INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE LINDENMAYER: fractales, autómatas celulares y aplicaciones

Campos Muñoz Daniel

Lic. en Matemáticas Aplicadas y Computación
Facultad de Estudios Superiores Acatlán
Universidad Nacional Autónoma de México

XXI Verano de la Investigación Científica

Departamento de Aplicación de Microcomputadoras
Instituto de Ciencias
B. Universidad Autónoma de Puebla

Correo electrónico: danyboy_chief@hotmail.com

26 de agosto de 2011

Resumen

La simulación con computadoras de diversos procesos físicos complejos en cualquier rama científica ha sido siempre un área de gran interés debido a su versatilidad, "economía" y posibilidad de reproducir experimentos cuya realización podría resultar costosa o hasta imposible en la vida real, es por eso que muchos científicos han dedicado sus estudios a este campo.

Tal es el caso de Aristid Lindenmayer, que se se hacía la siguiente pregunta: ¿de qué forma estará codificada la información que hace que una semilla prácticamente amorfa llegue a desarrollarse como un árbol o una hierba de gran complejidad estructural? Pues tratando de responder a ello, fue como inventó los sistemas que llevan su apellido en su honor.

En el siguiente artículo se hace una descripción general estos sistemas, sus características, clasificación y algunas de sus posibles aplicaciones. También se hace mención de la similitud que presentan con los fractales y los autómatas celulares, *pero no se tratará la teoría de éstos últimos.*

Aprovecho para agradecer al Dr. Genaro Juárez Martínez por su atenta invitación a participar en este verano y al Dr. Harold V. McIntosh por el tiempo brindado y los conocimientos impartidos.

Índice

1. Sistemas de Lindenmayer

1.1. ¿Quién los inventó?

El concepto de Sistema de Lindenmayer fue concebido por el biólogo y botánico teórico húngaro Aristid Lindenmayer de la Universidad de Utrecht, en 1968. Sin embargo, fueron dos de sus estudiantes, Ben Hesper y Pauline Hogeweg los primeros en darse cuenta del potencial de los sistemas-L para representar plantas (en un principio). En 1970, Hesper y Hogeweg en dos semanas crearon el primer programa que, a partir de una secuencia de 5,000 caracteres generados por un sistema-L, imprimió algo que se parecía mucho a una hoja vegetal. Esta primera idea digital no le gustó mucho a Lindemayer[1], ya que él consideraba que no debían perder el tiempo y "desperdiciar" recursos en esas cosas.

Lo cierto es que la idea comenzó a circular. Cuando en 1986 Lindemayer conoció a Przemyslaw Prusinkiewicz se convenció plenamente de las posibilidades de los sistemas-L y empezó también a utilizarlos para generar imágenes cada vez más realistas de plantas. Juntos, en 1990, escribieron el libro "La belleza algorítmica de las plantas" *(The Algorithmic Beauty of Plants).*

1.2. ¿Qué son?

Un sistema-L es un lenguaje, una gramática formal de derivación paralela, un conjunto de reglas y símbolos[2] principalmente utilizados para modelar el proceso de crecimiento de las plantas, aunque también puede modelar la morfología de una gran variedad de organismos.

El concepto central de los sistemas-L es el de re-escritura, una técnica para definir objetos complejos reemplazando sucesivamente "partes" de un objeto inicial simple (el axioma), mediante un conjunto de reglas de reescritura o de producción.

[1] Y dejó atónito al operador de la computadora donde ejecutaron el programa, recordemos que aún se programaba con tarjetas perforadas y que el resultado de su ejecución era un enorme listado de cálculos numéricos.

[2] Como el Español, tiene símbolos (las letras del abecedario, signos de puntuación, etc.) y reglas para utilizarlos (la ortografía, la forma de acentuar las palabras, etc.)

