

EA MAT/PHY 575 :
Lorentz and Poincaré groups

Loïc Henriët - Alexis Pennes

17 décembre 2011



Table des matières

1	Resume	3
2	Introduction	3
I	Groupe de Lorentz	4
3	Définition et propriétés élémentaires	4
3.1	Définition mathématique	4
3.2	Propriétés du groupe de Lorentz	5
3.3	Exemples de transformations de Lorentz	6
4	Représentations de dimension finie du groupe de Lorentz	8
4.1	Revêtement universel de $SO(1,3) : SL(2)_C$	8
4.2	Algèbre de Lie	10
4.2.1	Dimension	10
4.2.2	Base	10
4.3	Construction des représentations	11
4.3.1	$(sl(2)_C)_C \cong sl(2)_C \oplus sl(2)_C$	11
4.3.2	Construction des représentations de $sl(2)_C$	13
4.3.3	Construction des représentations de $SO(1,3)$	15
II	Groupe de Poincaré	16
5	Définition et propriétés élémentaires	16
5.1	Produit semi-direct	16
5.2	Le groupe de Poincaré	16
6	Représentations de dimension finie du groupe de Poincaré	17
6.1	Construction des représentations d'un produit semi-direct fini, définition du petit groupe	17
6.2	Cas du groupe de Poincaré	18
6.2.1	Classification des représentations	20
7	Conclusion	24
8	Bibliographie	25

1 Resume

Lorentz and Poincaré groups and their representations have fundamental roles in special relativity.

In this study we will focus on the Lorentz group, which is composed of the transformations which preserve the Minkowsky measure. We will first build the irreducible representations of its Lie Algebra and then deduce the representations of the group. Then we will study the Poincaré group which is the semi-direct product of the Lorentz group and the translations group. We will build its representations by following the little-group method.

2 Introduction

Les groupes de Lorentz et de Poincaré jouent un rôle physique très important dans le cadre de la relativité restreinte. Leur étude est donc centrale dans la compréhension de cette théorie. Dans ce mémoire, nous allons étudier les groupes de Lorentz et de Poincaré, et leurs représentations.

Tout d'abord, nous tacherons de représenter le groupe de Lorentz, constitué des transformations de Lorentz (à savoir les transformations conservant la métrique Minkowskienne). Pour cela, nous étudierons les représentations de son algèbre de Lie, avant de remonter ces représentations vers celles du groupe de Lorentz. Puis, nous nous pencherons sur le groupe de Poincaré, constitué du groupe de Lorentz auquel on ajoute les translations dans l'espace de Minkowski, dont nous construirons les représentations en utilisant la méthode du petit groupe.

Tout au long de ce mémoire, nous essaierons de rester en lien avec la signification physique des objets mathématiques que nous manipulerons.

Première partie

Groupe de Lorentz

Dans son célèbre article de 1905 sur l' "électrodynamique des corps en mouvement", Einstein postulait que :

- Dans le vide, la lumière se propage toujours à la même vitesse, indépendamment de la vitesse de la source lumineuse.
- Les lois de la physique sont les mêmes dans tout référentiel inertiel.

Revenons sur la propagation de la vitesse de la lumière. On a selon ce postulat, dans tout référentiel :

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = cste$$

Si on prend (pour faciliter l'étude mathématique) $c = 1$, on a alors la conservation de la norme minkowskienne $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ du quadrivecteur définissant la position dans le temps et l'espace. Par le second postulat d'Einstein ci-dessus, on étend ce résultat pour les opérateurs physiques : la norme des quadrivecteurs doit se conserver par changement de référentiel inertiel.

Dans cette partie, nous étudierons le groupe de Lorentz regroupant les transformations conservant la norme Minkowskienne de ces quadrivecteurs.

3 Définition et propriétés élémentaires

3.1 Définition mathématique

On se place sur l'espace de Minkovski E , muni de η , la métrique Minkowskienne de signature $(-, +, +, +)$, qui est une forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée.

(Ce n'est pas un produit scalaire : elle n'est pas définie positive)

Considérons l'ensemble des transformations de Lorentz. Une transformation de Lorentz est une transformation linéaire Λ de E , qui conserve η . Ainsi, pour tout X et Y de E :

$$\begin{aligned}\eta(\Lambda.X, \Lambda.Y) &= \eta(X, Y) \\ \Rightarrow \Lambda^\mu_\rho X^\rho \eta_{\mu,\nu} \Lambda^\nu_\sigma Y^\sigma &= X^\rho \eta_{\rho,\sigma} Y^\sigma\end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie pour tous vecteurs X, Y de E , on en déduit de façon générale :

$$\Lambda^\mu_\rho \eta_{\mu,\nu} \Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\rho,\sigma}$$

Il s'ensuit que toute matrice Λ d'une transformation de Lorentz vérifie :

$$\Lambda^T J_{1,3} \Lambda = J_{1,3} \tag{1}$$

avec

$$J_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Réciproquement, on vérifie que toute matrice de ce type représente une transformation qui conserve η .

Cet ensemble de matrices 4×4 constitue un sous groupe de $GL(4, \mathcal{R})$ noté $O(1,3)$.

On vérifie en effet que :

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1} &= J_{1,3} \Lambda^T J_{1,3} \in O(1,3) & (\Lambda^{-1} \Lambda = \Lambda \Lambda^{-1} = (J_{1,3})^2 = I_4) \\ (\Lambda^{-1})^T J_{1,3} \Lambda^{-1} &= J_{1,3} \Lambda J_{1,3} J_{1,3} \Lambda^{-1} = J_{1,3} \end{aligned}$$

D'autre part, et de façon évidente :

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^T J_{1,3} (\Lambda_1 \Lambda_2) = J_{1,3}$$

3.2 Propriétés du groupe de Lorentz

La relation (1) induit alors que pour toute matrice Λ du groupe de Lorentz,

$$\det(\Lambda)^2 = 1$$

D'autre part, on a :

$$(\Lambda_0^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda_i^0)^2 = 1$$

, ce qui implique

$$|\Lambda_0^0| \geq 1$$

La continuité des applications \det et $\Lambda \mapsto \Lambda_0^0$, impliquent que $O(1,3)$ est constitué de plusieurs composantes connexes.

Plus précisément, on distingue 4 composantes connexes (voir figure suivante). Les composantes connexes pour lesquelles $\det(\Lambda) = 1$ préservent l'orientation, tandis que celles pour lesquelles $\det(\Lambda) = -1$ renversent l'orientation. De même, les composantes connexes pour lesquelles $\Lambda_0^0 \geq 1$ préservent la flèche du temps, tandis que celles pour lesquelles $\Lambda_0^0 \leq -1$ renversent la flèche du temps.

