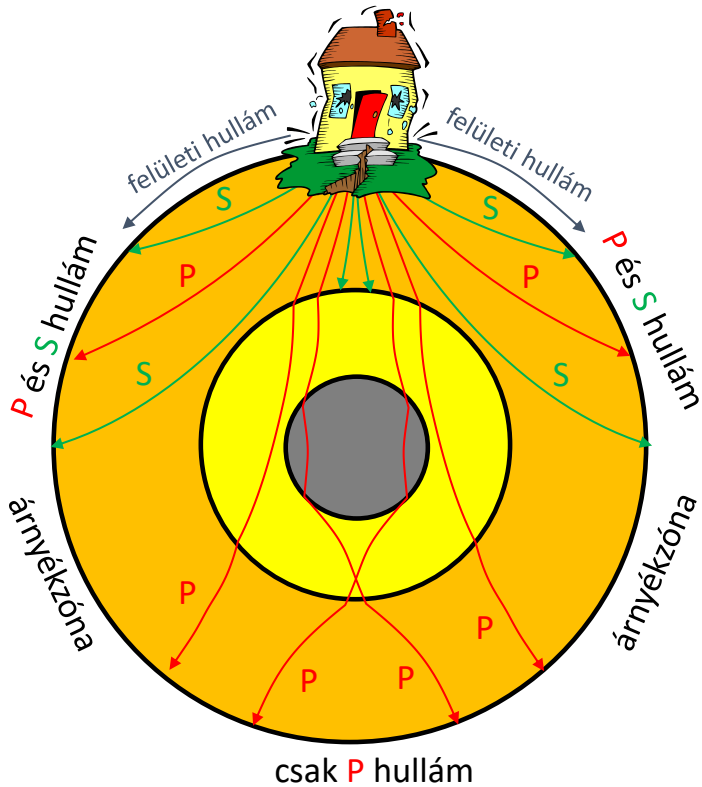
### 3.4.2. A hang fizikájának alapjai

Az emberi füllel észlelhető mechanikai hullámokat **hangnak** hívjuk. Többnyire gázban terjedő longitudinális hullámot jelent a hang, amelynek frekvenciatartománya nagyjából 20 Hz és 20 kHz között van. A hang frekvenciáját a hang magasságaként és mélységeként érzékeljük: az alacsony frekvenciájú hangot mélynek, a nagy frekvenciájú hangot magasnak érzékeljük. Az érzékelés felső és alsó határa az egyéntől és a kortól is függ – a nagyon magas hangokat csak a legfiatalabbak hallják.

Vizsgáljuk most meg, hogy mikroszkopikusan nézve hogyan terjed a hang a levegőben. Egy adott  $t$  időpillanatban az  $x$  helyen lévő molekulák kitérése  $f(x, t) = f_0 \sin(kx - \omega t)$  módon írható le, ha egyszerű (jobbra haladó) szinuszhullámot tekintünk. Ekkor egy  $\Delta x$  vastagságú,  $A$  keresztmetszetű rétegre a Newton-törvény alapján

$$F = ma = \rho V a = \rho A \Delta x a = \rho A \Delta x \ddot{f}(x, t) \quad (3.59)$$

erőnek kell hatnia. Ez az erő a két oldali közötti nyomáskülönbségből származik, mértéke  $F = A\Delta p$ . A kétféle módon kifejezett erő egyenlőségét feltéve az alábbi levezetést



3.24. ábra. A különféle hullámtípusok (S/transzverzális, P/longitudinális, felületi) terjedése a Föld különböző rétegeiben. Ha ezen hullámok beérkezését több helyen vizsgáljuk, akkor azzal a földrengés helyét, idejét és erősségét is meghatározhatjuk. Még több helyen végzett vizsgálattal pedig a Föld szerkezetéről nyerhetünk információt. Érdeemes észrevenni, hogy a rengéssel átellenes területre csak longitudinális hullámok érkezik be, ez a folyékony belső szerkezetről árulkodik. Az oldalt megjelenő árnyékközona pedig a hullámtörésen keresztül a sűrűségi viszonyokba enged betekintést.

tehetjük meg:

$$A\Delta p = \rho A\Delta x\ddot{f} \quad (3.60)$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \rho\ddot{f} \quad (3.61)$$

$$p'(x, t) = \rho\ddot{f}(x, t), \quad (3.62)$$

azaz  $f(x, t) = f_0 \sin(kx - \omega t)$  módon felírt szinuszhullám alakú kitérés esetén

$$p'(x, t) = -\rho f_0 \omega^2 \sin(kx - \omega t), \text{ azaz} \quad (3.63)$$

$$p(x, t) = p_0 + \rho f_0 \omega c \cos(kx - \omega t) \quad (3.64)$$

adódik, ahol  $p_0$  a környezeti nyomás, ehhez képest ingadozik a levegő nyomása az adott  $x$  pontban. A hang tehát a nyomás  $p(x, t)$  szerinti hullámozgásának is tekinthető, és a **nyomáshullám amplitúdója**  $p_A = \rho f_0 \omega c$  módon függ össze a kitérés  $f_0$  amplitúdójával. A hanghullám amplitúdóját az ember a hang erősségeként, avagy hangosságaként érzékeli: minél nagyobb a fent definiált  $p_A$  nyomásamplitúdó, annál hangosabbnak halljuk a hangot. Az emberi érzékelés alsó határa, azaz a legkisebb hallható hang effektív amplitúdója körülbelül  $p_r = 20 \mu\text{Pa}$ , ezt a későbbiekben referenciaként fogjuk használni. Említsük meg, hogy miután a légköri nyomás 1 atmoszféra avagy 100 kPa, ezért ennél nagyobb nyomásamplitúdójú, torzítatlan hanghullámok nem lehetségesek (hiszen ekkor a szinuszhullám negatív pólusán a nyomás már negatív lenne). Ez természetesen csak a földi légkörre vonatkozik, más bolygók légkörében, vagy az óceán mélyén ennél nagyobb nyomásamplitúdó is lehetséges.

Definiáljuk még a hang ***I* intenzitását**, azaz az adott felületen időegység alatt átáramló energiát. Mivel a teljesítmény az erő és a sebesség szorzata, ezért ennek felületegységre vetített értéke a nyomás és a sebesség szorzata<sup>17</sup>, azaz a pillanatnyi intenzitás  $I = pv$ . A sebesség viszont a kitérés időbeli deriváltja,  $\dot{f}$ . Ebből tehát  $I(t) = p(t) \cdot \dot{f}(t)$ . A pillanatnyi intenzitás helyett azonban az egy periódusra átlagolt mennyiséget tekintjük intenzitásnak. Egy periódus  $T = 2\pi/\omega$  ideig tart, erre kell átlagolni a fenti kifejezést. Erre a következő eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \dot{f}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T p_A \cos(kx - \omega t) f_0 \omega \cos(kx - \omega t) dt \\ &= \frac{1}{2} f_0 p_A \omega = \frac{p_A^2}{2\rho c}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Az intenzitás tehát a nyomásamplitúdó négyzetével arányos.<sup>18</sup> A legkisebb érzékelhető intenzitás ennek megfelelően nagyjából  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2 = 1 \text{ pW/m}^2$  (1000 Hz frekvenciájú hang esetén). Mindjárt látjuk, hogy az ennél  $10^{12}$ -szer intenzívebb hullámot is még hangként érzékelhetjük, ez mondjuk már az úgynevezett fájdalomküszöb (például nagy rockkoncerten közvetlenül a hangszórók előtt van ekkora intenzitású hang).

<sup>17</sup>Itt csak a nyomásingadozás értéke számít, hiszen a  $p_0$  környezeti nyomás térben állandó, azaz nem gyorsít.

<sup>18</sup>A nyomásváltozás négyzetének átlaga  $p_A^2/2$ , tehát ezt egyfajta effektív nyomásnégyzetnek tekintetjük.

Hang	$d$	$p_A$	$I$
leg halkabb hallható hang (1 kHz-en)	0 dB	20 $\mu$ Pa	1 pW/m <sup>2</sup>
csendes szoba	30 dB	0,6 mPa	1 nW/m <sup>2</sup>
normál beszélgetés 1 méteren	50 dB	6 mPa	0,1 $\mu$ W/m <sup>2</sup>
botmixer közben tartva	70 dB	60 mPa	0,01 mW/m <sup>2</sup>
forgalmas út melletti zaj	90 dB	0,6 Pa	1 mW/m <sup>2</sup>
motoros láncfűrész	100 dB	2 Pa	10 mW/m <sup>2</sup>
Fájdalomköszöb	130 dB	60 Pa	10 W/m <sup>2</sup>
Hanggránát, géppuska	170 dB	6 kPa	100 kW/m <sup>2</sup>
Felső korlát	194 dB	100 kPa	25 MW/m <sup>2</sup>

3.2. táblázat. Néhány jellegzetes hang hangnyomásszintje ( $d$ ), nyomásamplitúdója ( $p_A$ ), illetve intenzitása ( $I$ ).

### 3.4.3. A hang által keltett érzet

Általánosságban igaz, hogy az emberi érzékelés logaritmikus: az érzet általában az azt kiváltó fizikai hatás logaritmusától függ; így több nagyságrenden át változó környezeti paraméterek esetén is érzékelhetjük a hatásokat. A hang esetében definiáljuk a decibelben kifejezett **hangerősséget**, amelynél a  $p_A$  nyomásamplitúdó  $p_r$  minimális (referencia-) amplitúdóhoz viszonyított értékének logaritmusát vesszük:

$$d = 20 \log_{10} \left( \frac{p_A}{p_r} \right). \quad (3.66)$$

Ezt hívjuk hangosságának vagy **hangnyomásszintnek**, és dB (decibel) mértékegységet adunk neki. Általában egy csöndes szobában 30 dB körül van ennek értéke, míg a városi zaj 60-70 dB körül van, ahogy a közepesen hangos beszéd is. A 120 dB körüli hang érzékelése már fájdalommal jár. Mivel, ahogy fent írtuk, az intenzitás a nyomás négyzetével arányos, ezért a fenti formula így is írható<sup>19</sup>:

$$d = 10 \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right). \quad (3.67)$$

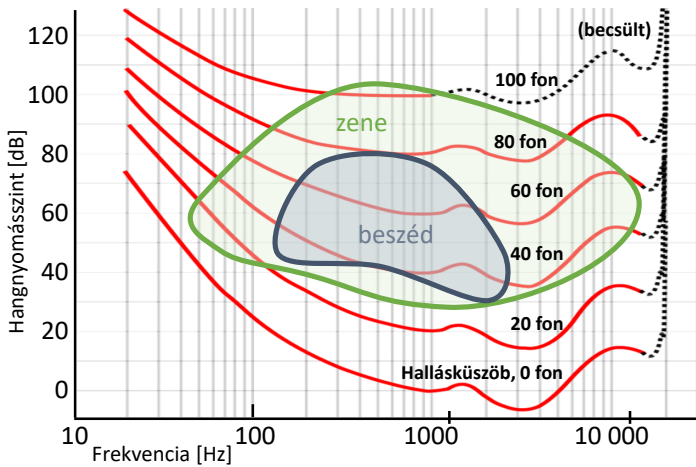
Vizsgáljuk meg a fenti összefüggéseket, először a 3.2. táblázat segítségével, ahol felsorolunk néhány tipikus decibel értéket, és a hozzá tartozó nyomásamplitúdót és intenzitást. Az átváltást magunk is könnyen megtehetjük, ha invertáljuk a fenti formulákat, ebből ugyanis

$$p_A = p_r 10^{\frac{d}{20}} \text{ és } I = I_0 10^{\frac{d}{10}} \quad (3.68)$$

következik, azaz a nyomásamplitúdó és az intenzitás is a 10 hatványainak megfelelően változik  $d$  változásával.

Láthatóan a fizikailag értelmezett mennyiségek sok nagyságrendet felölelnek, míg a hangosság csak tízesével, húszasával változik. Ez a logaritmikus összefüggés lényege: ha

<sup>19</sup>Ez és az előző összefüggés valójában nem feltétlenül egyenértékű. Előbbit hangnyomásszintnek, utóbbit hangintenzitásszintnek hívják az akusztikában, és visszhangmentes térben egyeznek meg tökéletesen.



3.25. ábra. A fon és a decibel értékek összehasonlítása. Mivel a fon a frekvenciafüggő hallásküszöbvel számol, míg a decibel konstans  $I_0$  értékkel, így a kettő csak 1 kHz esetén egyezik meg. Látható, hogy még a beszéd vagy a zene tipikus frekvenciái esetén is igen különböznek a fon és a decibel értékek, és 100 Hz körül már akár 20 egység különbség is lehet a kettő között.

az intenzitás a tízszeresére változik, a hangosság tízzel nő. Ennek még jobb megértése céljából vizsgáljuk meg, hogy milyen hangnyomásszint ( $d$ ) jön létre, ha egy 80 dB-es és egy 70 dB-es hang megszólal egyszerre. Miután  $d_1 = 80$  dB, ehhez  $I_1 = I_0 10^8 = 0,1$  mW/m<sup>2</sup> tartozik, míg  $d_2 = 70$  dB miatt  $I_2 = I_0 10^7 = 0,01$  W/m<sup>2</sup>. Ez összesen  $I = 0,11$  mW/m<sup>2</sup>, amihez  $d = 10 \log I/I_0 = 80,4$  dB érték tartozik. Tehát a 70 dB-es hang csak 0,4 dB-t emel a 80 dB-es hangnyomásszintjén!

Érdeemes még megemlíteni, hogy az emberi hallás érzékenysége frekvenciafüggő: ahogy közelítünk a legkisebb, illetve legnagyobb frekvenciához, az adott fizikai hatás által keltett inger erőssége csökken. Ezt kezelendő használjuk a fon egységet, amely a decibelhez hasonló, csak frekvenciafüggő  $I_0(f)$  küszöbérték szerepel a definíciójában. A konstans fon értékhez tartozó decibel érték ekkor a frekvenciától függ. Ezt mutatja a 3.25. ábra.

Láthatóan a beszéd mind frekvenciában, mint intenzitásban kis tartományt foglal el a hallható hangok térképén. A zene (főleg a klasszikus zene) már lényegesen nagyobb területen jelenik meg. Kiemelten érdekes a 3.25. ábrán, hogy az emberi hallás érzékenységének frekvenciafüggését mutatja: ennek maximuma (azaz a hallásküszöb legalacsonyabb értéke) néhány kHz környékén van, egy azonos intenzitású, 100 Hz frekvenciájú hangot 20-30 dB-lel halkabbnak hallunk a kHz-esnél. Ezt onnan lehet látni, hogy az emberi érzékelést a konstans fon értékhez tartozó piros görbék jelképezik: a valójában 60 dB erősségű hanghoz csak 40 fon tartozik, ha a frekvenciája 100 Hz, de a fon és a decibel értékek 1 kHz frekvencia esetén megegyeznek.

A fentiek környezettudományi fontosságát hangsúlyozandó felhívjuk a figyelmet a zajszennyezés, a zajterhelés és a zajvédelem kérdésére. Magyarországon a zajtól védendő területeken a különféle (ipari, szabadidős) létesítményektől származó zajterhelés esetére nagyvárosi környezetben nappal tipikusan 55 dB a korlát, míg éjszaka 45 dB. Ezt jó



hangszigetelő anyagok alkalmazásával érik el. Egy anyag zajelnyelő képessége fizikailag a viszkozitásától függ, ugyanis a nyíró erők azok, amelyek által a hang elveszti energiáját. Érdekesképpen megemlítjük, hogy a hangintenzitás  $I(x) = I(0)e^{-\alpha x}$  módon csökken a szigetelés  $x$  vastagságától függően, ahol az  $\alpha$  együttható neve hangelnyelési együttható, értéke erősen frekvenciafüggő – magas hangokat a legtöbb anyag könnyebben nyel el. Beton esetén átlagosan 10 1/m körül van (tehát 10 cm beton  $1/e = 0,368$  mértékben, 36,8 %-ára csökkenti a hang intenzitását), poliuretán hab esetén ennek 2-3-szorosa, míg üvegszálás szigetelőanyagok esetén ennek ötszöröse is lehet.

### Kísérlet: hangok összeadódása

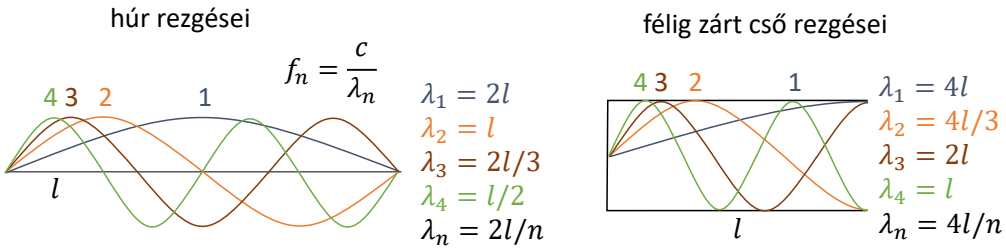
- Keltsünk valamilyen reprodukálható hangot vagy zajt, például mobiltelefonnal, és (alkalmas mérőeszköz segítségével) mérjük meg ennek hangnyomásszintjét.
- Egy másik hangot is mérünk meg külön, majd az előző hanggal egyszerre is.
- Vegyük észre, hogy két azonos hang egyszerre megszólalásakor alig növekszik a hangnyomásszint – elvileg éppen  $10 \cdot \log 2 = 3,01$  mértékben.

#### 3.4.4. A hang forrásai

A hangok forrása különféle testek rezgése, amelyet valamilyen **hangsugárzó test rezonancia révén felerősít**. Tipikusan arról van tehát szó, hogy a hangot egy húr, membrán vagy esetleg hangsál rezgése adja. A Fourier-tételnek megfelelően ez az eredeti rezgés sokféle Fourier-komponenst („felhangot”) tartalmaz. A rezonátor a sajátfrekvenciáihoz közel eső frekvenciájú hangokat felerősíti, ez adja az adott hangképző eszköz, hangszer vagy ember hangszínét. Egy hangszer által megszólaltatott „tisza hang” esetében is vannak felhangok, azaz magasabb frekvenciájú komponensek – ezért tudjuk megkülönböztetni a gitár, hegedű, zongora hangját, vagy különböző emberek hangját akkor is, ha mind ugyanazon frekvenciájú (magasságú) hangot szólaltatnak meg.

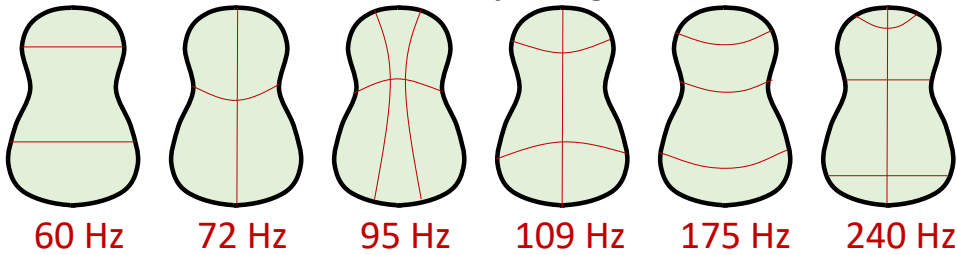
Vizsgáljuk meg, hogy hogyan alakul ki az eredeti hang. A legegyszerűbb eset a húré, amelyet a 3.26. ábra bal oldala mutat. Ezen állóhullámok alakulhatnak ki, amelyek a húr **sajátrezgései**. A lehető legnagyobb hullámhossz akkor jön létre, ha éppen egy fél hullám keletkezik a húron: ekkor  $\lambda = 2l$  és  $f = c/\lambda = c/2l$ . Ennek minden egész számú többszöröse létrejöhethet, ahogy egyre több csomópont jön létre a hullámon. A lehetséges rezgések frekvenciáit  $f_n = nc/2l$  módon sorolhatjuk fel. Ismert, hogy a mindkét végén  $F$  erővel feszített,  $l$  hosszúságú,  $A$  keresztmetszetű,  $m$  tömegű és  $\rho$  sűrűségű húron a transzverzális hullámok sebessége  $c = \sqrt{Fl/m} = \sqrt{F/A\rho}$  (hasonlóan a 3.3.4. szakaszban tárgyaltakhoz). Ebből adódóan az erősebben feszített húron nagyobb a hullámok sebessége, azaz nagyobb a frekvencia is: feszesebb húron magasabb hang szólal meg – ezt mindenki tudja, aki már hangolt húros hangszeret. Az adott húrt megpengetve (kézzel, pengetővel, vonóval, zongorán kalapáccsal) megszólal a fenti  $f_n$  frekvenciasor minden tagja, és a hangszer teste ezeket különböző mértékben erősíti fel. Félig zárt cső (amely fúvós hangszeres esetén fontos) sajátrezgései esetén a hullámhossz a cső négyzerezésének egész számmal osztott verziója, tehát  $\lambda_n = 4l/n$ , és ez alapján az  $f_n = nc/4l$  frekvenciák szólalnak meg. Ezt mutatja a 3.26. ábra jobb oldala.

Membránok sajátrezgései ennél lényegesen bonyolultabbak, ezeket az úgynevezett Chladni-ábrák mutatják: különféle módusok esetén a rezgésnek „csomóvonalai” vannak



3.26. ábra. Húr (balra), illetve félig zárt cső (jobbra) sajátrezgései. A lehetséges hullámhosszak az adott rendszer hossza jelöli ki, a lehetséges frekvenciák ebből az  $f = c/\lambda$  összefüggésnek megfelelően adódnak.

### Membrán sajátrezgései



3.27. ábra. Hangszertest alakú membrán néhány jellegzetes rezgési módusa és a hozzá tartozó a sajátfrekvencia.

– ha homokot szóránk a membránra, az itt gyűlne össze. Minél több csomópontja vagy csomóvonala van az adott sajátrezgésnek, annál nagyobb az adott rezgés frekvenciája.

Ezek a rezgések hozzák létre a dobok hangját, de ilyenek rezonanciája erősíti fel a hegedű vagy a gitár által kiadott hangot is. Az adott alakhoz tartozó sajátrezgéseknek megfelelő sajátfrekvenciák adják az adott hangszer hangszínét – az ennek megfelelő felhangokat erősíti fel a hangszer teste. Egy jellegzetes hangszernek megfelelő alakú membrán sajátrezgései a 3.27. ábrán láthatóak.

#### 3.4.5. Hangsorok, konszonancia és disszonancia

Befejezőként ebben a szakaszban a zene fizikáját (sőt matematikáját) tárgyaljuk röviden. Kérdés, hogy miért hallunk egyes hangokat, hangsorokat kellemesnek, másokat kellemetlennek? Érdekes, hogy ez nem tanult képesség, hiszen a madarak éneke bizonyos szempontból igen hasonló a klasszikus zenében megjelenő hangsorokhoz. Ennek részletes fiziológiája máig kutatott terület. Helmholtz szerint a két hang átmeneteket hallgató lebegések miatt lesz két hang disszonáns, de más magyarázatok is vannak (például Stumpf: összeolvadási érzet). Ha az okokat nem is tudjuk pontosan, de tény, hogy azon hangok egymásutánja hangzik kellemesnek, **konszonánsnak**, amelyek frekvenciáinak aránya **kis egész számok hányadosának** felel meg. Tehát hangok egymás után (vagy egyszerre) hangzásánál a  $f_1/f_2$  **hangköz** határozza meg a konszonanciát.

Az abszolút konsonancia a 2:1 hangköz (ezt oktávnak nevezzük), míg egyéb kis egész számok esetén teljes konsonanciáról beszélünk. Ezek közül a 3:2 a kvint, 4:3 a kvart, 5:4 a nagy terc és 6:5 a kis terc.

Ennek fizikai és matematikai részleteit nem ismerve dalolnak a madarak és építettek igen kiváló hangszereket már a középkorban is. Ezen hangszereken bizonyos konkrét hangközöket volt lehetőség lejátszani: például egy csembalón vagy zongorán a fixen beépített húrok sajátfrekvenciái szólalhatnak meg. Ennek megfelelően a zenét is úgy írták, hogy az adott hangszeren annak hangjai megszólaltathatóak legyenek. A lehetséges hangok korlátos listája miatt **hangsorokat** definiáltak, amelyeknél szomszédos hangok között a hangközök lehetséges értékei  $9/8$  (nagy egész hang),  $10/9$  (kis egész hang) vagy  $16/15$  (nagy félhang) voltak. A két klasszikus skála a **dúr** és a **moll**. Mindkettőben az egymást követő hangok között egész hangközök vannak, de a dúr skála esetén a harmadik és a hetedik hangköz félhang, míg moll skála esetén a második és az ötödik az. A dúr hangsor így néz ki (a hangközöket egy sorral lejjebb, a hangok között feltüntetve):

$$1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{15}{8} \quad 2$$

$$\frac{9}{8} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{16}{15}$$

Ezzel szemben a moll hangsor hangjai és hangközei ezek:

$$1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{9}{5} \quad 2$$

$$\frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{10}{9}$$

Arra kísérletet sem teszünk, hogy megértsük, miért van más hangulata a moll és a dúr skálára írt zenéknek, ehelyett a hangsorok matematikai részleteire koncentrálunk. Mindkét hangsor első és utolsó hangja között egy oktáv van, tehát ezután ismét folytatódhat a hangsor – sőt bármely hangjáról kezdődhet, ezért c-moll, f-dúr és hasonló hangnemeket említene a zenében. A moll hangsor harmadik hangközétől indulva visszakapjuk a dúr sorrendet, vagy a dúr skála hatodik hangközétől a mollt (lásd párhuzamos moll), néhány apró eltéréssel: kis egész hang helyett egyes pontokon nagy egész hang van, és viszont; míg az azonos hangok között a különbség egy kis félhang,  $25/24$  (lásd az „isz” és „esz” végződést). Az így „eltolt” moll skála és a dúr skála azonos hangjai ezért majdnem tökéletesen azonosak. Ugyanakkor tökéletes hangzást kívánva egy adott hangszert vagy a moll, vagy a dúr skálára kellett hangolni, ráadásul annak is adott hangról induló verziójára.

Felmerült az igény, hogy ugyanaz a zenemű tetszőleges hangról kiindulva legyen lejátszható olyan hangszeren is, ahol nem a zenész határozza meg a hangok magasságát (azaz ahol a hangszer nem a zenész által hangolható). Ha a két fenti skálát összerakjuk, a minimum kis félhang hangközű hangokat különbözőnek elfogadva, 21 hangot kapunk. Ez is túl bő, egy oktávon belül ennyi billentyű egy zongorára sok. A kínálókozó egyszerűsítés az, hogy legyen 12 egyenlő hangköz (a dúr és a moll 2-2 félhangját felvéve a nyolc egész hang közé), azaz a hangsor  $1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{12}$  hangokból álljon (azaz az egész hang  $\delta$ , a félhang  $\delta^2$  aránynak felel meg). Miután a végén el kell érni az egy oktávot, ezért  $2 = \delta^{12}$ , amiből  $\delta = \sqrt[12]{2} = 1,0595$  adódik. Az így kialakított skálát hívják **temperált skálának**. Ebben például a kvint  $1,0595^5 = 1,4983$  értéket kap  $3/2 = 1,5$  helyett.

Érdeemes még megemlíteni, hogy a fenti hangsorok akkor jelentenek konkrét frekvenciát, ha rögzítünk egy fix pontot is. Ez a hangoláshoz használt alaphang, amely az ötödik (az ‘a’) hang, 1939 óta 440 Hz frekvenciájú (azelőtt 435 Hz volt). Eszerint az

egyvonalas  $c$ , azaz  $c_1$  261,63 Hz (mivel 9 hangközzel arrébb van), fizikai hangolásban viszont ugyanez 256 Hz (mert ez egész szám, ráadásul a kettő egész hatványa).

### 3.5. Ellenőrző kérdések

1. Mi a különbség merev és rugalmas test között?
2. Mi az a Young-modulus?
3. Mi a rugalmas testre ható feszültség definíciója?
4. Mi a rugalmas test deformációjának definíciója?
5. Mi a kapcsolat egy rugalmas testre ható feszültség és az ennek hatására fellépő deformáció között?
6. Mi a sűrűség definíciója? Mondj néhány konkrét értéket is!
7. Mi a nyomás definíciója?
8. Mitől és hogyan függ a hidrosztatikai nyomás (folyadék- vagy gázoszlop gravitációs nyomása)?
9. Mekkora nyomás uralkodik egy 25 méter mély medence alján?
10. Mit mond ki Pascal törvénye (a nyomás terjedéséről edényekben)?
11. Hogy működik a hidraulikus emelő?
12. Mi a felhajtóerő?
13. Mekkora erő hat adott térfogatú és sűrűségű közegbe mártott testre?
14. Mekkora felhajtóerő hat egy 10 cm-es labdára, ha 1 méterrel a vízfelszín alatt van?
15. Mi a felszínen úszás feltétele Arkhimédész törvénye alapján?
16. Mitől függ, hogy egy úszó test hányad része „lóg ki” a vízből?
17. Mit tudsz a felületi feszültségről, mi ennek az oka?
18. Milyen hétköznapi következményei vannak a felületi feszültség jelenségének?
19. Mi a különbség lamináris és turbulens áramlás között?
20. Mi a kontinuitás törvénye?
21. Mit mond ki Bernoulli törvénye (áramló folyadék nyomásáról)?
22. Miért marad fenn a repülő a levegőben?
23. Mi hajtja előre a vitorlást oldalszél vagy részleges szembeszél esetén?

24. Mekkora erő hat egy  $10 \text{ m}^2$  felületű szárnyra, ha az alján  $100$ , a tetején  $110 \text{ m/s}$  sebességgel áramlik az  $1 \text{ kg/m}^3$  sűrűségű levegő?
25. Mi a viszkozitás definíciója? Képletesen mit jelent a viszkozitás?
26. Mitől és hogyan függ a csövön átáramló közeg mennyisége lamináris áramlás esetén (Poiseuille-törvény)?
27. Mitől és hogyan függ az  $R$  sugarú golyóra ható közegellenállási erő lamináris áramlás esetén (Stokes-törvény)?
28. Mi a Reynolds-szám, mit jellemez, milyen kritikus értéke ismert?
29. Mik a nem newtoni folyadékok, hogyan viselkednek?
30. Mi a hullámterjedés alapgondolata?
31. Milyen  $f(x, t)$  függvény ír le egy  $c$  sebességgel terjedő hullámot?
32. Mit jelent a hullámhossz, illetve a periódusidő?
33. Mi a hullámszám ( $k$ ) jelentése?
34. Mi a kapcsolat frekvencia, terjedési sebesség, hullámhossz, periódusidő és hullámszám között?
35. Mit jelent a térbeli hullámszámvektor?
36. Mit mond ki a Fourier-tétel?
37. Mi a Fourier-tétel jelentősége?
38. Miért használunk általában szinusz/koszinusz függvényeket hullámok leírására?
39. Hogy néz ki a hullámegyenlet, és mi az általános megoldása?
40. Milyen egyszerű rendszerre vezethető le könnyen a hullámegyenlet?
41. Mi a Doppler-jelenség?
42. Hogyan változik mozgó hullámforrás vagy mozgó megfigyelő esetén az észlelt frekvencia?
43. Mi a Huygens–Fresnel-elv?
44. Miért „kanyarodik be” a hanghullám az ajtón?
45. Rajzolj szemléletes ábrát a hullámok elhajlásának magyarázatára!
46. Mi az interferencia jelensége?
47. Mondj példát mechanikai hullámokra!
48. Mit tudsz a mechanikai hullámok gázokban mutatott terjedési sebességéről?
49. Mit tudsz a mechanikai hullámok szilárd testekben mutatott terjedési sebességéről?

50. Mit tudsz a mechanikai hullámok folyadékokban mutatott terjedési sebességéről?
51. Mi a különbség longitudinális és transzverzális hullám között?
52. Milyen közegben terjedhet longitudinális, illetve transzverzális hullám?
53. Milyen felületi hullámokat ismersz?
54. Hogyan segítenek a földrengések a Föld szerkezetének feltárásában?
55. Mi a kapcsolat a levegő nyomásingadozása és a levegőrészecskék mozgása között?
56. Mi a hang nyomásamplitúdója?
57. Mi az a hangnyomásszint, mi a decibel definíciója?
58. Mondj példát tipikus decibel értékekre!
59. Mekkora az intenzitásbeli különbség egy 60 és egy 70 dB erősségű hang között?
60. Ha két 60 dB hangosságú hang szól egyszerre, akkor hány dB hangerősséget érzelünk?
61. Mi a rezonancia szerepe a hangképzésben?
62. Mit jelent egy ember vagy egy hangszer hangszíne?
63. Mit jelent két hang hangköze?
64. Milyen fizikai paraméter adja meg a hang hangosságát, illetve magasságát?
65. Milyen hangsorokat ismersz? Mi köztük a különbség fizikailag?
66. Mi a temperált skála?

4. fejezet

# Hőtan és termodinamika

## 4.1. A hőtan alapjai

A hőmérséklet, a hő és a hőenergia jelentőségét nem lehet túlbecsülni, ha környezetünk jelenségeit szeretnénk megérteni. Jelen fejezetben a hőtan egyszerű fogalmaival és törvényeivel foglalkozunk, hogy aztán a bonyolultabb jelenségeket is megérthessük.

### Kísérlet: jég olvadása sós vízben

- Vegyünk két poharat, 3-3 dl vízzel és azonos mennyiségű jéggel. Az egyik pohárban lévő víz legyen sós.
- Utak szózása alapján azt várjuk, hogy a só „segíti” az olvadást.
- Eredmény: a sós vízben lévő jég sokkal tovább megmarad.
- Megfigyelés: a pohár hideg részeire kicsapódik a levegőben lévő víz.

### 4.1.1. A hőmérséklet mértékegységei és mérése

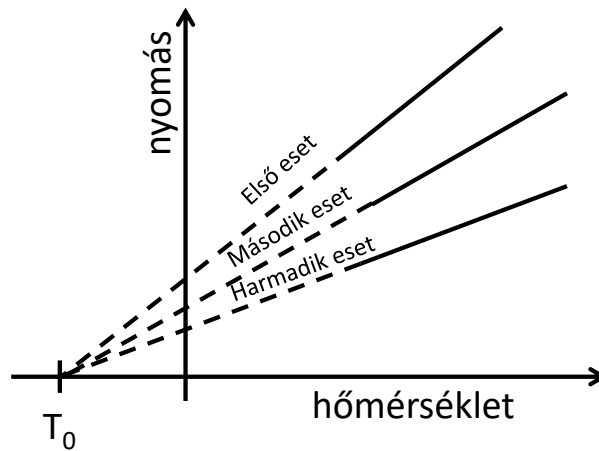
Az emberi hőérzet fogalmának kvantitatív kifejezésére született a **hőmérséklet** fogalma. A hétköznapi életben legtöbbször használt mértékegység a Celsius-fok, amelyet a víz olvadáspontjához ( $0\text{ }^\circ\text{C}$ ) és a forráspontjához ( $100\text{ }^\circ\text{C}$ ) kötve definiálták. Az angolszász világban ehelyett a Fahrenheit-skálát használják, amely gyakorlatias hőmérsékletekhez kötődik ( $0\text{ }^\circ\text{F}$ : hideg téli nap,  $100\text{ }^\circ\text{F}$ : meleg nyári nap). A kettőt a  $T_F = 9T_C/5 + 32$  egyenlet köti össze, ahol  $T_F$  a Fahrenheit-fokban kifejezett hőmérséklet számértéke,  $T_C$  pedig a Celsius-skálán. (Tehát például  $0\text{ }^\circ\text{C} = 32\text{ }^\circ\text{F}$ ,  $100\text{ }^\circ\text{C} = 212\text{ }^\circ\text{F}$ .)

Azért lehetséges a hőmérsékletet fizikai mennyiségként definiálni, mert mérhető, azaz értékei reprodukálhatóak. Ezt különféle eszközökkel lehet megtenni, amelyeket előzetesen kalibrálunk (azaz valahonnan ismert hőmérsékletek melletti állásukat feljegyezzük). Ezen eszközök működésének alapja lehet például a gázok vagy folyadékok hőtágulása (ugyanis térfogatuk változik a hőmérséklettel), esetleg fémek elektromos ellenállásának változása, illetve az úgynevezett hősugárzás vizsgálata is. Ezekről később valamivel bővebben olvashatunk. A hőmérsékletet mindenesetre egyelőre nem úgy definiáltuk tehát, hogy megadtuk a jelentését, hanem a mérésének módján keresztül. Hogy mit jelent a hőmérséklet, mire vezethető vissza, ezt majd a kinetikus gázelmélet tárgyalása során érthetjük meg először. A hőmérséklet tehát „az, amit a hőmérő mér”.

A hőmérsékleti skálán lefelé haladva tehetünk egy fontos megfigyelést: állandó térfogatú gáz nyomása lineárisan függ a hőmérséklettől, azaz adott hőmérséklet-csökkenéshez mindig adott nyomáscsökkenés tartozik.<sup>1</sup> Ha ez a viselkedés nem szakad meg, akkor egy bizonyos hőmérsékletnél nulla alá csökkenne a nyomás, ami viszont értelmetlen. Kiderül továbbá az is, hogy ez a bizonyos hőmérséklet a gáz anyagi minőségétől és térfogatától is független, ahogy a 4.1. ábra is mutatja.

<sup>1</sup>Egy megjegyzés helyénvaló ide: ezen állítás értelmezhetősége azon múlik, hogy tudjuk, mit jelent a – még alig definiált – hőmérsékleti skálán az „egyenletes”. (Hogyan, mivel „osztjuk be” például  $0\text{ }^\circ\text{C}$  és  $100\text{ }^\circ\text{C}$  között a skálát egyenletesen?) Ha a hőmérséklet mérőszámú a folyadékok (például higany) hőtágulásának vizuális megfigyelésével kapott értéket választjuk (azaz: azt, amit a higanyos hőmérő „mutat”), akkor azt mondhatjuk, hogy „tisztá szerencse”, hogy a (mai tudásunkkal már jobban értett) hőmérséklettől a hőtágulás *tényleg* lineárisan függ. Így valóban egyből „a helyes” hőmérsékleti skálát definiálja a hőmérőnk, így értelmes lesz ez az állítás is a gázok nyomásáról.





4.1. ábra. Gázok nyomásának hőmérsékletfüggése. Ha a mérési adatokat képzeletben folytatjuk egyre kisebb hőmérsékletek felé (akármilyen skálán), akkor mindig ugyanannál a hőmérsékletnél lenne nulla a nyomás. A valóságban sok gáz még ez előtt folyékony vagy szilárd halmazállapotot öltene, ennek ellenére az ábrán mutatott jelenség lehetőséget biztosít számunkra, hogy az abszolút nulla hőmérsékletet definiáljuk. Az ezen a skálán vett hőmérséklettel már arányos lesz a gázok nyomása, abszolút értelemben is, ezért ezt abszolút hőmérsékleti skálának nevezhetjük.

Ez lehetőséget ad az **abszolút nulla hőmérséklet** bevezetésére, amely Celsiusban  $-273,15$  fok értéket vesz fel. Ennek segítségével bevezethető a Kelvin-skála:  $T_K = T_C + 273,15$ , ebben  $0\text{ K}$  az abszolút nulla fok, ahol minden gáz nyomása nullára csökken. A fizikai törvények többségében a Kelvin-skálát használjuk majd. Ezen kifejezve megadunk néhány karakterisztikus hőmérsékleti értéket:

- $2,7\text{ K}$  a ritka világűrben a kozmikus (mikrohullámú, elektromágneses) háttérsugárzás hőmérséklete,
- $4,2\text{ K}$  a hélium forráspontja (normál légköri nyomáson, ahogy a továbbiak is),
- $77\text{ K}$  a nitrogén ( $\text{N}_2$ ) forráspontja,
- $273\text{ K}$  a víz olvadáspontja,
- $373\text{ K}$  a víz forráspontja,
- $600\text{ K}$  az ólom olvadáspontja,
- $5700\text{ K}$  a Nap felszíne,
- $\simeq 10^7\text{ K}$  a Nap központi hőmérséklete
- és  $10^{12}\text{ K}$  a nagyenergiás atommag-ütközésekben létrehozott hőmérséklet, ahol az atommag építőkövei, a protonok és a neutronok is „megolvadnak”.

### 4.1.2. Hőmennyiség, fajhő

Most, hogy már ismerjük a hőmérséklet mérésének módját, feltehetjük a kérdést, hogy **mi okozza a hőmérséklet-változást**. Ma már tudjuk: hőcserekor (azaz ha például egy melegebb test hővezetéssel hőt ad át egy hidegebbnek, azaz a melegebb test lehűl, a hidegebb pedig felmelegszik) tulajdonképpen **energiacsere** történik. Az átadott hőmennyiség (jele többnyire  $Q$ ) tehát tulajdonképpen energia (így is hívjuk: hőenergia). A hőmennyiséget tehát lehet energia-mértékegységgel mérni (például a joule-lal, J), de vannak „klasszikus” mértékegységei is (még azokból az időkből, amikor nem volt egészen világos, hogy a hő is tényleg energia). Ilyen például a kalória: 1 cal (kalória) az a hő, amely egy gramm vizet egy fokkal melegít fel. Tudva, hogy ez az energia egy formája, joule-ban is megadhatjuk: 1 cal = 4,186 J. Látni fogjuk később, hogy a hőenergia tulajdonképpen az anyagot alkotó részecskék mikroszkopikus (nagy skálán nem látható) összevissza mozgásainak (átlagos) energiáját jelenti.

Összességében megállapíthatjuk azt is, hogy egy adott közeg hőmérsékletének megváltoztatásához szükséges energia (hő arányos a hőmérséklet-változással és az adott közeg tömegével:  $Q \propto m \cdot \Delta T$ ). Az arányossági tényező a **fajhő**,  $c$ , mértékegysége J/(kg K). A  $\Delta T$  hőmérséklet-változáshoz szükséges energia (hő) tehát

$$Q = cm\Delta T. \quad (4.1)$$

A víz fajhője  $c = 4186$  J/(kg K), azaz például 1 liter víz 20 fokról történő felforralásához (a 100 fok eléréséhez)  $80 \cdot 4186$  J = 335 kJ hőre van szükség. Ha figyelembe vesszük, hogy 1 kWh = 3,6 MJ elektromos energia körülbelül 50 forintba kerül, akkor láthatjuk, hogy ez a folyamat elektromosságot használva minimum 5 forintba kerül (természetesen ha a melegítésre használt energia egy része elvész, ahogy az ténylegesen mindig be is következik, akkor több energiára van szükség). A víz fajhője a legnagyobbak közé tartozik, a hidrogén, hélium, ammónia, lítium fajhőjével egyetemben. Igen alacsony fajhőjű anyagok (amelyek egy kg tömegű mennyisége kevés hő hatására is sokat melegszik) az ólom, az arany, a higany és általában a nehézfémek – fajhőjük a vízének kevesebb mint harmincada. A levegő fajhője körülbelül 1000 J/(kg K), azaz 1 kg levegő egy fokkal való felmelegítéséhez körülbelül 1 kJ energiára van szükség. Ugyanakkor vegyünk észre, hogy 1 kg levegő „igen sok”: egy köbmétert tölts be, azaz egy tipikus szobában összesen 20 kg levegő van. Ez azt is jelenti például, hogy ha a szoba levegője 20 fokos, és elhelyezünk benne tíz liter 50 fokos vizet, akkor ez (egyéb – például a falakon át történő – hőcsere hiányában) 40 fokra való lehűlése során a szoba levegőjét is 40 fokra melegíti (hiszen a hő kicserélődése miatt  $c_1 m_1 \Delta T_1 = c_2 m_2 \Delta T_2$ ). Ugyanezért nehéz nyáron egy szellőztetéssel lehűteni a lakást – ugyan a szoba levegőjét kicserélhetjük 10-20 fokkal hidegebbre is, de a falakban, berendezési tárgyakban tárolt hőenergia ezt gyorsan „semlegesíti”, érdemleges lehűlés nélkül (számoljuk ki, hogy 1000 kg beton egy fokkal való lehűlésekor mennyi hőenergia adódik le, és ez hány köbméter levegő 10 fokkal való felmelegedésének felelne meg).

Miután a melegítéshez szükséges hő a tömeggel arányos, ezért tulajdonképpen az  $n = m/M$  anyagmennyiséggel is arányos  $Q$ , hiszen  $Q = cm\Delta T = cnM\Delta T$ . Ez átírható úgy, hogy

$$Q = Cn\Delta T, \quad (4.2)$$

ahol  $C = cM$  a mólhő, amelynek mértékegysége  $J/(\text{mol K})$ . Az egyatomos, illetve a kétatomos gázok mólhője tipikusan körülbelül 12,5, illetve 20,8 $J/(\text{mol K})$  (állandó térfogaton; melegítés közben ilyenkor, mint fentebb említettük, egyenletesen nő a nyomásuk), szilárd anyagoknak többnyire 25  $J/(\text{mol K})$  körül van.<sup>2</sup> Ezek indoklását az általános gáztörvény alapján látjuk majd. A mólhő általánosságban is inkább az anyag szerkezetétől, mint a konkrét elemtől/molekulától függ. Érdekes felfedezni, hogy míg a fajhőben az egyes elemek és egyszerű molekulák között 50-szeres arány is tapasztalható, addig a mólhő esetében alig kétszeres arányokat látunk. Ez a  $c = C/M$  összefüggéssel együtt részben magyarázza az előző bekezdés végén említetteket: a víz fajhője azért (is) magas, mert a móltömege alacsony. Ugyanígy, a higany móltömege magas, ezért a fajhője alacsony.

### 4.1.3. Fázisok, fázisátmenetek

Ahogy azt a mindennapokban tapasztaljuk, az anyagok **különbféle halmazállapotban** vesznek minket körül: vannak **gázok, folyadékok és szilárd anyagok**. Azonban az egyes anyagok halmazállapota nem rögzített: gázból folyadék lehet, folyadékból szilárd közeg sötébbi. Ezek az átalakulások valamikor hőenergia-befektetéssel együtt történnek, méghozzá adott nyomás esetén (többnyire) adott hőmérsékleten.

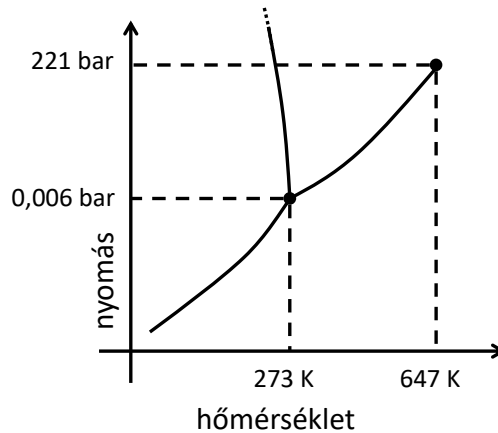
Az átalakuláshoz szükséges hőmennyiséget **látens hőnek** nevezzük (a „rejtett” jelentésű latin szóból), külön szoktunk beszélni **forráshőről, olvadáshőről**. A látens hő jele tipikusan  $L$ , és úgy definiálhatjuk, hogy  $m$  tömegű anyag halmazállapotának adott módon történő megváltoztatásához

$$Q = Lm \tag{4.3}$$

hőenergiára van szükség. Maga az átalakulás tipikusan fix hőmérsékleten történik, tehát csak akkor melegszik/hűl tovább az adott közeg, ha teljesen átalakult az új halmazállapotba. Ezért főzni (normál légköri nyomás esetén) csak 100 Celsius-fokon lehet, akármilyen álláson van a főzőlap: amíg az összes víz el nem forrt, nem történik további felmelegedés. És ugyanezért tartanak állandó alacsony hőmérsékleten egyes berendezéseket folyékony nitrogénnel: ennek hőmérséklete egészen addig nem megy 77 K fölé, amíg van folyékony komponense.

A látens hőre fontos példa, hogy a víz normál olvadáshője 333 kJ/kg, forráshője pedig 2257 kJ/kg. Előbbi azt jelenti, hogy 1 kg jég megolvasztásához 333 kJ hőre van szükség; ezt 10 liter víz nyolc fokkal való lehűlése tudja fedezni – ezért a jég igen alkalmas hűtésre. A forráshő mértéke pedig például azt jelenti, hogy 1 liter víz elforrálásához közel hétszer annyi hőre van szükség, mint 20 fokról 100 fokra való felmelegítéséhez (335 kJ, lásd a fajhőről szóló bekezdést). Érdekes továbbá látni, hogy a jégkocka azért kiválóan alkalmas italok lehűtésére, mert a halmazállapotának átalakításához sok hőre van szükség – amit a lehűteni kívánt ital biztosít, lehűlése által. Ha kávé/teát szeretnénk melegen tartani, ahhoz például 50 fokon olvadó anyagból álló „jégkockákra” lenne szükség: ha ezt olvadt állapotban (zárt téglényben) helyezük az italba, akkor hűlése és fagyása során rengeteg hőenergiát adhat át annak. Erre szolgáló tárgyakat gyártanak is, lásd például a „Coffee Julies” márkanévet.

<sup>2</sup>Szilárd testeknél és folyadékoknál majdnem mindegy, hogy állandó nyomáson vagy állandó térfogaton vett fajhőről beszélünk.



4.2. ábra. A víz fázisdiagramja. Látható, hogy normál légköri nyomáson a hőmérsékletet nulláról növelve először szilárd, majd folyékony, végül gáz fázis jön létre (jég-víz-vízgőz). A hármaspont alatti nyomáson közvetlenül a szilárd fázisból jön létre a gáz fázis, azaz folyékony halmazállapot ilyen alacsony nyomáson nem képzelhető el. A kritikus pont felett pedig a folyadék-gáz átmenet változik meg, folytonos jellegű lesz. További fontos megfigyelés, hogy a forrás hőmérséklete a nyomással nő, míg a fagyásé (nagyon kicsit) csökken.

Ahogy láttuk, a különféle anyagok adott hőmérséklet és nyomás esetén egy bizonyos halmazállapotban, avagy fázisban vannak. Az egyes halmazállapotokat egy hőmérséklet-nyomás diagramon fázishatárok választják el; ezeket ábrázolja a **fázisdiagram**. Ez víz esetén a 4.2. ábrán látható módon néz ki.

Ezen több érdekességet is felfedezhetünk:

- Az olvadásponthoz (azaz a folyékony és a szilárd fázis határához) tartozó hőmérséklet a nyomás növelésével csökken (ez csak víz esetén igaz!): ezért olvad meg a curlingkő alatt a jég (megkönnyítve annak csúszását), illetve a hótakaró alján ezért olvadhat meg a hó, visszafagyása esetén jégréteget alkotva.
- A forrásponti hőmérséklet a nyomás növelésével nő: ezért kuktában 110–120 °C hőmérsékleten forr fel a víz, amitől könnyebb/gyorsabb lesz a főzés (hiszen a biológiai makromolekulák átalakulása a magasabb hőmérsékleten gyorsabban következik be). Ugyanezért nehéz nagy tengerszint feletti magasságon főzni: itt a víz a kisebb légköri nyomás miatt már akár 80–90 fokon is felforr, ilyen alacsony hőmérsékleten pedig lassan következnek be a főzést jelentő szerkezeti átalakulások. Megemlíthető, hogy a víz forráspontja a sózástól is emelkedik, bár igen csekély mértékben.
- A három fázis találkozik egy úgynevezett hármaspontban: ehhez 273 K és 6 mbar tartozik. Ennek nyomása alatt semmilyen hőmérsékleten nincs folyékony fázisú víz, itt a szilárdból közvetlenül a gáz fázisba megy át a jég hóátadás esetén. Ugyanez a helyzet normál légköri nyomáson a szén-dioxiddal (ennek hármaspontja körülbelül 5 atmoszféra körül van): a szárazjég nem olvad, hanem szublimál (és a hideg gázban lecsapódó pára füstszerű jelenséget hoz létre, így működnek a „füstgépek”).

- „Igazi” fázisátalakulás (folytonos vonallal jelezve) csak az úgynevezett „kritikus pontig” lehetséges: ennek koordinátái a víz esetében 647 K és 221 bar. Az ehhez tartozó nyomás felett csak egyfajta „folytonos” átmenet van, hasonlóan a vaj olvadásához: az átalakulás nem fix hőmérsékleten következik be, és látens hő sincs.

Ilyen fázisdiagramja persze nemcsak a víznek, hanem bármilyen más anyagnak is lehet, fent említettük például a szén-dioxid esetét. Az atommag anyagának is van fázisdiagramja, azaz az atommagok anyaga is megolvadhat, ezt nagyenergiás részecskegyorsítóknál kutatják. Itt említhetjük meg továbbá, hogy a sós víz fázisdiagramja egy kicsit különbözik a tiszta víztől. Például a sós víz olvadáspontja alacsonyabb, mint a tiszta vízé. Így előbbi már akár -10 vagy -20 fokon is megolvadhat (utóbbi a maximális, 20% (mm) feletti koncentráció esetén érvényes).

#### 4.1.4. A vízgőz, páraképződés

Fontos látni, hogy vízgőz normál légköri nyomáson sem csak 373 K felett lehetséges, a szobahőmérsékletű levegőben is van valamennyi gáz halmazállapotú víz, ugyanis a molekulák hőmozgásuk révén átkerülhetnek a gáz fázisba. Egy adott térfogatban (adott nyomáson és hőmérsékleten) van egy maximális lehetséges vízmennyiség, ami gőz formában jelen lehet, ez a telítési mennyiség (amely nem függ a jelen lévő levegő mennyiségétől, sőt vákuumban is ugyanezek a jelenségek játszódnak le). Ezt a maximális mennyiséget valójában **egyensúlyi gőzkoncentrációnak** lehetne hívni, ugyanis ennél kisebb koncentráció esetén több molekula „párolog el”, mint ahány lecsapódik, míg e felett a lecsapódás dominál. Az egyensúlyi koncentráció felett tehát azt is mondhatjuk, hogy **a fölösleges vízmennyiség kicsapódik** – de csak ha van valami felület, ahol ez megtörténhet, egyébként akár a „maximális” vízmennyiség háromszorosa is jelen lehet az adott térfogatban. (Normál levegőben mindig van valamennyi por, ami kicsapódásra alkalmas felületet képez.) Ez az említett maximális vízmennyiség, avagy egyensúlyi gőzkoncentráció (légköri nyomású levegőben) 100 Celsius-fokon  $580 \text{ g/m}^3$ , 30 Celsius-fokon  $30 \text{ g/m}^3$ , míg 0 fokon csak  $5 \text{ g/m}^3$ . Az ehhez képesti értéket szokás relatív páratartalomnak nevezni.

Ezzel sok hétköznapi jelenség kapcsolatos. Ha például lehűl a levegő, az abszolút páratartalma megmarad, de a maximális lehetséges páratartalom lecsökken, ahogy a fenti számok mutatják. Emiatt a relatív páratartalom 100% felé kerül, és így a „maradék” vízgőznek ki kell csapódnia valamilyen felületre (ha van), akár porszemcsékre. Ezért keletkezik a télen kinyitott ablakon pára (a benti meleg levegő találkozik az ablak külső, hideg felületével, és emiatt lehűl), az edény tetején lecsapódó gőz (a forró levegő találkozik a valamivel hidegebb fedővel), emiatt „gőzölög” a forró folyadék, de megemlíthető a „kondenzcsík”, a harmat, a dér vagy a köd is. Tulajdonképpen az eső is így keletkezik a magasban.

A gőzállapotot általánosságban is értelmezzük (nemcsak a vízre), többnyire a nem túlságosan forró, a kritikus pontnál lényegesen hidegebb gázra értjük, amely egyensúlyban van egy kondenzált (szilárd vagy folyékony) fázissal. A gőz molekulái által termodinamikai egyensúlyban létrehozott nyomást hívjuk egyensúlyi gőznyomásnak. A termodinamikai egyensúly itt azt jelenti, hogy ilyenkor ugyanannyi molekula vándorol a kondenzált fázisból a gőz fázisba, mint viszont, és így a két fázis mennyisége állandó. Természetesen az egyensúlyi gőznyomás függ a hőmérséklettől: nagy hőmérsékleten

könnyebben kerülnek át a molekulák a gőzfázisba. Ha a hőmérséklet akkora, hogy az egyensúlyi gőznyomás eléri a légköri nyomást, akkor forrás (vagy szublimáció) következik be; azaz a víz esetén 100 Celsius-fokon az egyensúlyi gőznyomás éppen az 1 atmoszféra. Érdeemes megemlíteni, hogy 20 fokon az egyensúlyi gőznyomás körülbelül 2 kPa, azaz a légköri nyomás 2%-át adja a vízgőz. Érdekes ugyanakkor, hogy például a szilárd vas esetén is beszélhetünk egyensúlyi gőznyomásról: ennek értéke szobahőmérsékleten  $10^{-65}$  Pa nagyságrendbe esik (ez elképzelhetetlenül kicsi szám), de például 900 fokon már  $10^{-6}$  Pa. Utóbbi azt jelenti, hogy ilyen forró szilárd vas esetén már nagyszámú vasatom kerülhet a levegőbe is.<sup>3</sup> Normál légköri nyomású levegővel kevert gőz esetén az egyensúlyi gőznyomásból a később tárgyalt gáztörvények segítségével kiszámíthatjuk majd az egyensúlyi gőzkoncentrációt is.

#### 4.1.5. Hőtágulás

A hőmérséklettel kapcsolatos további fontos (már a fejezet elején is említett) jelenség, hogy a legtöbb anyag mérete, térfogata függ a hőmérséklettől. Ideális gázok esetén globálisan (minden hőmérséklet-értékre kiterjedően) lineáris kapcsolat van a térfogat és a hőmérséklet között (állandó nyomás esetén, ahogy majd látni fogjuk), de ott az egész jelenségekört összetettebben tudjuk tárgyalni, ahogy majd később meg is tesszük. Szilárd anyagok esetén globálisan bonyolult a térfogat és a hőmérséklet közötti kapcsolat, de kis hőmérséklet-változás esetén mondhatjuk, hogy lineáris az összefüggés, pontosabban a  $\Delta L$  hosszváltozás arányos a  $\Delta T$  hőmérséklet-változással. Ezt mondja ki a **hőtágulás törvénye**:

$$\Delta L = L_0 \alpha \Delta T, \quad (4.4)$$

ha  $L_0$  volt az eredeti hossz. Azt is mondhatjuk, hogy ekkor az új hossz  $L' = L + \Delta L = L_0(1 + \alpha \Delta T)$ . Itt  $\alpha$  a hőtágulási együttható, ennek nagyságrendje tipikusan  $10^{-6}$  1/fok, azaz 1/(1 millió K), vagy ennek néhányzorosa. Ez azt jelenti, hogy például 10 fokok hőmérséklet-változás esetén az adott szilárd objektum egy század résznyivel lesz hosszabb. Az együttható konkrét értéke egyes anyagokra jelentősen különböző lehet: kvarc esetén például 0,5/millió K, míg fémekre: 20-30/millió K, ráadásul a hőmérséklettől is függ.<sup>4</sup>

A hőtágulás sok hétköznapi példában is megjelenik: emiatt görbülhetnek ki melegen a vasúti sínek (hiszen a hosszuk megnő, de erre a nyúlásra nincs hely), emiatt építenek dilatációs rést hidakba és más építményekbe (hogy hőtágulás esetén ne deformálódjának el), és ezért feszesebbek a távvezetékábelek télen. Ezen az elven működnek egyes időkapcsolók is: két különböző fém van bennük, amelyen bekapcsolás esetén áram folyik; az áram hatására felmelegednek, alakjuk a két fél különböző mértékű tágulása miatt megváltozik, majd a visszahűlés során újra eredeti állapotukba térnek vissza, megszüntetve az eredeti kapcsolatot. Ez a bimetal kapcsolók és érzékelők lényege.

<sup>3</sup>Véges, nem nulla gőznyomása van a különböző kenőanyagoknak, és, mint most látjuk, maguknak a szilárd anyagoknak is: ez egy „természetes” határt jelent arra nézve, hogy milyen jó (azaz milyen ritka) vákuumot lehet pumpákkal, tartályokban előállítani.

<sup>4</sup>Szerencsés egybeesés, hogy a vas (acél) és a beton hőtágulási együtthatói normális hőmérsékleteken közel egyenlők, ezért lehet vasbetont készíteni, ahol a vas tehát nem repeszi szét a betont, és nem is szakad el belül tőle, ha néhány tíz °C-ot változik a hőmérséklet. „Alumíniumbetont” például viszont nem lehet készíteni.

A fentiekben a hőtágulás egydimenziós változatát vizsgáltuk, azaz a tárgyak hosszának változását. Ugyanakkor hőmérséklet-növekedés hatására a dolgok térfogata is megnő. Hogy mennyire, azt egyszerűen levezethetjük, egy  $L$  oldalhosszúságú kocka esetét alapul véve. Ennek  $\Delta T$  hőmérséklet-változás hatására  $L' = L + \Delta L = L_0(1 + \alpha\Delta T)$  méretre változik az oldalhosszúsága. Ekkor a térfogata  $V_0 = L_0^3$  helyett  $V' = L'^3 = L_0^3(1 + \alpha\Delta T)^3$  lesz, azaz

$$V' = V_0(1 + \alpha\Delta T)^3. \quad (4.5)$$

Innen a kis  $x$  értékekre érvényes  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$  közelítést alkalmazva (amely a binomiális sorból következik, ugyanis ebben  $x$  magasabb hatványai  $x \ll 1$  miatt elhanyagolhatóak) a **térfogati hőtágulás**

$$V' = V_0(1 + 3\alpha\Delta T), \quad \text{avagy} \quad (4.6)$$

$$\Delta V = V_0 3\alpha\Delta T \quad (4.7)$$

törvénye adódik, vagy másképp  $\Delta V = V_0\beta\Delta T$ , ahol bevezettük a  $\beta$  úgynevezett térfogati hőtágulási együtthatót:  $\beta = 3\alpha$ .

Folyadékknál is értelmezhető a térfogati hőtágulási együttható, amely azonban a hőmérséklettől erősebben függ, mint szilárd anyagok esetében, és értéke általában nagyobb is. Szobahőmérsékleten higany, víz esetén  $\alpha = 200/\text{millió K}$ , míg alkohol esetén  $\alpha = 1200/\text{millió K}$ . Víz esetén érdekes módon négy fok körül  $\alpha = 0$  lesz, majd 0 és 4 Celsius-fok között negatívba fordul: azaz négy fokról tovább hűlve a víz valójában tágul, nem összemegy. Így tehát a nullafokos víz fennmarad a tó tetején (keveredés híján), az ennél pár fokkal melegebb pedig alul gyűlik össze, lehetővé téve a vízi állatok és növények téli túlélését.

### Kísérlet: tintás jég olvadása sós vízben

- Vegyünk ismét két poharat, bennük 3-3 dl sós, illetve sima vízzel, azonos mennyiségű jéggel. A jégbe (lefagyasztás előtt) keverjünk tintát, ételfestéket vagy például teát.
- Eredmény: a sós vízben lévő jégből leolvadó tintás víz nem keveredik a többi vízzel, csak a pohár tetején jelenik meg a tinta színe.
- Só nélkül a hidegebb víz sűrűbb, ezért leszáll a pohár aljára, a meleg víz felmegy, beindul a konvekció.
- A sós víz azonban sokkal sűrűbb, a hideg víz ezért fentmarad a pohár tetején, sokkal kevesebb víz „vesz részt” a reakcióban.

#### 4.1.6. A hőátadás fajtái

Miután a hő és a hőmérséklet változásával kapcsolatos legalapvetőbb jelenségeket megemlégtettük, a **hőátadás** módjainak is érdemes pár bekezdést szentelnünk. A hőenergia alapvetően három módon kerülhet át az egyik pontból a másikba: **áramlással** (ekkor a meleg és a hideg közeg „helyet cserél”, összekeveredik), **hővezetéssel** (ekkor a hőt „hordozó” molekulák vagy atomok adják át egymásnak az energiát anélkül, hogy a közeg makroszkopikusan elmozdulna), illetve **hősugárzással** (ekkor a molekulák hőmozgásuk

során elektromágneses sugárzást hoznak létre, ami akár vákuumban is terjed, energiát hordozva).

Gázokban és folyadékokban általában az áramlás a hőcsere fő oka: ezért hűl ki gyorsabban egy tea mint egy sűrű krémleves, ez utóbbiban ugyanis lényegesen gyengébb áramlás tud megvalósulni (nagyobb viszkozitása okán). A hőáramlás magyarázza a szelek és tengeráramlatok kialakulását, de ennek segítségével melegíti fel a szobát a fűtőtest is, ezért száll fel a füst a kéményben, és ez segít a folyadékok és gázok erőművekben történő áramlásában. A legnagyobb hőátadás turbulencia kialakulása során valósul meg, ekkor jön létre ugyanis az optimális keveredés. Általában a hőáramlás hajtóereje az, hogy a melegebb közeg ritkább, így felfelé száll; vagy a nyomása nagyobb, így a hidegebb pont felé törekszik.

Ahogy fent említettük, hővezetés során a gyorsabban rezgő molekulák/atomok átadják a lassabbnak az energiájuk egy részét, azaz a mozgási energia, másképp kifejezve a hő terjed a rendszerben, valódi (makroszkopikus) közegmozgás nélkül. Szilárd testekben ez a hőátadás fő módja. A  $\Delta t$  idő alatt  $d$  vastagságú,  $A$  keresztmetszetű felületen átadott hő mennyisége

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda \frac{\Delta T A}{d}, \quad (4.8)$$

ha a két oldalán  $\Delta T$  a hőmérséklet-különbség. Itt a  $\lambda$  együttható neve: hővezetési együttható, mértékegysége W/Km. Ebben kifejezve néhány tipikus értéke: rézre 400, üvegre 1, levegőre 0,024, ház falára 1 alatti (jó esetben). A levegő azért rossz hővezető (avagy jó hőszigetelő), mert nagy távolságon vannak benne a molekulák, így kevésbé tudnak egymásnak ütközések által hőt átadni. A habok, üreges anyagok is ezért szigetelnek jól, és ezért két- vagy többretegűek a jobb ablakok is (ráadásul többnyire a két réteg közé a normálállapotú levegőnél is rosszabb hővezetésű gázt tesznek). A jeges hűtő is ezért hűt rosszul: a jég ugyanis igen rossz hővezető.

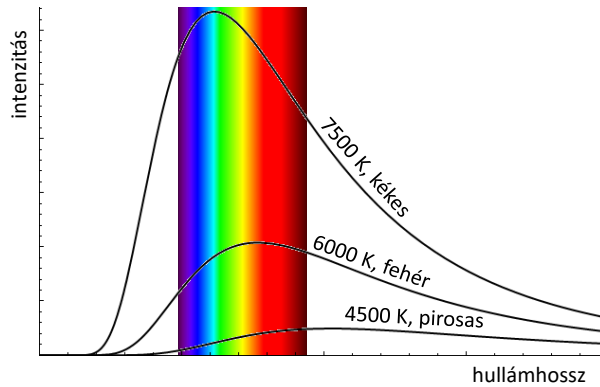
Házak és lakások energiaháztartásának vizsgálata során a vastagságot és a hővezetési együtthatót szokás egyetlen  $U = \lambda/d$ -vel jelölt hőátbocsátási tényezővel megadni, ezzel

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = U A \Delta T. \quad (4.9)$$

Ekkor  $U$  mértékegysége W/m<sup>2</sup>K, és azt adja meg, hogy egy négyzetméter felületen egy fok hőmérséklet-különbség esetén mennyi energia távozik időegységenként. Ez környezetfizikai szempontból igen fontos, hiszen az így távozó hőenergiát kell valamilyen fűtési rendszerrel pótolni, azaz a hőátbocsátási tényező minimalizálása az adott lakás vagy ház energiaigényét igen jelentősen tudja csökkenteni. A tényező értéke jó hőszigetelő (többretegű) ablakokra 0,5-1,0 W/m<sup>2</sup>K körül van. Ez konkrétan azt jelenti, hogy ha az ablak 1 négyzetméteres, és bent 20 fokkal melegebb van, mint kint, akkor 10-20 Watt hőteljesítményre van szükség, hogy az ablakon át kiáramló hőt pótoljuk.

A hőszugárzás jelenségét később fogjuk megérteni, de a lényeg, hogy az atomok és molekulák rezgése elektromágneses teret hoz létre, amely energiát sugároz ki, akár vákuumba is – és ennek során a kibocsátó anyag molekuláinak rezgése csökken, az anyagot hűtve. Adott hőmérséklet mellett különböző hullámhosszú sugárzáskomponensek is vannak, ezek összessége a később a kvantumfizika által megmagyarázott Planck-spektrum, amely a 4.3. ábrán látható.





4.3. ábra. Különböző hőmérsékleteknek megfelelő hőmérsékleti sugárzások spektruma. Minél nagyobb a hőmérséklet, a spektrum annál inkább eltolódik a kék szín felé, míg alacsonyabb hőmérsékleten a piros komponensek dominálnak. A nagyjából egyenletes, „fehér” szín körülbelül 3-4000 K körül alakul ki.

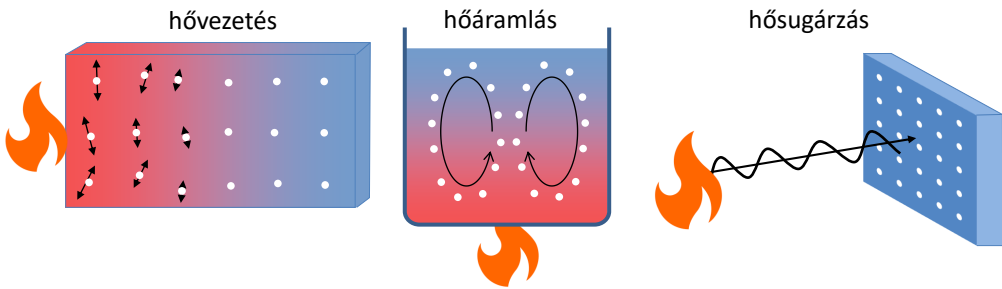
Néhány száz kelvin esetén még nem látható a hősugárzás, de ezer kelvin hőmérséklet környékén láthatóvá válik: ez a vörösen izzás jelensége. Ahogy növeljük a hőmérsékletet, a spektrum maximuma egyre kisebb hullámhosszak felé tolódik, azaz a szín egyre több kéket és egyre kevesebb vöröset tartalmaz. 6000 K körül épp nagyjából egyenletesen tartalmaz minden színt a spektrum, így ez fehérnek tűnik, felette pedig egyre kékebbnek. A Nap felszíni hőmérséklete alapján éppen fehér sugárzást bocsát ki – pontosabban nyilván a szemünk a Nap színe alapján „kalibrálja” a színeket, azt nagyjából fehérre hangolva. Érdekes megemlíteni, hogy az Univerzumban minden irányból körülbelül 2,7 K hőmérsékletű sugárzás észlelhető, ez a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás.

A hősugárzás intenzitását az úgynevezett Stefan–Boltzmann-törvény adja meg. Eszerint egy  $A$  felületű,  $T$  hőmérsékletű tárgy által  $\delta t$  idő alatt kisugárzott hőenergia mennyisége

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \epsilon \sigma AT^4. \quad (4.10)$$

Figyeljünk arra, hogy a  $T$  az abszolút (kelvinben mért) hőmérsékletet jelenti! A képletben a  $\sigma$  együttható neve: Stefan–Boltzmann-állandó, értéke  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ J}/(\text{sm}^2\text{K}^4)$ ; ez univerzális természeti konstans.<sup>5</sup> A képletben szereplő másik arányossági tényező,  $\epsilon$  pedig egyfajta kisugárzási együttható, ami függ az anyag (felület) fajtájától. Értéke 0 és 1 között van. Kiderül, hogy azok a testek, amelyek az összes „lehetséges” energiát kisugározzák (azaz, amikre  $\epsilon = 1$ ), azok egyúttal minden rájuk eső (hő)sugárzást el is nyelnek. Az  $\epsilon$  tehát nemcsak kibocsátási, hanem elnyelési együttható: tökéletesen „fekete” testek (amelyek minden rájuk eső sugárzást elnyelnek) esetében  $\epsilon = 1$ , ezek tehát ki is sugározzák a lehető legtöbb hőt. Ha a test nem mindent nyel el, hanem vissza is

<sup>5</sup> A  $\sigma$  univerzális állandó, de nem független a többi fizikai állandótól: belátható, hogy  $\sigma$  értékét ki lehet számolni a  $\hbar$  Planck-állandóból, a  $c$  fénysebességből és a nonsokára bevezetett  $k_B$  Boltzmann-állandóból:  $\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}$ .



4.4. ábra. A hőcsere három fajtája: hővezetés (balra), áramlás (középen), sugárzás (jobbra). Hővezetés során a molekulák vagy atomok egymásnak adják át mozgási energiájukat. Áramlás esetén a nagyobb és kisebb mozgási energiájú molekulák vagy atomok térben keverednek, míg a sugárzás esetén elektromágneses hullámok közvetítik az energiát.

ver sugárzást (tükör módjára), akkor arra a testre  $\epsilon < 1$ , azaz melegítve kevesebb hőt is sugároz ki, mint az  $\epsilon = 1$  értékkel jellemzett fekete test.

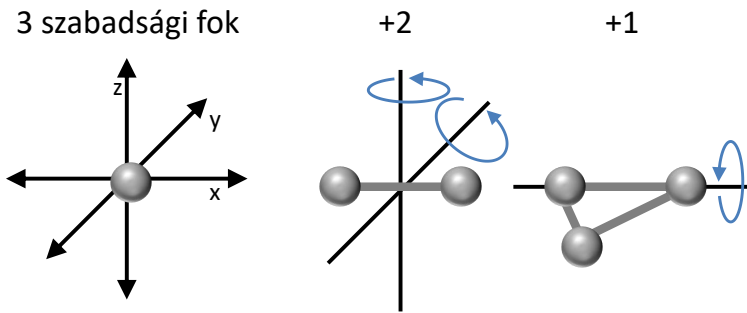
A hőcsere három fajtáját a 4.4. ábra illusztrálja.

## 4.2. Kinetikus hőtan

### 4.2.1. A hő kinetikus elmélete, az ekvipartíció

A XIX. század végére az atomhipotézis számos megfigyelés magyarázatául szolgált, sokak véleménye azonban az volt, hogy a hőtan fentiekben leírt területén már nem alkalmazható sikeresen. A fordulópontot leginkább a Brown-mozgás felfedezése és magyarázata jelentette. Brown 1827-ben virágpór vízben történő véletlenszerű mozgását figyelte meg és írta le természettudományos módszerességgel: ma ehhez kötjük a jelenség felfedezését, illetve első tudományos dokumentációját, noha hasonló jelenséget, például a látható füstszemcsék vagy por levegőben való „táncolását” már ókori és középkori szerzők is leírtak. A jelenség magyarázata Einstein és Smoluchowski nevéhez fűződik: eszerint a véletlenszerű mozgás a közeg atomjainak vagy molekuláinak hőmozgása miatt jön létre. Ez volt az egyik első olyan jelenség, amelyet ténylegesen véges (nem akármilyen kicsiny) atomoknak hőmérsékleti mozgásával lehetett leírni, azaz ehhez is köthető a **kinetikus hőtan** születése.

Ezt elfogadva tehát az atomok nyelvén a hő mozgási energia, a hőmérséklet az atomok vagy molekulák átlagos energiájától függ. Az atomok mozgási energiájának tárgyalásához felidézünk a **szabadsági fokok** definícióját (bővebben lásd a 2.7.3. szakaszban). Egy atomot tömegpontként képzelünk el, amely haladó mozgást végezhet, ez  $f = 3$  szabadsági fokot jelent, a tér három iránya miatt. Egy kétatomos molekulát egy kis szakasként képzelhetünk el, így ennek további két forgási szabadsági foka lesz, azaz összesen  $f = 5$ . Bonyolultabb molekulákat kiterjedt merev testekként képzelünk el, ezeknek összesen  $f = 6$  szabadsági foka van, amelyből három mozgási és három forgási. Ezeket a 4.5. ábra illusztrálja. Érdekes továbbá megemlíteni, hogy szilárd anyagokban potenciális energia és más, „kollektív” szabadsági fokok is elképzelhetőek, ezért itt na-



4.5. ábra. Különböző molekulák szabadsági fokai. Egyatomos molekula (balra) három haladási szabadsági fokkal rendelkezik. Kéttatomos molekula (ezenfelül) még két forgási szabadsági fokkal, míg térbeli elrendezést felvevő három- vagy többatomos molekulák három forgási szabadsági fokkal rendelkeznek. Az ábrát érdemes összevetni a 2.7.3. szakaszban található 2.14. ábrával.

gyobb  $f$  értékek is lehetnek. A kristályos szilárd testek elég nagy többségében úgy lehet számolni, mintha egy atomra  $f = 6$  szabadsági fok jutna.

A kinetikus hőtan alapja az **ekvipartíció tétele**: eszerint egy  $T$  hőmérsékletű közegben minden molekula vagy atom minden szabadsági fokára átlagosan ugyanannyi energia jut, méghozzá

$$\epsilon = \frac{k_{\text{Boltzmann}}T}{2}, \quad (4.11)$$

ahol  $k_{\text{Boltzmann}}$  a Boltzmann-állandó, értéke  $1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K. Az ekvipartíció (ami szó szerint lényegében egyenlő eloszlást jelent) tételének oka tulajdonképpen az, hogy a hőmozgás során az energia kiegyenlítődik. Ebből kikövetkeztethetjük egy gáz részecskéinek átlagos sebességét, hiszen mozgásra három szabadsági fok jut, tehát a mozgási energia  $3\epsilon = 3kT/2$ , ugyanakkor ez egyúttal  $mv^2/2$ -vel is egyenlő. A részecskék sebesség-négyzetének átlaga innen  $\langle v^2 \rangle = 3k_B T/m$ , ennek gyökét hívhatjuk egyfajta átlagsebesség-nagyságnak is:  $\langle v \rangle = \sqrt{3k_B T/m}$ . (Az átlagos értéket általában is szokták így,  $\langle \dots \rangle$  módon jelölni.) Egy adott irányban (nevezzük ezt  $z$  iránynak) a sebesség az egyetlen szabadsági fokra jutó energiából adódik, ennek nagyságának átlaga így:  $\langle v_z \rangle = \sqrt{kT/m}$ . Légköri nyomáson a levegő molekuláinak sebessége tipikusan 300-500 m/s körül van, ami egyúttal azt is jelenti, hogy egy molekula másodpercenként átlagosan többször tízmillió véletlenszerű ütközést szenved el. Az ütközések során a levegő részei – ha eredetileg nem voltak termikus egyensúlyban, például egyik helyen hidegebb volt, mint máshol – a termikus egyensúly, azaz a kiegyenlítődés (a legvalószínűbb állapot) felé haladnak: a molekulák ütközése (és így energiájuk egymásnak átadása) a magyarázata a hővezetésnek.

Egy rendszer teljes „belső” energiája összesen  $E = fN\epsilon$ , ha  $\epsilon$  az egy szabadsági foknak megfelelő energia,  $f$  a szabadsági fokok száma,  $N$  pedig a részecskék száma. A gáz teljes belső energiája innen tehát kifejezhető a  $T$  hőmérséklettel:

$$E = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}nRT, \quad (4.12)$$

ahol  $R \equiv k_B \cdot N_A = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ , a Boltzmann-állandó szorozva az Avogadro-állandóval ( $6 \cdot 10^{23}$ ),  $n$  pedig a mólszám. Miután  $Q$  hő átadásakor (egyéb folyamatok, azaz például tágulás vagy összenyomás hiányában) az energiaváltozás  $\Delta E = Q$ , az állandó térfogaton vett mólhő kiszámítható. Ennek definíciója ( $Q = Cn\Delta T$ ) szerint  $C = Rf/2$  adódik, ez egyatomos gázokra éppen  $12,5 \text{ J}/(\text{mol K})$ , ahogy a fajhőről szóló szakaszban már említettük. Részletesen lásd a termodinamikai átalakulásokról szóló 4.3.2. szakaszban.