1.3. Elementos de un sistema-L

Los sistemas-L también son conocidos como sistemas-L *paramétricos*[3], definidos como un conjunto:

$$G = \{V, S, \omega, P\}$$

donde:

- V : El alfabeto, es un conjunto de símbolos que pueden ser reemplazados (variables o símbolos no terminales) y se utilizan para componer cadenas.
- S : Es un conjunto de símbolos que se mantienen fijos (constantes o símbolos terminales).
- ω : El axioma, es la cadena que describe al sistema en su estado inicial, formada por un(os) símbolo(os) de V.
- P : Reglas de producción, son las transformaciones que serán aplicadas al axioma y, sucesivamente, a las cadenas generadas. Definen la forma en la que las variables pueden ser reemplazadas por combinaciones de constantes y otras variables. Las reglas de producción generan cadenas formadas únicamente por los símbolos del alfabeto y por lo tanto todas las cadenas pertenecerán al lenguaje definido por el sistema-L.

Una consideración importante es que las reglas de producción se aplican *simultáneamente* a todos los símbolos de la cadena de entrada, sea ésta el axioma o las cadenas resultantes de cada derivación. Esta propiedad refleja el origen biológico de los sistemas-L, ya que los organismos vivos crecen simultáneamente en "todas" sus partes y no secuencialmente. Cabe señalar que en cada iteración, la estructura del sistema aumenta su complejidad por lo que hay que ser cuidadosos en derivar demasiadas veces al sistema.

Además se pueden incorporar a la definición del sistema un conjunto de parámetros para su interpretación ya que debemos tener en cuenta que no le hemos dado ningún significado a los símbolos del alfabeto. Estos sistemas hipotéticamente podrían describir muy diversos procesos reales según su significado (gráficos o sonoros); podrían representar la reproducción de células o el crecimiento de ramas en un árbol. Para generar imágenes se requiere

[3]Su comportamiento depende del alfabeto y reglas que le especifiquemos.

que los símbolos en el modelo hagan referencia a elementos de un dibujo, interpretando cada constante en el sistema-L como una operación de dibujo y para generar sonidos, que se asocien a una nota musical, por mencionar algunos.

1.4. Familias de sistemas-L

Definimos un símbolo de nuestro alfabeto y su respectiva regla de producción, iteramos y obtenemos la nueva cadena del lenguaje —esa es la idea básica de como funciona un sistema-L—. Ahora bien, definimos otra regla que incluye al símbolo original del axioma, por lo que ahora hay 2 reglas que se pueden aplicar al mismo elemento, tendríamos un "problema" porque este tipo de sistemas tienden a ser muy complejos por la extensa gama de posibilidades que pueden ocurrir. Así que cómo decidimos que regla aplicar... En esta ocasión no atenderemos ese tema, pero sí esta opción: definiremos un **sistema-D0L**, que son los más sencillos que existen. Trabajan bajo las siguientes condiciones:

1. El lado izquierdo de la regla de producción debe ser un sólo símbolo del alfabeto.
2. Un mismo símbolo no puede producir distintas cadenas del lenguaje.

Con estas restricciones aseguramos que para cualquier axioma o cadena introducida en el sistema-D0L, ésta podrá derivar en exactamente otra única cadena[4]. Y ¿qué significa "D0L"? **D**eterministic **0**-context **L**-systems; sistemas determinísticos libres de contexto.

Algunas definiciones, un sistema-L puede ser:

Libre de contexto si cada producción se refiere sólo a un símbolo individual y no a sus vecinos.

Sensitivo al contexto cuando la aplicación de una regla depende también de sus vecinos (sistema-IL).

Determinista si existe exactamente una producción para cada símbolo.

[4] A esta derivación se le conoce como *homomorfismo*.

No Determinista si hay al menos una símbolo al que le corresponde más de una producción.

Estocástico, Probabilístico cuando hay varias producciones para un mismo símbolo y cada una de ellas es elegida con una probabilidad determinada (sistema-PL).

Con corchetes o extensiones permiten modelar ramificaciones de organismos (tienen una memoria de *pila*).

Temporal porque el tiempo cambia su comportamiento.

Propagativo si ningún símbolo produce la cadena "vacía".

No Propagativo si algún símbolo produce la cadena "vacía".

Tabular contiene tablas de producción de modo que cada uno de sus elementos es un conjunto de reglas de producción sobre el alfabeto (sistema-TL).

