TEMA 2. MUESTREO,
TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO (DTFT)

Muestreo

Procesamiento de señales analógicas con medios digitales.

El muestreo y la cuantificación son un link crítico entre las señales analógicas y las señales discretas. Se describen los métodos de muestreo: *ideal y natural.*

Muestreo ideal

El muestreo ideal describe a la señal muestreada xs(t) como una suma pesada de impulsos que se iguala a la señal continua x(t) en la ubicación de los impulsos nts,

$$\mathrm{xs(t)=x(t)Si(t)=x(t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{(t-nts)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{(t-nts)} x_{(t-nts)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(n)} \delta_{(t-nts)}$$

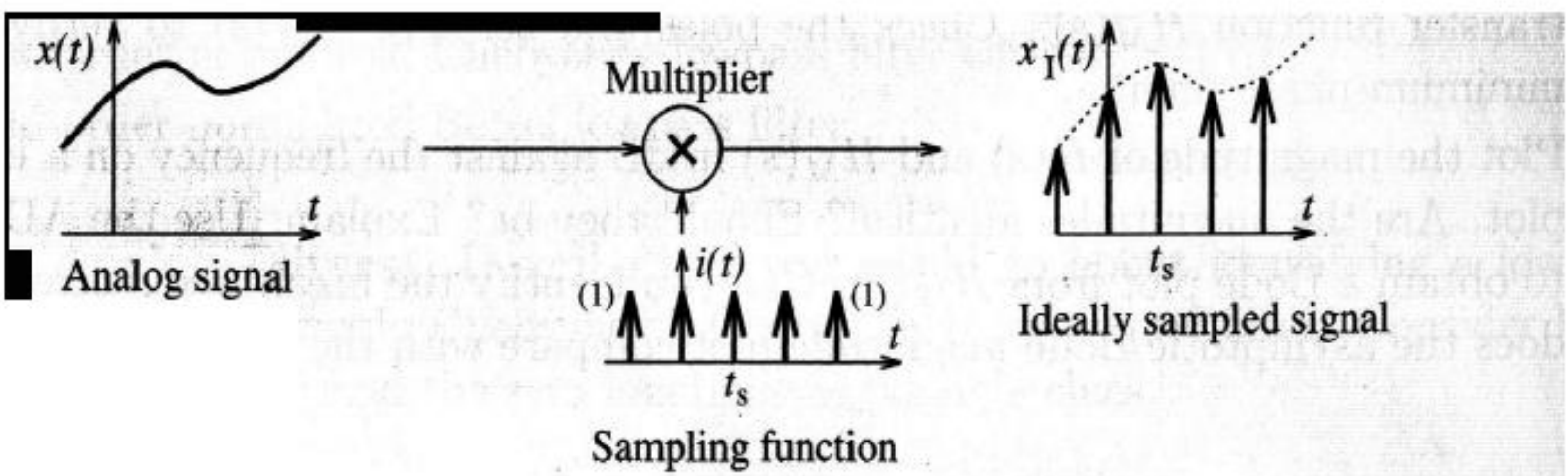


Figura 1. Operación de muestreo ideal.

$$Si(f)= \sum_{k=-\infty}^{\infty} Si(k)\delta_{(f-kS)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1/ts)\delta_{(f-kS)} = (1/ts) \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_{(f-kS)}$$

$$Xs(f)=X(f)*Si(f)=X(f)*(1/ts) \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_{(f-kS)} = (1/ts) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{(f-kS)}$$

