



张云, 严星, 白超英. 2018. 基于分区多步快速行进法下3D起伏层状介质中多震相射线追踪. 地球物理学进展, 33(3):1013-1021, doi:10.6038/pg2018BB0305.

ZHANG Yun, YAN Xing, BAI Chao-ying. 2018. Multi-phase seismic ray tracing in 3D undulated layered media based on multistage FMM algorithm. *Progress in Geophysics (in Chinese)*, 33(3):1013-1021, doi:10.6038/pg2018BB0305.

基于分区多步快速行进法下3D起伏层状介质中多震相射线追踪

Multi-phase seismic ray tracing in 3D undulated layered media based on multistage FMM algorithm

张云¹, 严星², 白超英^{1,3*}

ZHANG Yun¹, YAN Xing², BAI Chao-ying^{1,3*}

1. 长安大学地质工程与测绘学院地球物理系, 西安 710054

2. 新疆财经大学网络与实验教学中心, 乌鲁木齐 830011

3. 长安大学计算地球物理研究所, 西安 710054

1. Department of Geophysics, School of Geology Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an 710054, China

2. Xinjiang University of Finance and Economic, Ürümqi 830011, China

3. Institute of Computational Geophysics, Chang'an University, Xi'an 710054, China

摘要 快速行进法(FMM)是一种求解程函方程数值解计算网格节点走时,然后向后处理进行射线追踪的方法.为了求取任意起伏界面下高精度多震相的走时与相应的射线路径,本文采用任意起伏地表条件下的三维不等距上行差分公式结合分区多步计算技术实现了三维复杂层状起伏介质中多震相(透射、反射、转换波)地震走时的计算,利用上行有限差分公式逐次进行射线路径的追踪,并且通过与较为成熟的不规则最短路经法(ISPM)对比,验证了本算法的计算精度和有效性.数值模拟实例和对比结果表明该算法具有较高的计算精度,数值计算稳健,能灵活处理含任意三维起伏界面模型中多震相地震走时及相应射线路径的追踪问题.

关键词 快速行进法(FMM); 不规则最短路经法(ISPM); 分区多步计算技术; 不等距上行差分格式; 上行有限差分算法; 多震相射线追踪

中图分类号 P315

文献标识码 A

doi:10.6038/pg2018BB0305

Abstract Fast Marching Method (FMM) for ray tracing is a method using numerical solutions of Eikonal equation to calculate the traveltimes of all gridded points, and applying backward processing ray tracing for obtaining raypath information. To obtain a high accurate traveltimes in 3D complex media with undulated topography, we in this paper calculate the traveltimes and tracking arrivals composed of any kind of combinations of transmissions, conversions and reflections by integrating upwind finite difference method and multistage computation technique in complex 3D complex media. In addition, the accuracy and efficiency of proposed algorithm are compared with the well developed Irregular Shortest-path Method (ISPM). We use an uneven differential format to compute the traveltimes at the irregular grids near the subsurface interface, and establish a upwind finite-difference formula for tracking raypaths. Finally, the traveltimes computation and the corresponding raypaths finding for multi-phase arrivals are solved flexibly by multistage computation technique. The simulation and comparison tests show that the proposed algorithm has a high computational accuracy, numerical stability and flexible adaptability in traveltimes computation and raypath finding for multi-phase seismic arrivals in any 3D complex media.

Keywords Fast Marching Method(FMM); Irregular Shortest-Path Method (ISPM); multistage computational technique; uneven grid upwind differential format; upwind finite-difference method; multi-phase seismic ray tracing

0 引言

复杂地学模型中多震相地震射线追踪的方法技术是国内外目前研究的热点问题.传统的两点间射线追踪方法技术(例如:试射法, Julian and Gubbins, 1977; 高斯射线束法, Cerveny and Psencik, 1983; (伪)弯曲法, Um and Thurber,

1987)同样可以追踪后续震相的地震射线,但其存在以下三个主要问题:(1)无法确定所追踪的射线是初至波还是后续波地震射线;(2)速度模型较为复杂时,其解容易陷入局域解;(3)模拟多炮多道记录时很难高效.波前构造法(Wavefront Construction Method, Vinje *et al.*, 1993, 1999)则是结合了波前扩展和两点间射线追踪的方法技术,该方法不

收稿日期 2017-07-29; 修回日期 2018-04-05.