Sensitivos al ambiente cuando en la evolución intervienen factores externos al sistema-L (reglas que no pertenecen al lenguaje).

Etcétera.

Haciendo una relación entre algunos de estos tipos, podemos decir que los sistemas-L deterministas son un caso particular de los probabilistas, pues "asignan" implícitamente a sus únicas producciones la probabilidad igual a 1, dando la certeza absoluta de que esa será la cadena elegida en cada derivación para ese símbolo.

1.5. ¿Cómo generar un sistema-L?

A grandes razgos, el proceso que se sigue es:

1. Observar el desarrollo de los organismos o del sistema en general que se quiera modelar.

2. Identificar los distintos tipos de células o elementos que interactúan.

3. Identificar las normas de desarrollo o producción de cada elemento.

4. Considerar características externas, influencia del entorno, competencia por sobrevivir, recursos disponibles, depredadores, la gravedad, etc.

Así podemos diseñar un sistema-L que se aproxime al desarrollo del sistema y entre más detalles consideremos, lograremos una representación mucho más fiable.

2. Fractales

2.1. Representación con sistemas-L

Los fractales han existido desde siempre en la naturaleza, con organismos *autosimilares* a las partes que lo conforman. Lo curioso es que utilizando sistemas de Lindenmayer, es posible reproducir esos patrones fractales de gran complejidad y aún más impresionante que le definición del sistema-L sea muy "sencilla"[8].

Algunos ejemplos de fractales famosos:

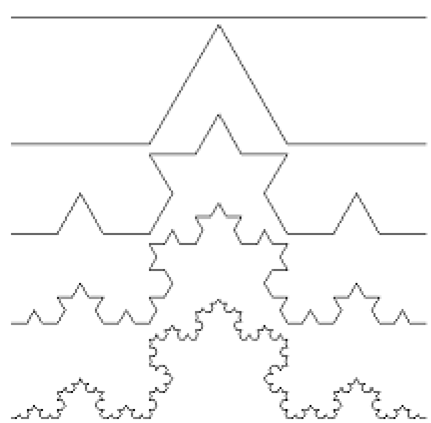

Figura 1: Derivación de la Curva de Koch

En las figuras, la secuencia de colores rojo, naranja, amarillo, verde, azul, púrpura, rojo describe el orden que se ha seguido en la construcción de los fractales.

