UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA

Ciclo Básico
Departamento de Matemática Aplicada
Elementos de Estadística (0260)
Estadística para Ingenieros (1765)
Octubre 2013

FACULTAD DE INGENIERÍA

Modelos Probabilísticos

José Luis Quintero

1. El número de extracciones necesarias para obtener el primer objeto defectuoso es una variable aleatoria X con función de probabilidad

$$P(X=j)=A(0.95)^{j-1} \qquad j=1,2,...$$

a. Calcule el valor de A
b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario examinar más de 20 objetos antes de obtener el primer defectuoso?

2. Sea X una variable aleatoria continua.
a. Determine el valor de k para que la función

$$f(x)=\begin{cases} ke^{-\frac{x}{5}} & x>0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

sea la función de densidad de probabilidad de X.
b. Grafique f(x)
c. Calcule $P(X\le 5)$ y $P(0\le X\le 8)$
d. Determine F(x) y grafíquela

3. La duración en horas de un componente electrónico, es una variable aleatoria cuya función de distribución acumulativa es

$$F(x)=1-e^{-\frac{x}{100}}, \quad x>0.$$

Determine la:
a. función de probabilidad de X
b. probabilidad de que el componente trabaje más de 200 horas

4. Sea

$$f(x)=\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & x=1,2,3,... \\ 0 & \text{en otros puntos} \end{cases}$$

la función de densidad de la variable aleatoria X. Calcule la esperanza y la varianza de X.

5. Calcule la probabilidad de que una familia de 4 hijos, elegida al azar, tenga 3 varones.

6. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia de 4 hijos, elegida al azar, tenga por lo menos un varón?

7. Se lanza un dado 4 veces. Hállese la esperanza y la varianza de la distribución de probabilidad de X, que representa el número de veces que se obtiene la cara cinco.

8. Supóngase que la probabilidad de tener una unidad defectuosa en una línea de ensamble es de 0.05. Si el número de unidades terminadas constituye un conjunto de ensayos independientes:
a. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 20 unidades dos se encuentren defectuosas?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 20 unidades, dos como máximo se encuentren defectuosas?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una se encuentre defectuosa?

9. Los clientes llegan a un banco de acuerdo a un proceso de Poisson con frecuencia de 3 clientes por minuto. Calcule la probabilidad de que en un intervalo de 2 minutos lleguen:
a. 4 clientes
b. menos de 4 clientes
c. más de 4 clientes

10. Las llamadas que se reciben en una central telefónica por minuto tienen distribución de Poisson con parámetro $\lambda=4$. Si la central puede manejar un máximo de 6 llamadas por minuto, ¿cuál es la probabilidad de que la central sea insuficiente para atender las llamadas que llegan en un minuto?

11. El número de carros que cruzan un puente durante un período fijo de tiempo es una variable aleatoria con distribución de Poisson. Si la probabilidad de que ningún carro cruce el puente en este período es ¼, halle la probabilidad de que al menos dos carros lo crucen.

12. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo (a,b). Si $E(X)=10$ y $V(X)=12$, halle la probabilidad de que X se encuentre entre 5 y 12.

13. Una máquina se detiene cada vez que un componente falla, lo que sucede de acuerdo a un proceso de Poisson con frecuencia de 1 falla por semana. ¿Cuál es la probabilidad de que hayan transcurrido dos semanas desde la última falla?

14. El número de clientes que llegan a un banco es una variable aleatoria de Poisson. Si el número promedio es de 120 por hora, ¿cuál es la probabilidad de que en un minuto lleguen por lo menos tres clientes?

15. El número de llamadas que llegan a una central se modela como una variable aleatoria Poisson. Suponga que, en promedio, se reciben 10 llamadas por hora.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente cinco llamadas en una hora?

correo electrónico: quintero-jl@hotmail.com página web: www.joseluisquintero.com

b. ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban tres llamadas o menos en una hora?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente cinco llamadas en 30 minutos?

16. La duración del ciclo mezcladores de camiones y transportadores de concreto que van a la construcción de una carretera se distribuye uniformemente en el intervalo de 50 a 70 minutos. Calcule el valor esperado y la varianza de dicha duración.