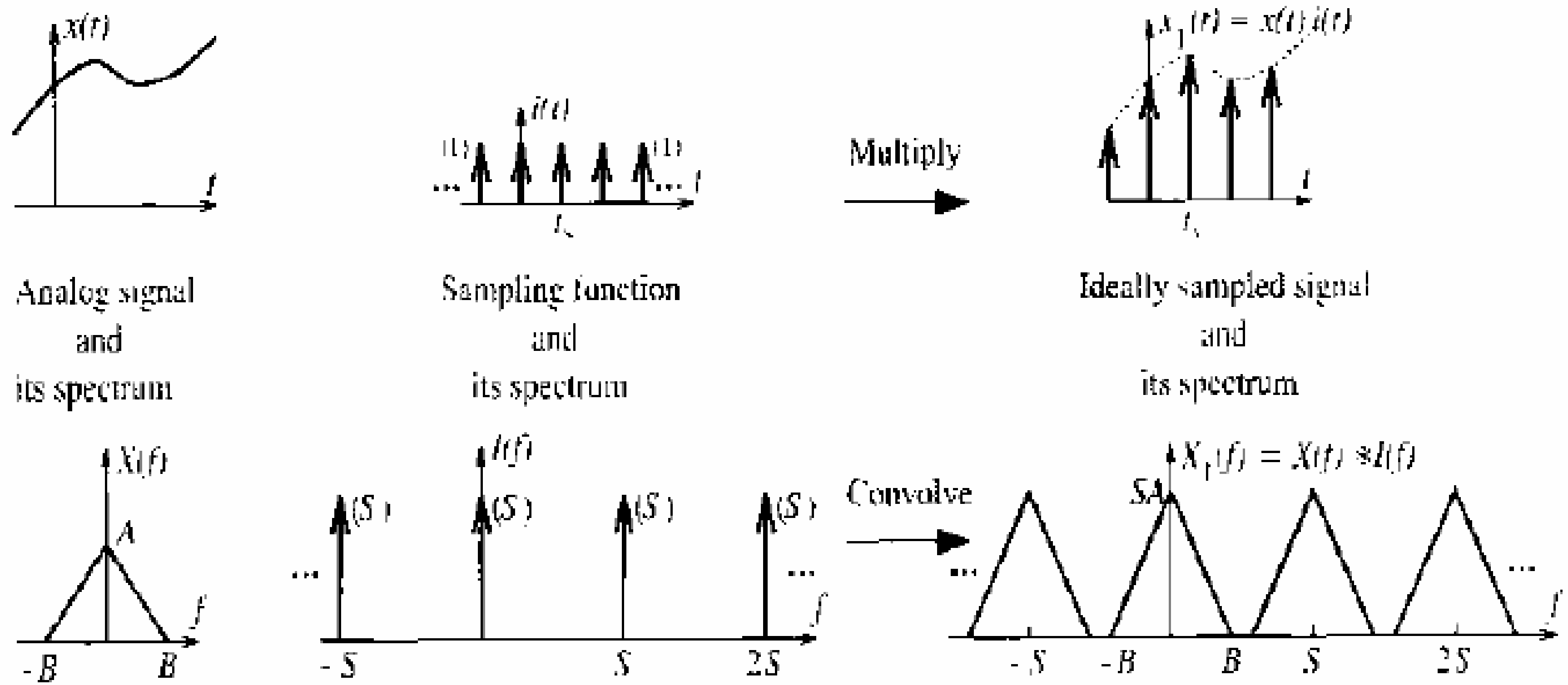


Figura 2. Espectro de señales muestreadas idelamente.

CONSIDERACIONES

• El espectro de la señal analógica se extiende de (–B,B), la próxima imagen de éste, está centrada en S y se extiende de (S-B,S+B), las imágenes de los espectros no se superponen si, S-B>B o S>2B

• Xp(f) describe versiones repetidas de X(f), o sea es una extensión periódica de X(f) con período principal entre (-1/2)S y (1/2)S y que es igual a la frecuencia de muestreo S.

Teorema de muestreo. Una señal con banda en frecuencia limitada a B puede ser muestreada sin pérdida de información si la frecuencia de muestreo S excede 2B (S≥2B).

