INVESTIGACION DE OPERACIONES:

METODO SIMPLEX.

El algoritmo símplex fue descubierto por el matemático norteamericano George Bernard Dantzig en 1947, es una técnica para dar soluciones numéricas a problema de programación lineal.

Un problema en su forma estándar se puede representar como:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

X, Xs ≥ 0.

donde X son las variables de decisión de la forma estándar, Xs son las variables de holgura o de exceso, c contiene los coeficientes de la función objetivo y Z es la variable a ser maximizada o minimizada.

El sistema es no determinado, debido a que el número de variables excede el número de ecuaciones. La diferencia entre el número de variables y el número de ecuaciones nos da los grados de libertad asociados con el problema. Cualquier solución, óptima o no, incluirá un número de variables de valor arbitrario.

Esta forma permite encontrar la solución factible básica inicial haciendo Xsi = bj

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

METODO SIMPLEX.

El método Simplex es un algoritmo iterativo que permite mejorar la solución con cada paso sucesivo. El algoritmo termina cuando no se puede seguir mejorando más la solución.

Se parte de una solución básica inicial para la función objetivo en un vértice cualquiera, el método consiste en buscar sucesivamente otro vértice que mejore la anterior solución. La búsqueda se hace siempre a través de los lados del polígono de soluciones factibles o de las aristas de la región solución, si el número de variables es mayor. Cómo el número de vértices y de lados o aristas es finito, siempre se podrá encontrar la solución.

El método Simplex se basa en la siguiente propiedad: si la función objetivo Z, no toma su valor máximo en el vértice A, entonces hay una arista o lado que parte de A, a lo largo de la cual Z aumenta.

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

METODO SIMPLEX.

FORMA ESTANDAR DEL MODELO:

1.- Todas las restricciones son ecuaciones con los lados derechos no negativos, en el caso del primal. Las restricciones del tipo ≤ o ≥ se convierten en ecuaciones sumando una variable de holgura (caso ≤) o restando una variable de exceso (caso ≥) en el lado izquierdo de la restricción.

2.- Todas las variables son no negativas, si una variable es irrestricta se usa la sustitución Yi = Y´i – Y´´i. Una variable negativa se hace no negativa multiplicando por -1 a la variable en la función objetivo y las restricciones.

3.- La función objetivo es de maximización o minimización.

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

METODO SIMPLEX.

SOLUCIÓN BÁSICA:

Una solución básica es aquella que es factible o se encuentra en uno de los vértices de la región solución. Con m ecuaciones y n variables una solución básica se determina haciendo n-m variables iguales a cero. En general existen n!/[m!(n-m)!] soluciones básicas posibles.

VARIABLES NO BÁSICAS:

Son las n -m variables que hemos hecho igual a cero.

VARIABLES BÁSICAS:

Son m variables restantes diferentes de cero. La solución básica será factible si todos los valores de las variables básicas son no negativos. Si alguna de las variables es negativa entonces la solución será infactible.

CONDICIONES PARA QUE UNA VARIABLE SEA BÁSICA O NO BÁSICA:

CONDICIÓN DE OPTIMIDAD:

La variable que entra o pasa a ser básica es aquella no básica con el coeficiente más negativo si el problema es de maximización, o más positivo si es de minimización. Si todos los coeficientes de las variables no básicas en Z son no negativos, la solución es óptima en maximización y si son no positivos entonces la solución es óptima en minimización. Otro método utiliza para evaluación la fila (Cj – Zj) y elige para entrar la variable que de el mayor mejoramiento por unidad a la función objetivo.

CONDICIÓN DE FACTIBILIDAD:

La variable que sale es la variable básica, con la menor razón(denominador positivo) en la dirección de la variable que entra.

Tanto en la condición de optimidad como de factibilidad, los empates se rompen de forma arbitraria.

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

TABLA SIMPLEX.

Elemento Pivote

Variable que Entra

Variables Básicas	X1	X2	. . .	Xn	Solución	Razones
Z					0	
S1					b1	
.					.	
.					.	
.					.	
Sm					bm	

Variable que sale

OPERACIONES NECESARIAS

La fila de la variable que sale es la ecuación pivote.

•Nueva ecuación pivote:
= ecuación pivote / elemento pivote

• Las demás ecuaciones incluyendo Z:

(ecuación anterior) – [coeficiente de la columna de la variable que entra]x(nueva ecuación pivote)

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

TÉCNICA M:

Si todas las restricciones no son del tipo ≤, es decir hay restricciones de = y ≥, entonces no es posible obtener una solución básica inicial con las variables de holgura, en este caso se utilizan otras variables llamadas variables artificiales (Rm) que se agregan a las restricciones que son del tipo ≥ o de = con coeficiente 1, en la función objetivo se penalizan agregándolas con coeficiente muy alto si es minimización o muy bajo si es maximización (una M o -M). Las iteraciones se hacen igual que el simplex normal y las condiciones de optimidad y factibilidad son las mismas.

Si en la solución óptima hay variables artificiales, se dice que el modelo es infactible.

Otra técnica se denomina de **Dos Fases:**

Fase I: Minimizar las variables artificiales sujetas a las restricciones originales. Si el valor mínimo es cero el problema tiene solución y se pasa a la fase II. Si el valor mínimo es positivo el modelo es infactible.