#### 4.2.2. Az általános gáztörvény és következményei

A gázbeli nyomás a kinetikus gázelmélet szerint a molekulák vagy atomok ütközése miatt hat, figyelembe véve, hogy az ütközés során impulzusváltozás történik, amely (az ütközés időtartamával leosztva) az erőt adja meg, a nyomás pedig az adott felületre ható erő. Téglatestbe zárt gáz esetén levezethető az adott hőmérsékletű és térfogatú gáz nyomása, azaz az úgynevezett **általános gáztörvény**:

- A keresztmetszetű,  $l$  hosszúságú edényben legyen  $N$  gázatom  $T$  hőmérsékleten.
- A nyomás a falnak ütköző részecskék által kifejtett erőtől függ  $p = F/A$ , az erő pedig az átadott impulzustól:  $F = \Delta p_z / \Delta t$ .
- Egy gázatom által átadott impulzus (a  $z$ -irányú sebessége előjelet vált):  $2mv_z$ .
- Hány gázatom ütközik a falnak  $\Delta t$  idő alatt? Mivel  $v_z$  sebességgel közelednek a falhoz átlagosan, ezért azok érik el a falat, amelyek  $v_z \Delta t$  távolságon belül voltak – pontosabban ezeknek a fele, a másik felük a másik irányba megy.
- Ennek a résznek a térfogata  $v_z \Delta t A$ , azaz az itt lévő részecskék száma  $Nv_z \Delta t A / V$ , a falnak ütközőké pedig  $Nv_z \Delta t A / 2V$ .
- Az ezek által átadott impulzus pedig:  $2mv_z Nv_z \Delta t A / 2V$ , azaz  $Nmv_z^2 \Delta t A / V$ .
- Az ütköző atomok által kifejtett nyomás tehát  $p = Nmv_z^2 / V$ , amely a formula alapján az atomok átlagos sebességétől függ.
- Az ekvipartíció tétele alapján az egyes atomok átlagos sebessége a tér három irányában ugyanannyi,  $\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = \sqrt{k_B T / m}$ .
- Ezzel megadható a nyomás hőmérséklet- és térfogatfüggése:  $p = Nk_B T / V$ , azaz  $pV = Nk_B T$ .

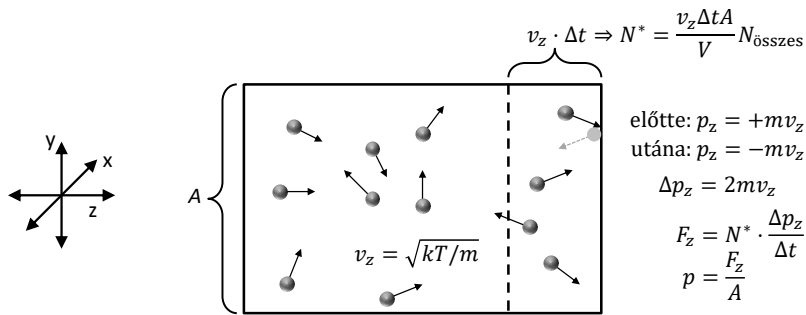
Ennek a levezetésnek a megértéséhez a 4.6. ábra ad további segítséget.<sup>6</sup>

A fenti levezetésben feltettük, hogy a gáz részecskéi között csak ütközési jellegű erők hatnak, és maguk a részecskék semekkora térfogatot nem foglalnak el. Az ilyen feltételeket teljesítő gázokat ideálisnak nevezzük, a levezetés végén közölt összefüggés az **ideális gázok állapotegyenlete, avagy az általános gáztörvény**:

$$pV = Nk_B T. \quad (4.13)$$

A fentiekben is látott módon bevezetve az  $R = k_B \cdot N_A$  gázállandót (ahol  $N_A$  az Avogadro-állandó, avagy Avogadro-szám, értéke  $6 \cdot 10^{23} / \text{mol}$ ), ez  $pV = nRT$  egyenletként is írható, ha  $n = N/N_A$  az anyagmennyiség (mólszám). Mindebből átrendezéssel néhány egyszerű törvényt levezethető:

<sup>6</sup> Megjegyezzük, hogy volt némi „elnagyolás”: nem foglalkoztunk túl sokat azzal, hogy milyen értelemben átlagos ez a használt átlagsebesség, illetve azzal, hogy a gázatomok minden irányban egyforma valószínűséggel mennek; a részletesebb analízis ugyanezt az eredményt adja.



4.6. ábra. Az általános gáztörvény levezetése a kinetikus hőtan segítségével. Egy molekula által kifejtett nyomást a felületre ható erő segítségével számolhatjuk, az erőt pedig az impulzusátadással. A teljes nyomáshoz pedig azt kell meghatároznunk, hogy adott  $\Delta t$  idő alatt hány molekula ütközhet a vizsgált falnak.

- Állandó nyomás esetén  $V/T = Nk_B/p =$  állandó (hőtágulás, Charles-törvény).
- Állandó hőmérséklet esetén  $pV = Nk_B T =$  állandó (tágulás  $\Rightarrow$  nyomáscsökkenés, Boyle–Mariotte-törvény).
- Állandó térfogat esetén  $p/T = Nk_B/V =$  állandó (hűlés  $\Rightarrow$  nyomáscsökkenés, Gay-Lussac-törvény).

Ezek az egyenként kimondott törvények az ideálisnak tekinthető gázokra a tapasztalattal teljesen összhangban vannak (sőt ezek kísérleti felfedezése vezetett a kinetikus gázelmélet, és így például az ekvipartíció tételének felismeréséhez). Az egyik itt mondott törvényt (a Gay-Lussac-törvényt, a gázok állandó térfogaton való hőtágulásáról szólót, hogy ilyenkor a nyomás arányos az abszolút hőmérséklettel) a fejezet elején már használtuk, amikor az abszolút hőmérsékleti skálát bevezettük.

Megemlítjük, hogy **reális gázok** esetén két korrekcióval kell leginkább számolni. Az elsőt az adja, hogy az atomoknak is van térfogatuk, ezért a rendelkezésre álló térfogat lecsökken:  $V \rightarrow V - nb$ , ahol  $b$  az egymólyni atomra (vagy molekulára) jutó térfogat. A másik korrekció abból adódik, hogy a valóságban a molekulák nemcsak mint biliárdgolyók ütköznek, hanem vonzzák is egymást, csökkentve a nyomást:  $p \rightarrow p - an^2/V^2$ ; itt a korrekciós tag körülbelül leírja a gáZRészecskék vonzásának hatását. A fentieket is figyelembe vevő egyenlet a reális gázok állapotegyenlete, a **Van der Waals-féle egyenlet**:  $(p - an^2/V^2)(V - nb) = Nk_B T$ . Ez az állapotegyenlet alacsony hőmérséklet esetén jelentősen eltér az ideális gázokétól, de tárgyalása túlmutat jelen jegyzet keretein.

### Kísérlet: színes alkohol és víz helycseréje

- Legyen két kis poharunk, egyikben víz, a másikban valamely színes alkohol. Mindkét poharat teljesen tele kell tenni.
- A vizes poharat egy kártyával a tetején megfordítjuk, az alkoholos pohárra tesszük.
- A kártyát kicsit kihúzával a víz elkezd lefelé áramolni, az alkohol pedig felfelé száll.
- Kis nyílás esetén nincs keveredés, a két folyadék helyet cserél.
- Mi az oka a keveredésnek? Miért tudtuk megakadályozni?

### 4.2.3. Az entrópia

A további vizsgálatokhoz be kell vezetni a hőtan egyik legfontosabb fogalmát, az **entrópiát**. Ezt igazán a hő fentebb leírt, kinetikus értelmezése kapcsán érthetjük meg. Az entrópia fogalma alapvetően a **rendezetlenséghez** kapcsolódik, és egy rendszer mikro- és makroállapotain keresztül értelmezhető.

A **mikroállapot** a rendszer tökéletes leírása, minden komponensének (részecskéjének) összes tulajdonságát (helyét, sebességét) rögzíti. A **makroállapot** ezzel szemben a rendszer globális állapotát adja meg, tekintet nélkül egyedi részecskéinek állapotaira. Például egy kiterjedt test (mondjuk egy darab kő, egy tartálynyi gáz) esetén a makroállapot azt jelenti, ha megadjuk, hogy egyes (nem túl kicsi) részeinek („darabjainak”) külön-külön mennyi az energiája, nyomása, térfogata, a mikroállapot megadása pedig azt jelenti, ha konkrétan megadjuk minden egyes atom vagy molekula konkrét helyét és sebességét. Nyilvánvaló tehát, hogy egy makroállapot általában rendkívül sokféle mikroállapottal megvalósítható.

Egyszerűbb példán szemléltetve: egy pénzermékből álló rendszer esetén egy adott mikroállapotban minden pénzérme állását tudjuk, egy adott makroállapot azonban például az lehet, hogy az érmék fele fej, fele írás. Itt is egy adott makroállapot sokféle mikroállapoton keresztül valósulhat meg. Gázoknál is ez a helyzet: az adott nyomást és hőmérsékletet jelentő makroállapot sokféle konkrét molekula- és atomelrendeződés esetén is létrejöhet.

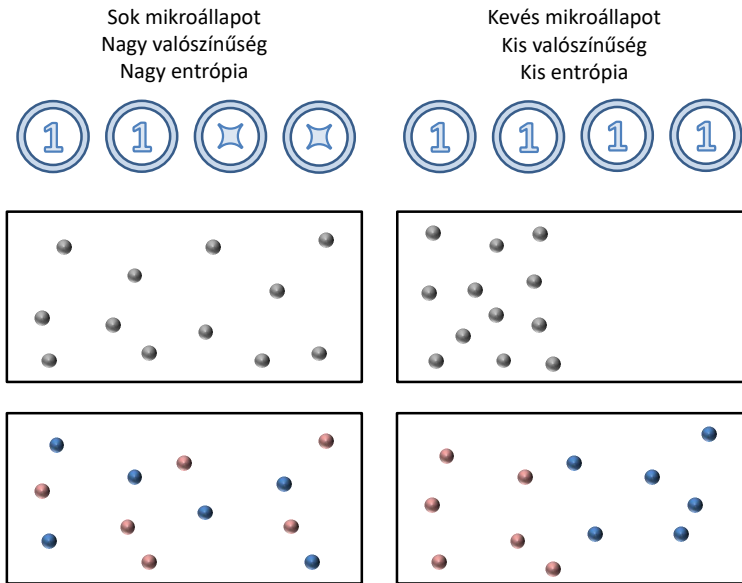
Ebben a képből egy adott makroállapothoz tartozó entrópia definíciója

$$S = k_B \ln w, \quad (4.14)$$

ahol  $w$  a lehetséges mikroállapotok (elemi elrendezések) száma, amelyek mind ugyanezt a makroállapotot valósítják meg. A formulában szereplő  $k_B$  Boltzmann-állandó egyúttal az entrópia mértékegységét (J/K) is megadja.

Négy pénzfeldobásnál a fenti formulában négy fej esetén  $w = 1$ , fele-fele esetén  $w = 6$ . Az utóbi állapot entrópiája tehát magasabb. Érdekes észrevenni, hogy a négy pénzfeldobásos esetben a fele-fele arány a legvalószínűbb. Ugyanígy, egy szobában sokkal többféleképpen lehet elhelyezni a tárgyakat úgy, ha bármelyik bárhol lehet: ha a könyvek csak a könyvespolcon, a ruhák pedig csak a ruhásszekrényben lehetnek, akkor a lehetséges mikroállapotok száma lényegesen alacsonyabb. Ez utóbbi lehetőséget a köznyelvben rendnek hívjuk: a rend sokkal valószínűtlenebb, mint a rendetlenség. Az entrópia tehát a rendezetlenség mértéke. Ha egy 10 pénzermét tartalmazó dobozt megrázunk, akkor a véletlen folyamatoknak köszönhetően minden bizonnyal körülbelül fele fej, fele írás lesz. Ha egy  $10^{27}$  molekulát tartalmazó teremben a molekulák véletlen mozgását engedjük meg (ahogy az a valóságban is zajlik), akkor a legvalószínűbb az, hogy a molekulák körülbelül fele a terem jobb oldalában, a másik fele a terem bal oldalában lesz (ez igen szerencsés, különben ugyanis a terem egyik felében ülő hallgatók megfulladnának). Mindezeket a 4.7. ábra illusztrálja.

Ugyanígy, a fenti kísérletben mindkét folyadék molekulái véletlenszerűen mozognak és ütköznek. Sokkal valószínűbb, hogy a két folyadék molekulái véletlenszerűen rendeződnek el, mint hogy az egyik fajta az egyik oldalon, a másik a másikon – ezt is a 4.7. ábra illusztrálja. Ha elég sok mozgást és ütközést várunk meg, tényleg összekeverednek. A kis réssel viszont elértük, hogy alig legyen köztük interakció, lényegében „rendezet-



4.7. ábra. Az entrópia illusztrációja. Általában a „rendezett” elrendezésnek nagy az entrópiája, mert ennek nagyobb a valószínűsége, ugyanis többféle módon jöhet létre. Ezt a legegyszerűbben a pénzfeldobás példáján láthatjuk: a „fele-fele” eredmény sokféleképp kialakulhat, míg a „csupa fej” elrendezés csak egyféleképpen.

lenségváltozás” (azaz: entrópiaváltozás) nélkül zajlott le a folyamat, így „helyet tudtak cserélni”.

Úgy is értelmezhetjük az eddigieket, hogy egy zárt rendszer benne zajló véletlen folyamatok nyomán **a lehető legvalószínűbb makroállapot** felé halad, és így a saját entrópiáját maximalizálni próbálja. Az entrópia tehát nem megmaradó mennyiség, hiszen értéke nőhet magától, zárt rendszer esetén is (szemben az energiával: zárt, azaz külső hatástól mentes rendszer energiája nem változhat, hiszen az energia megmarad). Egyszerűen az a legvalószínűbb, hogy az entrópia, azaz a **rendezetlenség mértéke nő**. Energiabefektetéssel persze csökkenthetjük az entrópiát, például rendet rakhatunk. Ekkor azonban az ezt (minket) is magában foglaló rendszer összentrópiája persze nő: a rendrakás következtében létrejövő entrópiacsökkenést bőven kompenzálja az anyagcserénk kapcsán létrejövő entrópiánövekmény.

Azok a folyamatok, amelyekben nő az entrópia, **irreverzibilisek** (nem megfordíthatóak): például két gáz vagy folyadék keveredése, egy váza széttrörese. Ezek során az entrópia a zárt rendszerben is növekszik. Ezek a folyamatok fordítva nem történnek meg: ugyan némi lehűlés árán energetikailag lehetséges lenne a váza darabjainak felugrása és újra vázává való összeállása, ez annyira valószínűtlen, hogy sosem következik be. Ugyanígy, elvileg megtörténhetne, hogy egy pohár tintás víz szétválék vízzel és egy csepp tintává, de ez is annyira valószínűtlen, hogy sosem következik be. A rendezetlenség csökkenése (a rend növekedése) annyira valószínűtlen, hogy sosem következik be (zárt rendszerben, úgy, hogy közben semmi más nem változik).

**Reverzibilisek** (megfordíthatónak) mondunk egy folyamatot, ha nem jár entrópi-

aváltozással. Ilyen a valóságban csak közelítőleg lehetséges. (Ilyen egy gáz összenyomása pumpával, ami elég gyors ahhoz, hogy ne történjen hőcsere.) Az entrópia hőtanbeli alkalmazása a következő észrevételen alapszik: a hőátadás mindig a melegebb testből a hidegebb felé történik, és zárt rendszerben a hidegebb test sosem ad át hőt a melegebbnek. (Ezeket később másképp is megfogalmazzuk, amikor a termodinamika második főtételét tárgyaljuk.) A hőátadás tehát irreverzibilis folyamat, növeli az entrópiát. Határesetben a hőátadás reverzibilis (azaz nem változtatja az egész rendszer entrópiáját), ha a hőt cserélő két test hőmérséklete egyforma. Ilyenkor persze ténylegesen nem lesz hőcsere. A reverzibilitást úgy értjük, hogy amelyik test hőmérsékletét egy kicsit (bármilyen kicsit) megemeljük, az elkezd hőt átadni a másiknak, ha viszont ezen test hőmérsékletét a másik alá csökkentjük (tetszőlegesen kicsi értékkel), máris megfordul a hőátadás.

Ezek alapján természetesnek tűnik a következő állítás (amelyet részletesebb elemzéssel lehet precízen belátni): ha egy test  $dQ$  hőt kap hőátadással (elég lassan, hogy a belső állapota végig termikus egyensúlynak feleljen meg), akkor az entrópiája megnő, méghozzá  $dS = dQ/T$  mértékben. Ha a test ugyanígy lead  $dQ$  hőt, akkor az entrópiája csökken: a változás  $dS = -dQ/T$ . Ha tehát egy  $T_2$  hőmérsékletű test átad  $dQ$  hőt egy  $T_1$  hőmérsékletű testnek (de a két test összessége zárt rendszer), akkor a melegebb test entrópiája csökken, a hidegebbé nő. Az összesített változás:  $dS = -dQ/T_2 + dQ/T_1 = dQ \cdot (1/T_1 - 1/T_2)$ . Az összes entrópia valóban növekszik ( $dS > 0$ ), ha  $T_2 > T_1$ . Tehát melegebb test adhat át hőt a hidegebbnek: ilyenkor nő az egész (zárt) rendszer entrópiája, és ez irreverzibilis folyamat: visszafelé sosem történik meg, a **zárt rendszer entrópiája nem csökkenhet**. A  $T_1 = T_2$  határesetben  $dS = 0$ , azaz ez (határesetben) reverzibilis folyamat.

### Kísérlet: érmék a dobozban

- Egy dobozban van csupa „fej” állású érme. Ha összerázzuk, a fej/írás arány 50-50% körül lesz.
- Ennek oka egyszerűen az, hogy ez a legvalószínűbb, és sok rázás során „van idő” a valószínű állapot kialakulására (gázok esetén nincs szükség „rázásra”: a hőmozgás hatására másodpercenként sok milliószor ütköznek a molekulák).
- Néhány érme esetén jelentős eltérések fordulhatnak elő,  $10^{23}$  érme esetén azonban egy ezreléki eltérés is igen valószínűtlen.
- A doboz összerázása „irreverzibilis” folyamat, az entrópia nő, ahogy a rendezetlenség növekszik. Extrém alacsony annak a valószínűsége, hogy a doboz érméinek fej/írás aránya egy egyenletlenebb, alacsonyabb entrópiájú állapotot mutasson magától. Természetesen „rendet tehetünk” a dobozban, de akkor már azt nem tekinthetjük zárt rendszernek.

## 4.3. Axiomatikus termodinamika

### 4.3.1. A termodinamika alaptételei

A hőtant bizonyos értelemben axiomatizálni lehet 1 + 3 axióma, avagy főtétel segítségével. Ezek közül a „nulladik” főtétel a termodinamikai rendszerek tárgyalásmódját rögzíti. Fontos, hogy mindig egyensúlyi rendszerekről beszélünk, azaz olyanokról, ame-



lyek (makro)állapota időben állandósult, magától nem változik. Két termodinamikai rendszer egyensúlya azt jelenti, hogy termodinamikai kapcsolatba helyezve őket (az-az úgy, hogy tudhassanak energiát, hőt satöbbi cserélni) állapotuk nem változik meg; ebből az következik, hogy egyensúly esetén az egyes rendszerek úgynevezett intenzív állapothatározói (a hőmérséklet, nyomás) megegyeznek. Maga a nulladik főtétel pedig a következő: ha két rendszer egyensúlyban van egy harmadikkal, akkor egymással is egyensúlyban vannak.

**A termodinamika első főtétele** azt mondja ki, hogy a rendszer energiájának változása megegyezik a vele közölt hő és a rajta végzett munka összegével, azaz

$$\Delta E = Q + W. \quad (4.15)$$

Ez tehát tulajdonképpen azt jelenti, hogy az energia megmarad. A rendszeren úgy végezhetünk munkát, hogy összenyomjuk; tágulás esetén a rendszer végez munkát, azaz ilyenkor  $W < 0$ . Az állandó nyomáson végzett munka a  $W = -p\Delta V$  módon fejezhető ki, hiszen a munka az erő szorozva az elmozdulással ( $Fs$ ), az erő a nyomás szorozva a felülettel ( $F = pA$ ), míg a térfogatváltozás az elmozdulás szorozva a felülettel ( $\Delta V = -sA$ , ahol a negatív előjel azért van, mert az általunk kifejtett erő összenyomja a rendszert, csökken a térfogata). Ez az összefüggés csak állandó nyomáson érvényes, egyéb esetben infintezimálisan kicsi elemekre kell bontani a folyamatot, és ekkor  $\Delta W = -pdV$  lesz az összefüggés.

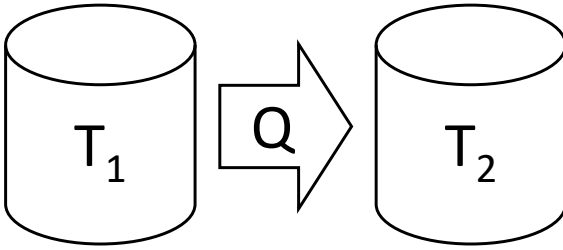
Az első főtétel szerint tehát az energiaközlés azon része, ami nem munkavégzés, hőátadás kell hogy legyen. Állandó hőmérsékleten a  $Q = T\Delta S$  összefüggés lesz érvényes: a testnek, amely hőt kapott, nő az entrópiája, méghozzá  $\Delta S = Q/T$  mértékben (ahogy fentebb láttuk). Ha nem állandó a hőmérséklet, akkor ismét infintezimálisan kicsi intervallumokra kell bontani a folyamatot, amelyekben  $\Delta Q = TdS$ . Általánosságban tehát a

$$dE = TdS - pdV \quad (4.16)$$

összefüggés lesz érvényes.

Vannak olyan termodinamikai folyamatok, amelyek különféle **hőerőgépeknek** felelnek meg. A hőerőgép lényege úgy fogalmazható meg, hogy a gép „bemenetként” felvesz hőt egy magasabb hőmérsékleten, „kimenetként” pedig végez valamennyi munkát, a maradék bejött energiát pedig hőként leadja alacsonyabb hőmérsékleten. Ez történik például a benzinmotorban: a hőfelvétel az égéstérben magas hőmérsékleten elégő üzemanyagtól jön, a munkavégzés fordítódik a tengely (és a jármű) hajtására, a kimenő hőenergia pedig a kipufogógázzal és a motor hűtésével távozik. Érdekes bevezetnünk a gép **hatásfokának** fogalmát (jelölése  $\eta$ ): ha a bejött hőt  $Q_{\text{felvett}}$ -tel, a végzett munkát pedig  $W_{\text{hasznos}}$ -sal jelöljük<sup>7</sup>, akkor  $\eta = W_{\text{hasznos}}/Q_{\text{fel}}$ . A leadott hőt  $Q_{\text{le}}$  módon jelölve persze az energiamegmaradás (az első főtétel) miatt nyilván igaz, hogy  $W_{\text{hasznos}} = Q_{\text{le}} - Q_{\text{fel}}$ , amely alapján a hatásfokot úgy is kifejezhetjük, hogy  $\eta = 1 - Q_{\text{le}}/Q_{\text{fel}}$ .

<sup>7</sup>Tartsuk szem előtt, hogy  $W_{\text{hasznos}} = W_{\text{le}} - W_{\text{fel}}$ , azaz a hasznos munka a rendszer által végzett („leadott”) munka és a rendszeren végzett („felvett”) munka különbsége. Az előbbi példánál maradva: a benzinmotorban először a dugattyú összenyomja a hideg levegőt a hengerben. Ilyenkor a motor „kifelé” nemhogy nem végez munkát, hanem mintegy „befektetésként” elfogyaszt ennyi munkavégzést. Ezután persze az égés után a kitáguló dugattyú már ennél több munkát végez, az eredő munkavégzés kifelé tehát pozitív lesz.



$$\Delta S_1 = -\frac{Q}{T_1}, \Delta S_2 = \frac{Q}{T_2}$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = Q \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

$$\Delta S > 0 \Leftrightarrow T_1 > T_2$$

4.8. ábra. Különböző hőmérsékletű hőtartályok közötti hőátadás során megvalósuló entrópiaváltozás. Egyszerűen adódik, hogy az entrópiaváltozás akkor pozitív, ha a hő a melegebb helyről áramlik a hidegebb helyre. Ellenkező esetben az entrópia csökken, így ez „magától” nem következik be (valószínűségi, véletlen folyamatként), csak külső hatásra – mint például a hűtőszekrény esetében.

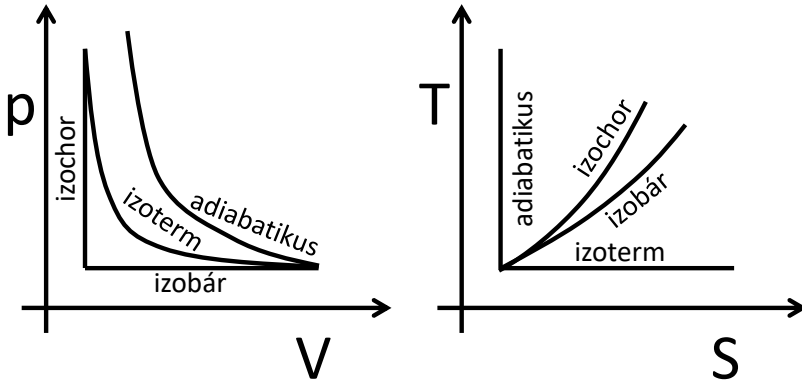
A hatásfok egytől való eltérése tehát a leadott és a felvett hő hányadosától függ, és az energiamegmaradás miatt  $\eta \leq 1$  mindig teljesül – hiszen a befektetett hőnél több munkát nem végezhet a folyamat. A hatásfokra egy eggyel szigorúbb állítás jelenik meg a következő pontban, a termodinamika második axiómájában.

**A termodinamika második főtételének** három egyenértékű megfogalmazása van, ezek az ekvivalens állítások a következők:

- A hőátadás iránya mindig a nagyobb hőmérsékletű rendszer felől az alacsonyabb hőmérsékletű rendszer felé mutat.
- Valós rendszer hatásfoka kisebb egynél ( $\eta < 1$ ), azaz az átadott hőenergiát nem lehet teljes mértékben a hasznos munkavégzésre fordítani. Ha a melegebb helyről átadunk  $Q$  hőt a hidegebbnek, és közben a rendszer  $W$  munkát végez,  $W < Q$ : nem lehet tehát olyan hajót építeni, amely hűti a tengert, és az ebből „nyert” energiával munkát végez (például a hajócsavart tekerve körbehajózza a Földet).
- Zárt rendszer entrópiája nem csökken, itt zajló reverzibilis folyamatokban  $\Delta S = 0$ , irreverzibilis folyamatok során pedig  $\Delta S > 0$ . (Zárt rendszerben összesen  $Q = 0$  és  $W = 0$ , de az „egyik fele” adhat át hőt a másiknak vagy végezhet munkát a másikon.)

Az első és a harmadik verzió ekvivalenciáját már láttuk: legyen egy  $T_1$  és egy  $T_2$  hőmérsékletű test között  $Q$  hőátadás, az egyestől a kettes felé áramló hővel. Ekkor az entrópiaváltozás az egyes rendszerben  $\Delta S_1 = -Q/T_1$  (mivel leadott hőt), és  $\Delta S_2 = Q/T_2$  a kettes rendszerben. A teljes változás:  $\Delta S = Q \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$ . Ez pontosan akkor pozitív, ha  $T_2 < T_1$ . Ezt illusztrálja a 4.8. ábra is.

**A termodinamika harmadik főtétele** azt mondja ki, hogy az abszolút nulla fokot nem lehet elérni véges számú termodinamikai lépésben. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy ha  $T \rightarrow 0$ , akkor  $S$  (néhány kivételtől, például az üvegektől eltekintve) nullához tart, azaz elérjük a tökéletes rendezettséget. Az abszolút nulla fok azért is érhető el nehezen, mert ehhez egy másik, ennél hidegebb rendszerre volna szükség; ugyanakkor az abszolút nulla fokon az atomok/molekulák hőmozgása megszűnik, azaz lényegében megállnak – ennél kisebb hőmérséklet pedig már nem képzelhető el.



4.9. ábra. Különbéféle átalakulások  $p - V$  (balra) és  $T - S$  (jobbra) diagramon. Míg a  $p - V$  diagramon az izobár és az izochor folyamatok jellemezhetőek egyenes vonallal, addig  $T - S$  diagramon az izoterm és az adiabatikus folyamatokra igaz ez.

### 4.3.2. Állapotváltozások, körfolyamatok

A termodinamikai folyamatok során bekövetkező **állapotváltozások** négy alapvető típusa a következő:

Izobár	$p = \text{áll.}$	$W = -p\Delta V$
Izochor	$V = \text{áll.}$	$W = 0$ , azaz $\Delta E = Q$
Izoterm	$T = \text{áll.}$	$Q = T\Delta S$ ,
Adiabatikus (izentropikus)	$S = \text{áll.}$	$Q = 0$ , azaz $\Delta E = W$

Az egyes folyamatokat  $p - V$  diagramon vagy  $T - S$  diagramon ábrázoljuk, ahogy azt a 4.9. ábra mutatja.

Izobár állapotváltozáshoz állandó nyomású (tágulni képes), izochor változáshoz állandó térfogatú tartályra van szükség. Izoterm állapotváltozás esetén a rendszert megfelelően nagy, állandó hőmérsékletű hőtartályban kell elhelyezni, adiabatikus állapotváltozásokhoz pedig igen jól szigetelt (hőcserét gátló) tartályra vagy nagyon gyors lefolyásra van szükség.

A fentebbi megfogalmazások minden testre érvényesek. Ideális gázokra az általános gáztörvény és a főtételek következményeként a különféle állapotváltozásokat egyszerűen leírhatjuk. Ideális gázok izoterm állapotváltozása esetén (mivel  $pV = Nk_B T$ , és  $T$  most állandó) azt kapjuk, hogy  $pV = \text{állandó}$ , azaz a térfogat és a nyomás fordítottan arányosak. Ilyenkor a  $\Delta E = 0$  összefüggés is igaz, a belső energiával kapcsolatban korábban említett  $E = fNkT/2$  törvény miatt.

Az adiabatikus esetben elmondhatjuk, hogy míg az energiaváltozás (az ekvipartíció miatt)  $dE = f/2 \cdot Nk_B dT$ , addig az ezzel egyenlő munka  $dW = -pdV = -Nk_B T dV/V$ , ahol az utóbbi egyenlőség az általános gáztörvény miatt áll fenn. Innen  $f/2 \cdot dT/T = -dV/V$ , ami lényegében egy differenciálegyenlet a  $T(V)$  függvényre, amelynek megoldása  $T = C \cdot V^{-2/f}$ , ahol  $C$  tetszőleges (integrálási) állandó. Bevezetve a  $\gamma = (f + 2)/f$  konstanst,  $TV^{\gamma-1} = \text{állandó}$ , vagy  $pV^\gamma = \text{állandó}$ . A  $\gamma$  neve adiabatikus kitevő, értéke

egyatomos gázokra  $5/3$ , kétatomosakra  $7/5$ . Az adiabatikus állapotváltozás során tehát  $p$  jobban változik adott térfogatváltozás esetén, mint ahogyan az izoterm esetben.

Érdemes még megemlíteni, hogy izobár vagy izochor állapotváltozás esetén kiszámítható a gázok mólhője, és a két esetre különböző értékek adódnak:

- Izochor esetben  $\Delta E = Q = nC_V\Delta T = f/2nR\Delta T$ , azaz  $C_V = f/2R$ .
- Izobár folyamatok esetén  $W = -p\Delta V = -Nk\Delta T$ , azaz  $Q = \Delta E - W = f/2Nk\Delta T + p\Delta V = (f/2 + 1)Nk\Delta T$ . Azaz  $C_p = C_V + R$

Egyatomos gázok izochor (állandó térfogat mellett vett) mólhője például  $C_V = 12,5$  J/(mol K), míg izobár fajhőjük  $C_p = 21$  J/(mol K). A két érték kétatomos gázok esetén 21 illetve 30 J/(mol K).

A fenti folyamatokból **körfolyamatok** rakhatóak össze, amelyek során egy rendszer állapotai ciklikusan változnak. Ezen körfolyamatok során hő befektetése mellett munka végezhető: erre épülnek a termodinamikai gépek. Ilyen körfolyamatok mennek végbe az erőművekben és a robbanómotorban is például. A szokásos benzinmotor az **Otto-ciklust** járja be: ez két adiabatikus és két izochor folyamatból áll, ahogy azt a 4.10. ábra mutatja.

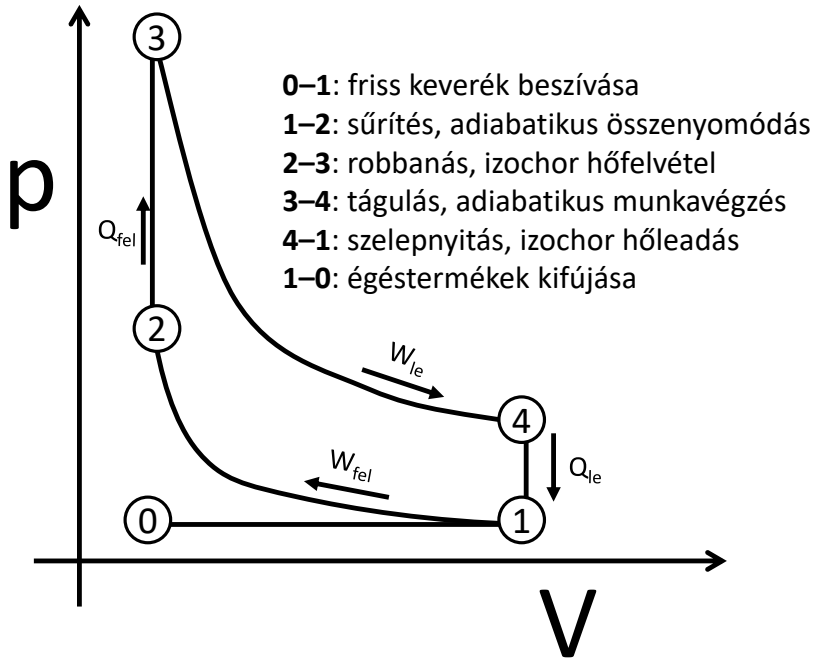
Az Otto-körfolyamat során is hőből munka keletkezik, pontosabban a rendszer felvesz  $Q_{\text{fel}}$  hőt, lead  $Q_{\text{le}}$  hőt (a körfolyamat ellentétes pontjain), továbbá  $W_{\text{fel}}$  munkavégzés történik rajta, és  $W_{\text{le}}$  munkát végez (ad le). Ekkor az energiamegmaradás miatt  $W_{\text{fel}} + Q_{\text{fel}} = W_{\text{le}} + Q_{\text{le}}$ , ahonnan (mivel a hasznosuló „nettó” munka  $W_{\text{hasznos}} = W_{\text{le}} - W_{\text{fel}}$ ):

$$\eta = \frac{W_{\text{hasznos}}}{Q_{\text{fel}}} = \frac{W_{\text{le}} - W_{\text{fel}}}{Q_{\text{fel}}} = 1 - \frac{Q_{\text{le}}}{Q_{\text{fel}}}. \quad (4.17)$$

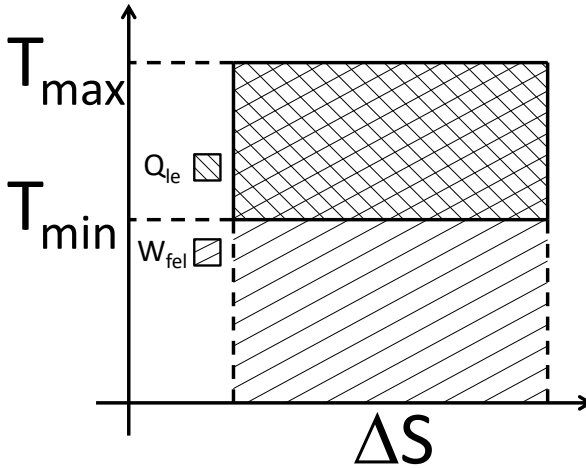
Miután a hőleadás csak az izochor folyamat során történik, ekkor  $Q = nC_V\Delta T$  használható; az adiabatikus változások során pedig munkavégzés történik, és ekkor  $TV^{\gamma-1} = \text{állandó}$ . Ezután az  $r = V_{\text{max}}/V_{\text{min}}$  kompressziós faktort definiálva a hatásfokra  $\eta = 1 - r^{1-\gamma}$  adódik. Tipikus értékek ( $r = 8$ ,  $\gamma = 7/5 = 1,4$ ) mellett  $\eta = 0,56$ . A benzinmotorok tehát a keletkező hőt 56%-os termodinamikai hatásfokkal alakítják mozgási energiává. További veszteség keletkezik az égés tökéletlensége, a mozgási energia veszteséges (súrlódó) átvitele és sok más jelenség miatt, ezért a tényleges hatásfok jóval alacsonyabb is lehet.

Elméleti és gyakorlati szempontból is érdekes kérdés, hogy milyen körfolyamattal lehet megvalósítani a legjobb hatásfokot. Peremfeltételként ki kell kötnünk, hogy a melegoldali („bemenő”) hőmérséklet nem lehet akármilyen nagy: például mert a gép szerkezeti anyagai nem viselnek el akármekkora hőmérsékletet. A hidegoldali hőmérséklet (ahol a hőleadás történik) pedig nem lehet akármilyen kicsi: például azért, mert a környezetünk 280–300 kelvines „hőtartályaiba” (folyóvízbe, levegőbe satöbbi) kell leadni a hőt. A kérdés tehát: ha adott a maximális  $T_{\text{max}}$  és a hidegoldali  $T_{\text{min}}$  hőmérsékletek, akkor milyen hőerőgép (körfolyamat) tudja a felvett hőt legnagyobb arányban munkává alakítani.

Kiderül, hogy az úgynevezett **Carnot-körfolyamat** (Carnot-ciklus) valósítja meg ezt, amelyet két adiabatikus és két izoterm folyamat alkot. A fentiekhez hasonlóan itt is  $\eta = 1 - \frac{Q_{\text{le}}}{Q_{\text{fel}}}$ , azonban az izoterm átalakulásokra vonatkozó  $Q = T\Delta S$  összefüggés



4.10. ábra. A bezinmotor működését leíró Otto-körfolyamat  $p - V$  diagramon. Kezdetben kicsi a térfogat, és a nyomás is (0. pont). Nyitott szelepekkel (azaz légköri nyomáson) megnő a térfogat, és bekerül a friss gázkeverék a rendszerbe (0-1). Ezután gyors (és így adiabatikus) összenyomódás következik (1-2), amelyet a motor tehetetlensége (vagy az indítómotor működése) tesz lehetővé. Ezután a gázkeverék hirtelen elég, és így (változatlan térfogaton) megnő a nyomás (2-3). A nagy nyomás hatására hirtelen (adiabatikusan) megnő a térfogat (3-4), ekkor történik a munkavégzés, a térfogat növekedése mozgatja meg az autót/motort. Ezután kinyílik a szelep, és így hirtelen lecsökken a nyomás (4-1), majd továbbra is nyitott szelepek mellett lecsökken a térfogat, és így távozik az elégett gázkeverék (1-0), majd mindez kezdődik előlről.



4.11. ábra. A Carnot-körfolyamat  $T - S$  diagramon. A folyamathoz egy nagyobb és egy kisebb hőmérsékletű hőtartályra van szükség, ezt jelöli a  $T_{\max}$  és a  $T_{\min}$  hőmérséklet. A folyamat hatásfoka éppen az ábrán látható téglalapok arányának felel meg.

miatt  $Q_{\text{le}}/Q_{\text{fel}} = T_{\min}/T_{\max}$ , azaz  $\eta = 1 - T_{\min}/T_{\max}$ . Itt  $T_{\min} \rightarrow 0$  esetén  $\eta \rightarrow 1$ , tehát a 100% hatásfok csak egy nullafokos közeggel lenne elérhető, ami viszont nem létezik. A Carnot-körfolyamat a lehető legnagyobb hatásfokú folyamat, és még ez sem 100% hatásfokú.

A Carnot-körfolyamat  $T - S$  diagramon vett állapotváltozásai a 4.11. ábrán láthatóak. Érdeemes észrevenni, hogy a hidegebb közeggel találkozáskor  $Q_{\text{le}} = T_{\min}\Delta S$  hőleadás történik, a melegebb közeggel találkozáskor pedig  $Q_{\text{fel}} = T_{\max}\Delta S$  hőfelvétel. A hatásfok pedig, ahogy fent írtuk,  $\eta = (Q_{\text{fel}} - Q_{\text{le}})/Q_{\text{fel}}$ , és így valójában az ábrán jelölt,  $[T_{\min}, T_{\max}]$  és  $[0, T_{\max}]$  oldalú területek aránya adja meg a hatásfokot. Ez általánosságban, tetszőleges görbén zajló körfolyamat esetén is érvényes, a  $dQ = TdS$  összefüggés miatt (ez ugyanis éppen a  $T(S)$  görbe integrálja): a felvett hő a zárt görbe felső ága alatti összes terület, a leadott hő az alsó, visszatérő ág alatti terület, a végzett munka pedig a kettő különbsége, vagyis a körbezárt terület.

Ebből az is adódik, hogy bárhogy is módosítanánk a  $T_{\min}$  és  $T_{\max}$  közötti részen elhelyezkedő görbe alakját, a hatásfokon csak rontani tudnánk a Carnot-esetchez képest:

- Ha a „felső” vonal nem végig  $T_{\max}$  mentén halad (nem vízszintes), akkor  $Q_{\text{fel}}$  csökken, de  $Q_{\text{le}}$  nem változik, így a hatásfok csökken.
- Ha az „alsó” vonal nem végig  $T_{\min}$  mentén halad (nem vízszintes), akkor  $Q_{\text{fel}}$  változatlan, de  $Q_{\text{le}}$  növekszik, így szintén csökken a hatásfok.

Beláttuk így tehát, hogy tényleg a Carnot-körfolyamat valósítja meg a **lehető legjobb hatásfokot**.

A hőerőgépek tehát melegebb helyről felvett hőt alakítanak hidegebb helyi hőleadásá, valamint hasznos munkává. Ha „megfordítjuk” a hőerőgép körfolyamatát, elérhetjük

azt, hogy a hó a hidegebb helyről menjen át a melegebb helyre, azon az áron, hogy hasznos munkát kell végeznünk. Ilyen, „fordított hőerőgép” tulajdonképpen a hűtőgép vagy a klímaberendezés: bevitt elektromos energia, azaz munka árán a hideget még lehűti, a hőt melegebb helyen „hulladékként” leadja. Ilyen a hőszivattyú is, amikor bevitt munkával a hideg helyről, például talajból kiszedve a hőt, a már melegebb helyet (például ház belsejét) tovább lehet fűteni. A gyakorlatban ezek többnyire gázkompresszorral működnek, a gázkeverék lecsapódásával, majd elforrálásával. A hőenergiának a „természetessel” szembeni áramoltatása tehát lehetséges, de csak munka befektetésével. A földhőszivattyú arra is alkalmas, hogy (mivel a földben kellő mélységben télen-nyáron nagyjából állandó a hőmérséklet) nyáron hűteni, télen fűteni lehessen vele, elektromos energia befektetésével.

## 4.4. Ellenőrző kérdések

1. Milyen hőmérsékleti skálákat ismersz, és mi köztük az összefüggés?
2. Mi a fajhő?
3. Mit jelent, ha egy anyag fajhője  $1000 \text{ J/kg/K}$ ?
4. Mennyivel nő meg egy anyag hőmérséklete  $Q$  hő hatására?
5. Milyen fázisátmeneteket ismersz?
6. Hogyan néz ki a víz fázisdiagramja?
7. Hogyan változik a víz forráspontja a nyomással?
8. Hogyan változik a jég olvadáspontja a nyomással?
9. Mit jelent a víz kritikus pontja?
10. Mi az a hármaspont?
11. Mi az a látens hő?
12. Mennyi energia kell egy liter víz elforrálásához?
13. Mennyi hőre van szükség egy kg jég megolvasztásához?
14. Mi történik, ha  $-10$  Celsius-fokos jeget teszünk egy  $120$  Celsius-fokos gőzzel teli kamrába?
15. Mi a hőátadás három formája?
16. Mi a hőátadás leghatékonyabb formája többnyire?
17. Hol jelenik meg hőáramlás a mindennapi életben?
18. Mitől függ a hővezetéssel átadott hőmennyiség?
19. Mi az a hővezetési együttható?

20. Mitől függ az ablakon át elveszett hő mennyisége (időegységenként)?
21. Mondj jó hővezető (azaz rossz hőszigetelő) és rossz hővezető (azaz jó hőszigetelő) anyagokat!
22. Miért hűt rosszabbul a jeges hűtőgép?
23. Mi a hőszugárzás alaptörvénye?
24. Mi az a hőmérsékleti sugárzás?
25. Mi a hőszugárzás hőmérséklete és színe között a kapcsolat? Mondj példákat!
26. Miért fehér színű a Nap?
27. Hogyan változik az anyagok mérete a hőmérséklettel?
28. Mennyi egy tipikus hőtágulási együttható?
29. Mi a kapcsolat a lineáris és a térfogati hőtágulás között?
30. Milyen anyagoknak kicsi/nagy a hőátadási együtthatójuk?
31. Miért görbülnek meg nyáron a sínek?
32. Mire szolgálnak a dilatációs rések hidakon?
33. Miért változik a vasúti felsővezetékek feszessége az év során?
34. Miért nem fagy be a tavak alja általában?
35. A molekulák/atomok nyelvén kifejezve mi okozza a hőérzetet?
36. Mit jelent egy molekula szabadsági fokainak száma?
37. Hány szabadsági foka van egy molekulának?
38. Mi az ekvipartíció tétele?
39. Mi a hőmérséklet definíciója molekuláris szinten?
40. Mennyi egy oxigénmolekula átlagos sebessége 23 fokos levegőben (hogyan számolható ki)?
41. Mi okozza a nyomást molekuláris szinten kifejezve?
42. Mi az ideális gázok állapotegyenlete?
43. Milyen gáztörvények következnek az ideális gázok állapotegyenletéből?
44. Mennyi az ideális gázok belső energiája?
45. Mennyi az ideális gázok mólhője?
46. Mennyiben mások a Van der Waals-gázok, mint az ideális gázok?
47. Mi az entrópia értelmezése?



48. Hogyan adhatjuk meg az entrópiaváltozást állandó hőmérsékletű rendszerben?
49. Hogy adhatjuk meg az entrópiát a valószínűségi képben?
50. Mit jelentenek a makro- és a mikroállapotok?
51. Mi a termodinamika nulladik főtétele?
52. Mi a termodinamika első főtétele? Mi benne az egyes tagok előjelének definíciója (mikor pozitív/negatív)?
53. Mi a termodinamika második főtételének három megfogalmazása?
54. Mit tudunk termodinamikai folyamatok hatásfokáról?
55. Mit tudunk reverzibilis körfolyamatokról?
56. Mi a termodinamika harmadik főtétele?
57. Mi az adiabatikus/izochor/izobár/izoterm állapotváltozás?
58. Gázok fajhője izochor vagy izobár változás esetén nagyobb? Mennyivel?
59. Rajzold le  $p$ - $V$  vagy  $T$ - $S$  diagramon az adiabatikus/izochor/izobár/izoterm állapotváltozásokat!
60. Rajzold le az Otto-motor körfolyamatát  $p$ - $V$  diagramon!
61. Mennyi az Otto-motor termodinamikai hatásfoka?
62. Rajzold le a Carnot-körfolyamatot  $T$ - $S$  diagramon!
63. Mennyi a Carnot-körfolyamat termodinamikai hatásfoka?
64. Miért különleges a Carnot-körfolyamat?

## 5. fejezet

# Elektromosság és mágnesesség

## 5.1. Az elektromosság alapjelenségei

Az elektromosság és mágnesség végső soron szinte minden körülöttünk zajló esemény vagy folyamat alapját képezi, ezért tárgyalása kiemelkedően fontos. A következő részek célja a fizika ezen ágának alapfogalmainak és törvényeinek kifejtése.

### Kísérlet: vattadarab lebegtetése

- Megdörzsölt műanyagrúddal vattadarabot vonzunk a rúdhoz. Néhányszor lerázva a vattadarabot a rúdról, a rúd taszítani fogja a vattát, így azt lebegtetni is tudjuk a rúd fölött.
- Az elektromos állapotba hozott testek a semlegeseket a polarizáció vagy a megosztás lévén (attól függően, hogy szigetelő vagy vezető a semleges test) vonzzák.
- A vattadarab és a műanyagrúd érintkezésekor a vattadarab átvesz a rúd töltéséből, így azonos töltésűvé válnak. Kis mértékű átvétel esetén a polarizáció miatt még mindig vonzást tapasztalunk (egy-két lerázással a vattadarab visszavonzható a rúdra), de többszöri átvétel után taszítás figyelhető meg.
- Sajnos ez a kísérlet csak egészen specifikus anyagokkal működik, mert az egész az elektronok „átdörzsölésén” alapul.

### 5.1.1. A Coulomb-törvény

Az elektromosságot az ókorban fedezték fel („már a görögök is”), pontosabban azt a jelenséget, hogy a szőrmével dörzsölt borostyán tárgyak taszítják egymást, a szőrmét pedig vonzzák. (A máig használatos szótó eredete, az „elektron” szó az ógörögben borostyánkővet jelent.) Ez kétféle állapot megjelenésére utal, ezeket jellemezzük pozitív és negatív töltéssel. A modern korban Franklin (villám), Galvani (békacomb), Volta (áram) és Coulomb (erő) kísérletei hozták létre a fizika elektromossággal foglalkozó ágát. **Coulomb 1785-ben publikált törvénye** így hangzik:

*„A két ponttöltés közötti elektrosztatikus erő nagysága arányos a két töltés nagyságának szorzatával, és fordítottan arányos a köztük lévő távolság négyzetével. Az erő a töltéseket összekötő egyenes mentén hat. Ha egyforma töltésűek, akkor az erő taszító, ha ellentétes töltésűek, akkor az erő vonzó típusú.”*

(Érdekes észrevenni, hogy ez a törvény a gravitációs törvényhez igen hasonló, kivéve, hogy van negatív töltés is, míg negatív tömeg nincsen.) Ezt ma inkább egyenlettel fogalmazzuk meg, eszerint egymástól  $r$  távolságra lévő  $q_1$  és  $q_2$  töltés között (amelyeket a töltés SI-beli egységében, coulombban (C) adunk meg):

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \text{ erő hat, illetve vektorosan: } \vec{F} = k \frac{q_1 q_2 \vec{r}}{r^3}, \quad (5.1)$$

ahol  $k \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$  a Coulomb-féle állandó. A töltés egysége tehát a coulomb (C), ami úgy is definiálható tehát, hogy két 1 C töltésű, egymástól 1 méter távolságra lévő töltés közötti erő  $9 \cdot 10^9 \text{ N}$ . Hivatalosan ennél trükkösebb az egység definíciója,

az áramon és az áramjárta vezetők közötti erőn keresztül adott, ezzel itt most nem foglalkozunk.

A fenti  $k$  állandót  $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$  módon is megadhatjuk, ahol  $\epsilon_0$  egy új állandó, amelynek neve: a vákuum elektromos permittivitása.<sup>1</sup> Értéke  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ .

Ha a két töltés nem vákuumban van, akkor használható a közeg  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  permittivitása, ahol  $\epsilon_r \geq 1$  a relatív permittivitás (ami a közeg polarizálhatóságával függ össze). Adott töltések által létrehozott elektromos tér egy konkrét pontban vett értéke tehát polarizálható közeg hatására csökken. Víz esetén például  $\epsilon_r = 80$ , ennek is köszönhető, hogy a szervezetünkben az életműködéshez nélkülözhetetlen fizikai-kémiai folyamatok (amelyek például elektrosztatikus kötések szétszakításával járnak) megvalósíthatók.

Ma már tudjuk, hogy a töltés hordozói az atomok és az elektronok; a legkisebb lehetséges töltés értékét Millikan mérte meg először, 1909-ben. Porlasztás során véletlenszerűen töltött olajcseppek zuhanását figyelte mikroszkóppal, elektromos térben és anélkül. Ebből meg tudta határozni az elemi töltés értékét: ez  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Ez éppen az elektron ( $-e$ ) vagy proton ( $+e$ ) töltésének felel meg. Érdekes kiszámolni, hogy két  $10^{-10} \text{ m}$  távolságra lévő elektron között az erő  $2,3 \cdot 10^{-8} \text{ Newton}$ , ami megdöbbentően nagy gyorsulást eredményezne ( $10^{22} \text{ m/s}^2$ ).

Az anyag „működése” sok tekintetben az elektromos kölcsönhatáson (a Coulomb-törvényen), valamint a kvantumelméleten múlik. Később látni fogjuk, hogy a kvantumelméletben kiderül, hogy az elektronokat nem lehet akármennyire kis térrészbe összehúfolni. Egyfelől hat tehát az elektronok ilyenfajta kvantumelméleti „taszítása”, másfelől a pozitív töltésű atommagok és a negatív töltésű elektronok vonzása (és kisebb részben számít az elektronok elektromos taszítása) együtt felelősek az anyagok megfigyelt tulajdonságaiért. Ezért maradnak egyben az atomok, molekulák, a szilárd testek. (Abszurd példával élve: az elektromos kölcsönhatás és a kvantumelmélet összjátéka nem engedi átadni a sapkánkat a fejkönk.) A hőtan (molekulák ütközései, köztük fellépő kölcsönhatás), a (bio)kémia (a molekulák és atomok elektronszerkezetével magyarázható), a sűrűlódás, vagy felületi feszültség is ennek a két alapvető törvénycsaládnak a származékai.

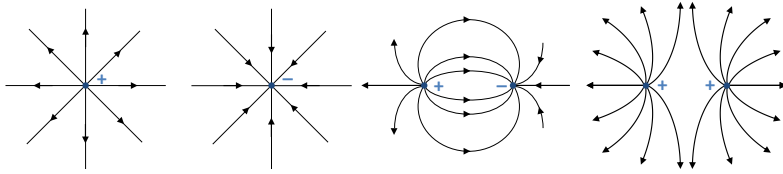
### 5.1.2. Térerősség és erővonalak

A Coulomb-törvény helyett máshogy is megközelíthetjük az elektromosságot. A töltések között ható erő nem kellemes fogalom: ez az eddigiek alapján olyan lenne, hogy a töltések távolságának változását azonnal „leköveti”, azaz végtelen nagy sebességgel terjedő hatást (távolhatást) jelentene. Kiderül majd, hogy (észszerű feltételezések mellett) semmilyen hatás nem terjedhet a fényénél nagyobb sebességgel. Ezért a távolható erő koncepcióját módosítani kell. Első lépésként ehhez vezessük be az **elektromos tér** fogalmát, illetve a térerősséget. Hogy egy adott pontban  $E$  a térerősség, az a következőt jelenti: ha ebben a pontban elhelyezünk egy  $q$  töltést, akkor arra

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (5.2)$$

erő hat, azaz a térerősség is vektor ez alapján, az erő irányába mutat. Hogy jobban megértsük ezt a fogalmat, fogalmazzuk át a Coulomb-törvényt: a  $Q$  töltés elektromos

<sup>1</sup>A „permittivitás” latin szó olyasmint jelent, hogy „megengedőképeség”: mintegy azt, hogy „mennyire engedi meg” a vákuum, hogy az elektromos erő hasson.



5.1. ábra. Néhány egyszerű töltéskonfiguráció által létrehozott elektromos tér erővonalai. Az erővonalak kezdőpontja egy pozitív töltés, végpontja negatív töltés. Ha nincs kezdő- vagy végpontjuk, akkor a végtelenből jönnek, vagy oda tartanak (illetve ahogy később látni fogjuk, önmagukba is záródhatnak).

teret kelt, amelynek nagysága  $r$  távolságban

$$E = k \frac{Q}{r^2}, \text{ avagy vektorosan } \vec{E} = k \frac{Q\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\vec{r}}{r^3}. \quad (5.3)$$

Ahelyett tehát, hogy azt mondanánk: „a két töltés között hat az erő” (távolhatással), azt mondjuk: „a töltés elektromos teret kelt maga körül, és ez az elektromos tér hat a másik töltésre (annak helyén, vagyis közelhatással)”. Az eredmény most még ugyanaz mindkét megfogalmazásban: az  $\vec{E}$  elektromos tér hat a  $q$  töltésre, méghozzá  $\vec{F} = \vec{E}q$  mértékben. Két ponttöltés között tehát az erő nagyságára az elektromos tér használatával is  $F = kQq/r^2$  adódik, azaz visszakapjuk a Coulomb-törvény eredeti alakját (vektorosan is természetesen). A térerősség jelentése még egyszer tehát: ha egy  $q$  töltésű „próbatestre” egy adott pontban  $F$  erő hat, akkor ott  $E = F/q$  térerősség van.

Valójában azt gondoljuk, hogy nem is a Coulomb-erő az, ami „létezik”, hanem az elektromos tér (vagy inkább elektromos mezőnek hívjuk sokszor). Ez sokkal szélesebb körben értelmezhető, lényegesebb mennyiség, mint az erő. Ki fog derülni, hogy általános esetben bonyolultabb törvények vonatkoznak rá, mint fentebb egyszerűen megfogalmaztuk.<sup>2</sup> A térerősség egy töltés esetén is létezik, azaz akkor is, ha nem eredményez erőt.

Az elektromos teret **erővonalakkal** szemléltetjük. Az erővonalak mindig a térerősség irányába mutatnak, azaz az érintőjük adott pontban a térerősség (emiatt nem is metszik egymást), az erővonalak sűrűsége pedig a térerősség nagyságát jelzi az adott pontban. Az erővonalak mindig pozitív töltésből indulnak ki és negatív töltésben végződnek (vagy a végtelenben). Egy vagy két töltés terét egyszerű felrajzolni ezek alapján, ahogy az 5.1. ábrán is látható.

Érdekes kérdés, hogy ha az atomok semlegesek, akkor hogyan tarthatja mégis össze az elektromos erő őket molekulákban, illetve szilárd testekben. Ennek az a magyarázata, hogy az atomok polarizálják egymást, ennek eredményeképpen egy atom már inkább úgy képzelhető el, mint két,  $+q$ , illetve  $-q$  nagyságú, egymástól  $d$  távolságra lévő töltés. Az ilyen elrendezés neve: **dipólus**. Egy ilyen dipólus elektromos tere a dipólustól messze, a tengelye mentén  $x \gg d$  távolságban könnyen kiszámítható. Ekkor az egyik töltéstől vett távolság  $x + d/2$ , a másiktól pedig  $x - d/2$ . Az elektromos terek összege adja a

<sup>2</sup>A későbbiekben látni fogjuk azt is, hogy ezen törvényekből már következik az is, hogy a térerősségeket használva a hatás terjedési sebessége tényleg nem fogja túllépni a fénysebességet.

dipólus elektromos terét, így

$$E_{\text{dip}} = kq \left[ \frac{1}{(x - d/2)^2} - \frac{1}{(x + d/2)^2} \right] \quad (5.4)$$

$$= \frac{2kqd}{x^3} = \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 x^3}, \quad (5.5)$$

ahol, feltéve, hogy  $d \ll x$ , felhasználhattuk az  $(1 + a)^n \approx 1 + an$  közelítést, illetve behelyettesítettük az  $\epsilon_0 = 1/(4\pi k)$  dielektromos állandót is. A fenti egyenletben szereplő  $qd$  mennyiséget a rendszer dipólusnyomatékának is nevezzük. Ez a molekulák közötti *másodrendű* kölcsönhatás alapja. Az erő két ilyen dipólus között:

$$F_{\text{dip-dip}} \approx \frac{6kq^2 d^2}{x^4} = \frac{3q^2 d^2}{2\pi\epsilon_0 x^4}. \quad (5.6)$$

### Kísérlet: világító uborka

- Egy uborkára változtatható feszültségű transzformátorral egyre nagyobb (váltó-) feszültséget kapcsolunk. Adott feszültség (körülbelül 100 volt) felett az uborka elkezd világítani!
- A feszültség elektromos teret hoz létre, ez erővel hat az uborkában lévő töltésekre. A pozitív és a negatív töltésekre ellentétes irányú erő hat, ezért ezek szétszakadnak, ionizáció jön létre. Ezek a szabad töltések már gyorsulni kezdenek, felforrósítva az uborka anyagát.
- A hő hatására buborékok keletkeznek, amelyekben viszont ívkiülések következnek be. Ezekben annyira nagy a hőmérséklet, hogy az a látható fény tartományában sugározzon.
- Ezt a kísérletet senki ne próbálja ki otthon!

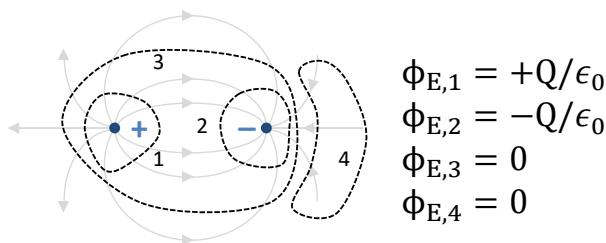
### 5.1.3. A fluxus és a Gauss-törvény

A térerősségen túl egy másik fontos absztrakt mennyiséget is definiálunk, amely a későbbiekben igen hasznos lesz számunkra. Ez a mennyiség az adott felülethez tartozó **fluxus**. A fluxust adott felületre vonatkoztatva definiáljuk, értéke konstans térerősség és sík felület esetén

$$\Phi_E = \vec{E} \vec{A} = EA \sin \alpha, \quad (5.7)$$

ahol  $\vec{A}$  a felület nagyságával megegyező, a felületre merőleges vektor,  $\alpha$  pedig  $\vec{E}$  és  $\vec{A}$  bezárt szöge. Fontos látni, hogy mivel a térerősség az erővonalak (felületi) sűrűségét adja meg, így adott felület fluxusa a rajta átmenő erővonalak számát adja meg (a merőlegesség mértékével súlyozva). Ha a térerősség változik, vagy a felület nem sík, akkor az  $A$  felületet fel kell bontani infinitezimális  $dA$  felületelemekre, amelyeken már konstans a térerősség, és ekkor

$$\Phi_E = \int \vec{E} d\vec{A} = \int E \sin \alpha dA \quad (5.8)$$



5.2. ábra. Egy töltéspár (dipólus) körüli felületek fluxusai. Az 1. számú felület belseje magába foglalja a pozitív töltést, így ennek fluxusa  $+Q/\epsilon_0$ . A 2. számú felület belseje a negatív töltést tartalmazza, így ennek fluxusa  $-Q/\epsilon_0$ . A 3. és 4. számú felületeken belül nincsen töltés, vagy összesen nulla töltés van, így a Gauss-tétel értelmében ezek fluxusa nulla.

lesz a fluxus definíciója.

A definícióból következik, hogy ha egy zárt felületen belül nincs töltés, akkor a bemelő vonalak ki is jönnek (csak töltésben végződhetnek!), ezért ezen a felületen a fluxus nulla. Gondoljunk el ezek után egy  $r$  sugarú gömböt egy  $Q$  töltés köré. Ekkor a képzeletbeli gömbfelület minden kis elemére  $dA$  párhuzamos a helyi  $\vec{E}$  térerősségvektorral, és minden pontban  $E = kQ/r^2$ . Emiatt erre a gömbfelszínre

$$\Phi_E = \int \vec{E} d\vec{A} = E \int dA = EA = k \frac{Q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi kQ = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (5.9)$$

tehát  $\Phi_E = Q/\epsilon_0$  a gömb sugarától függetlenül. Ez általánosítható nem gömb alakú, de zárt felületre, illetve több töltést bezárt felületekre is. A végső következtetésünk a **Gauss-törvény**: összesen  $Q_{\text{bent}}$  töltést tartalmazó zárt felület fluxusa

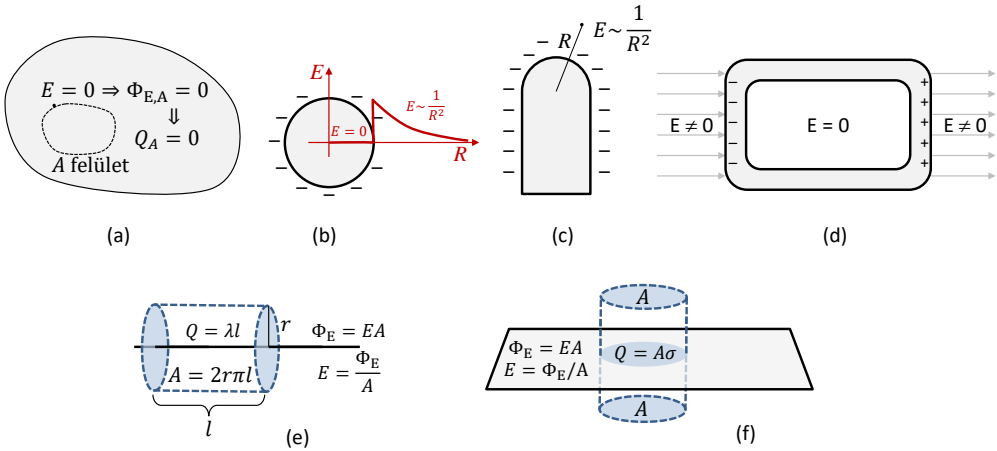
$$\Phi_{E,\text{zárt}} = \int_{\text{zárt}} \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{bent}}}{\epsilon_0}. \quad (5.10)$$

A fentieket illusztrálendő, az 5.2. ábrán négy képzeletbeli felület fluxusa látható.

A Gauss-törvényből néhány egyszerű „gyakorlati” következmény adódik:

- a) Töltött, tömör vezető test esetén a testen belül mindenhol  $E = 0$ , mivel különben a belül lévő szabad elektronok mozognának (ez a vezető anyag definíciója: benne lényegében szabad töltések találhatóak, amelyek kis elektromos tér hatására is könnyedén elmozdulnak). Emiatt egy tetszőleges, belül elképzelt zárt felületre a fluxus nulla,  $\Phi_E = 0$ . A Gauss-törvény miatt azonban ezen elképzelt felületen belül ekkor nem lehetnek töltések. Ez a képzeletbeli felület tetszőleges, tehát a vezető test belsejében sehol sem lehetnek töltések, ahogy azt az 5.3.a ábra mutatja. Ez azt jelenti, hogy ilyenkor az összes töltés a test külső felületén gyűlik össze (és akár üreges testre is kiterjeszthető a bizonyítás).
- b) Töltött vezető gömb elektromos tere a gömbön belül tehát  $E = 0$ . A gömb köré rajzolt  $A = 4R^2\pi$  felületű (képzeletbeli) gömbfelszínén a fluxus  $\Phi_E = Q/\epsilon_0 = 4\pi kQ$  értéket vesz fel, ahonnan

$$E_{\text{bent}} = 0 \text{ és } E_{\text{kint}} = \frac{\Phi_E}{A} = \frac{kQ}{R^2}, \quad (5.11)$$



5.3. ábra. A Gauss-törvény néhány következménye. Tömör vezető testen belül egyensúlyi helyzetben nincsenek töltések, legfeljebb a felszínén (a). Vezető gömb tere belül nulla, kívül olyan, mint egy ponttöltésé (b). „Csúccsal” rendelkező objektum körül (kis  $R$  esetén) igen nagy elektromos tér alakulhat ki (c). Üreges vezető belsejében állandó külső tér esetén sem alakul ki elektromos tér, azaz Faraday-kalitka alakul ki (d). Hosszú egyenes vezető (e) és nagy síklap (f) elektromos tere is kiszámítható a Gauss-törvény segítségével.

ahogy azt az 5.3.b ábra mutatja. Ez azt is jelenti, hogy az elektromos tér a gömbön kívül olyan, mintha a gömb helyett az origóban ülő azonos töltésű ponttöltésünk lenne.

- c) **Csúccshatás:** az éles csúcs kis gömbgént viselkedik, itt tehát  $E = kQ/R^2$ , a csúcshoz nagyon közel (kis  $R$  esetén)  $E$  nagyon nagy lehet, ahogy azt az 5.3.c ábra mutatja. Ez adja a villámhárító működésének alapját: a csúcs nagy elektromos tere ionizálja a levegőmolekulákat, így vezetővé válik a levegő, a villám árama inkább arra fog „folyni” a levegőben, mint máshova.
- d) Elektromos térbe helyezett üreges vezető test esetén viszont az következik ebből, hogy az üregben nem lehet elektromos tér sehol! Ez a **Faraday-kalitka**, ahogy azt az 5.3.d ábra mutatja. Ezt majd a potenciál definíciója segítségével vezetjük le.
- e) Egy  $\lambda$  [C/m] lineáris töltéssűrűséggel töltött vezeték elektromos tere a köré rajzolt (képzelt)  $r$  sugarú,  $l$  hosszúságú hengerrel számolható, ahogy azt az 5.3.e ábra mutatja. Ennek csak a palástján van fluxus, hiszen a végein található síkokon nem megy át a térerősség, hanem éppen párhuzamos azokkal. A palást felszíne  $A = 2\pi r l$ , az ezen belüli töltés  $Q = \lambda l$ , innen a Gauss-törvény ( $\Phi_E = Q/\epsilon_0$ ) segítségével adódik, hogy

$$E_{\text{egyenes vezető}} = \frac{\Phi_E}{A} = \frac{2k\lambda}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (5.12)$$

- f) Egy  $\sigma$  [C/m<sup>2</sup>] felületi töltéssűrűséggel feltöltött síklap elektromos tere ugyanígy (képzelt) hasábról megkapható. Ennek csak a lapján van fluxus (hiszen az oldallapjai párhuzamosak a térerősséggel), és ha ezek felszíne  $A$ , akkor a bezárt töltés  $Q = A\sigma$ , ahogy azt az 5.3.f ábra mutatja. Emiatt a fluxus  $\Phi_E = Q/\epsilon_0$ , és a



térerősség

$$E_{\text{síklap}} = \frac{\Phi_E}{2A} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad (5.13)$$

azaz konstans (a kettes szorzó amiatt van, hogy összesen kétszer  $A$  felületünk van). Két ellentétes töltésű lap között a térerősség ennek kétszerese,

$$E_{\text{két síklap}} = \frac{\Phi_E}{A} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (5.14)$$

Ezt az elrendezést hívjuk **kondenzátornak**. Azt is mondhatjuk tehát, hogy az ilyen kondenzátorban  $E$  térerősség esetén  $Q = EA\epsilon_0$  töltés jelenik meg.

### Kísérlet: alufóliába tekert mobiltelefon

- Az alufólia elég jó vezető, így a belsejében az elektromos térerősség nulla. Ez sztatikus (időben nem változó) esetre vonatkozik, de eléggé megzavarja a mobilkommunikáció során küldött jeleket is (amelyek persze térben és időben változó elektromos tér formájában terjednek).
- A fóliába tekert telefont hívva az nem lesz kapcsolható: a fólián belül nem tud jeleket fogadni és küldeni.
- Egy réteg fólia nem biztos, hogy elég, éppen a nagy frekvencia és a tér „behatolási mélysége” miatt.
- Az alufólia elég hamar kilyukad, ami szintén „elronthatja” a kísérletet (a lyukon át mégis bejut a jel).

## 5.2. Elektromos feszültség és elektromos áram

### 5.2.1. Az elektromos potenciál

Ahogy láttuk, az elektromos térbe helyezett töltésre erő hat. Feltehetjük a kérdést, hogy mekkora energiára (munkára) van szükség, hogy egy töltést két pont között ezen erőtér ellenében mozgassunk? Vagy ekvivalensen, ha a töltést az erőtér mozgatja (gyorsítja), akkor mekkora munkát végez rajta, mekkora mozgási energiára tesz szert így a töltés? Mindezeket a munka 2.6.1. szakaszban tárgyalt  $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$  definíciójának segítségével számíthatjuk ki. Ha ismert az  $a \rightarrow b$  út minden pontjában a töltésre ható  $\vec{F} = q\vec{E}$  erő, akkor az út során végzett munka

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = qU_{a \rightarrow b}, \text{ azaz} \quad (5.15)$$

$$U_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (5.16)$$

Az itt bevezetett  $U_{a \rightarrow b}$  mennyiség neve: a két pont közötti **elektromos potenciálkülönbség**, avagy **elektromos feszültség**. A definíció alapján ha egy töltés adott  $U$  feszültségkülönbségen halad át, akkor  $qU$  energiára tesz szert. A feszültség, azaz az

elektromos potenciálkülönbség mértékegysége a definíciónak megfelelően J/C, ennek neve „volt” (V, Alessandro Volta nevéből). 1 volt feszültség egy elektront egy elektronvolt (eV) energiára gyorsít, ahol tehát  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  energia. Az egy elektronvolt energiájú elektron sebessége az  $E = mv^2/2$  összefüggés alapján  $v = \sqrt{2E/m} \approx c/505 \approx 593\,000 \text{ m/s}$ , azaz 600 kilométer másodpercenként.

Ahogy a 2.6.3. szakaszban tárgyaltuk, konzervatív erőter esetén (és az állandó elektromos erőter ilyen) ez a munka nem függ a konkrét úttól. Ekkor

$$W_{a \rightarrow b} = V_a - V_b \quad (5.17)$$

szert írható le, azaz minden  $r$  ponthoz hozzárendelhető egy  $V(r)$  *potenciális energia* (szabadon választott „nulla szinttel”). Ezzel az adott pont **elektromos potenciálja** is definiálható,  $U = V/q$  módon, és ekkor

$$U_{a \rightarrow b} = U_a - U_b. \quad (5.18)$$

A potenciális energiához hasonlóan az  $U = 0$  szint is bárhol felvehető, többnyire a „föld” feszültségét vesszük ennek, vagy a „végtelenben” vett potenciált, ezzel

$$U(r) = \int_r^\infty \vec{E}(s) \vec{ds} \quad (5.19)$$

módon definiálható.

Érdeemes megvizsgálni, hogy két nagyon közeli (végtelenül, infinitezimálisan közeli) pont potenciálkülönbsége mekkora: ezek között már határesetben konstans a térerősség, így  $dU = -\vec{E} \vec{ds}$  írható fel. A szorzást kibontva

$$-dU = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad (5.20)$$

adódik, ami matematikailag megfordítva

$$\vec{E} = - \left( \frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}, \frac{dU}{dz} \right), \text{ avagy } E = \text{grad } U. \quad (5.21)$$

A térerősség tehát az elektromos potenciál gradiense – ahogy a mechanikában pedig az erő a potenciális energia gradiense. Ez azt jelenti, hogy a térerősség a potenciál legnagyobb csökkenésének irányába mutat, a töltések maguktól ebbe az irányba mozdulnak el – ahogy egy változó magasságú terepen elhelyezett labda is a legmeredekebb irányban gurul el.

A fenti definíciókkal néhány konkrét esetben számoljuk ki két pont potenciálkülönbségét, illetve a nulla szintet definiálva egy adott pont elektromos potenciálját. Homogén elektromos térben (ahol  $E$  állandó) a potenciálváltozás szempontjából csak a térerősség irányába történt elmozdulás számít (merőlegesen mozogva a munkavégzés ugyanis nulla). Ekkor  $h$  „magasságban” egy  $q$  töltés elektromos energiája  $V(h) = qEh$  (hasonlóan a gravitációs térhez, ahol  $V_{grav}(h) = mgh$ ), azaz homogén  $E$  térben  $h$  helyen az elektromos potenciál  $U = E \cdot h$ . Másféppen  $d$  távolságon lévő  $U$  feszültség esetén a térerősség átlagosan  $E = U/d$ . Vegyük továbbá egy  $Q$  ponttöltés elektromos terét, amely  $r$  helyen  $E(r) = kQ/r^2$ ; erre szintén levezethető az elektromos potenciál nagysága, az (5.19) egyenletbeli definíció alapján. Az eredmény

$$U_{\text{ponttöltés}}(r) = -\frac{kQ}{r}, \quad (5.22)$$

és ez a Gauss-törvény miatt nemcsak ponttöltésre, hanem gömbszimmetrikus töltéeloszlásra is igaz.

A fentiekkel a kondenzátorral kapcsolatban is egy további összefüggést kaphatunk. Ahogy korábban láttuk, két egyenletesen töltött síklap között homogén  $E = \sigma/\epsilon_0$  térerősség alakul ki, itt tehát a síklapok  $d$  távolságát és  $Q$  töltését figyelembe véve

$$U = \frac{E}{d} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 d} = \frac{Q}{\epsilon_0 A d} \quad (5.23)$$

adódik. Ez alapján bevezethetjük a **kondenzátor kapacitását**:

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 A d, \quad (5.24)$$

és ez azt jelenti, hogy a kondenzátort  $U$  feszültségre kapcsolva  $Q = CU$  töltést tud tárolni. Itt a kapacitás jele  $C$ , mértékegysége coulomb/volt, azaz  $C/V$ , ennek neve farad (F), Michael Faraday nevéből. Ha a kondenzátor lemezei között polarizálható közeg van, akkor a fenti kifejezést ki kell egészítenünk a közegre jellemző  $\epsilon_r$  értékkel, így a kapacitás tovább növelhető. A feltöltött kondenzátor energiát tárol, amelyet a kondenzátor kisütésekor tudunk felhasználni. Az energia mértéke azzal a munkavégzéssel egyezik meg, amely a töltéseknek a kondenzátor lemezeire való felviteléhez volt szükséges. Egy kis  $dQ$  töltést az aktuálisan  $U$  feszültségen lévő lemezpárra  $dW = U(Q)dQ$  munkavégzéssel vihetünk. Kezdetben a lemezek között nincs potenciálkülönbség, az a lemezek feltöltésével együtt, a felvitt töltéssűrűséggel (a felvitt töltés mennyiségével) egyenesen arányosan nő a maximális  $U$  értékig. A fenti kifejezést 0 és  $U$  között integrálva kapjuk, hogy az  $U$  feszültségre feltöltött kondenzátor energiája<sup>3</sup>

$$E_{\text{energia}} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}. \quad (5.25)$$

### Kísérlet: feltöltött kondenzátor kisütése

- Egy kézzel (forgatással) tölthető zseblámpában található kondenzátort töltünk fel.
- A zseblámpát bekapcsolva tartva süssük ki a kondenzátort: eközben áram folyik át a két végét összekötő vezetéken, így a lámpa világít.
- Ha a töltés kiegyenlítődés megtörtént, nem folyik tovább az áram, a lámpa nem világít tovább.

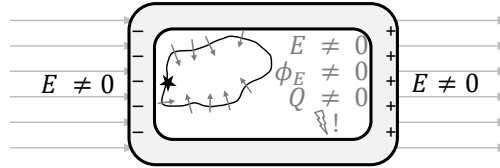
Definiálhatjuk továbbá az **ekvipotenciális felületek** fogalmát: ezeken  $U$  állandó. Ez a gravitációs analógiában tulajdonképpen a térkép szintvonalainak felel meg. Az elektromos térerősség ( $E$ ) mindig merőleges a szintvonalakra (ugyanis a térerősség iránya mindig az elektromos potenciál legnagyobb változásának iránya). Ebből az is adódik, hogy az erővonalak és az ekvipotenciális felületek merőleges hálózatot hoznak létre, ahogy az 5.4. ábrán látható.