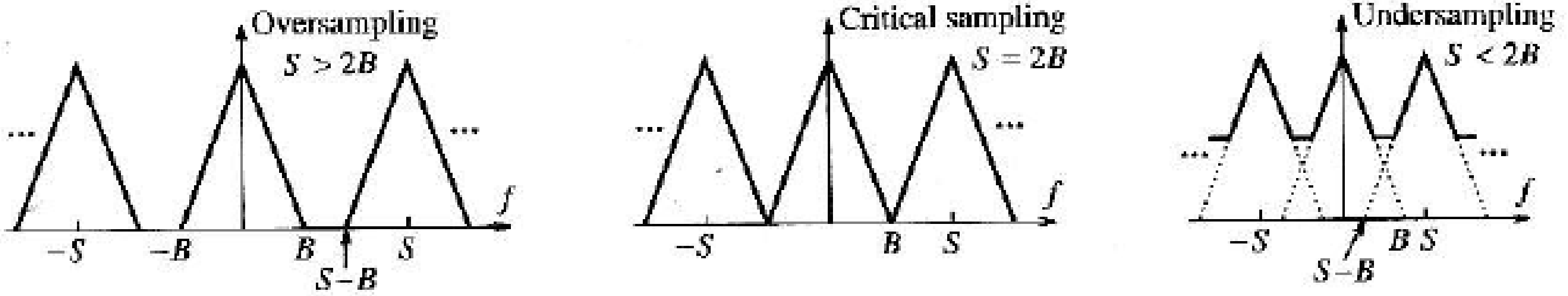


Figura 3.

Ejemplos de muestreo de señales sinusoidales.

Dada la sinusoide x(t)=cos(2πfot+θ) con fo=100Hz

Si x(t) se muestrea a Sf=300Hz, no existe aliasing

Si x(t) se muestrea a Sf=80Hz, existe aliasing

Muestreo Natural

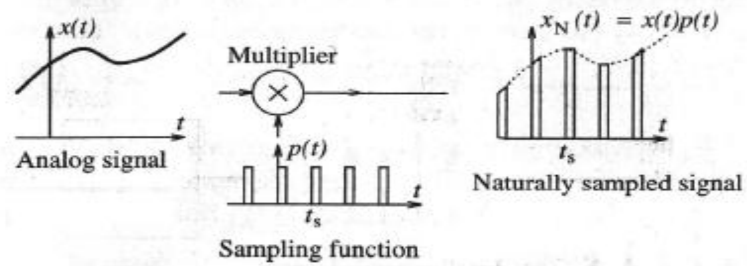


Figure 14.6 Natural sampling

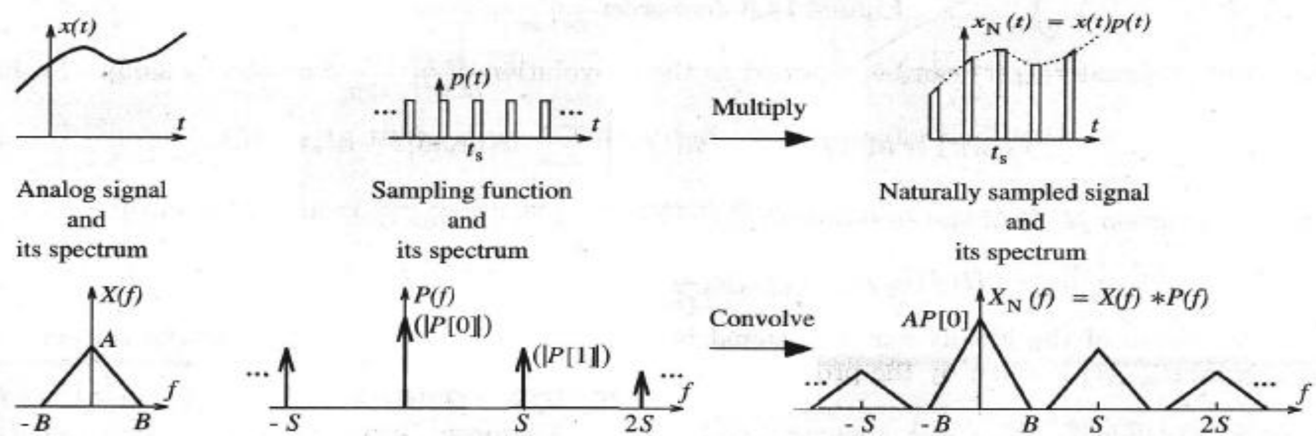


Figura 4

REVIEW PANEL 14.6

Naturally Sampling Uses a Periodic Pulse Train $p(t)$

$$x_N(t) = x(t)p(t) \qquad X_N(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P[k]X(f-kS) \qquad P[k] = \frac{1}{t_s}\int_{t_s} p(t)e^{-j2\pi kSt}\,dt$$

Muestreo, Interpolación y Reconstrucción de señales.