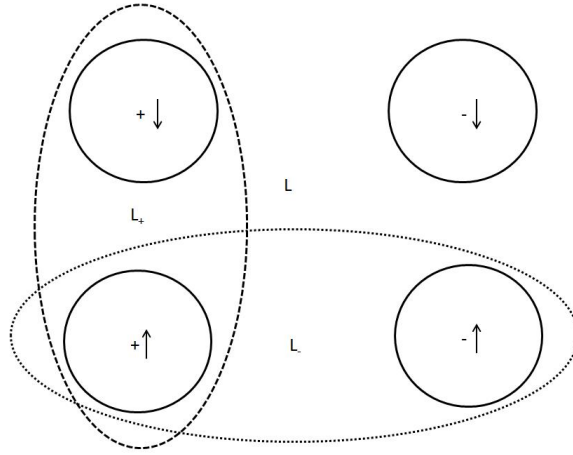


FIGURE 1 – Différentes composantes connexes du groupe de Lorentz

On note par une flèche vers le haut (respectivement vers le bas) les transformations qui préservent le sens du temps (respectivement qui le renversent), De même, on note + (respectivement -) les transformations qui préservent (respectivement qui renversent) l'orientation de l'espace. La composante connexe de l'identité est donc celle avec le + et la flèche dirigée vers le haut.

3.3 Exemples de transformations de Lorentz

Les rotations autour des trois axes vérifient trivialement les conditions d'appartenance au groupe de Lorentz. Ces transformations ont des matrices de la forme :

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Dans le cadre de la relativité restreinte, les transformations de Lorentz correspondent à la loi de changement de référentiel galiléen pour laquelle les équations de la physique doivent être préservées, ainsi que la vitesse de la lumière qui est la même dans tout référentiel galiléen. Aux rotations s'ajoutent alors les transformations spéciales dites "boosts de Lorentz" le long des différents axes.

Les formules de Lorentz permettent d'exprimer, à partir des hypothèses d'Einstein les coordonnées (x, y, z, t) d'un événement donné dans le référentiel fixe en fonction des coordonnées (x', y', z', t') du même événement dans le référentiel mobile. Par exemple, pour un boost le long de l'axe (Oz) :

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ z = \gamma(z' + \beta ct') \\ y = y' \\ x = x' \end{cases}$$

Ces transformations ont des matrices de la forme :

$$L_x(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & -\sinh(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & 0 & -\sinh(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh(\alpha) & 0 & \cosh(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & 0 & 0 & -\sinh(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh(\alpha) & 0 & 0 & \cosh(\alpha) \end{pmatrix}$$

α est appelé physiquement la rapidité. D'un point de vue physique, quand on a un référentiel en mouvement à la vitesse v par rapport au référentiel de départ, on a

$$\beta = \tanh \alpha = v/c$$

$$\gamma = \cosh \alpha = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$$

La rapidité définit, comme on le voit ci-dessus, une transformation de Lorentz. Elle sert également lors du calcul de deux transformations de Lorentz successives puisqu'on a

$$\Lambda(\alpha_1)\Lambda(\alpha_2) = \Lambda(\alpha_1 + \alpha_2)$$

4 Représentations de dimension finie du groupe de Lorentz

En relevant les représentation de l'algèbre de Lie, on obtiendra les représentations du revêtement universel de la composante connexe contenant l'identité ($SO(1, 3)$) Plus précisément, voici la démarche suivie :

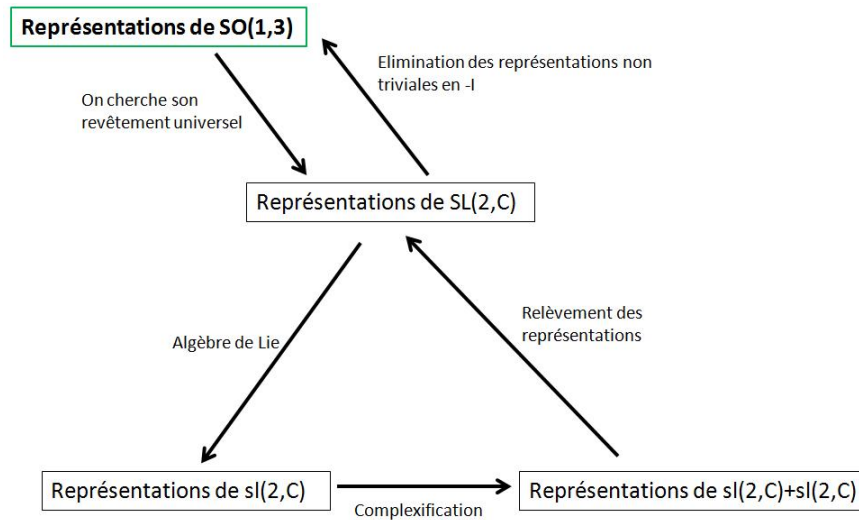


FIGURE 2 – Démarche

4.1 Revêtement universel de $SO(1, 3)$: $SL(2)_C$

Simple connexité de $SL(2)_C$

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2)_C \iff \det(S) = 1 \iff ad - bc = 1$$

Les vecteurs de composantes respectives (a, b) et (c, d) sont linéairement indépendants. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on construit une base orthonormée composée des vecteurs $\alpha(a, b)$ et $\beta(a, b) + \gamma(c, d)$ avec $\alpha = (|a|^2 + |b|^2)^{-\frac{1}{2}}$.

On pose :

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$$

$$U = KS = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \gamma a + \beta c & \gamma b + \beta d \end{pmatrix}$$

U est unitaire.

Comme $\det(K) = \det(U) = \alpha\beta$ est un nombre complexe de module 1, et que le deuxième vecteur de la base est déterminé à un nombre complexe de module

1 près, on peut choisir $\beta = (\alpha)^{-1}$. Ainsi, pour toute matrice $S \in SL(2)_{\mathbb{C}}$, on a la décomposition.

$$S = KU, U \in SU(2), K = \begin{pmatrix} p & 0 \\ \gamma & \frac{1}{p} \end{pmatrix}, p \in \mathcal{R}$$

K est homéomorphe à $\mathcal{C} \times \mathcal{R}_+^*$ par $f : K \rightarrow (\gamma, p)$.

$f_* : \Pi_1(K, K) \rightarrow \text{Pi}_1(\mathcal{C} \times \mathcal{R}, (\gamma, p))$ isomorphisme de groupe.

Ainsi K simplement connexe.

D'autre part $SU(2)$ est difféomorphe à la 3-sphère dans \mathcal{R}^4 .

$$\text{Soit } U = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ -b_1 + ib_2 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix} \in SU(2)$$

Un élément de $SU(2)$ est déterminé de façon unique par quatre réels, tels que $a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 = 1$

La sphère étant simplement connexe (tout lacet se rétractant sur un point de façon évidente), on en déduit que $SL(2)_{\mathbb{C}}$ est simplement connexe.