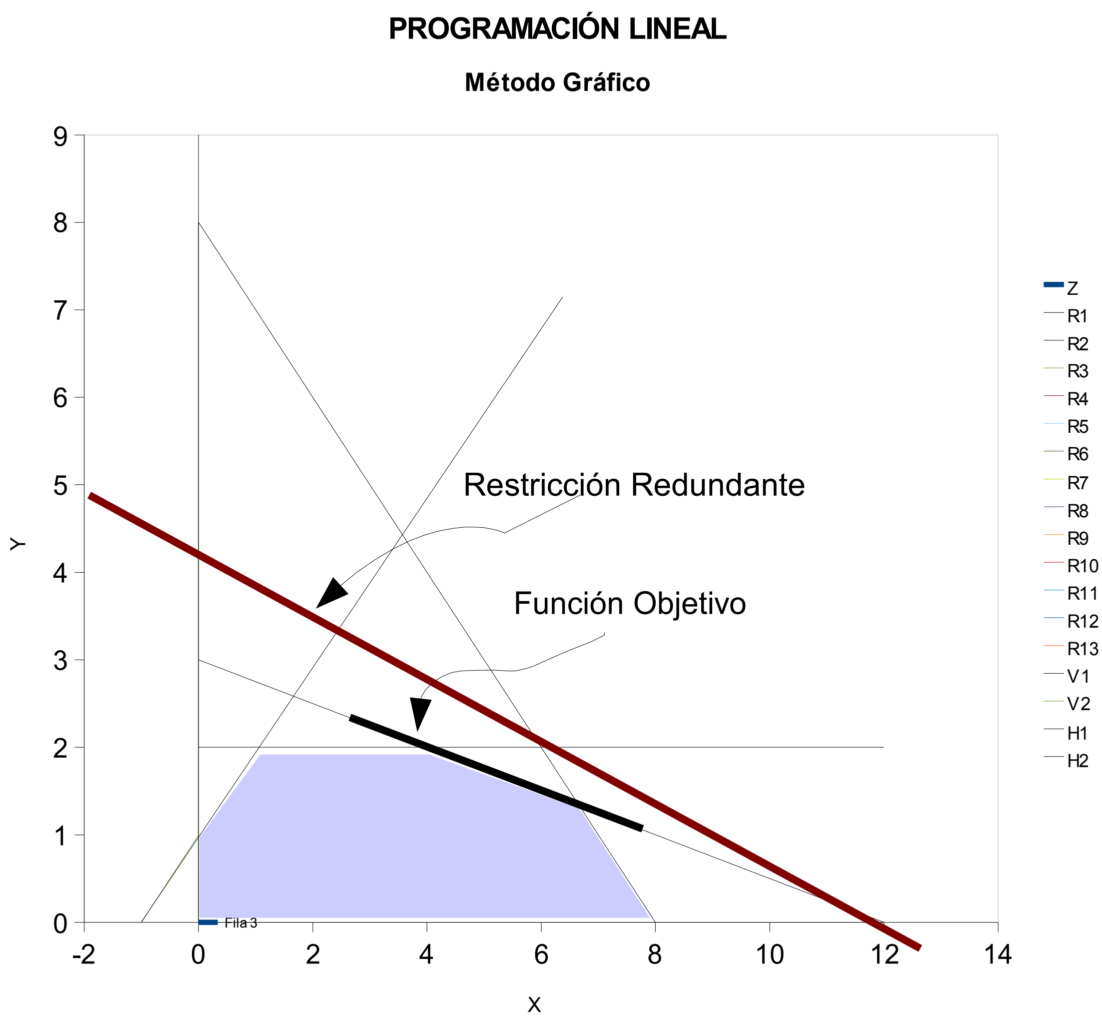
Fase II: Se utiliza la solución básica óptima de la fase I como solución inicial para el problema original.

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

CASO ESPECIALES DEL MÉTODO SIMPLEX:

SOLUCIÓN DEGENERADA:

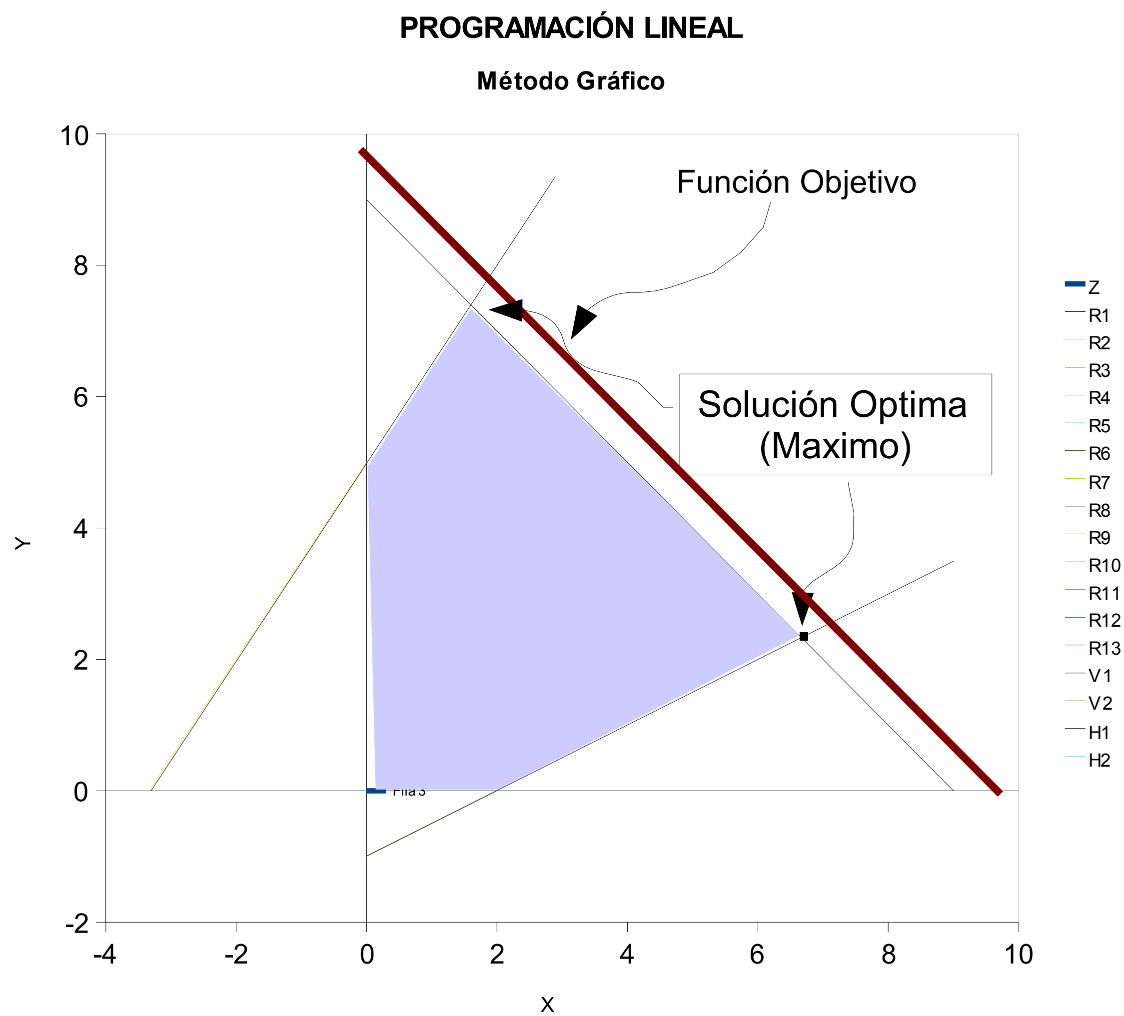
Si se presenta un empate en la variable que sale de forma repetida, una variable básica tomará valor cero, esto hace que la solución sea degenerada. Lo anterior es debido a la existencia de a lo menos una restricción redundante.