Az ekvipotenciális felületek nem érintkezhetnek – hiszen adott felületen  $U$  értéke adott, két felületen különböző. Fontos ezzel kapcsolatban látni, hogy egy vezető minden pontja ekvipotenciális, hiszen különben lenne benne térerősség, és ennek hatására

<sup>3</sup>Figyeljünk arra, hogy az  $E$  ebben a szakaszban többnyire a térerősséget jelöli, egyes esetekben viszont az energiát!



5.4. ábra. Egy ponttöltés terének erővonalai (folytonos vonallal), és a hozzá tartozó ekvipotenciális felületek (szaggatott vonallal). A rajz természetesen kétdimenziós, mindezt három dimenzióban úgy kell elképzelni, hogy az erővonalak a ponttöltésből kiinduló félegyenesek, az ekvipotenciális felületek pedig gömbfelszínek.



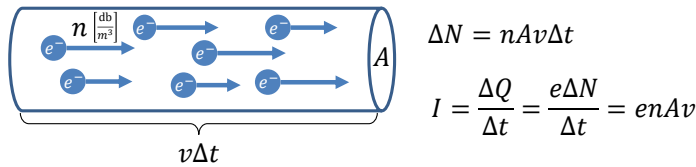
5.5. ábra. Faraday-kalitka működésének bizonyítása. A vezető testen belül egy tetszőleges ekvipotenciális felületet elképzelve beláthatjuk, hogy ezen a felületen a fluxus nem lehet nulla – hacsak a térerősség nem volt nulla.

a vezetőben jelen lévő szabad töltések elmozdulnának. A Faraday-kalitkára vonatkozó állítás könnyen bizonyítható ekvipotenciális felületekkel, amint azt az 5.5. ábra is mutatja:

- Tegyük fel, hogy az üregben van térerősség, azaz a potenciál pontról pontra változik (a térerősség ugyanis a potenciál változását jelenti).
- Rajzoljunk az üregben belül egy adott ponton átmenő, zárt, ekvipotenciális felületet (ilyen biztosan van, hiszen a fém belső felülete azonos potenciálon van).
- Az erővonalak erre a felületre merőlegesek, azaz ezen a felületen a fluxus nem lehet nulla.
- Az üregben azonban nincs töltés, így Gauss tétele miatt ellentmondásra jutottunk.
- Ez egy módon oldható fel: ha az üreg egész belső tere azonos potenciálon van, azaz ebben az adott pontban biztosan nincs térerősség.
- Ez azt jelenti, hogy az üregben belül sehol nincs térerősség!

### 5.2.2. Az elektromos áram

Ahogy láttuk, potenciálkülönbség hatására elektromos tér alakul ki (vagy fordítva), amely a szabad töltéseket elmozdíthatja. Ez az **elektromos áram** jelensége: vezető anyagra feszültséget kapcsolva a szabad töltések vándorolni kezdenek. A töltések vándorlását az áramerősséggel jellemezzük, amelynek definíciója az időegység alatt átáramlott töltésmennyiség. Ennek jele  $I$ , mértékegysége amper (A), amely 1 amper = 1 coulomb/sec módon definiált. Egy amper már elég nagy áram, egy háztartásban ál-



5.6. ábra. A vezetőben folyó áram a „szabad” elektronok  $n$  sűrűségétől, a vezető  $A$  keresztmetszetétől és az elektronok átlagos  $v$  driftsebességétől függ. Ez utóbbi a vezetőre kapcsolt feszültségtől függ (a térerősségen keresztül), illetve a lassító ütközések hatásától, amelyet a sűrűség és a hőmérséklet is befolyásol.

talában minden elektromos berendezés egyszerre üzemeltetése esetén is csak körülbelül 10-20 amper áram folyik.

Az áram konkrétan úgy alakul ki, hogy az elektronokat gyorsítja az elektromos tér, és mivel anyagban ütköznek a többi elektronnal, egyfajta közegellenállást tapasztalnak, amely a sebesség növekedésével nő. Amikor az elektromos tér gyorsító erejét éppen kioltja a megnövekedett „közegellenállás”, akkor az elektronok nem gyorsulnak tovább – hasonlóan az esőcseppek zuhanási sebességénél tanultakhoz. Az elektronok ezen határsebességét „driftsebességnek” nevezzük. Hogyan függ az áram erőssége ezen sebességtől, illetve mi mástól függ még vajon? Ha minden más adott, akkor nyilván a sebesség növekedésével egyenesen arányosan nő az áram is, hiszen egységnyi  $\Delta t$  időtartam alatt,  $v$  sebesség esetén  $v \cdot \Delta t$  távolságból érnek el az elektronok az adott felülethez. Ha a vizsgált vezetőben a szabad elektronok térfogategységre eső száma  $n$ , akkor ebben a  $v \cdot \Delta t$  hosszúságú, azaz  $Av \cdot \Delta t$  térfogatú részben

$$\Delta N = nAv \cdot \Delta t \quad (5.26)$$

szabad elektron van, azaz időegységenként ennyi éri el a felületet, ahogy az 5.6. ábra mutatja. Ez  $\Delta Q = e\Delta N$  töltésnek felel meg, mert az egyes elektronok töltése  $e$ . Míután az elektromos áram nagysága az adott felületen áthaladó töltések időegységenkénti mennyiségét jelenti, így

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = e \frac{\Delta N}{\Delta t} = enAv. \quad (5.27)$$

A szabad elektronok száma az adott vezetőre jellemző, a driftsebesség pedig arányos a megjelenő térerősséggel (hiszen ez gyorsítja az elektronokat), azaz az áramerősség is:  $I \sim E$ . Míután a térerősség pedig  $E = U/L$  módon számolható (ha  $L$  a vezető hossza, ahol az  $U$  feszültség kialakul), így végeredményben  $I \sim UA/L$ , a fenti (5.27) képletből a keresztmetszettől való függést is megtartva. Látható, hogy minél nagyobb a keresztmetszet, annál nagyobb az áram erőssége: a metróból kiáramló tömeg is könnyebben kijut, ha szélesebb a rendelkezésre álló folyosó. Az áramot befolyásoló többi tényező (az elektronokra ható „közegellenállás”, illetve a szabad elektronok számsűrűsége) kizárólag az anyagra jellemző. Ezt a tényezőt  $\rho$ -val jelölve

$$I = U \frac{A}{\rho L} \quad (5.28)$$

adódik, és  $\rho$ -t a vezető fajlagos ellenállásának nevezzük (hiszen láthatólag ennek növekedése csökkenti az áramot). Ennek mértékegysége  $\text{Vm/A}$  (volt·méter/amper). Vezető fémekre  $10^{-8}$   $\text{Vm/A}$  körüli érték jellemző (de ezen belül például az arany fajlagos ellenállása tízszer kisebb az acélénál), míg szigetelőkre, például üvegre  $10^{10}$ – $10^{14}$   $\text{Vm/A}$ . Ennek magyarázata az, hogy vezetőkben sok a szabad elektron, és ezek szinte akadálytalanul áramolhatnak. A fajlagos ellenállás többnyire a hőmérséklettel nő, hiszen ekkor a hőmozgás miatt több az ütközés, ami jobban lassítja az elektronokat. Érdeemes megemlíteni, hogy vannak **félvezető** jellegű anyagok is, amelyek ellenállása jelentősen függ egyéb körülményektől: alapesetben kevés a szabad („vezethető”) elektron bennük, de energia (például hő) hatására az elektronok nagy mennyisége szabaddá tehető, így az anyag jó vezetővé változik. Ezekről az 5.2.4. szakasz végén olvashatunk kicsit bővebben.

### 5.2.3. Az Ohm-törvény, az elektromos teljesítmény

Ha egy konkrét,  $L$  hosszúságú és  $A$  keresztmetszetű tárgyról beszélünk, akkor definiálhatjuk ennek az  $R = \rho L/A$  ellenállását, amelyet a fenti (5.28) formulába helyettesítve az **Ohm-törvényt** kapjuk:

$$U = RI. \quad (5.29)$$

Eszerint egy  $I$  áramot szállító  $R$  ellenálláson  $U$  mértékben csökken a feszültség, vagy másképp:  $R$  ellenálláson  $I$  áram „átfolyatásához”  $U$  feszültségre van szükség. Az ellenállás jele tehát  $R$ , mértékegysége pedig ohm, amit írásban  $\Omega$ -val jelölünk, és definíciója  $\Omega = \text{V/A}$ . Miután ebből  $I = U/R$  adódik, így nagyon kicsi ellenállásra feszültséget kapcsolva (azaz feszültségesezt létrehozva) nagyon nagy áram keletkezik – ez a rövidzárlat jelensége. Az Ohm-törvény ezen viselkedése a második Newton-törvényéhez hasonló (amely szerint szinte nulla tömegű testre erőt kifejtve szinte végtelen gyorsulás jön létre).

Fontos jelenség, hogy miután az elektronokat a gyorsító elektromos tér ellenében egyfajta „közegellenállás” avagy „belső súrlódás” lassítja, ez energiavesztéshez vezet, amely hő formájában jelenik meg. Ezért az elektromos áram folyásához folyamatos energiapótlásra van szükség. Ennek nagyságát úgy kaphatjuk meg, ha figyelembe vesszük, hogy egy  $e$  töltésű elektron  $U$  feszültségen való áthaladása során  $eU$  energiára tesz szert. Ugyanakkor ha  $U$  feszültség hatására  $I$  áram folyik, akkor az  $\Delta t$  idő alatt  $\Delta Q = I\Delta t$  töltést mozgat át  $U$  feszültségen, ez pedig  $\Delta W = UI\Delta t$  munkavégzésnek felel meg. Ez alapján a

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{U\Delta Q}{\Delta t} = \frac{UI\Delta t}{\Delta t} = UI \quad (5.30)$$

eredmény adódik. Eszerint ha egy  $R$  ellenálláson  $I$  áram folyik, és a rajta eső feszültség  $U$ , akkor az **ellenálláson leadott teljesítmény**:

$$P = UI = I^2R = U^2/R. \quad (5.31)$$

Ez a törvény nagyon fontos, hiszen ez szabja meg az elektromos eszközök működtetéséhez szükséges energiát. Ha például egy  $1 \Omega$  ellenállású eszközt kötünk a  $230 \text{ V}$  feszültségű elektromos hálózatba, akkor azon  $230 \text{ A}$  áram folyik majd, azaz az ez által

felvett teljesítmény kb 48 kW lesz, ami egy óra alatt 53 kWh fogyasztást jelent – ennek kapcsán 2017-es árakon Magyarországon körülbelül 2000 Ft költség keletkezik. A háztartási eszközeink ellenállása ennél általában lényegesen nagyobb, és emiatt teljesítményfelvételük lényegesen kisebb: például egy 60 W teljesítményű izzó ellenállása (az  $R = U^2/P$  összefüggés alapján, 230 V-tal számolva) körülbelül 880  $\Omega$ . A régebbi háztartási biztosítékok működése is jól szemlélteti az áram és a teljesítmény összefüggését: ha túl nagy áram folyik rajtuk, akkor az ezzel négyzetesen arányos hő megoldasztja a biztosítékot, megszakítva az áram folyását. Ezzel védekezünk a rövidzárlat és az extrém nagy áram, illetve teljesítményfelvétel kialakulása ellen.

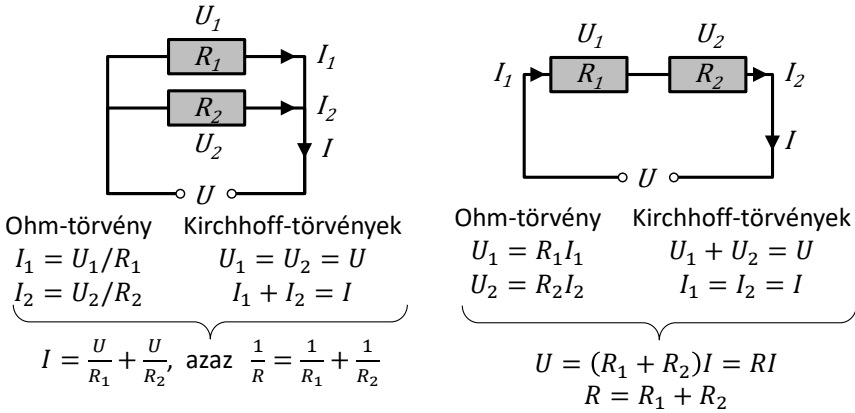
Az elektromos energiát távvezetéseken „szállítjuk”. Erre minden fogyasztó rákapcsolódhat, energiát „vételezve”. Ugyanakkor a fogyasztóhoz az esetenként több tíz vagy száz kilométerre lévő erőműből kell „elvinni” az elektromos energiát. Bár a távvezeték fajlagos ellenállása kicsiny, de összességében az ellenállása mégis nagy, az  $R = \rho L/A$  összefüggés és a vezeték nagy  $L$  hossza miatt. Így  $P = I^2 R$  miatt jelentős teljesítményt veszítünk a távvezetéken. Ezt úgy lehet elkerülni, ha a vezetékben folyó  $I$  áramot valahogy lecsökkentjük. Hogyan érhető ez el? Különböztessük meg a távvezetéken „hosszában” eső  $U_t$  feszültséget és a vezeték végei közötti, a fogyasztó által „használt”  $U_f$  feszültséget. A fogyasztóhoz eljutó teljesítmény  $P_{\text{fogy}} = U_f I$ , míg a távvezetéken „elvesző” teljesítmény  $P_{\text{veszt}} = U_t I = I^2 R = U_t^2 / R$  (az áram a két esetben azonos). Míg  $P_{\text{fogy}}$  értékét nem akarjuk csökkenteni,  $P_{\text{veszt}}$  értékét igen: ez  $U_f$  növelésével érhető el, hiszen ekkor  $I$  csökken, és így  $P_t$  is csökken. Ezért tehát a távvezetéseken 230 V-nál lényegesen (akár ezerszer) nagyobb feszültség folyik, így kisebb áramerősség is elég. Ezeket a fogyasztóhoz közel transzformálják át nagyobb árammá és kisebb feszültséggé.

### 5.2.4. Áramkörök

Az elektromos feszültség és áram felhasználásával különféle eszközöket tervezhetünk, amelyek sokféle feladatot láthatnak el a lámpakapcsolótól az autó elektronikai rendszerén át a számítógépekben található technológiáig. A legegyszerűbb áramkörben egy feszültségforrás és egy ellenállás található, ennek működését az Ohm-törvény szabályozza:  $U$  feszültség és  $R$  ellenállás esetén az áramkörben  $I = U/R$  áram folyik. Az ilyen (és más) áramkörök vizsgálatakor fontos elv (illetve közelítés), hogy a vezeték és a feszültségforrás ellenállása nulla, ezért csak magát az  $R$  ellenállást kell figyelembe vennünk. Ez azt is jelenti, hogy az egybefüggő vezeték végig azonos feszültségen van, hiszen ha lenne rajta feszültségesés, akkor végtelen nagy áram jönne létre. A bonyolultabb szerkezetű áramkörök viselkedését két egyszerű törvény segítségével határozhatjuk meg. Ezek a **Kirchhoff-törvények**, amelyek egyébiránt szinte triviális állításokat mondanak ki:

1. Egy csomópontban a be- és kifutó áramok összege nulla – mivel az áram (a töltés) nem vész el,
2. Ha végigkövetjük egy zárt vonal (hurok) mentén a feszültség változását, akkor összességében nullát kapunk – hiszen a feszültség lényegében az ekvipotenciális felületek szintjében bekövetkező változás, de a hurok körbejárása után ugyanabba a pontba értünk vissza.

Előbbi egyszerűen az elektromos töltés megmaradását jelenti, utóbbi pedig ahhoz az állításhoz hasonló, miszerint egy hegyi körtúrán (ha a kiindulási pontba érkezünk vissza),



5.7. ábra. Ellenállások párhuzamos (balra), illetve soros (jobbra) kapcsolása során kialakuló áramok és feszültségek. Mindkét esetben fel kell írni a csomópontokra és hurkokra a Kirchhoff-törvényeket, az ellenálláson folyó áramra és feszültségre pedig az Ohm-törvényt.

összesen ugyanannyit mentünk fel, mint amennyit le. Két egyszerű áramkör esetén ezen törvényekkel könnyen kiszámolható a kialakuló áramok és feszültségek nagysága, ahogy azt az 5.7. ábra is mutatja.

Az 5.7. ábra bal oldalán két ellenállás **párhuzamos kapcsolása** látható, a számolás alapján ekkor az „összesített”  $R$  ellenállás

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (5.32)$$

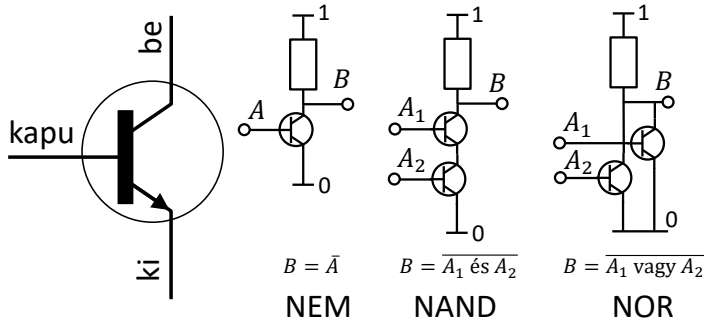
módon adódik – két párhuzamosan kapcsolt ellenállás így eggyel helyettesíthető. **Soros kapcsolások** esetén pedig

$$R = R_1 + R_2 \quad (5.33)$$

adódik az összesített ellenállásra. Érdekes látni, hogy több ellenállás párhuzamos kapcsolása esetén a teljes ellenállás *csökken*, mivel több „lehetőségük” van az elektronoknak mozogni. Gyakorlásnak érdemes végiggondolni, hogy mi történik, ha ellenállások helyett kondenzátorokat helyezünk el az áramkörben – ezekre az Ohm-törvény helyett az  $U = Q/C$  törvényt kell alkalmazni, ahol  $Q$  a kondenzátor két felén megjelenő töltések nagysága (természetesen az egyik oldalon  $+$ , a másikon  $-$  előjellel). Figyelembe kell venni, hogy kezdetben a vezeték minden pontja semleges, így két sorosan kapcsolt kondenzátor töltése azonos, míg párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok esetén a feszültség azonos. Emiatt végül az adódik, hogy párhuzamos kapcsolás esetén a kapacitások összeadódnak ( $C = C_1 + C_2$ ), míg soros kapcsolás esetén inverzen adódnak össze ( $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$ ).

Ahogy korábban említettük, léteznek úgynevezett **félvezetők**, amelyek vezetési tulajdonságai igen speciálisak: bizonyos feszültségek esetén az ellenállásuk a hőmérséklettel csökken, illetve a rajtuk átfolyó áram általában egyáltalán nem arányos a feszültséggel. Ezzel szemben például az történhet velük, hogy bizonyos alacsony feszültségek





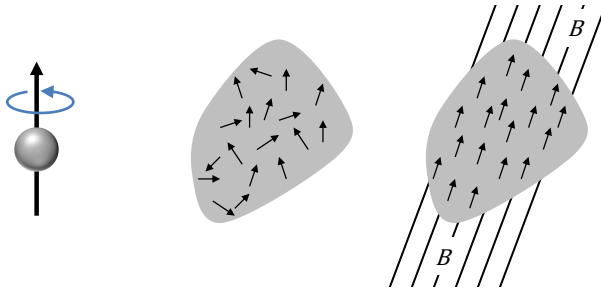
5.8. ábra. Tranzisztor (balra) és ebből összerakható digitális áramkörök. Az első áramkör egy „nem” (NOT) kaput hoz létre, amelynél a kimenet a bemenet ellentéte.

esetén egyáltalán nem vezetik az áramot, de bizonyos határérték felett kis feszültségesés mellett is nagy áramerősség jön létre rajtuk – így működik a **dióda**, azon belül például a fénykibocsátó dióda (light emitting diode, LED) is. A LED alacsony feszültség esetén nem „enged át” áramot, míg bizonyos feszültség felett igen, és ez világításra készíti. Másik nagyon fontos félvezetőből készült eszköz a **tranzisztor**, amelyre úgynevezett „kapufeszültséget” vezetve átfolyhat rajta az áram, ahogy az 5.8. ábra bal oldala mutatja. A tranzisztor azért is igen lényeges, mert ebből sokféle bináris avagy **digitális áramkört** lehet összerakni, és a számítógépek processzorai is végső soron ilyenekből állnak. Ezek lényege az, hogy a bemenet 0 vagy 1 értéket vehet fel (ahol a 0 a feszültség hiányát, az 1 pedig valamilyen alapértelmezett feszültséget jelent, például 6 V vagy éppen 12 V), a kimenet pedig ettől függően vesz fel 0 vagy 1 értéket – a bemenettel vagy bemenetekkel elvégzett digitális művelet eredményét. Ilyen digitális művelet például a tagadás (amely nullából egyet csinál, és fordítva), az „és” művelet (amelynek eredménye csak akkor 1, ha mindkét bemenet 1 volt), a „vagy” művelet (amelynek eredménye akkor 1, ha valamelyik bemenet 1 volt). Ezeken kívül érdekes még a „nem és” (NAND) művelet, amely akkor ad egyet, ha legalább az egyik bemenet nulla (azaz ez az „és” művelet ellentéte); illetve a „nem vagy” (NOR) művelet is fontos, amely akkor ad egyet, ha mindkét bemenet nulla. Ilyen, tranzisztorokból összerakható digitális áramköröket az 5.8. ábrán láthatunk. Ilyen áramkörökből digitális összeadás is könnyen felépíthető, és minden további számolási művelet elvégezhető velük – ahogy azt a mobiltelefonunk vagy számítógépünk processzora másodpercenként sok milliószor elvégzi.

## 5.3. Mágneses tér és hatásai

### 5.3.1. Mágnesesség

Ókori, sőt talán őskori tapasztalat, hogy léteznek **mágneses** fémdarabok, amelyek vonzzák vagy taszítják egymást, továbbá ügyesen felfüggesztve a Föld égtájainak megfelelően állnak be. Ezek a mágnesek mind dipólusok, a két pólusuk az **északi** és a **déli** nevet viseli: az északi pólus mindig észak felé szeret fordulni, míg a déli dél felé. Egy mágneset kettévágva újabb dipólust kapunk, a tapasztalatok szerint mágneses monopólus



5.9. ábra. Minden atom elemi spinként viselkedik, amelynek mágneses momentuma van (balra). Ezek általában rendszertelenül helyezkednek el, így összességében az adott anyagdarab nem mágneses (középen). Külső mágneses tér jelenlétében (jobbra) azonban a spinek egy irányba rendeződnek, és így a para- vagy ferromágneses anyagdarab makroszkopikusan is mágnesezett lesz.

(egypólus; külön északi vagy külön déli pólus) nem létezik! A mágneses tér jele  $B$ , mértékegysége tesla (T). A Föld mágneses tere a felszínen nagyságrendileg  $30 \mu\text{T}$ , a tipikus hűtőmágnesek tere  $5 \text{ mT}$  (a mágneshez nagyon közel), a hangszóró mágnes tere  $1 \text{ T}$ , míg az orvosi MRI-készülékek mágneses tere néhány tíz tesla is lehet.

Az anyagok mágnesességét az atomok „spinje”, azaz egyfajta „forgása” okozza, és minden, spinnel rendelkező atom kis dipólusként képzelhető el (ahogy ezt majd később levezetjük). Ezek alapesetben véletlenszerűen rendezettek, mágneses tér hatására azonban egy irányba forgathatóak. Ez a **paramágnesség** jelensége, amelyet az 5.9. ábra illusztrál. Vannak olyan anyagok, amelyekben ez a rendezettség a mágneses tér hiányában is megmarad, így az anyag mágnessé válik: ez a **ferromágnesség** jelensége. (A vas a legismertebb ilyen anyag, innen származik a „ferro-” előtag.) A ferromágnesség az úgynevezett Curie-hőmérséklet fölött (a hőmozgás miatt) megszűnik – a hétköznapi mágnesek esetén ez jóval magasabb, mint a szobahőmérséklet (például vasra  $760 \text{ }^\circ\text{C}$  körül van).

### Kísérlet: vas mágnesezése

- A normál mágnes vonzza a mágnesezhető anyagokat, például a vasszőget. Ha ennek súlya nem túl nagy, vagy a mágnes elég erős, akkor a gravitáció ellenében meg tudja tartani, akár egy nagyobb vasdarabot is.
- Ekkor a vasdarab mágnessé válik, és vonzani tud más tárgyakat, kis gemkapcsokat meg is tud tartani.
- Ha elvesszük az eredeti mágnest, a vasdarab is elveszti mágnesességét, a gemkapcsok leesnek. Mindezen jelenségek magyarázatát lásd alább.

### 5.3.2. A Lorentz-erő és a mágneses nyomaték

Oersted 1819-ben vette észre, hogy az áram hatással van az iránytűkre, tehát az áram mágneses teret hoz létre. 1892-ben Lorentz megállapította, hogy a mágneses tér is hat a mozgó töltésekre, illetve az áramra. Ez az úgynevezett **Lorentz-erő** definiálja tulaj-

donképpen a mágneses teret (ahogy az  $F = qE$  formula az elektromos teret):

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (5.34)$$

Itt  $\times$  a keresztszorzat jele. Az erő tehát akkor maximális, ha a mozgó töltés sebessége merőleges a mágneses térre, nagysága egy  $\sin(\alpha)$  faktorial csökken a bezárt szög függvényében, azaz  $F = qvB \sin(\alpha)$ . Ha a sebesség és a mágneses tér párhuzamos, akkor az erő nulla. Ez jelentősen elősegíti a földi élet fennmaradását, hiszen emiatt a világűrből érkező kozmikus töltött részecskéket eltéríti a Föld mágneses tere, egyedül a pólusoknál jelennek meg (ahol a mágneses tér a függőleges), a sarki fény jelenségét létrehozva. Érdeemes észrevenni, hogy a Lorentz-erő mindig merőleges a sebességre, ezért a sebességre merőleges mágneses tér körmozgást hoz létre. Ekkor a Lorentz-erő éppen a centripetális erőt adja. Miután a centripetális erő nagysága  $mv^2/r$ , ez pedig megegyezik a Lorentz-erő  $qvB$  nagyságával, így ezek egyenlőségéből adódik a pálya sugara:  $r = p/qB$ , ahol  $p = mv$  az impulzus.

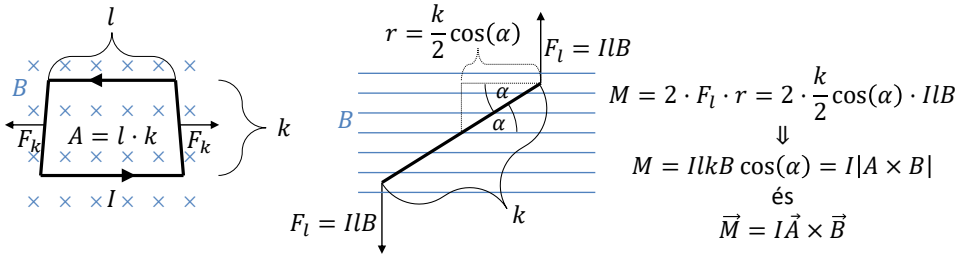
Hasonlítsuk össze a fenti (5.34) törvényt az  $\vec{E}$  elektromos tér  $q$  töltésre ható  $\vec{F} = q\vec{E}$  erejével! Láthatólag nagyon hasonló itt is az erő és a tér kapcsolata, csak egy sebességgel való keresztszorzás megjelenik – az elektromos teret pedig a mágnesesre kell cserélni. Ha lennének mágneses töltések, azokra éppen fordítva lehetne felírni az erőket – de nincsenek. Azt ugyanakkor a későbbiekben is megfigyelhetjük majd, hogy az elektromos és a mágneses jelenségek alaptörvényei igen hasonlóak, csak néha egy sebességgel való keresztszorzást a mágneses esetben „be kell írni” az adott formulába. Ezt figyelhettük meg fent is, és később, a töltések mágneses tere esetében is.

Megállapíthatjuk azt is, hogy áramjárta vezetőre a benne mozgó töltések miatt Lorentz-erő hat. Minden töltésre egyforma erő hat, így ez összességében  $q\vec{v} \times \vec{B}$ , ha  $q$  töltés van összesen ebben a vezető szakaszban. Ha ezt egy  $\vec{l}$  vektorral írjuk le, akkor itt a  $q\vec{v}$  vektor a  $I\vec{l}$  vektorral helyettesíthető (ez az áramról szóló szakasz elején írtakból is látható, de a mértékegységek vizsgálata, azaz a dimenzióanalízis is ezt támasztja alá:  $C \cdot m/s = C/s \cdot m$ ). Így az áramjárta,  $\vec{l}$  vektorral jellemezhető vezetőre ható erő (azaz amelynek hossza  $l$ , iránya pedig  $\vec{l}$  iránya)

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}. \quad (5.35)$$

Ha egy áramjárta hurkot hozunk létre, akkor ennek minden kis szakaszára is a fenti erő hat majd. Miután a hurok önmagában végződik, így az erők összege nulla lesz (hiszen a  $\vec{B}$ -vel való szorzás kiemelhető, ahogy  $I$  is, így a kis  $\vec{l}$  vektorok összegét kell venni, ami a „körbeérés” miatt éppen nulla). Ugyanakkor az erők forgatónyomatéka összesen nem lesz nulla, ahogy azt egy téglalap alakú hurok esetén alább be is láthatjuk. Álljon a hurok  $\alpha$  szögben a mágneses térhez képest. Ekkor a  $k$  hosszúságú oldalakra vízszintes  $\vec{F}_k$  erő hat majd, méghozzá egyforma, de ellentétes irányú. Ezen  $\vec{F}_k$  erők hatásvonala is egybeesik (a  $k$  szakaszok közepéről indulnak, az őket összekötő szakasszal párhuzamosan), így ezek forgatónyomatéka is összesen nulla. Az  $l$  hosszúságú szakaszokra ható erők azonban különböző vonalban hatnak, így ezek forgatónyomatéka összesen nem nulla lesz. Ha a forgatónyomatékot a hurok középvonalára (mint tengelyre) nézve írjuk fel, akkor az erőkar nagysága

$$r = \frac{k \cos(\alpha)}{2} \quad (5.36)$$



5.10. ábra. Áramhurok viselkedése mágneses térben. A jobb oldali ábrán a lapra merőleges mágneses térben elhelyezkedő áramhurok látható, amely oldalaira oldalirányú  $F_k$  Lorentz-erő hat, ezek az erők azonban kiejtik egymást. Ha oldalról vizsgáljuk az áramhurkot, felrajzolhatjuk a másik két szakaszra ható  $F_l$  erőt is (középen). Ezek összesen forgatónyomatéket hoznak létre, amelyekre az ábrán is szereplő  $\vec{M} = I\vec{A} \times \vec{B}$  összefüggés lesz igaz.

lesz, így a forgatónyomaték nagysága a két erőből összesen

$$|\vec{M}| = 2|\vec{F}_l|r = 2|\vec{F}_l|\frac{k \cos(\alpha)}{2} = |\vec{F}_l|k \cos(\alpha). \quad (5.37)$$

Ezt úgy is megkaphatjuk, ha a forgatónyomaték nagyságát

$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}_l| = rF_l \sin(90^\circ - \alpha) = rF_l \cos \alpha \quad (5.38)$$

módon számoljuk, hiszen az erő és „karja”  $90^\circ - \alpha$  szöget zárnak be. Azt is megállapíthatjuk, hogy az  $l$  hosszúságú szakaszokra ható erő  $F_l = IlB$  (hiszen  $\vec{l} \perp \vec{B}$ ). Két ilyen erő hat, így összesen  $M = 2F_l r$  lesz a forgatónyomaték, és összesítésben a forgatónyomaték (vektorosan)

$$\vec{M} = I\vec{A} \times \vec{B}, \quad (5.39)$$

ahol  $\vec{A}$  a hurok „felületi merőlegese”. Ezt a levezetést illusztrálja az 5.10. ábra.

A fenti forgatónyomaték akkor nulla, ha a felületi merőleges és a tér párhuzamosak, azaz a tér éppen „merőlegesen átmegy” az áramhurok kijelölt felületen. Az áramhurok tehát kis mágneses dipólusként és iránytűként viselkedik, a mágneses tér a saját irányába forgatja őt. Az atomokban „keringő és forgó” elektronok is egyfajta áramhurkot hoznak létre (ez az atomok „spinje”), ez okozza az anyagok mágnesességét. A  $\vec{\mu} = I\vec{A}$  vektort **mágneses nyomatéknak** (momentumnak) nevezzük, az 5.9. ábra ezt jelöli az atomhoz rajzolt nyíl. Az atomra ható forgatónyomaték ekkor  $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$  módon írható le. Ez a forgatónyomaték forgatja be az atom spinjét a mágneses tér irányába, illetve összességében az iránytűt is (az egyes atomoknál „fogva”).

### 5.3.3. A mágneses fluxus és Gauss-törvény

Az elektromossághoz hasonlóan itt is bevezethetjük a **mágneses erővonalak** fogalmát, amelyekre pontosan ugyanazok a szabályok érvényesek, mint az elektromos erővonalakra: irányuk a mágneses tér irányát jelzi, sűrűségük pedig a mágneses tér nagyságát.

Továbbá ugyanúgy bevezethetjük a **mágneses fluxust** is:

$$\text{sík felületre } \Phi_B = \vec{B}\vec{A}, \text{ tetszőleges felületre pedig } \Phi_B = \int \vec{B}d\vec{A}. \quad (5.40)$$

A Gauss-törvény itt még egyszerűbben levezethető. Miután az erővonalak csak töltésekben végződhetnek vagy azokból indulhatnak, mágneses töltések (monopólusok) viszont nincsenek, így a mágneses erővonalak nem keletkeznek és nem érnek véget sehol: (viszont önmagukba záródhatnak, vagy a végtelenből a végtelenbe tarthatnak). Ezért minden zárt felületbe ugyanannyi erővonal megy be, mint amennyi ki, így zárt felület mágneses fluxusa mindig nulla. Az adódó **mágneses Gauss-törvény** így fogalmazható meg:

$$\Phi_{B,\text{zárt}} = \int_{\text{zárt}} \vec{B}d\vec{A} = 0. \quad (5.41)$$

### Kísérlet: feszültség keltése mágnes mozgásával

- Vegyünk egy vezető hurkot, vagy több egymás utáni hurkot, azaz tekercset.
- Mozgassunk a tekercs mellett egy mágnezt, változtatva a tekercsnél észlelhető mágneses teret.
- A tekercsben feszültség jön létre, amelyet voltméterrel könnyűszerrel kimutathatunk.
- Ez a mágneses indukció jelensége, amelyet a következő szakaszban tárgyalunk.

#### 5.3.4. A mágneses indukció

A fenti kísérlet azt mutatja, hogy változó mágneses tér hatására feszültség jön létre egy (hurok alakú) vezetősál két vége között. A legegyszerűbb példa az, ha a fentieknek megfelelően mágnezt mozgatunk egy tekercsben, vagy ha egy tekercset mozgatunk helyfüggő mágneses térben. Egy zárt hurok alakú,  $A$  felületet körbezáró vezetőben a mágneses tér változása során indukált feszültség nagyságát a **Faraday-törvény** adja meg:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -A\frac{dB}{dt}, \quad (5.42)$$

illetve a feszültség definícióját ismerve

$$\int_{\text{zárt}} E dl = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -A\dot{B}. \quad (5.43)$$

Ha nem egy áramhurok van, hanem  $N$  darab, azaz egy  $N$  menetes,  $A$  keresztmetszetű tekercs, akkor minden egyes hurkon a fenti feszültség indukálódik. Végeredményben a teljes tekercsen létrejövő feszültség is  $N$ -szer akkora lesz:

$$U_{\text{ind}} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -NA\frac{dB}{dt}. \quad (5.44)$$

Váltakozó  $B = B_0 \sin(\omega t)$  mágneses tér esetén  $U_{\text{ind}} = -NAB_0\omega \cos(\omega t)$  feszültség indukálódik a tekercsben, azaz az indukált feszültség amplitúdója ekkor  $U_0 = NAB_0\omega$  módon függ össze a mágneses tér amplitúdójával.

A tárgyalt jelenséget **indukciónak** nevezzük. Ha a létrejövő (indukált) feszültséget hasznosítani akarjuk, akkor áramot kell termelnünk („hajtanunk”) vele. Ez az áram viszont mágneses teret hoz létre (ahogy azt majd a következő szakaszban láthatjuk): ez a létrejövő mágneses tér *fékezi* azt a mágnezt, ami a feszültséget indukálta, azaz negatív visszacsatolás jön létre. (Például ha egy mágnezt mozgatunk egy tekercsbe befelé, növelve ezzel a mágneses teret, akkor a tekercsbeli mágneses fluxus növekedése feszültséget indukál a tekercsben, aminek hatására áram folyik majd benne, és az ez által keltett mágneses tér fékezi a mágnesünk befelé haladását.)

Ezt a negatív visszacsatolást **Lenz-törvénynek** nevezzük, és ezt fejezi ki a fenti egyenletekben a negatív előjel. A Lenz-törvényt precízebben úgy fogalmazhatjuk meg, hogy az indukció során létrejövő hatás ellentétes az őt létrehozó okkal. Tehát a mágneses tér változása feszültséget indukál, a feszültség áramot kelt, ami mágneses teret hoz létre, és ez a létrejövő mágneses tér gyengíti az eredeti mágneses teret. Ha nem lenne mínusz előjel, azaz az indukált áram által keltett mágneses tér hozzáadódna az eredetihez (és erősítené azt), akkor az még nagyobb indukciót hozna létre, az még nagyobb mágneses teret, és így tovább: pozitív visszacsatolás jönne létre. Másképpen megfogalmazva „ingeny” tudnánk áramot termelni: egy alacsony súrlódású kereket jól megpörgetve és rá mágnezt szerelve.

A valóságban éppen az a lényeg, hogy az indukált áram által keltett mágneses tér fékezőereje ellenében végzett munkánk alakul elektromos energiává. Ezt használja ki rengeteg hétköznapi eszköz, többek között a dinamó vagy a generátor: ez a forgási energiát (amelyet egy kerék vagy egy turbina forgása szolgáltat) feszültséggé, azaz elektromos energiává konvertálja. A hibrid és az elektromos autók fékezéskor működésbe lépő energia-visszanyerő rendszere így működik (ahogy például a Forma1-ben a KERS, illetve MGU-K rendszerek is). A buszok és kamionok elektromos fékezőrendszere, a retarder is áramot termel a mozgási energiából, de nem feltétlenül hasznosítja azt; e rendszer előnye, hogy nem koptat annyi alkatrészt, és a fékezőhatás jobban szabályozható.

Az indukció elvét használva működött régen (a GPS elterjedése előtt) a biciklik sebességmérője is (a generált feszültség a kerék forgásával, azaz a sebességgel nő). Az indukciós főzőlap működésének az alapja pedig az, hogy egy elektromágnes változó mágneses teret kelt, ez feszültséget indukál az edény aljában, amiben ez áramot indít (ezért nem működik a főzőlap tetszőleges edénnyel), az áram pedig az edény aljában hőleadással jár, tehát az edény felforrósodik.

Érdeemes végül megemlíteni egy kiegészítést. Ebben a szakaszban az indukció jelenségéről beszélünk, amikor a mágneses tér változása elektromos teret (így feszültséget) generál. A látott,  $U_{\text{ind}} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$  törvény azonban más kontextusban is igaz: ha a mágneses tér időben állandó, azonban magát a tekercset fizikailag mozgatjuk (esetleg szúkitjuk-tágítjuk) úgy, hogy emiatt változzon a fluxus, akkor is ezen képlet által megadott feszültség keletkezik a vezetőkévek között. Ehhez nem kell változó mágneses tér által keltett elektromos térről beszélni, elég, ha tudjuk, hogy a vezetékben álló elektronokra a vezeték mozgása miatt mágneses térben erő hat, és emiatt áram is fog indulni.

## 5.4. A mágneses tér forrásai

Ugyan már láttuk, hogy a mágnesesség magyarázata az atomok spinjében rejlik, de ennek okát még egyáltalán nem értjük. A fő kérdés tehát az, hogy **mi hozza létre a mágneses teret**. Azt már láttuk, hogy az elektromos teret az elektromos töltések hozzák létre, és egy töltés elektromos tere tőle  $r$  távolságban  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q\vec{r}/r^3$ . Mágneses töltések azonban nincsenek, így nem világos, hogy ezt hogyan lehetne a mágneses tér esetére átültetni.

### Kísérlet: elektromágnes

- Egy vasdarabot mágnessel mágnesezhetünk, de egy tekercsre egyenáramot kötve szintén magához tud vonzani kis fémtárgyakat: a tekercs a mágneshez hasonló teret hoz létre, ez az elektromágnes.
- A mágneses tér forrása tehát az áram, ez a magyarázata annak, hogy az atomok spinjük miatt (egyfajta köráramként viselkedve) mágneses teret hoznak létre, amely az atomok egy irányba rendeződése esetén makroszkopikus méreteket ölt.

### 5.4.1. Mozgó töltések és az áram mágneses tere

A fenti kísérletből az derül ki, hogy a mágneses teret a mozgó elektromos töltések hozzák létre. Pontos kísérletek alapján megállapítható, hogy egy  $v$  sebességgel **mozgó  $Q$  töltés mágneses teret kelt**, amelynek nagysága a töltéstől mért  $\vec{r}$  helyvektorú pontban

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Qv}{r^2}, \text{ illetve vektorosan } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (5.45)$$

Figyeljük meg a hasonlóságot a ponttöltés keltette elektromos térrel. Itt  $1/\epsilon_0$  helyett  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Tm/A (vagy Vs/Am) szerepel. Ennek az állandónak a neve: a vákuum mágneses permeabilitása; ha nem vákuumban vagyunk, akkor  $\mu_0$  helyett  $\mu = \mu_r \mu_0$ -t kell írunk, ahol  $\mu_r$  az adott közeg relatív permeabilitása.<sup>4</sup> A törvényben ezenfelül  $Q\vec{r}$  helyett  $Q\vec{v} \times \vec{r}$ -t kell írunk: ez azt fejezi ki, hogy csak mozgó töltés kelt mágneses teret. A tér akkor maximális, ha a töltés sebességére merőleges irányban vizsgáljuk; a sebesség irányában vizsgálódva pedig (a keresztszorítás tulajdonságai miatt) a mágneses tér nagysága nulla.

Ez alapján felírhatjuk egy infinitezimálisan kis ( $dl$ ) hosszúságú,  $I$  áramot vezető szakasztól  $r$  távolságra mért mágneses teret is, ekkor a **Biot–Savart-törvényt** kapjuk. Itt  $Q\vec{v}$  helyett  $I\vec{dl}$  szerepel, hasonlóan a Lorentz-erőnél mondottakhoz. A törvény így írható fel:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (5.46)$$

Egy nem infinitezimális vezető  $l$  szakaszra integrálással kapjuk meg ennek mágneses terét (tőle  $r$  távolságra):

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (5.47)$$

<sup>4</sup>A „permeabilitás” latin szó „átjárhatóság”-ot jelent:  $\mu$  azt adja meg, hogy „mennyire járhatja át a mágneses mező az anyagot”.

Ezzel a törvénnyel néhány egyszerű esetben kiszámíthatjuk a mágneses teret. Például egy  $R$  sugarú,  $I$  áramot vezető hurok tere a kör közepén abból adódik, hogy a körvezető minden egyes kis szakasza  $R$  távolságra van a középponttól, így mindegyik kis  $dl$  szakasz mágneses tere  $\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} dl$ . Ezt ha integráljuk, akkor a  $dl$  előtti tényezők mind állandóak az összes szakaszra, így  $dl$  helyett a kör kerületét írhatjuk be,  $2R\pi$  értéket. A végeredmény  $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$ . A körtől a felületére merőleges  $r$  távolságra is kiszámítható a mágneses tér nagysága: erre  $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + r^2)^{3/2}}$  adódik (figyelembe véve, hogy a kör minden kis infinitezimális szakaszelemének mágneses tere ugyanolyan nagy, csak az irányuk más ( $\vec{dl}$  és  $\vec{r}$  irányára merőleges). Ebből az is kiderül, hogy egy kis,  $R$  sugarú (azaz  $A = R^2\pi$  felületű) köráramtól méreténél sokkal nagyobb,  $r \gg R$  (a felületre merőleges irányban vett) távolságra a tér

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I A}{2\pi r^3}. \quad (5.48)$$

Itt vegyük észre a hasonlóságot az elektromos dipólus terével – csak itt a  $qd$  dipólusnyomaték helyett az áramhurok  $\mu = IA$  mágneses nyomatéka jelenik meg.<sup>5</sup> Ez a formula adja meg tehát a  $\mu$  mágneses nyomatékkal rendelkező atom mágneses terét is!

### 5.4.2. Az Ampère-törvény

A fenti törvényben szereplő integrálást egy egyenes vezetőre is el lehet végezni. Legyen a hossza  $2a$ , ekkor a mágneses tér a közepétől  $r$  távolságra  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{r\sqrt{a^2 + r^2}}$  lesz. Ebből  $a \gg r$  esetén (azaz nagyon, ideális esetben végtelen hosszú egyenes vezetőre)

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (5.49)$$

adódik. A mágneses tér iránya pedig a jobbkéz-szabálynak megfelelő lesz: ha jobb kezünk hüvelykujját az áram irányába fordítjuk, akkor behajlított (kört formázó) ujjaink éppen a mágneses tér irányát jelölik ki. A mágneses tér tehát körkörösen körbeöleli az őt létrehozó áramot. Ebből egy érdekes következtetést vonhatunk le: ha az  $I$  áramot szállító vezető köré képzelünk körre kiintegráljuk a mágneses teret, azaz ezen a körön vesszük az  $\int \vec{B} d\vec{l}$  kifejezés értékét, akkor (miután a mágneses tér párhuzamos a  $dl$  szakasszal, és minden pontban azonos,  $B = \mu_0 I / (2\pi r)$  nagyságú) éppen  $\mu_0 I$  lesz az eredmény (hiszen a  $2\pi r$  a kör kerületével szorozva kiesik). Az az érdekesség derül ki, hogy ez nemcsak kör alakú, hanem minden zárt görbére igaz lesz, és az így kimondott állítást **Ampère-törvénynek** nevezzük. Eszerint a mágneses tér elárulja az őt létrehozó áramerősséget, konkrétan zárt (képzeltbeli) hurokra, amelyen  $I$  áram folyik keresztül:

$$\int_{\text{zárt}} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (5.50)$$

Lássuk az Ampère-törvény egy egyszerű alkalmazását! Ha sok hurkot kötünk össze, akkor tekercset kapunk, azaz tulajdonképpen egy elektromágnest. Ebben megkaphatjuk a mágneses teret, ha egy képzeltbeli, a tekercsen átmenő zárt hurkot rajzolunk. A külső

<sup>5</sup>A mágneses nyomaték jele véletlenül megegyezik a permeabilitásával, ne keverjük össze a kettőt.



részen kicsi a mágneses tér (jó közelítéssel), így annak járuléka 0. Belül pedig  $l$  hosszan megy a vonal (ha a tekercs  $l$  hosszú), és mivel itt nagyjából állandó a mágneses tér, illetve a zárt hurkon átfolyó áram összesen a menetszám szorozva az áramerősséggel ( $NI$ ), így a mágneses tér az erre az esetre alkalmazott  $B l = \mu_0 NI$  Ampère-törvényt kihasználva adódik:

$$B_{\text{tekercs}} = \mu_0 \frac{NI}{l}. \quad (5.51)$$

### 5.4.3. Önindukció és transzformátor

Az indukció és az Ampère-törvény összesítéseként azt láthatjuk, hogy két tekercs tud egymásra hatni: az egyikben folyó változó áram változó mágneses teret hoz létre, ez pedig a másikban feszültséget indukál, azaz ebben is áram fog folyni – ez a **transzformátor** működésének lényege. Itt az egyik tekercsben váltakozó áram folyik, azaz  $I = I_0 \sin(\omega t)$ . Az ennek hatására létrejövő mágneses tér is váltakozik, így a mágneses fluxus is. Ez a váltakozó mágneses fluxus feszültséget indukál a másik tekercsben, és mivel a fluxus megegyezik (a két tekercs fizikailag egyben van), így:  $U_1 = N_1 \dot{\Phi}_B$ ,  $U_2 = N_2 \dot{\Phi}_B$ ,  $U_1/N_1 = U_2/N_2$ . Ezzel tehát a nagyfeszültség kicsivé transzformálható (miközben az áram megnő, és a  $P = UI$  teljesítmény összességében csak kicsit csökken le).

Valójában egy tekercs is vissza tud hatni így önmagára, ez az **önindukció**. Ha a tekercsben  $I = I_0 \sin(\omega t)$  áram folyik, akkor ez a korábbiaknak megfelelően  $B = \mu_0 NI/l = \mu_0 NI_0 \sin(\omega t)/l$  mágneses teret hoz létre. Ez a mágneses tér feszültséget indukál:

$$U_{\text{ind}} = N \dot{\Phi}_B = N A \dot{B} = \mu_0 \frac{N^2 A \dot{I}}{l} = L \dot{I} = \omega L I_0 \cos(\omega t), \quad (5.52)$$

azaz a feszültség amplitúdója  $U_0 = \omega L I_0$  lesz, ahol bevezettük a tekercs  $L = AN^2/l$  önindukciós együtthatóját. Mivel az  $I_0$  amplitúdójú áramhoz  $U_0 = \omega L I_0$  feszültség kapcsolódik, ezért ez olyan, mintha a tekercsnek egyfajta ellenállása (valójában impedanciája) lenne, amelynek mértéke  $\omega L$ . Egyenáram ( $\omega = 0$ ) esetén ez nulla (erre számítunk, hiszen egyenáram esetén a tekercs egy nulla ellenállású vezetékdarab, csak a váltóáram és ennek mágneses tere okozhat mást).

Korábban már említettük a kondenzátor  $1/\omega C$  ellenállását, és most látjuk, hogy egy tekercs is hasonlóan viselkedik,  $\omega L$  ellenállása van. A tekercs és a kondenzátor kicsit valójában máshogy viselkedik, mint egy közönséges  $R$  ellenállás, ezért a fenti értékeket nem ellenállásnak, hanem impedanciának hívjuk. Érdekes, és az elektrotechnikában fontos áramkör az **RLC-kör**, amely egy sorba kapcsolt feszültségforrásból, ellenállásból és kondenzátorból áll. Ennek  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  sajátfrekvenciája van, így ilyen körfrekvenciájú feszültséget kapcsolva rá azt igen felerősíti. Az áramkör csillapítása  $\zeta = R\sqrt{C}/2\sqrt{L}$  lesz, és pontosan a 2.4.1. szakaszban a harmonikus rezgéseknél tárgyaltaknak megfelelő csillapított rezgés jön rajta létre.

### 5.4.4. Váltakozó áramú áramkörök

Az országos (vagy kontinensnyi) lakossági és ipari használatú elektromos hálózatban a feszültség nem konstans (azaz nem állandó feszültségről van szó), hanem időben szinu-

szosan változik, azaz  $U = U_0 \sin(\omega t)$ , ahol  $\omega = 2\pi f$ , és  $f = 50$  Hz a hálózati frekvencia (Európában). Ez a 19. század végén alakult ki, és két okból praktikus: egyrészt a váltakozó feszültséget könnyű transzformálni (lásd a távvezetékeken elvesző teljesítményről, illetve a transzformátorról szóló 5.2.3. és 5.4.3. szakaszokat), másrészt az erőművekben könnyű eleve váltakozó feszültséget előállítani. Ilyen hálózatokban a feszültség amplitúdója helyett annak effektív (átlagos) értékéről beszélünk, ez  $U_{\text{eff}} = 230$  V (korábban 220 V). Ez a **effektív feszültség** úgy adódik, hogy egy  $R$  ellenálláson ekkora egyenletes feszültség esetén veszne el ugyanakkora teljesítmény. Miután a teljesítmény négyzetesen függ a feszültségtől, azaz  $P = U^2/R = U_0^2 \sin^2(\omega t)/R$ , ennek átlaga  $P_{\text{átl}} = U_0^2/(2R)$ , miután a  $\sin^2$  függvény átlaga egy perióduson  $1/2$ . Miután  $U_{\text{eff}}$  definíciója az, hogy  $P_{\text{átl}} = U_{\text{eff}}^2/R$ , így  $U_{\text{eff}} = U_0/\sqrt{2}$ . A 230 voltos hálózaton a feszültség amplitúdója valójában körülbelül 325 volt.

Ilyen váltakozó áramú áramkörökben kicsit máshogy viselkednek az áramköri elemek. Egy állandó feszültség alatt lévő kondenzátoron (lévén a két lapja nem érintkezik) nem folyik áram, azonban váltakozó feszültség esetén a két lap elektromos tere kölcsönhat, és virtuálisan „átfolyik” az áram a kondenzátoron, méghozzá a feszültség csökkenése mellett. A feszültségesés arányos az áramerősséggel, ez tehát olyan, mintha a kondenzátornak lenne ellenállása. Ennek mértéke (ha a kapacitás  $C$ )  $1/\omega C$ , ahol  $\omega = 2\pi f$ , és  $f$  az áramkör frekvenciája. Ezt onnan lehet belátni, hogy a kondenzátoron folyó áram nagysága  $I = \dot{Q} = C\dot{U}$ , tehát itt  $U = U_0 \sin(\omega t)$  esetén az áram amplitúdója  $I_0 = CU_0\omega$ , azaz  $U_0 = I_0/\omega C$ . Ez olyan, mintha a tekercsnek  $1/\omega C$  ellenállása lenne (vesd össze az Ohm-törvénnyel) Egyenáram esetén  $f \rightarrow 0$ , tehát itt az ellenállás végtelenhez tart (ahogy azt várjuk is, hiszen egyenáram „nem tud átfolyjni” a kondenzátoron).

Az önindukció következménye, hogy váltóáramú áramkörben a tekercsnek is lesz egy ellenállás-jellegű tulajdonsága, amely a tekercsben indukálódó ellentétes irányú feszültség következménye (lásd az 5.4.3. szakaszt). Az ohmikus ellenállás mellett a tekercs induktív ellenállásáról is szokás tehát beszélni, ennek mértéke pedig (ha a tekercs önindukciós együtthatója  $L$ )  $L\omega$ . Szemléletesen a nagy önindukciós együttható a tekercsben változó áram hatására nagyobb mértékű ellenfeszültséget indukál, hasonlóan a frekvencia növelése is, hiszen így a tekercsben változó mágneses fluxus fog gyorsabban változni. A kondenzátor és a tekercs váltakozó áramú áramkörökben megjelenő ellenállását **impedanciának** nevezzük.

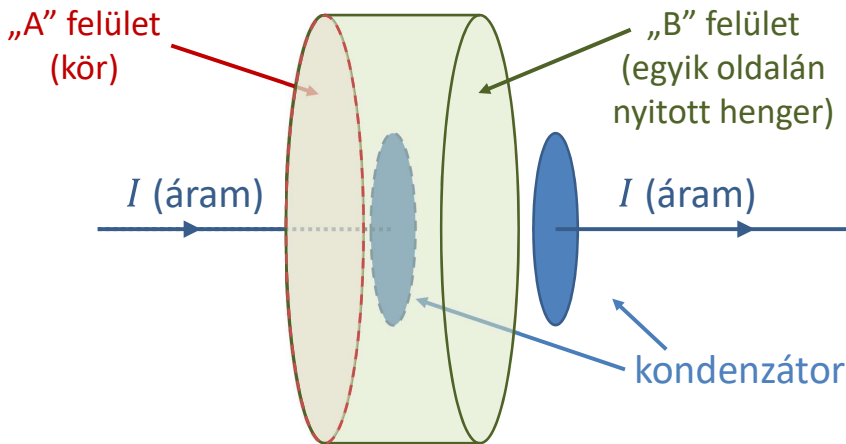
## 5.5. Elektromágneses hullámok

### 5.5.1. Az Ampère-törvény módosítása: eltolási áram

Már majdnem teljesen ismerjük az elektromos és mágneses mezők alaptörvényeit; egy kiegészítést kell még tenni, ami Maxwell nevéhez fűződik. Ez a mágneses térre vonatkozó Ampère-törvény fentebb látott alakjának módosítása olyan esetre, amikor időben változó elektromos tér is van.

Fentebb azt láttuk be, hogy

$$\int_{\text{zárt}} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I, \quad (5.53)$$



5.11. ábra. Az Ampère-törvény Maxwell-féle módosításának indoklásához: legyen a törvényben szereplő zárt hurok az „A” körfelület kerülete. Ekkor az „A” felület (a körlap) átmetszi a vezetőt, rajta  $I$  áram folyik. A „B” felület viszont (egy fedetlen henger, azaz hengerpalást + a másik lap) úgy fut, hogy a kondenzátor két lapja között megy át: nem folyik keresztül rajta az  $I$  áram, ellenben a rajta kiszámolt  $\Phi_E$  elektromos fluxus időderiváltjára  $\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = I$  lesz igaz, ahogy a szövegben megindokoltuk.

ahol az integrált egy zárt hurokra kell venni,  $I$  pedig a hurok által közrefogott felületen átfolyó áram teljes mennyisége. Vajon egyértelmű-e az utóbbi mennyiség,  $I$ ? Azért merül fel a kérdés, mert sokféle olyan (megnyújtott gumilepedőre emlékeztető) felület is van, amelynek ugyanaz a zárt görbe a határa; mindegy vajon, hogy melyik ilyen felületen átfolyó áramról beszélünk? Alapesetben igen! Ennek oka az, hogy az elektromos töltés megmarad, így amennyi áram befolyik egy zárt felületen, ugyanannyinak ki is kell folynia. Másképp: két olyan felületen, amelynek ugyanaz a zárt görbe a határa, ugyanannyi áram kell, hogy átfolyjon (különben nem maradna meg az elektromos töltés).

Kicsit bonyolultabb azonban a helyzet, ha a következő elrendezést képzeljük el: egy hosszú, árammal átjárt vezetékét elvágunk, és beillesztünk két nagy párhuzamos síklapot, azaz egy kondenzátort. Ha  $I$  áram folyik a vezetékben, akkor a töltés megmaradásából arra következtethetünk, hogy a kondenzátor folyamatosan töltődni fog. Alkalmazzuk az (5.50) egyenletben kimondott Ampère-törvényt erre az esetre! Ehhez körbe vesszük egy hurokkal a vezetékét, ahogy az 5.11. ábra mutatja (a hurkot a bordó szaggatott vonal jelképezi). Ebben az esetben mintha nem lenne egyértelmű, hogy hova tesszük a hurok által határolt felületet, amin átfolyó áram szerepelne az Ampère-törvényben. Ha a felület elmettszi a vezetékét (az ábrán az „A” eset), akkor tényleg  $I$  áram folyik át a vezetéken, ha viszont a felület a kondenzátor két lapja között megy át (az ábrán a „B” eset), és így nem metszi el a vezetékét, akkor az átfolyó áram nulla! Valami tehát nincs rendben logikailag.

Maxwell felismerése volt, hogy ennek megfelelően módosítani kell az Ampère-törvényt. A módosítást a következő módon vezethetjük le. Adott  $t$  idő eltelte után a kondenzátor két lapján  $Q(t) = I \cdot t$ , illetve  $-Q(t) = -I \cdot t$  töltés lesz. Korábban, az (5.23) egyenletben láttuk, hogy ilyenkor a lapok között elektromos térerősség alakul ki, amelynek nagy-

sága:  $E(t) = Q(t)/(\epsilon_0)A$ , ahol  $A$  a lapok területe. Írjuk fel a kialakuló  $\Phi_E$  elektromos fluxust is a kondenzátor  $A$  felületére (ahol van térerősség):  $\Phi_E(t) = E(t) \cdot A = Q(t)/\epsilon_0$ . Beírva  $Q(t)$ -t, a fluxus időderiváltjára (időbeli változási sebességére) az adódik, hogy  $\frac{d\Phi_E}{dt} = I/\epsilon_0$ . Ebből az derül ki, hogy az Ampère-törvény a következőképpen módosul:

$$\int_{\text{zárt}} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right). \quad (5.54)$$

Itt  $\Phi_E$  az elektromos térnek a zárt görbe által határolt felületre vett fluxusa.

Azért megfelelő ez a módosított törvény, mert a jobb oldalon a zárójelben lévő összeg már tényleg nem függ attól, hogy hol vesszük fel a hurkot kitöltő felületet. Ha a felület az áramot átmetszi,  $I$  áram megy át rajta, de a fluxus nulla, így  $\frac{d\Phi_E}{dt}$  is nulla. Ha viszont a felület a kondenzátorlapok között megy át, akkor nincs átfolyó áram, azonban  $\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$  nagysága éppen  $I$ , ahogyan fentebb kiszámoltuk. Azt kapjuk tehát, hogy az  $I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$  mennyiség tényleg jól értelmezett: nem függ a felület elhelyezkedésétől, ha adott a felületet határoló zárt görbe. Nem foglalkozunk most vele, de bebizonyítható, hogy az Ampère-törvény iménti módosítása minden esetben „konzisztens”, nemcsak a most felvázolt elrendezést (egyenárammal töltődő kondenzátor) kezeli helyesen. Maxwell a jobb oldal általa bevezetett második,  $\Phi_E$  deriváltját tartalmazó tagját **eltolási áramnak** nevezte el; innen a szakasz címe.

Elfogadjuk tehát, hogy az elektromos és mágneses mező egyik törvénye helyesen az (5.54) egyenlettel leírt alakú. Összehasonlíthatjuk ezt a Faraday-féle indukciós törvénnyel:  $B$ -t és  $E$ -t kicserélve lényegében ugyanazt kapjuk (egy előjeltől eltekintve, valamint az elektromos áram megjelenik, de „mágneses áram” – mágneses töltések híján – nem létezik).

### 5.5.2. A Maxwell-egyenletek

A fentiekben megismertük az elektromosság és a mágnesesség alapvető törvényeit. Ezek közül a négy leglényegesebbet foglalja össze a **Maxwell-egyenletek** rendszere. Ezekben felhasználjuk az elektromos és mágneses fluxus, illetve a feszültség

$$\Phi_E = \int E dA, \quad \Phi_B = \int B dA, \quad (5.55)$$

$$U_E = \int E dl, \quad U_B = \int B dl \quad (5.56)$$

definícióit. (A mágneses feszültséget azért vezettük most be, hogy tömören felírhassuk az alábbi egyenleteket;  $U_B$  szerepe nem olyan jelentős, mint az elektromos  $U_E$  feszültségé.) Ezekkel a következő törvények adódnak.

$$\text{Elektromos Gauss-törvény, zárt felületre: } \Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (5.57)$$

$$\text{Mágneses Gauss-törvény, zárt felületre: } \Phi_B = 0, \quad (5.58)$$

$$\text{Faraday-féle indukciós törvény, zárt hurokra: } U_E = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (5.59)$$

$$\text{Ampère-törvény az eltolási árammal, zárt hurokra: } U_B = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (5.60)$$

Ugyanezek felírhatóak töltések és áram hiányában (azaz a  $I = 0$ ,  $Q = 0$  feltételek mellett), a fluxusra és a feszültségre vett definíciókkal együtt. Ekkor az alábbi, az  $E$  és a  $B$  cseréjére szimmetrikus alakot kapjuk:

$$\oint E dA = 0, \quad (5.61)$$

$$\oint B dA = 0, \quad (5.62)$$

$$\oint E dl = - \int_A \frac{dB}{dt} dA, \quad (5.63)$$

$$\oint B dl = \mu_0 \epsilon_0 \int_A \frac{dE}{dt} dA. \quad (5.64)$$

Az egyenleteinket átalakíthatjuk integrálformából differenciális formába, amelyhez kell a  $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$  vektoroperátor fogalma, amelynek három komponense a tér három dimenziója szerinti deriválás. Ebből származtatható a divergencia és a rotáció fogalma, amelyet vektormezőkre<sup>6</sup> értelmezünk:

- Vektormező **divergenciája**: a „forrassűrűség” mértéke adott pontban, azaz a pont körüli *felület* fluxusa (a vektor felületen vett integrálja) a felület által bezárt térfogattal osztva. Ha a vektormező egyfajta sebességet jelképez, akkor ez az adott pontból történő „kifolyás” mennyiségét adja meg („hány erővonal keletkezik” egy kis térfogatban). Ha a vektormező divergenciája negatív, akkor „befolyás” van.
- A divergencia kiszámítása:  $\text{div} E = \nabla \cdot E$ , azaz a  $\nabla$  vektorral vett skaláris szorzat.
- Vektormező **rotációj**a: „örvényerősség” mértéke adott pontban, azaz a pont körüli *görbe* mentén vett integrál a görbe által bezárt felülettel osztva. Ha a vektormező egyfajta sebességet jelképez, akkor a rotáció éppen azt adja meg, hogy az adott pont körül alakult-e ki örvénylés.
- A rotáció kiszámítása:  $\text{rot} E = \nabla \times B$ , azaz a  $\nabla$  vektorral vett keresztszorzat.

Ezeket illusztrálja az 5.12. ábra, ahol a pirossal rajzolt felületen a kiáramlás adja a divergenciát, míg a kékkel rajzolt görbe mentén történő áramlás a rotációt. Az első esetben mindkettő nulla, a második eset nemnulla divergenciájú (forrásos), a harmadik nemnulla rotációjú (örvényes) mezőt mutat.

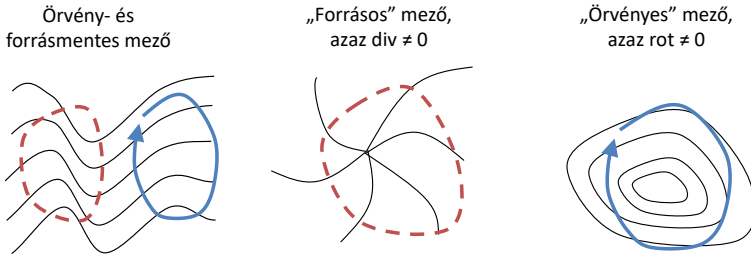
A fent definiált mennyiségekre vonatkozik a **matematikai Gauss-tétel**, amely szerint egy  $E$  vektormezőre

$$\oint E dA = \int \text{div} E dV, \quad (5.65)$$

ha a zárt  $A$  felület a  $V$  térfogatot tartalmazza. Hasonló állítást fogalmaz meg a **matematikai Stokes-tétel** is: eszerint egy  $E$  vektormezőre

$$\oint E dl = \int \text{rot} E dA, \quad (5.66)$$

<sup>6</sup>A vektormezők olyan függvények, amelyek értéke minden pontban egy vektor.



5.12. ábra. Az ábrán különféle tulajdonságú mezők láthatóak. Örvény- és forrásmentes mező (balra) alakul ki töltésektől távol, időben állandó terek esetén. Ponttöltés közelében (középen) forrásos mező alakul ki, hiszen éppen a ponttöltés lesz a mező forrása. Időben változó mágneses mező örvényes elektromos mezőt hoz létre (jobbra), időben változó elektromos mező pedig örvényes mágneses mezőt.

ha az  $l$  zárt görbe az  $A$  felületet fogja körbe. Természetesen mindkét fenti összefüggés a  $B$  vektormezőre is felírható. Ezekkel az összefüggésekkel a Maxwell-egyenleteket átalakíthatjuk, és integrálok helyett a divergencia és a rotáció szerepel majd bennük.<sup>7</sup>

Az így átírt Maxwell-egyenletek (töltések és áramok híján, azaz vákuumban) az alábbi alakot öltik:

$$\operatorname{div} E = 0, \quad (5.67)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (5.68)$$

$$\operatorname{rot} E = -\dot{B}. \quad (5.69)$$

$$\operatorname{rot} B = c^{-2} \dot{E}, \quad (5.70)$$

$$\text{ahol } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}. \quad (5.71)$$

Ha végigkövetjük  $\epsilon_0$  és  $\mu_0$  fizikai dimenzióit, kiderül, hogy ez sebesség négyzet dimenziójú mennyiség, vagyis  $c$  egy sebesség lesz. Ha behelyettesítjük  $\epsilon_0$  és  $\mu_0$  (elektromos, illetve mágneses mérésekkel meghatározott) korábban megadott értékeit, kiderül, hogy  $c \approx 300\,000$  km/s.

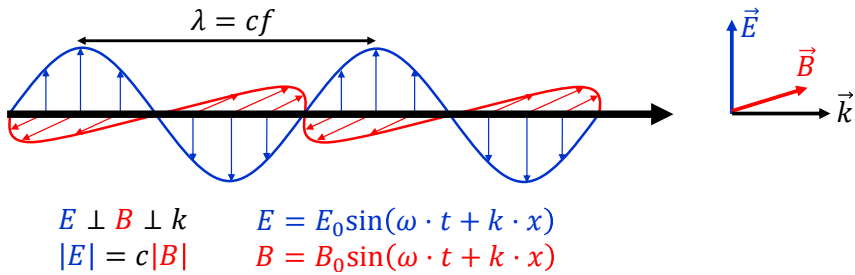
Az egyenletrendszert tovább egyszerűsíthetjük, és ekkor a következő két **hullámegyenlet alakú** differenciálegyenlet jön ki:

$$\ddot{E} - c^2 E'' = 0, \quad (5.72)$$

$$\ddot{B} - c^2 B'' = 0, \quad (5.73)$$

ahol a két pont az idő szerinti kétszeres deriválást, a két vessző a tér szerinti kétszeres deriválást jelenti, és ezek az egyenletek a térerősségek minden komponensére ( $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ) külön-külön érvényesek. Fontos továbbá, hogy valójában a kétszeres tér szerinti

<sup>7</sup>Ezt az átírást úgy tehetjük meg, hogy észrevesszük, hogy az egyes egyenletekben csak térfogati vagy felületi integrálok szerepelnek, még hozzá tetszőleges térfogatra/felületre. Emiatt az integrálandó mennyiségekre is igazak lesznek az egyenletek, azaz kvázi elhagyhatjuk az integrálás műveletét.



5.13. ábra. Adott  $\vec{k}$  hullámszámvektorral (haladási iránnyal) rendelkező elektromágneses síkhullám elektromos és mágneses tere. A térerősségvektorok merőlegesek egymásra és  $\vec{k}$ -ra. A valóságban a kép a polarizációtól függően bonyolultabb lehet, ezt azonban itt nem tárgyaljuk.

deriválás helyett a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5.74)$$

Laplace-operátor jelenik meg, amely a tér minden dimenziója szerinti kétszeres deriválások összege.

Miután a fenti egyenletek hullámegyenletek (vesd össze mindezt a 3.3.4. szakasszal), ezek megoldása egy  $c$  sebességgel haladó **elektromágneses hullám**, tetszőleges  $f$  frekvenciával és ennek megfelelő  $\lambda = c/f$  hullámhosszal. Az egyes  $E_i$  és  $B_i$  komponensek ( $i = x, y, z$  esetére) így viselkednek majd (a fázistól és az úgynevezett polarizációtól eltekintve):

$$\vec{E} = \vec{E}_{(0)} \sin(\vec{k}\vec{r} + \omega t), \quad (5.75)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_{(0)} \sin(\vec{k}\vec{r} + \omega t). \quad (5.76)$$

A Maxwell-egyenletek eredeti alakjából következik továbbá, hogy  $E$  és  $B$  merőleges egymásra és a haladás irányára (azaz a  $\vec{k}$  hullámszámvektorra, amely a haladási irányba mutat, nagysága pedig  $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$ ), továbbá

$$|\vec{E}_{(0)}| = c |\vec{B}_{(0)}|. \quad (5.77)$$

A hullámviselkedés pedig térben és időben periodikus váltakozást jelent, és a hullám frekvenciája/hullámhossza tetszőleges lehet. Ezt egyenes vonalban terjedő hullám esetén az 5.13. ábrán láthatóknak megfelelően illusztrálhatjuk.

Az elektromágneses sugárzás energiát is hordoz. Kiderül, hogy az intenzitása (azaz a felületegységre eső teljesítmény) arányos az amplitúdó négyzetével:

$$I = \frac{P}{A} = \epsilon_0 c \frac{E_{(0)}^2}{2} = \mu_0 \frac{B_{(0)}^2}{2}. \quad (5.78)$$

Később (a 6.2.1. szakaszban) kiderül az is, hogy az energiát kvantumok hordozzák, a fotonok. Egy kvantum energiája  $E = hf$ , ahol  $h = 6,62 \times 10^{-34}$  m<sup>2</sup>kg/s, és a fény

az összenergiájának megfelelő számú kvantumából áll, az intenzitás változása esetén a kvantumok száma változik egyedül.

Ahogy már a hullámegyenletről szóló 3.3.4. szakaszban (illetve a (3.52) egyenletben) is láttuk, egy pontszerű forrás esetén a hullámegyenlet megoldása egy, a forrástól bármely irányban távolodva  $1/r$  mértékben csökkenő *amplitúdójú* hullámot jelent. Mivel az intenzitás az amplitúdó négyzete, így pontszerű forrás esetén az intenzitás  $1/r^2$  mértékben csökken. Ez azért sem meglepő, mert a  $P$  teljesítményű forrás köré egyre nagyobb,  $4r^2\pi$  felületű gömböket rajzolva az ezeken észlelt intenzitás

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4r^2\pi}. \quad (5.79)$$

### 5.5.3. Az elektromágneses spektrum

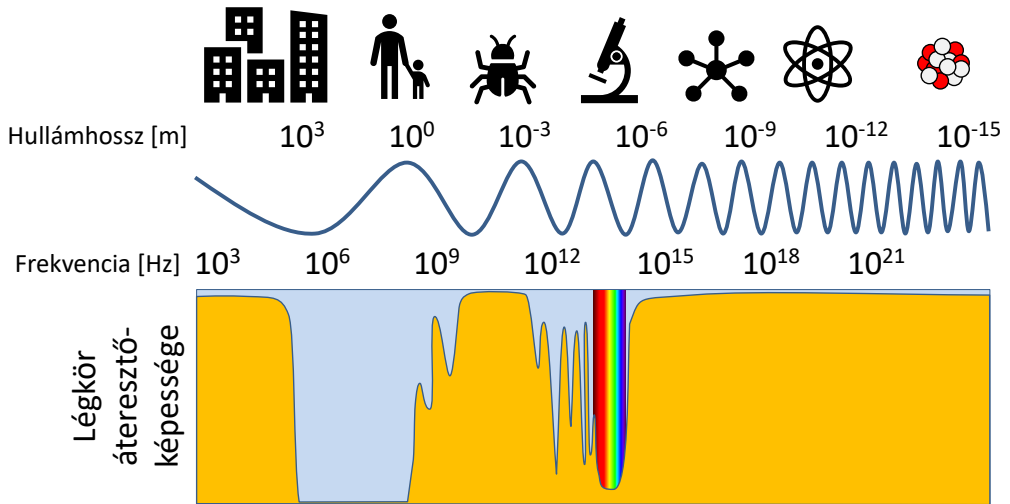
A Maxwell-egyenletek alapján tehát az elektromos és a mágneses tér hullámszerűen tud viselkedni, „lecsatolódik” az öt létrehozó töltésekről és áramokról, és vákuumban is tovaterjed,  $c$  sebességgel. A hullámzás hullámhossza vagy frekvenciája tetszőleges lehet. Az **elektromágneses spektrum** a lehetséges hullámhosszakat öleli föl, amelyen belül különféle hullámtípusokat különböztetünk meg. Sugárzásról akkor beszélünk, ha a forrás távolsága több hullámhossznyi. Épp ezért a 300 kHz alatti frekvenciatartományban (amely 1 km-nél is nagyobb hullámhosszat jelent) földi távolságok esetén tipikusan nem elektromágneses sugárzásról, hanem elektromos, illetve mágneses térről szoktunk beszélni.

Efelett a sugárzásokat a frekvenciától függően különféle kategóriákba soroljuk. Elektromágneses hullám a rádióhullám, a mikrohullám (azaz a mobiltelefon, a WiFi, a GPS, a mikrohullámú sütő működtetése során keletkező sugárzás), a fény (az UV és az infravörös is), továbbá a röntgen- és a gamma-sugárzás is. Az egyes sugárzások frekvenciáját és hullámhosszát az 5.1. táblázat foglalja össze.

Az 5.14. ábra is ezt illusztrálja, bemutatva, hogy a légkör a rádióhullámok közül a hosszúhullámokat visszaveri (nem ereszti át), a rövidhullámúakat elég jól átereszti. Átereszti a mikrohullámokat is. Ezek miatt a rövidhullámú rádióantennákat (például a mobilhálózatokét) sokkal sűrűbben kell elhelyezni, mint a hosszúhullámú rádióadókat; utóbbiakat a légkör alulról is visszaveri, és így akkor is foghatók, ha az antennát a Föld görbülete már „eltakarja”. Rövidhullámú rádióval (és mikrohullámmal) viszont lehet az űrbe is kommunikálni.

Magasabb frekvencián (azaz kisebb hullámhossznál) a látható fény tartományában áteresztő a légréteg, de az infravörös fényt visszaveri. Ez az alapja az üvegházhatásnak (illetve az úgynevezett  $\lambda$ -transzformációnak): a látható fény felmelegíti a talajt, amely kisebb hullámhosszú (kisebb  $\lambda$  értékkel rendelkező) infravörös sugárzást bocsát ki, a légkör vagy az üvegtető viszont nem engedi ki ezt az infravörös tartományú hősugárzást. Ezen túl az élővilág szempontjából fontos az is, hogy az ibolyántúli sugárzást is alig engedi át a légkör. A barnító, a bőrben D-vitamint termelő, de nagy mennyiségben bőrrákot is okozó UV-B sugárzást elsősorban az ózon szűri meg. A még rövidebb hullámú ibolyántúli napsugárzást (ez az UV-C), amely minden szárazföldi élőlényt elpusztítana, a nitrogén és oxigén nyeli el.





5.14. ábra. Az elektromágneses spektrum jellemző hullámhosszai (fent), az ezeknek megfelelő méretű jellegzetes objektumok (középen), a sugárzásokhoz tartozó szín (alul középen), illetve a légkör áteresztőképessége (alul).

Sugárzás típusa	Frekvenciatartomány	Hullámhossztartomány
Alacsony frekvencia	< 300 kHz	>1 km
Rádióhullámok	0,3 – 300 MHz	1 m – 1 km
Mikrohullámok	0,3 – 300 GHz	1 mm – 1 m
Infravörös	0,3 – 300 THz	1 mm – 800 nm
Látható fény	430 – 770 THz	400 – 700 nm
Ultraibolya	0,75 – 30 PHz	10 – 400 nm
Röntgen	0,03 – 30 EHz	10 nm – 10 pm
Gamma	> 30 EHz	< 10 pm

5.1. táblázat. Az elektromágnes sugárzások különféle frekvenciájú avagy hullámhosszú típusai.

### Kísérlet mikrohullámú analizátorral

- A Maxwell-egyenletek tehát kimondják, hogy léteznek elektromágneses hullámok: egy vezetékre szinuszosan változó feszültséget kapcsolva lehet őket létrehozni, egy másik vezetékben pedig (az eredetitől akár jelentős távolságra is) ugyanolyan frekvenciájú feszültséget keltenek. Így működnek az elektromágneses hullámokkal kommunikáló eszközök.
- A mikrohullámú analizátor a GHz-es tartományba eső frekvenciájú hullámokat észleli, és intenzitásukat méri.
- A mobiltelefon elektromágneses hullámai időben erőteljesen változó intenzitásúak: az adatokat csomagokban küldik és fogadják a készülékek. Ettől függetlenül észlelhető, ahogy egy mobiltelefontól egyre messzebb menve az intenzitás a távolság négyzetének inverzével változik, azaz  $I \sim 1/r^2$ .