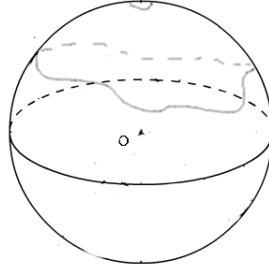


FIGURE 3 – La sphère est simplement connexe : tout lacet se rétracte sur un point

Homomorphisme entre $SL(2)_{\mathbb{C}}$ et $SO(1, 3)$

$SL(2)_{\mathbb{C}}$ agit sur l'ensemble des matrices 2-2 hermitiennes, selon

$$X \rightarrow UXU^T, U \in SL(2)_{\mathbb{C}}$$

A tout quadri-vecteur X on associe univoquement une matrice 2–2 hermitienne.

$$X = \begin{pmatrix} X^0 + X^z & X^x - iX^y \\ X^x + iX^y & X^0 - X^z \end{pmatrix}$$

Cette action préserve la condition d'hermiticité et c'est un homomorphisme. Elle préserve aussi le déterminant. Elle induit donc une transformation de Lorentz sur le quadri-vecteur X , définie par :

$$UXU^T = (\Lambda_U \cdot X)$$

L'application $U \rightarrow \Lambda_U$ est un homomorphisme surjectif de noyau $\{I, -I\}$.

$$R_{z, 2\pi t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi t) & \sin(2\pi t) & 0 \\ 0 & -\sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui se relève en

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi t) - i \sin(\pi t) & 0 \\ 0 & \cos(\pi t) + i \sin(\pi t) \end{pmatrix}$$

Le chemin fermé constitué par $\{t \rightarrow R_{z,2\pi t}, t \in [0,1]\}$ se relève en un chemin qui se termine en -I. Le groupe fondamental de $SO(1,3)$ est Z_2 .

4.2 Algèbre de Lie

4.2.1 Dimension

L'algèbre $so(1,3)$ contient par définition les transformations de Lorentz infinitésimales proches de l'identité. La matrice d'une telle transformation se met donc sous la forme :

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \epsilon \omega_\nu^\mu + \dots$$

avec $\epsilon \ll 1$.

La condition $\Lambda_\rho^\mu \eta_{\mu,\nu} \Lambda_\sigma^\nu = \eta_{\rho,\sigma}$ implique alors que :

$$\omega_\nu^\rho \eta_{\rho\nu} + \eta_{\mu\sigma} \omega_\nu^\sigma = 0$$

Cette relation nous donne alors la dimension de l'algèbre $so(1,3)$, qui est donc au plus de dimension 6 (dimension de l'espace des matrices 2×2 anti-symétriques).

4.2.2 Base

Construisons alors une base de cette algèbre g à l'aide des transformations connues.

Soient J_x, J_y et J_z les générateurs infinitésimaux des rotations autour des axes x, y et z ; et K_x, K_y et K_z les générateurs infinitésimaux des boosts de Lorentz selon ces mêmes axes.

Ces matrices forment une famille libre de $so(1,3)$, et constituent donc une base de cette algèbre. On peut représenter les matrices J_z et K_z par exemple en prenant θ et α faibles dans les expressions des matrices du paragraphe 2.3 (en mettant un facteur i pour adopter la convention des physiciens) :

$$J_z = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_z = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-1) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les autres matrices s'obtiennent par permutations.

Remarquons que

$$[J_x, J_y] = iJ_z$$

et permutations.

Les J_x, J_y et J_z forment donc l'algèbre des rotations $so(3)$. De même, on a

$$[J_x, K_y] = iK_z$$

et permutations.

Cela traduit le fait que les K_i se comportent comme des vecteurs sous l'action des rotations. Enfin, on a

$$[K_x, K_y] = iJ_z$$

et permutations, ce qui implique que la composition de deux transformations de Lorentz spéciales n'est pas une transformation de Lorentz spéciale.

4.3 Construction des représentations

Le revêtement universel du groupe de Lorentz est $SL(2)_{\mathcal{C}}$, d'algèbre de Lie $sl(2)_{\mathcal{C}}$. Il est équivalent de construire directement les représentations irréductibles de dimension finie de cette algèbre, pour ensuite remonter à $SL(2)_{\mathcal{C}}$. On restreindra alors les représentations obtenues à $SO(1, 3)$.

4.3.1 $(sl(2)_{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}} \cong sl(2)_{\mathcal{C}} \oplus sl(2)_{\mathcal{C}}$

Pour construire des représentations \mathcal{C} -linéaires, il faut considérer la complexifiée de l'algèbre $sl(2)_{\mathcal{C}}$. Par définition, on a :

$$(sl(2)_{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}} = sl(2)_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{C}$$

ce qui revient à prendre les combinaisons linéaires dans \mathcal{C} . Il est équivalent d'étudier les représentations \mathcal{R} -linéaires de $sl(2)_{\mathcal{C}}$ ou les représentations \mathcal{C} -linéaires de sa complexifiée.

Commençons par définir la loi dans la complexifiée d'un \mathcal{C} espace vectoriel V , notée \overline{V} . Pour le groupe abélien, on reste avec $V = \overline{V}$. En revanche, pour la multiplication par un scalaire, on a : $a.v = \overline{a}.v$ (où cette dernière multiplication est la multiplication habituelle dans V). On a ainsi construit un \mathcal{C} espace vectoriel \overline{V} .

Soit maintenant V un \mathcal{R} espace vectoriel, et $V_{\mathcal{C}}$ sa complexifiée sur \mathcal{R} . Nous allons montrer que $V_{\mathcal{C}} \cong V \oplus_{\mathcal{R}} V_{\mathcal{C}}$.

Pour cela, on considère pour tout \mathcal{C} espace vectoriel W , $Hom_{\mathcal{R}}(V, W)$ l'ensemble des applications \mathcal{R} -linéaires de V dans W . On a $Hom_{\mathcal{R}}(V, W) \cong Hom_{\mathcal{C}}(V_{\mathcal{C}}, W)$, avec l'isomorphisme $\phi \mapsto \psi(v \otimes z) = z.\phi(v)$.

On suppose désormais que V est un \mathcal{C} espace vectoriel. On a $Hom_{\mathcal{R}}(V, W) \cong Hom_{\mathcal{C}}(V, W) \oplus Hom_{\overline{\mathcal{C}}}(V, W)$. En effet, on définit la transposée de la façon suivante : $\phi^t : v \mapsto -i.\phi(i.v)$. On remarque que ϕ \mathcal{R} -linéaire $\Leftrightarrow \phi^t = \phi$ et ϕ $\overline{\mathcal{C}}$ -linéaire $\Leftrightarrow \phi^t = -\phi$. On a alors la décomposition $\phi = \frac{(\phi+\phi^t)}{2} + \frac{(\phi-\phi^t)}{2}$ qui assure l'isomorphisme recherché.