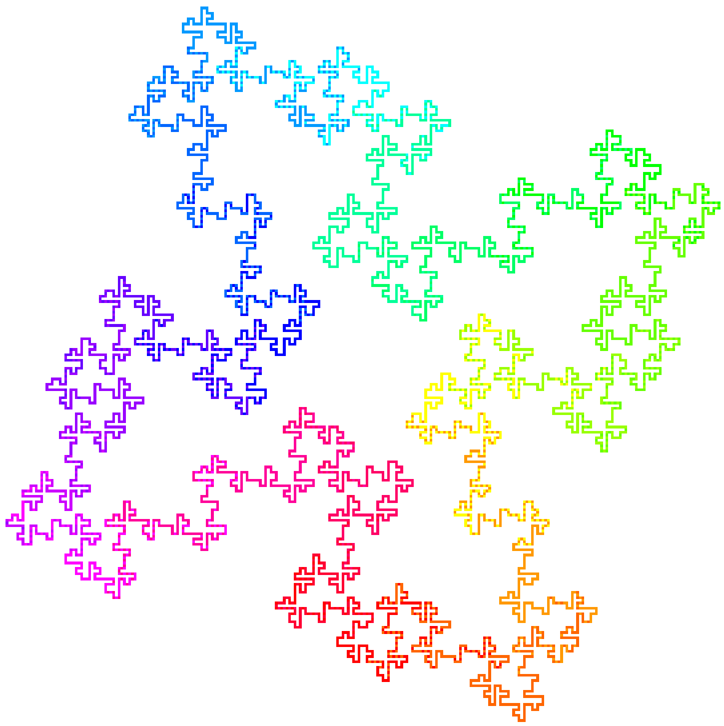

Figura 2: Isla cuadrada de Koch

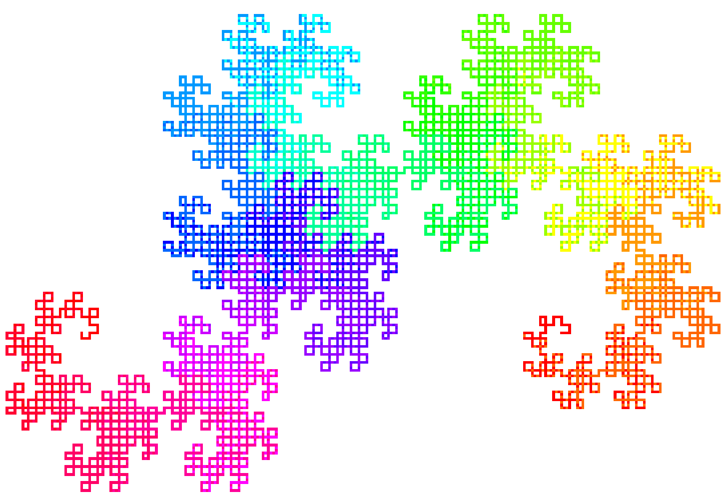

Figura 3: Dragón de Heighway

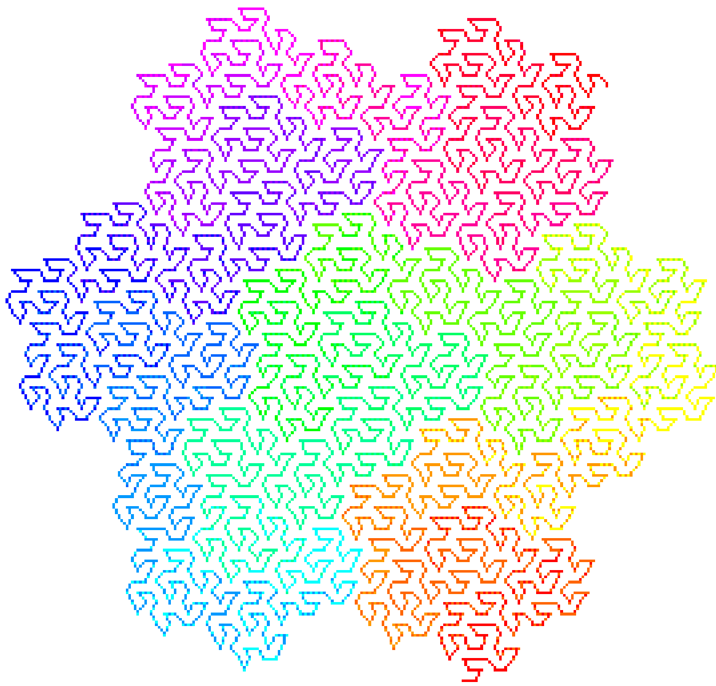

Figura 4: Curva de Peano-Gosper

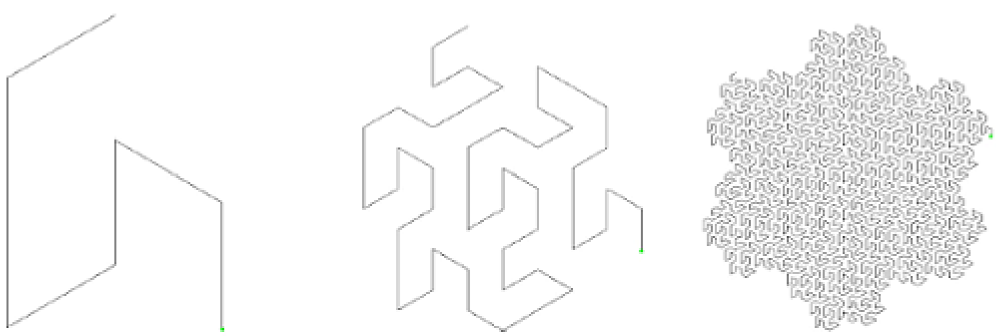

Figura 5: Derivaciones de la Curva de Peano-Gosper

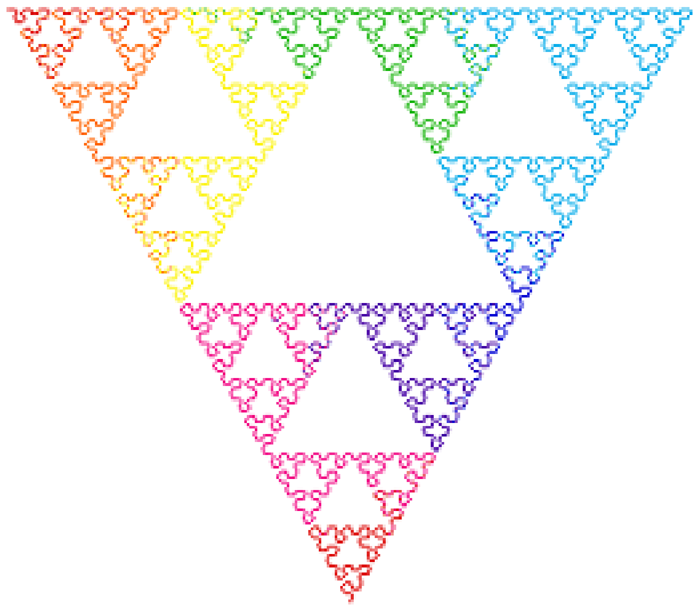

Figura 6: Triángulo de Sierpinski

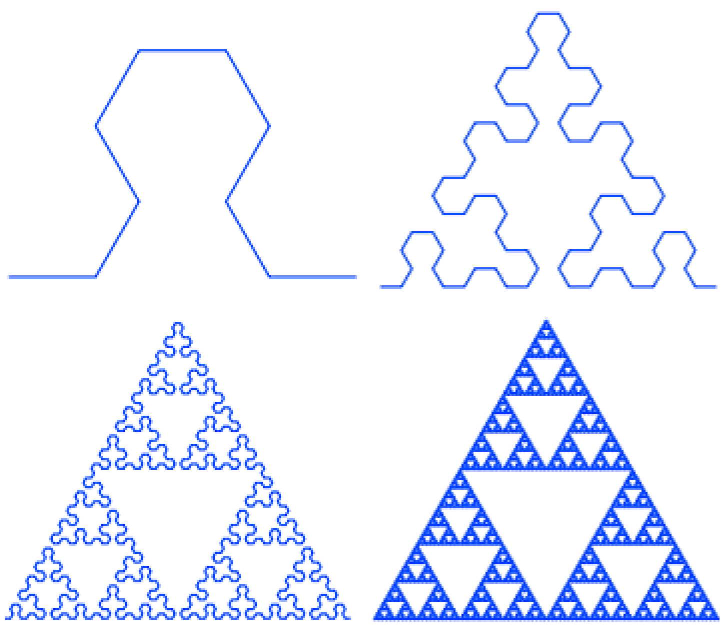

Figura 7: Derivaciones del Triángulo de Sierpinski

3. Autómatas Celulares

3.1. Similitudes y Representación con sistemas-L

La posibilidad de generar sistemas-L equivalentes a autómatas celulares es sugerida por la identificación de ciertas similitudes entre ambos sistemas:

- Los dos tienen información inicial que puede ser considerada como su estado de partida:

  – Para un sistema-L, esta información incial es el axioma.

  – Para un autómata celular, el conjunto de todos los estados iniciales de sus autómatas finitos, que pueden ser considerados como la configuración inicial del autómata.

- Los dos tienen componentes en los que se codifica la manera de cambiar del sistema:

  – En un sistema-L, el conjunto de reglas de producción.

  – En un autómata celular, la función de transición de sus estados finitos.

- Las dos arquitecturas generan el próximo estado aplicando su transformación a todos los componentes de la estructura en paralelo.

  – Los sistemas-L cambian cada símbolo de la cadena transformada.

  – Los autómatas celulares cambian el estado de cada célula de la rejilla.