## 5.6. Optika

### 5.6.1. A fény terjedése

Látható fényről körülbelül 400–700 nanométeres hullámhossz között beszélünk. Egyéb frekvenciájú hullámokra is hasonló törvények érvényesek bizonyos tartományokban, de most csak a fényt vizsgáljuk. A fény ugyan fotonadagokban terjed, de bizonyos körülmények között jó leírása az egyenes vonalban terjedő hullám is, adott  $\lambda$  hullámhosszal,  $c$  sebességgel és  $f = c/\lambda$  frekvenciával. Ebben és a következő szakaszban a fénynek az anyag jelenlétében mutatott viselkedését vizsgáljuk.

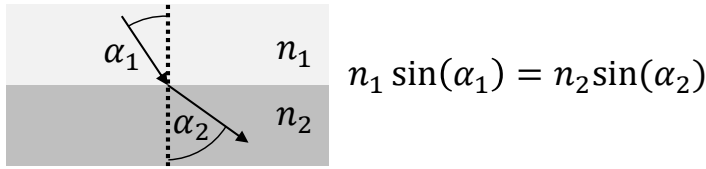
Nem vákuumban, hanem anyagban (levegőben, vízben, üvegben) terjedő fény esetén a vákuumban érvényes állandók ( $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ ) helyett az anyagra jellemzőeket kell használni:  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$  és  $\mu_0 \rightarrow \mu$ . Ennek megfelelően az elektromágneses hullámok (fény) sebessége

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \rightarrow c'^2 = \frac{1}{\mu \epsilon}. \quad (5.80)$$

Az anyag elektromos permittivitása és mágneses permeabilitása úgy alakul, hogy  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  és  $\mu = \mu_r \mu_0$ , ahol az  $r$  indexes állandók az anyag relatív (dimenziótlan) állandói. Az  $\epsilon_r$  értéke általában egynél (akár néhányszor is) nagyobb, a  $\mu_r$ -nek egytől való eltérése (amely amúgy lehet pozitív is, negatív is) ehhez képest általában elhanyagolható. Bevezetjük a közeg  $n$  **törésmutatóját** a közegbeli fénysebesség alapján:

$$c' = \frac{c}{n}, \text{ azaz } n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (5.81)$$

A vákuum törésmutatója (mintegy definíciószerűen)  $n_{\text{vákuum}} = 1$ . Anyagban tehát lassabban terjed a fény; minél „sűrűbb” (optikailag) az anyag, annál kisebb a terjedési sebesség. Nem mágneses anyagokra  $\mu_r \approx 1$ , tehát itt lényegében  $n \approx \sqrt{\epsilon_r}$ . A levegő törésmutatója például  $n = 1,0003$ , a vízé 1,333, az üvegé és átlátszó műanyagoké tipikusan 1,5–1,6 között van. A törésmutató függ a fény hullámhosszától is, de például látható fényre átlátszó anyagokra csak kissé. A hullámhosszfüggő törésmutató miatt bontja fel a fehér fényt komponenseire a prizma, illetve a szivárvány is hasonló okból jön létre.



5.15. ábra. A fénytörés törvénye, közeghatáron való áthaladás esetére.

Két anyag határán a beérkező fénysugár nem egyenesen halad tovább: ez a **fénytörés** jelensége. A haladást a *beesési merőlegessel* bezárt  $\alpha$  szöggel jellemezzük. Ha a fény egy  $n_1$  törésmutatójú közegből érkezik a beesési merőlegessel  $\alpha_1$  szöget bezárva, és a másik közeg  $n_2$  törésmutatójú, akkor az  $\alpha_2$  továbbhaladási szögére az alábbi törvény, az úgynevezett **Snellius–Descartes-törvény** lesz igaz:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2, \text{ avagy} \quad (5.82)$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}, \quad (5.83)$$

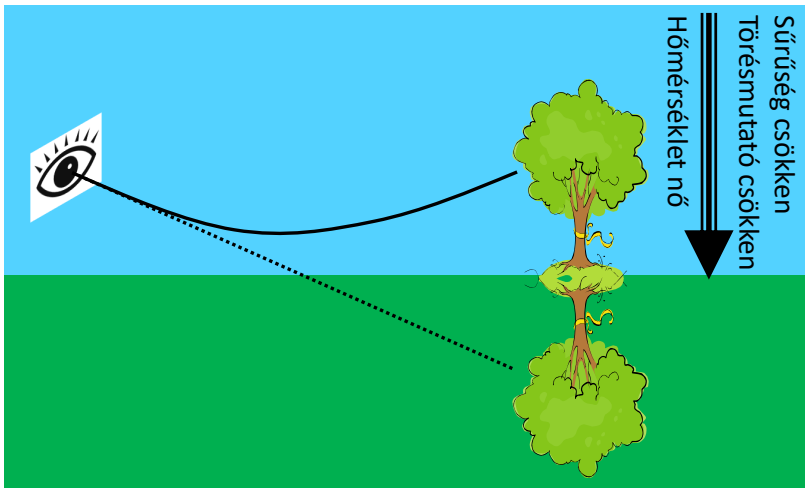
ahogy azt az 5.15. ábra is illusztrálja. Ez levezethető abból, hogy a fényhullámok elektromos és mágneses terei „folytonosan illeszkedjenek” egymáshoz a közeghatáron; ezzel most nem foglalkozunk.

Fontos azonban, hogy a fénytörés ezen törvényét teljesen más alapokból kiindulva is le lehet vezetni, méghozzá az úgynevezett Fermat-elvből. Ez a felismerés történetileg jóval megelőzte a fény elektromágneses hullámként való azonosítását, és önmagában is érdekes. A **Fermat-elv** (vagy más néven: a legrövidebb idő elve) szerint két pont között a fény mindig olyan utat „választ”, amelyen a lehető *leggyorsabban* végig tud haladni (ez tehát *nem* feltétlenül a legrövidebb út). Ebből az elvből is levezethető a fénytörés törvénye, éppen a fenti képletet kapjuk.

A fénytörés törvénye azt adja, hogy sűrűbb közegbe érkeve az  $\alpha$  beesési szög kisebb lesz (közelebb kerül a fénysugár a beesési merőlegeshez). Ezt a törvényt akkor értjük meg, ha feltesszük magunkban a kérdést, hogy a tóparton állva egy fuldoklót (tőlünk kicsit oldalirányban is eltávolodva) megpillantva hogyan rohannánk be hozzá. Biztosan nem az egyenes út a leggyorsabb, hiszen ekkor a tóban túl nagy utat kellene úszva megtennünk: praktikus az oldalirányú távolság egy részét a parton, futva megtenni, hogy kevesebbet kelljen úszni. Tulajdonképpen éppen az így optimalizált utat teszi meg a fény is a fenti ábrán.

További következmény a **teljes visszaverődés**. Ha  $n_2 > n_1$ , akkor egy adott  $\alpha_1$ -nél nagyobb beesési szögére a  $\sin(\alpha_2) = n_1/n_2 \sin(\alpha_1) < 1$  feltétel nem teljesül. Ezen  $\alpha_1$  felett nem lehetséges olyan  $\alpha_2$ , ami teljesíti a törési törvényt. Efeletti beesési szög esetén *teljes visszaverődésről* beszélünk, ekkor a fénysugár nem tud behatolni a másik (ritkább) közegbe. Erre épül például az optikai kábel, a fényvisszaverő prizma. Üveg-levegő határon ez a szög körülbelül 41 fok. Úszómedence vizébe belemerülve sem látunk ki a levegőre, ha a teljes visszaverődés határszögénél (ami a víz  $n = 1,333$  törésmutatójából a fenti módon kiszámolhatóan körülbelül 48 fok) laposabban akarnánk kinézni.

További érdekesség, hogy levegő törésmutatója függ a sűrűségétől, minél sűrűbb, annál nagyobb. A levegő sűrűsége pedig a hőmérsékletétől (is) függ, a gáztörvény alapján:



5.16. ábra. Délbib kialakulása meleg talaj esetén. A lejjebbi, nagyobb hőmérsékletű, ritkább levegő törésmutatója kisebb, és így a lefelé haladó fénysugár egyre „visszább” kanyarodik, míg végül olyan hatást kelt, mintha a felszínről verődött volna vissza.

ez magyarázza a **délbib** jelenségét. Ha a talaj mentén melegebb a levegő (ez tipikusan nyáron fordul elő), akkor a fény a lehető leggyorsabban úgy halad, ha „lemerül” az alsó, ritkább, és ezért kisebb törésmutatójú levegőrétegbe. Itt gyorsan haladva bőven „behozza” azt a késést, amit a magasságváltoztatás pluszútja miatt elszenvedett. Ezt illusztrálja az 5.16. ábra is.

### Kísérlet nagyítólencsével

- A fentieknek megfelelően levegőből üvegbe vagy műanyagba lépve megtörik a fénysugár terjedési iránya: emiatt használhatunk lencsét. Egy lencse fókuszpontjához közelre fényforrást (például egy mobiltelefon kijelzőjét) helyezve a lencsétől távoli ernyőn a fényforrás pontos (és fordított) képe alakul ki.
- Ezt egyszerűen reprodukálhatjuk egy lencsével és egy izzóval: a lencsét jól elhelyezve a forrás pontos képét kapjuk a szemközti falon. Mobiltelefont használva egyszerű „házi” projektort barkácsoltunk így tehát.

## 5.6.2. Geometriai optika

A **geometriai optika** a fénytörést kihasználó eszközök (tükrök, lencsék) működését írja le. Ezek az eszközök egy adott tárgyat képeznek le, annak egy képét hozzák létre úgy, hogy a tárgyról érkező fénysugarak (vagy azok meghosszabbításai) metszik egymást. Ha a tárgyról érkező sugarak metszik egymást, akkor ott egy ernyőn felfogható a kép: így működik a projektor vagy vetítőgép. Ha a sugarak nem metszik egymást, de a meghosszabbításuk igen (azaz úgy tűnik, mintha egy pontból jönnének), akkor virtuális képről beszélünk, ezt ernyőn nem tudjuk felfogni, de a szemünkkel láthatjuk (és virtuális metszéspontban levőnek látjuk a képet).

A szakasz további részében összefoglalt geometriai optikai törvényszerűségek, képletek mind levezethetők, ha az elrendezésekre szisztematikusan alkalmazzuk a fénytörés Snellius–Descartes-törvényét, valamint a fényvisszaverés egyszerű törvényét. A részletekkel nem foglalkozunk most, csak összefoglaljuk az alkalmazások szempontjából fontos eszközöket, azok viselkedésének leírását.

A geometriai optikában definiáljuk a tárgy  $T$  méretét és  $t$  távolságát (az optikai eszköztől, például a lencsétől), a kép távolsága  $k$ , mérete pedig  $K$ . Ekkor az eszköz **nagyítása** a méretek hányadosa, amely megegyezik a távolságok hányadosával (amint geometriai hasonlósággal belátható):

$$N = \frac{K}{T} = \frac{k}{t}. \quad (5.84)$$

A legegyszerűbb optikai eszköz a síktükör. A tárgy és a kép távolsága, illetve mérete ekkor azonos (tehát a nagyítás 1), de a kép a tükör mögött van (és így virtuális, hiszen a tükör mögé tett ernyőn semmi sem látszik).

A gömbfelszínen (illetve pontosabban egy parabola felszínén) kialakított (homorú vagy domború) **gömbtükör** esetén definiálunk egy optikai tengelyt (a tükör szimmetriatengelyét). Ezt ismerve a tükrök működése az alábbiaknak megfelelően írható le:

- A homorú tükör az ezzel párhuzamos sugarakat egy pontba gyűjti (így működik a parabolaantenna is), ez a **fókuszpontja**, amely a sugár felének megfelelő távolságra van a tükörtől:

$$f = \frac{R}{2}. \quad (5.85)$$

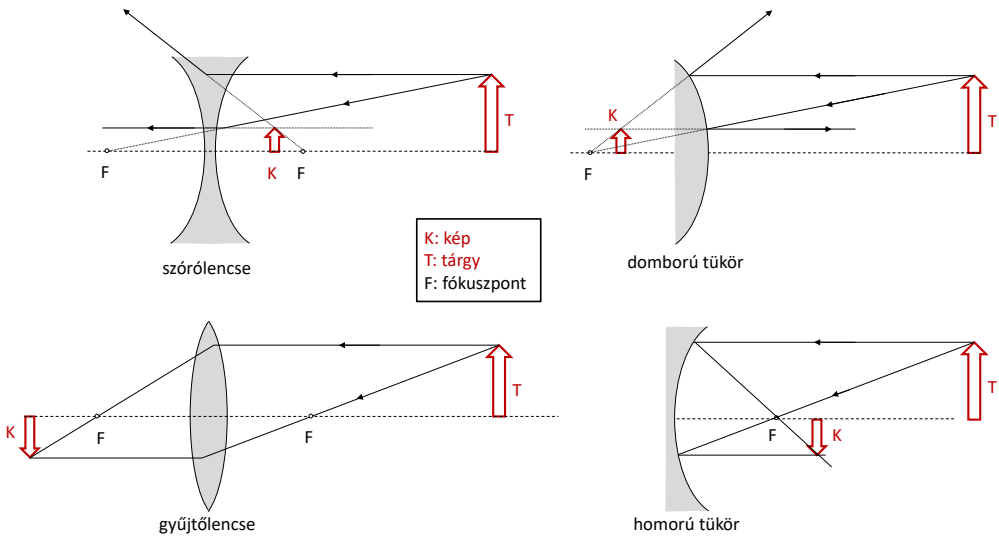
- A domború tükör az optikai tengellyel párhuzamos sugarakat szétszórja úgy, mint ha egy túloldali (képzetbeli) fókuszpontból jönnének.
- Mint minden optikai eszköznél, itt is igaz, hogy egy sugár a megfordított irányban azonosan terjed, tehát például a homorú tükör esetén a fókuszpontból jövő sugarak az optikai tengellyel lesznek párhuzamosak (lényegében így hoz létre szinte párhuzamos, irányított sugárnyalábot a reflektor vagy a zseblámpa).
- Gömbtükörök esetén a kép- és a tárgytávolság összefügg a fókuszponttal, az alábbiaknak megfelelően:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}. \quad (5.86)$$

Az **optikai lencsék** gömbfelszínekkel határolt, a közegetől (amelyben a lencsét használjuk: levegő, vákuum, vagy akár víz) eltérő törésmutatójú anyagból készült objektumok. Ezek fókusztávolsága a határoló gömbfelszínnek  $R_1$  és  $R_2$  sugarától függ, és az anyag közeghez képesti relatív  $n = n_{\text{anyag}}/n_{\text{közeg}}$  törésmutatójától:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (5.87)$$

ha az  $R_1$  és  $R_2$  sugarak lényegesen nagyobbak, mint a lencsekorong sugara (vagyis a lencse „majdnem sík”). Homorú határoló esetén negatív sugárról beszélünk. Ha a lencse fókusztávolsága negatívnak adódik, szórólencséről, ha pedig  $f$  pozitív, gyűjtőlencséről beszélünk. Működésük így foglalható össze:

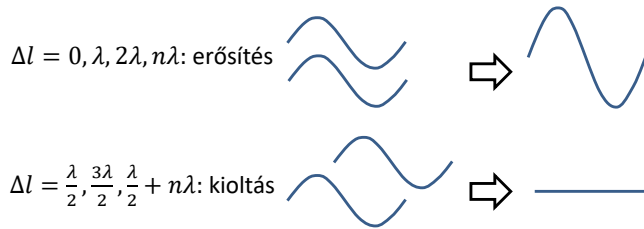


5.17. ábra. Különbéféle optikai eszközök képalkotása: szórólencse (balra fent), domború tükör (jobbra fent), gyűjtőlencse (balra lent), illetve homorú tükör (jobbra lent). Minden esetben úgy szerkeszthetjük meg a kialakuló képet, hogy húzunk két nevezetes sugarat. Az egyik egy, az optikai tengellyel párhuzamos egyenes, amely a tárgyon (annak tetején) átmegy. A másik nevezetes sugár szintén a tárgyon megy át, de vagy a fókuszpontba tart, vagy onnan jön. A párhuzamos sugár a fókuszpontba tart majd (vagy onnan jön, látszólag), a fókuszponti sugár pedig az optikai tengellyel párhuzamosan halad majd tovább. Fontos, hogy noha a tárgyat egy nyíl jellemzi, csak annak csúcsát szerkesztjük meg – az alja mindig rajta marad az optikai tengelyen, és az arra való merőlegesség sem változik.

- Gyűjtőlencse esetén az optikai tengellyel párhuzamos sugarak a fókuszba mennek; a fókuszba jövő sugarak párhuzamosan mennek tovább.
- Szórólencse esetén az optikai tengellyel párhuzamos sugarak szétszóródnak, mint ha a fókuszba jönnének; a túlóldali fókuszba tartó sugarak pedig párhuzamosan mennek tovább.

A fenti sugármenetekkel egy tárgy képét megszerkeszthetjük: a sugarak metszéspontjában lesz a kép (ha pedig csak a sugarak meghosszabbítása metszi egymást, azt virtuális képnek nevezzük). Ezt illusztrálja az 5.17. ábra.

A szem egy 2,5 cm körül változtatható fókusz távolságú lencsével működik (az izmok megnyújtják a lencsét, amelynek így megnő az  $R_1$  és  $R_2$  sugara, így megnő a fókusz távolsága). A látni kívánt tárgynak megfelelő távolságból jövő sugarakat a retinára fókuszálja, így a retinán egy fordított állású kép alakul ki, amelyet az agy megfelelően tud értelmezni. A nagyító egy fix lencsével működik (a tárgyat a fókuszpont közelébe helyezve nagyon nagyítás érhető el). A távcső és a mikroszkóp több, esetleg mozgatható lencséből áll, többszörös leképezéssel működik (ahol az egyik lencse által létrehozott kép a következő lencse tárgya).



5.18. ábra. Az interferencia jelensége: azonos fázisú hullámok erősítik, különbözőek kioltják egymást.

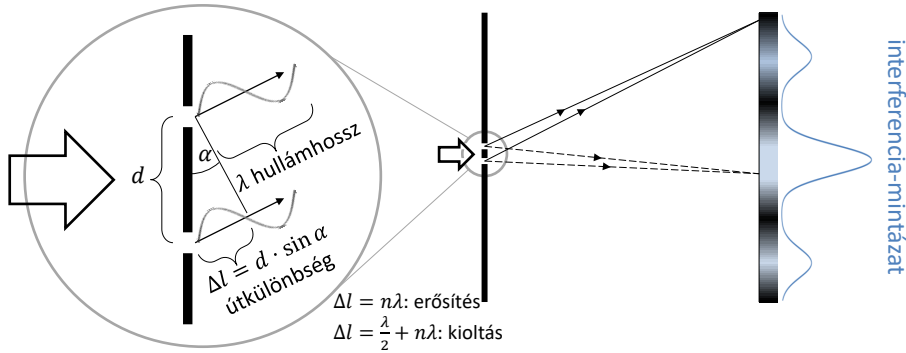
### Kísérlet: lézervény szóródása CD vagy DVD lemezen

- A fény elektromágneses hullám, a hullámnak hol maximuma, hol minimuma van. Ha két hullám találkozik, fázistól függően kioltathatják vagy erősíthetik egymást: ez az interferencia jelensége.
- A megfelelően koherens (azaz azonos fázisú) és monokromatikus (azaz csak egyfajta hullámhosszú fényt tartalmazó) fénysugár elemei interferálnak egymással, és interferenciamintázatot alakítanak ki.
- CD lemeze lézermutatóval világítva a falon nemcsak egy visszatükrözött pontot látunk, hanem többet: interferenciamintázat alakul ki.

### 5.6.3. Hullámoptika

Ahogy a Maxwell-egyenletekről szóló részben láttuk, a fény nem más, mint elektromágneses hullám. A hullámhosszával egy nagyságrendbe eső tartományok esetén emiatt a geometriai optikán jócskán túlmutató jelenségeket tapasztalhatunk: például két fényhullám gyengítheti vagy kiolthatja egymást. Ennek alapja az, hogy egy hullám (egy adott időpillanatban) egy  $\sin(2\pi x/\lambda) = \sin(kx)$  jellegű függvénnyel írható le. A **szuperpozíció elve** szerint ha két hullám találkozik, akkor ezek hullámfüggvénye összeadható. Ha az egyik hullám  $\phi$  „fáziskésésben van”, akkor  $\sin(k_1x + \phi) + \sin(k_2x)$  lesz az összegük. Azonos hullámszám (avagy hullámhossz) esetén kioltás történik, ha a fáziseltérés éppen  $\pi$  (vagy páratlanszor  $\pi$ ), maximális erősítés, ha  $2\pi$  (vagy párosszor  $\pi$ ), ahogy az 5.18. ábra mutatja.

A hullámtérben minden pont valójában úgy viselkedik, mint egy hullámforrás, és folyamatosan az ezekből a forrásokból érkező interferenciát figyelhetjük meg. Ezt fogalmazzuk meg a Huygens–Fresnel-elv: a hullámtér minden pontja elemi körhullámok kiindulópontja, a látott kép pedig ezek interferenciája. Erről bővebben a 3.3.7. szakaszban olvashatunk, itt csak a fényrel kapcsolatos következményeket tárgyaljuk. Az interferencia jelenségét használja ki a **kétfés-kísérlet**, amelyet az 5.19. ábra mutat. Ennek során koherens (fix fázisú) és monokromatikus (fix hullámhosszú) fényt irányítunk két  $d$  távolságú résre. Ekkor az ernyőn **interferenciamintázat** jelenik meg. Ha a hullámhossz  $\lambda$ , akkor  $\alpha$  szögben kiszámíthatjuk az összeadódott hullám erősségét. Az útkülönbség egyszerűen adódik:  $d \sin(\alpha)$ . A kísérletben fáziskülönbség a két hullám által megtett út különbsége miatt lesz. Ha az útkülönbség  $\lambda/2$ , az éppen  $\pi$  fáziskülönbségnek



5.19. ábra. A kétrés-kísérlet. Egy lemezen két rés van kialakítva, a fény mindkét résen átjut, és az így kialakuló két elemi hullám interferenciamintázatot hoz létre az ábra jobb szélén látható ernyőn. Az ábra később is előkerül, azonos a 7.1. ábrával.

felel meg kioltás történik. Ha az útkülönbség  $\lambda$ , az  $2\pi$  fázistolást eredményez, ekkor maximális erősítés lesz. Ezt mutatja az 5.19. ábra is.

A kioltás feltétele tehát  $d \sin(\alpha) = n\lambda + \lambda/2$ , a maximális erősítésé  $d \sin(\alpha) = n\lambda$ . A kísérlet segítségével optikai rácsok rácsállandója, vékony szálak vastagsága, illetve – ha a fénynél kisebb hullámhosszú hullámokkal dolgozunk – kristályrácsok szerkezete is meghatározható. Hasonló jelenség látható vékony olajrétegen, szappanbuborékon, sűrű áttetsző függönyön vagy párás ablakon átnézve, CD lemez felszínén satöbbi.

A Huygens–Fresnel-elv segítségével értelmezhetjük a réselhajlás jelenségét is. Egy keskeny résen áthaladó fénysugár a rácselhajláshoz hasonló elhajlást mutat, erősítési és kioltási helyekkel. Ennek oka, hogy a rés minden pontját hullámforrásnak tekinthetjük, ahonnan koherens hullámok indulnak azonos fázisban. A kétrés-kísérletben tapasztalt interferencia azért fontos, mert ez a bizonyíték a fény hullámtermészetére, és ahogy később kiderült, az anyag (részecskék, atomok, molekulák) is hasonlóan interferenciára képes, tehát az anyag is tud hullámként viselkedni: ez volt az egyik tényező, ami elvezetett a kvantummechanika felfedezéséhez.

## 5.7. Ellenőrző kérdések

1. Minimum mekkora nemnulla töltése lehet egy anyagdarabnak, részecskének?
2. Mekkora erő hat két 1 mm-re lévő elektron között?
3. Mi a Coulomb-törvény?
4. Mi az elektromos térerősség?
5. Milyen elektromos teret kelt egy  $Q$  ponttöltés?
6.  $\vec{E}$  elektromos tér mekkora erővel hat  $q$  töltésre?
7. Mit jelentenek az erővonalak?



8. Hogy néz ki egy ponttöltés elektromos tere erővonalakkal lerajzolva?
9. Hogy néz ki egy dipólus elektromos tere erővonalakkal lerajzolva?
10. Egy dipólus elektromos tere hogyan függ a távolságtól?
11. Két dipólus (molekula) közötti erő hogyan függ a távolságtól?
12. Miért világít a nagyfeszültségre kapcsolt uborka?
13. Mi az elektromos fluxus definíciója? Mire vonatkoztatva definiáljuk?
14. Mennyi az elektromos fluxus értéke sík felületen, állandó elektromos térben?
15. Tetszőleges felület és tér esetén hogyan számíthatjuk ki az elektromos fluxust?
16. Mit mond ki az elektrosztatikai Gauss-törvény?
17. Mit tudunk a zárt felületre vonatkoztatott elektromos fluxusról?
18. Töltött vezető testen belül mekkora az elektromos tér és miért?
19. Töltött vezető testen hol helyezkednek el a töltések?
20. Mi a Faraday-kalitka, hogyan működik?
21. Mi az a csúcshatás, mi a jelentősége?
22. Mekkora egy hosszú egyenes vezeték elektromos tere a vezetéktől  $r$  távolságban?
23. Mekkora egy nagy síklap elektromos tere?
24. Mit jelent a potenciális energia?
25. Elektromos térben hogyan számíthatjuk ki a potenciális energia két pont közötti különbségét?
26. Mekkora egy töltés potenciális energiája egy másik töltéstől adott távolságra?
27. Mi az elektromos potenciál?
28. Mi az elektromos feszültség?
29. Mit jelent az elektronvolt mértékegység?
30. Mekkora a potenciál ponttöltéstől adott távolságra?
31. Két töltött síklap között mekkora az elektromos tér?
32. Adott távolságú töltött síklapok között mekkora a feszültség?
33. Mi a kondenzátor?
34. Mi az a kapacitás?
35. Mi a kapcsolat térerősség és potenciál között?

36. Mik az ekvipotenciális felületek?
37. Mi az elektromos áram?
38. Mi az elektromos ellenállás?
39. Mi a fajlagos ellenállás? Mik a tipikus értékei?
40. Mekkora az elektromos áram által leadott teljesítmény?
41. Mi a soros és párhuzamos kapcsolás?
42. Milyen kapcsolatban hogyan számíthatjuk ki két ellenállás „összegét”?
43. Milyen kapcsolatban hogyan számíthatjuk ki két kondenzátor „összegét”?
44. Milyen alapvető összefüggésekkel számíthatjuk ki egy áramkörben az áramokat és a feszültségeket (Kirchhoff-törvények)?
45. Mi a mágneses tér mértékegysége?
46. Milyen tipikus mágneses térerősségeket ismersz?
47. Hogyan hat a mágneses tér mozgó töltésekre?
48. Mi a vákuum mágneses permeabilitása?
49. A sebességre merőleges mágneses tér milyen mozgást hoz létre?
50.  $B$  mágneses térben mozgó  $p$  impulzusú,  $q$  töltésű test mekkora sugarú körpályára áll?
51. Mekkora erő hat áramjárta vezetőre?
52. Áramhurokra mekkora forgatónyomaték hat?
53. Miért forgathatja a mágneses tér az atomokat?
54. Mi okozza az anyagok mágneses viselkedését (atomi szinten megmagyarázva)?
55. Milyen egy mágneses dipólus tere (erővonalakkal)?
56. Mit tudsz a mágneses töltésekről?
57. Mekkora egy zárt felület mágneses fluxusa?
58. Mi hozhat létre mágneses teret?
59. Mekkora egy mozgó töltés mágneses tere?
60. Mit mond a Biot–Savart-törvény?
61. Mekkora egy szinte végtelen hosszú egyenes vezető mágneses tere a vezetőtől  $r$  távolságban?
62. Mit mond az Ampère-törvény?

63. Kör alakú vezető mágneses tere mekkora (a kör közepén)?
64. Mekkora egy tekercs mágneses tere (középen)?
65. Mit okoz a változó mágneses tér?
66. Mit mond ki a Faraday-féle indukciós törvény?
67. Mekkora feszültség indukálódik egy tekercsben szinuszosan változó mágneses tér esetén?
68. Mi a Lenz-törvény?
69. Hogyan működik a transzformátor?
70. Mi az önindukció?
71. Mekkora egy tekercs impedanciája váltakozó feszültség esetén?
72. Mekkora egy kondenzátor impedanciája váltakozó feszültség esetén?
73. Melyik négy törvény alkotja a Maxwell-egyenleteket?
74. Mi a Maxwell-egyenletek vákuumbeli alakja nagyjából?
75. Milyen egyenlet jön ki az elektromos és mágneses térre a Maxwell-egyenletekből?
76. Mekkora az elektromágneses hullámok terjedési sebessége?
77. Töltések hiányában milyen elektromos és mágneses tér lehetséges?
78. Anyagban hogyan változik a permeabilitás és a permittivitás?
79. Mi az intenzitás?
80. Hogyan változik a pontszerű forrásból jövő elektromágneses sugárzás intenzitása?
81. Mi a röntgensugárzás hullámhossztartománya?
82. Mi a látható fény hullámhossztartománya?
83. Mi a látható fény frekvenciatartománya?
84. Milyen mikrohullámú eszközöket ismersz?
85. Mennyi az elektromos hálózat sugárzásának hullámhossza?
86. Mi a kapcsolat hullámhossz és a frekvencia között?
87. Mi a törésmutató definíciója? Mik a tipikus értékei?
88. Mennyi a fény (és az elektromágneses hullámok) anyagbeli sebessége?
89. Mi a Fermat-elv?
90. Mi a fénytörés törvénye?

91. Hogyan mozog a fény közeghatáron?
92. Mi a teljes visszaverődés?
93. Hogyan jön létre a délibáb?
94. Mi egy optikai eszköz nagyításának definíciója?
95. Mi a két nevezetes sugármenet gömbtükrök esetén?
96. Mekkora egy  $R$  sugarú gömbtükör fókusztávolsága?
97. Mi a kapcsolat a fókusztávolság, tárgytávolság és képtávolság között?
98. Mi a lencsék két nevezetes sugármenete?
99. Mitől függ egy lencse fókusztávolsága?
100. Mekkora a szem fókusztávolsága, és miért változhat?
101. Mit jelent az interferencia?
102. Mit jelent a két hullám közti fáziskülönbség?
103. Mikor olthatja ki vagy erősítheti egymást két hullám?
104. Mi a kétrés-kísérlet lényege?
105. Milyen fényre van szükség a kétrés-kísérlethez?
106. Milyen eltérülési szögeknél jelennek meg fényes, illetve sötét foltok a kétrés-kísérletben?
107. Ha eleve koherens volt a fény, miért lesz két komponense között mégis fáziskülönbség a kétrés-kísérletben?

## 6. fejezet

# Modern fizikai bevezető

A jegyzet hátralévő részében a „modern”, XX. és XXI. századi fizika fejleményeire térünk ki. Elsőként egyetlen fejezetben egy rövid bevezetőt adunk, amely inkább a klasszikus fizikai rész kiegészítése, utána pedig a három fő témakört külön fejezetekben is tárgyaljuk, valamivel részletesebben. A jegyzet ezen fejezetei kicsit más jellegűek, mint a korábbiak, itt nem a matematikai mélységű megértésre, hanem az új, érdekes fogalmak és jelenségek közérthető magyarázatára törekedtünk. Ennek megfelelően ahhoz, hogy az olvasó továbbgondolhassa a következőkben elmondottakat, a jegyzeten túli ismeretekre is szükség van – ugyanakkor a figyelmes olvasó kizárólag a jegyzet alapján is képet alkothat az utóbbi 100–150 évben kialakult „modern fizikáról”. Mivel a jegyzet csak a legfontosabb témákat érinti, érdeklődő olvasókban hiányérzet alakulhat ki. Ennek csillapítására az alábbi ismeretterjesztő könyveket ajánlom:

Richard Feynman: *Hat könnyed előadás.*

Richard Feynman: *Hat majdnem könnyű előadás.*

Stephen Hawking: *Az idő rövid története.*

Steven Weinberg: *Az első három perc.*

Roger Penrose: *A császár új elméje.*

Stephen Hawking és Roger Penrose: *A tér és az idő természete.*

Jelen fejezet első szakasza a téridő modern fogalmába ad klasszikus fizikán túli kitekintést. A további, mélyebb részleteket a 7. fejezet tartalmazza, érdeklődők számára ajánlom annak elolvasását is. A következő szakaszok a kvantumfizika, illetve az atom- és magfizika témakörét vezetik be. Az ezekhez kapcsolódó mélyebb részleteket a 8. és 9. fejezetek tartalmazzák.

## 6.1. A téridő modern fogalmának kialakulása

### 6.1.1. A newtoni mechanika és a Maxwell-egyenletek ellentmondása

Bár Arisztotelész még azt gondolta, hogy a magára hagyott test megáll, és a mozgás magától nem marad fenn, Galilei és Newton óta tudjuk, hogy ez nem így van. A klasszikus mechanika szerint a mozgás relatív: semmilyen mechanikai jellegű kísérlettel nem lehet megállapítani, hogy két, egymáshoz képest egyenletesen mozgó rendszer közül melyik áll és melyik mozog – azaz nem lehet különbséget tenni köztük. Sima tengeren lévő hajó vagy vasúti kocsik esetében sem lehet megállapítani belülről (zárt ablakok mellett), hogy mozog-e, vagy sem.

Az újabb és újabb fizikai jelenségek felfedezése nyomán azonban felmerült a kérdés, hogy az előző bekezdésben megfogalmazott **Galilei-féle relativitási elv kiterjeszhető-e** nem mechanikai kísérletekre is, azon belül is a fényre, elektromosságra és mágnesességre. A XIX. század eleje óta ismert volt, hogy mozgó töltések mágneses teret keltenek, a mágneses tér mozgó töltésekre pedig Lorentz-erővel hat. Ez azt sugallja, hogy az elektromágnesesség esetében mégis abszolút értelemben megkülönböztethető a mozgás és a nyugalom, ellentmondva a newtoni mechanika relativitási elvének: ha két azonos töltés a világűrben, a semmi közepén áll egymástól valamilyen távolságban, elektromos taszítás lép fel közöttük, de ha egyenletesen egyforma sebességgel egy irányba mozognak, akkor

az elektromos taszítás mellett még mágneses erő (vonzás) is hat közöttük. Úgy tűnik tehát, mintha az elektromosság törvényei szempontjából létezne „abszolút egy helyben állás”.

Az is kiderült, hogy a Maxwell-egyenletek szerint az **elektromágneses hullámok** vákuumban  $c$  sebességgel terjednek, függetlenül az őket kibocsátó forrás esetleges mozgásától. Talán az elektromágneses hullámok is egy közeghez (egyfajta „éterhez”) lennének kötve? Ez ellentmondana a newtoni mechanika relativitási elvének: a fény vizsgálatával mégis különbséget tudnánk tenni abszolúte álló és mozgó rendszerek között, az éterhez képest vett mozgásuk alapján. A kísérletek alapján azonban kiderült (Michelson, Morley, Fizeau is mások munkája nyomán), hogy „nincs éter”: a fény mindig, minden megfigyelő szerint azonos  $c$  sebességgel halad – tehát egy adott fénysugár sebessége független attól, hogy álló vagy mozgó rendszerből nézzük. Ez – noha a sok-sok kísérlet eredményét figyelembe véve minden kétséget kizáróan igaz állítás – azért nagyon furcsa, mert még a sebesség összeadásának egyszerű kinematikai szabályait is sérti: ha egy mozgó autó bekapcsolja a fényszóróját, a „kilőtt fény” az **autóhoz képest is, és az úthoz képest is** egyforma,  $c$  nagyságú sebességgel terjed!

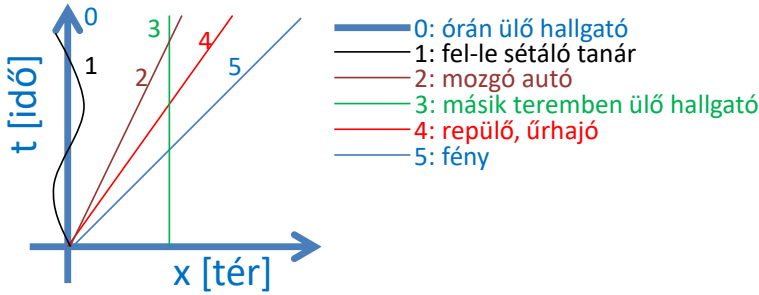
A fentiekben vázolt probléma feloldását Lorentz és Minkowski alapozta meg, és Einstein öntötte egységes keretbe. Két posztulátumot (alapfeltevést) fogalmazott meg: **a fizika törvényei minden inerciarendszerben azonosak**, illetve **a vákuumbeli fénysebesség minden megfigyelő számára azonos**, értéke a  $c = 300\,000$  km/s természeti állandó. Ebből a két feltevésből vezette le Einstein a speciális relativitáselméletet, amely tulajdonképpen a Galilei-féle relativitás kiterjesztése az elektrodinamikára: hiszen a relativitáselmélet szerint nemcsak mechanikai, de elektrodinamikai, optikai (sőt: semmilyen) kísérlettel nem lehet megállapítani egy rendszerről önmagában, hogy áll-e, vagy pedig egyenletesen mozog.

### 6.1.2. A speciális relativitáselmélet

**A téridőt** az őt alkotó pontokon, azaz az eseményen keresztül definiáljuk. Az esemény, mint a téridő egy eleme pontosan ugyanolyan idealizált konstrukció, mint a háromdimenziós térben a geometriai pont: nincsenek „valódi pontok”, viszont egy nagyon kicsi testet pontnak tekinthetünk, ha úgy gondoljuk, hogy az egyetlen dolog, amit tudni akarunk róla, az a három koordinátája. Ugyanígy, „eseménynek” hívhatunk egy pontszerű és időben pillanatszerű történést, például egy tapsolást, vagy egy lámpa felvillanását. Ahogyan a háromdimenziós tér a „lehetséges pontok” összessége, ugyanúgy a téridő a „lehetséges események” (azaz téridőpontok) összessége.

A relativitáselmélet szerint a téridő úgynevezett Minkowski-féle struktúrájú: ez azt jelenti, hogy két esemény közötti távolság, illetve a köztük eltelt idő másképp függ a megfigyelő mozgásától, mint ahogyan természetszerűleg gondolnánk. Ezt a **Minkowski-diagramokkal** világíthatjuk meg, amelyekben egy adott megfigyelő szerint érvényes derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoljuk a téridőt: a vízszintes tengelyen a teret, a függőlegesen az időt, ahogy a 6.1. ábra is mutatja. A megfigyelő maga az  $x = 0$  pontban tartózkodva mozog előre az időben. Az időskálát úgy állítjuk be, hogy a fénysebesség egy szimmetrikusan („45 fokban”) haladó egyenesnek feleljen meg.

Ha egy mozgó objektumhoz képest szeretnénk a jelenségeket vizsgálni, „be kell ülni” az ő koordináta-rendszerébe, és az események hely-, illetve időkoordinátáit átszá-



6.1. ábra. A téridő grafikonja, benne különféle objektumokkal. Az ábra azonos a 7.4(a). ábrával.

mítani a mozgó megfigyelő által mért értékekre. Ennek szabályait a relativitáselmélet szerint a **Lorentz-transzformáció** adja meg. Eszerint Minkowski-diagramokon az állandó sebességgel mozgó megfigyelő számára úgy transzformálódnak a tér- és időkoordináták, hogy az ő koordináta-rendszerében is éppen **szimmetrikusan középen** legyen a fénysebesség egyenese, ahogy azt a 6.2. ábra mutatja. A térbeli távolságok és az időtartamok mérése ezen tengelyekkel való párhuzamos vetítéssel történik. Az egyik leglényegesebb eltérés a „megszokott” transzformációktól, hogy két téridőbeli esemény között eltelt idő nem azonos a két megfigyelő számára: ezt hívjuk **idődilatációnak**. Az események közötti távolság sem úgy változik, mint ahogy gondolnánk: a távolságok **Lorentz-kontrakciót** szenvednek. Ennek és az időtartamok rövidülésének mértékét is a  $\gamma$ -val jelölt **Lorentz-faktor**,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (6.1)$$

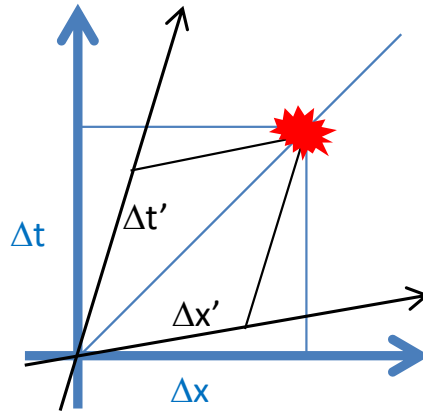
adja meg, ahol  $v$  a mozgó megfigyelő sebessége. Ennek nagysága a fénysebesség 10%-a, azaz 30 000 km/s sebesség esetén  $\gamma = 1,005$ . Ha  $v/c = 0,5$ , akkor  $\gamma = 1,1$ , a fénysebesség 90%-át elérő sebesség esetén azonban már  $\gamma = 2,3$ , míg  $v/c = 0,999$  esetén  $\gamma = 22$ . A fénysebességet majdnem elérő sebességek esetén tehát a  $\gamma$  értéke igen nagy, azaz az idő nagyon lelassul, a távolságok pedig nagyon lerövidülnek. A fénysebesség felével mozgó űrhajó tehát az álló megfigyelő szerint körülbelül 10%-kal rövidebbnek tűnik a földi (álló) megfigyelő szerint, mint az űrhajóban utazók szerint. Hasonlóan, amíg a Földön 10 év telik el, addig az űrhajóban ülők szerint csak 9 év: az idő is 10%-kal lassabban telik számukra. Ugyanakkor ez fordítva is igaz, azaz például a földi tárgyak az űrhajós szerint rövidebbek. A 6.2. ábra a távolságok és időintervallumok Lorentz-kontrakció miatt megjelenő relativitását is illusztrálja.

A speciális relativitáselmélet fontos következménye, hogy a **sebesség-összeadás törvénye is módosul**. Ha egy megfigyelő hozzánk képest  $v_1$  sebességgel mozog, és egy harmadik objektum (lövedék, hullám, bármi) hozzá képest  $v_2$  sebességgel mozog, akkor ezen tárgy sebessége *szerintünk* nem a hagyományos összeg,  $v_1 + v_2$ , hanem

$$\frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}. \quad (6.2)$$

Ha  $v_1 = 100$  m/s és  $v_2 = 100$  m/s, akkor tehát az eredő sebesség nem 200 m/s, hanem 199,99999999998 m/s. A korrekció ilyenkor tehát nagyon kicsi, de 100 000 km/s és





6.2. ábra. Mozgó megfigyelő számára egy esemény helye és ideje is módosul, a Lorentz-transzformáció szabályai szerint. Az ábra azonos a 7.4(e). ábrával.

100 000 km/s esetén már 200 000 km/s helyett 180 000 km/s sebességet kapunk: itt már lényeges a módosulás. A képletből látható továbbá, hogy  $v_2 = c$  esetén  $\frac{v_1+c}{1+v_1c/c^2} = c$ , tehát  $c$ -hez „bármennyit adva” továbbra is csak  $c$ -t kapunk. A fénysebesség állandó, bármilyen sebességű megfigyelőről nézzük: a matematikai formalizmus ezek szerint valóban tartalmazza azt a szabályt, amelyet mint alapposztulátumot mondhattunk ki a relativitáselmélet felépítésekor. Ennek „ára” az volt, hogy a távolságok és az időtartamok nem a megszokott módon viselkednek, amikor mozgó megfigyelőről nézzük ugyanazt az eseménysorozatot.

A speciális relativitáselmélet további fontos következménye, hogy az **egyidejűség is relatív**: a mozgás sebességétől függ, hogy két, egymástól távoli esemény „egyszerre” történt-e. Egymáshoz képest mozgó megfigyelők erről mást mondanak. Kiderül, hogy ha két esemény olyan távol van, hogy közöttük csak a fényénél nagyobb sebességgel lehetne „átutazni”, akkor mindig van olyan, fénynél lassabban mozgó megfigyelő, aki szerint a két esemény egyszerre történik. Olyan is van, aki szerint az egyik előbb történik, mint a másik, és olyan is, aki szerint a másik történik előbb, mint az egyik. Ebből következik az is, hogy a fénysebesség határsebesség: fénynél gyorsabb utazás (sőt akárcsak információközlés) során „időben visszafelé is haladhatunk”: két távoli esemény idősorrendje megfordulhat. Ezzel az a probléma, hogy egy okozat ismeretében megváltoztathatnánk az okot, azaz megsérthetnénk a kauzalitás elvét, amely szerint az ok előbb van, mint az okozat. Például a meccs végeredményének ismeretében a meccs előtt fogadást tehetnénk, vagy (morbid példával élve) megölhetnénk egy korábban élt egyenes ági felmenőnket, saját megszületésünket megakadályozva (ami ellentmondásra vezetne). Levonhatjuk tehát a következtetést (a gondolatmenet és a szükséges feltételek némi további finomításával), hogy a fénysebességnél gyorsabb információközlés (pláne utazás) nem lehetséges.

Néhány további fizikai mennyiség értelmezése is módosul a relativitáselméletben, jellemzően a Lorentz-faktor megjelenésével. Például az impulzus relativitáselméleti definíciója  $\vec{p} = m\vec{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$ , ami  $v \ll c$  esetén visszaadja a klasszikus közelítést. Egy  $m$  tömegű részecske energiája pedig  $E = mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$ . Ebből a két képletből belát-

ható, hogy a részecske energiája és impulzusa között a következő összefüggés érvényes:<sup>1</sup>

$$\sqrt{E^2 - p^2 c^2} = mc^2. \quad (6.3)$$

Ez azt is jelenti, hogy a nulla impulzusú (nyugvó) objektum energiája  $E = mc^2$ , tehát a **tömeg** tulajdonképpen a **nyugalmi energiának** felel meg (egy  $c^2$  szorzó erejéig). Ezt úgy szoktuk mondani, hogy az energia és a tömeg ekvivalens mennyiségek, a „tömegmegmaradás” nem lesz többé érvényes, csak az energiamegmaradás, ami ilyen módon a tömeget is magában foglalja. Egy  $m$  tömegű elektron és antirészecskéje, egy (ugyanekkora tömegű) pozitron tehát átalakulhat  $2mc^2$  összenergiájú fotonokká. Ugyanígy, ha valamely kémiai vagy atomi rendszernek van valamekkora kötési energiája, akkor ez a tömegének módosulásával jár. (A kötött rendszer tömege kisebb, mint a részei tömegeinek összege, és a tömegkülönbségnek megfelelő energia távozott annak idején energiafelszabadulás formájában, amikor a rendszer létrejött az alkotóelemeiből.) Ezt majd az atom- és magfizikáról szóló szakaszban is látni fogjuk.

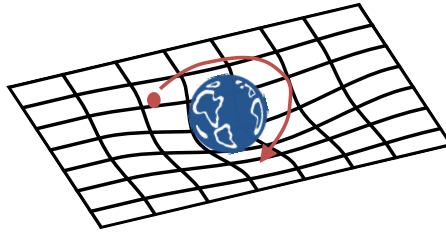
A speciális relativitáselméletnek **rengeteg kísérleti bizonyítéka** van. Fontos példa a légkörben keletkező kozmikus részecskék (műonok) esete, amelyek olyan rövid élettartamúak, hogy fénysebességgel menve is csak körülbelül 660 métert tudnának megtenni (elbomlásuk előtt). Ugyanakkor nagy többségüket észleljük a Földön is, miután áthaladtak több tíz kilométernyi légkörön. Ez azért lehetséges, mert nagy sebességük miatt számukra a megteendő távolság nagyon lerövidül. Egy másik fontos példa, hogy ha két igen pontos órát összehangolunk, majd az egyikkel egy gyors repülővel „teszünk egy kört”, ez utóbbi óra kevesebbet fog mutatni, mikor újra egymás mellé tesszük a másikkal. Az eltérés mértéke éppen az idődilataciónak megfelelő lesz.

### 6.1.3. Az általános relativitáselmélet

A speciális relativitáselmélet és a newtoni gravitáció ellentmondásban áll egymással: a newtoni gravitációelmélet szerint ha két objektum hat egymásra, és az egyiket megmozdítjuk, azt a másik a gravitáción keresztül *azonnal* érzi. A gravitációs hatás tehát végtelen sebességgel érne el a másik objektumhoz, ez a **távolhatás** pedig a **speciális relativitáselmélet szerint lehetetlen**.

Az **általános relativitáselmélet** tulajdonképpen a speciális relativitáselmélet kiterjesztése (általánosítása) a gravitációs terekre. Alapja az úgynevezett **ekvivalenciaelv**, amely szerint semmilyen kísérlettel nem lehet különbséget tenni egy gravitációs térben álló kabin, és egy, a csillagoktól távoli űrben gyorsuló kabin között. Mindkettőben „az egyik falhoz présel” valamilyen „erő”: az egyik esetben a gravitáció, a másik esetben a tehetetlenségi erő; az ekvivalenciaelv tehát azt mondja, hogy ezek között semmilyen „belső” megfigyeléssel nem lehet különbséget tenni. A gravitációs tér és a vonatkoztatási rendszer gyorsulása egyenértékű.

<sup>1</sup> A relativitáselmélet matematikai megfogalmazásában bevezetik az úgynevezett négyesvektorokat, amelyek négykomponensű mennyiségek, és a „hosszuk” nem változik, ha egy nyugvó megfigyelő helyett egy mozgó megfigyelőre térünk át. Az energiára és impulzusra vonatkozó ezen formula tulajdonképpen azt jelenti, hogy az impulzus és az energia is egyetlen négyesvektort alkot: ez a négyesimpulzus, amelynek „Lorentz-hossza” a képlet jobb oldala,  $mc^2$ . Ez tehát független a megfigyelőtől. Ha egy mozgó megfigyelő nézi ugyanazt a testet, más energiát és más impulzust is „lát”, de  $E^2 - p^2 c^2$  ugyanannyi lesz.



6.3. ábra. A téridő görbületét (és annak hatását) illusztrálhatjuk egy gumilepedőre helyezett golyóval: ekkor a lepedőn elgurított golyó nem egyenes vonalban mozog, hanem (megfelelő indítás esetén) a lepedőre helyezett tömeg körül kering – mintha a tömeg vonzana. Az általános relativitáselméletben is hasonló a helyzet: nem közvetlenül az egyik tömeg vonzza a másikat, hanem az egyik tömeg meggörbíti a téridőt, és abban egy másik test a „neki legkellemesebb” úton mozog (ami görbe téridőben már nem egyenes vonal), azaz mintha a tömeg hatna rá – holott az „csak” a teret görbíti. Az ábra azonos a 7.7(b). ábrával.

A fentiekből kiindulva vezette le Einstein az általános relativitáselméletet. Ennek lényege, hogy az anyag egyfajta **görbült téridőt** hoz létre, és a mozgást ebben a görbült térben kell értelmezni. A téridő görbülete a benne elhelyezett tömeggel (energiával) nő, és ez a görbület hat aztán a további tárgyak mozgására. A koncepciót illusztrálni lehet súlyok által megnyújtott gumilepedővel, ahogy a 6.3. ábra is mutatja.

Az általános relativitáselméletnek is sok **kísérleti bizonyítéka** van. Az egyik fontos bizonyíték az, hogy a Merkúr ellipszispályája elfordul 100 év alatt 574 szögmásodpercet, és ebből körülbelül 43 szögmásodperc nem magyarázható meg a newtoni mechanikával (illetve a többi bolygó jelenlétével), de az általános relativitáselmélettel igen. Megfigyelték a gravitációs idődilatációt is: egy nehéz objektum úgy görbíti meg a téridőt, hogy a közelében lassabban járnak az órák, mint tőle távol. Ezt is figyelembe veszik a GPS műholdak tervezésekor, naponta  $45 \mu\text{s}$  eltérés keletkezik a földi és a műholdakon lévő órák között. Továbbá az anyag (például egy nehéz csillag) által meggörbített téridőben a fény is „görbén” halad, ami érdekes jelenségeket hoz létre: az úgynevezett gravitációs lencsehatást. A fénytutak meggörbülését már 1919-ben (egy napfogyatkozás alkalmával a Nap mellett látszó csillagokat megfigyelve) kimutatták, az elmúlt évtizedekben pedig sikerült úgynevezett Einstein-keresztet és Einstein-gyűrűt is megfigyelni: ezeknél egy masszív objektum a mögötte lévő galaxis fényét négyszeresen (kereszt formájában), vagy akár kör alakban képezi le.

A **fekete lyukak** léte is az általános relativitáselméleten keresztül érthető meg. Minden gravitáló tömegnek van egy úgynevezett Schwarzschild-sugara: ez  $R_S = 2M\gamma/c^2$ , ahol  $M$  a test tömege,  $\gamma$  pedig a gravitációs állandó. Ez a Föld esetében 9 mm, a Nap esetében pedig 3 km. Kiderül, hogy ha egy test mérete kisebb, mint a Schwarzschild-sugara, akkor fekete lyukként viselkedik: olyan nagy lesz a felszínén a szökési sebesség, hogy még a fény sem képes kijutni a felszínéről. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a Schwarzschild-sugárnál beljebb már minden más is az objektum középpontja felé fog zuhanni (hiszen a fénysebesség határsebesség).

A **világegyetem időfejlődését** is az általános relativitáselmélet segítségével vizsgálhatjuk. Az Univerzum egy ősrobbanásban keletkezett, körülbelül 13,7 milliárd éve,

azóta folyamatosan tágul: a téridő szövete nyúlik meg egyre jobban, ahogy azt az általános relativitáselmélet leírja. Erre az egyik fontos bizonyíték a Hubble-törvény: a messzi galaxisok (amelyek relatív sebességét a Doppler-effektusból lehet meghatározni, távolságukat pedig úgynevezett szupernóva-robbanások segítségével) távolodási sebessége arányos a távolsággal (természetesen itt a látszólagos helyzetről beszélünk, hiszen egy távoli galaxist ott látunk, ahol akkor volt, amikor a most hozzánk érkező fénye elindult). A másik bizonyíték a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás: a világegyetemben mindenhol észlelhető egy körülbelül 2,7 K hőmérsékletű sugárzás, amely az ősrobbanás utáni hőmérsékletet adja vissza (a Doppler-effektus miatt sokkal alacsonyabb frekvencián, azaz sokkal kisebb hőmérsékletet mutatva).

## 6.2. A részecske-hullám kettősség, a kvantumvilág

### 6.2.1. A fény kvantumtermészete

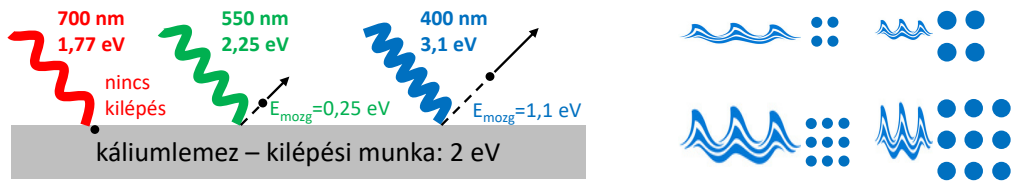
Fresnel és Young interferenciakísérletei (avagy az előző fejezet végén tárgyalt kétrés-kísérlet, illetve a Huygens–Fresnel-elv) óta ismert, hogy a fény hullám, még hozzá elektromágneses hullám. A 19. században azonban ezzel ellentmondásban álló megfigyelések láttak napvilágot. 1839-ben Edmond Becquerel (a radioaktivitást felfedező Henri Becquerel édesapja) felfedezte fotovoltaiikus hatást, amelynek során fény hatására félvezetők vezetési tulajdonságai megváltoznak (erre a jelenségre építve működnek ma a napelemek). Ez irányította a figyelmet a fény és az elektronok kapcsolatára. A **fotoelektromos jelenséget**, avagy fotoeffektust Heinrich Hertz fedezte fel 1887-ben. Ezen jelenség során fémből elektronok lépnek ki fény hatására. Lénárd Fülöp 1902-ben egy ehhez hasonló (Nobel-díjat érő) jelenséget talált, gázok ionizációját figyelte meg UV fény hatására. Látható, hogy a XIX. és XX. századok fordulóján a fizikai kutatások középpontjában ezek a jelenségek voltak. Lássuk most tehát mindezt részletesebben.

A fotoeffektus során azt tapasztaljuk, hogy fémből a kilépő elektronok száma a fény intenzitásával arányos, és nem függ a fény frekvenciájától. Van viszont egy legkisebb frekvencia, amelynél kisebb frekvenciájú fény hatására egyáltalán nem lépnek ki elektronok, az intenzitástól teljesen függetlenül. Ez a jelenség a hullámképpel teljesen összeegyeztethetetlen, ugyanis hullámok esetén azok nagysága (amplitúdója) határozná meg, hogy kilépnek-e az elektronok, és a hullámok száma (azaz a frekvencia) határozná meg, hogy hány elektron lép ki. (Gondoljunk csak egy csónakra: hiába jönnek sűrűn, azaz nagy frekvenciával a hullámok, nem borítják fel a csónakot, csak ha a méretük, ami az intenzitásnak felel meg, elég nagy).

Ezeket a megfigyeléseket Einstein magyarázta meg részletesen 1906-ban, Nobel-díját ezért kapta. A magyarázat lényege, hogy a fény **fotonnak nevezett kvantumok** formájában érkezik, a fény intenzitása pedig a fotonok számát jelenti. Az egyes kvantumok energiája csak a frekvenciától függ, nagysága

$$E = hf, \text{ ahol } h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js, a Planck-állandó.} \quad (6.4)$$

A fotoeffektus jelensége a 6.4. ábra bal oldalán látható, a hullámkvantumokat (illetve azt, hogy a hullámhossz a kvantumok nagyságát, az amplitúdó pedig a kvantumok számát jelzi) pedig a 6.4. ábra jobb oldala illusztrálja.



6.4. ábra. A fotoelektromos jelenség során fémlemezről kellően nagy frekvenciájú (avagy kis hullámhosszú) fény hatására elektronok lépnek ki. A jelenség értelmezése a fénykvantumok segítségével tehető meg egyszerűen: a hullámok nagysága a kvantumok számát, a frekvencia a kvantumok nagyságát befolyásolja. Az ábra azonos a 8.8(a). ábrával.

A megfigyeléseket részletesen az alábbiak szerint tudjuk megmagyarázni. Az elektronnak az anyagból való kilökéséhez szükséges energia (munka)  $W$ , ez az anyag fajtájától függ. Az elektronokat akkor lehet kilökní, ha  $hf > W$ ; ekkor a kilökött elektronok száma csak a fotonok számától függ. Hiába hordoz tehát a fény nagy energiát (azaz hiába nagy az intenzitása), ha ez sok kisenergiás fotonból áll össze, akkor nem tud elektronokat kilökní. Ha viszont a fény extrém alacsony intenzitású, azaz kevés fotonból áll, de azok nagy energiával rendelkeznek, akkor az elektronok kilökődhetnek.

A fotonok létének elfogadásához további megfigyelésekre is szükség volt. Compton 1922-ben vizsgálta meg röntgensugarak szóródását paraffinon (a megfigyelt jelenséget és annak értelmezéséért ő is Nobel-díjat kapott). Azt látta, hogy a szórt sugárzás frekvenciája lecsökken: ezt nevezzük **Compton-jelenségnek**. Ez a fotonkép alapján egyszerűen megérthető: egy foton meglöki az elektront, ennek során energiát veszít, és így lecsökken a frekvenciája. Az is kiderült, hogy a fotonnak impulzusa is van, méghozzá

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (6.5)$$

A fentiek úgy összegezhethők, hogy a fotoelektromos hatás és a Compton-jelenség (amelyek során a fény energiát és impulzust ad át elektronoknak) csak úgy értelmezhető, ha bevezetjük a fotonhipotézist.

Felmerült, hogy mi történik, ha az előző részben tárgyalt interferenciakísérlet során olyan alacsony intenzitású fényt vizsgálunk, amelyben egyszerre csak egy foton megy át a két résen. Vajon ekkor is létrejön az interferencia, azaz az egyfotonos nyaláb is két részre oszlik? Jánossy Lajos 1957-ben nagy pontossággal elvégezte el ezt az egyfotonos interferenciakísérletet, és ilyen esetben is interferenciát talált. Ez azt jelenti, hogy egy darab foton is interferál önmagával, mintegy mégis-hullámként viselkedve mindkét résen átmegy. Ez nagyon furcsának tűnik, és *valóban* az. Mindenesetre, ha egy fotont valamilyen módon megfigyelünk, és így el tudjuk róla dönteni, hogy melyik résen ment át, akkor a foton tényleg csak azon a résen ment át, és azt tapasztaljuk, hogy ha mindegyik fotont így megfigyeljük, akkor nem is látunk interferenciaképet. Csak akkor „megy át egy foton mindkét résen”, ha nem akarjuk tudni, hogy melyiken ment át! Ezen jelenségekre a klasszikus fizikai modellek nem adnak magyarázatot.

### 6.2.2. A részecskék hullámtermészete

Az elektromágneses hullámok tehát bizonyos kísérletekben részecskeként viselkednek. Lehet, hogy a **részecskéknek is van hullámtulajdonságuk?** Louis de Broglie 1924-es hipotézise alapján részecskékre is igaz a  $\lambda = h/p$  összefüggés. A részecskék hullámtulajdonságát úgy lehet vizsgálni, ha a kétrés-kísérletet elvégezzük elektronokkal vagy nagyobb részecskékkel is. Azt, hogy részecskék (konkrétan elektronok) is tudnak hullámokra jellemző interferenciát produkálni, először Davisson mutatta ki 1927-ben. (Ő is, és a hipotézist megalkotó de Broglie is Nobel-díjat kapott). de azóta atomok és nagyobb molekulák nyalábjaival (például  $C_{60}$ -nal) is sikerült interferenciát kimutatni.

Sikerült továbbá elektronokkal úgy is elvégezni a kétrés-kísérletet, hogy a berendezésben (az elektronforrástól a réseken át az ernyőig) egyszerre mindig legfeljebb egy elektron van. Ilyenkor is találtak interferenciát, azaz **az elektron** valamilyen értelemben **önmagával interferál**, maga az elektron viselkedik hullámként (és nem az elektronok találkozásakor jön létre az interferencia). Viszont ha az egyelektronos kétrés-kísérletben (például fotocellával vagy hasonló műszerrel) megvizsgáljuk, hogy melyik résen megy át az elektron, és meg tudjuk állapítani ezt minden elektronról, akkor eltűnik az interferencia! Tény, hogy az elektron mindig oszthatatlannak látszik, de egyetlen elektron is interferál, és az interferencia eltűnik minden olyan kísérletben, ahol az utat is meghatározzuk. Tulajdonképpen arra gondolhatunk, hogy a „lehetőségek” interferálnak egymással – de hogyan lehetne ezt a matematika nyelvén megfogalmazni?

Elektromágneses hullámok esetén a térerősség négyzete adja a hullám intenzitását (ahogy azt a Maxwell-egyenletek után tárgyaltuk), és a két hullám amplitúdójának összeadódása egy adott helyen az intenzitásban kioltást vagy erősítést eredményezhet, a fáziseltéréstől függően. Anyaghullámokkal hasonló a tapasztalat, ezek léte kísérleti tényként kezelendő. A kísérletek megkövetelik, hogy a részecskékhez (és általában az anyaghoz) hullámokat rendeljünk. De kérdés, hogy mi a hullámzó mennyiség? Ha bevezetjük a részecske  $P(x)$  valószínűségi eloszlását (azaz azt, hogy hol milyen valószínűséggel található az adott részecske), akkor ez jelentheti az intenzitást. Ez lehet tehát az amplitúdó négyzete (éppen úgy, ahogy az elektromágneses sugárzás esetén az intenzitás az elektromos és/vagy a mágneses tér négyzetével arányos). Legyen ezért

$$P(x) = |\Psi(x)|^2, \quad (6.6)$$

ahol  $\Psi(x)$  a (komplex szám értékű) **hullámfüggvény**. Egy háborítatlanul haladó részecske hullámfüggvénye ekkor az elektromágneses hullámokhoz hasonlóan  $\cos(kx)$  (pontosabban: komplex alakban,  $e^{ikx}$ ) módon írható fel, és ekkor  $\lambda = 2\pi/k$  a részecske hullámhossza. Az interferencia pedig teljesen a hullámoptikában megismertek alapján történik.

Eszerint egy atom körüli elektron is egy  $\Psi(x)$  hullámfüggvénnyel írható fel, amelynek alakja azonban jelentősen eltér az előbbi egyszerű, síkhullám alakú hullámfüggvényétől. A hullámfüggvény **abszolút értékének négyzete** az elektron **valószínűségi eloszlása**, erre gondolunk „elektronfelhőként”. Az atomi elektronok ilyen leírásmódja forradalmasította (sőt inkább: elindította) az atomok fizikáját, a kémiai kötéseknek, az anyag egyéb tulajdonságainak megértését. A kvantummechanikának további számtalan érdekes következménye van, például a szupravezetés és a szuperfolyékonyság, ezeket itt részletesen nem tárgyaljuk.

Érdemes megemlíteni, hogy az **antirészecskék** koncepciója a kvantummechanika és a relativitáselmélet „házasítása” közben született: Dirac jóslta meg, hogy létezhet az elektronnak egy antirészecske párja, a pozitron. Az 1928-as elméleti jóslat alapján Anderson 1932-ben kísérletileg is valóban felfedezte a pozitront. (Itt sem kis horderejű előrelépésről van szó: Dirac is, valamint a kísérletet végző Anderson is Nobel-díjat kapott ezen felfedezésekért.) Ma már tudjuk, hogy minden részecskének lehet antirészecskepárja, és antirészecskékből atomokat („antiatomokat”) is létrehozta már. Ha egy részecske az antirészecskepárjával találkozik, mindkettő megszűnik létezni: könnyebb részecskékké (és/vagy antirészecskékké) alakulnak. Az elektron és pozitron találkozásakor (és megsemmisülésükkor) fotonok keletkeznek (ezeket aztán „felszabadult energia” módjára hasznosíthatnánk). A folyamat során az energia megmarad, de a „mérlegbe” bele kell venni az eredeti és végső részecskék nyugalmi energiáját,  $mc^2$ -et is. (Elektron és pozitron ilyen annihilációja során a végső fotonok tömege nulla, azaz az eredeti  $2m_{\text{elektron}}c^2$  energiát teljes egészében elektromágneses energiaként viszik el.) 1 mg hidrogén és antihidrogén egyesülésekor 100 GJ energia „termelődne” így. (Összehasonlításképpen: a paksi erőmű éves energiatermelésének körülbelül 0,7 kg anyag-antianyag egyesülése felelne meg. Az antianyag előállításához azonban ennél még sok nagyságrenddel több energia szükséges, ezért nem hatékony energiátároló.)

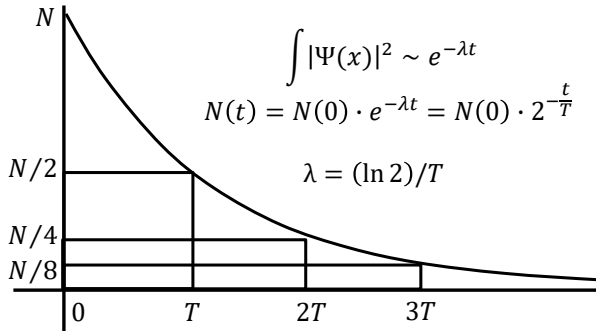
A kvantummechanika segítségével lehet leírni a **radioaktivitás** jelenségét is. Elképzelhető, hogy egy részecske hullámfüggvénye úgy változik az időben, hogy a hullám amplitúdója időben csökken. Ekkor a hullámfüggvény négyzete, azaz a részecske létezésének valószínűsége egyre csökken,  $2^{-t/T}$  függvény szerint, ahol  $T$  a részecske felezési ideje. A részecske folyton a „létezés és a nemlétezés között lebeg”, csak akkor derül ki, hogy „megvan-e még”, ha „ránézünk” (azaz valamilyen klasszikus mechanikai eszközökkel is megvalósítható mérést végzünk annak eldöntésére, hogy melyik lehetőség áll fenn éppen). Egy adott részecskéről sosem tudjuk, hogy mikor fog elbomlani, de átlagosan a valószínűségnek megfelelően következik ez be, azaz sok instabil részecske esetén a részecskék száma az exponenciális bomlástörvényt követi. Ha  $N$  részecske van jelen egy adott időpontban, akkor  $T$  idő múlva nagyon nagy pontossággal feleannyi,  $N/2$  lesz. A részecskék számának időfüggése ilyenkor

$$N(t) = N(0) \cdot 2^{-t/T}, \quad (6.7)$$

amely tényleg azzal egyenértékű, hogy az elbomlás valószínűsége időben állandó. A  $T$  felezési idő helyett néha a  $\lambda$  bomlási állandót használjuk, amelyet a  $2^{-t/T} = e^{-\lambda t}$  összefüggés definiál. Mindezt a 6.5. ábra illusztrálja.

Sok atom viselkedik ilyen instabil módon, ezek megszűnése, bomlása a radioaktivitás. Az elbomló atommagok kibocsáthatnak magukból  $\alpha$ -részecskét (héliumatommagot),  $\beta$ -sugárzást (azaz elektront; ilyenkor egy neutron alakul át protonná, elektron kibocsátása mellett), és gamma-sugárzást (ez az atommag gerjesztett állapotának alapállapotba való átmenetekor keletkező elektromágneses sugárzás). Az alfa-sugárzás egyből elnyelődik az anyagban, akár egy papírlapban is, a béta-sugárzás valamivel vastagabb anyagban csak (például egy alumíniumlapban), míg a gamma-sugárzás elnyeléséhez vastag ólomfalra van szükség.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Az atommagok említett bomlástípusait gyakran kíséri az elektronhéjból származó röntgensugárzás is, ami az atom elektronszerkezetének legkisebb energiájú alapállapotba való visszarendeződésekor szabadul fel.



6.5. ábra. Bomló kvantumállapot teljes térre vett integrálja nem azonosan egy, hanem az idővel exponenciálisan csökken. Ez azt jelenti, hogy az állapot (bárhol való) létezésének valószínűsége csökken, az exponenciálisban szereplő  $\lambda$  együttható (bomlási állandó) pedig a bomlás sebességét adja meg. Egyetlen atom esetén ez valószínűségként értelmezendő, rengeteg atom esetén azonban ez nagyon pontosan előrejelzi a még el nem bomlott atomok számát is. Az ábra azonos a 8.14(c). ábrával.

## 6.3. Atom- és magfizika

### 6.3.1. Az atomok felépítése

A gondolat, hogy az anyag diszkrét, oszthatatlan egységekből áll, az ókori természet-filozófiában gyökerezik. A XVIII. századig (vagy még inkább a XIX. század elejéig) kellett azonban várni, hogy megkezdődjön a kérdés természettudományos módszerekkel történő vizsgálata. Az első lépéseket Lavoisier, Proust, Avogadro és Dalton tették meg, kémiai reakciók vizsgálatával (amelyekben megfigyelték a tömeg megmaradását, illetve a reagensek arányainak állandóságára vonatkozó törvényeket). Dalton alkotta meg az első atomelméletet. A XIX. század végéig az atomelmélet azonban nem nyert általános elismerést, ellenzői az atomok helyett az energiát tekintették minden jelenség végső alapjának (Ostwald és Helm). Mások (mint például Mach) a közvetlen érzékeléssel fel nem fogható dolgok létezését értelmezhetetlennek gondolták. A kérdésben az döntött, hogy makroszkopikus jelenségekben is sikerült az atomosság nyomaira bukkanni, és a hőt is sikerült az atomok és molekulák mozgásával megmagyarázni (lásd a kinetikus hőtanról szóló 4.2. szakaszt). Az atomok szerkezetét azonban sokáig senki nem kutatta, oszthatatlannak gondolva őket.

Thomson a **katódsugarak** (amelyeket egy forró fémszál bocsát ki elektromos tér hatására) vizsgálatakor arra jutott, hogy a sugárzás, amely fluoreszcens ernyőn fényfelvillanást kelt, az atomokból származik, és töltött részecskékből áll. Megmérte ezen részecskék töltés/tömeg arányát, és ezzel tulajdonképpen **felfedezte az elektront**. Az elektron töltését (azaz az  $e$  elemi töltés nagyságát) később Millikan mérte meg: porlasztott (véletlenszerűen töltött) olajcseppeket elektromos térbe helyezve gyorsulásukat mérte, és ebből töltésüket határozta meg. (Thomson és Millikan is Nobel-díjat kaptak eredményeikért.)

Thomson az elektronok létét már ismerve alkotta meg a „plum pudding” névvel

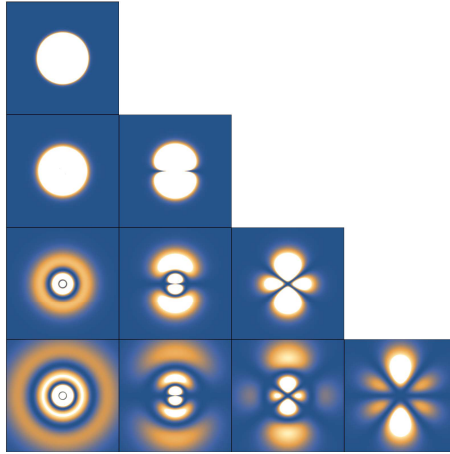


illetett első atommodellt. Eszerint az atom egy pozitív töltésű levesből áll, amelyben „úsznak” a negatív töltésű részecskék, az elektronok. A modellt Rutherford kísérlete cáfolta, aki ezzel felfedezte az atommagot. Rutherford megmérte az  $\alpha$ -bomlásból származó ( $\alpha$ -) részecskék aranyfólián való szóródásában a szórt részecskék szögeloszlását. A Thomson-féle atommodell alapján túlnyomórészt kisszögű szórást vártak, ezzel szemben a részecskék jó része szóródás nélkül továbbment, kis részük erőteljesen eltért. A megfigyelt szórási valószínűségeket egyfajta pontszerű, pozitív töltésű **atommaggal** lehetett magyarázni, és a kísérleteket a centrális erőterben való szóródásra vonatkozó egyenletekkel lehetett kiszámolni. Nagyon nagy szögekre (visszaszóródásra) nagy energiájú  $\alpha$ -részecskékre eltérés mutatkozik ettől a formulától: a maghoz nagyon közel menő  $\alpha$ -részecskék szempontjából már nem tekinthető pontszerűnek a mag. Ez a mag méretét mutatja lényegében, illetve a mag és az  $\alpha$ -részecske sugarának összegét. Arany esetében ez energiafüggetlenül körülbelül 13 femtométer. Rutherford atommodellje mindezek alapján azt mondta, hogy a  $10^{-10}$  m méretű atom közepén egy, az atomhoz képest is roppant kicsi, körülbelül  $10^{-15}$  m méretű mag található, az elektronok pedig körülötte keringenek, egyfajta „mini-Naprendszer” alkotva. Az elektronok energiáját ekkor egyrészt a Coulomb-kölcsönhatás potenciálja, másrészt a keringésből adódó mozgási energia adja.

Ugyanakkor fontos látni, hogy a keringő elektronok elektromos tere időben változó, így mágneses teret is keltenek, amely szintén időben változó lesz. Ez végül elektromágneses sugárzást hozna létre, amelynek hatására az elektronok elveszítenék energiájukat, és az atommagba zuhannának. Egy más jellegű probléma is adódott a Rutherford-féle atommodelllel. A modelltől ugyanis arra következtethetnénk, hogy az atomok bármilyen kis energiát el tudnak nyelni: ekkor az elektronok energiája kicsit megnőne; és ugyanígy, valamely elektron az atommaghoz kicsit közelebb kerülve kis energiát veszítene, és így az atom ezt az energiát kisugározhatná. Gázok és gőzök elektromágneses sugárzási spektrumát tanulmányozva kiderült azonban, hogy ezen **spektrumok** (azaz a gázok színeképei) **diszkrét vonalokból** állnak, amelyek szerkezete az atomokra jellemző. Az atomok tehát csak néhány konkrét mennyiségnek megfelelő energiát tudnak elnyelni vagy kibocsátani! Ezt úgy lehet magyarázni, hogy gázok sugárzáselnyelése és -kibocsátása során az atomok elektronjai kizárólag **diszkrét energiaszintek** között mozognak, és az energiakülönbségnek megfelelő fényt bocsátanak ki vagy nyelnek el. Ez egy olyan bolygómodellt jelentene, amelyben nem lehetséges tetszőleges pálya.

Niels Bohr a fenti két problémára válaszként egy konzisztens modellt épített fel (és ezért Nobel-díjat kapott), alapvetően a bolygómozgás mintájára, egy hozzáadott posztulátummal. A modell lényege ez a posztulátum, amely szerint az elektron pályájának kerülete a hullámhosszának egész számú többszöröse lehet csak, ekkor ugyanis az elektron éppen „körbehullámozza” az atommagot, a pálya kerületén egész számú hullám fér el, azaz  $2r\pi = n\lambda = nh/p$  (ahol  $n$  egész szám). Ez úgy is megfogalmazható, hogy az elektronok perdülete csak a redukált Planck-állandó  $h/(2\pi) = \hbar$  egész számú többszöröse,  $L = mvr = pr = n\hbar$  lehet. Bohr azt állította, hogy az ilyen pályákon nincsen gyorsulásból fakadó sugárzás, viszont ha két megengedett pálya között „átmegy” az elektron, akkor az energiakülönbségnek megfelelő  $f$  frekvenciájú foton (azaz fény) sugárzódik ki:  $hf = E_1 - E_2$ . A modellfeltevés „oka” ismeretlen, értelmezhetetlen, de jó eredményre vezet: magyarázza az atomok (gázok) vonalas színeképét.

A **Bohr-modellben** a hidrogénatom (egyetlen) elektronjának energiáját úgy lehet kiszámolni, hogy a Coulomb-erő (a  $Ze$  töltésű mag és az  $e$  töltésű elektron között) és a



6.6. ábra. A hidrogénatom lehetséges elektronállapotai a Schrödinger-féle modell alapján. Az ábrán a színskála a megtalálási valószínűséget jelzi, a világosabb színekkel a nagyobb valószínűségeket jelölve. A sorok az energia növekvő értékeit jelentik ( $n = 1, 2, 3, 4$  kvantumszámokkal), az oszlopok a perdületet ( $l = 0, 1, 2, 4$  kvantumszámokkal,  $m = 0$  mágneses kvantumszám mellett). Az ábra azonos a 8.13. ábrával.

pályán tartó centripetális erő egyenlőségéből indulunk ki, azaz

$$k \frac{Ze^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = \frac{p^2}{mr}, \text{ innen} \quad (6.8)$$

$$p^2 r^2 = kZe^2 mr = n^2 \hbar^2, \text{ tehát az } n\text{-edik pályasugár:} \quad (6.9)$$

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{kZe^2 m}. \quad (6.10)$$

Az ehhez tartozó energiaszint

$$E_n = \frac{mv^2}{2} - \frac{kZe^2}{r} = \frac{mk^2 Z^2 e^4}{2n^2 \hbar^2} - \frac{mk^2 Z^2 e^4}{n^2 \hbar^2} = -\frac{1}{n^2} \frac{mk^2 Z^2 e^4}{2\hbar^2}. \quad (6.11)$$

Ez (egyesítve kisugárzott fotonokra, azaz a kisugárzott fény frekvenciájára fentebb említett  $E_n - E_m = hf$  feltétellel) pontosan visszaadja a hidrogénnek a kísérletekből ismert spektrumvonalakat.