Or $Hom_{\overline{\mathcal{C}}}(V, W) = Hom_{\mathcal{C}}(\overline{V}, W)$ par définition. Donc

$$Hom_{\mathcal{C}}(V, W) \oplus Hom_{\overline{\mathcal{C}}}(V, W) \cong Hom_{\mathcal{C}}(V \oplus \overline{V}, W)$$

Donc si V est un \mathcal{C} espace vectoriel, on a pour tout W :

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}(V_{\mathcal{C}}, W) &\cong Hom_{\mathcal{C}}(V \oplus \overline{V}, W) \\ &\Rightarrow V_{\mathcal{C}} \cong V \oplus \overline{V} \end{aligned}$$

(en effet, il suffit de prendre $W = V \oplus \overline{V}$ et Id comme morphisme).

Puis on reprend le raisonnement dans l'autre sens :

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}(V \oplus \overline{V}, V \oplus \overline{V}) &\mapsto Id \\ &\downarrow \\ Hom_{\mathcal{C}}(V, V \oplus \overline{V}) \oplus Hom_{\mathcal{C}}(\overline{V}, V \oplus \overline{V}) &\mapsto I_1 \oplus I_2 \\ &\downarrow \\ Hom_{\mathcal{C}}(V, V \oplus \overline{V}) \oplus Hom_{\overline{\mathcal{C}}}(V, V \oplus \overline{V}) &\mapsto I_1 \oplus I_2 \\ &\downarrow \\ Hom_{\mathcal{C}}(V_{\mathcal{C}}, V \oplus \overline{V}) &\mapsto (X \otimes z \rightarrow z.(X, X)) \end{aligned}$$

On a : $z.(X, X) = (z.X, z.X)$ où la première multiplication est la multiplication dans V , et la seconde multiplication est la multiplication dans \overline{V} .

On a fait le raisonnement ci-dessus pour des espaces vectoriels par commodité. Mais un tel raisonnement reste valable pour des algèbres de Lie. On obtient alors :

$$g_{\mathcal{C}} \cong g \oplus \overline{g}$$

Or, si $g = sl(2)_{\mathcal{C}}$, on a un résultat un peu plus fort : $sl(2)_{\mathcal{C}}$ est déjà par définition la complexification de $sl(2)_{\mathcal{R}}$. Donc $V \cong \overline{V}$ (en utilisant la conjugaison comme isomorphisme \mathcal{C} -linéaire).

On a finalement :

$$g_{\mathcal{C}} \cong g \oplus \overline{g} \cong g \oplus g$$

Ou encore, puisque $g = sl(2)_{\mathcal{C}}$,

$$(sl(2)_{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}} \cong sl(2)_{\mathcal{C}} \oplus sl(2)_{\mathcal{C}}$$

On voit qu'on peut construire une représentation de l'espace somme en tensorisant les deux espaces de représentations. On se donne (ρ, V) une représentation de l'espace somme, avec $V = V_m \otimes V_n$ et $\rho(M_j) = \rho_1(M_j) \otimes I_{V_n}$ et $\rho(N_j) = I_{V_m} \otimes \rho_2(N_j)$ pour M_j et N_j des bases de chacun des $sl(2)_{\mathcal{C}}$. Il suffit donc de construire les représentations de dimension finie de $sl(2)_{\mathcal{C}}$ pour aboutir.

4.3.2 Construction des représentations de $sl(2)_{\mathcal{C}}$

Une base de $sl(2)_{\mathcal{C}}$ est :

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ces matrices vérifient les relations de commutation :

$$[h, e] = 2e; [h, f] = -2f; [e, f] = h$$

Soit $\phi : sl(2)_{\mathcal{C}} \rightarrow gl(V)$ une représentation linéaire irréductible sur \mathcal{C} de dimension finie. Si V n'est pas nul, il existe un sous espace propre non nul de $\phi(h)$ pour une valeur propre λ noté V_{λ} .

D'après les relations de commutation, on obtient finalement :

$$\phi(e)(V_{\lambda}) \subset V_{\lambda+2}$$

$$\phi(f)(V_{\lambda}) \subset V_{\lambda-2}$$

V étant de dimension finie par hypothèse, il n'y a qu'un nombre fini de V_{λ} non nuls. $\exists \mu \in \mathcal{C}, V_{\mu} \neq 0$ et $V_{\mu+2} = 0$ Soit $v \in V_{\mu} \neq 0$.

On pose $v_k = \phi^k(f)(v) \in V_{\mu-2k}$. On a par ailleurs $\phi(e)(v_k) = k(\mu - k + 1)v_{k-1}$. La famille de vecteurs $\{v, v_1, v_2, \dots, v_p\}$ est libre tant qu'ils sont tous non nuls.

Or, V étant de dimension finie, il existe un rang n à partir duquel v_n est nul.

Alors, puisque la famille $\{v, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ engendre un sous espace stable sous l'action de $sl(2)_{\mathcal{C}}$, on en déduit que cette famille constitue une base de V (car la représentation est irréductible).

Réciproquement, si $n \in \mathcal{N}$, et si l'on fixe une base $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de \mathcal{C}^{n+1} , alors on définit une représentation ϕ de $sl(2)_{\mathcal{C}}$ par :

$$\phi(h)(v_k) = (n - 2k)v_k; \phi(e)(v_k) = k(n - k + 1)v_{k-1}; \phi(f)(v_k) = v_{k+1}$$

On a donc une classification des représentations irréductibles \mathcal{C} -linéaires de $sl(2)_{\mathcal{C}}$: toute représentation irréductible \mathcal{C} -linéaire de dimension $n + 1$ de $sl(2)_{\mathcal{C}}$ est isomorphe à la représentation définie ci-dessus.

Pour pouvoir remonter à $SL(2)_{\mathcal{C}}$, nous allons construire une autre réalisation des représentations de $sl(2)_{\mathcal{C}}$.

On se place sur l'espace $\mathcal{C}[Z_1, Z_2]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes à deux variables.

On pose

$$D_e = -z_2\partial_1; D_f = -z_1\partial_2; D_h = z_2\partial_2 - z_1\partial_1$$

On vérifie que ces opérateurs différentiels agissant sur $\mathcal{C}[Z_1, Z_2]$ vérifient les relations de commutation :

$$[D_h, D_e] = 2D_e; [D_h, D_f] = -2D_f; [D_e, D_f] = D_h$$

On remarque par ailleurs que ces opérateurs laissent invariants les espaces du type $\mathcal{C}_n[Z_1, Z_2]$, de polynômes homogènes à coefficient complexes de degré n . Ainsi,

$$e \mapsto D_e, f \mapsto D_f, h \mapsto D_h$$

définit une représentation de dimension $n + 1$ de $sl(2)_{\mathbb{C}}$ dans $\mathcal{C}_n[Z_1, Z_2]$.