INVESTIGACION DE OPERACIONES:
CASO ESPECIALES DEL MÉTODO SIMPLEX:

MULTIPLES SOLUCIONES OPTIMAS:

Se presenta cuando la función objetivo es paralela a una restricción activa (se satisface como igualdad en la solución óptima), en este caso hay infinitas soluciones. Desde el punto de vista práctico permite escoger la solución que mejor se adapte a la situación.

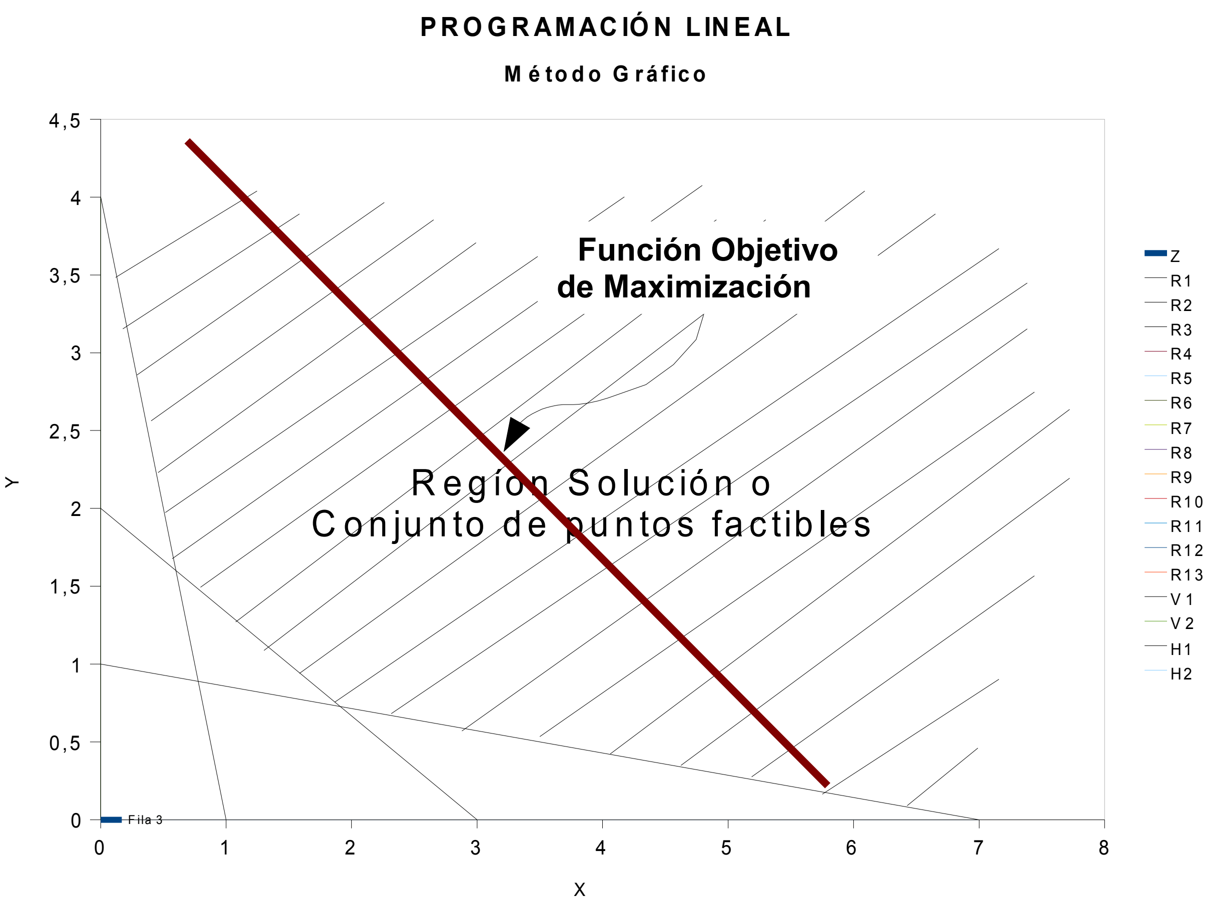


INVESTIGACION DE OPERACIONES:

CASO ESPECIALES DEL MÉTODO SIMPLEX:

SOLUCIONES NO ACOTADA:

Se presenta cuando el espacio de soluciones no está acotado en la dirección hacia donde aumenta o disminuye la función objetivo, según el modelo sea de maximización o minimización. Si en cualquier iteración los coeficientes de las restricciones de una variable no básica son no positivos, entonces el modelo no está acotado en la dirección de esa variable. Si el coeficiente de la función objetivo es negativo en maximización o positivo en minimización, entonces el valor de la función objetivo tampoco está acotado.