Reconstrucción ideal y la función de interpolación Sinc

$$xi(t)=x(t)Si(t)=x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_{(t-nts)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_{(t-nts)}x_{(n)}$$

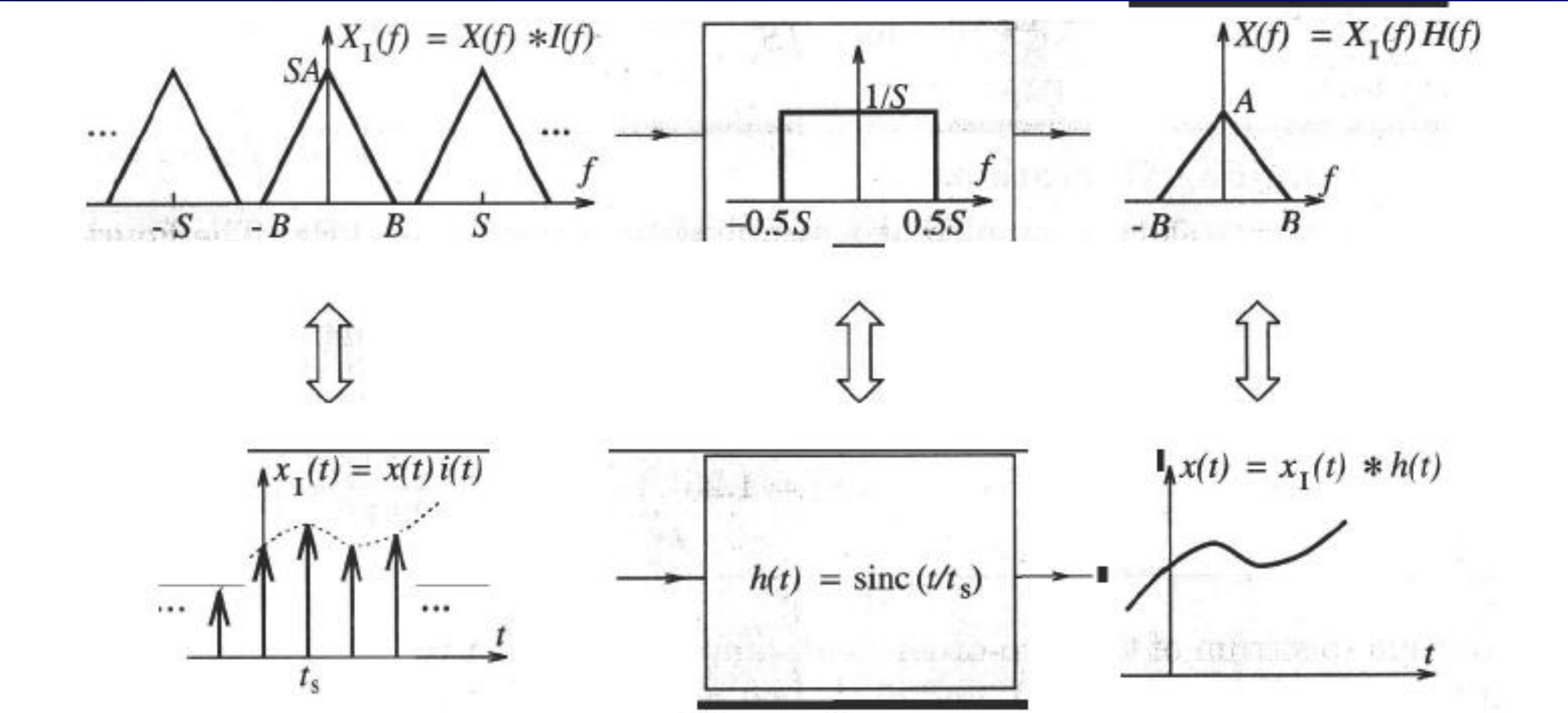


Figura 5.