投稿网址 <http://www.progeophys.cn>

第一作者简介 张云,男,1994年出生于陕西宝鸡市,在读硕士研究生,主要从事地震层析成像工作.(E-mail: yun_zhang1994@163.com)

* 通讯作者 白超英,男,教授,主要从事地震学相关领域的教学与科研工作.(E-mail: baicy@chd.edu.cn)

但能够追踪多震相地震射线,同时还可以追踪多值地震射线,但其计算效率有待提高。

基于网格/单元波前扩展的算法是目前追踪计算多震相地震射线行之有效的方法技术。其中尤以快速行进法(Fast Marching Method, 简称: FMM, Sethian and Popovici, 1999)和改进型最短路径法(Modified Shortest-path Method, 简称: MSPM, Bai *et al.*, 2007)为佳。

FMM 算法是基于有限差分求解程函方法发展起来的一种快速波前行进算法,当其结合分区多步计算技术(Multistage Computation Technique)时,则较易进行 2D 复杂地质模型中多震相地震射线的追踪计算(Rawlinson and Sambridge, 2004),随后 de Kool 等(2006)将上述 Multistage FMM 推广至 3D 球坐标系下进行多震相射线追踪。国内张风雪等(2010)在 FMM 算法的流程上引入数据链表进行二维初至波的走时计算和射线追踪,兰海强等(2012)则对 FMM 算法与快速扫描法进行了对比研究,卢回忆等(2013)利用坐标旋转生成新的 FMM 计算模板的方式处理近地表走时计算,王飞等(2014)利用最速下降法进行了二维 FMM 中的射线追踪计算,孙建国团队将 FMM 算法用于三维起伏地表条件的多震相地震波走时的计算(孙章庆等, 2012),黄兴国等(2016)讨论了基于复程函方程求解复走时计算方法,孙章庆等(2017)引入群行进法(Group Marching Method, 简称: GMM, Kim and Folie, 2000),较之 FMM 算法计算效率有所提高,但未能解决多震相地震射线的追踪问题(注意:有限差分求解程函方程类的算法包括了两方面的主要内容:其一计算所有网格节点上的走时;其二由检波器反向追踪射线路径至炮点)。目前国内外有关 FMM 算法还未出现直角坐标系下多震相地震走时和相应地震射线追踪计算的研究报道。这是本文所要解决的问题之一。

MSPM 算法则是在最短路径算法(SPM, Moser, 1991)的基础上发展起来的,其中与 SPM 的不同在于引入了次级节点的概念,这样网格单元划分时可以相对较大,射线的覆盖问题则是通过加密次级节点的间距来实现的。较之传统的 SPM 算法,在保证计算精度的前提下,计算 CPU 时间可提高一个数量级(Bai *et al.*, 2007)。随后 MSPM 算法与分区多步计算技术相结合实现了直角坐标系下多震相地震走时和相应射线路径的追踪计算(Bai *et al.*, 2009, 2010, 2011),球坐标系下全球多震相地震走时和相应射线的追踪计算(Huang *et al.*, 2013),椭球坐标系下的全球多震相地震走时和相应射线路径的追踪计算(李兴旺和白超英, 2017),以及各向异性介质中多震相地震走时和相应射线路径的追踪计算(Bai *et al.*, 2013)。上述算法相对已比较成熟,因此可作为参考对 3D 模型中 Multistage FMM 计算的走时和射线路径进行检验。这是本文所要解决的问题之二。即通过 Multistage MSPM 算法与 Multistage FMM 算法的结果对比,验证文中 Multistage FMM 算法的正确性与有效性。

综上所述,本文具体包括以下几部分内容:①存在复杂起伏界面、地表时的网格剖分问题;②综合运用 Fermat 原理, Huygens 原理,程函方程,三维线性插值公式以及孙章庆等(2012)提出三维起伏地表条件下的地震波走时的不等距迎风差分算法的建立适应于三维起伏界面处的模型整体计

算公式;③结合 Fermat 原理,通过建立一种上行有限差分公式求取走时梯度从检波器向后逐次追踪射线直到震源;④对算法进行精度及其效率分析;⑤与 Multistage MSPM 算法计算结果对比,验证 Multistage FMM 算法的正确性和有效性。

1 FMM 原理及其实现流程

Rawlinson and Sambridge (2004)最早将分区多步计算技术与 FMM 算法相结合,实现了 2D 层状介质中多震相地震走时和相应射线路径的追踪计算。孙章庆等(2012)则采用不等距上行(Upwind)差分格式计算界面处不规则节点的走时。本文在上述研究基础上,通过结合分区多步技术、FMM 算法原理、三维不等距差分格式、局域走时梯度分解法、惠更斯原理、费马原理等实现了三维复杂起伏界面以及起伏地表条件下的多震相地震走时计算以及相应的射线追踪,其基本原理简述如下。

1.1 走时计算原理

图 1a 所示为一个起伏地表,含有两个起伏反射界面的三维模型网格剖分示意图。模型参数化时,起伏地表及其界面附近采用不规则网格单元(图 1b),而其他区域则采用规则网格单元(图 1c),速度采样在各个节点上进行。