Nem világos azonban, hogy mi a Bohr-féle posztulátum magyarázata, és hogyan zajlik az átmeneti folyamat. A kvantummechanika képe ad teljesebb magyarázatot az atomok elektronszerkezetére. Ebben az elektronok már egyfajta  $P(x) = |\Psi(x)|^2$  valószínűségi eloszlással rendelkeznek, amely a hullámfüggvényük abszolút értékének négyzete. A kvantummechanika, illetve a hidrogénatom **Schrödinger-féle modellje** szerint ezen eloszlások a 6.6. ábrán megfelelően néznek ki (különbözo energiaszintek és perdületek esetén). A hidrogénatomra az energiaszintet az  $n$  energia-kvantumszám, a perdületet pedig az  $l < n$  perdületkvantumszám jelöli ki. A perdület kvantumszámát a kémiában  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  számok helyett s, p, d, f,  $\dots$  betűkkel szokták jelölni, így tehát például a „3p pálya” megjelölés alatt az  $n = 3, l = 1$  kvantumszámokat kell érteni.

### 6.3.2. Az atommagok kötési energiája

Az atomok szerkezetét már ismerjük tehát, és tudjuk, hogy bennük egy igen kicsiny méretű atommag található. Világos, hogy egy  $Z$  rendszámú atomban  $Z$  darab elektron található, a mag pedig szintén  $Z$  töltésű. A mag  $Z$  töltése  $Z$  darab protonnak köszönhető, ugyanakkor a proton tömegének ismeretében az is kiderült, hogy az atommag (avagy az atom) tömege egy  $A \geq Z$  tömegszámmal jellemezhető – körülbelül ennyiszere az atom tömege a protonénak. Felmerül a kérdés, hogy **mi tartja össze az atommagot** a protonok elektromos taszítása ellenében, illetve hogy mi a kapcsolat a tömegszám és a rendszám között. Könnyű elemeknél  $Z \approx A/2$ , nehezebb atomok esetén  $Z < A/2$  adódik, kell tehát még valaminek lennie az atommagban, ami a protonok tömegéhez hozzáadódva kiadja az atom teljes tömegét.<sup>3</sup>

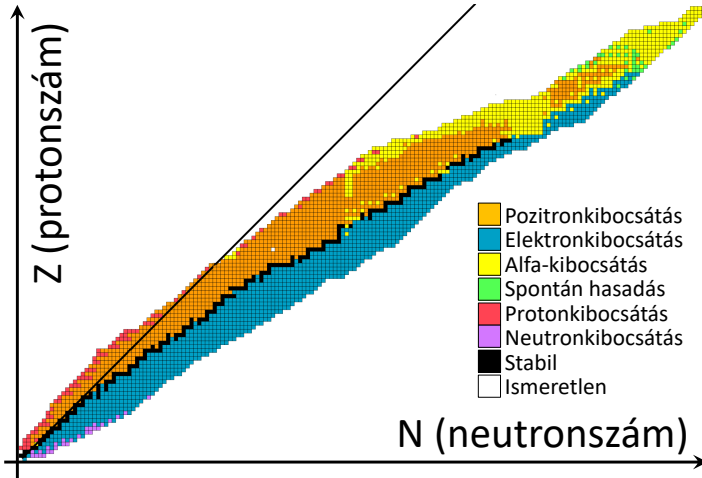
Az egyik legfontosabb lépést ezzel kapcsolatban Chadwick tette 1932-ben, amikor felfedezte a semleges **neutront** (ezért 1935-ben Nobel-díjat kapott). Kiderült, hogy ez az atommag tömegének hiányzó részét kiadó részecske; a magban a protont és a neutront pedig egy újfajta kölcsönhatás, a magerő tartja össze. A kémiai tulajdonságokat az elektronszerkezet, azaz a protonok száma határozza meg, a neutronsám ilyen szempontból irreleváns – ez „csak” az adott mag tömegéhez járul hozzá. Ráadásul egy adott kémiai elem többféle neutronsámmal is létezhet, azonos protonszám (azaz rendszám) mellett. Egy adott atommag különböző neutronsámú változatait **izotópoknak** hívjuk. Többnyire egy adott elemből (azaz adott  $Z$ -jű atommagból) csak 1-2 különböző stabil izotóp fordul elő a természetben; a többi lehetséges izotóp valamilyen radioaktív bomlás (azaz részecske kibocsátás) eredményeképpen „stabilizálódik”. Az izotópok térképét a 6.7. ábrán láthatjuk.

A proton és a neutron tömegének ismeretében kiderült az is, hogy az atomok könnyebbek, mint a megfelelő számú proton és neutron tömege. Ennek az az oka, hogy az atommagoknak van egyfajta **kötési energiájuk**, az ennek megfelelő tömeggel könnyebbek, mint az alkotórészeik (és ezért stabilak). Ezt a kötési energiát a magerő (az úgynevezett erős kölcsönhatás) okozza, ez tartja össze az atommagot. Az egy nukleonra (a nukleon a proton és a neutron összefoglaló neve) jutó kötési energia a tömegszám függvényében a 6.8. ábrán látható. Ahogy az ábra is mutatja, a vas környéki atommagok vannak a legkedvezőbb állapotban. Nem kedvező állapotból maghasadással vagy magfúzióval lehet kedvezőbbbe jutni: a vasnál nehezebb magok tehát hasadni tudnak, a könnyebbek fuzionálni.

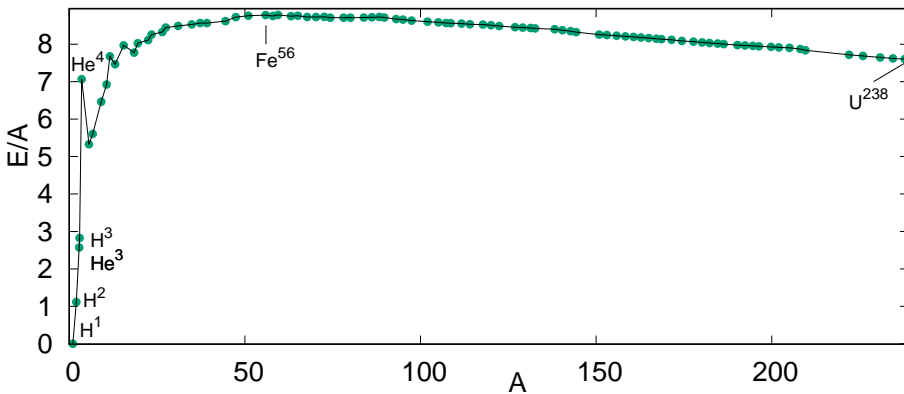
### 6.3.3. A maghasadás

Maguktól többnyire a nehéz atommagok sem esnek szét, de neutronnal bombázva őket **maghasadás** indukálható, rengeteg energia felszabadulása mellett. A 235-ös tömegszámú uránizotóp lassú (1 eV körüli mozgási energiájú) neutron hatására például nagy valószínűséggel elhasad. Ilyenkor két közepes mag keletkezik, amelyek rendszámainak összege az eredeti uránmag rendszáma (azaz 92), de keletkezhet 2-3 „főleges” neutron (néha még 6 is). Például egy lehetséges hasadási folyamat az, ha az uránmag kriptonra ( $A = 92$ ,  $Z = 36$ ) és báriumra ( $A = 141$ ,  $Z = 53$ ) esik szét, és emellett három neutron

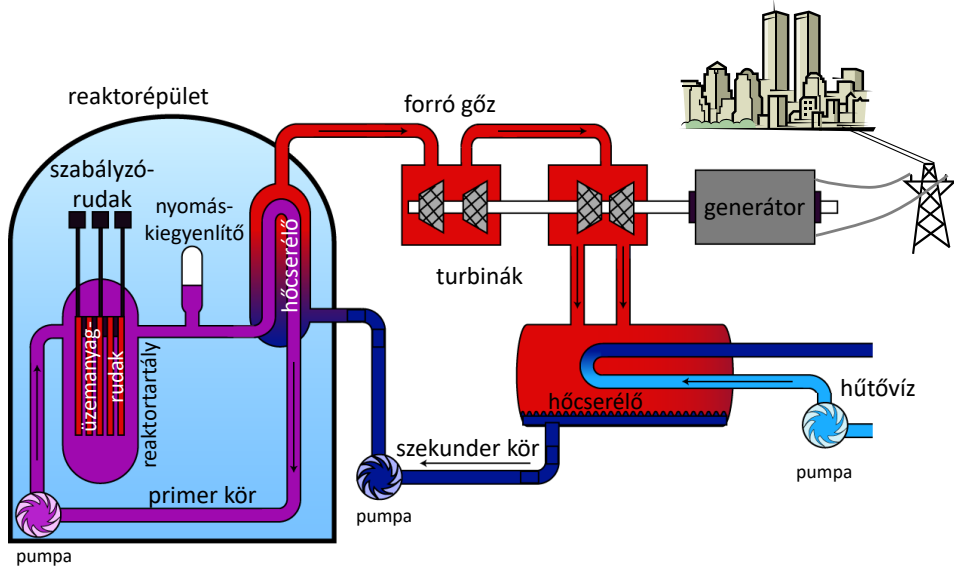
<sup>3</sup>Az elektronok tömege a protonéhoz, és általában a magéhoz viszonyítva elhanyagolható, a kvantummechanikai vizsgálatból pedig az is kiderül, hogy az az elképzelés, hogy a magban esetleg  $A$  darab proton és a töltést kompenzáló  $A - Z$  darab elektron lenne, nem tartható.



6.7. ábra. Az ismert izotópok térképe. A színek a stabilitást vagy a bomlási típust jelölik. A fehér régiókhoz tartozó proton- és neutronszámmal rendelkező izotópok létezése nem ismert. Látható, hogy általában a neutronsám nagyobb, mint a protonszám, és különösen igaz ez a nagytömegű magokra – ezeknél sok neutronra van szükség, hogy ellensúlyozzák az elektromos taszítást. Érdekes még észrevenni, hogy a stabil izotópokat jelölő fekete négyzetek (a „stabilitás völgye”) alatt (azaz az optimálisnál nagyobb neutronsám esetén) többnyire elektronkibocsátás történik (ekkor egy neutron protonná és elektronná alakul), míg felette (azaz protontöbblet esetén) pozitronkibocsátás (ekkor egy proton neutronná és pozitronná alakul), ugyanis az izotóp így közeledik a legstabilabb állapot felé. Az ábra azonos a 9.1(a). ábrával.



6.8. ábra. Az egy nukleonra jutó kötési energia tömegszámfüggése. Ez valójában az előző, 6.7. ábra fekete sávjának, azaz a stabilitás völgyének mélységét mutatja. A kötési energia minimuma nagyjából az 50-60 körüli tömegszámoknál van, a „legstabilabb” atommag az 56-os tömegszámú vas vagy a 62-es tömegszámú nikkell, a definíció részleteitől függően. Az ábra azonos a 9.1(b). ábrával.



6.9. ábra. A nyomottvízes reaktor vázlatos felépítése. A hasadás a primerkörü vizet melegíti, amely a nagy nyomás miatt nem forr fel, szemben a szekunder kör vizével. Ennek gőze egy turbinát hajt meg, amely generátorral összekötve áramot termel, a szekunder kör gőze pedig hűtővízzel érintkezve lecsapódik. Az ábra azonos a 9.5. ábrával.

keletkezik. Mindenesetre a maghasadás több mint 2000-féle hasonló módon végbemehet. Átlagosan hasadásonként 2,47 darab neutron keletkezik, és sok (körülbelül 200 MeV) energia, amely végső soron hőként jelenik meg az urándarabban.

A maghasadás során keletkező neutronok további hasadásokat okozhatnak, és így fenntarthatják az energiatermelő maghasadások egymásutánját, a **láncreakciót**. Ugyanakkor a hasadásban keletkező neutronok mind gyorsak. A következő hasadás gyors neutronok hatására is bekövetkezhet, de a valószínűsége több nagyságrenddel kisebb, mint lassú, néhány eV körüli neutronenergia esetén. Ugyanakkor a természetes uránércben a  $^{235}\text{U}$  aránya csak 0,7%. A  $^{238}\text{U}$  (az urán másik, a természetes urán 99,3%-át kitevő izotópja) csak gyors neutronok hatására hasad szét, és akkor is elég kicsi valószínűséggel. Ahhoz tehát, hogy az urán hasadását kontrolláltan felhasználhassuk, azaz **atomreaktort** készítsünk, a következő módon kell eljárni. A maghasadásban keletkező neutronokat le kell lassítani, így szinte mindegyik hasadást tud majd okozni (a  $^{235}\text{U}$ -ban). A hasadás nagy valószínűsége miatt itt nincs szükség a 235-ös izotóp különlegesen nagy arányára, reaktortípustól függően elég lehet 3-4%  $^{235}\text{U}$  arányt elérni. A neutronok lassítását végző anyag az úgynevezett **moderátor**. Ez bármilyen, könnyű atommagokat (hidrogént, szenet) tartalmazó anyag lehet (például víz, nehézvíz, grafit): a neutronok könnyű atommagokkal ütközve átadják mozgási energiájukat, azaz lelassulnak.

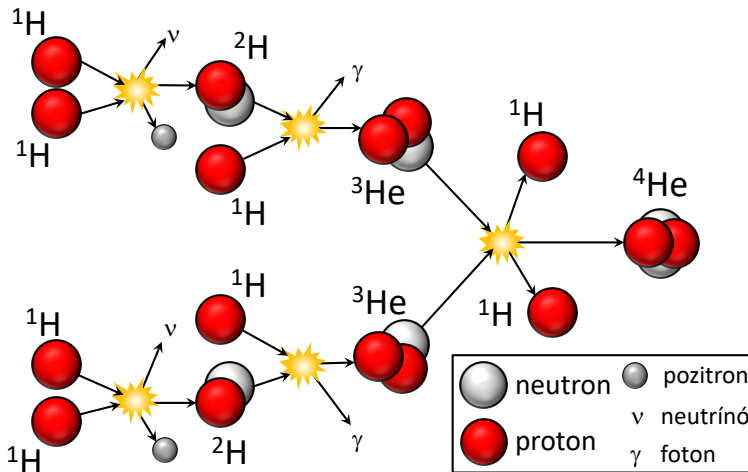
Atomreaktorban az a cél, hogy egy hasadás neutronjai közül mindig pontosan egy okozzon további hasadást. Ha egynél több tenné ezt (azaz a neutronsokszorozódás egynél nagyobb), akkor felgyorsulna a láncreakció, azaz „megszaladna a reaktor”. Ha egynél kevesebb, akkor viszont leáll a láncreakció. Akkor működik stabilan a reaktor, ha

az egy hasadásból keletkező neutronok közül pontosan egy okoz további hasadást. Ezt **szabályzórudakkal** érik el, amelyek neutronelnyelő anyagokat tartalmaznak: ezeket a hasadóanyagba mélyebbre engedve csökkentik a neutronsokszorozódást. Éppen megfelelően tartva őket elérhető, hogy a neutronsokszorozódás éppen egy legyen.

Az atomerőművek működésének lényege, hogy a reakcióban keletkező hőt a felforrósodott hűtőközeg a keringése során elszállítja (primer kör), ennek hője pedig valamilyen hőerőgépet használva munkát végez (azaz áramot termel). A legelterjedtebb típus az úgynevezett **nyomottvizes atomreaktor**. Ebben a neutronlassító moderátor és a hűtőközeg ugyanaz: víz, amely az alkalmazott nagy nyomás (több mint 100 atmoszféra) miatt nem forr fel. Ez áramlik át a reaktortartályon, a kazettákba rendezett urán üzemanyagrudak között, amelyekben a láncreakció a maghasadások egymásutánját fenntartja. A nagy nyomású hűtővíz nem érintkezik a „külvilággal”: egy zárt körben, a primer körben kering, és még a reaktor betonkonténerében, egy hőcserélőben átadja a hőt a szekunderköri víznek, amely felforr, és a keletkező gőz hajtja a turbinákat és így az áramtermelő generátort. A szekunder körű víz a maradék hőjét (szintén egy hőcserélőn át) a hűtővíznek adja át. Az ilyen reaktorokban tehát a moderátor azonos a keletkező hőt is elszállító anyaggal: a tárgyalt példában mindkettő víz (de előfordulnak nehézvízzel működő atomreaktorok is). Az ilyen reaktorok fő beépített biztonsági eleme az, hogy ha megszalad a reaktor, a moderátor (víz) elforr, a neutronok nem lassulnak le, ezért nem okoznak annyi maghasadást, így a láncreakció leáll. A nyomottvizes reaktor működését a 6.9. ábra illusztrálja.

A reaktorban keletkező hasadványanyagok többnyire erősen radioaktívak, ezek a fűtőelemekben rakódnak le. Az elhasznált fűtőelemek tárolása a maghasadás békés célú felhasználásának egyik kulcskérdése. A kiegészítő fűtőelemeket jelenleg mindenhol a világon ideiglenes (körülbelül 50-60 évre tervezett) tárolókban tárolják. Jó megoldás lehet ezeket vízzáró rétegek közé, földrengésbiztos helyre elásni, probléma ugyanakkor, hogy a keletkező hasadványanyagok közül soknak a felezési ideje a millió évet is eléri, és semmilyen elhelyezés biztonsága nem garantálható ilyen hosszú távon. Ezen anyagok keletkezésének csökkentését, sőt akár a korábbi, kiegészítő üzemanyagcellák felhasználását is ígérik a fejlesztés alatt lévő, de jó néhány helyen már működésben is lévő, negyedik generációs reaktortípusok.

A maghasadáson alapuló, úgynevezett **atombombában** (amely precízebben nukleáris vagy hasadóanyag-bomba) a láncreakciót úgy hozzák létre, hogy a láncreakció nagyon gyorsan megszaladjon, és nagy mennyiségű atommag elhasadjon a másodperc töredéke alatt. (Ez azért lehetséges, mert egy hasadás nyomán általában egynél több, átlagosan, energiától függően akár 3 neutron is keletkezik.) Ugyanakkor egy urángolyó felületén a neutronok kiszökhetnek, vagy esetleg más miatt nem okoznak hasadást. A kiszökés elsősorban geometriai okból következik be, a felület/térfogat aránytól függ, kis tömeg esetén arányosan több a kiszökés, mint nagy tömeg esetén. Ha a hasadásban keletkező neutronok közül átlagosan hasadásonként egynél több okoz további hasadást, beindul a láncreakció: az ehhez szükséges tömeget kritikus tömegnek nevezzük. A láncreakció fennmaradása attól is függ, hogy milyen uránt használunk. A 238-as izotóp hasadási valószínűsége jóval kisebb, ezért ahhoz, hogy észszerű méreten már kritikus legyen az urántömeg, nagyon (85% fölé) fel kell benne dúsítni a  $^{235}\text{U}$  arányát. Ez még ma is rendkívül nehéz feladat, ami (szerencsére) megnehezíti az atomfegyvergyártást.



6.10. ábra. A Napban zajló fúziós lánc vázlatos felépítése. Két hidrogénatommagból (protonból) és egy elektronból deutron (protonból és neutronból álló mag) és neutrínó keletkezik. A deutron és egy további proton találkozása  $^3\text{He}$ -magot (egy protont tartalmazó héliummagot) hoz létre, két ilyen héliummag találkozása pedig két protont és egy hélium-4 atommagot. Végeredményben négy protonból egy hélium-4 keletkezett, illetve nagy mennyiségű energia (26,7 MeV). Az ábra azonos a 9.6. ábra bal paneljével.

### 6.3.4. A magfúzió

Ahogy fent láttuk, a könnyű magok kötési energiája igen magas, így például a hidrogén fúziója (azaz elemi protonok, neutronok egyesülése) során jelentős energia nyerhető. Ugyanakkor, mivel az atommagoknak az elektromos taszítást le kell győzniük, hogy egyesülhessenek, a **magfúzió** praktikusán csak nagyon magas hőmérsékleten képzelhető el (ahol a hőmozgás nagy energiája lehetővé teszi, hogy a magok időnként a kellő mértékben megközelítsék egymást). A csillagok belsejében különféle folyamatok során négy hidrogén egyesül egy héliumatommaggá, a Napban például tipikusan a 6.10. ábrán látható módon. Életük végén a csillagok létrehoznak a héliumnál nehezebb magokat is: a Földön található nehezebb magok nagy része régi, felrobbant csillagok (szupernóvák) maradványa.

A Földön praktikusán magfúziót létrehozni eddig csak kontrollálatlan körülmények között, **termonukleáris bombában** („hidrogénbomba”) sikerült. A fúziós reakcióhoz több tízmillió fokra van szükség: ilyen magas hőmérsékletet nehéz a Földön tartósan fenntartani, hiszen semmilyen edény nem bírja ki azt. A csillagokban a gravitáció tartja össze a forró anyagot, a Földön pedig mágneses térben próbálhatjuk meg ugyanezt, például egy tóruszban áramló plazma formájában. Ennek egy megoldását tokamaknak hívják, ilyeneket sikerült már építeni és rövid ideig üzemeltetni, de gyakorlati felhasználásuk még nem lehetséges. Ha sikerülne **fúziós reaktort** építeni, igen kevés üzemanyag befektetésével nagyon sok energiát lehetne termelni. Álljon itt egy rövid összefoglaló arról, hogy a különböző fizikai módszerekkel mennyi energia keletkezik egységnyi anyagmennyiség „befektetésével”:

	Nyersanyag	Technológia	Hatékonyság	Szennyezés	Kockázat
Fosszilis	Gyorsan fogy	Van	Közepes	Sok	Van
Maghasadás	Lassan fogy	Van	Nagyon jó	Kevés	Van
Magfúzió	Van	Nincs	Extrém	Nincs	Kevés
Antianyag	Nincs	Nincs	Extrém	?	?
Szél, nap	Van	Van	Rossz	Kevés	Közepes
Víz	Van	Van	Közepes	Van	Van

6.1. táblázat. Különböző energiahordozók és energiaforrások jellemzőinek áttekintése. A táblázat azonos a 9.2. táblázattal.

- Anyag + antianyag: körülbelül  $10^{11}$  MJ/kg
- Fúzió: körülbelül  $2 \cdot 10^8$  MJ/kg
- Maghasadás IV. generációs erőművekben: körülbelül  $8 \cdot 10^7$  MJ/kg
- Maghasadás atombombában:  $10^7$  MJ/kg
- Maghasadás „hagyományos” atomerőműben: körülbelül  $5 \cdot 10^5$  MJ/kg
- Fosszilis tüzelőanyagok: körülbelül 20-30 MJ/kg

Természetesen nem mindegy, hogy milyen anyagot kell befektetni. A fosszilis tüzelőanyagok elfogyhatnak nem túlságosan sokára. Az urán lassabban fogy, negyedik generációs atomerőművekben használva történelmi léptékben beláthatatlan ideig azért elég. A fúzió nyersanyagából, hidrogénből lényegesen több van, itt a technológia éretlensége (azaz hiánya) a döntő tényező. Az anyag-antianyag lehetőségét csak az elméleti összehasonlítás (elméleti maximum) kedvéért írtuk fel: antianyag hasznosítható nyersanyagként egyáltalán nem áll rendelkezésre. Fontos szempont még a hatékonyság és károsanyag-termelődés is – minden szempontból optimális lenne a fúziós reaktor, azonban egyelőre kétséges, hogy mikorra tudjuk legyőzni a technikai akadályokat. A megújuló energiák szerepe is lényeges lehet, fontos azonban látni, hogy ehhez is kapcsolódnak káros anyagok, amelyek a gyártáskor keletkeznek. A kérdés (társadalmi és gazdasági vonatkozásaival együtt) túlságosan komplex ahhoz, hogy itt bővebben tárgyaljuk. A különböző energiaforrások jellemzőit (erősen leegyszerűsítő jelleggel) azért a 6.1. táblázatban áttekintjük.

## 6.4. Ellenőrző kérdések

1. Mik a speciális relativitáselmélet alapvető feltevései?
2. Mik a speciális relativitáselmélet következményei?
3. Két esemény egyidejűsége milyen feltétellel jelenthető ki?
4. Mi az az idődilatació?
5. Mi az a Lorentz-kontrakció?
6. Mik a speciális relativitáselmélet fontos bizonyítékai?
7. Miről szól az általános relativitáselmélet?



8. Mik az általános relativitáselmélet fontos bizonyítékai?
9. Mi a fotoeffektus lényege?
10. Mi a Compton-effektus lényege?
11. Mi bizonyítja a fény részecsketermészetét?
12. Mekkora egy foton energiája?
13. Mekkora egy foton impulzusa?
14. Mi bizonyítja, hogy a részecskék is viselkedhetnek hullámként?
15. Mitől és hogyan függ egy részecske hullámhossza?
16. Mi a hullámfüggvény, és mi a kapcsolata a részecske valószínűségi eloszlásával?
17. Mit tudsz az antirészecskékről?
18. Mi magyarázza a radioaktivitást?
19. Mi a felezési idő?
20. Ha egy fócipálya az atom, mekkora benne az atommag?
21. Mi az elemi töltés?
22. Mi bizonyította az atommag létét?
23. A Rutherford-modellben mi tartja az atommag körül az elektronokat?
24. Tipikusan mekkora az elektronok kötési energiája?
25. Mi volt a két probléma a mag körül keringő elektronok modelljével?
26. Mi bizonyította, hogy az elektronok energiaszintjei diszkrét értékeket vehetnek fel?
27. Mi Bohr modelljének lényege?
28. Ha nem keringenek az elektronok az atommag körül, hogyan kell őket elképzelni?
29. Miért nem egyezik meg az atommagok rendszáma és tömegszáma?
30. Mi tartja össze az atommagot (az elektromos taszítás ellenében)?
31. Mi az atommagok kötési energiája?
32. Melyik atommag van a legoptimálisabb állapotban energetikai szempontból?
33. Mi a maghasadás, miért jöhet létre?
34. Mi a magfúzió, miért jöhet létre?
35. Hogyan működnek a csillagok, többek között a Nap?

36. Hogyan működik az atomerőmű?
37. Mi az az urándúsítás?
38. Miért nem robbanhat fel a vízmoderált atomreaktor?
39. Mi az a kritikus tömeg?
40. Milyen energiatermelő mechanizmus esetén a legnagyobb a felhasznált anyag energiatartalma?
41. Mennyi a fosszilis tüzelőanyagok energiatartalma?
42. Miért nehéz fúziós erőművet építeni?
43. Mi az a moderátor, és miért van rá szükség atomerőművekben?

## 7. fejezet

# A téridő modern fogalmának kialakulása

## 7.1. A speciális relativitáselmélet és a téridő

### 7.1.1. A megfigyelők szerepe, a Galilei-féle relativitás

Ahogy a jegyzet elején, az 1. fejezetben is tárgyaltuk, a fizikában a térbeli pozíció (a „hely”) az egyik legalapvetőbb mennyiség. Általában a helyre vektorként tekintünk, ugyanakkor a vektorok némely megengedett műveleteit (két vektor összeadása, illetve egy vektornak számmal való szorzása) már nehezen tudjuk vele kapcsolatban értelmezni.<sup>1</sup> A tér pontjai tehát nem vektorteret, hanem úgynevezett affin teret alkotnak. A térpontok különbsége, azaz az őket összekötő szakasz viszont vektorként értelmezhető. Általánosságban is vektorként tekinthetünk a térpontokra, ha kijelölünk egy origót, amelyben a helyvektorok „kezdődnek”. Az alapvető fizikai elméleteket affin terek segítségével is tárgyalhatjuk, a jelenségeket általában mégis egy rögzített origó mellett szoktuk leírni, lényegében ennek kijelölése jelenti a „megfigyelő” meghatározását. Ekkor már a tárgyak helyzetét szokásosan térbeli vektorokkal jellemezhetjük, vagy például ezen vektorok Descartes-féle koordinátaival – a megfigyelőt ezért néha koordináta- vagy vonatkoztatási rendszernek nevezzük. Érdekes kérdés, hogy az egyes megfigyelők hogyan látják az egyes fizikai folyamatokat, illetve kitüntethetőek-e egyes koordináta-rendszerek.

Az ókori természetfilozófia **Arisztotelész** által kialakított képe alapján a „Földhöz rögzített” megfigyelő speciális: ebben nézve a mozgáshoz okra, hatásra van szükség, így a magukra hagyott objektumok előbb-utóbb nyugalmi állapotba kerülnek. Ilyen értelemben az ókori tudományban a nyugalom abszolút fogalom, amit a Földön nyugvó megfigyelőhöz képest kell érteni: így mindenkiről globálisan és objektíven megállapítható, hogy éppen mozog-e, vagy sem. Tehát (bár ezt az ókorban nem így fogalmazták meg) létezik egy abszolút nyugalomban lévő koordináta-rendszer („a talajhoz rögzítve”), a mozgás pedig ehhez képest értelmezhető.

**Galilei** ezzel szemben bevezette a **relativitás elvét**: eszerint a fizika törvényei minden egyenletes sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerben (azaz minden ilyen megfigyelő számára) ugyanazok kell hogy legyenek, más szóval egyetlen ilyen megfigyelő sem kitüntetett. A mechanikában érvényes relativitási elv szerint tehát semmilyen (mechanikai jellegű) kísérlettel (golyók ütközése, ingák lengése satöbbi) nem lehet megállapítani, hogy két, egymáshoz képest egyenletesen mozgó rendszer közül melyik van nyugalomban, és melyik mozog a másikhoz képest. Csak annyit mondhatunk, hogy egymáshoz képest mozognak – ilyen értelemben tehát a mozgás relatív fogalom. Egy vasúti kocsiról például zárt ablakok mellett (ha az enyhe rázástól eltekintünk) nem lehet megállapítani belülről (azaz csak a kocsik belsejében végzett kísérlettel), hogy áll-e, vagy egyenletesen mozog.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> A korábban is említett példával élve: hol lenne például a szoba két sarkának az összege, vagy az asztal sarkának kétszerese?

<sup>2</sup>Érdekes, ahogyan a közlekedés fejlődése lehetővé teszi a fogalmak könnyebb megragadását. A mechanika relativitási elvét ma egyenletesen mozgó űrhajók példájával képzelhetjük el a legjobban. Einstein a maga idejében (1905-ben) mozgó vasúti kocsiról beszélt, Galilei az 1600-as években pedig még csak sima tengeren egyenletes sebességgel mozgó hajóra tudott hivatkozni. Érezzük, hogy ezek „egyre rosszabb” példák. Nagy lényeglátásra, képzelőerőre volt tehát szüksége Galileinek, hogy kimondhassa a relativitási elvet olyan tökéletes példán demonstrálva is, mint egy mozgó hajó, ahol az óhatatlanul meglevő billegést, a szél fújását satöbbi el kell hanyagolni a relativitási elv kimondásakor.

Ez a probléma Galilei számára elsősorban azért volt fontos, mert ő ezzel cáfolta a Föld tengely körüli forgásának lehetősége ellen a vele szemben hangoztatott „bizonyítékot”, amely szerint a Föld már csak azért sem foroghat a tengelye körül, mert ekkor egy toronyból leejtett kő nem a torony tövében érne földet. Galilei ezzel szemben azt állította, hogy ilyenkor a kő – csakúgy mint a hajó esetében – együtt mozog a toronnyal (a Föld felszínével együtt forog), és indulásakor tehetetlensége tovább viszi ezen a pályán. Ma már tudjuk, hogy ebben a kérdésben Galilei ellenzőinek sem, de neki magának sem egészen volt igaza: a Föld tényleg forog, Galilei ezen gondolatmenete viszont pontosításra szorul, hiszen forgó rendszerben a tehetetlenségi (nem newtoni) erőket is figyelembe kell venni<sup>3</sup>.

**Newton** kiterjesztette a fenti relativitási elvet, az általa alkotott mechanikai törvényrendszerrel. Eszerint a mozgás relatív, a tehetetlen mozgás nem különböztethető meg a nyugalomtól, és az ettől való eltérítéshez van csak szükség hatásra (erőre). Ugyanakkor a tér és az idő fogalma a newtoni fizikában továbbra is abszolút. Az idő mindenki számára egyenértékű, és a tér is. Ha kijelölöm a tér egy pontját, ez mindenki számára ugyanazt fogja jelenteni, és két pont távolsága mindenki számára ugyanakkora. Hasonlóan, két esemény között mindenki szerint ugyanannyi idő telik el.

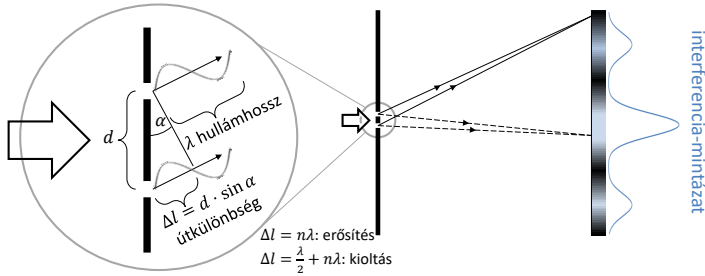
### 7.1.2. Elektromágneses hullámok és relativitás

Az elektromosság és mágnesség XIX. században megszületett elméleti leírása lényeges új területeket adott a fizikai ismeretekhez a mechanikához képest. Ezek tükrében ismét felmerült a kérdés, hogy a fentiekben mechanikai jelenségekre megfogalmazott relativitási elv vajon **kiterjeszthető-e** nem mechanikai (értsd: elektrodinamikai, optikai) kísérletekre, jelenségekre is. Ekkorra már ismert volt, hogy mozgó töltések mágneses teret keltenek, a mozgó töltésekre pedig az elektromos mellett mágneses erő is hat. Ezeket tudva úgy tűnik, hogy az elektromágnesség elmélete különbséget tesz abszolút álló, illetve mozgó rendszerek között.

Képzelnünk el két egyforma pozitív töltést, amelyek egymástól fix távolságban lebegnek a világűrben. Ha állnak, tudjuk, hogy milyen erő hat közöttük: elektromos taszítás. Ha viszont egy irányban egyenletes sebességgel mozognak, akkor (például) az egyik töltés mozgása mágneses teret *is* kelt a másik helyén, és ez a mágneses tér a másik (mozgó) töltésre erővel hat. Végeredményben tehát: ha a töltések állnak, és a megfigyelő mozog hozzájuk képest, akkor ő azt látja (megmérve a töltések között ható erőt), hogy elektromos erővel taszítják egymást, ha viszont a megfigyelő áll, és a töltések mozognak az ellenkező irányba, akkor a megfigyelő azt látja (méri), hogy az elektromos erő mellett mágneses erő is hat. Úgy tűnik tehát, mintha az elektromosság törvényei segítségével különbséget lehetne tenni a két leírt eset között, ami pedig ellentmondana a relativitási elvnek.

**Maxwell** egyesített elektromágneses elmélete tovább árnyalta a kérdést. Ez alapján léteznek elektromágneses hullámok, amelyekben az elektromos és a mágneses térerősség térben és időben periodikusan váltakozik, a hullám pedig fénysebességgel terjed. **Fresnel és Young interferenciakísérletei** óta ismert, hogy a fény hullámként viselkedik: egy fényhullám két részre osztása során keletkező fénysugarak az ernyőig eltérő

<sup>3</sup> Elég magas függőleges toronyból leejtett kő *valóban nem* a torony tövében fog földet érni a tehetetlenségi erők miatt; Galilei számára ez talán további meggyőző érv lehetett volna a Föld forgása mellett, ha az ő idejében a mérések elég pontosak lettek volna ennek kimutatására.



7.1. ábra. A fényvel elvégzett kétrés-kísérlet. A két résen áthaladó fény az ernyőn interferenciamintázatot hoz létre, ami a fény hullámtermészetét bizonyítja. A kísérletnek később a kvantummechanikában is jelentősége van, azért is tárgyaljuk ilyen részletesen. A témakör és ez az ábra az 5.6.3. szakaszban is előkerült, azonos az ottani az 5.19. ábrával.

utat tesznek meg, így eltérő fázisban érkeznek az ernyőre. A fáziskülönbségtől függően erősítik vagy gyengítik egymást, így a hullámhossztól függő mintázat (interferenciamintázat) jön létre (lásd 7.1. ábra). Összegezve kijelenthetjük, hogy a fény is elektromágneses hullám. Az egyenletek szerint ezek a hullámok mindig fénysebességgel terjednek, a kibocsátó forrás és a megfigyelő sebességétől függetlenül. Ugyanakkor az anyag hiányában, vákuumban is rögzített sebességgel terjedő hullámok látszólag megkövetelik valami mindent kitöltő közeg, egyfajta „fényterjesztő éter” létezését: ha ez valóban létezik, akkor Maxwell egyenletei csak az ehhez rögzített koordináta-rendszerben érvényesek, az elektromágneses hullámok ebben terjednek, ehhez képest állandó a terjedési sebességük. Eszerint fénykísérletekkel is különbséget tudnánk tenni a mozgás és a nyugalom között, ha ehhez a közeghez, az éterhez képesti mozgást vizsgáljuk! Kérdés ugyanakkor, hogy ez a világegyetemet kitöltő közeg a Földdel együtt mozog-e, illetve egyéb tárgyak, közegek mozgása módosítja-e az éter lokális mozgását (vagy éppen mozdulatlanságát).

Fresnel és Lorentz feltevése szerint az étert részlegesen magával húzza az anyag mozgása, létezik egyfajta „húzási” koefficiens. Stokes és Hertz ettől eltérő elmélete szerint viszont az éter teljesen az anyaggal együtt mozog. A kétfajta éterelmélet közötti döntés, illetve egyáltalán az éter vizsgálata érdekében több kísérletet is végeztek a XIX. század végén.

- **Fizeau interferometrikus kísérletében** a két ágra osztott fénysugár egyik fele szemben áramló vízen megy át, a másik vele azonos irányban áramló vízen, lásd a 7.2(a). ábrán. A két fénysugár egyesítése után interferenciamintázatot hoz létre, ha az általuk megtett út nem teljesen azonos. Ha a víz magával viszi az étert, akkor ez befolyásolja a fénysebességet, így az interferenciakép módosul (az álló vízzel kapotthoz képest). Az eredmények szerint van interferenciaváltozás, de sokkal kevésbé, mint várták: ez úgy értelmezhető, hogy **a víz csak részben viszi magával az étert.** (Valójában itt a fénytörés kap szerepet: ha a fény nem vákuumban, hanem közegben halad, módosul a terjedési sebessége, ahogy azt az 5.6.1. szakaszban is tárgyaltuk.)
- **Michelson** az éter és a Föld mozgásának relatív sebességét tervezte mérni (szintén interferometria segítségével). A kísérletben a forrásból jövő fényt a félig áteresztő tükör két sugárra osztja, amelyek azután további tükrökről visszaverődnek. A félig áteresztő tükörrel való újbóli találkozás után mindkét sugár az ernyőre érkezik

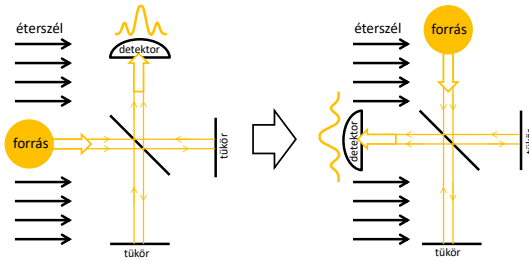
be. Az elrendezést lásd a 7.2(b). ábrán. Az interferométer egyik karját a Föld sebességével párhuzamosra állították, míg a másik merőleges volt rá, így a fény sebessége (mivel állítólag az az éterhez képest konstans) más lenne a két ágon. Mivel a fénysugarak különböző idő alatt érik el az ernyőt (a karok hosszúságának esetleges, a fényhullámhossz nagyságrendjébe eső nem egyformasága miatt), ez **fáziskülönbséget** eredményez, **interferenciakép** jelentkezik. Ha viszont az egész interferométert elforgatjuk, a másik kar lesz párhuzamos a Föld sebességvektorával, így ha a fény tényleg az éterhez képest mozog állandó sebességgel, akkor az elforgatás eredményeképpen az interferenciakép megváltozna. Ebből meghatározható lenne a Földnek az éterhez viszonyított sebessége. A kísérlet eredménye azonban az volt, hogy **a két karon azonos sebességgel terjed a fény**, a Föld sebességétől (például a naptári évszaktól, amely szerint változik a Föld Nap körüli sebességének iránya) függetlenül. Tehát **az éter a Földdel teljesen együtt mozog**, ráadásul a forgásával és a keringésével együtt. Ez pedig **ellentmond a Fizeau-kísérletnek!**

- A **csillagászati aberráció** jelensége szerint a Föld mozgásának függvényében egy távcső tengelyét más és más irányokba kell beállítani, amelynek oka a fény véges sebessége. A távcső nyílását eléri a csillag fénye, azonban mire a távcső közepéhez érne, az már elmozdult, mire pedig a távcső alján lévő érzékelőhöz ér, még jobban elmozdult. Emiatt nem teljesen ugyanazon szög alatt látjuk a csillagot, mint ha a távcső (azaz a Föld) állna, lásd a 7.2(c). Az effektus ráadásul a Föld Nap körüli keringése miatt ellenkező előjelű az ellentétes évszakokban, körülbelül  $\pm 20$  szögmásodperc eltérés tapasztalható (földrajzi helyzettől függően) a csillagok pozíciójában különböző évszakokban. Ezenfelül van egy állandó eltérés is, amely a Naprendszer mozgásából származik (ezt azonban önmagában nem tudjuk észlelni, hiszen ez mindig ugyanannyira módosítja a csillagok pozícióját), illetve egy napi (a Föld forgása miatti) eltérés, ez utóbbi néhány tized szögmásodperc mértékű.

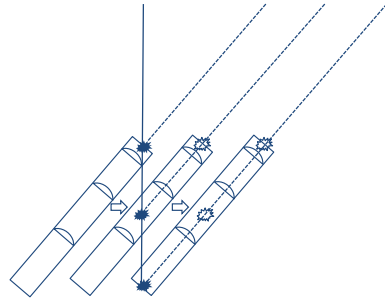
**Lorentz** előállt egy elmélettel, amely megmagyarázza a fenti kísérletek eredményét, hogy azok miért nem tudták megfelelően észlelni az éterhez képest mért sebességet. Lorentz (az elektrodinamika egyenleteinek szisztematikus vizsgálatának eredményeképpen) azt állította, hogy az eredeti Maxwell-egyenletek az éterhez képest nyugvó koordináta-rendszerben a korábbiaknak megfelelően írhatóak fel, mozgó koordináta-rendszerben viszont bizonyos transzformációt szenvednek. Ezek alapján az éterhez képest mozgó, és az abban álló megfigyelő is ugyanazt a fénysebességet fogja észlelni. Ez úgy is kifejezhető, hogy mozgó koordináta-rendszerben megfelelően módosítjuk a tér- és az időkoordinátákat is, és ekkor elérhető, hogy az egyenletek alakja ne változzon. Ebben az esetben az éterhez képest vett mozgás irányában Lorentz elméletében  $v^2/2c^2$  mértékű **rövidülés** jelenik meg. Bevezeti továbbá a **lokális  $t' = t - xv/c^2$  időt** is, az éterben mozgó megfigyelők számára (egy  $x$  helyen,  $t$  időpontban  $v$  sebességgel mozgó pontban ezt kell alkalmazni). Ez a legtöbbek szerint csak matematikai trükk, de Poincaré szerint fizikai tartalmat hordoz, az egyidejűség relativitását adja meg, hiszen az órák szinkronizációja is az értetől függ. (Egymástól távoli órákat kézenfekvően fénylelek vagy más elektromágneses hullámok segítségével lehet szinkronizálni.) Szerinte **a mozgó megfigyelő órája ezen lokális idő szerint jár**. A távolságok itt bevezetett mozgásirányú rövidülésének neve pedig **Lorentz-kontrakció**.



(a) A Fizeau-kísérlet.



(b) A Michelson–Morley-kísérlet.



(c) A csillagászati aberráció jelensége.

7.2. ábra. A relativitáselmélet bevezetését megelőző kísérletek

### 7.1.3. Einstein elmélete

Einsteint is foglalkoztatta a mozgó testek és koordináta-rendszerek elektrodinamikája. Ahogy később felidézte: „Ha valaki a fény sebességével üldözne egy fényhullámot, akkor időfüggetlen (elektromos és mágneses) hullámmezővel találná magát szemben. Úgy tűnik azonban (Maxwell egyenletei alapján), hogy ilyen nem létezik! Ez volt az első, gyerekes gondolkísérletem, amely a speciális relativitáselmülethez kapcsolódott”.<sup>4</sup> A fentebb ismertetett kísérletek megmagyarázására új elmélettel áll elő, amelyben teljesen szakít az éter fogalmával, és **új téridőfogalmat** vezet be – elsősorban az egyidejűség új, fizikai alapokon nyugvó definíciójára támaszkodva. Felismerte ugyanis, hogy az addigi ellentét a térbeli és az időbeli távolságokra vonatkozó, hallgatóságos, klasszikus kinematikai feltételezésekre épül. Elméletét abban a szellemben vezeti le, hogy a relativitás elve minden jelenségre (elektrodinamikaiakra is, nem csak mechanikaiakra) érvényes. Eredményeit **két posztulátumból** tudta levezetni:

- a fizika (és nem csak a mechanika) törvényei minden inerciarendszerben azonosak;
- a vákuumbeli fénysebesség pedig minden inerciarendszerben azonos.

Láthatjuk, hogy az első elv tulajdonképpen a Galilei-féle relativitás kiterjesztése, míg a második a vákuumbeli fénysebesség értékének „fizikai törvény” rangra emelése.

A megmagyarázandó helyzetet a következőkben foglalhatjuk össze. Ha a klasszikus kinematika szerint  $v_1$  sebességű vonatról  $v_2$  sebességgel kidobunk egy tárgyat, akkor klasszikusan a földhöz képest  $v_1 + v_2$  lesz a sebessége. Ha azonban fénnel világítunk ki a vonatból, a tapasztalat szerint a földhöz képest mért fénysebesség  $v_1 + c$  helyett

<sup>4</sup>Forrás: A. Einstein (1955): Erinnerungen – Soivenirs. *Schweizerische Hochschulzeitung* 28. 146.



továbbra is  $c$  (ezt jelenti a fénysebesség megfigyelőtől független állandósága). Ez nagyon furcsának tűnik elsőre, de közben elgondolkodhatunk, hogy honnan is vagyunk biztosak az eredeti sebesség-összeadási törvényben? Válasz: ez a Galilei-féle relativitásból, illetve a **Galilei-transzformációból** következett. Eszerint egy  $v$  sebességgel mozgó koordináta-rendszerben a tér- és időkoordináták a következőképpen módosulnak:

$$t \rightarrow t' = t \text{ és } x \rightarrow x' = x - vt. \quad (7.1)$$

Az első kifejezés azt mutatja, hogy az idő abszolút fogalom, minden megfigyelő órái egyszerre, szinkronizálható módon járnak, két esemény közötti időbeli eltérés minden megfigyelő számára állandó (azaz például egy közlekedési lámpa minden megfigyelő szerint ugyanannyi ideig piros vagy éppen zöld). A második kifejezés pedig azt állapítja meg, hogy egy nyugalomban lévő vonalzó  $x$  távolságot jelző beosztása a mozgó megfigyelő szerint  $t$  idő múlva az  $x - vt$  pontban lesz: ez is teljesen természetesnek tűnik.

Einstein szerint viszont a térben és időben (azaz a téridőben) mozgó megfigyelő számára a tér és az idő jelentése is módosul, méghozzá a **Lorentz-transzformációnak** megfelelően. Ezen transzformáció definiáló eleme, hogy legyen

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2. \quad (7.2)$$

Itt  $x$  és  $t$  egy adott eseménynek az egyik megfigyelő által mért helykoordinátája és ideje, míg  $x'$  és  $t'$  a mozgó megfigyelő által mért mennyiségek. Ha ez a fenti kifejezés igaz, akkor valóban biztosítottuk, hogy ha egy jel (részecske, sugár, bármi) az egyik megfigyelő szerint  $c$  fénysebességgel halad (azaz  $x = ct$ ), akkor a másik megfigyelő szerint is igaz lesz ez (azaz  $x' = ct'$  lesz). Valóban, ha  $x^2 - c^2t^2$  nulla, akkor tényleg  $x'^2 - c^2t'^2$  is nulla lesz. A fenti állítás, amely nem nulla  $x^2 - c^2t^2$  esetén is kimondja a két oldal egyenlőségét, természetesen ennyiből visszafelé még nem következik, de részletesebb indoklással belátható (ettől most eltekintünk).

A fenti állítást úgy értelmezhetjük, hogy a téridő pontjai (amelyeknek ideje és helye van, azaz  $(ct, x)$  párral jellemezhető) vektoroknak felelnek meg. Ezeket **négyesvektoroknak** fogjuk nevezni (arra gondolva, hogy a térkoordináta valójában három Descartes-koordináta; a negyedik pedig az idő). Az ilyen négyesvektoroknak értelmezük egyfajta „hosszát”: ez  $\sqrt{x^2 - c^2t^2}$  módon számítható. Háromdimenziós térben a forgatások olyan transzformációk, amelyen nem változtatják a vektorok hosszát. A téridőben tehát úgy vehetjük, hogy a Lorentz-transzformáció (ami megmondja, hogyan kell az egyik megfigyelő által mért  $x, t$  értékekből kiszámítani a hozzá képest mozgó megfigyelő által mért  $x'-t$  és  $t'-t$ ) olyan, hogy az eltranszformált négyesvektorok most definiált „hossza” állandó marad.

Adjuk meg most tehát az ezt a (7.2) feltételt teljesítő transzformációt. Ehhez vegyünk egy megfigyelőt, aki  $v$  sebességgel halad egy másikhoz képest. Legyen továbbá  $(t, x)$  az eredeti, és  $(t', x')$  a hozzá képest mozgó megfigyelő szerinti koordináták. Ekkor a transzformáció így írható fel:

$$t \rightarrow t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ és } x \rightarrow x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.3)$$

Figyeljük meg, hogy  $c \rightarrow \infty$  (azaz végtelen fénysebesség) esetén a Galilei-transzformációt kapjuk vissza! A fentieket egyszerűbben, a  $\beta = v/c$  és  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  jelölések beveze-

$v/c$	$\gamma$
1%	1,00005
10%	1,005
50%	1,1
90%	2,3
99%	7
99,9%	22
99,995%	100

7.1. táblázat. A Lorentz-faktor értéke különféle sebességekre

tésével

$$ct' = \gamma(ct - \beta x), \quad (7.4)$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad (7.5)$$

módon is felírhatjuk, vagy vektorokkal és mátrixokkal

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Érdemes még megemlíteni, hogy ellenkező irányú mozgás esetén a fenti  $-v$  és  $-\beta$  tényezőkből  $v$ , illetve  $\beta$  lesz. Ez tehát a Lorentz-transzformáció, amelyet Einstein a posztulátumokból le tudott vezetni. A térkoordináta ( $x$ ) és az idő ( $t$ ), pontosabban a tér három koordinátája az idővel együtt úgynevezett **négyesvektort** alkot. A téridő pontjait (egy „origó”, azaz térbeli középpont és időmérés-nullapont kijelölésével) tehát ilyen négyesvektoroknak tekinthetjük. A fenti  $\gamma$  faktort **Lorentz-faktornak** is hívjuk. Ha értéke egyhez extrém közeli, akkor minden a klasszikus fizika szerint zajlik. Ha jelentősen eltér egytől, akkor erős a téridő-koordináták módosulása. A faktor értéke néhány konkrét sebességre megtalálható a 7.1. táblázatban. Eszerint például a fénysebesség 1%-ánál (ami 3 000 km/s, azaz extrém nagy sebesség!) a korrekciós faktor csak 1,00005!

A Lorentz-transzformációk egyik fontos következménye, hogy **a sebesség-összeadás törvénye is módosul**. Ha egy megfigyelő hozzánk képest  $v_1$  sebességgel mozog, és hozzá képest  $v_2$  sebességgel mozog egy tárgy (vagy részecske vagy sugárzás vagy bármi egyéb), akkor kiderül, hogy ezen tárgy hozzánk képesti sebessége nem  $v_1 + v_2$ , hanem  $\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}$ , mivel a második sebességet már az első sebesség szerinti koordináta-rendszerben kell felírni.<sup>5</sup> Ha  $v_1 = 100$  m/s és  $v_2 = 100$  m/s, akkor az eredő sebesség nem 200 m/s, hanem 199,999999999998 m/s. Tehát a korrekció ekkor kicsi, de 100 000 km/s és 100 000 km/s esetében már 200 000 km/s helyett 180 000 km/s eredményt kapunk. Itt már lényeges az eltérés. A képletből az is látható, hogy ha  $v_2 = c$ , akkor  $\frac{v_1+c}{1+v_1c/c^2} = c$ , tehát  $c$ -hez „bármennyit hozzáadva” ugyancsak  $c$ -t kapunk. Szavakban: ha egy megfigyelő szerint valami  $c$  (fény-)sebességgel mozog, akkor ez a valami

<sup>5</sup> A „sebesség-összeadás” iménti képletét valóban ellenőrizhetjük a Lorentz-transzformáció fenti (7.3) képlete alapján. Ha  $x' = v_2 t'$ , és a koordináta-rendszerek relatív sebességét most  $v_1$ -gyel jelöljük (így vezettük most be  $v_1$ -et és  $v_2$ -t), akkor némi algebrai rendezéssel tényleg azt kapjuk, hogy  $x = \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2} \cdot t$ , ahol a szorzó jelentése éppen a nyugvó megfigyelő által látott sebesség.

minden más mozgó megfigyelő szerint is  $c$ -vel mozog. A fénysebesség tényleg állandó, bármilyen sebességű koordináta-rendszerből nézzük – most látjuk, hogy az elmélet (a Lorentz-transzformációk) ezzel valóban kompatibilisek; ilyen transzformációs törvények levezetése volt a cél!<sup>6</sup> „Cserébe” azt kaptuk, hogy a távolságok és az időtartamok nem a Galilei-transzformáció (vagyis a „józan eszünk”) szerint módosulnak, amikor mozgó megfigyelő nézi ugyanazt az eseménysorozatot. Érdekes persze megjegyezni, hogy a „józan eszünk” az iskolai tanulmányaink mellett a csecsemőkorunktól tapasztaltakon (például golyók gurulása, leesése, ütközése) alapul – ebben a körben pedig a fénysebességhez képest csak igen kicsi sebességek kerülnek elő.

#### 7.1.4. Az energia és a tömeg ekvivalenciája

Kiderül, hogy az  $E$  energia és a  $\vec{p}$  impulzus (lendület) három komponense is Lorentz-vektort alkot  $(E, \vec{p}c)$  módon. Mozgó megfigyelők szerint tehát ezek is módosulnak. A Lorentz-transzformáció szerint tehát egy  $(E, pc)$  energiájú és impulzusú test energiája és impulzusa egy  $\beta = v/c$  sebességű megfigyelő szerint:

$$E' = \gamma(E - \beta pc), \quad (7.8)$$

$$p'c = \gamma(pc - \beta E). \quad (7.9)$$

Eszerint, ha  $p' = 0$  (azaz ha a  $v = \beta c$  sebességgel mozgó megfigyelő szerint a test áll), akkor az álló megfigyelő szerint  $E = \gamma E'$  és  $p = \gamma \beta E'/c$ . Az energia és az impulzus Lorentz-transzformációjának másik fontos következménye, hogy az  $(E, \vec{p}c)$  négyesvektor fentebb definiált „hossza” nem változik, ha más vonatkoztatási rendszerből nézzük:

$$E^2 - (pc)^2 = E'^2 - p'^2 c^2. \quad (7.10)$$

Az  $E^2 - p^2 c^2$  mennyiség tehát nem függ a test mozgásától, ez egy olyan állandó, ami csak a testre önmagára jellemző. Mivel ennek fizikai dimenziója energia a négyzetben, nevezzük ennek gyökét  $mc^2$ -nek, ahol tehát  $m$  a testre jellemző állandó:

$$E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2. \quad (7.11)$$

Ha a test impulzusa nulla (azaz a test áll), akkor is lehet tehát energiája (ha az  $m$  paraméter nem nulla), ezt az energiát nyugalmi energiának nevezhetjük, és  $E_0$ -lal jelöljük:

$$E_0 = mc^2, \text{ és } E = E_0, \text{ ha } p = 0. \quad (7.12)$$

<sup>6</sup>A Lorentz-transzformáció az elektromágnesesség más jelenségeit is megmagyarázza, mert az  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$  elektromos tér és a  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$  mágneses tér is transzformálódik, ha más vonatkoztatási rendszerre térünk át. Kiderül, hogy ezek nem Lorentz-vektort, hanem Lorentz-tenzort (mátrixot) alkotnak, amelynek jelölése  $F^{\mu\nu}$ . Ez új vonatkoztatási rendszerre való áttéréskor a Lorentz-transzformáció teljes,  $4 \times 4$ -es (a példa kedvéért  $x$  irányú mozgásra felírt)  $\Lambda^\mu{}_\nu$  tenzorával jobbról és balról szorozva transzformálódik. A kifejezések:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

Az eddigieket összerakva viszont a  $v$  sebességgel mozgó test energiája és impulzusa

$$E = \gamma mc^2, \quad p = \gamma mv, \quad \text{ahol ugye} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7.13)$$

A test energiája akkor a legkisebb, ha nyugalomban van; ha mozog, több lesz az energiája, hívjuk ezt a többletet  $E_K$ -nak, és vessük össze az esetleg korábbi tanulmányainkban tanult kinetikus energia formulájával. Tehát

$$E_K = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2, \quad (7.14)$$

és most megnézhetjük, mi adódik, ha  $v \ll c$ , azaz (a fénysebességhez képest) kicsi sebességek esetén. Tudva, hogy  $1/\sqrt{1-x} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$ , az adódik, hogy

$$E_K \approx \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3v^2}{8c^2}mv^2 + \dots \quad (7.15)$$

Az első tag éppen a mozgási energia klasszikus  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$  klasszikus képlete! (A további tagok ennek relativisztikus korrekciói.)

Az eddigiekben a „négyesimpulzus-vektor” hosszaként bevezetett  $m$  paramétert tehát (ahogy sejteni lehetett) a test *tömegének* hívhatjuk. A tömeg jelentése azonban kicsit más, mint a klasszikus mechanikában: mivel az impulzus nem  $p = mv$  módon kapható, ezért a „tehetetlenség mértéke” (vagyis  $p/v$ , az impulzus és a sebesség hányadosa) nem az  $m$  tömeg, hanem a

$$\frac{p}{v} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{c^2} \quad (7.16)$$

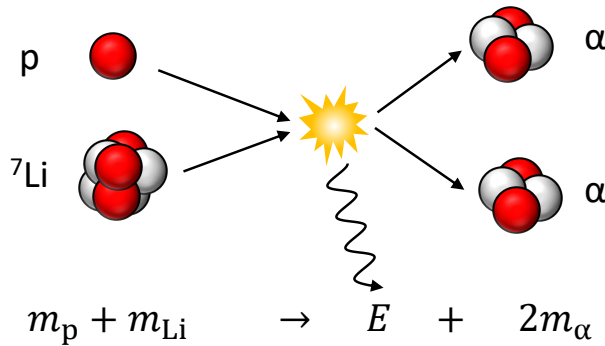
képlet adódik.<sup>7</sup>

Eszerint egy test tehetetlensége az energiatartalmával arányos (annak  $c^2$ -ed része). Ez ugyanakkor azt is jelenti, hogy ha egy test valamilyen módon energiát ad le – akár például radioaktív bomlásban –, akkor tömege az  $E = mc^2$  képletnek megfelelően csökken:  $\Delta m = \Delta E/c^2$ . Ezzel kapcsolatban írja Einstein 1905-ben Conrad Habichtnak: „Az elektrodinamikáról írt dolgozat egy újabb következménye ütött szöveget a fejembe. A relativitás elvének és a Maxwell-egyenleteknek az összekapcsolása megköveteli, hogy egy test tömege egyértelmű mértéke legyen a test energiatartalmának; a fény tehát tömeget hordoz. A rádium esetében (annak bomlása, azaz energiakibocsátása során) jelentős tömegcsökkenésnek kell végbemennie. A gondolatmenet szórakoztató és csábító; persze könnyen lehet, hogy az Úr csak nevet a dolgon, és az orromnál fogva vezet”.<sup>8</sup>

Az eddigiek érdekes következménye, hogy ha egy test tömege nem nulla (azaz  $m > 0$ ), akkor  $v \rightarrow c$  esetén az  $E = \gamma mc^2$  energia végtelenhez tart (hiszen  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

<sup>7</sup>Ha ragaszkodnánk ahhoz, hogy az impulzus a „tömeg” és a sebesség szorzata, akkor azt, amit most  $m$ -mel jelöltünk, és a test tömegének hívtunk, úgy kéne hívni, hogy „nyugalmi tömeg”,  $m_0$ -val jelölni, és bevezetni a „mozgási tömeg” fogalmát, ami  $\gamma m = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ . Ez tehát nagyobb, mint a nyugalmi tömeg.

<sup>8</sup>Ez nem gyökeresen új gondolat, ugyanis korábban is felmerült, hogy a mechanika teljes egészében visszavezethető az elektromágnességre, és egy elektromos sugárzással töltött térfogat úgy viselkedik, mintha tehetetlen tömege lenne. Einstein forradalmi gondolata szerint azonban minden energiához tehetetlen tömeg tartozik.



7.3. ábra. Cockcroft és Walton kísérleti eredménye: a  $p + {}^7\text{Li} \rightarrow \alpha + \alpha$  reakcióban keletkező energia (amely a reakciótermékek mozgási energiájának formájában jelenik meg) éppen az eltűnő tömegnek felel meg, az  $E = mc^2$  formulának megfelelően. Megjegyzendő, hogy ez csak akkor tekinthető a formula bizonyítékának, ha elfogadjuk, hogy a reakciótermékek azonosítása megfelelő volt – Cockcroft és Walton eredetileg valójában éppen az  $E = mc^2$  formula segítségével igazolta magát a reakciót.

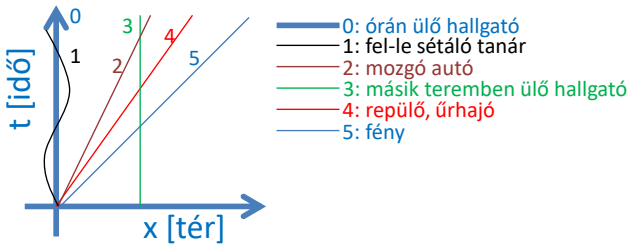
is végtelenhez tart), tehát akármennyi energiát is adunk egy  $v < c$  sebességű tárgynak, az sosem lépi át a fénysebességet.

Azt, hogy egy test tehetetlensége az energiatartalmával nő (vagyis közkeletűen: az  $E = mc^2$  összefüggést) először katódsugarak (elektronok) eltérülése alapján vizsgálták, ahogy azt Einstein javasolta. Az első eredmények (Kaufmann, Hupka és Bucherer mérései) pontatlanságuk miatt cáfolni látszottak Einstein formuláját, azonban Günther Neumann 1914-es, illetve Guye és Lavanchy 1915-ös mérései már azt mutatták, hogy a  $v$  sebességű elektron tehetetlensége éppen az einsteini formulának megfelelően változik meg. A tömeg és az energia ekvivalenciáját Cockcroft és Walton ellenőrizték közvetlen kísérlettel 1932-ben: proton és lítium egyesülése majd két héliummaggá történő bomlása során azt tapasztalták, hogy éppen a bejövő és kimenő részecskék tömegkülönbségének megfelelő mozgási energia „jelenik meg” a rendszerben. A legújabb ilyen témájú kísérletet 2005-ben végezték (a felfedezés 100. évfordulója alkalmából): Rainville kísérletében szilícium-, illetve kénatommagok neutronbefogását vizsgálta, a magok tömegének pontos mérésével együtt. Eredményei szerint az einsteini képlet pontossága legalább 0,00004%.

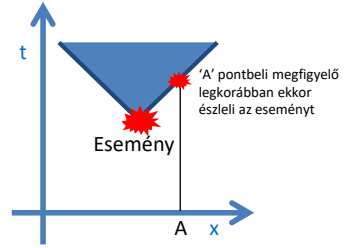
### 7.1.5. A relativitáselmélet Minkowski-diagramokon

Einstein elméletének kulcsa tehát a tér és az idő módosulása, és egy egységes téridő feltételezése. Erre a téridőre ugyanakkor transzformációs szabályok vonatkoznak: a tér és az időkoordináták módosulását írják elő, a (7.3) egyenletnek megfelelően. A téridőt egyetlen térdimenzió esetén **Minkowski-diagramokon** képzelhetjük el, ahol egy derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoljuk a téridőt, a vízszintes tengelyen a teret, a függőlegesen az időt. A skálát úgy állítjuk be, hogy **a fénysebesség egy 45 fokos egyenesnek** feleljen meg, lásd a 7.4(a). ábrán.

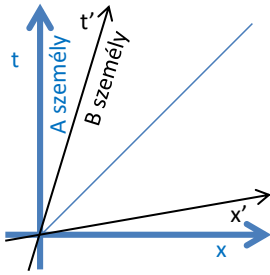
Mivel az információ a leggyorsabban fényjelekkel terjed, ezért egy adott eseményről csak azon téridőpontokban (azaz: helyen és időben) lehet értesülni, amelyek beleesnek ennek „**fénykúpjába**”, azaz ahova a fény, vagy annál lassabb jel odaérhet. Ha a Nap megsemmisülne, arról is leghamarabb 8 perccel később értesülnénk, miután az addig



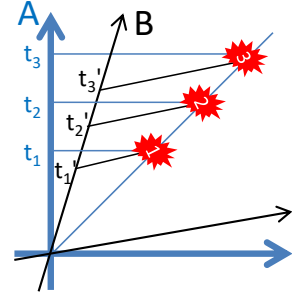
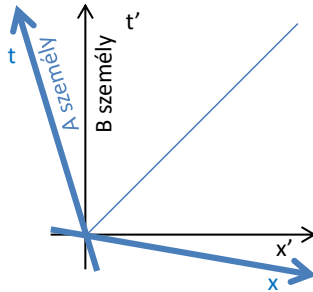
(a) A téridő szemléltetése különböző álló és mozgó objektumokkal. Az ábra azonos a 6.1. ábrával.



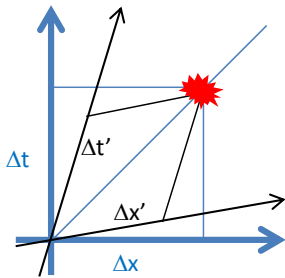
(b) Esemény fénykúpja



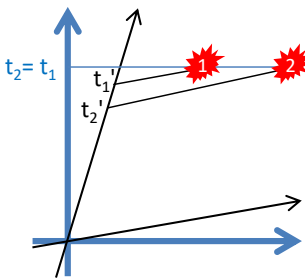
(c) Koordináta-rendszerek egymás szemszögéből nézve.



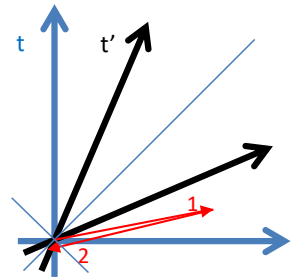
(d) Események A és B órái szerint



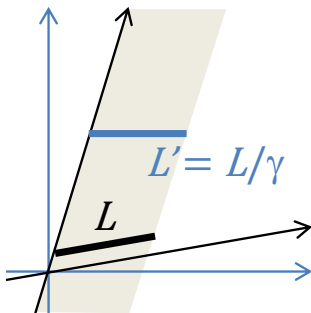
(e) Idő- és térkoordináták leolvasása a nyugvó és a mozgó megfigyelő szerint. Az ábra azonos a 6.2. ábrával.



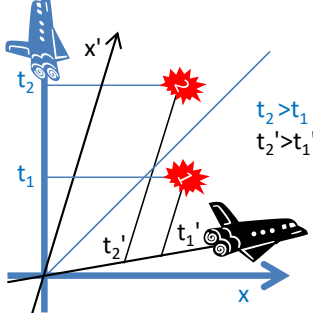
(f) Az egyidejűség relativitása



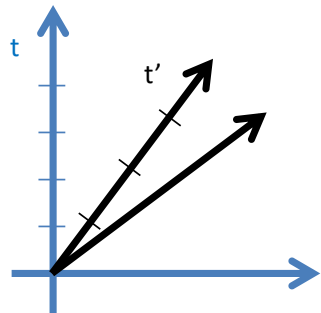
(g) A kiindulása előtt visszaérkező jel.



(h) A Lorentz-kontrakció



(i)  $v > c$  megfigyelők időutazása



(j) A sajátidő megváltozása

eltelt időben még a Nap megsemmisülés előtti fénye ér ide. Ez a fénykúp tulajdonképpen azt jelzi, hogy egy adott esemény mely más téridőbeli eseményekre lehet okozati hatással, lásd a 7.4(b). ábrán.

Ha egy mozgó objektumhoz képest szeretnénk a jelenségeket vizsgálni, „be kell ülni” az ő koordináta-rendszerébe. Ennek szabályait a **Lorentz-transzformáció** adja meg (lásd a (7.5) egyenletet). Minkowski-diagramokon az állandó sebességgel mozgó megfigyelő számára úgy torzul a téridő, hogy az ő koordináta-rendszerében is éppen szimmetrikusan középen legyen a fénysebesség egyenese, lásd a 7.4(c). ábrán. Egy adott időtartam és térbeli hossz a Lorentz-transzformációnak megfelelő változását Minkowski-diagramon mutatja a 7.4(e). ábra.

### 7.1.6. A relativitáselmélet érdekes következményei és kísérleti bizonyítékai

A Minkowski-diagramokon a tér- és az időtengely szimmetrikus a fénysebesség görbéjére, és mivel a **tér és az idő mérése** ezen tengelyekkel való **párhuzamos vetítéssel** történik, egy adott téridőbeli események ideje nem azonos a két megfigyelő számára, ahogy a 7.4(d). ábra is mutatja. Ez azt jelenti, hogy az **egyidejűség relatív**: a mozgás sebességétől függ, hogy két esemény egyszerre történt-e, különböző megfigyelők mást mondanak (lásd 7.4(f). ábrát).

A relativitáselmélet további fontos következménye az, hogy mozgó rendszerben az **idő „lassabban telik”**, mint kívülről nézve, a lassulási faktor a Lorentz-faktor,  $\gamma$ . Ezt az is mutatja, hogy mozgó megfigyelő időtengelyén ritkábban kell óraosztásokat tenni, lásd a 7.4(j). ábrán. Hasonló állítás fogalmazható meg a térbeli távolságokra is, ez a **Lorentz-kontrakció**: mozgó tárgyak kívülről nézve rövidebbek, ahogy az a 7.4(h). ábrán is látható: a saját koordináta-rendszerében  $L$  hosszúságú űrhajó kívülről nézve  $\gamma L$  hosszúságú.

Az energia és a tehetetlenség ekvivalenciája kapcsán már láttuk, hogy a fénysebesség egyfajta maximális sebesség. Az is kiderül azonban, hogy aki a **fénysebességnél gyorsabban** megy, az **időben visszafelé** is megy, pontosabban számára **két esemény sorrendje megfordul** (azaz az ok-okozati sorrendet fordítva észleli), ahogy a 7.4(i). ábrán látható.<sup>9</sup> Ennél még erősebb állítást is tehetünk: ha egy jel, **információ a fénysebességnél gyorsabban** megy, az bizonyos megfigyelők számára **időben visszafelé** is megy (nem kell, hogy ez a jel anyagi test, űrhajó, ilyesmi legyen, elég, ha valami hullám vagy mikrorészecske). Pontosabban: ha két esemény olyan, hogy közöttük csak a fénynél nagyobb sebességgel lehetne kapcsolat, akkor van olyan, fénynél lassabban mozgó („normál”) megfigyelő, aki úgy látja, hogy a **két esemény sorrendje megfordul** (azaz például az ok-okozati sorrendet fordítva észleli), ahogy a 7.4(i). ábrán látható. Ezzel az az óriási probléma, hogy ekkor egy okozat ismeretében megváltoztathatjuk az okot, azaz megsérthetjük a **kauszalitás elvét** (amely szerint az ok előbb van, mint az okozat). A 7.4(g). ábrán látható egy példa az időben visszafelé történő üzenésre. Itt az 1. jelet az álló megfigyelő (akinek koordináta-rendszere a  $(t, x)$  rendszer) küldi ki a

<sup>9</sup>A Lorentz-transzformáció képleteit persze a  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  faktor miatt nem alkalmazhatjuk  $v > c$  esetben, azaz ha a megfigyelő a fénynél nagyobb sebességgel mozog. A 7.4(i). ábrán látott koordinátatranszformáció tehát valójában a Lorentz-transzformáció egyfajta „geometriai általánosítása”, amely megengedi a fénynél gyorsabb megfigyelőket is.

fénynél gyorsabban, majd egy adott pillanatban a mozgó (vesszőssel jelölt) megfigyelő észleli ezt, és ennek észlelésekor visszaküldi a 2. jelet, *az ő koordinátái szerint* a fénynél gyorsabban. Így lehetséges lesz, hogy ezen második jel beérkezése a  $t$  idő szerint az első kiküldése előtt következik be. Ezzel tulajdonképpen „kauzalitási hurkot” hozhatunk létre: ha (morbid példával élve) valaki az időben visszautazva megöli valamely felmenőjét, akkor valójában ő maga meg sem szülehetett volna. Persze ekkor meg sem ölhette volna ezt a felmenőt, ezért mégis megszülehetett, és így tovább. Ez érdekes filozófiai probléma, vannak rá megoldási kísérletek (például hogy csak kauzálisan helyes hurok jön létre, tehát ha visszautaztam a múltba, akkor ott csak olyat fogok tudni tenni, ami éppen azt eredményezi, hogy megszületem, majd visszautazom a múltba). Mégis, az események időbeliségének ilyen megfordíthatósága a leglényegesebb érv arra, hogy **nem lehet a fénysebességnél gyorsabban menni** (sőt információt közölni sem).

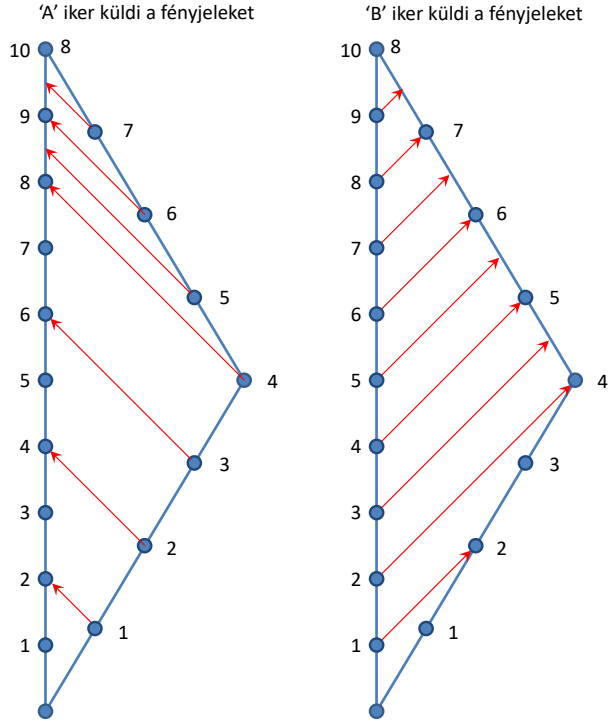
Mindegyik fent említett (valódi) jelenséget **ellenőrizték kísérletileg**, leginkább az idődilatációt. Fontos példa a kozmikus sugárzás hatására a sztratoszférában keletkező részecskék (a **kozmosz müonok**) Földre érkezése: ezen részecskék a másodperc töredékéig élnek, és klasszikusan számolva csak körülbelül 660 métert tudnának megtenni, mielőtt elbomlanak. Ugyanakkor keletkezési helyüknél (a magaslégszféra) 30 km-rel lejjebb, a Földön is észleljük őket – a számukra **megrövidült útvonal** miatt (lásd Rossi és Hall 1941-es kísérletét). Az idődilatációt röntgensugarak frekvenciájának eltolódásával tudták a legprecízebben kimérni (a periódusidő dilatációján keresztül, lásd Hasselkamp 1979-es kísérletét), ennek mértéke a relativitáselméletből adódó értéket erősítette meg. Érdekesség, hogy Hafele és Keating 1971-es kísérletében repülőre tett céziumalapú atomórákkal is ellenőrizték az idődilatációt: egy keletre és egy nyugatra menő repülőre tettek fel egy-egy órát, egyet pedig a földfelszínen hagytak. A Föld forgása miatt ezen órák mind különböző sebességgel mozogtak, és újraegyesítésük után éppen a Lorentz-kontrakciónak megfelelő eltérést mutatták. A tömeg és az energia ekvivalenciájának ellenőrzését pedig már fentebb említettük: a speciális relativitáselmélet és a Lorentz-transzformáció minden kísérleti eredménnyel összecseng!

### 7.1.7. Látszólagos paradoxonok

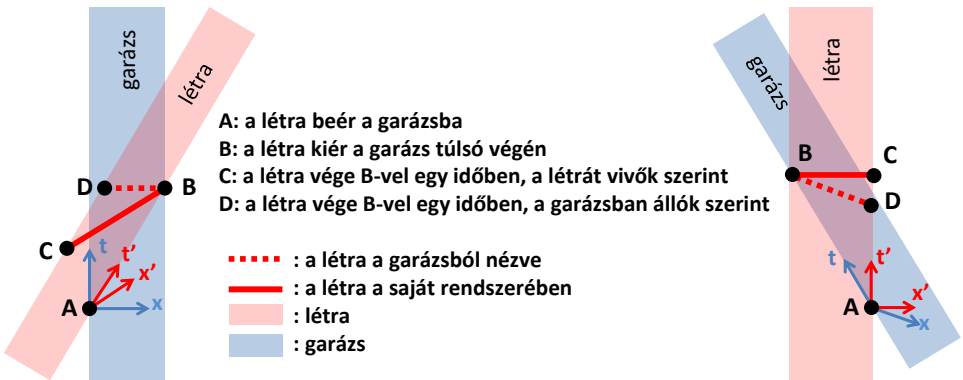
Érdekes azonban, hogy annyira kontrainuitív következményei vannak az elméletnek, hogy a klasszikus gondolkodás elemeit a relativitáselmélettel keverve sok látszólagos paradoxont állíthatunk fel.