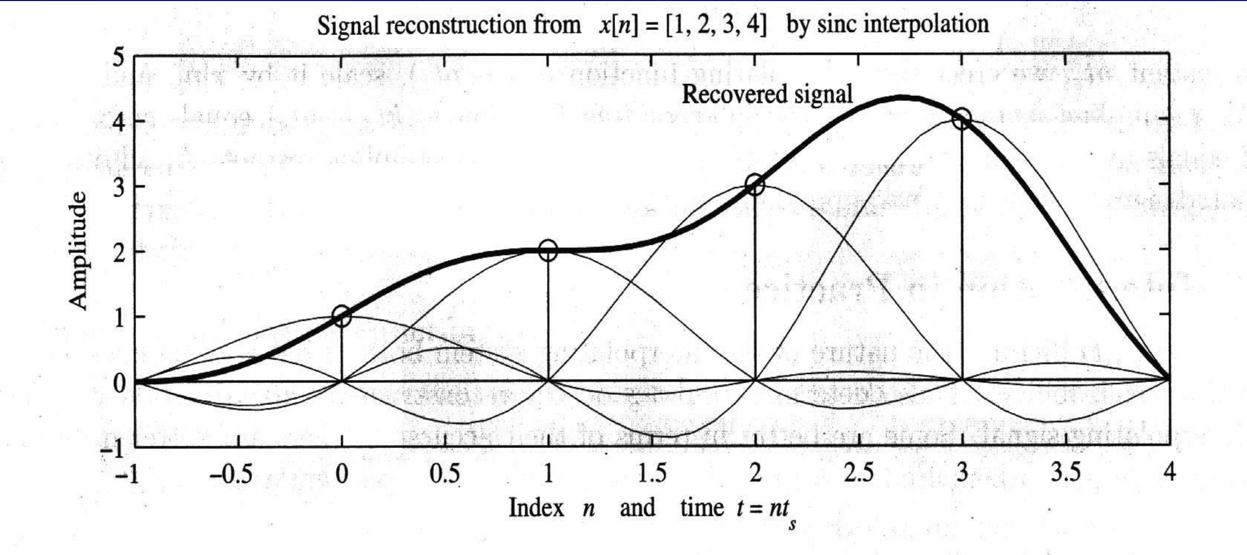
La respuesta en impulsiva de este filtro esta dada por, h(t)= sinc(t/ts)
Para reconstruir la señal x(t) se debe realizar la convolución,

$$x(t)=xi(t)*h(t)= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{(t-nts)} x_{(n)} \right]*h(t)= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{(t-nts)} x_{(n)}$$

Esta expresión describe la superposición de las versiones desplazadas de h(t) pesadas por el valor de las muestras x[n]. Sustituyendo h(t),

$$x(t)= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(n)} sinc((t-nts)/ts)$$

Se necesitan infinitas
Muestras, es irrealizable?



Funciones de interpolación

Debido a que la interpolación con al función sinc es muy pobre desde el punto de vista práctico, se pueden utilizar otras señales para la interpolación.

$$xi(t)=i(t)*xs(t)=i(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(n)}\delta(t-nts)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(n)}i(t-nts)$$

Funciones de interpolación práctica

La naturaleza de i(t) define la naturaleza del sistema interpolado en términos de causalidad, estabilidad y realizabilidad física.

FUNCIONES DE INTERPOLACION MAS UTLIZADAS

Type	Form of $i(t)$	Interpolated Signal $x_i(t)$
Constant	$\mathrm{rect}[(t-\frac{1}{2}t_s)/t_s]$	$\sum_n x_S[n]\mathrm{rect}[(t-nt_S-\frac{1}{2}t_S)/t_S]$
Linear	$\mathrm{tri}(t/t_s)$	$\sum_n x_S[n]\mathrm{tri}[(t-nt_S)/t_S]$
Sinc	$\mathrm{sinc}(t/t_s)$	$\sum_n x_S[n]\mathrm{sinc}[(t-nt_S)/t_S]$