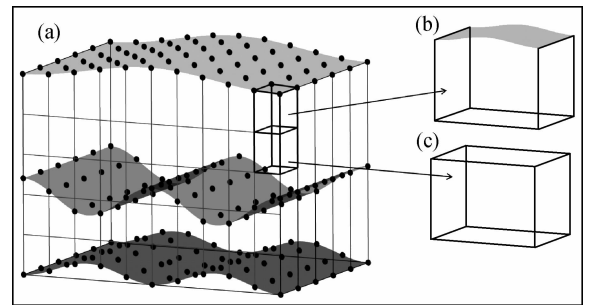


图 1 模型界面及网格剖分示意图(a)、以及模型中不规则网格单元(b)规则网格单元(c)

Fig. 1 Diagrammatic showing model parameterization (a) and irregular cell (b) and regular cell (c)

1)当波前点位于规则网格单元当中时,采用常规上行差分格式,首先引入三维空间中的程函方程,公式为

$$|\nabla t(x, y, z)| = s(x, y, z), \quad (1)$$

这里 $t(x, y, z)$, $s(x, y, z)$ 均是空间位置 (x, y, z) 的函数,他们分别表示空间位置的地震走时及波慢度。

对(1)式采用上行差分格式进行离散后则可得:

$$|\nabla t|_{i,j,k} = \left[\begin{array}{l} \max(D_n^{-x}t_{i,j,k}, D_n^{+x}t_{i,j,k}, 0)^2 + \\ \max(D_n^{-y}t_{i,j,k}, D_n^{+y}t_{i,j,k}, 0)^2 + \\ \max(D_n^{-z}t_{i,j,k}, D_n^{+z}t_{i,j,k}, 0)^2 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} = s_{i,j,k}, \quad (2)$$

其中, $\max(A, B, C)$ 为求取 A, B, C 中最大值的函数, $D_n^{-l}t_{i,j,k}, D_n^{+l}t_{i,j,k}$ ($l = x, y, z$) 分别为空间中一点 (i, j, k) 处地震走时函数 T 在 l 方向上的 n 阶向前向后差分算子,本文计算地震走时采用一、二阶混合差分算子(当不满足二阶差分条件时采用一阶),以下主要对 X 方向上的差分算子进行说

明,其中 h 为常规规则网格间距. Y, Z 方向与 X 方向相同,表达式为

$$\begin{cases} D_1^{-x}t_{i,j,k} = \frac{t(i,j,k) - t(i-1,j,k)}{h}, & \text{当 } t(i-1,j,k) \text{ 已知时;} \\ D_1^{+x}t_{i,j,k} = \frac{t(i+1,j,k) - t(i,j,k)}{h}, & \text{当 } t(i+1,j,k) \text{ 已知时;} \\ D_2^{-x}t_{i,j,k} = \frac{3t(i,j,k) - 4t(i-1,j,k) + t(i-2,j,k)}{2.0 \times h}, & \text{当 } t(i-1,j,k), t(i-2,j,k) \text{ 已知且 } t(i-1,j,k) \text{ 大于 } t(i-2,j,k) \text{ 时;} \\ D_2^{+x}t_{i,j,k} = \frac{3t(i,j,k) - 4t(i+1,j,k) + t(i+2,j,k)}{2.0 \times h}, & \text{当 } t(i+1,j,k), t(i+2,j,k) \text{ 已知且 } t(i+1,j,k) \text{ 大于 } t(i+2,j,k) \text{ 时.} \end{cases} \quad (3)$$

2)当波前点位于非规则网格单元中时,网格间距不再相等,故不能采用常规上行差分公式,为了解决该问题,引入不等距上行差分格式,设界面点距常规网格点距离为 d ,则有:

$$\left(\frac{t-t_{\text{界面}}}{d}\right)^2 + \left(\frac{t-t_x}{h}\right)^2 + \left(\frac{t-t_y}{h}\right)^2 = s^2, \quad (4)$$

其中 t_x, t_y 分别为波前点 x, y 方向上两点中走时较小的那一个;然后在当前波前点的另一方向上则采用常规上行差分格

式,公式为

$$\left(\frac{t-t_z}{h}\right)^2 + \left(\frac{t-t_x}{h}\right)^2 + \left(\frac{t-t_y}{h}\right)^2 = s^2, \quad (5)$$

其中 (t_x, t_y, t_z) 分别为当前波前点 (x, y, z) 方向上两点中走时较小的那一个.最后分别求解(4)~(5)式对应的一元二次方程,并根据费马原理求取二者中的较小者作为最终结果,即:

$$t = \min \left\{ \frac{t_x + t_y + \theta \times t_{\text{界面}} + \sqrt{(\theta+2) \times (s \times h)^2 - [\theta \times (t_{\text{界面}} - t_x)^2 + \theta \times (t_{\text{界面}} - t_y)^2 + (t_x - t_y)^2]}}{\theta+2}, \frac{t_x + t_y + t_z + \sqrt{3 \times (s \times h)^2 - [(t_x - t_y)^2 + (t_y - t_z)^2 + (t_x - t_z)^2]}}{3} \right\}, \quad (6)$$

式中, $\theta = \frac{h^2}{d^2}$.