17. Suponga que los clientes llegan a determinado torniquete a razón de dos clientes por minuto. Calcule el valor esperado y la varianza del tiempo de espera entre llegadas sucesivas de clientes

18. Los tiempos entre accidentes de todos los accidentes fatales en los vuelos locales de pasajeros programados en Estados Unidos de 1948 a 1961, siguen una distribución exponencial con valor esperado de 44 días.
a. Si uno de estos accidentes ocurrió el primero de Julio, calcule la probabilidad de que se presente otro ese mes.
b. Calcule la varianza de los tiempos entre accidentes.

19. Una fábrica produce cierto material cuyo proceso se verifica al finalizar el proceso de producción. Se consideran defectuosos aquellos cuyo peso están por encima de 1.075 Kg o por debajo de 0.925 Kg. Se supone que el peso del material producido tiene una distribución normal con media 1 Kg y varianza 0.01. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un material con calidad?

20. La cantidad semanal que una compañía gasta en mantenimiento y reparaciones tiene una distribución normal aproximada cuyo promedio es de \$400 y su desviación estándar es de \$20. Si el presupuesto para cubrir los gastos de reparación para la semana siguiente es de \$450.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que los costos reales sean mayores que la cantidad supuesta?
b. ¿De cuánto debe ser el presupuesto semanal de mantenimiento y reparaciones para que tan sólo se rebase con una probabilidad de 0.1?

21. Los conductores que se fabrican para utilizarse en determinado sistema de cómputo necesitan tener resistencia que varíen entre 0.12 y 0.14 ohm. Las resistencias reales medidas de los conductores que produce la compañía A tienen una distribución normal de probabilidad con un promedio de 0.13 ohm y una desviación estándar de 0.005 ohm. ¿Cuál es la probabilidad de que un conductor seleccionado al azar de la producción de la compañía A cumpla con las especificaciones?

22. El tiempo necesario para armar cierta unidad es una variable aleatoria normalmente distribuida con una media de 30 minutos y desviación estándar igual a 2 minutos. Determine el tiempo de armado de manera tal que la probabilidad de exceder éste sea de 0.02.

23. El tiempo de incapacidad por enfermedad de los empleados de una compañía en un mes tiene una distribución normal con media 100 horas y desviación estándar de 20 horas.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo por incapacidad del siguiente mes se encuentre entre 50 y 80 horas?
b. ¿Cuánto tiempo de incapacidad deberá planearse para que la probabilidad de excederlo sea sólo de 0.0985?

24. El tiempo requerido para reparar una máquina automática en un proceso de producción es X minutos. Ya se ha demostrado en investigaciones previas que la aproximación $X \sim N(120,4)$ ajusta bien al proceso. Si el proceso se interrumpe por más de 125 minutos, se pierden todos los productos en el proceso. Determine la probabilidad de esta ocurrencia.

25. La distribución triangular se define por tres parámetros: el mínimo a, el máximo b y el valor más probable c. La función de densidad asociada viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \le x \le c \\ \dfrac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c \le x \le b \end{cases}.$$

Construya la función de distribución acumulada.

26. Una persona con n llaves trata de abrir una puerta, probando las llaves de forma sucesiva e independiente. Halle la esperanza del número k de intentos que se requieren hasta encontrar la llave correcta, suponiendo que ésta es una sola, en las dos situaciones siguientes:
a. Si la selección de las llaves es con reposición, es decir, que una llave no es quitada del lote, una vez probada.
b. Si la selección es sin reposición

RESPUESTAS

[1] a. $A = 0.05$ **b.** $(0.95)^{20}$

[3] a. $\frac{1}{100}e^{-\frac{x}{100}}$ **b.** 0.8187

[4] a. 2 **b.** 2 **[10]** 0.111 **[11]** $\frac{3-2\ln(2)}{4}$

[15] a. 0.0378 **b.** 0.0103 **c.** 0.0516 **[16]** E=60, V=100/3

[17] E=1/2, V=1/4 **[18] a.** $1-e^{-31/44}$ **b.** V=1936

[20] a. 0.0062 **b.** \$425.6 **[21]** 0.9544 **[24]** 0.1056

[25] $$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} & a \le x \le c \\ 1-\dfrac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)} & c \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

[26] a. n **b.** $\frac{n+1}{2}$