Ezek egyike az **ikerparadoxon**, amely arról szól, hogy egy ikerpár egyik tagja egy távoli csillaghoz utazik, a fényéhez igen közeli sebességgel, majd onnan visszatér, és az idődilatáció miatt azt találja, hogy **a Földön több idő telt el**, mint az ő saját koordináta-rendszerében, így az ikertestvére sokkal többet öregedett, mint ő. Egy konkrét példán bemutatva, utazzon az ikerpár egyik tagja egy 3 fényévre lévő csillaghoz  $v = 0,6c$  sebességgel, azaz a fénysebesség 60%-ával. A csillagot elérve elhanyagolhatóan rövid idő alatt megfordul, és szintén  $v = 0,6c$  sebességgel visszatér a Földre. Az út 6 fényév hosszú, ezért a földi inerciarendszerből nézve ezalatt **10 év telik el**. Ugyanakkor az utazó számára a távolság a Lorentz-kontrakciónak megfelelően lerövidül, így konkrétan (a  $\gamma$  faktoral) kiszámolva neki az utazás csak **8 évig tart**. Különösen jól mutatja a helyzetet, ha mindkét iker minden újévkor fényjelet (vagy fénysebességű rádióüzenetet) küld a testvérenek. Ez Minkowski-diagramon ábrázolva a 7.5. ábrán látható. A paradoxon abban áll, hogy elvileg a másik iker inerciarendszeréből is nézhetnénk a helyzetet,





7.5. ábra. Az ikerparadoxon és magyarázata: a távoli csillagot felkereső iker számára kevesebb idő telik el, ő kevesebb „újvévi üdvözlét” küld testvéreinek, mint ő neki (a körök és számok az évfordulókat jelzik, a piros nyilak a fénysebességgel küldött üzeneteket).



7.6. ábra. A létraparadoxon magyarázata Minkowski-diagramon: a garázból nézve a létra befért, míg a létrát vivők szerint mindig is kilógott a garázból.

és akkor ugyanazt kellene kapnunk, csak fordítva, éppen a relativitás miatt. Hogyan lehet, hogy az egyik iker kevésbé öregszik, az egyik kevesebb szilveszteri üzenetet kap, és egyéb objektív különbség van köztük, amikor mindketten inerciarendszerekben voltak? A paradoxon feloldása az, hogy nyilván az egyiknek „ki kellett esnie” az inerciarendszereiből ahhoz, hogy újra találkozzanak, tehát az egyiknek valamikor gyorsulnia kellett, és ez is objektív különbségnek számít, tehát nem meglepő, hogy a két iker szempontjából nem ugyanazt látjuk. Ez a kiesés akkor történt, amikor megfordult. Valójában a „visszafordulás” előtt az ikerpár két fele ugyanazt látja: két évente szilveszteri üzenetet kap testvérétől. A visszafordulás után is ugyanazt látják: évente két szilveszteri üzenet kapnak testvérüktől. A különbség, hogy az egyik iker nyolc év után észleli a visszafordulást, míg a másik már négy év után. Érdekes abba is belegondolni, hogy az ikerpár földi fele „mikor szedi össze a kését”, avagy az úrutazó fél mely időszak miatt öregszik kevesebbet. Az egyenletes mozgás alatt ugyanúgy öregszenek, tehát a „visszafordulás” az, ami az aszimmetriát okozza.

Egy másik híres és fontos felvetés a **létraparadoxon**. Ebben arról van szó, hogy egy 10 méteres garázsba be akarunk vinni egy 11 méteres létrát. Ha a fénysebesség 60%-ával megyünk, akkor a 11 méteres létra (a garászból nézve) csak 8,8 méter hosszú, így befér a garázsba. Ha viszont ugyanezt a létrát vivők szemszögéből nézzük: a garázs lerövidül 8 méterre, így mégannyira sem fér be a létra a garázsba! A paradoxon abban áll, hogy mindkét állítás nem lehet helyes: a létra vagy befér, vagy nem, ez objektíven eldönthető kellene hogy legyen. A feloldás az, hogy a kérdés nem egyértelmű: az, hogy a garázsban van-e a létra, tulajdonképpen azt jelenti (hétköznapi szavakkal megfogalmazva), hogy amikor a vége is beért, akkor az eleje nem lóg-e már ki. Ennek eldöntéséhez azonban szükség van távoli (a garázs két végén lévő) események egyidejűségének fogalmára, ami koordináta-rendszer-függő! A jelenséget Minkowski-diagramon a 7.6. ábrának megfelelően ábrázolhatjuk. Felmerül persze, hogy mi történne, ha a garázs ajtaját becsuknánk, amikor úgy érezzük, hogy az eleje és a vége is belül van. Ha csak egy pillanatra tennénk ezt, akkor megint az egyidejűséggel találánánk magunkat szemben: ki mondja meg, hogy a garázs első és hátsó ajtaja egyszerre volt-e csukva? Ha viszont megállítjuk a létrát, amint beért, az már másik probléma: ekkor az elől menőknek közölniük kell a hátsókkal, hogy álljanak meg. Amíg azonban ez az információ hátraér, a létra a valóságban is összenyomódott! (Ne feledjük, itt a fényéhez közeli sebességeken gondolkodunk; semmilyen információra sem mondhatjuk, hogy „pillanatszerűen odaért”. A létra sem lehet „abszolút merev”, hiszen egy ilyenlél végtelen gyorsan információt közölhetnénk.)

A gondolatmenetet „börtönparadoxonnak” is hívják, ekkor a gyorsan (a fényhez képest nem elhanyagolható sebességgel) „szaladó” elítélt testvastagságának és a rácsok méretének viszonya a kérdés, vagyis az, hogy a rab így megszökhet-e. A feloldás, illetve a válasz itt is hasonló: ha a mozgó rab teste „a saját rendszerében egyidejű”, ahogy azt gondoljuk, akkor nem szökhet így meg.

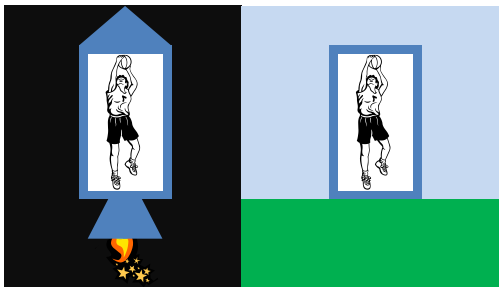
## 7.2. Általános relativitáselmélet és a görbült téridő

### 7.2.1. Az általános relativitáselmélet alapjai

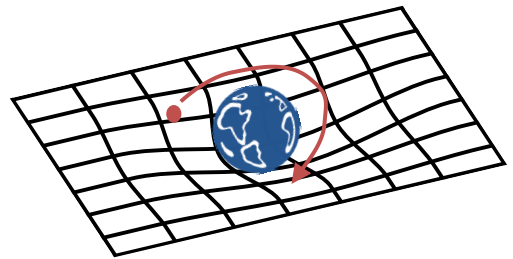
A **newtoni gravitáció** szerint ha két objektum hat egymásra, és az egyiket eltávolítjuk, azt a másik *azonnal* érzi. Ez a hatás így végtelen sebességgel érne el a másik

objektumhoz. Ez a **távolhatás** a speciális relativitáselmélet szerint lehetetlen (legalábbis kauzalitási problémát okozna). Szükség van tehát a gravitáció elméletének a relativitáselmélettel való összehangolására. Ehhez egy fontos alappillér az a megfigyelés (vagyis inkább: minden ilyen megfigyelés összessége), hogy semmilyen kísérlettel nem lehet különbséget tenni egy gravitációs térben álló kabin, és egy, a csillagoktól távoli űrben gyorsuló kabin között (lásd a 7.7(a). ábrán). Ez az **ekvivalencia elv**, amelynek értelemben az említett két rendszer között ekvivalencia figyelhető meg: **a gravitációs tér és a vonatkoztatási rendszer gyorsulása egyenértékű**. Kérdés, hogy van-e valami mélyebb fizikai ok ezen ekvivalencia mögött. (A newtoni mechanikában például hasonló helyzet volt: az inerciarendszerek ekvivalenciája a newtoni mechanika felismeréséhez vezet, és ahhoz, hogy a gyorsuláshoz erő kell, de a mozgásállapot fenntartásához nem.)

Einstein matematikai választ talált a fenti kérdésekre, amelynek lényege az, hogy az anyag egyfajta görbült teret, pontosabban téridőt hoz létre, és a mozgást ebben a görbült térben kell értelmezni. A **téridő görbülete** a benne elhelyezett tömeggel nő, és ez a görbület hat aztán a további tárgyak mozgására. Az egész egyfajta, súlyok által megnyújtott gumilepedőhöz hasonlít, ahol a tárgyak nem a tömegvonzás, hanem a görbült felszín miatt keringenek pályájukon, lásd a 7.7(b). ábrát<sup>10</sup>.



(a) A gyorsulás és a gravitációs tér ekvivalenciája.



(b) A görbült tér. Az ábra azonos a 6.3. ábrával.

7.7. ábra. Illusztrációk az általános relativitáselmélet alapjairól

A görbült négydimenziós téridő geometriáját úgy képzelhetjük el leginkább, ha megfontoljuk, mi a különbség egy sík és egy gömb között, illetve ezt hogyan érzélik a „benn lakók”. Lokálisan, ha a görbület nem „túlságosan nagy”, akkor mindenhol síknak tűnik (ahogy a Föld felszíne is), de ha egy elég nagy háromszöget szerkesztünk, akkor például annak szögeinek összege nem 180 fok lesz, hanem akár 270 fok is lehet (gondoljunk csak egy olyan háromszögre, amelynek egyik csúcsa az északi sark, másik kettő pedig az egyenlítőn van, nulla, illetve 90 fokos hosszúsági foknál). Ezenfelül olyan „globális” furcsaságokat is észlelnének, hogy két nem párhuzamos egyenes két pontban metszi egymást, az egyenesen az egyik irányba elindulva visszajuthatunk ugyanabba a pontba, és így tovább. Ezeket a görbült tereket (vagy a téridőt) a matematika egyik ága, a differenciálgeometria tudja leírni.

Az Einstein-féle gravitációelmélet, az általános relativitáselmélet matematikai tárgyalása messze túlmutat ezen jegyzet keretein. A lényege az, hogy bevezetünk minden

<sup>10</sup>Ez azért nem teljesen szerencsés hasonlat, mert a lepedőbe helyezett tárgyak *valójában* a súlyok, azaz a Föld gravitációja miatt nyújtják meg azt. A hasonlat mégis jól szemlélteti, hogy a közvetlen távolhatást helyettesíthetjük görbület létrehozásával, ami aztán hat a másik test mozgására.

egyes pontban egy  $g_{\mu\nu}$  tenzort (mátrixot), amely a téridő lokális geometriáját és kauzalitását írja le az adott pontban, ez a **metrikus tenzor**. Ennek (parciális) deriváltjaiból alkotott bonyolult kifejezés a  $G_{\mu\nu}$  **Einstein-tenzor**, amely tulajdonképpen a téridő görbületét adja meg. Adott ezenkívül a  $T_{\mu\nu}$  tenzor, amely megadja az anyag (pontosabban az energia) sűrűségét, nyomását, és (ha van) az áramlását. Ezeket a mennyiségeket köti össze az **Einstein-egyenlet**:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (7.17)$$

Eszerint a görbületet az anyag okozza, az anyag pedig a létrehozott görbületnek megfelelően mozog – geodetikus, azaz „saját maga szerint” egyenes pályán, egyenletes sebességgel. Ha a téridő „sík” (azaz nem görbült), akkor nem is lehet anyag: ilyenkor a  $T$  tenzor nulla. Konstans anyageloszlású tér vizont az elmélet szerint összehúzódik, ezt tekinthetjük a gravitációs vonzás következményének is – valójában arról van szó, hogy ilyenkor úgy görbül a téridő, hogy a benne történő egyenes vonalú egyenletes mozgás valójában összehúzódást hoz létre. Ugyanakkor kis görbületek (azaz kis gravitációs térerőségek) esetén az elmélet visszaadja a Newton-féle gravitációt, tehát ekkor éppen olyan a tér görbülete, mintha a benne egyenes vonalon egyenletesen mozgó testek a newtoni egyenletnek tennének eleget.

Az Einstein-egyenletek lényege, hogy a téridő görbülete és az anyag úgynevezett energia-impulzus tenzora összekapcsolható egy bonyolult (nemlineáris) parciális differenciálegyenlet-rendszeren keresztül. Az elmélet matematikai megfogalmazása kicsit tehát hasonló a Maxwell-egyenletekéhez: ott az elektromos és a mágneses tér kapcsolódik össze a töltés- és áramsűrűséggel (persze a Maxwell-egyenletek sokkal egyszerűbbek). A Maxwell-egyenletek megoldásai ismertek bizonyos esetekben (gömb alakú töltés tere, elektromágneses hullámok vákuumban satöbbi); az Einstein-egyenleteknek is van néhány ismert megoldása. A későbbiekben ismertetünk ezek közül néhány egyszerűt.

Fontos megemlíteni, hogy az Einstein-egyenletnek van egy bonyolultabb változata, amelyben szerepel az úgynevezett  $\Lambda$  **kozmológiai állandó** is, a téridő görbületét növeli:

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi\gamma}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (7.18)$$

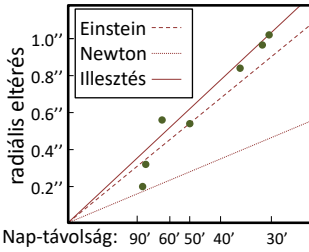
Ez a kozmológiai állandó ekvivalens azzal, mint ha a teljesen üres vákuumnak is lenne (energia-) sűrűsége:

$$\Lambda = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} \rho_{\text{vákuum}}. \quad (7.19)$$

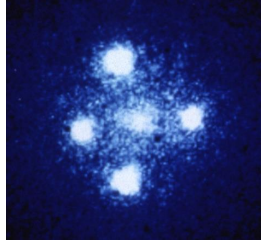
Ha ez a sűrűség pozitív, az tulajdonképpen egyfajta **negatív nyomásként** (azaz összehúzó vonzásként) jelenne meg az Einstein-egyenletek megoldásában. Azaz a pozitív kozmológiai állandót tartalmazó **üres téridő** magától is **tágul**, míg ha anyagot is rakunk bele, akkor az anyag és a kozmológiai állandó energiasűrűségének viszonya adja meg a téridő görbületének időbeli változását. Ekkor elképzelhető, hogy az egyenletesen eloszló anyagot tartalmazó tér is kitágul, „a gravitáció ellenében”. A kozmológia tárgyalása során ennek fokozott jelentősége lesz, ahogy majd később látni fogjuk.

### 7.2.2. Az általános relativitáselmélet bizonyítékai

Az elméletnek **sok előrejelzése helyes**, azaz sok kísérleti bizonyítéka van. Nem a matematikai szépsége, hanem ezek a bizonyítékok teszik elfogadott elméletté – alább



(a) Hét csillag pozíciójának eltérése napfogyatkozáskor, Eddington 1919-ben végzett mérése alapján.



(b) Egy távoli kvazár képe a G2237 + 0305 galaxis torzításában (Hubble űrteleszkóp, 1990. szeptember).



(c) Egy távoli galaxis képe az LRG 3-757 galaxis torzításában (Hubble űrteleszkóp, 2011. december).

7.8. ábra. Az általános relativitáselmélet néhány kísérleti bizonyítéka: Eddington megfigyelése, Einstein-kereszt és Einstein-gyűrű.

lássunk ezek közül néhányat.

- Az elmélet ad egy kicsi, de megfigyelhető mértékű korrekciót a bolygómozgáshoz: a **Merkúr pályája** 100 év alatt 574 szögmásodpercet **elfordul**. Ebből körülbelül 43 szögmásodperc nem magyarázható meg a newtoni mechanikával (a többi bolygó hatásából), de az általános relativitáselmélet ezt helyesen adja meg.
- Megfigyelhető jelenség a **gravitációs idődilatació** is: egy nehéz objektum úgy görbíti meg a téridőt, hogy a közelében lassabban járnak az órák, mint tőle távol. Ezt is figyelembe veszik a GPS-műholdaknál: ezek  $3R_{\text{Föld}}$  magasságban keringenek, és a speciális relativitáselmélet (a gyors mozgásuk) miatt napi 7,4  $\mu\text{s}$ -et késnének az óráik a földiekhez képest. Azonban az általános relativitáselmélet szerint (és a valóságban is) napi 45  $\mu\text{s}$ -et *sietnek* a műholdak órái, mert fent kisebb a gravitációs tér.
- Az idődilataciót a gravitációs vöröseltolódás során is megfigyelhetjük. 1959-ben Pound és Rebka az úgynevezett Mössbauer-effektus segítségével vizsgálta az általános relativitáselmélet ezen következményét. Az effektus lényege, hogy egy gerjesztett atommag által kibocsátott gamma-foton energiája és így frekvenciája rögzített értékű lehet, ha a kibocsátó atommag szilárd kristályrácsban van. Ugyanezen fotont egy másik atom elnyelheti, és akkor pontosan az előző atoménak megfelelő gerjesztett állapotba kerül. Ha azonban a forrás mozog, akkor a Doppler-effektus következtében megváltozik a foton frekvenciája, illetve energiája, így a cél-atommag nem tudja azt elnyelni. Pound és Rebka azt találták, hogy a Földhöz (néhányszor 10 méterrel) közelebbi céltárgy és távolabbi forrás esetén a gamma-sugárzás frekvenciája kicsit megváltozik, ami ellentételezheti a forrás mozgásából fakadó Doppler-hatást. A mérések alapján a gravitáció okozta frekvenciaeltolódás éppen az általános relativitáselmélet jóslatának felel meg.<sup>11</sup> Érdekes megjegyezni, hogy ha nem lenne gravitációs vöröseltolódás, örökmozgót építhetnénk: képzeljünk el egy óriáskereket, amelynek felfelé haladó ágán alapállapotú, míg lefelé haladó ágán gerjesztett atomok haladnak. A legelső ponton a gerjesztett mag kibocsáthatna egy gamma-fotont, amelyet a csúcsponton lévő

<sup>11</sup>Az eredeti kísérlet 10%-os pontosságon belül egyezett meg Einstein jóslatával, Pound és Snider megismételt kísérlete viszont már 1%-on belül.

atom elnyelne. Így zárt körfolyamatunk van – de a lefelé haladó oldali atomok nehezebbek (hiszen gerjesztettek, nagyobb az energiájuk, így a tömegük is, emlékezzünk az  $E = mc^2$  formulára)! Így ez a tömegkülönbség hajthatná a kereket. A gravitációs vöröseltolódás azonban meggátolja ezt: mire a gamma-foton a csúcspontra ér, frekvenciája lecsökken, így a fenti atom nem tudja azt elnyelni.

- Ha kis golyók (például fotonok) összességének képzeljük, akkor a fény a klasszikus newtoni gravitációelmélet szerint is elgörbül gravitációs térben, az  $m$  tömegű vonzócentrum felé gyorsul  $a = \gamma m/r^2$  mértékben. Einstein elméletében ennek oka az, hogy gravitáció által meggörbített térben a fény „görbén”, az úgynevezett **geodetikus vonalon** halad. Az általános relativitáselmélet szerint a fényelhajlás éppen kétszerese a newtoni elmélet szerinti előrejelzésnek. Eddington 1919-ben napfogyatkozásakor megfigyelte ismert, az adott pillanatban a Nap melletti csillagok pozícióját. A látszólagos helyzetük éppen az általános relativitáselmélet előrejelzésének megfelelő mértékben különbözött az éjjel megfigyelt helyzetüktől (lásd 7.8(a). ábra). Ez tette Einstein elméletét világhírűvé.<sup>12</sup>
- A fény görbülete egyéb érdekes jelenségeket hoz létre, az úgynevezett **gravitációs lencsehatás** miatt. Az elmúlt évtizedekben sikerült úgynevezett Einstein-keresztet és Einstein-gyűrűt is megfigyelni: ezeknél egy masszív objektum a mögötte lévő galaxis fényét négyszeresen (kereszt formájában), vagy kör alakban képezi le, lásd a 7.8(b). és a 7.8(c). ábrán.
- Kézenfekvő továbbá, hogy gyorsan mozgó nehéz objektumok úgy görbítsék a teret, hogy abból egyfajta gravitációs hullámzás jöjjön létre. A Földön is (esetleg) érzékelhető gravitációs hullámok biztosan nagyon gyengék, és ilyeneket is csak kataklizmikus csillagászati események (úgynevezett fekete lyukak vagy neutroncsillagok összeolvadása) kelthet. 2015-ben a LIGO kísérlet végre (majdnem 100 évvel az elméleti jóslat után) valóban érzékelt gravitációs hullámokat, az azóta eltelt években pedig további észlelések is történtek. A LIGO együttműködésben az ELTE kutatói is részt vesznek.

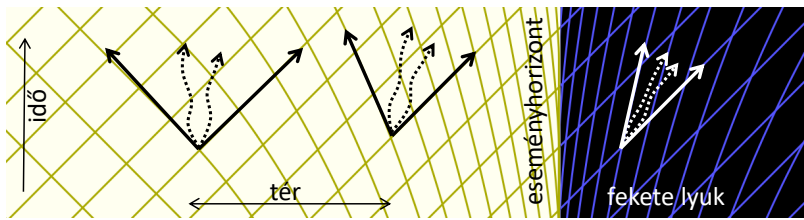
Az úgynevezett fekete lyukak léte szintén megmagyarázható az általános relativitáselmélet segítségével. Mik is azok a fekete lyukak? Az Einstein-egyenletek egyik fontos megoldása az úgynevezett **Schwarzschild-megoldás**, amely egy gömb alakú, töltés nélküli, statikus objektum körül (de csak azon kívül) írja le a gravitációs teret. Ez kitűnően visszaadja a newtoni gravitációt kis erősségű terek esetén. Fontos paramétere a **Schwarzschild-sugár**, ez adja a megoldás skáláját:

$$r_S = \frac{2\gamma M}{c^2}, \quad (7.20)$$

ahol  $M$  az objektum tömege,  $c$  pedig a fénysebesség. Ez a sugár a Föld esetén körülbelül 9 mm, a Nap esetén 3 km. A megoldásnak úgynevezett **szingularitása** van ennél az  $r_S$  távolságnál, de addig nincs gond, amíg ez az objektum anyagán belül van, ott ugyanis eleve nem érvényes a megoldás. Ha azonban az objektum kisebb ennél, akkor ez a szingularitás megjelenik: a belső régió teljesen szeparált lesz a külsőtől, pontosabban semmilyen, a belsőből jövő információ vagy hatás nem érheti a külső részt.<sup>13</sup> A

<sup>12</sup>Amikor Einsteint megkérdezték, hogy mit szolt volna, ha Eddington mérései nem igazolják az elméletét, azt válaszolta, hogy „Sajnáltam volna a jó Lordot. Az elmélet ugyanis helyes.”

<sup>13</sup>A megoldás részletes vizsgálatakor kiderül, hogy a szingularitás nem valódi (csak a rossz koordináta-



7.9. ábra. A téridő egy Schwarzschild-féle fekete lyuk mellett. A vastag nyilak az adott pontból jobbra, illetve balra kibocsátott fényjelek útját mutatják, a szaggatott nyilak pedig tömeges részecskék pályáját. Látható, hogy a görbült téridő miatt az eseményhorizonton belül minden a középpontba zuhan, onnan kifelé semmi sem jöhet.

Schwarzschild-sugárnál van az úgynevezett **eseményhorizont**, ahol olyan erősen görbült a téridő, hogy itt vagy ezen belül semmi sem maradhat konstans távolságra a középponttól (lásd a 7.9. ábrát). Itt olyasmi történik, hogy az időtengely begömbül körbe az objektum körül, tehát erre telik az idő, és mozgás csak  $r_S$ -en belülré lehetséges. Miután semmilyen anyag nem maradhat fix  $0 < r < r_S$  pályán, ezért az  $r_S$ -nél kisebb méretű objektumok anyaga sem maradhat a helyén, ezek az objektumok gravitációsan összezuhannak, és végül minden anyaguk egy pontban gyűlik össze. Még a fény is csak befelé tud menni ide, ezért az ilyen objektumok neve **fekete lyuk**. Egyes csillagok alakulnak át ilyené életük végén, és sok galaxis közepén is szupernehéz fekete lyukak találhatóak.

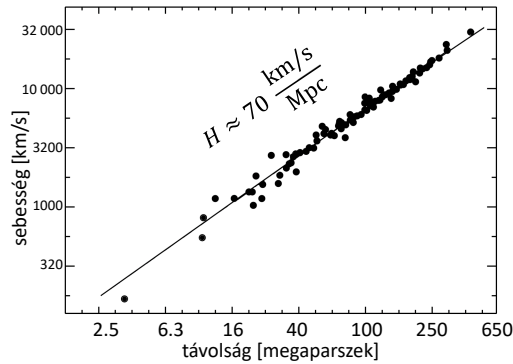
A fekete lyukak megfigyelése nem könnyű, hiszen nem bocsátanak ki fényt.<sup>14</sup> A fekete lyukak megfigyelésének kulcsa az, ahogyan magukba szippantják a maguk körül található anyagot. Ez a folyamat olyan gyors, hogy a beáramlás közben összesűrűsödő anyag intenzív röntgensugárzást bocsát ki. Az így viselkedő objektumok közül a legnagyobbakat kvazároknak nevezzük, ezek galaxisok középpontjában lévő szupernehéz fekete lyukak hatására bocsátják ki sugárzásukat. Kisebb, hasonló objektumok a röntgensugárzó kettősök, amelyek egyik tagja egy „közönséges” csillag, a másik tagja pedig egy kompakt (itt: kisméretű) objektum, neutroncsillag vagy fekete lyuk. Bizonyos tömeg fölött azonban nem létezhetnek neutroncsillagok: az ilyen rendszerek kompakt tagja, amely a másiktól az anyagot elszippantja (és ezáltal a sugárzás létrejön), szinte bizonyosan egy fekete lyuk. Ilyen rendszer például az 1972-ben felfedezett Cygnus X-1, vagy az 1989-ben talált V404 Cygni (mindkettő a Hattyú csillagképben található).

### 7.2.3. A Hubble-törvény és a világegyetem múltja

Egy másik fontos kérdés a gravitációval kapcsolatban, hogy hogyan lehet, hogy az égen látott sok, egymást vonzó csillag és galaxis nem zuhan össze? Talán mert végtelen sok van, ezért minden galaxist egyformán vonz minden irányba a többi? Ha viszont az

választás miatt van), tehát befelé áthaladhatnak részecskék vagy információ. Valódi szingularitás van azonban az objektum közepében,  $r = 0$  esetén. Itt a tér görbülete végtelen, az Einstein-egyenletek ebben az egy pontban nem értelmezettek. Eleinte ezt matematikai furcsaságnak vélték, de ma azt gondoljuk, ez az általános relativitáselmélet fontos jelensége, és fekete lyukaknál éppen ez történik.

<sup>14</sup>Kivéve az úgynevezett Hawking-sugárzást: ekkor egy részecske-antirészecske pár keletkezik a vákuum kvantumfluktuációból, amelynek egyik tagja kifelé, másik tagja befelé halad: ezek nem tudnak később egyesülve megsemmisülni. A fekete lyuk így energiát veszíthet, de ez a sugárzás igen gyenge.



7.10. ábra. 108 Ia típusú szupernóva távolsága és távolodási sebessége. Ezen szupernóvák galaxisai annál gyorsabban távolodnak tőlünk, minél messzebb vannak. A Hubble-állandó nagyjából  $70 \text{ km/s} / \text{Mpc}$ , ahol  $1 \text{ Mpc}$  körülbelül  $3,26$  millió fényév. Ha a tágulási kép oka egy robbanás, akkor az éppen  $1/H$  ideje történt, azaz körülbelül  $14$  milliárd éve. Az ábra Reindl és munkatársai ApJ 624 (2005) 532 cikke alapján készült.

Univerzum végtelen nagy, akkor miért nem látunk mindenhol csillagokat? Erre az a magyarázat lehetséges, hogy a távoliakat eltakarja a csillagközi por. Ebben az esetben azonban a csillagok fénye, ha időtlen idők óta jön felénk, felforrósította volna ezt a csillagközi gázt, amely ugyanúgy világítana. Ez az úgynevezett Olbers-paradoxon<sup>15</sup>, amely szerint a végtelen és statikus Univerzum fénye éjszaka is (nagyon) fényessé kellene hogy tegye az égboltot. Ha viszont nem időtlen idők óta világítanak a csillagok, akkor hogyan és miként kerültek oda, ahol most vannak? A sok kérdésre tulajdonképpen azt a választ adhatjuk, hogy a világegyetem véges idővel ezelőtt született, és folyamatosan tágul. Tehát egyszerűen abból, amit az éjszakai égbolton látunk, kikövetkeztethetjük, hogy a **világegyetem térbeli és időbeli struktúráját** nem tekinthetjük állandónak, annak dinamikáját a **benne lévő anyag határozza meg**. Erre tesz kísérletet az általános relativitáselmélet és az Einstein-egyenletek. Mit mondanak azonban a pontosabb megfigyelések a világegyetem történetéről?

Az Einstein-egyenletnek a Világegyetemre mint egészre való alkalmazása során Georges Lemaître belga pap felvetette, hogy lehetséges, hogy az Univerzum tágul. Edwin Hubble valóban megfigyelte, hogy szinte az összes galaxis távolodik tőlünk, méghozzá minél távolabb van, annál gyorsabban.<sup>16</sup> Ez a **Hubble-törvény**, és a két mennyiséget összekötő konstans a Hubble-állandó (lásd 7.10. ábra). Ez a törvény tulajdonképpen robbanásszerű tágulást ír le, hiszen azért van tőlünk egy galaxis távol, mert gyorsan távolodik. Természetesen itt a látszólagos helyzetről beszélünk, hiszen egy távoli galaxist ott látunk, ahol akkor volt, amikor a most hozzánk érkező fénye elindult. Ha viszont a világegyetem tényleg **robbanásszerűen tágul**, akkor valaha nagyon kicsi lehetett, és egyfajta **ősrobbanásban** keletkezhetett. (Érdekesség, hogy maga az „ősrobbanás” név eredetileg gúnynévként született, az elmélet (kritikusai szerinti) abszurditását jelképe-

<sup>15</sup>A paradoxont valójában már a XVI. században felvetették, de az ezt 1823-ban leíró Heinrich Wilhelm Olbersről nevezték el.

<sup>16</sup>Galaxisok távolságát a bennük felrobbanó, Ia típusú szupernóvák alapján becsülhetjük meg. Ezek abszolút fényessége mindig ugyanannyi, így a relatív fényességükből megkaphatjuk a távolságukat. A sebességet pedig a Doppler-eltolódásból határozhatjuk meg.



zendő.)

A Hubble-állandó alapján azt gondoljuk, hogy a Világegyetem 13,7 **milliárd éve keletkezett**, és azóta folyamatosan tágul. Kezdetben nagyon más részecskék és más anyag töltötte ki a világegyetemet, mint ma, erről részletesebben lásd a 9.15. ábrát. Az atomok 300 ezer év múltán jöttek létre, ez előtt elektromosan töltött plazma töltötte ki a Világegyetemet – ez nem volt átlátszó, a fény nem hatolt át rajta. Ha távcsöveinkkel messzire nézünk, akkor az ekkor keletkezett fényt látjuk. Ez az úgynevezett **kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás** (CMBR), amelynek hőmérsékleti sugárzás jellegű spektruma van, méghozzá 2,7 K hőmérsékletnek megfelelő: ez a világegyetem hőmérséklete lényegében. Ezen háttérsugárzás megfigyelése tulajdonképpen az ősrobbanás egyik fontos bizonyítékának tekinthető.

Ma az anyag a gravitáció miatt csomókba tömörült: a gáz csillagokba, a csillagok galaxisokba, azok pedig galaxishalmazokba szerveződnek, amelyek pedig galaxisklaszterekbe, szuperklaszterekbe.<sup>17</sup> Ezek pedig egyfajta hálós szerkezetet adnak az Univerzumnak, az anyag tehát korántsem egyenletesen tölti ki az űrt. Azonban úgy tűnik, hogy 300 millió fényéves skálán már egyenletes az anyag eloszlása, ilyen skálán már nincsen szerkezete a világegyetemnek.

#### 7.2.4. A világegyetem jövője, kozmológia

Homogén és izotrop anyageloszlás esetén az Einstein-egyenletek egy fontos megoldását kapjuk, ez a **Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker**-megoldás 1922-ből. Ez alapján a világegyetem méretskálájának időfüggésére felírható két közönséges differenciálegyenlet, amely már kiválóan kezelhető. Ezek a **Friedmann-egyenletek**, amelyeket most az érdekesség kedvéért megadunk:

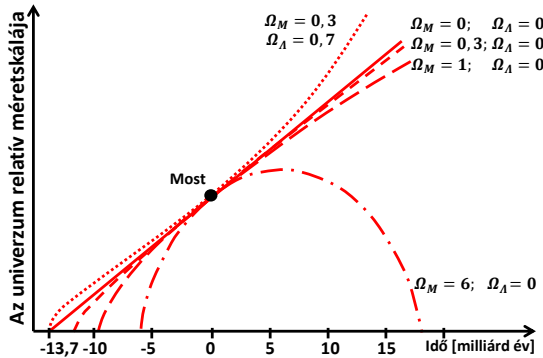
$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi\gamma\rho + \Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (7.21)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi\gamma}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (7.22)$$

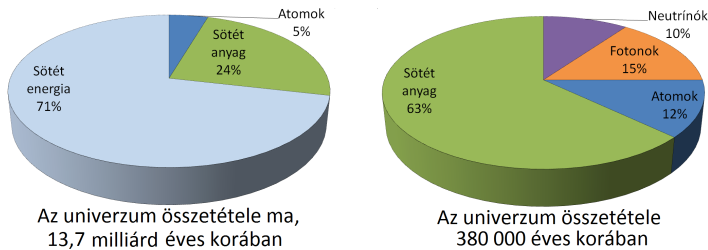
ahol  $a(t)$  a **világegyetem méretskálája**,  $\rho$  az anyag energiasűrűsége,  $\gamma$  a gravitációs állandó,  $c$  a fénysebesség,  $\Lambda$  a kozmológiai állandó, míg  $k$  a megoldás paramétere, amely a téridő görbületét szabályozza:  $k = 1$  esetén a tér négydimenziós gömbfelület alakú,  $k = 0$  esetén sík, míg  $k = -1$  esetén hiperboloid, a görbület nagysága pedig  $k/a$  módon adódik. Itt fontos látni, hogy nem egyszerűen a galaxisok távolodnak egymástól, hanem maga a téridő „szöve” nyúlik meg, azaz a **tér tágul**: ami eredetileg  $d$  távolságra volt, az a téridő tágulása során  $a(t) \cdot d$  távolságra kerül. Ebben a leírásban a Hubble-állandó  $H = \dot{a}/a$  módon írható, hiszen az  $a$  távolságú objektum  $\dot{a}$  sebességgel távolodik tőlünk (pusztán a tér tágulása révén). A görbület előjelét a teljes anyag mennyisége határozza meg: van egy **kritikus sűrűség**, amelynél a tér nem görbült, alatta negatív, felette pozitív görbületű.

Ebben a modellben jól látható tehát, hogy az **anyag lassítja** az Univerzum tágulását, a pozitív **kozmológiai állandó** pedig **gyorsítja**. Ha megfelelően választjuk meg

<sup>17</sup>A Tejútrendszer az 50-60 galaxist tartalmazó, tízmillió fényév átmérőjű Lokális Csoport tagja, többek között az Androméda-galaxissal együtt. A legközelebbi hasonló csoport a 60 millió fényévre lévő Virgo klaszter. Ez és a Lokális Csoport alkotják a százmillió fényév méretű Virgo szuperklasztert. Ez egyike a lokális szuperklasztereknek, amelyek együtt mintegy hálókat, falakat és szálakat alkotnak.



7.11. ábra. A világegyetem tágulása különböző  $\Omega_M$  és  $\Omega_\Lambda$  esetén. Ha  $\Omega_\Lambda > 0$ , akkor egyes szakaszokban gyorsulva tágulás is elképzelhető. Egyébként  $\Omega_M > 1$  esetén az Univerzum össze-roppan, a felett örökké tágul.



7.12. ábra. A világegyetem mai tudásunk szerinti összetétele (az adott komponens által hordozott energia aránya szerint) most, és a születése után 380 000 évvel, amikor a mikrohullámú háttérsugárzás született.

az állandókat, akkor konstans táguló, összeroppanó, gyorsulva táguló és állandó méretű világegyetem is elképzelhető, ahogy a 7.11. ábra mutatja. Az állandó méretű verziót cáfolják a megfigyelések, az előbbieket közül azonban mérésekkel nehéz kiválasztani a helyes verziót.

A Friedmann-egyenletekkel számolva kiderül tehát, hogy az említett kritikus sűrűség felett a világegyetem összeroppan (mint egy feldobott, majd visszazuhanó kő), alatta pedig örökké tágul (mint egy eléggé magasra dobott kő, amely kilép a Föld vonzáskörzetéből). A kritikus sűrűség<sup>18</sup> arányával kifejezve definiáljuk az  $\Omega_M = \rho/\rho_{\text{krit}}$  paramétert. Hasonló paraméter definiálható a kozmológiai állandóból származó  $\rho_{\text{vákuum}}$  sűrűsége, ez  $\Omega_\Lambda = \rho_{\text{vákuum}}/\rho_{\text{krit}}$ . A világegyetem történetének lehetséges alakulásait  $\Omega_M$  és  $\Omega_\Lambda$  függvényében lásd a 7.11. ábrán: bizonyos értékek mellett az Univerzum a jövőben összeroppan, máskor pedig örökké tágul. A megfigyelések szerint az anyag által adott járulék 0,04 körül van, tehát kissé görbült világegyetemre számíthatunk, ugyanakkor a megfigyelések szerint nem az, a világegyetem átlagosan, nagy skálán lényegében görbület nélküli! Ezt a fent említett kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás eloszlásának egyenletességéből tudjuk: nagy görbület ennek jelentős anizotrópiáját okozná, de ez ellentmond a megfigyeléseknek.

<sup>18</sup>Ennek értéke adott  $a$  mellett  $\rho_{\text{krit}} = 3a^2/8\pi\gamma^2$ .

A fenti  $\Omega$  paramétereket kozmológiai modellekkel vizsgálhatjuk, azokat a világegyetem szerkezetével összevetve. Az derül ki, hogy a teljes energiasűrűség minden bizonnyal éppen a kritikusnak felel meg, de csak a körülbelül 5%-a rendes anyag (és ennek is csak tizede van csillagok formájában, a maradék csillagközi por). Az anyagi energia maradékát valamilyen „sötét anyag” adja, ennek aránya 24% körül van. Ennek létét az bizonyítja, hogy a galaxisokban keringő csillagok (mint például a Nap) galaxisközpont körüli keringési sebessége lényegesen nagyobb galaxistömeget feltételez, mint amit valójában látunk (csillagok formájában). Ezt a hiányzó anyagot a csillagközi por sem magyarázhatja meg, ugyanis például a Tejútrendszerben nagyjából ötször annyi anyagra lenne szükség, hogy a Nap 160 km/s keringési sebességét megmagyarázzuk. Hogy mi alkotja a sötét anyagot, azt egyelőre nem tudjuk, csak azt, hogy az a gravitáció szempontjából a közönséges anyaghoz hasonlóan viselkedik. A világegyetem energiájának maradék 71%-át a kozmológiai állandó adja, amelyre egyfajta „sötét energiaként” is tekinthetünk.<sup>19</sup> Ez az energia okozza a világegyetem tágulásának gyorsulását, az anyag összehúzó hatását legyőzve. Miután a kozmológiai állandó időben nem változik, ezért régen ez sokkal kisebb sötét energiát adott, a világegyetem kezdetén alig volt ennek járuléka; a fotonok által képviselt elektromágneses sugárzásnak annál inkább. Mindennek illusztrációjaként lásd a 7.12. ábrát.

### 7.3. Ellenőrző kérdések

1. Mit jelent a speciális relativitáselmélet egyik fő alap gondolata, a relativitás elve?
2. Mi az ikerparadoxon problémafelvetésének lényege?
3. Mi a létraparadoxon feloldása?
4. Hogyan vizualizálható a Lorentz-transzformáció Minkowski-diagramokon?
5. Mi a híres  $E = mc^2$  formula lényege?
6. Mi jelent a Lorentz-faktor?
7. Mit jelent az egyidejűség relativitása?
8. Mit jelent az általános relativitáselmélet kiinduló elve, az ekvivalenciaelv?
9. Mit mond ki az általános relativitáselmélet Einstein-egyenlete?
10. Mi bizonyította elsőként az általános relativitáselméletet?
11. Mit kell figyelembe venni a GPS-műholdak tervezésekor?
12. Mi az az Einstein-gyűrű?
13. Hogyan észlelték a gravitációs hullámokat?
14. Honnan tudjuk a legbiztosabban, hogy a világegyetem robbanásszerűen (a Hubble-törvénynek megfelelően) tágul?
15. Milyen alapvető mennyiségektől függ a világegyetem távoli jövője?

<sup>19</sup> Az ebben a bekezdésben említett számok körülbelüli értékek, az aktuális modellek különféle számokat adnak meg.

## 8. fejezet

# Kvantumfizika: részecskék és hullámok

## 8.1. Atomfizikai bevezető

### 8.1.1. Az atomosság kémiai és makroszkopikus jelei

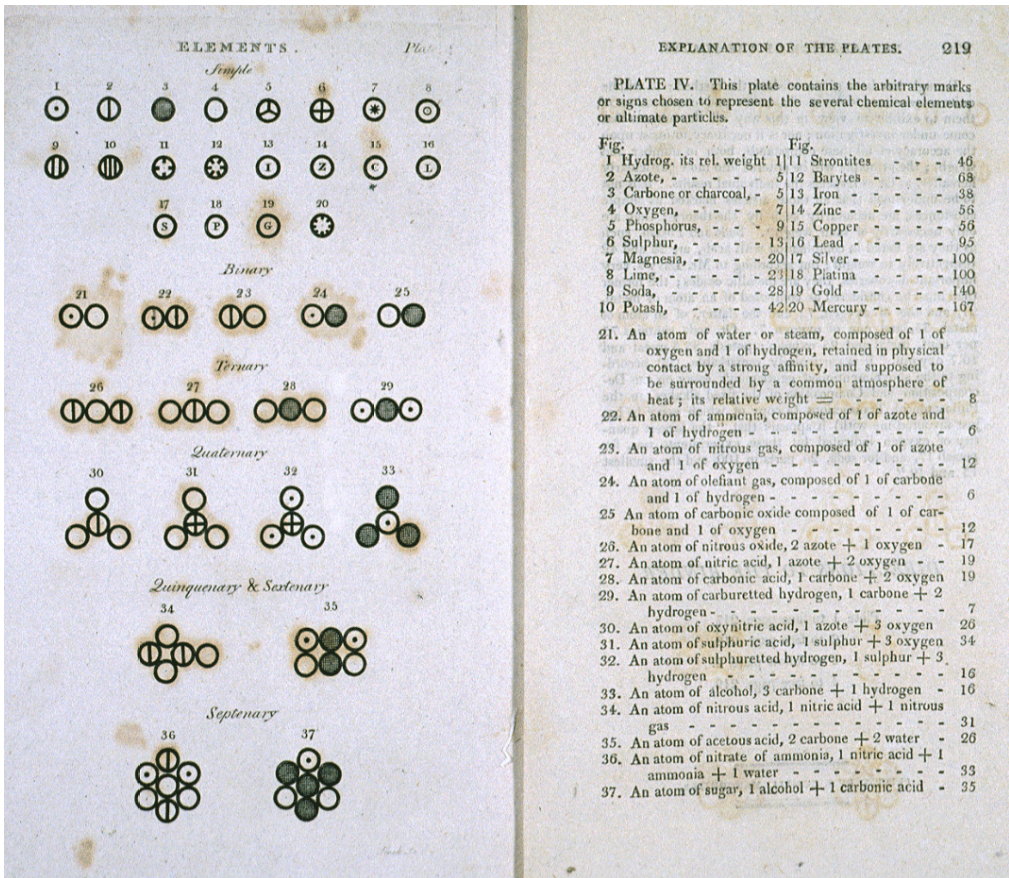
Már az ókori természetfilozófiában is felmerült az az elképzelés, hogy az anyag oszthatatlan alapegységekből áll: az *atom* szó ókori görög nyelven „oszthatatlan”-t jelent. Az ókorban filozófiai elmékedés nyomán jutottak erre, nem tudományos vizsgálódás során. Ebben a szakaszban összefoglaljuk a későbbi atomelmélethez vezető kísérleti eredményeket.

Mihail Lomonoszov eredményeit finomítva Antoine Lavoisier 1789-ben leírta a **tömeg kémiai reakciókban való megmaradását**, azaz azt, hogy a reagensek és a termékek tömege azonos. (Ezt gáznemű reakciótermékek és/vagy reagensek esetén nem volt annyira egyszerű észrevenni, amikor a tömegmérést nehezíti a légkörben ható felhajtóerő.) Proust 1799-ben felállította az **állandó arányok törvényét**, amely szerint bizonyos anyagok létrejöttekor a kiindulási anyagok aránya állandó (ő konkrétan azt figyelte meg, hogy vas-oxid létrejöttekor a szükséges vas és oxigén aránya mindig ugyanannyi). Dalton 1804-ben figyelte meg a **többszörös arányok törvényét**, amely szerint különböző anyagok elegyítésekor, ha többféle anyag is létrejöhet, akkor az egyik anyag mennyiségének rögzítése mellett a másiktól szükséges mennyiségek aránya kis egész számok hányadosaként adódik. Őn és oxigén elegyítésekor például azt figyelte meg, hogy 100 g ónhoz 13,5 g vagy 27 g oxigénre van szükség, azaz a lehetséges oxigénmennyiségek aránya 1:2.

Dalton mindezek alapján megalkotta az atomelméletet, amelynek elemei a 8.1. ábrán láthatóak. Szerinte minden kémiai elem és molekula egyedi atomokból áll, amelyeket nem lehet kémiailag lebontani vagy megváltoztatni. Néhány tévedése volt: nem tudta, hogy létezhet  $H_2$  típusú molekula, illetve azt hitte, bármely két elemből a legegyszerűbb molekula az 1:1 arány képzése során jön létre. A méréseiben is volt jelentős hiba, például az oxigén és a hidrogén tömegarányára 5,5 (majd később 7) értéket kapott, noha a valóságban ez az arány 16.

Az elmélet hibáit Avogadro 1811-es felfedezése segítségével javították. Avogadro szerint azonos térfogatú gázok azonos hőmérsékleten és nyomáson azonos mennyiségű molekulát tartalmaznak (azaz a térfogat nem függ a molekulatömegtől). Ez alapján ki tudta következtetni a kétatomos, de egy elemből álló molekulák létezését. Például két liter hidrogéngáz egy liter oxigéngázzal reagál, és ebből két liter vízgőz lesz, tehát három molekulából ( $2 \times H_2$ ,  $1 \times O_2$ ) kettő lesz ( $2 \times H_2O$ ). Ez alapján pontosabban meg tudta határozni az atomok tömegét, illetve megkülönböztette az elemeket és a molekulákat.

A XIX. század közepétől egyre több tudós fogadta el az atomok létezésének hipotézisét, arra azonban még a század végéig kellett várni, hogy az atomok létezése általánosan elfogadottá váljon. Ostwald és Helm például az energiára gondoltak úgy, mint az elemi építőköre, amelyből minden felépül (komolyabban vehető megfontolásokkal, mint a mai „energiaadó” kuruzslók és társaik...), másrészt sokan (például Mach) úgy gondolták, hogy noha az atomhipotézis didaktikai szempontból hasznos feltételezés, mivel az atomok közvetlenül nem érzékelhetők, ezek léte vagy nem léte tudományosan értelmezhetetlen kérdés. (Ne úgy gondoljunk ezekre vitákra mint „elmaradottakra”, ugyanis ma is hasonló kérdéseket boncolgatnak a tudomány filozófusai: mennyire valóság a mai elemi részecskék, extra dimenziók, kölcsönhatási terek, illetve mennyire csak elméleti



8.1. ábra. Dalton atomelméletének eredeti rajzai (balra) és ezek jelmagyarázata (jobbra), Dalton „A New System of Chemical Philosophy” (R. Bickerstaff, Strand, London, 1808) c. könyvéből. Látható, hogy egyes molekulák felépítésére helyes képet ad (lásd például a 28-as számmal jelzett szén-dioxidot), másokra ellenben helytelen (lásd például a 21-es számmal jelzett hidrogén-oxidot – a vízmolekulában valójában két hidrogénatom van).

konstrukciók ezek, amelyek segítenek leírni a valóságot? Van egyáltalán különbség?)

A XIX. század végére az atomhipotézis számos megfigyelés magyarázatául szolgált, sokak véleménye azonban az volt, hogy a hőelmélet területén már nem alkalmazható sikeresen. Ezzel kapcsolatban a legfontosabb eredményeket a folytonos közegbe helyezett részecskék **Brown-mozgása** szolgáltatta. Ezt (a levegőben szálló porszemcséknek átszűrődő fényben jól látható „táncát”) Lucretius már Kr. e. 60-ban megfigyelte, illetve (koromszemcsék mozgását alkohol felületén) Ingenhousz is 1785-ben. Brown volt az azonban, aki természettudományos módszerekkel fogott a jelenség vizsgálatához. 1827-ben virágpór vízfelszínén történő véletlenszerű mozgását vizsgálta meg: az ő ilyen kutatásaihoz (ami a jelenség első rendszeres természettudományos leírása) kötjük a jelenség felfedezését. Felmerült, hogy ez a mozgás az élet egyfajta megnyilvánulása lenne, Brown ezért apró szervesetlen részecskékkal is megismételte kísérletét, és hasonló eredményekre jutott: az élet mint magyarázat kizárt tehát. A Brown-mozgás (lásd a 8.2(a).

ábra) fontos tulajdonságai:

- független az időtől (nem csillapodik az idővel)
- független a folyadék kémiai összetételétől (kivéve annak folyékonyágát/viszkózitását)
- térben rendezetlen
- nagyobb hőmérsékleten gyorsabb
- nagyobb részecskék esetén lassabb

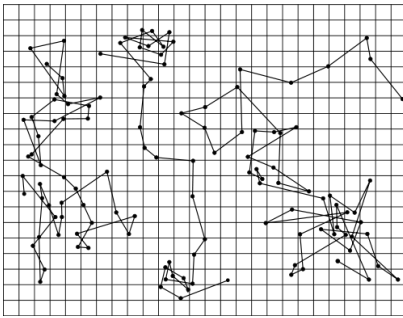
A jelenséget sokan próbálták az atomok létezésére és ezek hőmozgására (azaz az atomok kinetikus elméletére) visszavezetni (Ramsay, Gouy, Exner), azonban cáfolatok is születtek (Nägeli). Einstein és Smoluchowski 1905-ben, illetve 1906-ban adott magyarázata már tudományos konszenzushoz vezetett. Ennek eredménye szerint az adott pontban elszórt szemcsék kezdeti helyüktől való eltávolodásának (pontosabban ennek négyzetének) átlagos értéke a  $t$  idő függvényében

$$\overline{x^2} = \frac{k_B T}{3\pi\eta r} t, \quad (8.1)$$

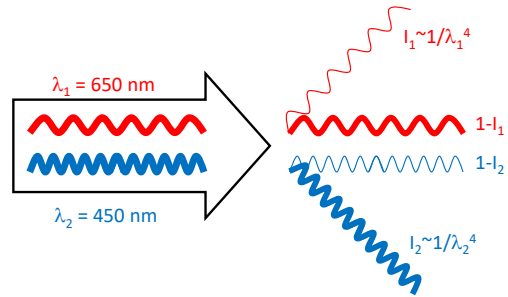
ahol  $k_B$  a Boltzmann-állandó,  $T$  az anyag hőmérséklete,  $\eta$  a viszkozitása,  $r$  pedig a szemcseméret. Ez pontosan a megfigyeléseket támasztja alá – inentől tekinthetjük az atomelméletet elfogadottnak, hiszen ez egy olyan jelenség, amelyben makroszkopikusan (szabad szemmel is láthatóan) megnyilvánul az atomok létezése, véges mérete.

Az atomosság másik érdekes makroszkopikus jele az úgynevezett „**sörétzaj**”, amelyet Schottky figyelt meg 1926-ban. Eszerint nagy frekvenciánál és alacsony hőmérsékletnél egy érdekes (sörétropogás jellegű) zaj jelenik meg áramkörökben. Ennek magyarázata az, hogy a töltéshordozók diszkrétek, az elektromos áram véges számú elemi töltés mozgásából áll össze. Ezek száma fluktuál, és végső soron ez adja a zajt. Például egy mikrohullámú áramkör esetében, amely nanoszekundumos skálán működik, ha az áram 16 nanoamper, akkor 1 ns alatt 100 elektron halad el. A Poisson-eloszlás szerint ennek fluktuációja  $\sqrt{100} = 10$ , azaz a zaj a jel tizedét adja. (Általában is, „beütésszám” jellegű, megszámlolt mennyiségek mérésekor a mérési bizonytalanság a mért érték gyöke, azaz például 10 000 esetén 100, vagy 1600 esetén 40. Erre jó gyakorlati példa az, hogy ha egy véletlenszerűen kiválasztott mintán megszámloljuk a barna hajúak számát, és 100-at kapunk, akkor ennek bizonytalansága, „hibája” 10.).

A sörétzajhoz hasonlóan a gázok kvantáltsága (atomokra osztottsága) **sűrűség-ingadozást** hoz létre az átlagos sűrűség körül. A látható fény hullámhosszának megfelelő méretskálán a levegő sűrűsége nagyjából 0,05%-nyit ingadozik (szintén a Poisson-eloszlásnak megfelelően). Emiatt a közeg lokális törésmutatója is ingadozik, ennek következménye a Rayleigh-féle **fényszórás**. A Napból jövő sugárzás sokféle hullámhosszú komponenst tartalmaz (ezért fehér), és ezek másképpen szóródnak, valamelyiknek nagyobb része halad tovább szóródás nélkül, egy másik komponensnek pedig csak kisebb része. A szórt fény intenzitása konkrétan a hullámhossz inverzének negyedik hatványával arányos,  $I \propto \lambda^{-4}$ . Ez erős hullámhosszfüggést jelent: a kék fény javarészt kiszóródik, a piros pedig nem (lásd a 8.2(b). ábrát). Emiatt van az, hogy az ég kék, a Nap sárga, a naplemente piros. A vörös fény pedig ködös időben is jól látszódik – ezért is praktikus, hogy a féklámpa színe piros. A légkörben megfigyelt ilyen fényszórás tehát az atomok valódi, véges méretű létezésének igen szembeötlő bizonyítéka: ha az atomok csak valamilyen (akár végtelen kicsi) idealizált „építőkövek” lennének, nem lenne sűrűség- és törésmutató-ingadozás, nem lenne ilyen a légkör fényszórása.



(a) A közegbe helyezett szemcsék rendezetlen Brown-mozgása jól magyarázható a hőmozgást végző atomokkal. Az ábra forrása Perrin „Atoms” c. könyve.



(b) A Napból érkező fehér fény az ingadozó sűrűségű levegőben hullámhossztól függő mértékben szóródik: a szórt fényben megnő a „kék” komponens aránya.

8.2. ábra. Ingadozási jelenségek: Brown-mozgás és fényszórás

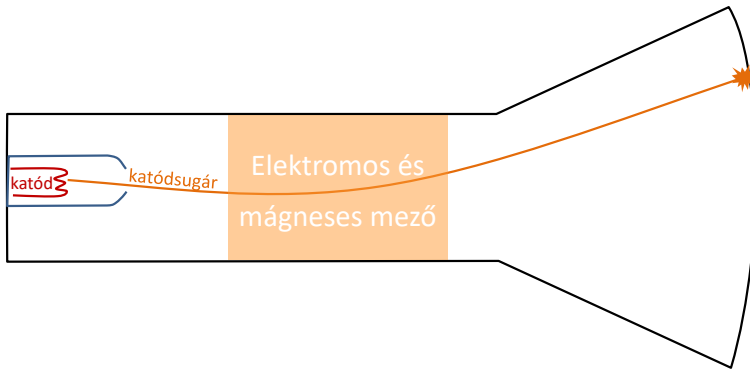
### 8.1.2. Az atomok szerkezete

Az atomok léte a fenti makroszkopikus jelenségek nyomán bizonyítottan tekinthető. Kérdés ugyanakkor, hogy tényleg oszthatatlanok-e ezek az atomok. J. J. Thomson 1897-es, **katódsugarakkal** végzett kísérlete volt az első, amely ezt cáfolni látszott. A Crookes-féle katódsugárcsővel végzett vizsgálatok során (lásd 8.3. ábrát) kiderült, hogy a katódsugarakat, amelyek fényt keltenek a fluoreszcens ernyőn, eltéríti az elektromos és a mágneses tér is. Ez alapján Thomson leszűrte, hogy ezek a sugarak nem a fény egy formáját jelentik, hanem könnyű, **negatív töltésű részecskékből**, „korpuzkulákból” állnak, amelyek a gáz molekuláiból válnak ki. Ez a megfigyelés tehát az atom felosztásának igazolását jelentheti. A részecskéket később nevezték el elektronoknak; a Lorentz- és a Coulomb-erőre vonatkozó törvények felhasználásával Thomson megadta az elektronok töltés/tömeg arányát is. A mérés eredménye szerint az elektron töltés/tömeg aránya három nagyságrenddel kisebb a  $H^+$  ionénál – tehát az atomnál lényegesen kisebb tömegű, de az ionok töltésével összemérhető mértékű töltést hordozó részecskékről van szó.<sup>1</sup> A fentiek alapján Thomson 1904-ben megalkotta a „plum pudding” névvel illetett **első atommodell**t. Ebben az atom egy pozitív töltésű levesből áll, amelyben úsznak a negatív töltésű részecskék (elektronok). Ezt az 1909-es, aranyfóliával végzett szórási kísérlet cáfolta, lásd alább.

Millikan 1913-ban végzett kísérleteiben meg is határozta az elektron töltését (nem csak a töltés és a tömeg arányát). Porlasztott (és a porlasztóban elektromosan töltötté váló) olajcseppekre ható elektromos erőt mérte esési sebességük megfigyelésén keresztül. Azt találta, hogy a cseppek töltése mindig egy  $e = 1,592(2) \cdot 10^{-19}$  C konstans érték egész számú többszöröse. Ennek mai pontos értéke  $1,60217649(4) \cdot 10^{-19}$  C, néhány

<sup>1</sup> A későbbiekben Kaufmann és mások azt találták, hogy nagyon gyors elektronokra a megfigyelt arány változni látszik, mintha a nagy sebességű objektumok „tömege megnőne”. A relativitáselméletben ennek természetes magyarázata adódik, amely (a pontosabb mérések eredményeivel összhangban) azt állítja, hogy a testek impulzusa nem  $p = mv$ , hanem  $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  módon függ a sebességüktől. Erről részletesebben lásd például a 7. fejezetet.



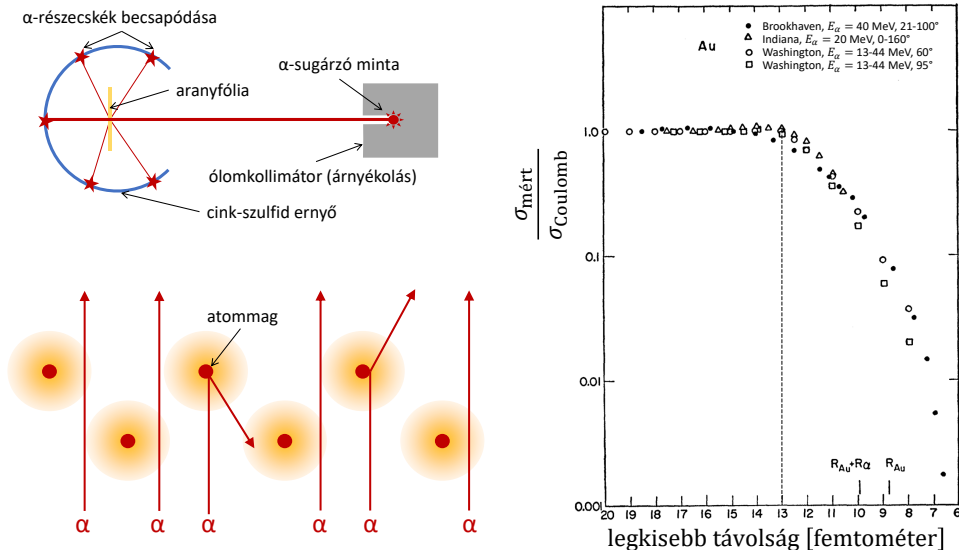


8.3. ábra. A katódsugárcső felépítése. Egy fűtött katódból elektronok lépnek ki, amelyeket a katód és az anód(ok) által létrehozott tér gyorsít. A sugárzást elektromos vagy mágneses mezővel is el lehet téríteni.

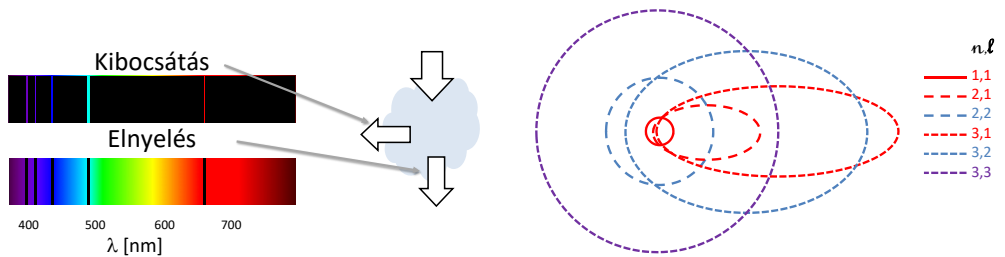
ezreléssel nagyobb Millikan eredeti eredményénél.<sup>2</sup> A megfigyelés úgy magyarázható, hogy az olajcseppek töltése csak ezen  $e$  egész számú többszöröse lehet: kézenfekvő volt ezt a töltést egy darab elektron töltéseként azonosítani. A természetben tehát csak olyan elektromos töltések jelenhetnek meg, amelyek  $e$  egész számú többszörösei,  $e$  az elektron, illetve az atom további építőköveinek a töltése.

Az atomok szerkezetének feltárása érdekében **Rutherford** (Geigerrel és Marsdennel közösen) 1911-ben megmérte az  $\alpha$ -bomlásból származó ( $\alpha$ -) részecskék aranyfólián való szóródásában a szórt részecskék szögeloszlását. A Thomson-féle atommodell alapján túlnyomórészt kisszögű szórást vártak, ezzel szemben a részecskék jó része szóródás nélkül továbbment, kis részük erőteljesen eltérült (lásd a 8.4. ábrán). A megfigyelések összességét egyfajta pontszerű maggal lehetett magyarázni, ahol az  $\alpha$ -részecske eltérülését a centrális erőterben való szóródásra vonatkozó egyenletekkel lehet kiszámolni. Nagy eltérülési szögekre (azaz visszaszóródásra) eltérést találhatunk ettől a formulától: a maghoz nagyon közel menő  $\alpha$ -részecske már nem „látja” azt pontszerűnek. Az a távolság, ahol ez az eltérés megjelenik, a mag méretét (a mag és az  $\alpha$ -részecske sugarának összegét, vagy még pontosabban: az elektromostól különböző fajta kölcsönhatásuk hatótávolságát) mutatja. Leszűrhető például, hogy az aranyatommag sugara 7 femtométer (fm, fermi), lásd a 8.4. ábrán. Az atom közepén tehát egy roppant kicsi (az atom méretéhez képest is körülbelül tízezred akkora sugarú) mag található, amely azonban az atom tömegének túlnyomó többségét hordozza. Az elektronok ezen mag körül helyezkednek el. Mindjárt adódik a feltételezés, hogy az **elektronok** bolygószerűen **keringenek a mag körül**, és az energiát egyrészt a Coulomb-kölcsönhatás potenciálja, másrészt a keringésből adódó mozgási energia adja. Felmerül azonban a kérdés, hogy hogyan igazolhatnánk

<sup>2</sup> Ezen mérés kapcsán érdemes felidézni Feynman kommentárját (lásd *Surely You're Joking, Mr. Feynman!*): „Millikan megmérte az elektron töltését olajcseppek zuhanását vizsgáló kísérletében, és eredménye enyhén pontatlan volt. ... Érdekes megnézni az elektron töltésére vonatkozó, Millikant követő méréseket. Ha az idő függvényében ábrázoljuk ezeket, látjuk, hogy az első kicsit nagyobb Millikan értékénél, a következő még nagyobb, és így tovább, míg egy bizonyos, Millikan értékénél nagyobb számnál meg nem állapodnak. Miért nem mérték egyből helyesen az értéket? ... Amikor a kísérlet vezetője Millikanénél lényegesen nagyobb számot kapott, azt gondolta, biztos valamit rosszul csinált – és megkereste ennek okát. Ha Millikanhez közeli értéket talált, akkor nem olyan alaposan nézte át a kísérletet.”



8.4. ábra. A Rutherford-féle kísérlet. Az  $\alpha$ -részecskék jó része eltérülés nélkül halad tovább, az eltérülés valószínűségét tökéletesen visszaadja a pontszerű töltésen való szóródás elmélete. A maghoz nagyon közelre jutó (azaz nagyobb energiájú)  $\alpha$ -részecskék esetében mutatkozó eltérést az aranyatommag és az  $\alpha$ -részecske nem nulla mérete adja. Ebből az eltérésből a magerő hatótávolsága is megbecsülhető: tulajdonképpen az ábrán az egytől való eltérés kezdetét jelölő 13 fm-es érték az aranyatommag és az  $\alpha$ -részecske sugarának (körülbelül 10 fm), illetve a kölcsönhatás körülbelül 3 fm-es hatótávolságának az összegéből adódik. A jobb oldali ábra forrása Wegner, Eisberg és Igo Phys. Rev. 99 (1955) 825 cikke.



(a) A  $H_2$  kibocsátási spektruma (fent) és elnyelési spektruma (lent). Látható, hogy a megjelenő, illetve eltűnő „vonalak” helye azonos, ami az atomi energiaszintek létére utal.

(b) A hidrogénatom történelmi Bohr-Sommerfeld modelljének elektronpályái, különféle  $n$  energia és perdület-quantumszámokkal ( $n$ , illetve  $l$ ).

8.5. ábra. Az atomok szerkezetére utaló spektroszkópai megfigyelések (balra), illetve az atomok egy egyszerű modellje (jobbra).

ezt a képet, illetve az elektronszerkezetet hogyan vizsgálhatjuk.

Az atomok szerkezetét a legkönnyebben az atomos gázok elektromágneses sugárzására (fényre) adott válaszában keresztül elemezhetjük. Ez az **elnyelési spektrum** (amelyet úgy kapunk meg, hogy a bejövő elektromágneses sugárzásból „eltűnt” komponenseket számba vesszük) és a **kibocsátási spektrum** (azon komponensek, azaz színeképvonalak összessége, amelyet a gerjesztett atom, például egy forró gáz bocsát ki) mérését jelenti. Elsőként Fraunhofer vizsgálta 1814-ben a Nap sugárzásában megjelenő „vonalakat”: 574-et talált. Később többféle anyagot vizsgálva kiderült, hogy adott gáz esetén a kibocsátási (emissziós) és elnyelési (abszorpciós) vonalak mindig ugyanott jelennek meg (lásd a 8.5(a). ábrát). Az egyatomos hidrogén spektrumának elemzése során kiderült, hogy a vonalak

$$f_0 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (8.2)$$

szerint rendeződnek, ahol  $f_0$  egy fix frekvencia,  $n$  és  $m$  pedig egész számok. Ahogy majd tanulni fogjuk, a fény frekvenciája közvetlenül összefügg fotonjainak energiájával, az  $f$  frekvenciájú fény  $E = hf$  energiájú fotonokból áll. Tehát hidrogénatom  $E_0/n^2$  energiával bírhat, ahol  $E_0 = hf_0$ , és két ilyen energiaszint közötti átmenet során fényt nyel el vagy bocsát ki. Az a kép alakult tehát ki, hogy az atommag körüli elektronok bizonyos diszkrét energiájú pályákon keringhetnek, a fény elnyelése és kibocsátása pedig ezen **pályák közötti átmenetnek**, és az ezek közötti energiakülönbségnek felel meg. Ugyanakkor kérdés, hogy az így körpályán mozgó (és folyamatosan gyorsuló) elektronok miért nem sugároznak? Továbbá miért pont ilyen energiájú pályák képzelhetőek el?

**Bohr** erre a kérdésre válaszként egy konzisztens modellt épített fel, alapvetően a **bolygómozgás mintájára**. A bolygómozgás klasszikus egyenleteihez hozzátett egy plusz feltevést (posztulátumot), amely a lehetséges energiák kiválasztását („kvantálását”) volt hivatott magyarázni: eszerint az elektronok **perdülete** csak  $\hbar$  egész számú többszörse,  $L = mvr = pr = n\hbar$  lehet, és **az ilyen pályákon nincsen** gyorsulásból fakadó **sugárzás**. A posztulátum (noha teljesen idegen az addig ismert fizikai törvényektől) jó eredményre vezet! Az **energiaszinteket** abból lehet kiszámolni, hogy a  $Ze$

töltésű mag és az  $e$  töltésű elektron között ható Coulomb-vonzás éppen az elektront a pályáján tartó centripetális erő, azaz

$$k \frac{Ze^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = \frac{p^2}{mr}, \quad \text{innen}$$

$$p^2 r^2 = kZe^2 mr = n^2 \hbar^2,$$

az utolsó egyenlőség alapján pedig az  $n$ -edik pálya sugara

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{kZe^2 m}, \quad (8.3)$$

a hozzá tartozó sebesség pedig

$$v_n = \frac{kZe^2}{n\hbar}. \quad (8.4)$$

Az ehhez tartozó energiaszint

$$E_n = \frac{mv^2}{2} - \frac{kZe^2}{r}, \quad \text{azaz} \quad (8.5)$$

$$E_n = \frac{mk^2 Z^2 e^4}{2n^2 \hbar^2} - \frac{mk^2 Z^2 e^4}{n^2 \hbar^2} = -\frac{1}{n^2} \frac{mk^2 Z^2 e^4}{2\hbar^2}. \quad (8.6)$$

Az átmeneti energiaszintek  $1/n^2$ -tel leírható rendszere így tehát kiválóan magyarázható!

Nem világos azonban, hogy mi a posztulátum magyarázata, miért ne lehetne az elektron perdülete tetszőleges érték, vagy miért nem sugároz az elektron az  $L = n\hbar$  perdületű pályákon. További gond, hogy más kísérletek szerint nulla perdületű pályák is lehetségesek – ez ebben a modellben értelmezhetetlen. **Sommerfeld** javítása szerint azonos ( $n$  kvantumszámhoz tartozó) energia mellett ellipszispályákat feltételezve többféle perdület is elképzelhető, az  $E_n$  energiájú ( $n$ -edik) energiaszinthez  $L = l\hbar$  nagyságú perdületek tartozhatnak. Itt  $l$  egy  $0$  és  $n-1$  közötti egész szám, a perdületre vonatkozó kvantumszám, amely az ellipszis lapultságát jellemzi. Az  $l = 0$  esetben nulla a perdület, ez a pálya egy szakaszként (nulla vastagságú ellipszisként) képzelhető el, amelyen oda-vissza mozog az elektron. Ezt kezdetben Sommerfeld elvetette, helyette  $l = 1, \dots, n$  pályákat írt le, ezt illusztrálja a 8.5(b). ábra. Később azonban kiderült, hogy az  $l = 0$  pálya megvalósul, ezt azonban igazán jól már csak a rendes kvantummechanikai modell, a Schrödinger-féle modell tudja leírni.<sup>3</sup> A Bohr–Sommerfeld modell (és hasonlóan a Bohr-modell) tehát, bár hidrogénatom esetében helyes eredményre vezet, és megmagyarázza a megfigyelt spektrumot, a háttérben lévő posztulátum nem jó megalapozottsága miatt nehezen értelmezhető. A következő, kvantummechanikáról szóló fejezetekben ugyanakkor valamivel közelebb kerülünk majd a hidrogénatom szerkezetének megértéséhez. Lássuk azonban előtte, hogy az adott energiájú atomok perdületére milyen kísérleteket végeztek, és igazolták-e ezek a Bohr–Sommerfeld-modell.

<sup>3</sup> További javításként Sommerfeld azt adta hozzá a modellhez, hogy a pályák dőlése is kvantált, azaz csak bizonyos irányú perdületek képzelhetőek el – ugyanis a kísérletek erre utaltak, ahogy azt később látni fogjuk.

### 8.1.3. A perdület iránykvantálása

A keringő elektron  $L$  perdületéhez klasszikusan  $\mu$  **mágneses momentum** tartozik, a körpályán mozgó  $e$  töltésű,  $m$  tömegű részecske mágneses momentuma ugyanis

$$\mu = \frac{eL}{2m}, \quad (8.7)$$

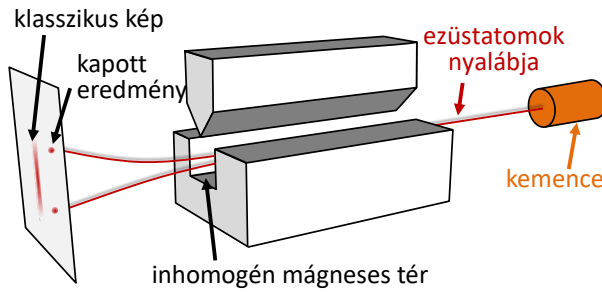
azaz a mágneses momentum arányos a perdülettel, és vektorként azonos irányba mutatnak. Mágneses térben az optimális elrendeződés (a mozgó töltésekre ható Lorentz-erő miatt) az, ha egy köráramon (amilyen a keringő elektron) éppen merőlegesen megy át a mágneses tér ( $B$ ). Ha nem így van, akkor forgatónyomaték hat a köráramra (mágneses dipólusra), még hozzá  $M = \mu \times B$  (ahol a mágneses momentum és tér között vektoriális szorzat szerepel). A térre nem merőleges köráram (potenciális) energiája  $E = -\mu \cdot B$  (itt skaláris szorzat van). Azt gondoljuk tehát, hogy a keringő elektronokat tartalmazó atom mágneses dipólusként viselkedik, és az atomok elektronjainak perdülete és mágneses momentuma okozza az anyagok mágnesességét.

Ez alapján végezte el **Stern és Gerlach** 1922-ben híres kísérletét (lásd 8.6. ábra). Az alapgondolat az volt, hogy atomnyalábot mágneses téren átvéve az atomok a mágneses momentumuknak (másképpen: a perdületüknek) megfelelően térülnek el, pontosabban attól függően, hogy a mágneses momentumuk milyen irányba mutat. **Klasszikusan** a perdület **bármilyen irányba** mutathat, a Sommerfeld-féle **kvantálás** szerint a perdület viszont nem állhat akármilyen irányba, csak bizonyos kvantált értékek képzelhetőek el. Másképpen: az  $L$  perdület  $L_z$  komponense csak néhány értéket vehet fel  $|L|$  és  $-|L|$  között, a  $\mu$  mágneses momentum  $\mu_z$  komponense pedig  $|\mu|$  és  $-|\mu|$  között. Ezért kívánták vizsgálni, hogy milyen eltérések valósulnak meg, azaz a perdület iránya tényleg kvantált-e. Otto Stern 1921-ben ezt írja: „ha sikerül végrehajtani, a kísérlet eredményeként egyértelműen dönthetünk a klasszikus és a kvantumelméleti kép között”.

Az ezüstatomokból álló nyalábbal végzett kísérletben a fotoemulziós lemezen **két komponens**t láttak, éppen a két szélsőértéknek megfelelően (de például héliummal végezve a kísérletet, a nyaláb egyáltalán nem térül el, a hidrogénatomok nyalábja viszont két komponensre bomlik, nitrogén négyre, oxigén ötre). A kísérlet eredménye szerint tehát nem állhat akármilyen irányba a mágneses momentum (és így a perdület). Tetszőleges atom esetén igaznak bizonyult, hogy a kísérletben a beütési helyek távolsága a fotoemulziós lemezen (azaz: a mágneses térben való eltérések különbsége) állandó, és szimmetrikus a középvonalra, intenzitásuk pedig azonos. Wolfgang Pauli 1922-ben így foglalja össze az eredményt Gerlachnak szóló levelében: „Remélhetőleg most már a hitetlenkedő Stern is meggyőzhető az iránykvantálásról”.<sup>4</sup>

A Sommerfeld-féle eredeti iránykvantálási gondolaton túllépve a Stern–Gerlach-kísérlet helyes magyarázata az, hogy ha a perdület értéke  $l\hbar$ , akkor  $2l + 1$  lehetőség van  $l\hbar$  és  $-l\hbar$  között. Viszont ekkor nem világos, hogy hogyan bomolhat bármely nyaláb két (vagy akármilyen páros számú) részre. Felmerült egy még alapvetőbb probléma: az alapállapotú hidrogén esetében az elektron az  $n = 1$  pályán van, és az ehhez tartozó

<sup>4</sup> Érdekes megjegyezni, hogy az előzőre merőleges mágneses térrel a nyaláb tovább bontható, de ha egy  $z$ , majd egy  $x$  irányú felbontás után megint egy  $z$  irányú felbontást vizsgálunk (mindig csak az egyik komponensre továbbbontva), akkor megint felbomlik a nyaláb, ez mutatva, hogy nem szelekció történik, hanem megváltozik az atomok állapota a „mérés” során. Ennek az az oka, hogy két vetületet nem lehet *egyszerre* pontosan meghatározni, ezekre hasonló határozatlansági reláció vonatkozik, mint amilyen a helyre és az impulzusra.



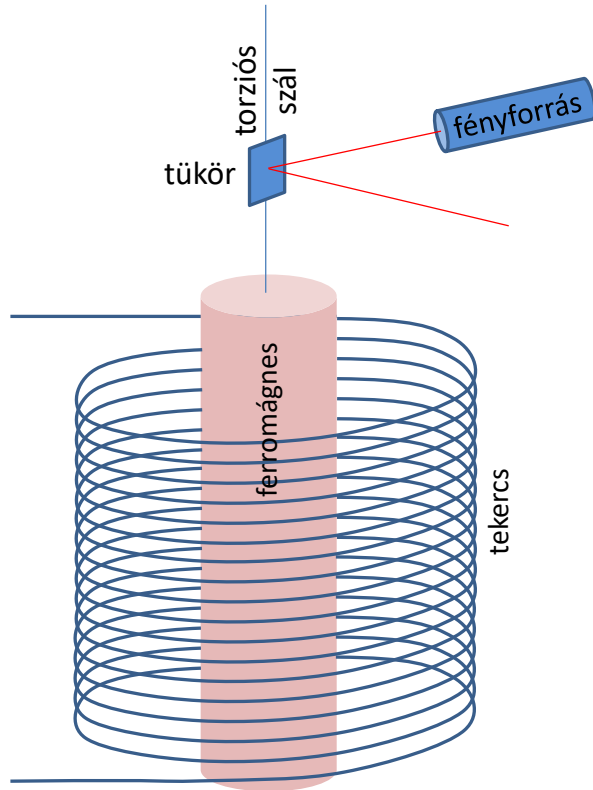
8.6. ábra. A Stern–Gerlach-kísérlet. Atomnyalábot (inhomogén) mágneses téren átvezetve a mágneses momentumuk irányától függően térülnek el az egyes atomok. Ha tetszőleges irányú mágneses momentum lehetséges, akkor emiatt egy foltot tapasztalunk, míg ha az irány kvantált, akkor néhány diszkrét vonalat. Az eredeti kísérletben ezüstnyalábbal dolgoztak, és két vonalat tapasztaltak.

perdület 0 ( $n = 1$ -hez csak  $l = 0$  tartozhat), tehát a hidrogénatomok nyalábjának egyáltalán nem kellene eltérülnie. Eszerint az iránykvantálás képe nem teljesen helyes, de a perdület és a mágneses momentum kvantálása a kísérlet alapján tény.