Función de interpolación tipo escalón

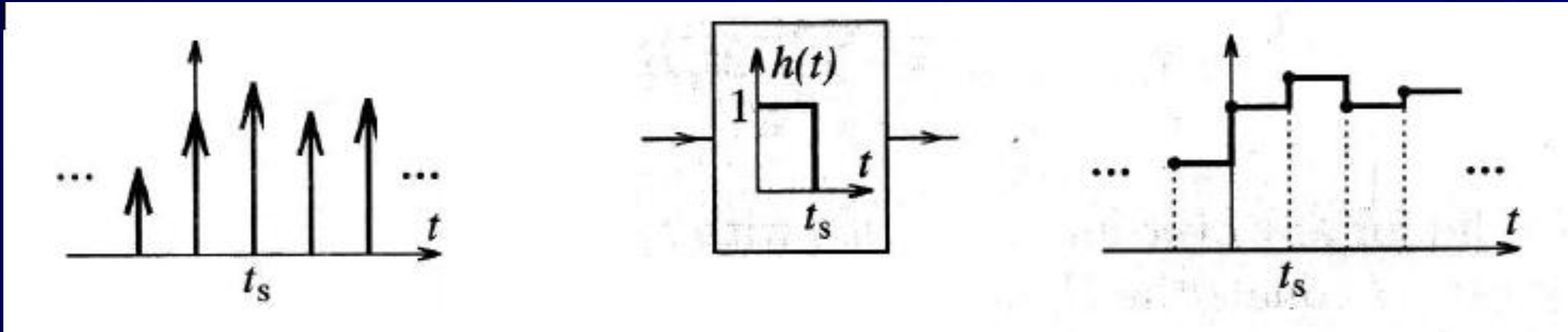


Figura 7.

- Implementación en línea (no depende de valores futuros)
- Conversor D/A con entrada retenida
- Retenedor de orden cero

Función interpolación lineal

Genera una aproximación lineal entre muestras y utiliza una función de interpolación h(t)=tri(t/ts). En un instante cualquiera t, entre dos muestras adyacentes nts y (n+1)ts, la señal interpolada es,

$$x_i(t)=x[n]+(t-nt_s)\{x[n+1]-x[n]\}/t_s, \text{ para } nt_s \le t<(n+1)t_s$$

Esta operación requiere de una muestra futura por lo que no puede realizarse en línea . Para ello es necesario realizarla con un retardo de un intervalo de tiempo ts.

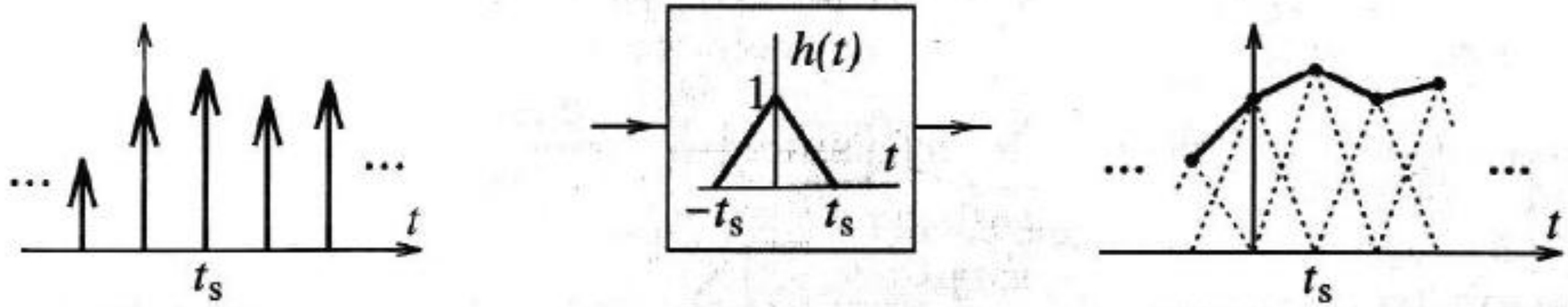


Figura 8.

Algunas consecuencias del teorema de muestreo
Utilidad del teorema de muestreo
Dilema: señales limitadas en frecuencia no pueden ser limitadas en tiempo.
Una señal reconstruida en forma exacta necesita infinitas muestras,

Prefiltrado

Sobremuestreo

Finalmente los errores debido al muestreo son:

Submuestreo, produce aliasing
Error de redondeo en las muestras
Truncamiento cuando se interpola con una función sinc
Errores debido a inexactitud en el reloj de muestreo

TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO (DTFT)

$$Xp(F)= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j2\pi nF}$$ *Esta es la ecuación que define la* ***DTFT***

Con período principal en F perteneciente a [(-1/2)Sf,(1/2)Sf].

El espectro de una señal muestreada no solo es continuo sino también periódico.