En normalisant correctement une base de $\mathcal{C}_n[Z_1, Z_2]$ avec la famille de vecteurs $v_k = (-1)^k \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{(n-k)!}$, on voit que la représentation $(D, \mathcal{C}[Z_1, Z_2])$ est isomorphe à une représentation du type (ϕ_n, V_n) .

On peut alors montrer que l'action de $sl(2)_{\mathbb{C}}$ sur $\mathcal{C}_n[Z_1, Z_2]$ est la différentielle d'une représentation de $SL(2)_{\mathbb{C}}$ dans ce même espace. En effet, $SL(2)_{\mathbb{C}}$ agit naturellement sur \mathbb{C}^2 , et donc sur $\mathcal{C}_n[Z_1, Z_2]$ par :

$$(\rho(g).P)(z_1, z_2) = P(g^{-1}(z_1, z_2))$$

Explicitement, pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2)_{\mathbb{C}}$, son inverse étant $g = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$(\rho(g).P)(z_1, z_2) = P(dz_1 - bz_2, -cz_1 + az_2)$$

Cette action préserve l'espace. On en déduit donc une représentation $(\rho, \mathcal{C}_n[Z_1, Z_2])$.

Calculons alors sa différentielle :

Soit $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$, et $s(t) = \exp(tX) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ On a :

$$(d\rho(X).P)(z_1, z_2) = \frac{d}{dt}[(\rho(s(t)).P)(z_1, z_2)]_{t=0}$$

$$(d\rho(X).P)(z_1, z_2) = \frac{d}{dt}[P(d(t)z_1 - b(t)z_2, -c(t)z_1 + a(t)z_2)]_{t=0}$$

$$(d\rho(X).P)(z_1, z_2) = (-\alpha z_1 - \beta z_2)(\partial_1 P)(z_1, z_2) + (-\gamma z_1 + \alpha z_2)(\partial_2 P)(z_1, z_2)$$

On retrouve en particulier

$$d\rho(h) = -z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2, d\rho(e) = -z_2 \partial_1, d\rho(f) = -z_1 \partial_2$$

On a ainsi construit une représentation de $SL(2)_{\mathbb{C}}$ dont la différentielle correspond à la deuxième réalisation d'une représentation de $sl(2)_{\mathbb{C}}$.

4.3.3 Construction des représentations de $SO(1,3)$

Construction

En s'inspirant de ce qui précède, on a une représentation de $sl(2)_C \oplus sl(2)_C$ sur $\mathcal{C}_m[Z_1, Z_2] \otimes \mathcal{C}_n[Z_3, Z_4]$ par tensorisation. On remonte alors cette représentation à $SL(2)_C$. Les représentations irréductibles de dimension finie de $SO(1,3)$ sont celles obtenues à partir de celles de $SL(2)_C$ triviales en $-I$.

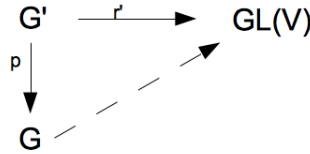


FIGURE 4 – Représentations et revêtement

De façon générale, pour G' revêtement de G et (r', V) représentation de G' , on a :

$$r' \text{ triviale sur } Ker(p) \iff r \text{ représentation de } G$$

Supposons tout d'abord que r' ne soit pas triviale sur $Ker(p)$. Il s'ensuit qu'on ne peut définir de représentation r car deux éléments de G' qui ont même image dans G par p sont envoyés sur des éléments différents de $GL(V)$.

Réciproquement, si r' est triviale sur $Ker(p)$, alors on définit r par : $\forall a \in G, r(a) = r'(p^{-1}(a))$, $p^{-1}(a)$ correspondant à un antécédent de a par p . La trivialité de r' sur $Ker(p)$ assure que cette définition est unique.

Or $-I$ agit sur un polynôme de $\mathcal{C}_m[Z_1, Z_2] \otimes \mathcal{C}_n[Z_3, Z_4]$ par :

$$\rho(-I) \cdot (P_1 \otimes P_2)((z_1, z_2), (z_3, z_4)) = P_1(-z_1, -z_2) \otimes P_2(-z_3, -z_4)$$

En considérant les vecteurs de base

$$v_k \otimes v_l = (-1)^k \frac{z_1^k z_2^{m-k}}{(m-k)!} \otimes (-1)^l \frac{z_3^k z_4^{n-k}}{(n-k)!}$$

on voit donc que la condition pour obtenir une représentation de $SO(1,3)$ est

$$n + m \text{ pair}$$

Exemples de représentations de $SL(2)_C$

$(0, 0)$ est la représentation triviale de $SL(2)_C$ correspondant au scalaire.

$(1, 0)$: Il s'agit d'une représentation sur \mathcal{C}^2 . Trouvons une représentation des générateurs de l'algèbre $sl(2)_C$ pour remonter vers $SL(2)_C$. On a :

$$J_j = \frac{1}{2}\sigma_j, \quad K_j = \frac{i}{2}\sigma_j$$

où σ_j sont les matrices de Pauli.

Le vecteur à deux composantes χ_L se transforme par :

$$\chi_L \mapsto \exp\left(-\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{n}_1\theta - i\vec{n}_2\alpha)\right)\chi_L$$

(qui représente une rotation d'angle θ autour de \vec{n}_1 quand $\alpha = 0$, et un boost de rapidité α selon \vec{n}_2 quand $\theta = 0$.)

(0, 1) : Il s'agit aussi d'une représentation de dimension 2, équivalente à la précédente.

La somme directe de ces deux dernières représentations donne une représentation du groupe de Lorentz contenant la composante connexe contenant l'opérateur parité. Les vecteurs à 4 composantes de cet espace de représentation sont appelés *spinneurs de Dirac*. Des considérations sur cet espace permettent de retrouver l'équation de Dirac (ce qui n'est pas l'objet de cette étude).

Deuxième partie

Groupe de Poincaré

En physique et en mathématiques, le groupe de Poincaré est le groupe des isométries d'un espace de Minkowski : c'est le groupe des transformations affines de l'espace-temps de la relativité restreinte qui laissent invariant l'intervalle d'espace-temps.