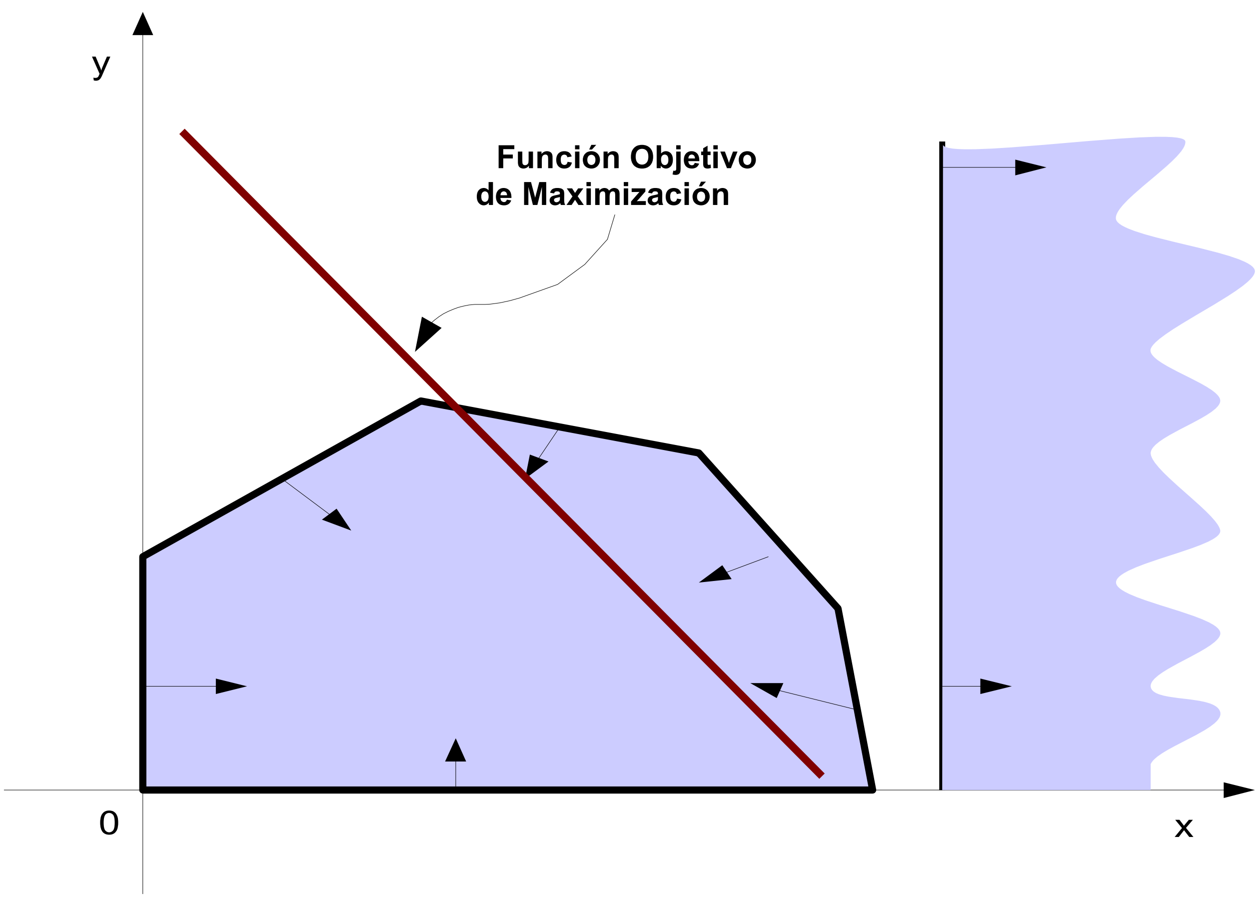


INVESTIGACION DE OPERACIONES:

CASO ESPECIALES DEL MÉTODO SIMPLEX:

SOLUCIÓN INFACTIBLE:

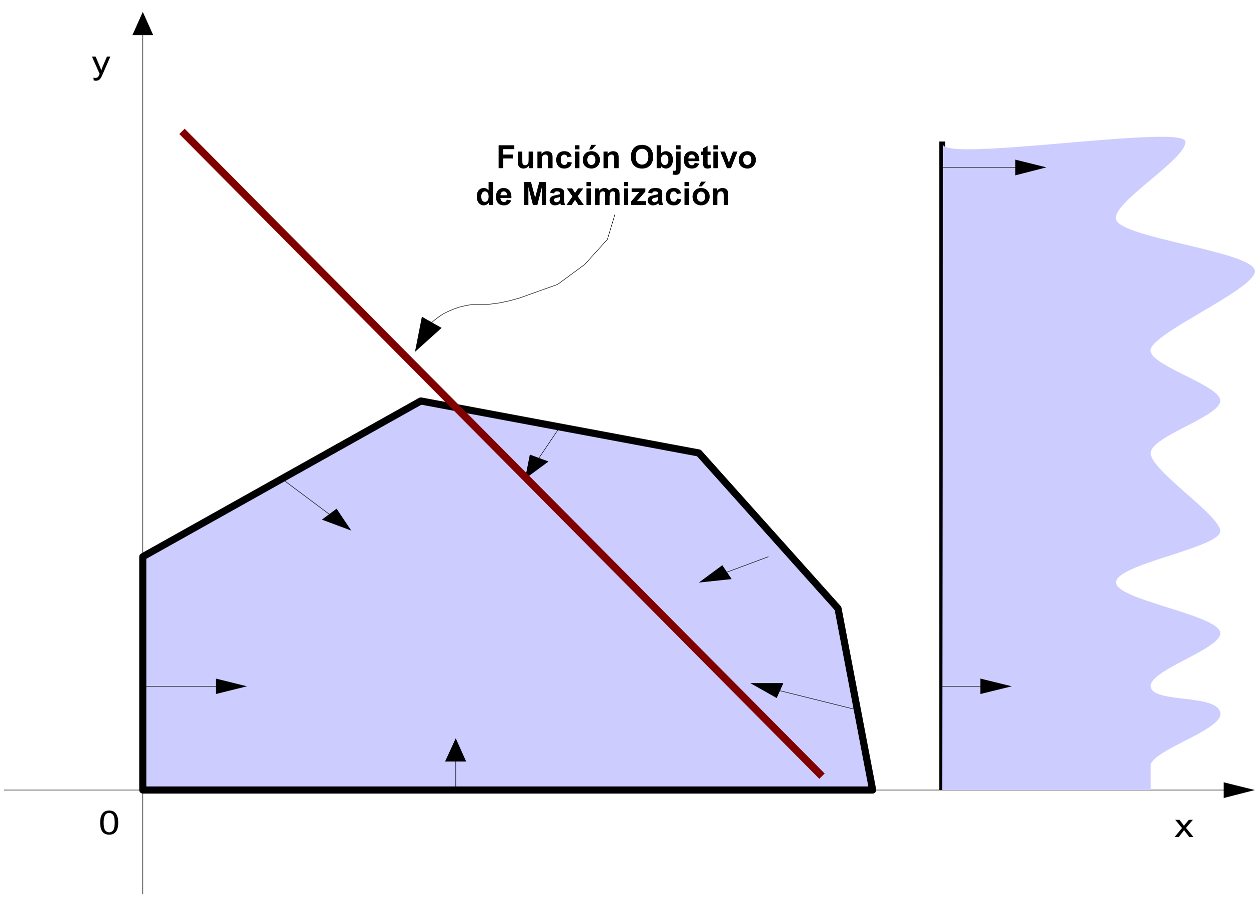
Ocurre cuando las restricciones no se pueden satisfacer de forma simultanea. Este tipo de solución no se presenta si todas las restricciones son del tipo ≤, en otro tipo de restricciones hace falta el uso de variables artificiales, lo que puede dar lugar a soluciones no factibles. Un modelo con solución infactible puede significar que ha sido mal planteado o que las restricciones no estén destinadas a cumplirse simultanealmente, por lo que haría falta una estructura diferente del modelo.



INVESTIGACION DE OPERACIONES:
CASO ESPECIALES DEL MÉTODO SIMPLEX:

SOLUCIÓN INFACTIBLE:

Ocurre cuando las restricciones no se pueden satisfacer de forma simultanea. Este tipo de solución no se presenta si todas las restricciones son del tipo ≤, en otro tipo de restricciones hace falta el uso de variables artificiales, lo que puede dar lugar a soluciones no factibles. Un modelo con solución infactible puede significar que ha sido mal planteado o que las restricciones no estén destinadas a cumplirse simultanealmente, por lo que haría falta una estructura diferente del modelo.



INVESTIGACION DE OPERACIONES:

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DUAL:

El dual se obtiene de un problema primal dado, y están relacionados hasta el punto que la solución de uno dará también la solución del otro. El estudio del problema dual permite tener una mayor profundidad en el análisis de sensibilidad.

Los siguientes puntos muestran como obtener un modelo dual a partir de un primal:

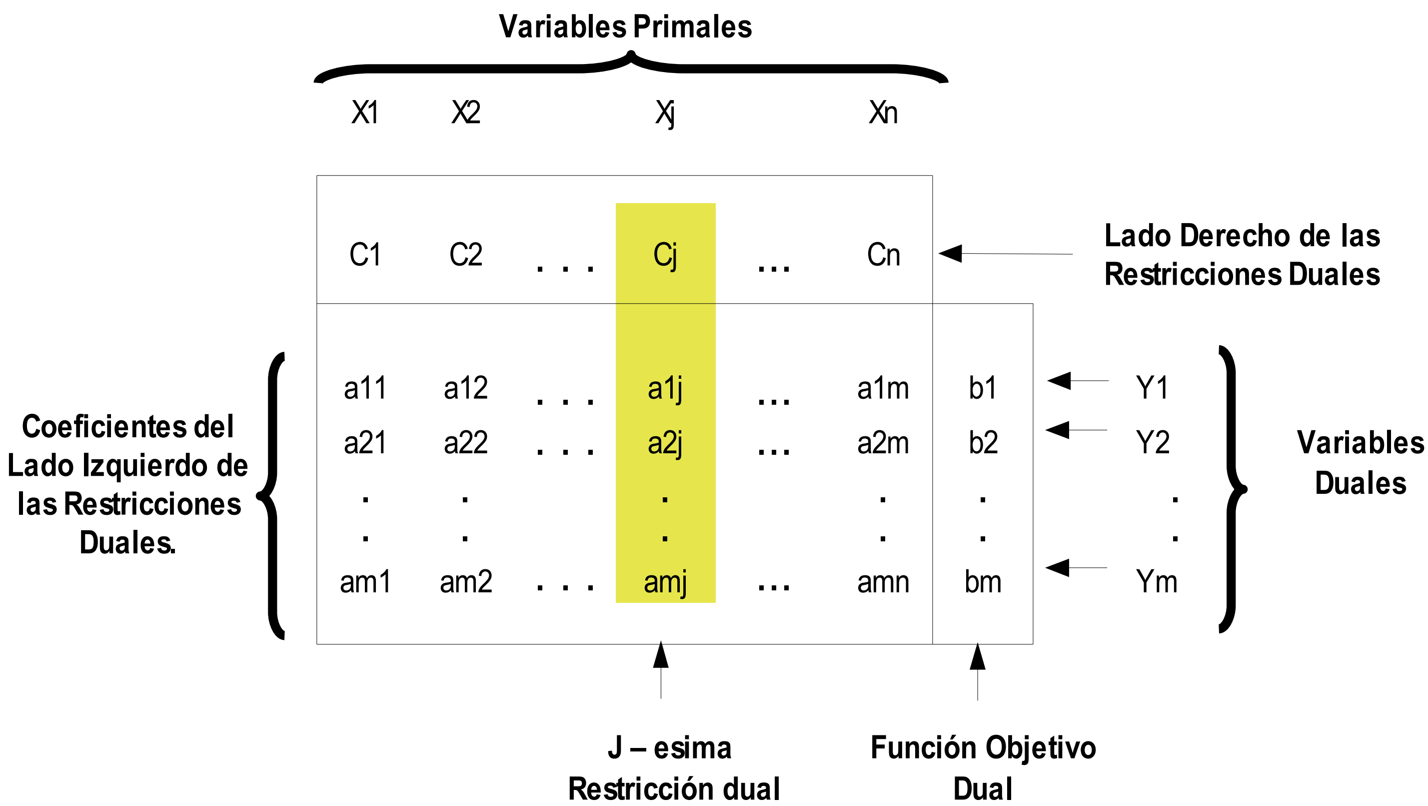
1.- Cada restricción primal representa una variable dual (m variables: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$).

2.- Cada variable del modelo primal pasa a ser una restricción en el modelo dual (n restricciones que corresponden a: $X_1, X_2, \ldots, X_n$).

3.- Los coeficientes de las restricciones de una variable primal pasan a ser los coeficientes del lado izquierdo de la restricción dual correspondiente, con el lado derecho igual al coeficiente de la variable en la función Z. Los coeficientes de las variables duales en la función objetivo son los lados derechos de las restricciones en el modelo primal.

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DUAL:



Función Objetivo Estándar del Primal	Dual		
	Función Objetivo	Restricciones	Variables
Maximización	Minimización	≥	Irrestrictas
Minimización	Maximización	≤	Irrestrictas

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DEL DUAL:

PRECIOS DUALES:

Los precios duales de una i-ésima restricción de un Problema Lineal representan la cantidad en la cual variará el valor óptimo de la función objetivo si se aumenta el lado derecho de la restricción i en una unidad (valor por unidad de los recursos).

•Si la restricción es del tipo $\geq$ entonces el precio sombra es no positivo y Aumentan los costos.

•Si la restricción es del tipo $\leq$ entonces el precio sombra es no negativo y Aumentan las ganancias.

•Si la restricción es del tipo $=$ entonces el precio sombra puede ser positivo, negativo o cero.

•Una restricción con precio dual no cero, debe ser una restricción activa (holgura o exceso igual a cero).

•Una restricción con una holgura o exceso diferente de cero, tiene precio dual igual a cero.

•Si tanto el precio dual como la holgura o exceso son cero, significa que en un vértice están convergiendo más de dos restricciones.

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DEL DUAL:

COSTOS REDUCIDOS:

Representan la tasa o razon neta de decrecimiento del valor óptimo de la función objetivo, al aumentar la variable no básica asociada. Se expresa como la diferencia entre el costo de la cantidad de recurso usado para producir una unidad de Xi (entrada) y la ganancia unitaria (salida). Si el costo unitario de los recursos es mayor al de las ganancias, el costo reducido será positivo y no habrá ningún incentivo económico para realizar esa actividad (variable Xi). Por esta razón una variable no básica, que tiene un costo reducido negativo, es candidata a transformarse en un costo reducido positivo en la solución óptima.

Una actividad económica no utilizada, puede transformarse en viable haciendo cualquiera de las dos formas siguientes:

1.- Disminuyendo su uso por unidad de recursos (aumento en la productividad) o.

2.- Aumentando la ganancia unitaria mediante un aumento de precios o disminución en los costos.

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

ANALISIS DE SENSIBILIDAD:

CAMBIOS QUE AFECTAN LA OPTIMIDAD:

Cambios en los Coeficientes de la Función Objetivo (Ci): El análisis consiste en identificar qué ocurre con la actual solución básica óptima en el caso que se cambien uno o varios de los coeficientes de la función objetivo. La actual solución óptima seguirá siéndolo en la nueva situación, siempre y cuando los costos reducidos correspondientes a los nuevos coeficientes, sean mayores o iguales a cero. El valor de la función objetivo cambia al cambiar los coeficientes en la nueva solución óptima.

Cambios en el uso de recursos por parte de las actividades (aij): Este cambio afecta la optimidad ya que afecta el lado izquierdo de las restricciones duales. El análisis se hace únicamente para las variables no básicas, ya que un cambio en los coeficientes de las variables básicas afecta la matriz inversa con la consiguiente complicación de cálculo. Si se pierde la optimidad, los cálculos para volver a obtenerla son los mismo que se hacen cuando se agrega una nueva variable o actividad.