La teoría de autómatas es mucho más compleja de lo que hemos citado aquí, pero simplemente está limitado a la relación que puede encontrarse entre amos sistemas. Una buena idea es que cuando los autómatas se vuelven "incomprensibles" por su complejidad, llevarlos a una representación gráica con un sistema-L podría revelarnos los detalles que no se ven a simple vista.

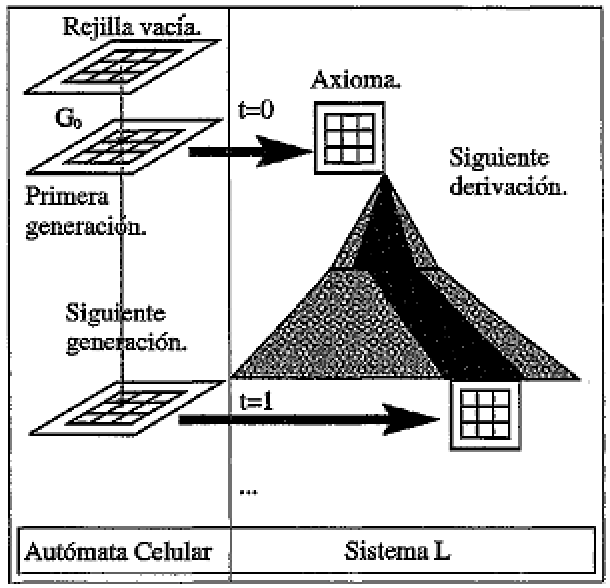

Figura 8: Equivalencia entre autómata celular y sistema-L

4. Aplicaciones

4.1. Botánica y Biología

Podemos pasear por un bosque y darnos cuenta de la gran variedad de formas, tamaños, colores, texturas y distribución espacial de las plantas que lo forman. Algunos botánicos se han dedicado a estudiar y describir estas características, añadiendo otras como el crecimiento, orientación y funcionalidad de hojas, ramas y troncos de las plantas.

La mayoría de ellos con fines científicos pero es innegable que en nuestros días el mundo virtual ocupa un lugar muy importante, así, en el interés por modelar y generar paisajes naturales lo más realistas posibles, los sistemas-L tienen un gran campo de acción con sus mayores logros en la industria cinematográfica y los videojuegos.

Otras áreas “nuevas” pueden ser el estudio de la productividad de las cosechas debido a la diferente distribución de plantas originadas por diferentes técnicas de siembra, riegos y cuidados, o la propagación de enfermedades y plagas de insectos y los diferentes métodos para combatirlas.

4.2. Arte y Arquitectura

Los sistemas-L se han usado para describir procesos complejos de desarrollo, incluyendo composiciones musicales, estructuras arquitectónicas, diseño de patrones geométricos, etcétera. Estas gramáticas han sido útiles para indagar la forma en que puede inducirse las operaciones que realizan artistas, artesanos y diseñadores para generar piezas de alta complejidad que nunca son dos veces la misma. Y esque en cada obra, se pueden reconocer ciertos patrones y similitudes en los razgos que con paciencia y dedicación podemos representar con uno de estos sistemas. Algunos ejemplos pueden ser tapetes, tejidos, pinturas, de culturas indígenas que tienen arreglos muy singulares.

4.3. Otras áreas

Simulación y optimización de procesos, diseño y planificación de ciudades, interacción de organismos y ecosistemas, propagación de enfermedades, de insectos, sistemas de rigo, de cultivo, reconstrucción de plantas extintas, vida artificial, redes neuronales, estudio de sistemas complejos, representación de estrellas, burbujas, lluvia, etc.