Donde los coeficientes de Fourier x[n] representa el valor de las muestras de la señal representada por impulsos pesados.

$$x[n]= \int_{-1/2}^{1/2} Xp(F)\, e^{j2\pi nF}\, dF$$

Ej. $x[n]=\delta[n]$

$$Xp(F)= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]\, e^{-j2\pi nF}=1$$

PROPIEDADES DE LA DTFT

Symmetry properties for real *DT* signals

$x[n]$	$X_p(F)$
Any real signal	$X_p(F) = X_p^*(-F) = X_p(1-F)$ (Even magnitude and odd phase) OR Even real part and odd imaginary part
Real and Even	Real and Even
Real and Odd	Imaginary and Odd

Properties arising from duality with Fourier series

Property	DTFT result	FS result (with $T=1$)
Superposition	$x[n] + y[n] \longleftrightarrow X_p(F) + Y_p(F)$	$x_p(t) + y_p(t) \longleftrightarrow X_S[k] + Y_S[k]$
Times scalar	$\alpha x[n] \longleftrightarrow \alpha X_p(F)$	$\alpha x_p(t) \longleftrightarrow \alpha X_S[k]$
Time delay	$x[n-\alpha] \longleftrightarrow X_p(F)\exp(-j2\pi F\alpha)$	$x_p(t-\alpha) \longleftrightarrow X_S[k]\exp(-jk\omega_0\alpha)$
Reversal	$x[-n] \longleftrightarrow X_p(-F) = X_p^*(F)$	$x_p(-t) \longleftrightarrow X_S[-k] = X_S^*[k]$
Modulation	$x[n]\exp(j2\pi n\alpha) \longleftrightarrow X_p(F-\alpha)$	$x_p(t)\exp(jm\omega_0 t) \longleftrightarrow X_S[k-m]$
Product	$x[n]y[n] \longleftrightarrow X_p(F) \bullet Y_p(F)$	$x_p(t)y_p(t) \longleftrightarrow X_S[k] \star Y_S[k]$
Convolution	$x[n] \star y[n] \longleftrightarrow X_p(F)Y_p(F)$	$x_p(t) \bullet y_p(t) \longleftrightarrow X_S[k]Y_S[k]$
Central ordinates	$X_p[0] = \sum_n x[n]$	$X_S[0] = \int_1 x_p(t)\,dt$
	$x[0] = \int_1 X_p(F)\,dF$	$x_p(0) = \sum_n X_S[k]$
Parseval's relation	$\sum_n \lvert x[n]\rvert^2 = \int_1 \lvert X_p(F)\rvert^2\,dF$	$\int_1 x_p^2(t)\,dt = \sum_k \lvert X_S[k]\rvert^2$

Additional properties of the DTFT

Property	Relation
Difference	$x[n] - x[n-1] \longleftrightarrow [1-\exp(-j2\pi F)]X_p(F)$
Modulation	$x[n]\cos(2\pi n\alpha) \longleftrightarrow \frac{1}{2}[X_p(F+\alpha) + X_p(F-\alpha)]$
Times-n	$nx[n] \longleftrightarrow \dfrac{-1}{j2\pi}\dfrac{dX_p(F)}{dF}$
Summation	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longleftrightarrow \dfrac{X_p(F)}{1-\exp(-j2\pi F)} + \frac{1}{2}X_p(0)\delta(F)$ (one period)

Respuesta de estado estacionario a armónicas de tiempo discreto

La DTFT es una buena herramienta para encontrar la respuesta de estado estacionario para armónicas de tiempo discreto. Se evalúa Hp(F) a la frecuencia de la armónica.

Ej. Dado el sistema de tiempo discreto descrito por $y[n]=0.5y[n-1]+x[n]$, cuya respuesta en frecuencia Hp(F) es,

$Hp(F)=1/[1-0.5\ e\text{-}j2\pi F]$

Encontrar la respuesta a la entrada senoidal $x[n]=10\cos(2\pi(1/4)n+60º)$

$Hp(1/4)=1/[1-0.5\ e\text{-}j2\pi(1/4)]=1/(1+0.5j)= \rightarrow$ modulo=0.894, fase=26.6º

La respuesta de estado estacionario es,

$y[n]=10(0.894)\cos(2\pi(1/4)n+60º-26.6º)=8.94\cos(2\pi(1/4)n+33.4º)$

Encontrar la respuesta a la entrada $x[n]=4u[n]$

$Hp(0)=1/[1-0.5]=2$

$y[n]=2(4)=8$