5 Définition et propriétés élémentaires

5.1 Produit semi-direct

Un groupe G est produit semi-direct interne d'un sous-groupe normal H par un sous-groupe K si et seulement si :

$$\forall g \in G \exists!(h, k) \in H \times K, g = hk$$

Rappel :

$$N \text{ sous groupe normal de } G \iff aNa^{-1} = N, \forall a \in G$$

5.2 Le groupe de Poincaré

Le groupe de Poincaré s'obtient en complétant le groupe de Lorentz par les translations $T_a : X^\mu \mapsto X^\mu + a^\mu$. Ces dernières forment un ensemble commutatif, mais elles ne commutent pas avec les transformations de Lorentz : $\Lambda T_a \Lambda^{-1} = T_{\Lambda.a}$. Le groupe de Poincaré s'identifie avec le produit semi-direct $O(1, 3) \rtimes \mathcal{R}^4$. Il s'identifie avec le groupe matriciel

$$M(\Lambda, a) = \begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathcal{R}^4, \Lambda \in O(1, 3)$$

On a :

$$M(\Lambda_1, a_1)M(\Lambda_2, a_2) = M(\Lambda_1\Lambda_2, a + \Lambda.a_2)$$

Les générateurs de l'algèbre de Poincaré sont les générateurs des translations infinitésimales et les générateurs des transformations de Lorentz déjà vus.

6 Représentations de dimension finie du groupe de Poincaré

6.1 Construction des représentations d'un produit semi-direct fini, définition du petit groupe

Soit G un groupe, et N un sous-groupe normal abélien. On suppose qu'il existe un sous-groupe H tel que $G = H \rtimes N$.

Le groupe H agit sur N par conjugaison : on note $h.n = hnh^{-1} \in N$. Il agit aussi sur tout espace de fonction $f(N)$, par : $h.f(n) = f(h^{-1}nh)$

Comme N est abélien, toutes ses représentations irréductibles sont de dimension 1, d'après le Lemme de Schur. Notons N^* l'ensemble des formes linéaires sur N . H agit sur N^* selon : $h.\chi(n) = \chi(h^{-1}nh)$

Soit (ρ, V) une représentation irréductible de G .

On décompose V selon une somme finie de sous-espaces $V_{\chi_j} = m_j W_j$ où (σ_j, W_j) est une représentation irréductible de dimension 1 de N , associée à la forme linéaire χ_j (m_j étant la multiplicité dans la décomposition en somme). Nous avons donc :

$$V_{\chi_j} = \{v \in V, \forall n \in N, \rho(n)v = \chi_j(n)v\}$$

Soit alors g un élément quelconque du groupe G et déterminons l'action de $\rho(g)$ sur ces sous-espaces.

$\forall v \in V_{\chi_j}, \forall n \in N, \forall g \in G$

$$\begin{aligned} \rho(n)\rho(g)v &= \rho(g)\rho(g)^{-1}\rho(n)\rho(g)v \\ \rho(n)\rho(g)v &= \rho(g)\rho(g^{-1}ng)v \\ \rho(n)\rho(g)v &= \rho(g)\chi_j(g^{-1}ng)v \\ \rho(n)\rho(g)v &= (g.\chi_j)(n)\rho(g)v \end{aligned}$$

On en conclut donc que

$$\rho(g)V_{\chi_j} = V_{g.\chi_j}$$

Choisissons un V_{χ_j} non nul, et appelons N_j^* l'orbite de G agissant sur N^* contenant χ_j (i.e : $N_j^* = G.\chi_j$).

Alors le sous espace :

$$\sum_{\chi_{l_p} \in N_j^*} V_{\chi_{l_p}}$$

est stable par $\rho(g)$. V étant irréductible, on en déduit que

$$V = \sum_{\chi_{l_p} \in N_j^*} V_{\chi_{l_p}}$$

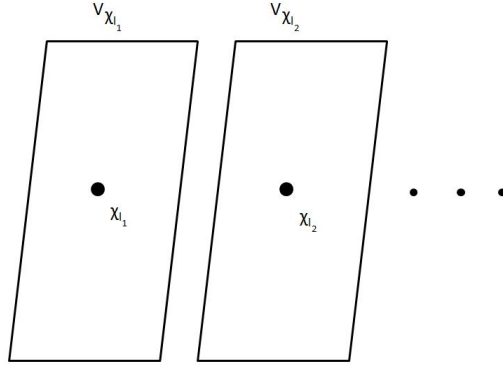


FIGURE 5 – Espace d'étude

Soit G_j le sous-groupe d'isotropie de χ_j dans G , (i.e $g \in G$, $g.\chi_j = \chi_j$)
 G_j est alors le produit semi-direct de L_j et N , où L_j est le sous-groupe d'isotropie de χ_j dans H .

$$\begin{aligned}
 g = hn \in G_j &\iff g.\chi_j(n') = \chi_j(n') \\
 g = hn \in G_j &\iff \chi_j(n^{-1}h^{-1}n'hn) = \chi_j(n') \\
 g = hn \in G_j &\iff \chi_j(n^{-1}h^{-1}n'hn) = \chi_j(n') \\
 g = hn \in G_j &\iff \chi_j(h^{-1}n'h) = \chi_j(n')
 \end{aligned}$$

On a une représentation de G_j sur V_{χ_j} . G_j est appelé le petit groupe, et les représentations de G se construisent à partir des représentations de ce petit groupe. Construisons ces représentations explicitement dans le cas du groupe de Poincaré.

6.2 Cas du groupe de Poincaré

$$\text{On a } G = hn, h = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous ne sommes plus ici dans le cas d'un groupe fini. On doit alors ajouter une condition selon laquelle $(T_\mu)^*$ est composé de fonctions continues à valeur dans \mathcal{C} et de module 1. Supposons avoir une représentation irréductible du groupe de Poincaré. En se restreignant au sous-groupe des translations, cette représentation se décompose en une somme directe de représentations unidimensionnelles. Considérons en particulier une de ces représentations.

$$\rho(a)\psi(k_0, \zeta) = e^{ik_0 \cdot a}\psi(k_0, \zeta)$$

On a utilisé le "produit scalaire" sur $\mathcal{R}_{(1,3)}$ pour identifier (T_μ) avec son dual, et on a écrit abusivement $\rho(a) = \rho\left(\begin{pmatrix} I & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. ζ représente un ensemble d'indices de classification. On a, pour $W \in H, b \in T_\mu$:

$$\rho(b)[\rho(W)\psi(k_0, \zeta)] = e^{iWk_0 \cdot b}[\rho(W)\psi(k_0, \zeta)]$$

Ainsi, $\rho(W)\psi(k_0, \zeta)$ est dans le sous-espace de représentation de T_μ , caractérisé par le vecteur Wk_0 . Ainsi, si l'espace de représentation du groupe de Poincaré contient une représentation de T_μ correspondant au vecteur k_0 , il doit aussi contenir les représentations qui correspondent aux vecteurs qui ont la même "longueur", qui sont atteints par des transformations de type W . Considérons maintenant le petit groupe associé au vecteur k_0 , qui contient tout les W qui laissent k_0 inchangé.