Inclusión o introducción de una nueva variable o actividad: Se evaluá si la nueva variable hace un aporte significativo a la solución óptima del modelo original. Se pasa a calcular el costo reducido de la nueva variable, para decidir si la actual solución básica sigue siendo óptima en el problema aumentado con la nueva variable. La adición de una nueva actividad es equivalente a combinar el análisis de hacer cambios en la función objetivo y en el uso de los recursos.

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

ANALISIS DE SENSIBILIDAD:

CAMBIOS QUE AFECTAN LA FACTIBILIDAD:

Cambios en el lado derecho de las restricciones (recursos bj): Interesa determinar si las actuales variables básicas se mantienen luego de aumentar o disminuir uno o más valores en el lado derecho de las restricciones del modelo. Hay que calcular nuevamente la columna de recursos de la tabla simplex, si todos son positivos, la solución actual sigue siendo óptima pero cambiando los valores de las variables básicas y la función objetivo. Si algún valor se hace negativo se pierde la factibilidad, la cual se recupera utilizando el método simplex dual.

Inclusión de una nueva restricción: Hay que determinar si la actual solución básica óptima se mantiene después de incorporar una nueva restricción al problema. Se evaluá la solución actual para verificar si satisface la nueva restricción, en caso afirmativo, la actual solución básica también lo será aun cuando se incluya la nueva restricción (es una restricción redundante). En caso de no cumplirse la restricción, se incorpora la nueva restricción a la tabla final Simplex y se procede a las iteraciones necesarias para encontrar la nueva solución básica óptima (se utiliza el método simplex dual).

MÉTODO SIMPLEX DUAL:

Parte de una solución óptima infactible, la diferencia con el método simplex primal está en las condiciones para la variable que entra y la variable que sale:

Condición de Factibilidad: La variable que sale es aquella variable básica con valor más negativo, si todas son no negativas el proceso termina.

Condición de Optimidad: La variable que entra es aquella no basica con la razón más pequeña (minimización), o con valor absoluto más pequeño (maximización). Las razones se calculan dividiendo los coeficientes del primer miembro de la función objetivo entre los correspondientes coeficientes negativos en la ecuación de la variable que sale. Si todos los valores son ceros o positivos el modelo es infactible (no hay solución).

En ambas condiciones los empates se rompen de forma arbitraria.

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

MODELO DE TRANSPORTE:

El modelo de transporte es un tipo particular o especial de los modelos de programación lineal, busca determinar un plan de transporte de una mercancía de varias fuentes a varios destinos. Los componentes del modelo son:

1.- Nivel o cantidad de oferta en cada fuente.
2.- Nivel o cantidad de demanda en cada destino.
3.- El costo de transporte unitario de la mercancía desde las fuentes cada destino.

Al haber solo una mercancía, un destino puede recibir su demanda de una o más fuentes. El objetivo del modelo es el de determinar la cantidad que se enviará de cada fuente a cada destino, tal que se minimice el costo del transporte total.

El modelo parte de la siguiente suposición básica: "El costo del transporte en una ruta o dirección es directamente proporcional al numero de unidades transportadas". El tipo de unidad de transporte variará dependiendo del tipo de mercancía que se transporte.

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

MODELO DE TRANSPORTE:

Un modelo de transporte se puede representar como una red o grafo, con m fuentes y n destinos. Cada fuente y cada destino están representados por un nodo, estos nodos se unen por un arco que representa la ruta por la cual se transporta la mercancía.

Si tenemos:

ai= Cantidad de oferta en la fuente i.

bj = Cantidad de demanda en el destino j.

Cij= Costo de transporte unitario entre la fuente i y el destino j.

Xij = Cantidad transportada desde la fuente i al destino j,

Entonces, el modelo general de Programación Lineal que representa el modelo de transporte es:

Minimizar: $$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

Sujeto a:

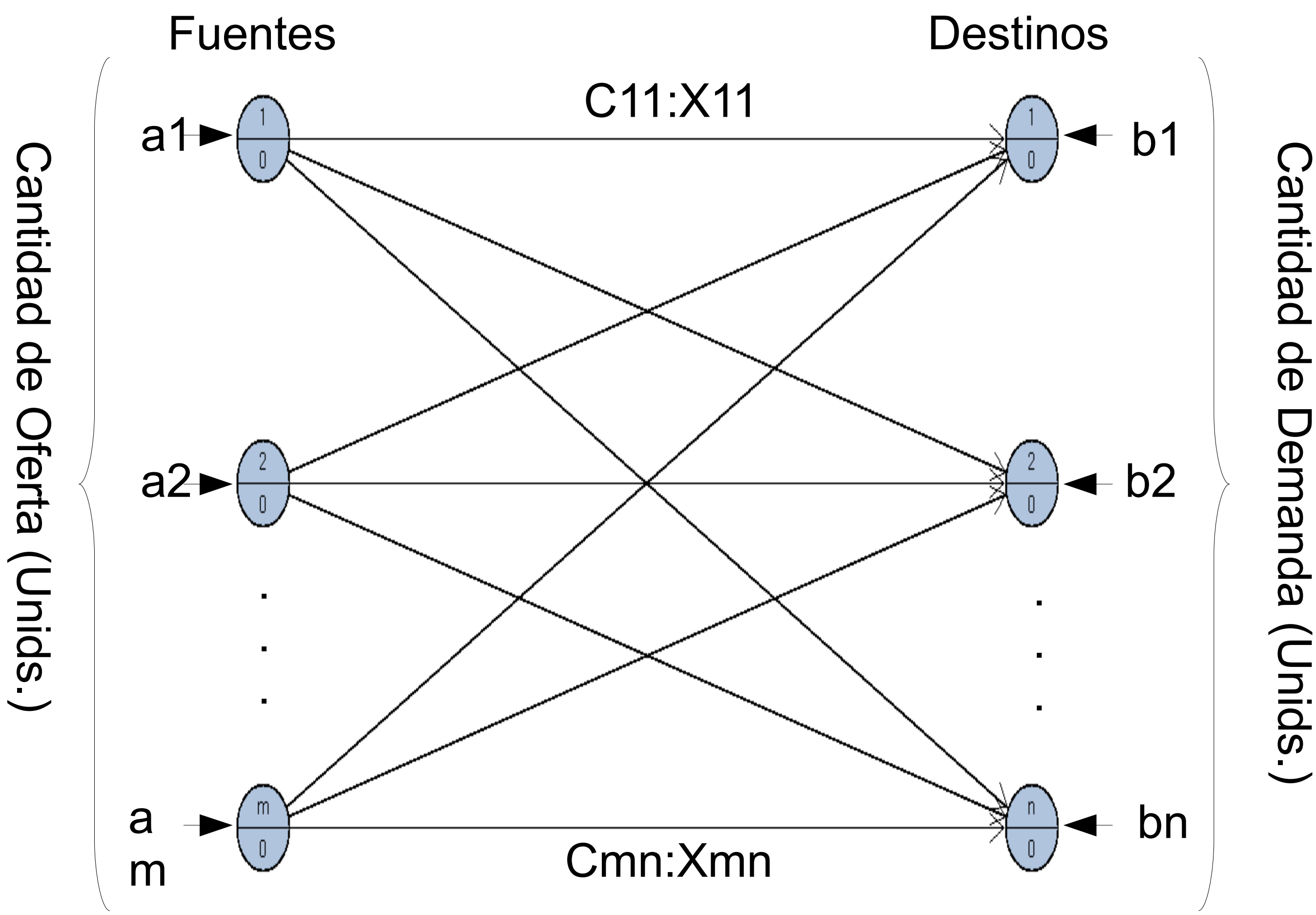
$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq a_i \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq b_j \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Xij ≥ 0 para todo i j.

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

MODELO DE TRANSPORTE:



INVESTIGACION DE OPERACIONES:

MODELO DE TRANSPORTE:

Un método resumido para resolver un modelo de transporte consiste en utilizar una **Tabla de Transporte.** Esta presenta una forma de matriz o de celdas donde las filas representan las fuentes y las columnas los destinos, los coeficientes de la función objetivo se ubican en el recuadro de la esquina (Cmn). Para resolver el modelo se utilizan las mismas iteraciones del método Simplex, para lo cual el modelo debe estar equilibrado, es decir las ofertas deben ser igual a las demandas.

	Destino 1	Destino 2	....	Destino n	Ofertas
Fuente 1	C11 X11	C12 X12	....	C1n X1n	O1
Fuente 2	C21 X21	C22 X22	....	C2n X2n	O2
Fuente 3	C31 X31	C32 X32	....	C3n X3n	O3
• • •	• • •	• • •	• • •	• • •	• • •
Fuente m	Cm1 Xm1	Cm2 Xm2	....	Cmn Xmn	Om
Demandas	D1	D2	....	Dn	**∑D = ∑O**

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

MODELO DE TRANSPORTE:

Si la suma de las ofertas es mayor que la suma de las demandas, se dice que el modelo está desequilibrado. En este caso se agrega un destino ficticio que recibirá la demanda excedente. En el caso que las Demandas superen a los ofertas, se agregará una fuente ficticia que generará la demanda faltante. Tanto para los destinos ficticios como para las fuentes ficticias, el costo asignado a cada actividad de transporte es cero. Cuando el modelo está equilibrado se puede proceder a las iteraciones que permitirán llegar a la solución.

	Destino 1	Destino 2	....	Destino n	Destino Ficticio	Ofertas
Fuente 1	C11 X11	C12 X12	....	C1n X1n	0	O1
Fuente 2	C21 X21	C22 X22	....	C2n X2n	0	O2
Fuente 3	C31 X31	C32 X32	....	C3n X3n	0	O3
• • •	• • •	• • •	• • •	• • •		• • •
Fuente m	Cm1 Xm1	Cm2 Xm2	....	Cmn Xmn	0	Om
Demandas	D1	D2	....	Dn	$\sum O - (D1+..+Dn)$	$\sum D = \sum O$

INVESTIGACION DE OPERACIONES:

SOLUCIÓN DEL MODELO DE TRANSPORTE:

Una forma de resolver el modelo de transporte es usar la siguiente técnica:

•Determine una solución inicial factible.

•Decida cual es la variable que entra entre las variables no básicas. Si todas las variables satisfacen la condición de optimidad, hemos encontrado la solución.

•Determine la variable que sale usando la condición de factibilidad.

La primera tabla para una solución básica inicial se puede obtener usando cualquiera de los siguientes métodos.

•**Esquina Noroeste:** Se asigna la máxima cantidad posible entre la oferta y la demanda a la variable de la esquina noroeste, se tachan las filas y columnas cubiertas y se continua hasta completar el número de variables básicas.

•**Costo Mínimo:** Se asigna la mayor cantidad posible entre la oferta y la demanda a la variable con el costo mínimo, se tachan las filas y columnas cubiertas y se continua hasta completar el número de variables básicas. Este método produce soluciones óptimas en la mayoría de los casos, en la primera tabla.

•**Aproximación de Voguel:** Método heurístico, es mejor que los dos anteriores. Consiste en penalizar las filas y columnas restando los dos menores costos, luego se asigna la mayor cantidad posible entre la oferta y la demanda en la fila o columna con la mayor penalización.