#### 8.1.4. A spin

Magyarázatra szorult tehát a páros számú nyalábra hasadás a Stern–Gerlach-kísérletben, azon belül a hidrogénnyaláb kettéhasadása. Itt egy elektron van ugyanis, amely a nulla perdületű pályán van, mégis van mágneses momentuma. Ezt csak úgy magyarázhatjuk, hogy az elektron a pályától függetlenül rendelkezik egyfajta „belső” perdülettel, amelyet **sajátperdületnek**, **spinnek** neveztek el. A spin (pálya)perdülethez hasonló tulajdonság, de attól független. Az elektron sajátperdülete mindig  $\hbar/2$ , és tetszőleges irányú komponense  $\pm\hbar/2$  lehet. Az ehhez tartozó mágneses momentum is így viselkedik, ezért bomlik a hidrogénatom nyalábja éppen két részre.

Az **Einstein–de Haas-kísérlet** azt vizsgálta, hogy mi a kapcsolat az elektron mágneses momentuma és perdülete között. Einstein, miután 1914-ben Berlinbe érkezett (a Birodalmi Fizikai és Technikai Intézetben kezdett dolgozni), kollégájával, a holland de Haasszal dolgozta ki a következő ötletet. A ferromágneses anyag mágnességét az atomok mágneses momentuma hordozza, ezt viszont a perdület okozza. Ha a külső mágneses tér (például a test köré tekert tekercs által létrehozott tér) segítségével a mágnességet megfordítjuk, akkor egyúttal a perdület iránya is megfordul. Ezt viszont megfigyelhetjük, a perdületmegmaradás miatt a mágnes teljes perdülete nem változhat meg, így elkezd forogni. A kísérlet során (lásd a 8.7. ábra) ferromágneszt függesztettek fel vékony torziós szárla, amelyre tükröt erősítettek, hogy a forgását (a tükrökép elmozdulása alapján) könnyű legyen megfigyelni. A ferromágnesre tekercset csévéltek, és az ebben folyó árammal állították be az atomok mágneses momentumát, és ezzel perdületét. A mágneses tér változtatásakor valóban elfordul a henger, tehát a  $\mu$  mágneses momentum és az  $S$  perdület tényleg összekapcsolható. Ugyanakkor a kísérletben  $\mu = eS/m$  adódik, azaz kétszer akkora a mágneses momentum, mint a klasszikus perdü-



8.7. ábra. Az Einstein–de Haas-kísérlet. Ferromágnesre függesztünk fel vékony torziós szálra, a ferromágnesre tekercest csévélünk, és az ebben folyó árammal módosíthatjuk a mágnes atomjainak mágneses momentumát, és ezzel perdületét. A perdületmegmaradás miatt viszont ekkor elfordul a ferromágnes, ha a mágneses momentum és a perdület tényleg ugyanabból a jelenségből fakad.

letkép alapján (lásd a fenti (8.7) egyenletet).<sup>5</sup> Ezt a relativisztikus kvantummechanika pontosan visszaadja. Később kiderült, hogy a faktor nem egzaktul kettő, van egy ezredrésnyi eltérés. A pontos érték a kvantum-elektrodinamika elméletéből tizenkét jegy pontossággal megkapható; ez a ma ismert egyik legkiválóbb elméleti leírása bárminek is. Az ezt okozó sajátperdületet spinnek nevezzük.

Minden részecske esetén értelmezzük a spin fogalmát, amely  $\hbar/2$  egész számú többszöröse lehet. Ezen belül megkülönböztetünk feles és egész spinű részecskéket, előbbieket **fermionnak**, utóbbiakat **bozonnak** hívjuk, és érdekes módon fundamentálisan más tulajdonságaik vannak. Az elektron, proton, neutron, illetve az őket felépítő kvarkok is  $\hbar/2$  spinűek, az eleminek tekintett részecskék közül csak a kölcsönhatást közvetítő részecskéknek (foton, gluon) egész a spinje, ahogy az később a 9.2. szakaszban is előkerül. Az összetett részecskék (atommagok, atomok, molekulák) spinje is fontos, de ez gerjesztéssel változhat. Az alfa-részecske spinje 0, gerjesztett atommagoké nagy, akár  $80\hbar$  is lehet.

## 8.2. A kvantumfizika elemei

### 8.2.1. A kvantumfizika első jelei: a fény kettős természete

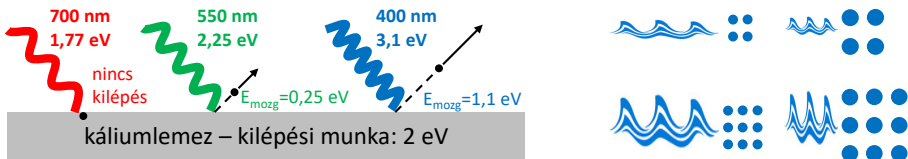
Fresnel és Young interferenciakísérletei igazolták, hogy a fény hullám (lásd 7.1.2. alfejezetet). Ugyanakkor a XIX. század végén több kísérlet is olyan eredménnyel zárult, amely nem egyeztethető össze ezzel a képpel.

Becquerel 1839-es felfedezése, a **fotovoltaikus hatás** irányította a figyelmet a fény és az elektromosság kapcsolatára. (A fotovoltaikus effektus során fény hatására a vezetési sávok között mozognak az elektronok; így működnek ma a napelemek.) A **fotoelektromos jelenséget** Hertz fedezte fel 1887-ben, ennek során fémből **elektronok lépnek ki fény hatására**. (Érdekesség, hogy a jelenséget véletlenül fedezte fel. Az üvegablakon átjövő napfényből az üveg kiszűrte az UV komponenst, ami pedig a legalkalmasabb lenne az elektronok kiütésére. Kvarcüvegre cserélve az ablakot már megfigyelte a kilépő elektronokat.) Lénárd Fülöp 1902-ben egy hasonló jelenséget figyelt meg: hogy UV fény hatására gázok ionizálódnak. A kísérletek eredményeként azt kapjuk, hogy a fény hatására **kilépő elektronok száma a fény intenzitásával arányos, és nem függ a frekvenciától**. Van viszont egy **legkisebb frekvencia**, amely alatt nem lépnek ki elektronok, bármilyen nagy is a fény intenzitása. Ez a jelenség nem értelmezhető úgy, hogy a fényt elektromágneses hullámnak képzeljük: hullámok esetén azok nagysága határozná meg, hogy kilépnek-e az elektronok, és a hullámok időegységenkénti számától (azaz a frekvenciától) függene az, hogy hány elektron lép ki. A megfigyelések ettől a várakozástól tehát teljesen eltérő eredményt mutattak.

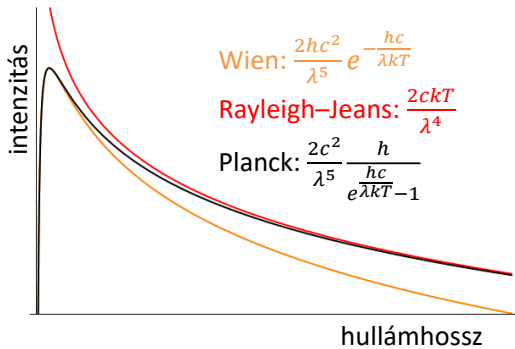
A fotoeffektusnál megfigyelt jelenségeket végül Einstein magyarázta meg 1906-ban: a fény a terjedése során kis adagok (kvantumok) formájában van jelen, az egyes kvantumok energiája  $hf$ , ami csak a frekvenciától függ. Az ilyen fényadagokat nevezték el **fotonoknak**. Az intenzitás a fotonok számát jelenti! Ha  $W$  az elektron kilökéséhez szükséges munka (ez leginkább a fényvel „bombázott” fémfelület anyagi összetételétől függ), akkor már értjük, hogy  $E_{\text{elektron}} = hf - W$ , avagy  $hf = E_{\text{elektron}} + W$ . Ha a

<sup>5</sup> Pontosabban: bevezetünk egy  $g$  giromágneses faktort, amellyel  $\mu = geS/m$ , és  $g = 2$  adódik.

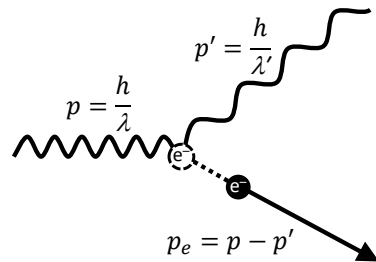




(a) Fotoeffektus során azt tapasztaljuk, hogy az elektron fényvel történő kilökéséhez bizonyos minimális frekvenciára van szükség (másképp: bizonyos hullámhossz felett nem lépnek ki elektronok). Ez éles ellentétben van a klasszikus fizikai intuíciónkkal: a hullám „nagysága” (amplitúdója) nem számít, csak a hullámhossza. A magyarázat szerint a hullámok amplitúdója a fénykvantumok (fotonok, az ábrán kék teli körrel szimbolizálva) számának felel meg, míg a kvantumok nagysága a hullám frekvenciájától függ. Az ábra azonos a 6.4. ábrával.



(b) A Planck-törvény



(c) Compton-effektus

8.8. ábra. A fény kettős természetéről árulkodó jelenségek: fotoeffektus, feketetest-sugárzás és Compton-effektus.

foton energiája elég nagy (azaz a frekvenciája elég nagy, vagyis a hullámhossza elég kicsi), akkor egyrészt tehát kilöki az elektront, másrészt, mivel ilyenkor az elektron a foton energiáját teljesen elnyeli, még maradhat is energia, amely az elektron mozgási energiájává alakul. Illusztrációnak lásd a 8.8(a). ábrát.

Nagyon fontos megfigyelés volt a hőmérsékleti sugárzás spektrumának megmérése, majd elméleti leírása (Max Planck, 1900). Ezt a görbealakot ma Planck-görbének nevezzük. A melegített testek hősugárzást bocsátanak ki: ez elektromágneses sugárzás, lehet infravörös, látható fény, ultraibolya is; általában pedig különböző frekvenciákon különböző intenzitású. Ilyen „spektrum” tehát tulajdonképpen például a vörösen izzó vasnak, a lámpa izzószálának, vagy akár a Nap fényének *színe*. A hőmérsékleti sugárzás kis hullámhosszakra vonatkozó részét Wien 1896-ban meg tudta magyarázni, a nagy hullámhosszú részt pedig Rayleigh 1900-ban (illetve Jeans segítségével pontosabban 1905-ben). A két összefüggést Planck tudta „összeolvasztani” (lásd a 8.8(b). ábrát), azaz a teljes hullámhossztartományt lefedően helyes matematikai leírást adni. A magyarázathoz fel kellett tennie, hogy az adott hullámhosszú elektromágneses sugárzás energiája csak  $hc/\lambda = hf$  adagokban (kvantumokban) jelenhet meg vagy tűnhet el. (Itt  $h$  a Planck-állandó,  $c$  a fénysebesség,  $\lambda$  a sugárzás (fény) hullámhossza,  $f$  a frekvenciája.)

Az interferencia jelensége tehát a hullámképben értelmezhető, míg a fotoeffektus és a Planck-törvény a részecskeképben. Melyik vajon a helyes? A fotonhipotézis végső megerősítését a **Compton-effektus** adta. Compton 1922-ben figyelte meg röntgensugarak szóródását paraffinon. A klasszikus elektrodinamika szerint a bejövő elektromágneses hullám hatására a töltés gyorsul, és (dipól)sugárzást bocsát ki, amelynek eloszlása az előre és a hátra irányban azonos (az elektromos dipólus „elfelejti”, hogy honnan jött a gerjesztés). Továbbá a dipólsugárzás frekvenciája azonos a gerjesztő sugárzás frekvenciájával. Compton azonban azt látta, hogy a szórt sugárzásban nagyobb hullámhosszú komponensek jelennek meg, és a szögeloszlás is eltér a fenti várakozástól, aszimmetria jelenik meg az előreszórt és hátraszórt komponensek között. A **hullámhossz-módosulás** magyarázata a **részecskeképben** (fotonképben) egyszerűen belátható. Bejön egy  $p = h/\lambda$  impulzusú foton, és kimegy  $p' = h/\lambda'$  impulzussal,  $\theta$  szöggel jellemzett irányba szóródva, miközben átadott a kettő különbségének megfelelő impulzust az elektronnak, és az energiájából is adott át az elektronnak (lásd 8.8(c). ábra). Az energia- és az impulzusmegmaradást felírva némi egyszerű számolással kiadódik a  $\Delta\lambda$  hullámhossz-módosulás:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta). \quad (8.8)$$

A kijövő fotonok eloszlását a kvantummechanika adja meg végül helyesen, az úgynevezett Klein-Nishina formulának megfelelően, ahol alacsony frekvenciák esetén az eloszlás lényegében szimmetrikus 90 fokra (ahogyan a klasszikus dipólsugárzás képletei szerint várható lenne), míg egyre nagyobb frekvenciáknál (azaz: fotonenergiáknál) egyre nagyobb aszimmetria jelenik meg. Mindez mutatja, hogy **a fényvel részecskeként is kell számolni!**

Ugyanakkor a hullámképet sem lehet „számúzni”. A legmeglepőbb talán az, hogy a Jánossy Lajos és Náray Zsolt által az 50-es években elvégzett Michelson-interferométeres kísérletben akkor is interferenciát találtak, ha a rendszer olyan nagy (és a fény intenzitása olyan kicsi), hogy egyszerre legfeljebb csak egy foton van jelen. Ez az egy foton interferál ilyenkor tehát „önmagával”, ami azt jelenti, hogy a részecske- és a hullámkép valahogy egyszerre van jelen.

### 8.2.2. Anyaghullámok, az anyag kettős természete

Az elektromágneses hullámok tehát hol hullám-, hol részecsketermészetüket mutatják, nem lehet a kettő között döntenünk (hanem új elméletet kell létrehozni). Az elektron eddig csak részecskeként viselkedett; lehet-e, hogy ennek is **van hullámtulajdonsága**? A fénynél  $\lambda = h/p$ , igaz lehet valami hasonló részecskékre is? Ezt az összefüggést Louis de Broglie javasolta 1924-ben, ezért ezt **de Broglie-hipotézisnek** hívjuk. A redukált Planck-állandóval:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k, \quad \text{ahol} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (8.9)$$

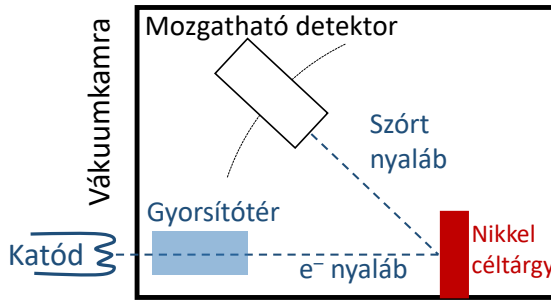
1927-ben végezték el a **Davisson–Germer-kísérletet** (lásd 8.9. ábra), amelynek során elektronnyalábot irányítottak egy fém (nikkel) céltárgyra, hogy az atomok elektromos terét, illetve a felület szerkezetét vizsgálják, a szórt elektronokat vizsgálva. Arra számítottak, hogy az elektronok számára még a legsimább kristályfelület is felbontható az atomos szerkezet miatt, és így erről lehet információt szerezni az elektronok szögeloszlásából. A kísérlet során oxigén került a vákuumcsőbe, amely oxidréteget képzett a nikkelfelületén. Ezt magas hőmérsékletre való fűtéssel próbálták eltüntetni, nem tudván, hogy a nikkelfelület korábban polikristályos szerkezetű, ilyenkor egykristállyá változik, illetve az elektronnyaláb számára azonos kristályfelület fog látszódnia. Az újra elvégzett kísérletben már a kristálysíkok befolyásolták az elektronszórásot. Már 1913 óta (Laue és Bragg munkája alapján) ismert volt, hogy röntgensugaraknak kristálysíkokon való szóródásakor interferenciamentázat figyelhető meg. Konkrétan:  $\lambda$  hullámhossz és  $d$  kristálysík-távolság esetén az  $n\lambda = 2d \sin \theta$  összefüggés fennállása esetén maximumok jelentkeznek (tetszőleges  $n$  egész értékre), ahol  $\theta$  a bejövő sugárzás kristálysíkkal bezárt szöge. Ez a röntgensugarak interferenciáját, azok hullámtulajdonságát igazolta. Davisson és Germer ugyanilyen **interferenciamentázatot talált az elektronszórásban**, és az 50 foknál tapasztalt maximum alapján (a nikkelfelület 0,091 nm-es rács távolságának ismeretében) megállapították, hogy az elektronnyaláb hullámhossza 0,165 nm. Ez elég egyezést adott a de Broglie-hipotézissel. Kis elektronsebességeknél ugyanis:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \frac{1,225 \text{ nm} \cdot V^{1/2}}{\sqrt{U}}, \quad (8.10)$$

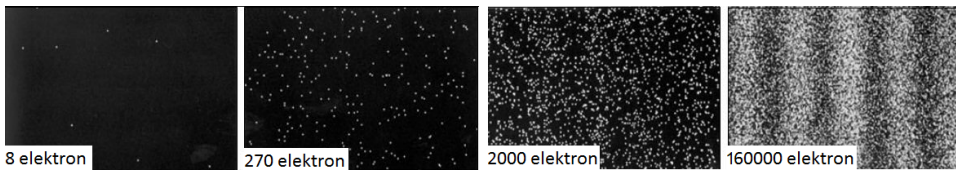
és ez 54 V feszültségre 0,167 nm-t ad.

Későbbi kísérletek minden esetben az anyaghullámok jelenlétét igazolták: kristályszélén való elhalás (Boersch, 1940), áthaladó nyalábbal (Ruska, TEM, 1934), mesterséges vonalrácson vagy szálakkal (Düker, 1956), kétrés-kísérlet (1974, Joensson), amit elvégeztek alacsony intenzitású nyalábokkal, **akár egy elektronnal** is (lásd 8.10. ábra, Merli, 1974 és Tonomura, 1989). Összességében az elektronok hullámtulajdonsága bizonyított, amelyet egyetlen elektron is mutat, és a hullámhossz nagy pontossággal  $\lambda = h/p$ . A helyzet tehát hasonló az elektromágneses jelenségekhez.

Elektronokkal is el lehet tehát végezni a kétrés-kísérletet, amikor a rések mögötti ernyőn interferenciát tapasztalunk, ami olyan, mintha két hullám (az első, illetve a második résen áthaladt hullám) interferálna. Fontos érdekesség, hogy ha az egyelektronos kétrés-kísérletben egy fotocellával vizsgáljuk, hogy melyik résen megy át az elektron, és ezt coincidienciába kötjük a mintázattal (azaz csak olyan elektronok interferenciáját próbáljuk megfigyelni, amelyekről sikerült eldönteni, hogy konkrétan melyik résen haladtak



8.9. ábra. A Davisson–Germer-kísélet során nikkel céltárgyon szóródó elektronokat vizsgáltak. A gyorsítófeszültségtől függően egyes irányokban maximális, más irányokban minimális intenzitás észlelhető, egyfajta interferenciamintázatot létrehozva – még hozzá éppen az anyag-hullámokra vonatkozó de Broglie-hipotézisnek megfelelően.



8.10. ábra. Interferencia egyelektronos kétrés-kíséletben. Az egyesével érkező elektronok becsapódási helye véletlenszerű, és így az első néhány elektron még nem rajzol ki világos mintázatot, de sok elektron eloszlása már a jellegzetes interferenciaképet mutatja. Az ábra a Hitachi Ltd. weboldaláról származik, az eredeti kísérletet Tonomura és munkatársai publikációja (*American Journal of Physics* 57 (1989) 117) mutatta be.

át), akkor eltűnik az interferencia! Nem egészen világos, hogy ez hogyan történik, de az biztos, hogy a megfigyeléshez használt fény (foton) impulzust cserél az elektronnal, ami hatással lehet a nyalábra. Tény, hogy az elektron mindig oszthatatlannak látszik, de egyetlen elektron is interferál, és az interferencia eltűnik minden olyan kísérletben, ahol az utat is megfigyeljük.

Fontos kérdés, hogy **általában az anyagnak van-e hullámtulajdonsága**, vagy az elektron speciális mikrorészecske ilyen szempontból? **Molekulanyalábos** módszerrel 1929-ben sikerült megismételni a megfigyelést, interferenciát találva, 1999-ben pedig **fullerénekkal** figyelték meg ugyanezt. A fullerén, a  $C_{60}$  molekula („focilabda-molekula”) azért is érdekes, mert 174 vibrációs módusa van, hőmérsékleti sugárzást bocsát ki: szinte valódi, nagyméretű szilárd testként kezelhető – méretben is „közelebb áll” egy teniszlabdához, mint egy elektronnak. 2011-ben bonyolult **nagy szerves molekulákkal** is sikerült hasonló kísérletet elvégezni. Az elmúlt években sikerült egyatomos (Parazzoli, 2012) és egymolekulás (Juffmann, 2012, ezernél is nagyobb tömegszámú molekulával végzett) interferenciát is kimutatni. A kísérletek tehát megkövetelik, hogy a részecskékhez interferenciaképes amplitúdót kell hozzárendelni.

### 8.2.3. A hullámfüggvény és a kvantummechanika értelmezése

A kétrés-kísérlet (lásd a 7.1. ábrán) során tapasztalt interferencia a részecskenyaláb hullámtulajdonságát bizonyítja. Elektromágneses hullámok, azaz például fény esetén a hullámzó mennyiség az elektromos és a mágneses tér, ezek harmonikusan rezegnek térben és időben, azaz tulajdonképpen adott irányba haladó szinusz hullámként képzelhetőek el. Általában a hullám amplitúdójának abszolútérték-négyzete adja a hullám intenzitását, és a két hullám amplitúdójának összeadódása egy adott helyen az intenzitásban kioltást vagy erősítést eredményezhet, a fáziseltéréstől függően: ez az interferencia. **Anyaghullámokkal** hasonló a tapasztalat, ezek léte tehát **kísérleti tényként** kezelendő, a kísérletek megkövetelik, hogy a részecskékhez **interferenciaképes hullámot** rendeljünk. Kérdés, hogy mi is pontosan a hullámzó mennyiség? Az anyagi részecske **megtalálási valószínűsége**  $P(x)$  (valójában valószínűségsűrűsége, azaz  $x$  és  $x + dx$  között  $P(x)dx$  a megtalálási valószínűség); ez lehetne az amplitúdó négyzete, az elektromágneses esettel rokon módon. Legyen tehát  $P(x) = |\Psi(x)|^2$ , ahol  $\Psi(x)$  komplex szám értékű függvény: ez „hullámzik”. Az interferenciát az adja, hogy ha két lehetőség áll egy részecske előtt, akkor azt tesszük fel, hogy mindkét lehetőséghez tartozik egy  $\Psi$  amplitúdó, és a két lehetőség **valószínűségamplitúdói adódnak össze**, azaz  $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ . A valószínűség tehát innen  $P = |\Psi_1 + \Psi_2|^2$  lesz. Ha csak az első lehetőséget (például az egyik résen való áthaladást) engedjük meg (a másik rés lezárásával), akkor a valószínűség  $P_1 = |\Psi_1|^2$ , ha csak a másikat,  $P_2 = |\Psi_2|^2$ . Az adódik tehát, hogy  $P \neq P_1 + P_2$ : lehetséges interferencia a két lehetőség között!

Kérdés, hogy  $\Psi(x)$  milyen matematikai alakban írható fel. Mivel anyaghullámokról beszélünk, ezért tekintsük konkrétan adott hullámhosszú  $A \cdot e^{ikx}$  (vagy  $A \cdot \cos(kx)$ ) síkhullámnak (itt  $k = 2\pi/\lambda$  a  $\lambda$  hullámhosszhoz tartozó hullámszám). Adott  $\lambda$  hullámhosszhoz tehát egy térben végtelen hullám tartozik, hiszen a  $\sin(kx)$  és/vagy  $\cos(kx)$  függvények sehol sem tartanak nullához, bármilyen messze megyünk is az origótól. Eszerint a részecske egyáltalán nem lokalizált, nem tudhatjuk, hol van! A valóságban, igazi **hullámcsomagokban** a többi hullámszám is jelen lehet egyszerre, azaz megjelenik egy  $A(k)$  **amplitúdó**, amely az adott  $k$  hullámszámú komponens amplitúdója, és  $\Psi(x) = \sum_k A(k)e^{ikx}$ , vagy folytonos  $A(k)$  esetén  $\Psi(x) = \int A(k)e^{ikx} dk$  módon írhatjuk a  $\Psi(x)$  függvényt.<sup>6</sup> Összefoglalva: egy **lokalizálatlan**  $\sin(kx)$  függvényhez egy **teljesen lokalizált** (azaz csak egy adott  $k$ -t tartalmazó)  $A(k)$  tartozik, és fordítva, térben teljesen lokalizált részecskéhez teljesen határozatlan hullámszám (azaz a de Broglie-hipotézis alapján: impulzus) tartozik. Egy Gauss-görbe módjára térben lokalizált hullámfüggvényt egy inverz szélességű  $A(k)$  Gauss-görbéből kaphatunk. Ezt és más példákat a 8.11. ábrán láthatunk. Kiderül, hogy bármely függvényre  $\Delta x \Delta k$  **alulról korlátos**, és Gauss-alakú  $\Psi(x)$  esetén a lehető legkisebb. Mivel a  $k$  hullámszám és a  $p$  impulzus között fennáll a  $p = h/\lambda = \hbar k$  összefüggés,

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (8.11)$$

adódik. Ez a **Heisenberg-féle határozatlansági reláció**. A kvantumelméletben tehát nincsenek pontos koordináták, a klasszikus **pályafogalom értelmetlen**, és vannak olyan fizikai mennyiségpárok, amelyek **nem határozhatóak meg egyszerre**. Például a hely és az impulzus ilyen: ha pontosan ismert a részecske helye, akkor az impulzusa

<sup>6</sup> Végeredményben tehát  $A(k)$  éppen a  $\Psi(x)$  Fourier-transzformáltja.

határozatlan (sok különböző értéket felvehet), ha viszont ismert az impulzusa, akkor a helye határozatlan (azaz a térben nem lokalizálható).

Az energiára és az időre is hasonló határozatlansági összefüggés igaz:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (8.12)$$

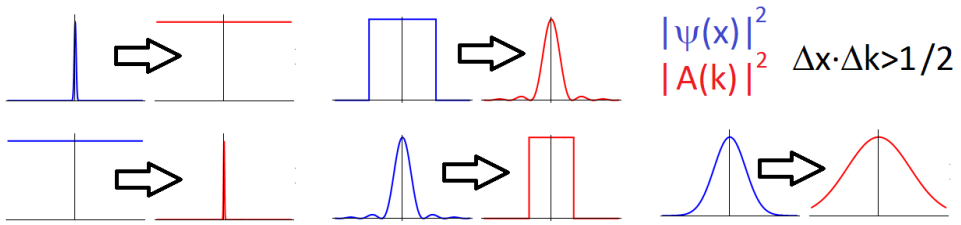
Ez azt jelenti, hogy ha energiamezéréseket hajtunk végre  $\Delta t$  karakterisztikus időnként, akkor az energiamegmaradást csak ilyen  $\Delta E$  nagyságú korrekciók erejéig tudjuk leellenőrizni. Másképp, ha  $\Delta t$  egy rendszer karakterisztikus ideje (például egy részecske élettartama), akkor az energiája kissé határozatlan,  $\Delta E$  mértékben.

Az **interferenciakísérlet egyszerre egyetlen részecskével is** elvégezhető (ahogy a 8.10. ábrán látható), és a pontosan azonos tulajdonságokkal rendelkező részecskék egyike itt csapódik be, a másik ott, és **sok részecske alakítja ki az interferenciamentázatot**, amely viszont lényegében tényleg  $|\Psi|^2$ -nek megfelelően adódik. Nem tudjuk tehát megmondani, hogy egy konkrét részecske hova fog becsapódni: a fizika részben **elveszti determinisztikus jellegét**. A mérés során a korábban a térben „elkent” hullámfüggvény és valószínűségi amplitúdó (hullámfüggvény) „összeomlik”, egy konkrét hely realizálódik.

Kérdés, hogy az események valószínűségi jellege vajon elsődleges tulajdonsága a fizikának, vagy arról lenne szó, hogy egyszerűen még nem értjük valamely rejtett, de mérhető változók időbeli fejlődését? A fizika a reprodukálható kísérletekre épül, ugyanakkor most úgy tűnik, hogy a kvantummechanikai jelenségek körében csak átlagos viselkedés reprodukálható. Más a helyzet, mint a kinetikus hőtanban: ott szintén az átlagokkal foglalkozunk, de ha nagyon akarnánk, tudnánk az egyes részecskék pályáját is követni – a kvantummechanikában erre elvileg sincs lehetőség.

Ezen filozófiai, metafizikai problémák miatt **interpretációk** lehetnek szükségesek a fentiekben látottak „feldolgozásához”. Néhány alapvetően fontosnak gondolt koncepció közül legalább egyet fel kell adnunk: vagy indeterminisztikus a világ, vagy szuperdeterminisztikus (azaz minden részecskebecsapódás „előre meghatározott” a fizika egyenletein túli törvényekkel), esetleg még nem ismert, „rejtett változók” avagy „rejtett tulajdonságok” határozzák meg a kísérletek kimenetelét. A kvantumfizika ezekre adott válaszoktól függően az alábbiak szerint interpretálható:

- Az elektron hullámfüggvénye ténylegesen a térbeli töltéeloszlást jelenti, nem csak valószínűség. (Schrödinger)
- A hullámfüggvény nem jelent fizikailag semmit, csak „valószínűségi amplitúdó”. Eszerint nem létezik például a hely mint tulajdonság csak konkrét mérés eredményeként gondolhatunk rá. (Koppenhága, Bohr és Heisenberg)
- A hullámfüggvény a fizikai valóság, nem zuhan össze, és mi a konkrét világunkban lévőit észleljük. (sokvilág-interpretáció, Everett, Wheeler, DeWitt)
- Nincs szükség interpretációra, a konkrét kísérletek konkrét eredményét ki lehet számolni anélkül is, azaz „shut up and calculate”. (instrumentalista interpretáció, Mermin, Feynman)
- A hullámfüggvény önmagában nem értelmezendő, csak egy sokaság részeként. (statisztikus interpretáció, Born)
- A tudat (azaz a megfigyelő) okozza a hullámfüggvény összeomlását méréskor. (Neumann, Wigner)



8.11. ábra. Adott  $\Psi(x)$ -hez tartozó  $A(k)$  eloszlások. Nem lehet mindkettőt lokalizálni, azaz létezik egy határozatlansági reláció,  $\Delta x \Delta k \geq 1/2$  vagy  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ .

- A hullámfüggvény „összeomlása” valóságos, a fekete lyukak ellentétéként rendeződik ilyenkor a világ, és keletkezik információ. (Penrose)
- A kvantumelmélet nem teljes, vannak valamilyen rejtett változók, amelyek időbeli fejlődése adná meg a determinisztikus viselkedést. („Isten nem kockajátékos”, a természet determinisztikus, Einstein, de Broglie; Bell szerint azonban csak nemlokális rejtett változók lehetségesek, az elméletek viszont lokálisak kell hogy legyenek, ezért ma ezt az opciót lényegében kizárjuk).

Ezen interpretációk azonban a fizika *alkalmazásához* nem szükségesek, a fentiek közül ki-ki magának kiválaszthatja a legszimpatikusabbat.

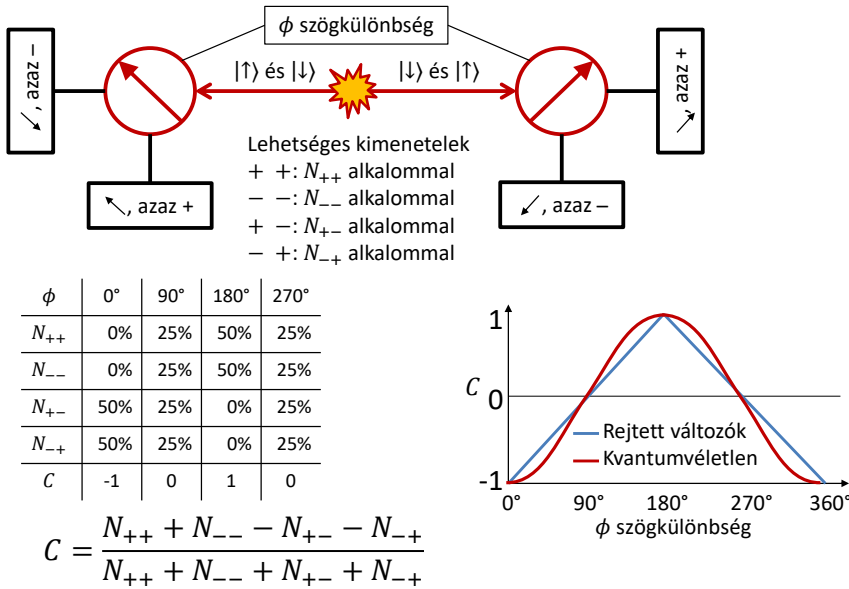
### 8.2.4. Összefonódott állapotok, az EPR-paradoxon és a Bell-kísérlet

A spin fogalmára épül a kvantummechanika valószínűségi jellegét a határokig feszítő **EPR-paradoxon**. Ezt a paradoxont Einstein, Podolsky és Rosen állította fel, és az az alap gondolata, hogy ha (például egy pozitronbomlás és annihiláció során) keletkezik egy fotonpár, akkor a perdületmegmaradás miatt lehet olyan helyzet, hogy a pár teljes spinje (azaz perdületük) ismert. Ezzel együtt az egyik kiválasztott részecske spinkomponense bármi lehet. Emiatt a két részecske állapota **összefonódott**, tehát ha megmérjük az egyik spinjét, akkor abból azonnal következtethetünk a másik spinjére is. A kétféle spinre „elkent” állapot összeomlik egyetlen spinűre a méréskor. Így azonban nemcsak a mért részecske, hanem a másik hullámfüggvénye is összeomlik, hiszen *tudjuk* a spinjét! Lehet azonban, hogy ez a másik részecske már közben nagy távolságba került az eredetitől, mégis *azonnal* egyetlen konkrét spinnel rendelkező állapotba kell kerülnie!

Ez távolhatásnak tűnik. Ugyanakkor kiderül, hogy valójában itt nem történik információátvitel: az egyik spinmérés után ugyan biztosak lehetünk a másik spinmérés eredményében, de előre nem lehetünk azok, és nincs is mód arra, hogy „előre eldöntsük”, hogy a mi mérésünk (és aztán majd a másik mérés) melyik eredményt fogja adni.

Talán még fontosabb, hogy megvizsgálhatjuk a két foton mért spinje közötti korrelációt. Erre vonatkozik az alábbiakban felvázolt kísérlet, amelyet a 8.12. ábra is illusztrál. A kísérlet lényege, hogy a fent leírt, valamilyen konkrét irány szerinti felbontásban egyszerre „fel” ( $\uparrow$ ) és „le” ( $\downarrow$ ) állapotban lévő részecskepár összesített perdülete biztosan nulla, tehát ha az egyiket adott irányban „fel” perdületűnek mérjük, akkor a másik biztosan „le” perdületet adna, ha megmérnénk a perdületét ugyanabban az irányban.

Ezen elrendezés gondos analízise meglepő bevilágítást nyújt a kvantummechanika valószínűségi jellegébe. A kulcs az, hogy bonyolultabb méréseket is elképzelhetünk, mint



8.12. ábra. Az EPR-paradoxonra épített, Bell-féle kísérlet. A fent körrel ábrázolt két spin-detektor  $\phi$  szögműködésének függvényében megmérhetjük a  $C$ -vel jelölt „korrelációt”. Az derül ki, hogy a megfigyelések a kvantumvéletlenből adódó eredménynek felelnek meg, míg a rejtett változós elméletekből adódó korreláció legfeljebb a jobb alsó grafikonon kék vonallal jelölt függvénynek megfelelő mértékben térhet el a nullától.



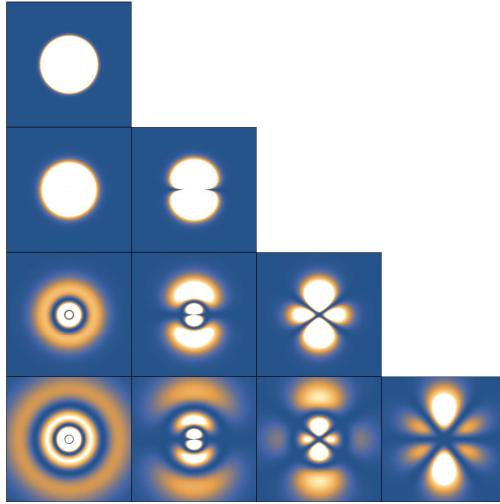
hogy a két spinmérő pontosan ellentétes irányba áll. Akármilyen irányba állítva is a spinmérő műszereinket, jelöljük a teljes kísérlet kimenetelét egy  $ab$  párral, ahol  $a, b = +, -$ . Azaz:  $++$  azt jelenti, hogy mindkét részecskét  $+$  (az őt érzékelő detektor irányában „fel”) perdületűnek mértük,  $+ -$  azt, hogy az egyik  $+$ , a másik  $-$  eredményt adott satöbbi. Ha a műszerek ugyanabba az irányba állnak, akkor mivel egyébként a perdületek iránya véletlenszerű, de az összperdület (spin) nulla, az esetek 50-50%-ában  $+ -$  és  $- +$  események történnek. Ha bevezetjük az adott kimenetek számát vagy arányát, akkor  $N_{+-} = N_{-+} = 50\%$ , és  $N_{++} = N_{--} = 0\%$ , hiszen nem adhatna azonos eredményt a két részecske – ha a két detektor azonos állásban van. Ha azonban a két detektor ellentétes irányban áll (azaz  $180^\circ$  szög van közöttük), akkor  $N_{+-} = N_{-+} = 0\%$ , és  $N_{++} = N_{--} = 50\%$ , hiszen a „lefelé” álló detektorban „le” eredményt adó részecske perdülete valójában ekkor felfelé mutat, tehát a másik, felfelé mutató detektorban „le” eredményt kell kapnunk.

Általánosságban (azaz, ha az egyik, illetve a másik spindetektort egymáshoz képest nem egyforma vagy ellentétes, hanem általános irányban állítjuk) az  $N_{++}$ ,  $N_{+-}$ ,  $N_{-+}$ ,  $N_{--}$  valószínűségeket nem adhatók meg a fentiekben látottakhoz hasonló, egyszerű módon. Kiderül viszont, hogy képezhetünk egy mennyiséget, amit a 8.12. ábrán  $C$ -vel jelöltünk. Erre a mennyiségre a klasszikus valószínűségszámítás szerint (ha a spinnek értéke már a kibocsátáskor eldőlt, valamilyen, általunk esetleg nem ismert „rejtett paraméter” megmondja) kaphatunk egy eredményt, amit a 8.12. ábrán látható szögletes grafikon (háromszög alakú függvény) illusztrál: ennyi lehet maximum ezen mennyiség nullától való eltéréseinek nagysága (a detektorok bezárt szögének,  $\phi$ -nek függvényében). Kvantumfizikai véletlenből kiindulva a szinuszos görbét kapjuk mint jóslatot. A kísérleti adatok a második eshetőséget, a kvantumfizikai véletlent támasztják alá, azaz a kísérlet kizárja, hogy az eredményét a kiinduláskor már meghatározott rejtett változók okozzák!

Ez tehát azt jelenti, hogy el kell fogadnunk, hogy a fizika a fenti értelemben véve nem determinisztikus. Azaz: a kiinduló állapotból nem tudjuk meghatározni a kísérlet végeredményét, a véletlen szerepe megkerülhetetlen! Érdekes hozzáfűzni, hogy valójában van egy „kiút”: a szuperdeterminizmus, azaz hogy a kísérlet eredménye valahogy „eleve elrendeltetett”. Ekkor azonban a fizika törvényei csak annyiban írják le a világot, amennyiben egy épület alakját a tervrajz vagy egy színdarab történéseit a szövegkönyv: nem tudunk logikai alapon előrejelzést tenni, legfeljebb felismerni a tervező/író gondolkodását. Ez azonban tulajdonképpen nem tudományos értelemben vett elmélet, hiszen nem ad tesztelhető jóslatot, és így tulajdonképpen inkább a filozófia tárgykörébe tartozik.

### 8.2.5. A kvantummechanika matematikai képe, a Schrödinger-egyenlet

A kvantummechanika matematikai képének alapja az, hogy egy részecske állapota egy  $\Psi(x)$  **állapotfüggvény**. A fizikai mennyiségek ezen az állapotfüggvényen ható **operátorok**. Az operátorok egy függvényből egy másik függvényt csinálnak, például úgy, hogy deriválják, megszorozzák egy számmal, megszorozzák egy függvénnyel satöbbi. Az operátoroknak vannak úgynevezett **sajátállapotaik**, amikor  $\hat{A}\Psi = A\Psi$ , azaz az  $\hat{A}$  operátor hatása a függvényen csak egy számmal (az  $A$  számmal) való szorzást jelent. Az ezen sajátállapothoz tartozó  $A$  számot **sajátértéknek** nevezzük – például a deriválás



8.13. ábra. A hidrogénatom hullámfüggvényének abszolútérték-négyzete, azaz az elektron megtalálási valószínűségének „színtérképe”. A sorok az energia növekvő értékeit jelentik ( $n = 1, 2, 3, 4$  kvantumszámokkal), az oszlopok a perdületet ( $l = 0, 1, 2, 4$  kvantumszámokkal,  $m = 0$  mágneses kvantumszám mellett). Érdeemes megfigyelni, hogy míg az energia a mérettel, addig a perdület a forgásszimmetriával látszik összefügni. Az ábra azonos a 6.6. ábrával.

mint operátor sajátállapota az  $e^{cx}$  függvény, a sajátértéke pedig  $c$ . Egy fizikai mennyiség egy adott részecskére (az energiája, impulzusa, helye satöbbi) akkor mérhető, ha a részecske a megfelelő operátor sajátállapotában van, és ekkor a mérés eredménye az ennek a mennyiségnek megfelelő operátor sajátértéke az állapoton. Bizonyos mennyiségek nem mérhetők egyszerre, mert különbözőek a sajátállapotaik.<sup>7</sup>

Ha egy részecske egy adott, helyfüggő  $V(x)$  potenciális energia által kialakított térben (például gravitációs vagy elektromos helyzeti energiában) mozog, akkor  $E = E_{\text{kin}} + V(x)$ . Tekintsünk az energiára és az impulzusra mint operátorokra, ekkor

$$\hat{E}\Psi(x) = \frac{\hat{p}^2}{2m}\Psi(x) + V(x)\Psi(x), \quad (8.13)$$

ahol a potenciál operátora a  $V(x)$  függvénnyel való szorzás. Ha a részecske energia-sajátállapotban van, akkor  $\hat{E}\Psi = E\Psi$ . Az impulzusoperátort viszont még nem ismerjük, de a következőkben „kitaláljuk” azt is. Ha a síkhullámot vesszük alapul, ott (egy dimenzióban)

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) = ik e^{i(kx - \omega t)} = ik\Psi(x), \quad (8.14)$$

és mivel  $p = \hbar k$ , így azt tehetjük föl, hogy az impulzusoperátor

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}, \quad (8.15)$$

<sup>7</sup> Kiderül, hogy felcserélhető (kommutáló) operátorok (amelyekre  $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ ) sajátállapotai azonosak, ezért ezek egyszerre mérhetőek. Az impulzus- és a helyoperátor nem felcserélhető, ezért határozatlansági reláció vonatkozik rájuk.

avagy három dimenzióban  $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ . Ezzel a fenti energiaegyenlet átírásaként megkapjuk a **Schrödinger-egyenletet**:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x), \text{ vagy három dimenzióban} \quad (8.16)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x). \quad (8.17)$$

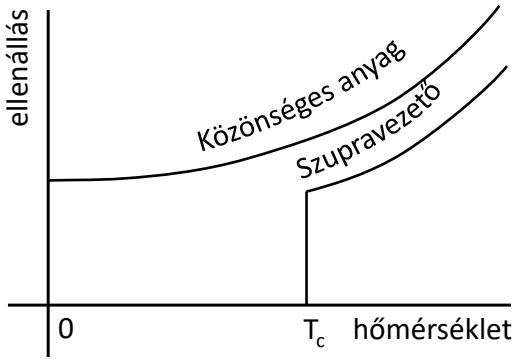
Itt tehát  $V(x)$  a részecske mozgását befolyásoló potenciál, avagy energia. Potenciál nélkül a  $\Psi''(x) \propto \Psi(x)$  egyenletből a síkhullám alakot kapjuk, míg egy atommag elektromos potenciálját ( $V = -ke^2/r$ ) beírva a **hidrogénatom állapotait** kapjuk meg (lásd a 8.13. ábrán), és ebből ténylegesen kijönnek a megfigyelt energiaértékek (bizonyos korrekciók segítségével).

A hidrogénatom elektronjának a Schrödinger-egyenlet szerinti lehetséges állapotait (hullámfüggvényeit)  $n$ ,  $l$  és  $m$  indexeli, az energia ekkor csak  $n$ -től függ, és  $E_n = E_1/n^2$  (ahol  $E_1 = 13,6$  eV). Az  $l$  a perdületet adja meg  $L = l\hbar$  módon, míg  $m$  ennek a  $z$  irányba vett vetületét, azaz  $L_z = m\hbar$ . Ennek megfelelően adott  $n$  mellett  $l$  értéke 0 és  $n - 1$  között változhat, míg  $m$  értéke  $-l$  és  $l$  között (adott  $l$ -re). Kiderült később az is, hogy az energiaszintek valójában kicsit eltérnek különböző  $l$  értékekre, és további felhasadások is megjelennek, ez a hidrogénatom finomszerkezete, illetve hiperfinom szerkezete. Végeredményben a kvantummechanika egyik „diadala” a hidrogénatom részletes szerkezetének pontos leírása.

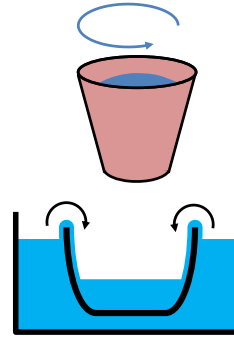
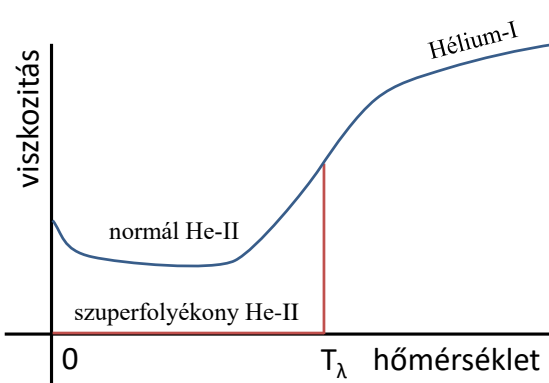
### 8.2.6. A kvantummechanika érdekes következményei

A kvantummechanikának rengeteg érdekes következménye van. Megengedi például fordulalmian új, úgynevezett **kvantumszámítógépek** létezését. Ezek alapját a spin jelenti: a foton spinje  $\hbar$ , és ennek iránya nem  $\pm 1$  típusú információt hordoz, hanem a kettő tetszőleges keverékét. Ha a spinre mint **kvantumbitre** tekintünk, akkor ezzel bizonyos értelemben minden számítás „egyszerre” végezhető el, a bemeneti értékek minden kombinációja egyszerre fut be a számítást végző egységbe, ezért extrém sebességű számítógépet lehetne építeni így. Ma ott tartunk, hogy borzasztó egyszerű műveleteket el tudunk végezni kvantumbitekkel, például az információ továbbítását, de a téma még alapkutatás tárgyát képezi.

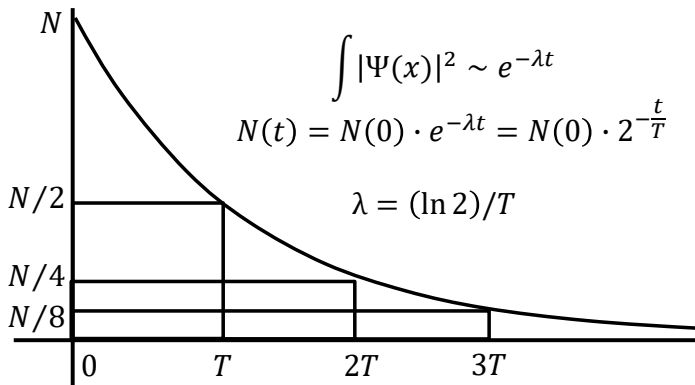
Érdekes kvantummechanikai eredetű jelenség a **szupravezetés**. Ezen jelenség megértéséhez idézzük fel, hogy fémek vezető elektromos ellenállása a hőmérséklet esésével csökken. A legtöbb vezetőanyag esetében 0 K közelében sem nulla az ellenállás. 1911-ben azonban Heike Kamerlingh Onnes megfigyelte, hogy a higanynak 4,19 K hőmérsékleten ugrásszerűen megszűnik az elektromos ellenállása. Bár akkoriban a kvantummechanika új dolog volt, rögtön feltételezte, hogy ezen szupravezetés magyarázatához kvantummechanikai leírás szükséges (a szupravezetés kvantummechanikai elméletét azonban csak 1957-ben alkották meg). A következő évtizedekben több szupravezető anyagot is találtak. 1913-ban az ólomról mutatták ki, hogy 7 K-en, 1941-ben a nióbbium-nitridről (NbN), hogy 16 K-en szupravezetővé válik. Ezen anyagok esetében az ellenállás hirtelen esik nullára az úgynevezett kritikus hőmérséklet elérésekor (lásd a 8.14(a). ábrát). Így egy szupravezető körben az áram folyamatosan folyni fog külső forrás nélkül is. Ezt a tulajdonságot használják ki a szupravezető elektromágnesek (ilyenek például az



(a) Szupravezetők ellenállása bizonyos hőmérséklet alatt nullára csökken, ekkor az áram veszteség nélkül keringhet bennük, mágneses teret létrehozva. A jobb oldali fénykép (forrás: Wikimedia Commons) a szupravezetésre épülő Meissner-effektust mutatja be.



(b) Szuperfolyékonyság esetén a folyadék viszkozitása nullára csökken, így megkeverve „örökké forog”, vagy akár „körbe tudja folyni” a tartóedény falát.



(c) A radioaktivitás kvantummechanikai értelmezése alapján az adott állapot létezésének teljes valószínűsége nem 100%, hanem időben exponenciálisan csökken. Egyetlen állapot (atom) ez alapján bármikor elbomolhat, egy nagyméretű mintában az el nem bomlott állapotok száma az említett exponenciális csökkenést mutatja. Az ábra azonos a 6.5. ábrával.

8.14. ábra. A kvantummechanika érdekes jelenségei

MRI-gépekben vagy az NMR-spektrométerekben található). Kísérletek igazolják, hogy szupravezető tekercsekben fenntartható az áram évekig, mérhető csökkenés nélkül.

A szupravezetés alapja, hogy a mozgó elektronok úgynevezett Cooper-párokba rendeződnek. A kvantummechanika szerint egy Cooper-pár energiájának van egy minimális szintje. Ha ez nagyobb, mint a fématomok hőenergiája, akkor a párok mozgásuk során nem vesztenek energiát. Szupravezetés az anyagok széles skálájánál előfordul: kémiai elemeknél, mint például az ón vagy az alumínium, fémötvezeteknél, néhány erősen szennyezett félvezetőnél és a réztartalmú, réteges, torzult kristályszerkezetű kerámiáknál – utóbbiak a magas hőmérsékletű szupravezetők. A magas hőmérsékletű szupravezetők (amelyek kritikus hőmérséklete 90 K fölött van) 1986-os felfedezése után a szupravezetés kutatása újra felkapott lett több ok miatt. Az alapkutatások terén azért, mert ezen új anyagok viselkedése nem írható le a jelenlegi modellekkel. Másrészt így könnyebben előállítható a szupravezetők üzemi hőmérséklete – cseppfolyós hélium helyett cseppfolyós nitrogénnel hűthetők – így több kereskedelmi célú alkalmazási terület is elérhetővé vált. A kutatások harmadik iránya a kritikus hőmérséklet további emelése, esetleg szobahőmérsékletű szupravezetők előállítására.

A **szuperfolyékonyság** egy másik, hasonló jelenség: az abszolút nulla fok (0 K) közelében a folyadék úgy viselkedik, mintha nem lenne viszkozitása. A természetben csak egy ilyen anyag van: egyedül a hélium marad folyékony (nem szilárdul meg) ilyen alacsony hőmérsékleten, ennek is a  $^4\text{He}$  izotópja lesz szuperfolyékony. Ebben 2,127 K-nél jelenik meg egy szuperfolyékony komponens, amely 1 K körül szinte 100% arányban van jelen. Érdekes jelenségeket lehet megfigyelni, például a folyadék „felkúszik” a tartóedény falára, és kifolyik az edényből (lásd 8.14(b). ábra).

Szintén a kvantumelmélet egyik jóslata, hogy létezhetnek **antirészecskék**. Dirac fedezte fel a Schrödinger egyenlet relativisztikus általánosításakor, hogy az új egyenlet, a Dirac-egyenlet megoldásai között szerepelhetnek „antielektronok”, pozitronok is. Az 1928-as elméleti felfedezést 1932-ben kísérleti bizonyítás követte (Anderson). Ma már tudjuk, hogy szinte minden részecskének lehet antipárja, és antiatomokat is tudunk már létrehozni. Ha egy részecske az antirészecskéjével találkozik, megszűnnek létezni: könnyebb részecskékké (és/vagy antirészecskékké) alakulnak. A folyamatban az energia megmarad, de a „mérlegbe” bele kell venni az eredeti és végső részecskék nyugalmi energiáját ( $mc^2$ -et) is. Az elektronnál nincsen könnyebb (de még véges, nem nulla tömegű) részecske: elektron és pozitron találkozásakor csak fotonok keletkezhetnek (amelyek a  $2m_{\text{elektron}}c^2$  energiát teljes egészében elektromágneses energiaként viszik el); ezeket aztán „felszabadult energia” módjára hasznosíthatnánk. 1 mg-nyi elektron és pozitron egyesülésekor 100 GJ energia „termelődné” így. (Összehasonlításképpen: a paksi erőmű éves energiatermelésének körülbelül 0,7 kg anyag-antianyag egyesülése felelne meg.) Az antianyag előállításához azonban ennél még sok nagyságrenddel több energia szükséges, ezért nem hatékony energiátárolási módszer. Az anyag és az antianyag között teljes a szimmetria, ezért máig rejtély, hogy miért alkotja szinte tisztán anyag a világegyetemet, hova lett az antianyag, illetve a kezdeti megsemmisüléskor hogyan maradhatott ennyi anyag.

A kvantummechanika további fontos következménye a **radioaktivitás**. Elképzelhető, hogy egy részecske hullámfüggvénye úgy változik az időben, hogy a létezés valószínűsége egyre csökken, azaz  $\int |\Psi(x)|^2 = e^{-\lambda t}$ , ahol  $\lambda$  a bomlási állandó. Ilyen esetben egy ponton a részecske megszűnhet létezni, *elbomolhat*. Egy adott részecskéről persze sosem tudjuk, hogy mikor fog elbomlani, de átlagosan a valószínűségnek megfelelően

következik ez be, azaz sok instabil részecske már követi ezt a csökkenést. Ezt az instabilitást általában egy  $T$  felezési idővel jellemezzük, amely  $\lambda = \ln 2/T$  módon függ össze a bomlási állandóval. Ha  $N$  részecske van jelen egy adott időpontban, akkor  $T$  idő múlva nagy pontossággal feleannyi,  $N/2$  lesz. A részecskék számának időfüggése ilyenkor  $N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t} = N(0) \cdot 2^{-t/T}$ , amely pontosan az előző mondatban leírt állítást vonja maga után (lásd a 8.14(c). ábrát). Sok atommag instabil, ezek bomlását nevezük radioaktivitásnak. Kibocsáthatnak magukból  $\alpha$ -részecskét (héliumatommagot), gamma-sugárzást (ha az atommag instabil, azaz nincs alapállapotban), és  $\beta$ -sugárzást (ilyenkor egy neutron alakul át protonná, elektron kibocsátása mellett). Az  $\alpha$ -sugárzás egyből elnyelődik az anyagban, akár egy papírlapban is, a  $\beta$ -sugárzás valamivel vastagabb anyagban csak (például egy alumíniumlapban), míg a  $\gamma$ -sugárzás elnyeléséhez vastagabb ólomfalra lehet szükség.

### 8.3. Ellenőrző kérdések

1. Mik az atomosság makroszkopikus jelei?
2. Hogyan fedezték fel az elektront?
3. Hogyan írja le az atomokat Thomson-féle modellje?
4. Mi volt a lényege Rutherford-féle kísérletének?
5. Mit mond az atomokról a Bohr-modell?
6. Mit tudunk az atomok perdületéről?
7. Mi a spin?
8. Mi bizonyítja a fény kettős természetét?
9. Mely kísérlet bizonyította az anyaghullámok létét?
10. Mit ír le a kvantummechanikai hullámfüggvény, mi a kapcsolata a valószínűséggel?
11. Mit jelent a kvantummechanikai határozatlanság?
12. Mit tudunk meg a Bell-féle kísérletből?
13. Milyen állapotokban lehetnek az atomok elektronjai?
14. Mire használható a Schrödinger-egyenletnek a jegyzetben tárgyalt verziója?
15. Mi az a szupravezetés?
16. Mi az a szuperfolyékonyság?
17. Hogyan értelmezhető a radioaktivitás a kvantummechanika nyelvén?

## 9. fejezet

# Mag- és részecskefizika

## 9.1. Magfizika

### 9.1.1. Az atommag szerkezete

Az atomok elektronszerkezetének ismeretében felmerült a kérdés, hogy mi a kapcsolat a **tömegszám** és a **rendszám** (az elektronok száma) között. A hidrogén esetében ez azonos, a könnyű elemekre viszont a rendszám a tömegszámnak körülbelül fele, holott az elektronok és protonok számának meg kell egyeznie, mivel az atomok semlegesek. A nehezebb atomokra pedig a rendszám valamivel kevesebb a tömegszám felénél. A Rutherford-kísérletek nyomán kialakult atommagképpel kapcsolatban is kérdés volt, hogy **mi tartja össze az atommagot**, ha azt csak a pozitív töltésű protonok alkotják (a gravitáció vonzó ereje ehhez nagyon kevés lenne).

Rutherford 1920-ban felvetette, hogy az atomok rendszáma és tömegszáma közötti különbséget egy, az atommagokban lévő **semleges részecske** okozhatja. Ő ekkor még azt tette fel, hogy ez egy proton és egy elektron kötött állapota. Ez azonban azért sem lehetséges, mert a határozatlansági reláció túl nagy energiát igényelne ilyen kis térfogatba zárt elektron számára (hiszen az  $R$  méretű helybizonytalanság  $\hbar/R$  méretű impulzusbizonytalanságot eredményez, ami egy femtométeres méretnél 100 MeV/c körüli impulzust jelent: az ekkora impulzusú elektron kiszakadna ebből az állapotból).

1931-ben Bothe és Becker felfedezett egy **áthatoló sugárzást**, amely könnyű elemek (Be, B, Li)  $\alpha$ -részecskékkal való bombázása során keletkezett. Először azt gondolták, hogy ez  $\gamma$ -sugárzás, azaz fotonokból áll (bár minden, korábban felfedezett  $\gamma$ -sugárzásnál intenzívebb volt). Egy évre rá Frederic Joliot és Irène Joliot-Curie azt találta, hogy ez a sugárzás paraffinra (vagy más, hidrogéntartalmú vegyületre) esik, akkor nagyenergiás protonok lépnek ki belőle.<sup>1</sup> Ez kinematikai számítások alapján valószínűtlenné tette, hogy a megfigyelt sugárzás tényleg  $\gamma$ -sugárzás. 1932-ben Chadwick kísérletileg igazolta, hogy a sugárzás semleges, és nagyjából a protonnak megfelelő tömegű részecskékből áll. Ezeket elnevezték **neutronnak**. Ezután a tudományos közvélemény gyorsan elfogadta, hogy az atommagok protonokból és neutronokból állnak. A protonokat és neutronokat összefoglaló néven nukleonoknak hívjuk.

Általában hasonló mennyiségű proton és neutron van egy adott magban, nehéz elemek esetén valamivel több neutron. A kémiai tulajdonságokat az elektronszerkezet, ezt pedig (semleges atom esetén) végső soron a protonok száma határozza meg. A neutronsám ilyen szempontból irreleváns. Egy adott atommag különböző neutronsámú változatait **izotópoknak** hívjuk. Többnyire egy adott rendszámú atommagok közül kevés féle neutronsámú stabil, van, ahol csak egy. (Például aranyból a  $^{197}\text{Au}$ , fluorból a  $^{19}\text{F}$ , de például szénből kettő: a 12-es és a 13-as tömegszámú, ólomból pedig négy izotóp stabil: a 204-es, a 206-os, a 207-es és a 208-as tömegszámú is). A nem stabil izotópok úgy kerülnek energetikailag kedvezőbb állapotba, hogy kibocsátanak magukból valamilyen részecskét:  $\gamma$ -fotont (ez a  $\gamma$ -bomlás, ekkor a mag összetétele nem változik, csak a belső elrendezése), elektront vagy pozitront (ez a  $\beta$ -bomlás, ekkor egy proton neutronná alakul vagy fordítva), alfa-részecskét (héliumatommagot, ez az alfa-bomlás), néha egyesével neutront vagy protont is, illetve egyes atommagok spontán széthasadnak két vagy

<sup>1</sup>Érdekesség, hogy a Joliot–Curie házaspár ezért Nobel-díjat kapott, hasonlóan a Skłodowska–Curie házaspárhoz: így ők öt Nobel-díjjal (Marie C. kettőt is kapott) az ebben a tekintetben legsikeresebb családot alkották.



több részre. Az ismert (már létrehozott) izotópok táblázatát a 9.1(a). ábra mutatja. De miért nem egyformán kedvező minden állapot, azaz mi az atommagok energetikájának alapja?

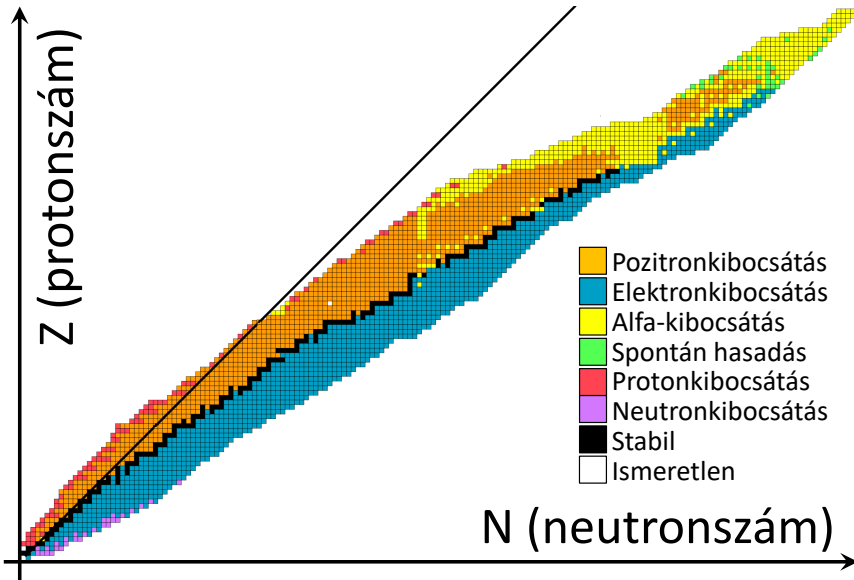
A proton és a neutron tömegének ismeretében kiderült, hogy az atomok **könnyebbek**, mint a megfelelő számú proton és neutron tömege. Ennek az az oka, hogy az atommagoknak van egyfajta „**kötési energiájuk**”, ennek az energiának megfelelő tömeggel könnyebbek, mint az alkotórészeik. Ezt a kötési energiát az úgynevezett erős kölcsönhatás okozza, ami egy újfajta erő: ez vonzóerőként hat a nukleonok között, és ez tartja össze az atommagot (a protonok elektromos taszításának ellenében). Általában az egy nukleonra jutó kötési energiát szoktuk felrajzolni a tömegszám függvényében (lásd 9.1(b). ábrát). Stabil atommagok esetén ennek körülbelül a vasnál van minimuma<sup>2</sup>, ez tehát az energetikailag legkedvezőbb állapot. Nem kedvező állapotból hasadással vagy fúzióval lehet kedvezőbbé jutni: a vasnál kissé nehezebb magok már hasadni tudnak, a könnyebbek fuzionálni, hiszen ekkor a nukleonokra jutó kötési energia csökken, míg a nukleonok száma nem változik. A nem stabil atommagok kötési energiája még távolabb lehet az optimálistól, ekkor következhet be  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ -bomlás, vagy proton-, illetve neutronkibocsátás, ahogy a 9.1(a). ábrán is látható. A  $\beta$ -bomlás (elektron vagy pozitron kibocsátása) viszonylag gyakori jelenség, ekkor egy neutron protonná és elektronná alakul, vagy egy proton neutronná és pozitronná. Az  $\alpha$ -bomlások jellemzően a nagy tömegszámú magoknál fordulnak elő. A spontán hasadás ritkább, igen-igen nagy magokra válik jelentőssé: bizonyos (körülbelül 120-130 környéki) rendszám fölötti magok egyáltalán nem létezhetnek: ha létre is tudnánk mesterségesen hozni ilyeneket, azok „egyből” maguktól elhasadnának. Spontán fúzió pedig nem is létezik: ennek okait a következő fejezetekben tárgyaljuk.

### 9.1.2. A maghasadás felfedezése

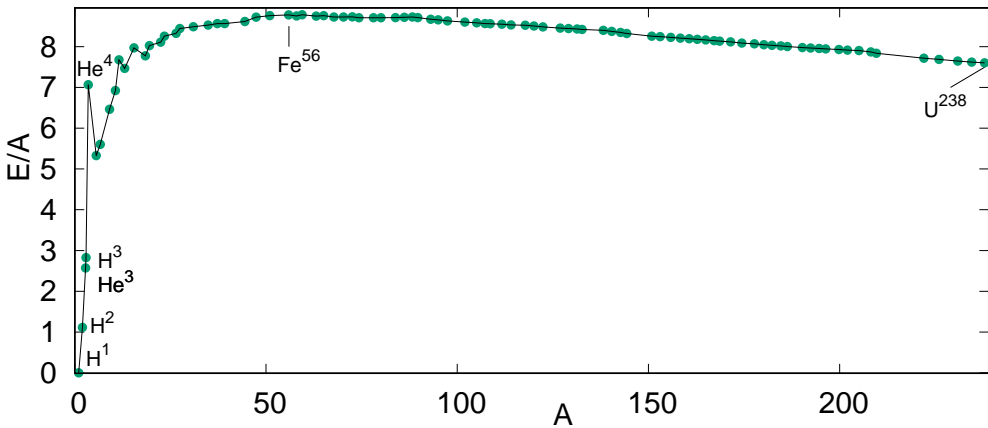
Nehezebb atommagok széteshetnének két kisebbre, mivel ez energianyereséggel járna. Ugyanakkor **spontán maghasadás** csak **nagyon ritkán** következik be (lásd a 9.1(a). ábrát), mivel az atom először jelentősen aszimmetrikussá kell hogy váljon – ehhez (az atommagok a **cseppmodellben** elképzelve, azaz mintegy folyadékcseppként gondolva rá) a magnak először meg kell nyúlnia, két csepre kell szétesnie. Ez a felülettel arányos felületi energia miatt ideiglenesen nagy energiabefektetést igényel. Ez magától tehát nehezen történik meg, de az ehhez szükséges energiát valamilyen bombázórészecskével „kölcsön lehet adni” a magnak. Protonokat könnyű gyorsítani, de nem ideális hasítók, mert az elektromos taszítás megnehezíti a magba jutásukat. Neutronokkal könnyebb a folyamat, ugyanakkor neutronnyalábot nehezebb létrehozni. A következőkben tárgyaljuk a **neutronindukált maghasadás** kísérleti vizsgálatának történetét.

1932-ben Cockroftnak és Waltonnak sikerült felgyorsított protonokat lítiumnak ütköztetnie, a reakcióban így két  $\alpha$ -részecske keletkezett. (A proton egy nukleon, a lítium tömegszáma 7, a végső két  $\alpha$ -részecske tömegszáma is összesen  $4 + 4 = 8$ .) **Fermi** később, 1934-ben **uránt** bombázott **neutronokkal**. Először azt hitte, hogy egy új, nehezebb izotópot állított elő, de az adatok későbbi vizsgálata során kiderült, hogy az uránatommag valójában két részre esett. Ezt azonban abban az időben nem fogadták el. 1938-ban **Otto Hahn** és **Fritz Strassmann** végzett hasonló kísérleteket Berlinben.

<sup>2</sup>A négy legkötöttebb mag a <sup>62</sup>Ni, az <sup>58</sup>Fe, az <sup>56</sup>Fe és a <sup>60</sup>Ni.



(a) Az izotópok térképe. Az ábra azonos a 6.7. ábrával.



(b) A nukleononkénti kötési energia. Az ábra azonos a 6.8. ábrával.

9.1. ábra. Az atommagok ismert típusai, illetve a stabil magok energiája.

Itt a végtermékek között kémiai úton **báriumot azonosítottak**, de akkor még nem értették a jelenség fizikai okát. **Lise Meitner** és **Otto Frisch** interpretálta úgy az eredményt, hogy az **uránmag kettéhasadt**: ők nevezték el a jelenséget **maghasadásnak** („nuclear fission”), a biológiából vett akkori kifejezést másolva („binary fission”, azaz sejtosztódás). 1939-ben megerősítették a kísérleti felfedezést, ezzel **a neutronindukált maghasadás ténye kísérletileg bizonyítottá vált**<sup>3</sup>. Még abban az évben Amerikában Fermi és társai szintén sikeresen hasítottak el uránatommagokat. Szilárd Leó, aki (a Cockcroft–Walton-féle kísérlet nyomán) már 1933-ban rájött, hogy neutronok **láncreakciót** tarthatnak fenn, azonnal felismerte, hogy építhető maghasadáson alapuló bomba, mivel óriási energia szabadul fel, és neutronok is keletkeznek, azaz láncreakció következhet be. Fermi és Szilárd javasolták, hogy építsenek kísérleti nukleáris reaktort, amely ezen az elven működik, és a keletkező hő folyamatosan elvonják, ezzel energiát termelve.

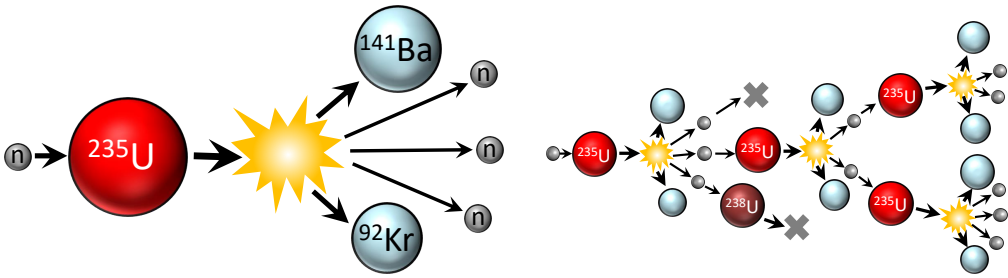
Szilárd, Teller és Wigner, három Amerikába emigrált magyar, rávették Einsteint, hogy közösen írjanak levelet Roosevelt elnöknek, amelyben sürgetik az első atombomba megépítését, mielőtt a németek teszik meg ugyanezt. Roosevelt a levelet 1939. október 11-én kapta meg, egy hónappal a második világháború kitörése után (Amerika csak két év múlva lépett be a háborúba). Valóban, angol és német tudósok (Chadwick, Heisenberg) is rájöttek ekkorra, hogy bizonyos „kritikus tömeg” felett az urán kevés neutron hatására is felrobbanhat. Amerika 1942-ben beindította a „Manhattan-terv” fedőnevű kutatási programot, és 1942. december 2-án sikerült beindítania az első „atommáglyát” (azaz kontrollált hasadási láncreakciót) természetes urán üzemanyaggal, javarészt Szilárd Leó ötlete nyomán (grafit mint úgynevezett moderátor segítségével, lásd alább). Most lássuk, hogy melyek az urán neutronindukált maghasadásának részletei.

### 9.1.3. Az uránizotópok hasadási tulajdonságai

Az uránmag két részre hasadása nagyon sokféle módon végbemehet. A keletkezett két közepes mag rendszámainak összege mindenképpen az urán (92-es) rendszáma lesz, hiszen a protonok megmaradnak a hasadási reakcióban. A tömegszámok összege viszont általában nem teszi ki az eredeti uránmag tömegszámát, mert néhány neutron (többnyire kettő vagy három, de néha akár öt vagy hat is) kiszabadul a magokból, és szabadon repül tovább. Például a **235-ös tömegszámú izotóp** egyik ilyen neutronindukált hasadási reakciója az, amikor az uránmag szétesik 92-es tömegszámú kriptonra ( $Z = 36$ ) és 141-es tömegszámú báriumra ( $Z = 56$ ), és három neutron keletkezik, lásd a 9.2. ábrát. Közben sok (körülbelül 200 MeV) energia is keletkezik: ez végső soron leginkább hővé alakul az urántömbben.

Természetes uránban az uránatommagoknak csupán 0,7%-a a <sup>235</sup>U izotóp. Ez lassú (1 eV körüli mozgási energiájú) neutronok hatására nagy valószínűséggel hasad, gyors neutronokkal kisebb a hasadás valószínűsége (körülbelül századakkora, lásd a 9.3. ábrán). Egy lassú neutronnal kiváltott <sup>235</sup>U-hasadásban átlagosan 2,43 neutron keletkezik (tört érték adódik, hiszen nem mindig ugyanúgy történik a hasadás – többnyire két vagy három neutron keletkezik, de akár öt- vagy hatneutronos hasadás is lehetséges, ahogy fentebb is említettük). A **238-as tömegszámú izotóp** (a természetes urán maradék 99,3%-a) viszont lényegében csak gyors neutronok hatására hasadhat, akkor sem túl

<sup>3</sup>Hahn 1944-ben ezért megkapta a kémiai Nobel-díjat.



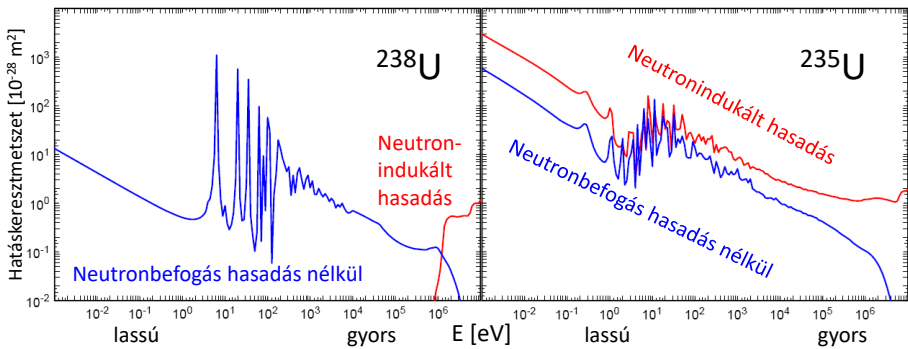
9.2. ábra. Az  $^{235}\text{U}$ -os uránmag neutronindukált hasadásának folyamata (az egyik lehetőség a sok közül) látható a bal oldali ábrán. A jobb oldali rajz a láncreakciót illusztrálja. Az egyes lépésekben néhány keletkező neutron elszökhet, vagy  $^{238}\text{U}$ -ban elnyelődhet, de ha átlagosan egynél több okoz hasadást, akkor az egyes „generációkban” exponenciálisan nő a hasadások száma.

nagy eséllyel: a  $^{235}\text{U}$  esélyének tizedével. Lassú neutronok a  $^{238}\text{U}$ -ban még az előzőnél is sok nagyságrenddel kisebb (lényegében nulla) eséllyel hoznak létre hasadást; itt a neutronbefogás a legvalószínűbb reakció, lásd a 9.3. ábrán.

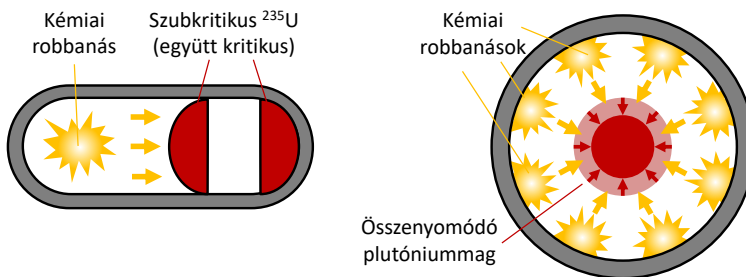
A legtöbb alkalmazáshoz meg kell növelni a  $^{235}\text{U}$ -os izotóp részarányát, ez a folyamat az **urándúsítás**. Erre tehát azért van szükség, mert a  $^{238}\text{U}$  hasadási valószínűsége alacsony, és elnyelné a neutronokat. Atombombában 85% fölötti  $^{235}\text{U}$ -tartalomra van szükség. Atomreaktor működtetése ugyan lehetséges természetes uránnal, de a legtöbb fajta reaktor működéséhez is kicsit (tipikusan 3-4% körülire) meg kell növelni a  $^{235}\text{U}$  arányát. A dúsítási folyamat még ma is kihívásokkal teli: a két uránizotóp kémiaiilag egyforma uránfém, semmilyen vegyi reakcióval nem lehet őket megkülönböztetni. Csak olyan módszerek jönnek szóba, amelyek valamilyen fizikai elv alapján kihasználják a kétféle izotóp magja közötti kicsiny tömegkülönbséget.<sup>4</sup> Uránt dúsítani tehát lehetséges, de nagyon komoly technikai felkészültséget igénylő feladat.

A maghasadás kiaknázásnak alapvető eleme, hogy hasadási **láncreakció** alakuljon ki. Ez azért lehetséges, mert minden hasítás során, mint láttuk, átlagosan 2-3 neutron keletkezik. Ha ezek (majdnem) mind hasítanak, akkor a következő generációban már 8-10 neutron is jelen lehet, azaz a neutronok (és ezzel a hasadások) száma generációnként 2-3-szorosa lesz az előzőnek. Ebben az esetben tehát, mivel egy hasadásgeneráció a másodperc törtrésze alatt lezajlik, szinte azonnal elhasad majdnem az összes rendelkezésre álló uránmag. Lényegében ez történik egy atombomba robbanásakor. Atomreaktorban viszont arra van szükség, hogy a keletkező 2-3 neutronból átlagosan mindig pontosan egy okozzon további hasadást: ekkor a láncreakció hosszú évekig folyhat egyenletes teljesítményleadás mellett.

<sup>4</sup>Ehhez az urán valamilyen gáz halmazállapotú vegyülete kell, ahol ráadásul a többi alkotóelemnek csak egyféle izotópja lehet (különben nem tudhatnánk, hogy az uránizotóp miatt nehezebb-e a molekula): tulajdonképpen a rendkívül kényelmetlenül kezelhető urán-hexafluorid ( $\text{UF}_6$ ) az egyetlen lehetőség. Ezután módszer lehet a gázdifúzió (membránon a kétféle tömegű gázmolekula kicsit különböző mértékben diffundál át): ez sok befektetett energiát igényel. Szóba jön még a centrifugálás (ahol szintén a kis tömegkülönbség miatt kicsit szétválik a két izotóp): ez nagyon nagy fordulatszámot, emiatt extra minőségű acélt és fejlett irányítástechnikát igényel: még ma is kihívás.