$$G_{k_0} = \{W_{k_0} \in H, W_{k_0}k_0 = k_0\}$$

Considérons avoir trouvé une représentation irréductible de ce petit groupe.

$$\rho(W_{k_0})\psi(k_0, \zeta) = \sum_{\nu} \psi(k_0, \nu)[\rho(W_{k_0})]_{\nu, \zeta}$$

Montrons alors qu'une représentation irréductible du groupe entier est automatiquement déterminée par cette représentation particulière du petit groupe. Pour chaque vecteur k de même norme Minkowskienne que k_0 , on choisit une transformation W_k telle que $W_k k_0 = k$. Toute autre transformation amenant k_0 en k peut être écrite sous la forme $W_k W_{k_0}$. On définit d'autre part les fonctions : $\psi(k, \zeta) = \rho(W_k)\psi(k_0, \zeta)$

$$Wk = k' \iff WW_k k_0 = W_{k'} k_0$$

$$Wk = k' \iff W_{k'}^{-1} WW_k k_0 = k_0$$

Ainsi, $W_{k'}^{-1} WW_k = W_{k_0} \in G_{k_0}$.

La représentation de W est alors complètement déterminée :

$$\rho(W)\psi(k, \zeta) = \rho(W_{k'})\rho(W_{k_0})\rho(W_k^{-1})\psi(k, \zeta)$$

$$\rho(W)\psi(k, \zeta) = \rho(W_{k'})\rho(W_{k_0})\psi(k_0, \zeta)$$

$$\rho(W)\psi(k, \zeta) = \rho(W_{k'}) \sum_{\nu} \psi(k_0, \nu)[\rho(W_{k_0})]_{\nu, \zeta}$$

$$\rho(W)\psi(k, \zeta) = \sum_{\nu} \psi(k', \nu)[\rho(W_{k_0})]_{\nu, \zeta}$$

$$\rho(W)\psi(k, \zeta) = \sum_{\nu} \psi(Wk, \nu)[\rho(W_{k_0})]_{\nu, \zeta}$$

La représentation est alors complètement déterminée par cette dernière relation et, pour les translations

$$\rho(a)\psi(k, \zeta) = e^{ik \cdot a}\psi(k, \zeta)$$

6.2.1 Classification des représentations

Classification

Trouvons les représentations irréductibles de $SO(1, 3) \times \mathcal{R}^4$. D'après ce qui est décrit précédemment, nous devons choisir un vecteur k_0 et chercher les représentations irréductibles du petit groupe associé G_{k_0} .

L'opérateur C_1 , implicitement utilisé dans la partie précédente, et qui correspond à la norme Minkowskienne d'un vecteur de \mathcal{R}^4 a une interprétation physique évidente comme nous le verrons plus tard. Tout d'abord, cet opérateur est appelé un opérateur de Casimir ; il est constitué d'un polynôme de générateur infinitésimaux de l'algèbre qui commute avec tous les générateurs de cette algèbre. D'après le lemme de Schur qui s'étend aux cas des groupes non compacts pour des représentations unitaires irréductibles, ces opérateurs de Casimir seront représentés par des constantes dans toute représentation unitaire irréductible. On trouvera 4 types de représentations selon les valeurs du premier opérateur de Casimir.

$$\begin{aligned}k_0.k_0 &> 0 \\k_0.k_0 &= 0 \text{ mais } k_0 \text{ non nul} \\k_0 &= 0 \\k_0.k_0 &< 0\end{aligned}$$

Seuls les deux premiers cas ont un réelle signification physique et nous nous attarderons plus précisément sur ces deux cas.

Premier type- représentations massives

La valeur du produit scalaire peut être interprétée comme étant l'opposé de la masse $k_0.k_0 = m^2$. On choisit habilement un représentant de la forme $(m, \vec{0})$. Le petit groupe est alors l'ensemble des transformations de Lorentz qui laissent invariante la composante non spatiale, il s'agit alors de l'ensemble des rotations dans un espace à trois dimensions. Nous connaissons les représentations irréductibles de ce petit groupe : elles sont indexées par un entier ou demi-entier j . Les constantes m et j déterminent alors la masse et le spin du système.

Deuxième type- représentations non massives

Cela correspond à la nullité du premier opérateur de Casimir. On choisit un représentant de type $(1, 0, 0, 1)$ Le groupe d'isotropie correspondant est le produit semi-direct de $SO(2)$ et \mathcal{R}^4 . Les seules représentations qui ont un sens physique correspondent à l'orbite constituée par l'origine. Le petit groupe est alors $SO(2)$ et les représentations unitaires irréductibles sont unidimensionnelles et indexées par des nombres relatifs entiers et demi-entiers.

Interprétation physique

On sait que la définition physique d'une particule est un objet aussi simple que possible, dont les caractéristiques (charge, masse,...) sont déterminées. De même, l'"objet le plus simple" que l'on peut déterminer d'un point de vue mathématique est une représentation irréductible d'un groupe. D'après le théorème de Noether, on peut donc considérer une représentation irréductible comme la définition mathématique de la particule.

On sait que la définition physique d'une particule est un objet aussi simple que possible, dont les caractéristiques (charge, masse,...) sont déterminées. De même, l'"objet le plus simple" que l'on peut déterminer d'un point de vue mathématique est une représentation irréductible d'un groupe. On peut donc considérer une représentation irréductible comme la définition mathématique de la particule.

Montrons que les valeurs propres des opérateurs de Casimir peuvent prendre un sens physique. On a vu que l'algèbre de Poincaré possède les deux opérateurs de Casimir suivants :

$$C_1 = P^2 = (P_0)^2 - (P_1)^2 - (P_2)^2 - (P_3)^2 \text{ ("opérateur de masse")}$$

et

$$C_2 = W^2 \text{ ou } W_0 = -\vec{P} \cdot \vec{J} \text{ et } \vec{W} = -P_0 \vec{J} + \vec{P} \wedge \vec{K}$$

Donnons une expression plus physique des générateurs de l'algèbre de Poincaré.

On note P_μ les générateurs des translations infinitésimales. Pour une translation infinitésimale de vecteur a , avec $|a| \ll 1$, on a pour toute fonction f définie sur l'espace-temps (par développement de Taylor) :

$$(T_a f)(X) = f(X) - a^\mu (\partial_\mu f)(X) + \dots$$

Donc

$$P_\mu = -i\partial_\mu$$

avec la notation des physiciens.

On remarque alors que l'opérateur C_1 est le quadrivecteur énergie-impulsion de la relativité restreinte (à une constante près, à savoir la vitesse de la lumière). Or on sait que la norme de ce quadrivecteur est un invariant de Lorentz : elle se conserve par transformation de Lorentz (donc par changement de référentiel galiléen). On a

$$P^2 = \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = m^2 c^2$$

Donc la valeur propre du premier opérateur de Casimir C_1 est égale au carré de la masse de la particule définie par la représentation irréductible du groupe de Poincaré considérée.