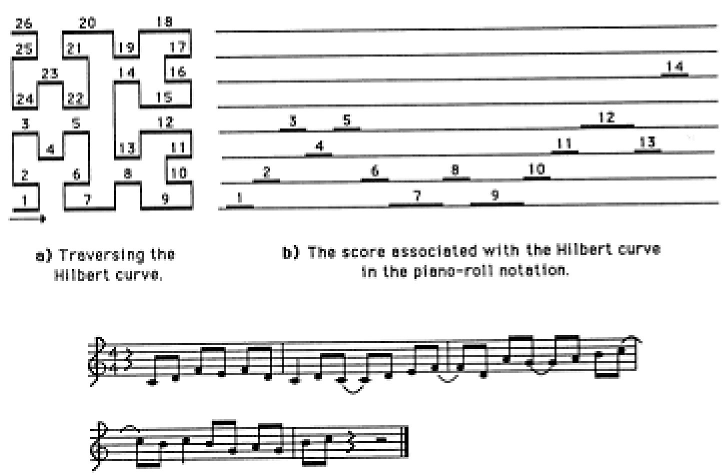

Figura 9: Representación musical de un fractal generado por un sistema-L

5. Conclusiones

Los sistemas de Lindenmayer son una herramienta muy poderosa, tienen una gran capacidad expresiva en la simulación de procesos e interacciones, lo que representa algunas ventajas sobre la experimentación tradicional, por ejemplo: ahorro de tiempo y dinero porque el desarrollo normal de muchos sistemas puede tardar años; se pueden repetir las veces que se considere necesarias hasta estar satisfecho con los resultados cosa que en la realidad es muy difícil hacer; son seguros (a menos de que la máquina explote) no estamos expuestos a ninguna amenaza.

Por otra parte, nos enseñan un nuevo enfoque de trabajo, ya que al partir de una expresión "terminada" se busca deducir la regla o la gramática que la produjo cambiando el paradigma general del conocimiento deductivo por el inductivo que resulta bastante útil en este tipo de aplicaciones.

Por último, y enfocándonos a la idea básica de los sistemas-L, podemos decir que son aplicables a cualquier estructura en la que se pueda identificar un patrón básico de desarrollo o crecimiento y si el modelo construído es adecuado para el problema que representa, los resultados pueden explicar mucho del fenómeno que se estudia con un alto grado de realismo y fidelidad.

Así que en estos momentos, el límite es la imaginación (porque actualmente el poder computacional no es tanto pretexto).

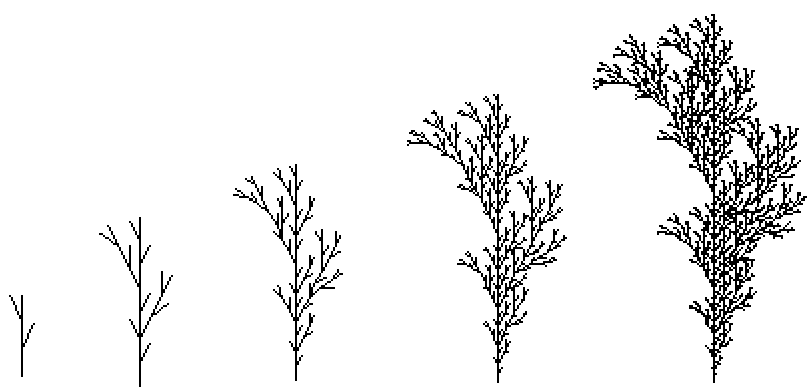

Figura 10: Planta generada por un sistema-L

Referencias

[1] http://www.bauleros.org/pc045mfmtfma0000.html

[2] http://personal.telefonica.terra.es/web/mundofractal/ls.htm

[3] http://carlosreynoso.com.ar/complejidad-gramatical-sistemas-l/

[4] http://algorithmicbotany.org/

[5] http://coco.ccu.uniovi.es/malva/sketchbook/

[6] http://cgjennings.ca/toybox/lsystems/index.html

[7] http://ejad.best.vwh.net/java/fractals/lsystems.shtml

[8] http://mathforum.org/advanced/robertd/lsys2d.html

[9] Ortega de la Puente Alfonso, Tesis: *Equivalencias entre algunos sistemas complejos: Fractales, Autómatas Celulares y Sistemas de Lindenmayer*, Universidad Autónoma de Madrid, Julio de 2000.

[10] Reynoso Carlos, *Diseño artístico y arquitectónico con gramáticas complejas*, Universidad de Buenos Aires, Septiembre de 2008.