9.3. ábra. Itt a hasadás és a neutronbefogás valószínűsége látható a két izotópra.  $^{235}\text{U}$  esetén a lassú neutronokkal való hasadás a legvalószínűbb, de gyors neutronokkal is lehetséges. A  $^{238}\text{U}$  a lassú neutronokat mindig befogja, de gyors neutronokkal itt sem kizárt a hasadás (noha valószínűtlenebb). A középső energiatarományban látható oszcilláció annak köszönhető, hogy sok metastabil állapot található ezeken a gerjesztési energiákon.



9.4. ábra. Az atombomba két lehetséges felépítésének sematikus ábrája. A lényeg mindig az, hogy a kezdetben (a szállítás, majd ledobás során) még nem kritikus mennyiségű hasadóanyagot valahogy szuperkritikussá tegyünk: vagy két kisebb rész összepréselésével, vagy egy nagyobb gömb kompressziójával. Mindkét esetben csökken a tömegegységre jutó felszín, így kevesebb neutron szökik meg, és meghaladjuk a kritikus mennyiséget.

#### 9.1.4. Az atombomba

Az **atombombában** a 235-ös urán hasadásából gyors neutronok keletkeznek, amelyek (gyorsan) újra hasíthatnak. A tervszerű működéshez arra van szükség, hogy a lehető legtöbb, hasadásban keletkezett neutron újra hasadást okozzon. Egy urántömb felületén ugyanakkor **kiszökhetnek a neutronok**, vagy esetleg más miatt (például neutronbefogás esetén) nem okoznak hasadást. Így ugyan 2-3 neutron keletkezik, de **nem mind okoz hasadást**. A kiszökés elsősorban geometriai okból következik be, a **felület/térfogat aránytól** függ, azaz kis gömb esetén arányosan több a szökés, mint nagy gömb esetén. Ha a további hasadást okozó neutronok száma egynél nagyobb, láncreakció következhet be. Létezik egy „**kritikus tömeg**”: az ennél nagyobb gömb felületén már nem szökik ki túl sok neutron. Az urán 235-ös izotópjából álló gömb esetén a kritikus tömeg körülbelül 52 kg, ami 17 centiméteres átmérőnek felel meg.

Az atombomba kritikus mennyiségű hasadóanyagból áll, hogyan lehet tehát elérni, hogy ne robbanjon fel azonnal? Úgy, hogy a robbantáshoz két kisebb („szubkritikus”)

tömböt egy kisebb (hagyományos robbanóanyaggal való) robbantással egyesítenek: implóziós (gömbszerűen befelé robbantásos) technikával, vagy egyszerűen összelöve a két darabot (lásd a 9.4. ábrát). Így együtt már elérhető a kritikus tömeg. Ekkor aktiválódik egy neutronforrás is, amely elindítja a láncreakciót, és a bomba felrobban. Lényeges, hogy a keletkező hő ne vesse szét túl korán a hasadóanyagot, mielőtt még a lehető legtöbb hasadás lezajlott volna. Ennek elkerülése végett valamilyen nehéz burokba helyezik az uránt.

Atombombát a plutónium (Pu) 239-es izotópjából is készítenek. Ez a természetben nem található meg (mivel 24 ezer év a felezési ideje), reaktorokban állítják elő  $^{238}\text{U}$ -ból, neutronbefogással (amelynek során  $^{239}\text{U}$  keletkezik, és ez két  $\beta$ -bomláson keresztül alakul át plutóniummá). Hasadása során ugyanúgy körülbelül 200 MeV energia keletkezik, de a neutronindukált hasadási valószínűsége nagyobb, mint  $^{235}\text{U}$  esetén, és átlagosan több neutron is keletkezik egy hasadásban. Ezért egy  $^{239}\text{Pu}$  gömb kritikus tömege csak 10 kg, ami 10 cm-es átmérőnek felel meg. Ugyanakkor ebben az esetben is problémát jelent egy másik izotóp jelenléte: reaktorban való plutóniumgyártáskor  $^{240}\text{Pu}$  is keletkezik, amely pedig relatíve nagyobb valószínűséggel spontán hasad. A  $^{240}\text{Pu}$  jelenléte tehát megakadályozhatja a sikeres robbanást: a spontán hasadásban keletkező neutronok túl hamar beindítják a láncreakciót, mielőtt még a plutóniumtömb (az összelövés során) eléri az ideális geometriai elrendezést, ez pedig túl korán szétveti a bombát, mielőtt még a láncreakció teljesen kifejlődhetne. Bomba készítésére csak a  $^{240}\text{Pu}$ -magokat körülbelül 7%-nál kisebb arányban tartalmazó plutónium alkalmas: nem szabad a bomba céljára való plutóniumtermelésre használt uránrudakat sokáig a reaktorban hagyni, néhány hetente cserélni kell őket. Kereskedelmi atomerőműben termelődött plutónium tehát (ahol éveket tölt a reaktorban az üzemanyag) nem igazán alkalmas bombagyártásra.

Látható, hogy az atombomba készítéséhez minden esetben nagy technikai fejlettségre van szükség: mind az urándúsítás, mind a plutóniumtermelés (és a precíz implóziós technika kidolgozása) igen nehéz folyamat. Ez az oka annak, hogy kevés országnak van atombombája. A szükséges alapanyagok és eszközök kereskedelmének és szállításának ellenőrzése az **atomsorompó-egyezmény** betartásának egyik fő módszere.

### 9.1.5. Az atomreaktor

A maghasadás kontrollált hasznosításának alapfeltétele, hogy ne egyszerre, robbanás-szerűen szabaduljon fel a hasadási energia, hanem **időben egyenletesen** elosztva. A hőt elektromos energiává alakítva így állandó energiaforrást hozhatunk létre. A reaktor működésének alapja tehát a hasadások másodpercenkénti számának állandósága. Ha a reaktorban az egy hasadás után keletkező neutronok átlagosan egynél több további hasadást okoznak jelentős időn keresztül, akkor „megszaladás” következik be. Atombombában éppen ezt kell elérni, reaktorüzemi szempontból ez azonban balesetnek minősülne. Ha egynél kevesebb további hasadás történik, akkor viszont hamar leáll a reaktor, hiszen „elfogynak” a neutronok. Akkor működik stabilan a reaktor, ha minden hasadásból keletkező neutronok közül **pontosan egy** okoz további hasadást. Az egy hasadásból származó és újabb hasadás okozó neutronok számát  $k$  **sokszorozási tényezőnek** nevezzük: a  $k = 1$  állapotot kell tehát fenntartani.

Ahogy a 9.3. ábrán láttuk, a hasadás valószínűsége lassú neutronok esetén lényegesen nagyobb. Ugyanakkor a hasadásban keletkező neutronok **gyorsak**, ezért **le kell lassítani őket**. A lassítást végző anyag az úgynevezett **moderátor**: ez valamilyen

olyan anyag, amely könnyű atommagokat tartalmaz (a neutronok ezekkel ütközve mozgási energiájuk nagy részét átadhatják). Alkalmos lehet a grafit (szén), a berillium, de legkézenfekvőbb a (hidrogént tartalmazó) közönséges víz (vagy akár nehézvíz), amely egyúttal a keletkező hőenergiát elszállító hűtőközegnek is alkalmas. A moderátor által lelassított neutronok nagy része hasadást tud okozni (de csak az  $^{235}\text{U}$ -ben, a 238-as izotóp elnyelheti őket, vagy nem lép reakcióba). Éppen ezért elég lehet csak mérsékeltén dúsítani az uránt. Grafit (és nehézvíz) alkalmazásával természetes uránból is lehet reaktort készíteni: eleinte ilyenek fejlesztésére koncentráltak. A legelterjedtebb azonban a természetes vízzel moderált atomreaktor lett: ehhez enyhén, 3-4% körülire kell dúsítani az uránban az  $^{235}\text{U}$  részarányát.<sup>5</sup> A dúsítási technológia terjedésének korlátozása ezért nem gátolja meg az atomenergia békés célú hasznosítását.

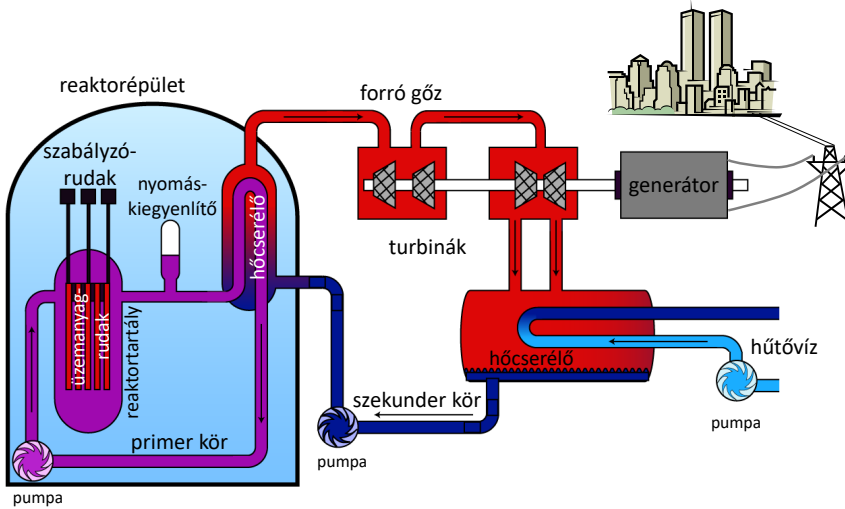
Érdekesség, hogy a  $^{235}\text{U}$  izotóp gyorsabban bomlik, mint a 238-as tömegszámú: több milliárd éve tehát még nagyobb volt a 235-ös izotóp részaránya. Így a talajvízzel mint moderátorral együtt *természetes atomreaktor* indulhatott be. Oklóban, Gabonban (uránbányászat során) erre bizonyítékot is találtak: a körülbelül 2 milliárd éve „üzemelt” természetes reaktorban keletkezett (és radioaktivitásukat már rég elvesztett) hasadási termékek javarészt a közelben maradtak; ezek vizsgálatával sok információ volt kapható a reaktor hajdani működéséről. Ez alapján az derült ki, hogy ezen természetes atomreaktor legfeljebb 100 kW teljesítménnyel üzemelt, és a keletkező hő 30 perc után elpárologtatta a vizet. Az emiatt kihűlő anyagba visszatérő víz okozta moderálás két és fél óra után újra beindította a reaktort, a reaktor pedig ezt a körülbelül háromórás ciklust követte sok-sok évezreden át.

Normál üzemű reaktorban a neutronsokszorozási tényezőnek egyhez minél közelebb kell lennie. Ennek részletei túlmutatnak jelen jegyzet keretein, de megemlítjük, hogy többféle természetes **visszacsatolás** létezik, amely egyenletes reaktorüzemet biztosít. A legfontosabb, hogy ha valamilyen ok miatt a neutronsokszorozás hirtelen egy kicsit megnő, és emiatt megnő a láncreakció sebessége, akkor ez melegíti az üzemanyagot, és kiderül, hogy a nagyobb hőmozgás miatt az üzemanyagban lévő  $^{238}\text{U}$  több neutron fog elnyelni. Ez a hatás tehát azonnali visszacsatolásként csökkenti a láncreakció „kilengését”.

A teljesítmény vezérléséhez **szabályzórudakat** alkalmaznak, amelyek neutronelnyelő anyagból (kadmium, bór) vannak. Ha betoljuk őket az üzemanyagot tartalmazó régióba, akkor sok neutron elnyelnek, és így egyre kevesebb hasadás következik be: a reakció intenzitása csökken, végül a reaktor leáll. Ha kihúzzuk a rudakat, akkor viszont egyre több hasadás történik, a reaktor teljesítménye növekedni kezd. A szabályzórudakat pontosan olyan magasságban kell tartani, hogy  $k = 1$  legyen. Megemlítjük, hogy ehhez segítséget ad az, hogy a láncreakciót tovább vivő neutronok egy kicsi, de elegendő része nem rögtön a hasadásban, hanem akár több perccel később szabadul ki (a hasadásban keletkezett magok neutronkibocsátó bomlásából). Ez a megnövekedett időskála ad egy természetes „haladékot”, ami a szabályzórudakkal követhetővé teszi a neutronsokszorozás kis változásait, kilengéseit.

A reaktorban keletkező hő elszállításának első fokozatát nevezzük **primer körnek**, amely az üzemanyag körül kering, majd felmelegíti a **szekunder körben** keringő közeget (szintén vizet), amely gőzzé forrva hajtja a **turbinákat**, amelyek meghajtják a

<sup>5</sup>Ennek oka, hogy a természetes vízben lévő könnyűhidrogénmag (azaz proton) kismértékben elnyeli a neutronokat, a nehézvízben lévő deutériummag, illetve a szénatommag viszont alig.



9.5. ábra. A nyomottvízes reaktor működése. A maghasadás a reaktortartályban lévő üzemanyagrudakban zajlik. A keletkező hőt a primer körű víz (ami nagy nyomása miatt nem forr) viszi el, és még a reaktor betonkonténmentjében egy hőcserélőben (gőzfejlesztőben) átadja a hőt a szekunder körű víznek. Ez felforr, a gőz hajtja a turbinákat, azok pedig a generátort, így elektromos energiát termelve. A szekunder körű víz a hőjét szintén egy hőcserélőn át a hűtővíznek adja át.

**generátort**, és áram termelődik (feszültség indukálódik, a Faraday-féle indukciós törvénynek megfelelően). A szekunder körű vizet a turbina után természetes vízzel is lehűtik (hogy a turbinákon átmenő gőz lecsapódjon, és újra felforhasson). Az ezen az elven működő, úgynevezett nyomottvízes reaktor (PWR) vázlatát lásd a 9.5. ábrán. Ezek egyik fő **természetes biztonsága** (a már említett üzemanyag-hőmérsékleti visszacsatoláson túl) az, hogy ha megszalad a reaktor, a moderátor (víz) elforr, a neutronok kevésbé lassulnak le, ezért kevésbé okoznak hasadást, így a teljesítmény visszacsökken.<sup>6</sup> Napjainkban az atomerőművi blokkok nagy többsége vízmoderátoros reaktor, a különbség többnyire csak a moderátor és primer körű víz természetében van: a reaktorok egy része nehézvizet ( $D_2O$ ) használ. A vízfóraló (vagy fóralóvízes) reaktorok (BWR) is hasonló elven működnek, ezekben a turbinát hajtó gőz közvetlenül a reaktorban termelődik (a víz elforrásával).

A maghasadással működő atomreaktorok üzeme során elenyésző mértékben keletkeznek káros anyagok, és a környezetkárosító vagy emberre is veszélyes balesetek esélye is elenyésző (összevetve például a szénbányászat vagy gázkitermelés során történő balesetekével). Ugyanakkor az üzemanyagcellákban történő maghasadások után visszamaradó hasadványanyagok radioaktívak, és bár az aktivitásuk többnyire kicsi (azaz kevés bomlás történik időegység alatt), a felezési idejük magas is lehet, akár évmilliókban

<sup>6</sup> A grafitmoderátoros, de vízhűtésű reaktorokban ez a „biztonsági fokozat” hiányzik (mivel a grafit ott marad forró sodás esetén is), sőt fordított hatás van: a víz elforrása (a víz neutronelnyelésének kiesése miatt) csak rásegít a teljesítménynövekedésre. Ezt normál üzemben bőven kompenzálja az üzemanyag-hőmérsékletre vonatkozó mindig meglévő (fent említett) negatív visszacsatolás; alacsony teljesítményű üzem viszont veszélyes lehet. Ez a hiba hozzájárult a csernobili atomerőmű (ilyen típusú) 4. reaktorának 1986-os balesetéhez.



mérhető (például a keletkező  $^{129}\text{I}$ -,  $^{107}\text{Pd}$ -,  $^{135}\text{Cs}$ -hasadványoké, illetve az uránból keletkező transzurán-atommagoké). Az így keletkező **radioaktív hulladék** aktivitásának jelentős részét az első évtizedekben elbomló anyagok adják, de a sugárzás még száz év múltán is mérhető. A hulladékot így mélyen a föld alá, vízzáró rétegek közé telepített betonkoporsókban lehet elzárni.

A fent említettektől eltérő típusú reaktorok is léteznek. Ilyenek például az úgynevezett **gyorsreaktorok**, ahol nincs moderátor, a neutronok nem lassulnak le. Emiatt több (dúsabb) hasadóanyagra van szükség (és speciális hűtőközegre, például folyékony nátriumra), de elérhető, hogy hasadásonként (a  $^{238}\text{U}$  neutronbefogásából, két  $\beta$ -bomlással) egynél több  $^{239}\text{Pu}$ -mag keletkezzen, amely (ahogy említettük) szintén hasadóanyag. Ezáltal tehát az eddig használhatatlannak tűnő  $^{238}\text{U}$  izotóp (amely szinte korlátlanul rendelkezésre áll) is hasznosítható lesz, és a transzurán-atommagok is újrahasznosulnak (és a radioaktív hulladék is mentes lesz ezektől). Urán helyett tóriumot (Th) használó reaktorokkal is végeznek kísérleteket: az uránnál körülbelül négyszer gyakoribb tórium természetes izotópjából, a  $^{232}\text{Th}$ -ból egy neutron befogásával (két  $\beta$ -bomlás után) hasadó  $^{233}\text{U}$ -mag keletkezik, amely tehát üzemanyagként elhasználható. A  $^{233}\text{U}$  hasadásából jóval kevésbé keletkeznek transzurán-atommagok, ugyanakkor itt nehezebb megvalósítani a neutronok elég hatékony megtartását (hogy az egy hasadásból keletkezett neutronokból az egy további hasítás mellett „jusson” még egy további hasadó mag termelésére is átlagosan).

Ezek a reaktortípusok mindenesetre lényegesen kedvezőbb tulajdonságokkal rendelkeznek a mai, úgynevezett második és harmadik generációs reaktoroknál.<sup>7</sup> A negyedik generációs reaktortípusok előnyei:

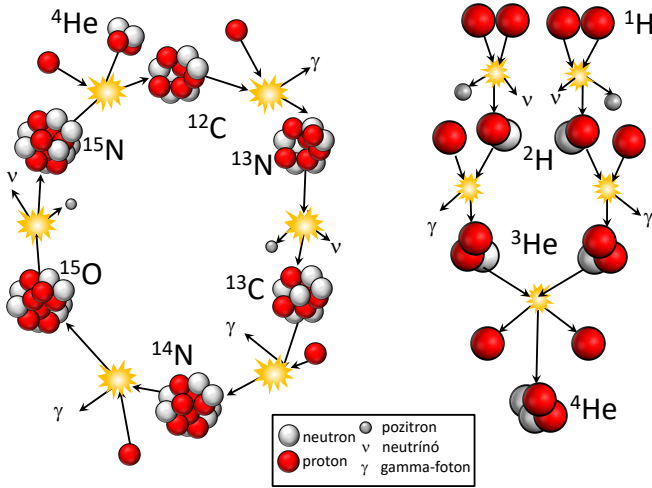
- Millió helyett 100-1000 éves felezési idejű izotópok maradnak hátra a radioaktív hulladékokban.
- Hatékonyabb az üzemanyag-hasznosításuk, és így gazdaságosabb az üzemeltetésük.
- A korábbi reaktorok radioaktív hulladékát újra tudják hasznosítani.
- Magasabb fokú beépített, passzív biztonsággal rendelkeznek.

Sokak szerint a következőkben tárgyalandó fúziós erőművek helyett ezek jelentik az emberiség energiatermelésének jövőjét – jelenleg azonban a „hagyományos” atomreaktorok urán üzemanyaga még annyira olcsó, hogy nem feltétlenül éri meg az ilyen fejlettebb (és technológiailag kicsit igényesebb) reaktorokat üzembe állítani. Mindenesetre prototípusként már évtizedek óta, nem régóta pedig kereskedelmi üzemben is működnek már ilyen, IV. generációsnak tekinthető atomreaktorok (például Oroszországban és Kínában). Elterjedésük 2030-2040 körülről várható, néhány kisebb léptékű technológiai fejlesztéssel egybekötve.

### 9.1.6. A Nap és a csillagok működése, a magfúzió és a nukleoszintézis

A Nap által kisugárzott fény és hő még a Földön, százötvenmillió kilométeres távolságban (!) is roppant intenzív, ahogy azt nap mint nap tapasztaljuk. Felmerült a kérdés,

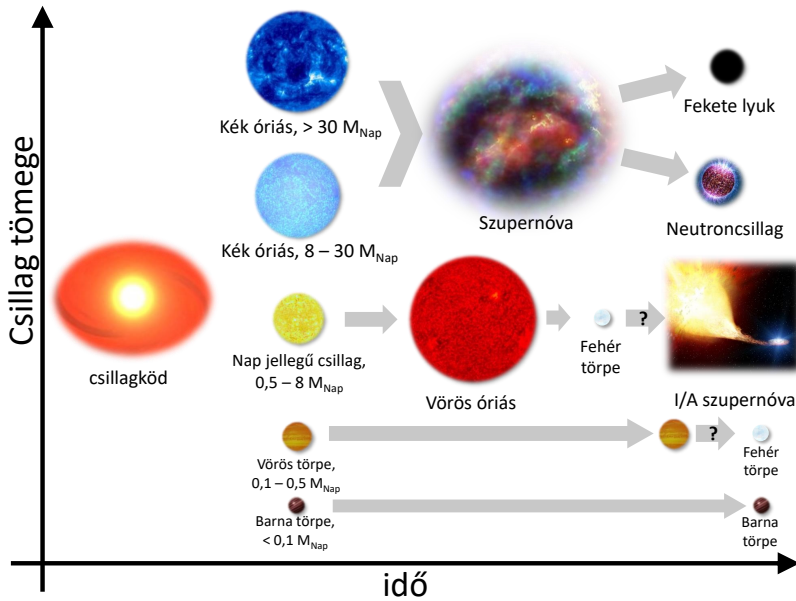
<sup>7</sup>A 60-as évek közepéig épült reaktorokat sorolják az első generációba, a 90-es évek végéig épültek a másodikba, míg ezek továbbfejlesztett változatai, a manapság épülő reaktorok a III. generációba tartoznak.



9.6. ábra. A csillag belsejében zajló fúziós folyamatok. A bal oldali folyamat a proton-proton lánc, amely a Napban és könnyebb csillagokban zajlik le. A jobb oldalit CNO-ciklusnak hívjuk, ez a Napnál nehezebb csillagok fő energiatermelő mechanizmusa. Ezenfelül több folyamat is lehetséges, például a tripla-alfa folyamatban héliummagok egyesülnek szénné, további folyamatokban oxigénné és más nehezebb elemekké. Az ábra bal oldala lényegében azonos a 6.10. ábrával.

hogy **honnan keletkezik a Nap energiája**. Sokáig az volt a feltételezés, hogy a Nap valamilyen kémiai folyamatból nyeri ezt az energiát, ilyen intenzív energiatermelő kémiai folyamat azonban nem ismert (pontosabban: ismerve a tömegét, adódik, hogy a Nap (csillagászati léptékben) messze túl hamar elhasználna minden szóba jövő kémiai energiaforrást). Felmerült, hogy egyfajta összehúzódás során nyert gravitációs helyzeti energia is fedezheti a Nap hőjét, azonban a számolások alapján erről az ötletről is kiderül, hogy nem biztosítana elegendő energiát, ismerve a Föld korát (vagy akár csak az élővilágét is). 1919-ben Russel írta le először, hogy a Nap talán a **hidrogénatomok héliummá egyesülése** során nyeri az energiáját; ezt (a hidrogén jelenlétét) alátámasztani látszott a Naptól jövő fény vonalas színképe is. Sokkal később sikerült ennek a magfúzióknak az elméletét is leírni. 1939-ben **Bethe** dolgozta ki az egyik változatot. A probléma az, hogy bár a folyamat energetikailag kedvező, a magok az **elektromos taszítás** miatt nem tudnak közel kerülni egymáshoz, és így egyesülni sem. Ezt a **Coulomb-gátat** kell először legyőzni, amihez hatalmas energiára van szükség. Ez akkor lehetséges, ha a magok **hőmozgása annyira nagy**, hogy az ilyenkor bekövetkező ütközésekkor legyőzhető a Coulomb-gát. Bethe számolásai nyomán kiderült, hogy ehhez **százmillió fok** környéki hőmérsékletre van szükség. A Nap felszíni hőmérséklete ezzel szemben csak körülbelül 5000 fok – a belsejében ennél sokkal melegebbnek kell lennie.

A **csillagokban** ténylegesen ilyen fúziós jellegű folyamatok zajlanak le, amelyek mérlege az, hogy négy protonból (hidrogén-atommagból) lesz egy  ${}^4\text{He}$  atommag. Ehhez azonban bonyolultabb reakciósorozatra van szükség, lásd 9.6. ábrát. A Napban a **proton-proton lánc** a fő energiatermelő mechanizmus (10-15 millió Kelvin körül, ez alatt drasztikusan lecsökken a reakció bekövetkezési valószínűsége), míg nehezebb csillagokban a **CNO-ciklus** dominál (mert ezek nagyobb hőfokon „égnek”). Mindkét



9.7. ábra. A csillagok fejlődése. A csillag egyfajta köd gravitációs összehúzódása nyomán jön létre, majd a kezdeti tömegétől függően különböző fejlődési állomásokon megy át. A legkönnyebb és egyúttal leghidegebb csillagokban be sem indul a fúzió, ezeket barna törpének nevezzük. Minél nehezebb és forróbb egy csillag, annál rövidebb ideig él. A könnyű csillagok sokáig élnek, és anyaguk nagy részét levette fehér törpévé alakulnak (a levett anyag pedig további csillagok alapanyagául szolgálhat). A nehéz csillagok szupernóvarobbanásban semmisülnek meg, a magmaradványából pedig neutroncsillag vagy fekete lyuk képződik.

folyamatban körülbelül 27 MeV energia keletkezik, ennyivel (ennek  $c^2$ -ed részével, lásd  $E = mc^2$ ) könnyebb ugyanis egy héliummag négy protonnál.

Az Univerzum történetének első szakaszaiban nem voltak atommagok, csak protonok és neutronok. Ezekből kezdtek el kialakulni az első atommagok (deuteron, triton, hélium satöbbi), a fúzió adta energiátöbbletet kihasználva. Ezt hívjuk **primordiális nukleosintézisnek**. Ezek az atommagok gigantikus méretű molekuláris felhőkbe tömörültek, amelyek a gravitáció hatására elkezdtek összehúzódni, és ha elég nagy volt a felhő, akkor megkezdődött a csillagkeletkezés. A nagyon kicsi, a Nap tizedénél kisebb csillagok képtelenek elérni a hidrogénfúzióhoz szükséges hőmérsékletet, úgynevezett barna törpévé alakulnak. Ezek néhány százmillió évig a gravitációs összehúzódás miatt melegnek ugyan, de nem eléggé. A nagyobb tömegű csillagoknál már beindulhat a proton-proton ciklus, hőmérsékletük eléri a tízmillió fokat. Ezen a hőmérsékleten a fúzió miatt kiáramló energia hatására kialakul az egyensúly, a gravitáció okozta zsugorodás megszűnik, és a csillag hosszú ideig egyenletesen termeli az energiát.

A legtöbb csillag életének első szakaszában a **hidrogén fuzionál** héliummá. Ahogy fogy a hidrogén, a csökkenő hidrogénfúzió miatt néhány milliárd éves csillagoknál a sugárzás már nem tart ellen a gravitációnak: ez utóbbi összehúzza a csillagot, amitől abban viszont megnő a hőmérséklet, és az így elért több százmillió fokal hőmérsékleten beindul a **hélium fúziója**, **berilliummá** és **szén**é. Ettől jelentősen megnövekszik a

Fúziós folyamat	szükséges hőmérséklet	időtartam
H → He	70 MK	10 millió év
He → Be, C	200 MK	1 millió év
C → Ne, Na, Mg, Al	800 MK	1000 év
Ne → O, Mg	1600 MK	3 év
O → Si, S, Ar, Ca	1800 MK	3 hónap
Si → Ni, Fe	2500 MK	5 nap

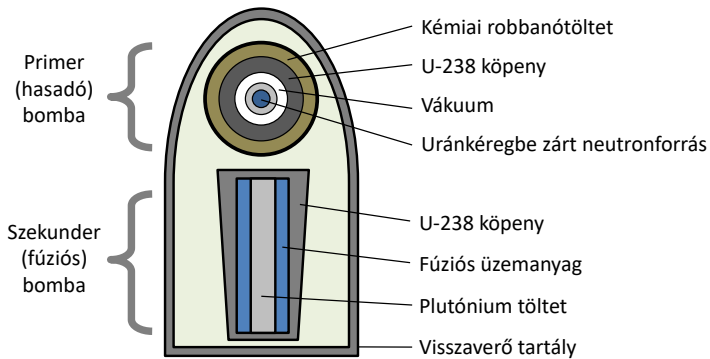
9.1. táblázat. Egy 25-szörös naptömegű csillag élete, amely a szilíciumégés után szupernóva-robbanással zárul.

belső nyomás, és a csillag felfúvódik, a felszíne pedig kissé lehül, s ennek következtében vörös színű lesz, ezért **vörös óriásnak** nevezzük. A Nap a számítások szerint mintegy ötmilliárd év múlva ilyen vörös óriás lesz (ekkor a Nap mérete talán a Föld pályájáig is el fog érni, de a Vénuszig biztosan). A csillag ebben az állapotban ismét körülbelül stabil állapotba kerül, egy darabig; amíg el nem fogy a benne lévő hélium. Ekkor újabb gravitációs összehúzódás hatására még nagyobb lesz a hőmérséklet, nagyobb tömegszámú magok egyesülése indul be. A csillag további sorsa a méretétől függ.

A kisebb csillagok az üzemanyaguk elfogyta után lassan **fehér törpévé** zsugorodnak (ezek napnyi tömegű, de Föld méretű objektumok). Ezek összehúzódását egy kvantummechanikai eredetű (az elektronokra érvényes Pauli-elvből származó) hatalmas nyomás gátolja, azonban hőmérsékletük csak pár százezer fok, így energiatermelés már nem zajlik bennük, hanem egyszerűen kihűlve fekete törpévé válnak. Ezt a folyamatot azonban nem ismerjük pontosan, mivel az ilyen kicsi (fél naptömegnél kisebb) csillagok olyan lassan égetik el az üzemanyagukat, hogy a Világegyetem egyszerűen még nem elég öreg ahhoz, hogy egyetlen ilyen fekete törpe is létrejöhetett volna benne.

A nagyobb csillagokban a hőmérséklet emelkedése nyomán nehezebb elemek fúziója is lehetségessé válik (lásd a 9.1. táblázatot). Ezekben a csillagokban az üzemanyag robbanásszerű, hirtelen elfogyása után a csillag **összeroppan**. Egyes speciális csillagok életük utolsó szakaszában egy gigantikus méretű termonukleáris bombaként felrobbannak, és a csillag összes anyaga rendkívül gyorsan vas körüli elemekké alakul át. Ezt a jelenséget **Ia típusú szupernóvának** hívjuk, és kettőscsillag-rendszerekben jönnek létre. Annak köszönhetőek, hogy az egyik (kihunyt) csillag folyamatosan anyagot nyel el a „párjától”, de 1,44 naptömeg (az úgynevezett Chandrasekhar-határ) felett nem létezhetnek fehér törpék, az ezt elérő csillag felrobban. Az ilyen típusú robbanásoknak nagy jelentőségük van a kozmológiában, ahogy a 7.2.3. szakaszban is láttuk.

Igazán nagy méretű csillagok nukleáris fűtőanyaguk teljes elhasználása után kompakt objektummá alakulhatnak másfajta szupernóvarobbanások során, ahol a csillag magja roppan össze saját gravitációs súlya alatt. Ezután a maradványokból **neutroncsillag** vagy úgynevezett **fe fekete lyuk** keletkezhet. A robbanás során (energiabefektetéssel) a **vasnál és nikkelnél nehezebb elemek** is létrejönnek. Ezek aztán szétrepülnek a Világegyetemben, és újabb csillagokba épülnek be, illetve a csillagok körüli bolygórendszerek anyagát fogják alkotni. A Földön lévő szén, oxigén, szilícium, vas is más csillagokban jött létre, a nehezebb elemek pedig ezekben a bizonyos speciális szupernóva-robbanásokban.

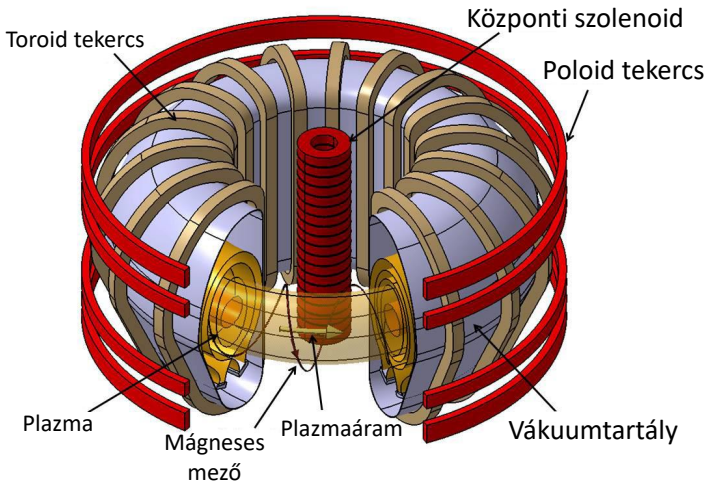


9.8. ábra. A Teller–Ulam-féle termonukleáris bomba vázlata. A beindítást egy hasadással működő atombomba végzi. Ennek felszabadult energiája hőenergiaként, javarészt röntgensugarak formájában fénysebességgel terjed (míg az egész szerkezetet végül szétvető lökéshullám ennek töredékével, körülbelül hangsebességgel). A bomba külső köpenye nehézfémről (például urán) készül, ez a röntgensugárzást visszaveri és a fúziós üzemanyag (szintén nehézfém) burkolatára fókuszálja. Ez eleinte hidegen tartja a fúziós üzemanyagot, majd részben elpárologva (mintegy „befelé fordított rakétaként”) kellően összenyomja azt. A fúziós üzemanyag lítium-deutérium keverék (LiD só), ennek közepén egy plutóniumtöltet van, ez ezen a ponton maghasadás bombaként felrobban, ami a lítiumból neutronokkal tríciumot (T) termel, és az optimális D+T keveréket felfűti a fúzió hőmérsékletére. A fúzióban keletkező neutronok végül maghasadásokat indukálnak a fúziós üzemanyag uránköpenyében is: a modern termonukleáris bombák energiájának több mint 50%-át ez a folyamat adja (ezért kicsit félrevezető a szokásos „hidrogénbomba” elnevezés).

### 9.1.7. A termonukleáris fúzió

A fentiekben láthattuk, hogy a csillagok hatékonyan szabadítják fel az atommagok egyesítése révén kinyerhető energiát. Az emberiségnek is sikerült ez már részben, békés és háborús céllal is. A **magfúziós energiafelszabaduláson** alapuló bombát Neumann János számításai nyomán Teller Ede és Stanislaw Ulam csoportja fejlesztette ki 1951-ben, és 1952-ben végezték az első kísérleti robbantást. Ezen „hidrogénbomba” indítója egy hasadásos atombomba, ezzel érik el a megfelelő energiakonzentrációt a fúzió beindulásához (lásd a 9.8. ábrán). 1955-re a Szovjetunió is sikerült kifejlesztenie egy hasonló elven működő bombát, később az Egyesült Királyság, Franciaország és Kína is sikerrel járt. Adott nagyságú atomrobbanást a legcélszerűbb és legolcsóbb ilyen termonukleáris fegyverekkel elérni (ha már a technológia ismert): az atomfegyverrel rendelkező országok nagy részének fő csapásmérő ereje ilyen típusú termonukleáris robbanófejekből áll.

A fúziós bombát beindító hasadó bomba előállításához urándúsításra vagy plutóniumtermelésre van szükség, ezért ennek létrehozását könnyű nemzetközi felügyelet alá helyezni. Létezik egy hipotetikus bombafajta, a tisztán fúziós bomba, amelyben a szükséges milliófokos hőmérsékletet nagy teljesítményű lézerrel vagy más módszerrel hozzák létre. Ebben az esetben radioaktív kihullás sem nagyon keletkezik, csak gigantikus mennyiségű hő. Az ilyen bomba megépítése könnyebben titokban tartható lenne – ugyanakkor szerencsére ennek olyan műszaki akadályai vannak, amelyeket még senki sem tudott legyőzni.



9.9. ábra. Egy tokamak vázlata (forrás: Forrás: M. Kikuchi és munkatársai (2012): *Fusion Physics*. Nemzetközi Atomenergia-ügynökség (IAEA), Bécs). Egy hélikus, spirális mágneses tér alakul ki a tórusz alakú vákuumtartályban, amely fókuszálja és stabilan tartja a százmillió fokos plazmát. Ebben folyamatosan zajlik a fúzió. A tórusz fala elnyeli a fúzióban termelődő hatalmas energiájú neutronokat (ezeket a mágneses tér kiengedi): az itt keletkező hőt lehet(ne) elektromos energiatermelés céljából hasznosítani.

A hőmozgáson alapuló fúziós reakciót **termonukleáris fúzió**nak hívjuk. Hogy ez stabilan bekövetkezhesen, óriási energiasűrűsége, azaz hőmérsékletre van szükség, ahogy az előbb tárgyaltuk. A Napban azonban a térfogategységre eső energiafelszabadulás nem túl nagy, köbcentiméterenként 1 mW-nál is kevesebb.<sup>8</sup> Ha földi alkalmazásokhoz is jelentős energiafelszabadulást akarunk elérni, a Nap belsejében lévénél sokkal nagyobb hőmérsékletet kell elérni. Ezt nyilván nehéz megoldani, mert semmilyen tartály nem bír ki ekkora hőmérsékletet, illetve kapcsolódóan nagy nyomást. A csillagokban a gravitáció tartja össze az anyagot, míg a Földön **mágneses térben** lehetséges lebegésben tartani az anyagot, például egy **tóruszban áramló plazma** formájában. Ennek egy megoldását **tokamak**nak hívják, ilyeneket sikerült már építeni és rövid ideig üzemeltetni (egy tokamak vázlatos rajzát lásd a 9.9. ábrán). A tokamakban áramló deuteron-triton plazmakeverék kezdeti felhevítését mágnes által indukált árammal végzik. A jelenlegi legnagyobb tokamak a **JET** (Joint European Torus), amely 16 MW teljesítményt tudott leadni egy másodpercig, 24 MW befektetése mellett. Már tervezik az **ITER** nevű tokamakot is, amely 2027-ben lehet kész, és 1000 másodpercig fog tudni 500 MW energiát termelni, 50 MW befektetése mellett. Ezt követi majd a **DEMO** nevű reaktor, amely 2 GW-ot fog tudni termelni, és bekapcsolják majd az elektromos hálózatba. Az ITER (és főleg a DEMO) kivitelezése azonban bizonytalan, még rengeteg technikai problémát kell leküzdeni ahhoz, hogy megvalósuljon.

Érdeemes megemlíteni, hogy más úton is kutatják a fúzió lehetőségét: például az USA Lawrence Livermore Labortóriumában kísérleteznek olyan nagy energiájú lézerek-

<sup>8</sup>Megjegyzésre érdemes, hogy „egy köbméter Nap” kisebb teljesítményű, mint *egy darab gyertya*. Persze a Nap *nagyon sok* köbméter...

	Nyersanyag	Technológia	Hatékonyság	Szennyezés	Kockázat
Fosszilis	Gyorsan fogy	Van	Közepes	Sok	Van
Maghasadás	Lassan fogy	Van	Nagyon jó	Kevés	Van
Magfúzió	Van	Nincs	Extrém	Nincs	Kevés
Antianyag	Nincs	Nincs	Extrém	?	?
Szél, nap	Van	Van	Rossz	Kevés	Közepes
Víz	Van	Van	Közepes	Van	Van

9.2. táblázat. Különböző energiaforrások jellemzőinek áttekintése. (Azonos a 6.1. táblázattal.)

kel, amelyek képesek arra, hogy a lézert egy D+T golyóra fókuszálva azt befelé összenyomják, annyira, hogy a fúzió (ilyenkor rövid) ideje alatt a golyót a saját mechanikai tehetetlensége kellően összetartsa. Jelenleg még kérdéses, hogy ezen az elven energia-termelő fúziós reaktor építhető-e. (Az említett amerikai kísérleti eszköz neve National Ignition Facility, „nemzeti begyűjtő berendezés”, de más országokban is vannak hasonló kísérletek. Ezek az ilyen kutatás mellett a hadászati termonukleáris bombák fizikáját is kutatják.) További érdekes megoldás a sztellarátor nevű berendezés, amely bonyolult, egyedi topológiájú mágneses térben áramoltatja a plazmát.

Ha sikerülne bármelyik fent említett megoldással stabilan működő fúziós erőművet létesíteni, igen kedvező feltételekkel (a kinyert energiához képest kevés nyersanyagbefektetés és kevés káros anyag keletkezése mellett) lehetne elektromos energiát termelni. Hasonlítsuk össze a különféle termelési/tárolási módszerekkel egységnyi anyag befektetése mellett kinyerhető energiát:

- Anyag + antianyag: körülbelül  $10^{11}$  MJ/kg
- Fúzió: körülbelül  $2 \cdot 10^8$  MJ/kg
- Maghasadás IV. generációs erőművekben: körülbelül  $8 \cdot 10^7$  MJ/kg
- Maghasadás atombombában:  $10^7$  MJ/kg
- Maghasadás „hagyományos” atomerőműben: körülbelül  $5 \cdot 10^5$  MJ/kg
- Fosszilis tüzelőanyagok: körülbelül 20-30 MJ/kg

Itt természetesen nem mindegy, hogy **milyen anyagot** kell befektetni. A fosszilis tüzelőanyagok **elfogyhatnak** nem túlságosan sokára, az urán lassabban fogy, és helyettesíthető plutóniummal vagy tóriummal, ahogy fent láttuk. Hidrogénből lényegesen több van. Az antianyagot csak az összehasonlítás kedvéért tettük ide – üzemanyagként hasznosítható antianyag mint nyersanyag, egyáltalán nem áll rendelkezésre. Fontos szempont még a **hatékonyság** és a **károsanyag-termelődés** is – minden szempontból optimális lenne a fúziós reaktor, azonban egyelőre kétséges, hogy mikorra tudjuk legyőzni a technikai akadályokat. A **megújuló energiák** (persze a Nap is kiég egyszer, ahogy a szelek sem fújnak örökké – a megújuló szó itt arra vonatkozik, hogy a holnap felhasználható energia mennyisége nemigen függ attól, hogy ma mennyit fogyasztottunk el belőle) szerepe is lényeges lehet, fontos azonban látni, hogy ezek is kapcsolódnak káros anyagok, amelyek a gyártáskor keletkeznek, és kockázatok is (például vízerőművek gátszakadása). Az *energetika* kérdésköre (társadalmi és gazdasági vonatkozásaival együtt) túlságosan komplex ahhoz, hogy itt bővebben tárgyaljuk. A különböző energiaforrások jellemzőinek a végletekig leegyszerűsített áttekintéséhez a 6.3.4 szakaszhoz hasonlóan lásd a 9.2. táblázatot.

## 9.2. Részecskefizika

### 9.2.1. Részecskegyorsítók és -detektorok

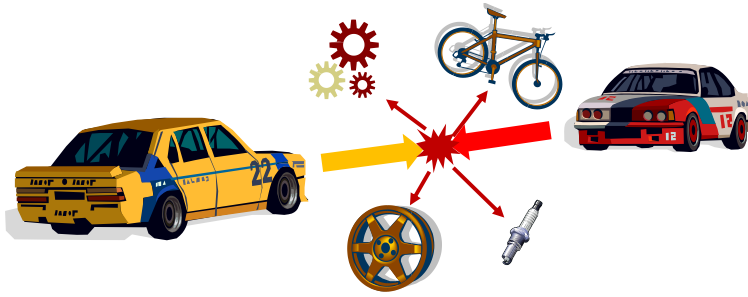
Ahogy a korábbi fejezetekben láttuk, az anyag atomokból áll, az atomok pedig protonokból, neutronokból és elektronokból. Felmerül a kérdés, hogy ezek a részek tovább bonthatóak-e – és ahogy kiderült, igen, a protont és a neutront kvarkok és gluonok alkotják, és az erős kölcsönhatás tartja őket össze. A részecskefizika ilyen jellegű kérdéseket tesz fel, azaz hogy mik az anyag alapvető építőkövei, és ezek között milyen kölcsönhatások hatnak. Érdeemes megemlíteni, hogy ezen alapvető építőkövek száma a tudomány eddigi története során ciklikusan változott: az ókorban négy „elemet” írtak le (föld, víz, levegő, tűz),<sup>9</sup> majd a középkorban rengeteg különböző anyagot ismertek meg. Dalton ezeket újfajta elemekkel írta le, ezekből körülbelül 30-at talált, ahogy a 8.1.1. szakaszban láttuk. Ilyen elemből egyre többet ismertek meg, a XIX. század végére az elemek periódusos rendszere közel 100 elemű lett. Ezen rendszer szabályosságából jötttek rá, hogy valójában az elemek (atomok) is részekből állnak: elektron, proton és neutron alkotja őket. Ezen három eleminek gondolt rész azonban nem sokáig „maradt egyedül”: a XX. század közepére százas nagyságrendben ismertek meg ezekhez hasonló *hadronokat* és *leptonokat*. Ezeket szintén táblázatokba rendezték, amelyek szabályosságából viszont ezek építőköveire, a kvarkokra következtettek. Eredetileg úgy tűnt, kétféle kvark alkotja az ismert anyagot, mára azonban elemi kvarkból és leptonból is rengeteg fajta ismert – ezeket is táblázatba rendezzük, ez a Standard Modell alapja (ahogy nemsokára kifejtsük). Hogy a történetnek itt vége van-e, avagy az eleminek gondolt részecskék száma nemsokára ismét lecsökken-e – ez már a részecskefizikusok mai generációjának feladata.

A részecskefizika titkait **részecskegyorsítókban** vizsgálhatjuk, itt elektromosan töltött részecskéket (elektronokat, atomokat, ionokat) gyorsítanak fel elektromos tér segítségével extrém energiákra, majd ütköztetik őket, és az ütközésekben keletkező részecskéket vizsgálják. Ez a módszer ahhoz hasonló, mintha a 9.10. ábrán látható módon két autót ütköztetnénk, majd a kirepülő részeket vizsgálva próbálnánk kitalálni, hogy mi is alkotja az autókat, illetve hogy milyen egyéb tárgyak (például biciklik) létezhetnek. Ez utóbbira az ad lehetőséget, hogy ha rengeteg ütközést megvizsgálunk, akkor az igen valószínűtlen folyamatok is egyszer-egyszer bekövetkezhetnek – és így noha igen valószínűtlen egy újfajta részecske létrejötte, néha mégis előfordul.

Ilyen részecskegyorsítóból van lineáris (amely egy egyenes pályán gyorsítja fel a részecskéket), illetve körkörös is. Ez utóbbi esetében a gyorsított részecskéket mágneses térrel tartják körpályán (a Lorentz-erővel), és a lineáris gyorsítókhoz hasonlóan elektromos térrel gyorsítják. Az első körkörös gyorsítók az úgynevezett **ciklotronok** voltak (lásd a 9.11(a). ábrát), néhány centiméter méretben. Ezekben két félkörben tettek meg egyre nagyobb sugarú köríveket a részecskék, a végén pedig egy céltárgyra vezették a nagyenergiás nyalábot. A modern körkörös gyorsítók **szinkrotron** technológiával készülnek (lásd a 9.11(b). ábrát), itt állandó sugarú pályán haladnak a gyorsítandó részecskék, végig ugyanabban a csőben, és a pályán tartáshoz szükséges mágneses teret növelik a gyorsítás során elért energiának megfelelően. Ezekből több kilométeres is készült, a genfi CERN LHC gyorsítógyűrűje például 27 km kerületű. Ebben azonban nem vezetnek ki a nyalábot, hogy a céltárgynak ütközzön, hanem két gyorsítógyűrűben egymással

<sup>9</sup>Egyes variánsokban egy ötödik elem, az úgynevezett kvintesszencia is szerepelt.



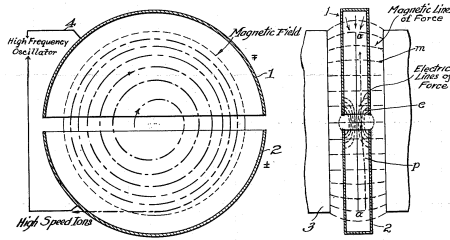


9.10. ábra. A részecskegyorsítók működési elvének analógiája. Két autót ütköztetve a kirepülő alakt részekből kitalálhatjuk az autók felépítését, illetve a ritkán keletkező egyéb tárgyak (például az ábrán is látható bicikli) azt is elárulják, hogy egyáltalán milyen tárgyak létezhetnek. Ez persze csak (valaki szerint) mulatságos analógia – de a részecskefizika valóban lényegében ezen az elven működik.

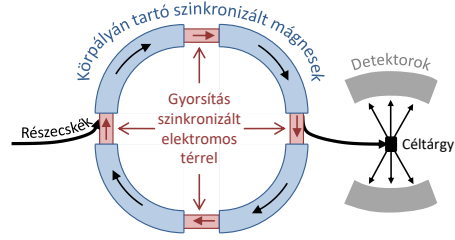
szemben keringenek a részecskék, és megfelelően irányítva a gyűrűk metszéspontjaiban szembetalálkoznak.

Részecskegyorsítókkal a hétköznapi életben is találkozunk: a régi (katódsugárcsőes) tévék és monitorok elektronokat gyorsítanak (lineárisan), és ezekkel keltnek fényt a képernyőn. A röntgensugárzás orvosi célú felhasználásához szintén elektronokat kell felgyorsítani. Rákos betegségek kezelésére használnak gyorsított protonokat is. A PET vizsgálatokhoz szükséges izotópot manapság szintén orvosi célú gyorsítóban állítják elő.

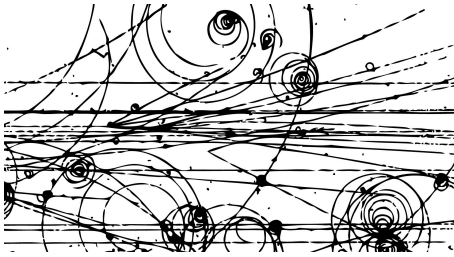
Az alapkutatót szolgáló gyorsítók célja azonban nagyenergiás részecskeütközések létrehozása, és ezáltal az anyag építőköveinek tanulmányozása. Az 50-es és 60-as évek óta a kutatások egyik fő iránya az, hogy minél több új részecskét találjunk, és ezeket rendszerezni tudjuk. Ehhez úgynevezett részecskedetektorokra van szükség. Ilyen például a **ködkamra**, ahol az áthaladó részecske pályája mentén a túlhűtött (túltelített gőzt tartalmazó) kamrában párakeletkezés jön létre, így láthatóvá válik a részecske nyoma (lásd a 9.11(c). ábrát). A **buborékkamrákban** pedig túlfűtött (azaz a felforrás határán egyensúlyozó) anyagban gőzbuborékok keletkeznek a részecskepálya mentén. Az **ionizációs kamrában** a részecskepálya ionizálja a gázt, az ionokat pedig elektromos tér segítségével szétválaszthatjuk és észlelhetjük (lásd a 9.11(d). ábrát). Szikrakamrákban nagyfeszültséget feszítenek ki fémek között, és a részecske hatására kisülés következik be. Emulziós detektorokban az áthaladó részecske (a fény fotólemezre gyakorolt hatásához hasonlóan) látható nyomot hagy. Ma a sokvezetékes gázöltésű és a félvezető anyagból készült detektorok a legelterjedtebbek. Az előbbi lényegében az ionizációs kamrához hasonlóan működik, az utóbbiakban az áthaladó részecske lecsökkenti a detektor félvezető anyagának ellenállását, ezt mérve szintén nyomon követhetjük a részecskék pályáját. Ha a detektorok **mágneses térben** vannak, akkor a rajtuk keresztülhaladó részecskék pályája elgörbül, és nyomukat követve a **pálya görbületéből** (a Lorentz-erő képletéből) kikövetkeztethető az impulzusuk. A nyomuk „erőssége” pedig többnyire az energiájukat árulja el. A sebességüket is mérhetjük, mindezekből pedig a tömegük és a töltésük is meghatározható, azaz a részecskék **azonosíthatóak**. Végül soron ezek minden kísérleti részecskefizikai kutatás alapjai.



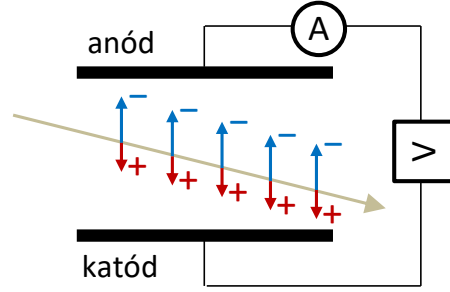
(a) A ciklotron szabadalmi ábrája.



(b) A szinkrotron felépítése.



(c) Egy ködkamra felvétele.

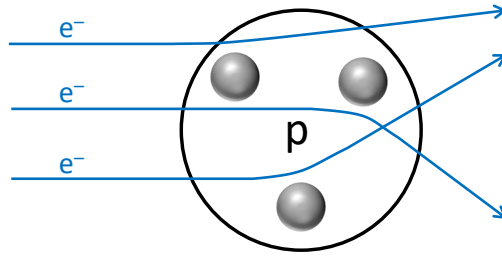


(d) Az ionizációs kamra.

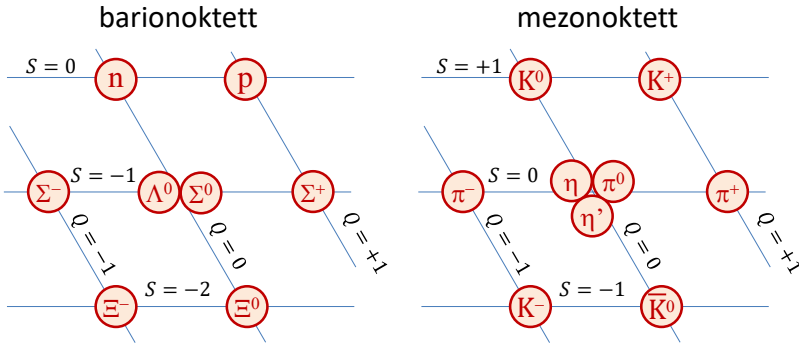
9.11. ábra. A részecskefizika kísérleti módszerei: részecskegyorsítók és részecske-detektorok.

Ahogy a 8.1.2. szakaszban is olvastuk, az atommag felfedezése úgy történt, hogy nagyenergiás  $\alpha$ -részecskékkal bombáztak aranyatommagokat. Az eltérült (szórt) részecskék eloszlása aztán azt mutatta, hogy az atom tömegének java része egy parányi központi régióban, az atommagban koncentrálódik. Azt mondhatjuk tehát, hogy a nagyenergiás részecskékkal **beleláttunk** az atom szerkezetébe. Ahogyan azonban a **fény hullámhossza korlátozza** a fényvel megfigyelhető méretskálát (a mikrométernél kisebb skálán már fényinterferencia lép fel; fénymikroszkóppal nem figyelhetőek meg ilyen kicsi objektumok), úgy részecskenyalábokra is érvényes egy hasonló összefüggés: a feltárandó méretskála a bombázó részecske kvantummechanikai hullámhosszánál nem lehet kisebb. A hullámhossz és az impulzus pedig az ismert  $\lambda = h/p = hc/E$  módon függ össze. (Nagyenergiás részecskék esetén az energia és az impulzus a relativitáselmélet szerint közel megegyezik, pontosabban  $E \approx pc$ , ezért írhattuk az előző képlet második egyenlőségét.) Mivel  $hc \approx 1,2 \text{ GeV} \cdot \text{fm}$ , így az **1 fm méretskálához** körülbelül **1 GeV-es részecskékre** van szükség. Az atommag alkotórészeinek szerkezetvizsgálatához tehát ekkora energiára gyorsító berendezésekre van szükség.

A **proton szerkezetét** így próbálták feltárni a 60-as években. Nagyenergiás (úgynevezett „mélyen rugalmatlan”) elektron-proton ütközésekben azt látták, hogy a protonnak is van belső szerkezete: a szórában észlelt eloszlások nem voltak összeegyeztethetők azzal, ha a protonot elemi részecskének tekintjük. Éppen ellenkezőleg, úgy tűnt, hogy a proton három „szórócentrumból” áll (lásd a 9.12(a). ábrán). Az eredményeket leíró képet **partonmodellnek** nevezték el. Hogy a proton nem elemi részecske, hanem alkotóelemei vannak, a kutatásoknak teljesen új irányt adott – később kiderült, hogy a proton alkotóelemei az úgynevezett *kvarkok*.



(a) A proton szerkezetének feltárása elektron-proton ütközésekkel.



(b) A nagyenergiás ütközésekben felfedezett részecskék táblázatai az  $S$  „ritkaság” és a  $Q$  töltés szerint; ezek világították rá az elméleti leírásuk helyes módjára.

9.12. ábra. A különféle, protonhoz és neutronhoz hasonló részecskék felfedezése.

Rengeteg különböző új részecskét találtak az ehhez hasonló ütköztető kísérletek során. Találtak sok, a protonhoz és a neutronhoz hasonló részecskét is: **pionokat, kaonokat, lambda-, szigmarészecskéket**, és speciális szabályokat is alkottak a keletkezésük körülményeire vonatkozóan. A részecskéket **érdekes táblázatokba rendezték** töltésük és úgynevezett „ritkaságuk” szerint, lásd a 9.12(b). ábrát. Egyes részecskéket mezonoknak, másokat barionoknak neveztek kölcsönhatási tulajdonságaik alapján. A táblázatok szimmetrikus elrendezése „elárulta” ezen részecskék (összefoglaló néven hadronok) összetételét: kvarkokból állnak. A gyakoribb (kísérletekben gyakrabban keletkező) hadronokban, például a protonban és a neutronban kétfajta kvark található meg: az  $u$  és  $d$  jelűek. A ritkán keletkező hadronokban egy harmadik fajta, a ritkaság tulajdonságát hordozó, úgynevezett „ritka” ( $s$ ) kvark is megtalálható. Mindegyik kvarkhoz tartozik egy antikvark is, és a hadronok közül a mezon típusúak kvark-antikvark párként írhatóak le, a barionok pedig három kvarkból állóként, ahogy arra a következőkben még visszatérünk. A következő lépés ezen elemi részecskék (kvarkok, elektron, pozitron stb.) és kölcsönhatásaik részletes megértése volt.

### 9.2.2. Elemi részecskék és kölcsönhatásaik

A részecskéket és a köztük ható kölcsönhatásokat a kvantumelmélet írja le. Három kölcsönhatást ismerünk: az elektromos töltésekre ható elektromágneses kölcsönhatást, az

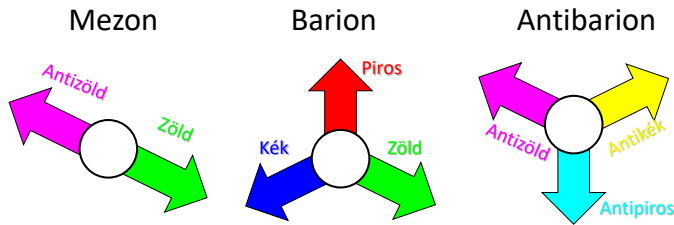
atommagokat összetartó, és a maghasadás és magfúzió energiáját adó erős kölcsönhatást, illetve a radioaktivitásért és a neutrínókért felelős gyenge kölcsönhatást. A gravitáció a negyedik kölcsönhatás, ezt azonban egyelőre nem tudjuk az előbbiekkal „egyesíteni”, egységes kvantummechanikai szerkezetbe foglalni; ez jelenleg is aktív kutatási terület.<sup>10</sup>

Az **elektromágneses kölcsönhatás** tulajdonképpen már az ókor óta ismert. Minden elektromos töltéssel rendelkező részecskékre hat, és a **kvantum-elektrodinamika** (QED) szerint a kölcsönhatást a **fotonok** közvetítik: azaz a töltések nem közvetlenül hatnak egymásra, hanem fotonok kicserélésén keresztül (ahhoz hasonlóan, mintha két evezős medicinlabdákat dobálna oda-vissza, és így „taszítanak” egymást – ugyanakkor a QED esetében vonzás is elképzelhető). Az elmélet matematikailag igen bonyolult, részletekbe itt nem tudunk belemenni, de azt fontos megemlíteni, hogy a QED a **legpontosabb ismert elmélet**: a hidrogénatom szerkezetét 12 tizedesjegy pontossággal helyesen írja le, és az elektron mágneses momentumát is (amely közelítőleg kettő, lásd a 8.1.4. szakaszban, pontosabban azonban 2,00231930436). A többi kölcsönhatást is ennek mintájára képzelhetjük el, csak másfajta „töltéssel” és más közvetítő részecskével, ahogy azt a következő szakaszokban látni fogjuk.

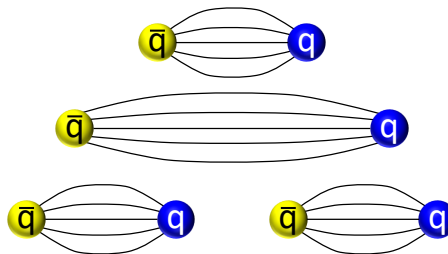
Az **erős kölcsönhatás** jelentősége abban áll, hogy ez a kölcsönhatás teszi stabil részecskévé a protont, és ez tartja össze az atommagokat is. (Utóbbi erő egyfajta másodlagos erő az amúgy „színsemleges” nukleonok között, ahogy azt mindjárt látni fogjuk.) A protonok és a neutronok úgynevezett **barion** típusú részecskék, a kísérleti tények szerint három kvarkból állnak. További hasonló részecskék a pion, a kaon és társaik: ezek azonban két kvarkból állnak, és **mezonoknak** nevezzük őket. A kvarkokat a *gluonok* tartják össze (a nevük is az angol „glue” – ragasztó – szóból származik). A kvarkokat és gluonokat, valamint a közöttük ható erős kölcsönhatást leíró elmélet a **kvantum-színdinamika** (Quantum Chromo Dynamics, QCD). A kölcsönhatás alapja a **színtöltés** (hasonlóan az elektromos töltéshez). Természetesen a szín csak analógia, de azt mutatja, hogy szemben az elektromos töltéssel (amelyet egy – pozitív vagy negatív – szám ad meg: a töltés nagysága) itt három színtöltés van: piros, kék és zöld. Mindegyikhez létezik antiszín is (mint a negatív elektromos töltés): a piros, kék, zöld antiszínei ciánkék, sárga és magenta. A három szín, illetve a három antiszín kombinációja semleges, „fehér” színt eredményez, ahogy egy színnek és antiszínének kombinációja is, ahogy azt a 9.13(a). ábra mutatja. A QCD szerint a közönséges megfigyelhető részecskék mind színsemlegesek (azaz „fehérek”). A magerő a színsemleges protonok és neutronok között úgy hat, mint az elektromosan semleges atomok és molekulák között ható van der Waals típusú erő (ami például a víz forráshőjéért felelős). A kvarkok tehát színtöltéssel rendelkeznek, de a típusuk is megkülönbözteti őket egymástól: a proton két *u* (up) típusú és egy *d* (down) típusú kvarkból áll, míg a neutronban két *d* és egy *u* kvark található. Ahogy fentebb is említettük, a ritka részecskében, mint például a kaonokban ezenfelül az *s* (strange, azaz ritka) kvark is megtalálható, és léteznek még *c* (charm), *b* (bottom) és *t* (top) típusú kvarkok is (lásd lentebb is).

A QCD érdekes következménye a **kvarkbezárás**: ha egy mezonból vagy barionból el akarok távolítani egy kvarkot, akkor az ehhez szükséges energia annyira nagy, hogy új

<sup>10</sup> A gravitáció jelenleg a téridő görbületén keresztül leírható elméletként kezelhető, ahogy a 7.2. fejezetben láttuk. Vannak kísérletek arra, hogy ezt kvantummechanikai keretbe öntsék, például szuperhúrelméletek, szuperszimmetria satöbbi, de egyelőre nincs ez ügyben semmilyen kísérleti ellenőrzés lehetőség, illetve nem sikerült semmilyen kísérleti bizonyítékot vagy cáfolatot találni egyikre sem.



(a) A kvarkok színei a három alapszínből kerülnek ki (piros, kék és zöld). Az antikvarkok színe ennek megfelelően ciánkék, sárga és magenta lehet („antiszín”). A három szín, illetve a három antiszín kombinációja semleges, „fehér” színt eredményez, ahogy egy színnek és antiszínének kombinációja is. A kvarkból és antikvarkból álló színsemleges hadronokat mezonnak, a három kvarkból állókat barionnak, a három antikvarkból állókat antibarionnak nevezzük.

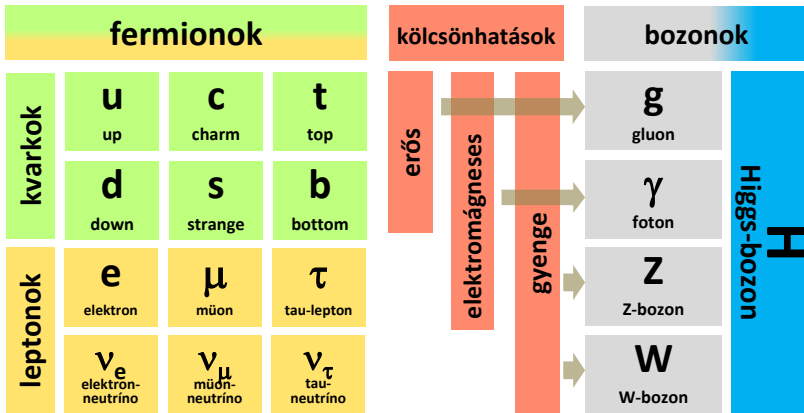


(b) Ahogy távolítjuk egymástól a kvarkokat, a potenciál olyan erős lesz, hogy annak energiája elég egy újabb kvark-antikvark pár létrehozásához.

9.13. ábra. Az erős kölcsönhatás, azaz a kvantum-színdinamika tulajdonságai.

kvark-antikvark párok létrejöttét teszi lehetővé, és a kiszabadítani szándékozott kvark nem szabadon, hanem egy újabb mezonba zárva észlelhető csak (lásd a 9.13(b). ábrát). A QCD másik fontos következménye az **aszimptotikus szabadság**, eszerint extrém nagy energián a kölcsönhatás úgynevezett csatolási állandója (amely az erősségét jelzi) lecsökken, azaz a kvarkok kölcsönhatása gyengébb lesz. Így tehát extrém nagy energiákon a kvarkok és gluonok kiszabadulhatnak hadronbörtönükből.

A **gyenge kölcsönhatást** a radioaktív bomlásokon keresztül érthetjük meg. A pozitív  $\beta$ -bomlás során egy proton átalakul egy neutronná, pozitron kibocsátása mellett, míg a negatív  $\beta$ -bomlás során egy neutron alakul át protonná, elektron kibocsátása mellett. Az ezt vizsgáló kísérletekben megfigyelték, hogy a keletkező két részecske nem visz el minden energiát, annak egy része „elvész”. Később kiderült, hogy egy szinte láthatatlan részecske, a neutrínó viszi el a maradék energiát, ezt azonban extrém nehéz észlelni. A neutrínó semleges, és színtöltése sincs, tehát sem az elektromágneses, sem az erős kölcsönhatásban nem vesz részt! Akkor mi az a folyamat, amely a  $\beta$ -bomlást leírja? Kiderült, hogy létezik egy harmadik, az említett gyenge kölcsönhatás. Ennek közvetítői az úgynevezett  $W$  és  $Z$  bozonok. A kölcsönhatásban minden anyagi részecske részt vesz: a kvarkok, az elektron és a neutrínó is. A gyenge kölcsönhatáshoz is tartozik egy töltés, amelyet gyenge hipertöltésnek neveznek. (Ennek kétféle alapértéke van, ahogy az elektromos töltés egyféle, a színtöltés háromféle alapértékkel rendelkezik – és persze



9.14. ábra. A standard modell kölcsönhatásai és elemi részecskéi.

mindegyik alapérték „ellentettje” is lehetséges.)

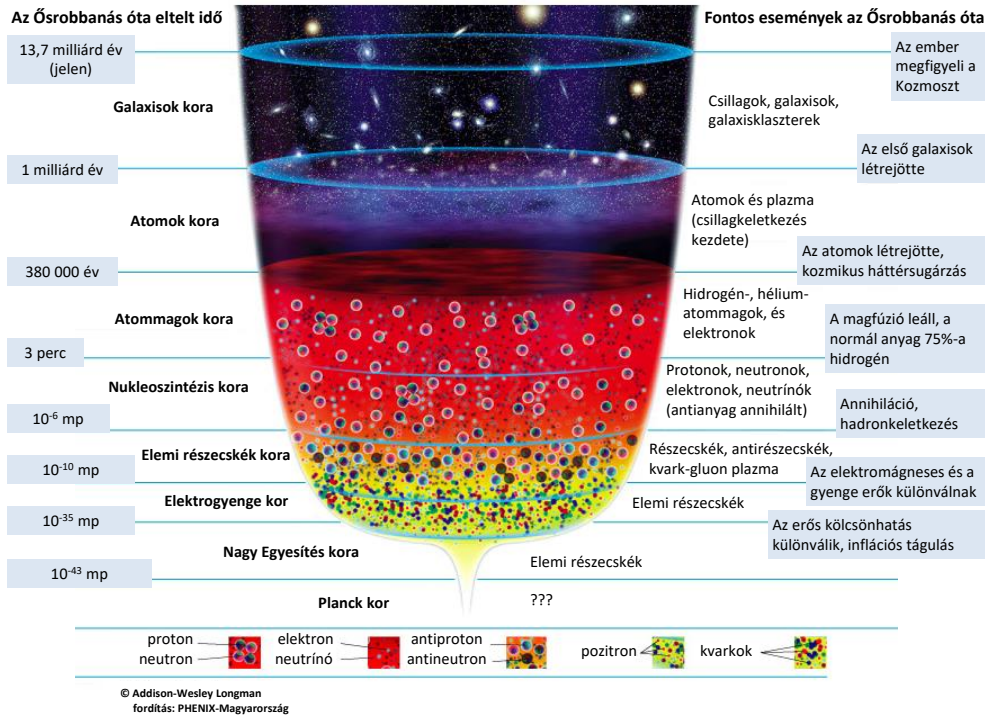
A gyenge kölcsönhatás vizsgálata során kiderült, hogy valójában a protont és a neutronot alkotó  $u$  és  $d$  kvarkok bizonyos értelemben egy „családba” tartoznak az elektronnal és a neutrínóval, létezik azonban két másik család is: az egyikben a  $c$  és  $s$  kvarkok mellett a műion nevű részecske található, illetve a hozzá tartozó műion-neutrínó. A műion az elektronnal hasonló, de kétszázszor nehezebb részecske. A harmadik családot pedig a  $t$  és  $b$  kvarkok alkotják, illetve a  $\tau$  lepton és a  $\tau$ -neutrínó.

Láthattuk, hogy a világot **anyagi és közvetítő típusú részecskék** alkotják. Érdekes módon az anyagi típusú részecskék mind fermionok, azaz a spinjük  $1/2$ . A közvetítő részecskék mind bozonok, egész spinűek. Mindezen részecskék és kölcsönhatásaik ma ismert elmélete az úgynevezett **Standard Modell**. Ezt illusztrálja a 9.14. ábra. A modell szerint a gyenge kölcsönhatás minden anyagrészecskére hat, az elektromos a töltött részecskékre (kvarkok és töltött leptonok). Az erős kölcsönhatás pedig csak a színtöltéssel rendelkező részecskékre hat, ezek a kvarkok. A legerősebb az erős kölcsönhatás: ha nem így lenne, a protonok és a neutronok között ható összetartó erőt legyőzné az elektromos taszítás. A neutrínó viszont csak a gyenge kölcsönhatásban vesz részt: ez a magyarázat arra, hogy szinte akadálytalanul haladhat át akár a Földön is – a kozmikus sugárzásban érkező neutrínók majdnem mindegyike ezt is teszi.

Az anyagi részecskék (kvarkok és leptonok) és a közvetítő bozonok mellett van egy harmadik típusú elemi részecske is: a **Higgs-bozon**. Ez tulajdonképpen egy kvantummező, amely kitölti a vákuumot, és a Standard Modell szerint a kvarkok és a leptonok az ezzel való kölcsönhatás által kapnak tömeget. A Standard Modell ezen eleme sokáig „hiányzott”, mígnem **2012-ben** az LHC gyorsítónál **találtak egy új részecskét**, amely minden bizonnyal a régóta keresett **Higgs-bozon** volt.

### 9.2.3. Részecskegyorsítókkal az ősrobbanás nyomában

A **világegyetemünk története** során időben visszamenve azt látjuk (illetve következtetjük ki modellek és kísérletek segítségével), hogy 380 ezer évvel az ősrobbanás utánig még nem léteztek atomok, a Világegyetemet egyfajta plazma töltötte ki, amelyet az

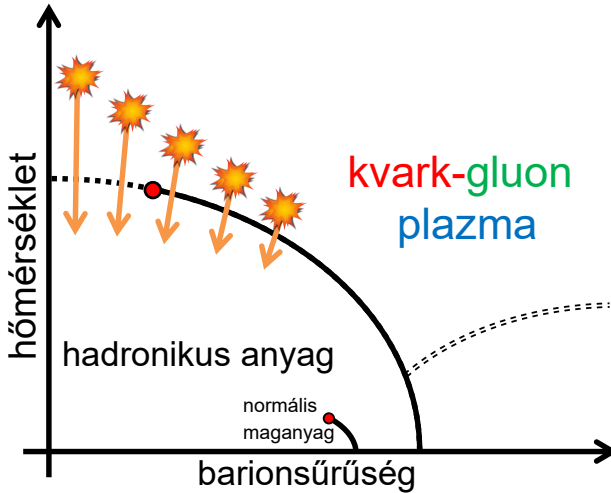


9.15. ábra. A világegyetem története. A kvarkok csak hadronokba (például protonokba vagy neutronokba) zárva voltak jelen az első ezredmásodperc után. Ez előtt, történetének igen korai szakaszában azonban szabad kvarkok és gluonok egyfajta leveşe tölthette be az Univerzumot.

atommagok és elektronjaik alkottak. Az ősrobbanás utáni első pillanatokra visszamenve azonban egyre érdekesebb jelenségeket láthatunk (lásd 9.15. ábrát) – **egymilliomod másodperccel az ősrobbanás után** még maguk a protonok és neutronok sem létezhettek, hanem az őket alkotó kvarkok és gluonok ősleveşe, a **kvark-gluon plazma** töltötte ki a világegyetemet. Ahhoz, hogy ezt az őslevest megfigyeljük, az akkor jelenlévőhöz hasonló körülményeket kell teremteni. Ez **extrém hőmérsékletet és nyomást** jelent, a Nap központi hőmérsékleténél is milliószor forróbb anyagot. Ilyet **ultrarelativisztikus** sebességre gyorsított **atommagok ütköztetésével**, „kis bummok” létrehozásával érhetünk el. Az ütközési pont köré rendezett detektorainkba érkező részecskéket vizsgálva érdemi információt kaphatunk arról, hogy milyen is volt az anyag, amely közvetlenül az ütközés után létrejött.

A helyzet ahhoz hasonló, mintha egy **fagyott világban** élnénk, ahol a víz csak jég formájában van jelen. Elméleti kutatók azonban felvetnék, hogy a jégnek lehet egy **új-fajta, folyékony formája** is, de az ehhez szükséges hőmérsékletet közönséges módszerekkel nem tudják elérni. Az az ötletük támadhat azonban, hogy jégdarabokat röpítenek egymásnak, és a nagyenergiás ütközésekben a jég megolvadását remélik. A megolvadó anyag persze azonnal szétrepül (az ütközés energiája miatt), és a cseppek repülés közben egyből megfagynak. Alakjukból, méretbeli eloszlásukból azonban visszakövetkeztethetünk arra, hogy létrejött-e az ismeretlen, folyékony állapot. A kutatások eredményeként egyre többet tudunk az erősen kölcsönható anyag adott hőmérséklet és nyomás (vagy





9.16. ábra. Az erősen kölcsönható anyag fázisdiagramja. Különböző energiájú ütközésekkel a fázisdiagram különféle sűrűséghez és hőmérséklethez tartozó tartományait térképezhetjük fel. A folytonos vonalak elsőrendű, a szaggatott másodrendű fázisátmenetet jelképeznek. A vízszintes tengelyen (szemben a 4.2. ábrával) a nyomás helyett a barionsűrűség szerepel, ez ugyanis jobban jellemzi az erősen kölcsönható anyagot.

sűrűség) melletti állapotairól, azaz a QCD **fázisdiagramjáról**. Ezt mutatja a 9.16. ábra, amelyet érdemes ezt összevetni a víz fázisait mutató 4.2. ábrával.

A kutatások mai állása szerint a nehézionok ütközése nyomán létrejövő közeg hamar, körülbelül  $1 \text{ fm}/c$  alatt<sup>11</sup> termalizálódik, azaz hőmérséklettel, nyomással leírható közeggé válik, majd **robbanásszerű tágulása** során gyorsan kihűl. Nagyjából  $10 \text{ fm}/c$  idő múltán lehűl körülbelül  $2 \cdot 10^{12} \text{ K}$ -re, azaz **kétbillió fokal hőmérsékletre**, ezen a hőmérsékleten pedig a kvarkok és gluonok „kifagyva” hadronokba záródnak, amelyeket detektorainkkal észlelhetünk. A hadronok számából és eloszlásukból tudunk visszakövetkeztetni az ütközésekben létrejövő anyag tulajdonságaira, ezáltal pedig rekonstruálhatjuk, mi történt a Világegyetem történetének első mikromásodpercében.

### 9.3. Ellenőrző kérdések

1. Hogyan függ a stabil atommagok tömegszáma ( $A$ ) a rendszámától ( $Z$ )?
2. Mi gátolja a könnyű elemek spontán magfúzióját?
3. Miért van szükség neutronokra a maghasadás előidézéséhez?
4. Mely atommagok a legstabilabbak?
5. Mi a hasadó urán által fenntartott láncreakció működési elve?

<sup>11</sup>Ez annyi idő, amennyi alatt a fény  $1 \text{ femtométert}$ , azaz  $10^{-15} \text{ métert}$  megtesz, azaz körülbelül  $10^{-23} \text{ másodperc}$ .



6. Mi a kontrollált láncreakció (atomreaktor) stabilitását lehetővé tevő jelenség?
7. Hogyan idézhetünk elő kontrollált magfúziót a Földön?
8. Hogyan zajlik a magfúzió a Napban?
9. Miért fúvódik fel a Nap életciklusa vége felé közeledve?
10. Miért nincsenek antianyaggal működő erőműveink?
11. Mi a négy alapvető kölcsönhatás?
12. Mi alkotja a protont?
13. Mely részecskék alkotják a részecskefizikai Standard Modellt?
14. Atomi skálán mi a kölcsönhatások erősségének sorrendje?
15. Hogyan vizsgálhatjuk az anyag szerkezetét nagyenergiás részecskegyorsítóknakban?
16. Mi a nagyenergiás részecskegyorsítóknak létrejövő „kis bumm” és az ősrobbanás kapcsolata?