De même, on va écrire le développement de Taylor de l'action d'une transformation de Lorentz infinitésimale sur une fonction définie sur l'espace-temps. Soit Λ la transformation de Lorentz et f la fonction. Puisque Λ est infinitésimale, elle s'écrit $\Lambda = I - i(\epsilon/2)\omega_{[\sigma\rho]}J^{[\sigma\rho]} + \dots$ où $J^{[jk]} = \epsilon^{jkn}J_n$, à savoir par exemple

$$J^{[12]} = J_z \text{ et permutations, et } J^{[0j]} = K_j$$

On a finalement $(\Lambda f)(X) = f(X) - (\epsilon/2)\omega_{\sigma\rho}(X^\sigma\partial^\rho - X^\rho\partial^\sigma)$. Donc

$$J^{[\sigma\rho]} = i(X^\sigma\partial^\rho - X^\rho\partial^\sigma)$$

On remarque que la formule ci-dessus est l'analogue de la formule du moment cinétique en mécanique quantique : $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$

Ainsi, les représentations du groupe de Poincaré peuvent être classifiées en utilisant d'une part le premier opérateur de Casimir (qui définit 3 catégories : $m < 0$, $m = 0$ et $m > 0$), puis en utilisant au sein de ces catégories le second opérateur de Casimir, pour obtenir des sous-catégories. Pour ce qui est des représentations pour lesquelles $m < 0$, elles ne semblent pas jouer de rôle physique. En revanche, les représentations telles que $m = 0$ ou $m > 0$ peuvent s'interpréter physiquement.

En ce qui concerne les représentations de masse strictement positive, on remarque, d'après le raisonnement précédent sur le choix d'un représentant idoine dans la couche de masse considérée, que l'on peut choisir sans nuire à la généralité la quadri-impulsion $(m, \vec{0})$. Cela revient à se placer dans le référentiel du centre de masse de la particule. On sait qu'on peut passer de ce référentiel à un autre référentiel par une transformation de Lorentz.

Puisque $[W_\mu, P_\nu] = 0$, on peut se placer sur les espaces propres de P_μ , ce qui correspond physiquement à se placer dans le référentiel dans lequel la quadri-impulsion vaut $(m, \vec{0})$ (au carré de la vitesse de la lumière près). On est donc dans le référentiel du centre de masse. Dans ce sous-espace vectoriel, on a

$$W_0 = 0 \text{ et } \vec{W} = -m\vec{J}$$

Puisque les \vec{W} sont proportionnels aux générateurs des rotations dans ce référentiel, ils vont prendre les valeurs propres connues du spin, à savoir des demi-entiers. On veut étendre ce résultat à tout espace propre (donc à tout référentiel galiléen).

On sait que l'opérateur de Casimir C_2 est invariant par les transformations de Lorentz. Donc la valeur propre prise par C_2 sur tout sous-espace propre de P_μ est la même que celle prise dans le référentiel du centre de masse, à savoir $m^2s(s+1)$ si le spin de la particule dans le référentiel du centre de masse vaut s . Enfin, l'espace de Hilbert ainsi obtenu a une base décrite par la valeur du moment cinétique intrinsèque (noté ici σ) obtenue en reprenant la démonstration pour le spin en mécanique quantique. On retrouve la description de la fonction d'onde d'une particule de masse m (donc d'impulsion $p^2 = m^2$), de spin s , et de moment cinétique intrinsèque σ $|p; s, \sigma\rangle$.

Remarquons que la démarche ci-dessus ne fonctionne pas quand on a une particule pour laquelle la valeur propre de C_1 (i.e. sa masse) vaut 0. En effet, on ne peut plus définir le référentiel de centre de masse : dans tout référentiel on aura $p^2 = 0$. Cette particule voyage à la vitesse de la lumière dans tout référentiel. On va plutôt choisir un référentiel dans lequel $p^0 = p^z$ et $p^x = p^y$. On aura alors dans ce référentiel

$$W^0 = W^z = -kJ^z, \quad W^x = -k(J^x + K^x) \text{ et } W^y = -k(J^y - K^y)$$

On a alors $C_2 = W^2 = (W_x)^2 + (W_y)^2$. Seules les représentations pour lesquelles $C_2 = 0$ semblent jouer un rôle physique. Dans ce cas, $W^x = W^y = 0$. Il ne reste plus qu'à s'intéresser à la signification de J^z puisqu'il reste $W^z = W^0 = -kJ^z$. J^z est le générateur des rotations autour de l'axe $0z$, qui est abélien. Donc les représentations irréductibles sont de dimension 1 d'après le corollaire du lemme de Schur. On les classe par la valeur prise par J^z , notée λ . On a alors dans le sous-espace pour lequel $J^z = \lambda : P^\mu = (k, 0, 0, k)$ et $W^\mu = -\lambda(k, 0, 0, k)$. Mais on sait de plus que les transformations de Lorentz ont le même effet sur P^μ et W^μ . Donc la relation $W^\mu = \lambda P^\mu$ est valable dans tout référentiel. Le paramètre λ est l'hélicité.

7 Conclusion

Au cours de cet enseignement d'approfondissement, nous avons étudié les groupes de Lorentz et de Poincaré.

Après une brève étude du groupe de Lorentz, nous avons construit ses représentations en passant par la complexifiée de son algèbre de Lie, puis en remontant ces représentations.

Quant au groupe de Poincaré, nous avons construit ses représentations en utilisant la méthode du petit groupe. Puis nous les avons classées en fonction des valeurs propres des opérateurs de Casimir, ce qui correspondait à une interprétation physique en termes de masse et de spin de particules élémentaires.

Grâce à ce projet, nous avons désormais une meilleure compréhension du rôle de la théorie des groupes dans la physique des particules, en particulier vis-à-vis de certains points du cours de Michel Gonin. Enfin, l'investissement important fourni au cours de ce travail a éveillé notre curiosité pour ces aspects de la physique fondamentale.

8 Bibliographie

Introduction a la physique subatomique, A. Rougé, Les éditions de l'Ecole Polytechnique, 1997

Group theory and its application to physical problems , M. Hamermersh, Addison-wesley publishing company, 1962

Group theory and physics, S. Sternberg, Cambridge university Press

Groupes et representations, David Renard, Les éditions de l'Ecole Polytechnique, 2010

Table des figures

1	Différentes composantes connexes du groupe de Lorentz	6
2	Démarche	8
3	La sphère est simplement connexe : tout lacet se rétracte sur un point	9
4	Représentations et revêtement	15
5	Espace d'étude	18