1.2 分区多步计算原理

“分区多步”即指按照模型起伏地表以及起伏速度界面的具体情况,将模型分成独立的层状区域(或起伏层状区域),相邻区域由速度界面所连接(图1a),走时计算时是分区单独进行计算,然后将这些分区的计算结果通过速度界面有机连接在一起(遵从费马原理,斯奈尔定律以及惠更斯原理)实现多震相地震射线追踪计算.具体的步骤如下:在波前扩展中从炮点所在的区域开始,沿着目标射线将要通过的区域,波前逐区进行扫描.等当前区域的波前扫描结束时,波前停止在该区的速度界面(或边界上),同时保存该区速度界面上的离散走时.对于不规则界面上的离散点,本文采用原计算区域的速度模型继续向下一区多计算一层后根据线性插值得到.随后根据进入新区所追射线的类型(如反射、透射、转换波及两者组合),调用相邻区域的速度模型(注意:新调用区域必须与原来区域相邻,在追踪反射波或反射转换波时,新调用区域就是原来区域,若发生转换,速度模型换为新的速度模型即可),进入新区时,波前从速度界面离散点(或边界节点)中走时最小的点(惠更斯原理,视为波前面上新的震源)开始向新的区域扩展,继续进行走时计算.

简言之,独立分区进行走时计算是进行射线追踪的基础,分区多步计算的原理就是根据所要追踪射线的类型,设计要调用的独立区域的先后顺序以及对应的速度模型,达到运用简单组合完成三维复杂模型中多震相地震射线追踪之目的.

1.3 射线追踪原理

FMM 算法计算得到模型区域内所有网格节点处的走时

后,下一步则是自检波器开始反向追踪射线路径至震源点.目前主要有两种方法:其一是逐点寻找与波前面垂直的点,将这些点连接即得到了某检波器-炮点间的射线路径(惠更斯原理);其二是自检波器开始逐点寻找走时场梯度的最大下降方向,该方向点的连线即为某检波器-炮点间的射线路径(费马原理).本文则采用较为流行的第二种方法,即通过从每个检波器开始逐点求取局部走时场梯度 (∇T) 最大下降方向至炮点的方式进行.

网格剖分如图2所示,将 ∇T 分解为 X, Y, Z 三个方向通过上行有限差分算法求取,具体步骤为:

1)当射线追踪点在规则网格内时(图2c所示),设 m 为已追踪到该射线上点的个数,且当前追踪到的点为 P , P 点坐标记为 (p_x, p_y, p_z) ,此时,我们可以通过 P 点所在网格的走时计算当前走时梯度 (T_x, T_y, T_z) ,公式为

$$\begin{cases} T_x = (t_A - t_B - t_D + t_C + t_E - t_F + t_G - t_H) / (4.0 \times h) \\ T_y = (t_C - t_A + t_D - t_B + t_G - t_E + t_H - t_F) / (4.0 \times h) \\ T_z = (t_A - t_E + t_B - t_F + t_D - t_H + t_C - t_G) / (4.0 \times h) \end{cases} \quad (7)$$

其中 $t_i (i = A, B \dots, G)$ 分别为各个点的地震波走时.

为了保证精度的条件下尽量提高射线追踪效率,本文给出一个射线追踪步长 L ,即控制每一次所追踪射线的长度.由于在同一个网格内,地震波走时梯度相同,所以本文在计算时给射线追踪步长 L 赋值 h ,所以在规则网格内的射线追踪公式可表示为

$$\begin{cases} p_x(m+1) = p_x(m) - L \times \cos(x, l) \\ p_y(m+1) = p_y(m) - L \times \cos(y, l) \\ p_z(m+1) = p_z(m) - L \times \cos(z, l) \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\cos(i, l)$ ($i = x, y, z$) 为 i 方向与射线方向所夹夹角的方向余弦, X 方向与射线追踪方向的方向余弦计算(9)式所示, Y, Z 方向与此类似, 公式(9)为

$$\cos(x, l) = \frac{T_x}{\sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}}, \quad (9)$$

则所追踪到的下一点 P_1 坐标即为: $\{p_x(m+1), p_y(m+1), p_z(m+1)\}$.

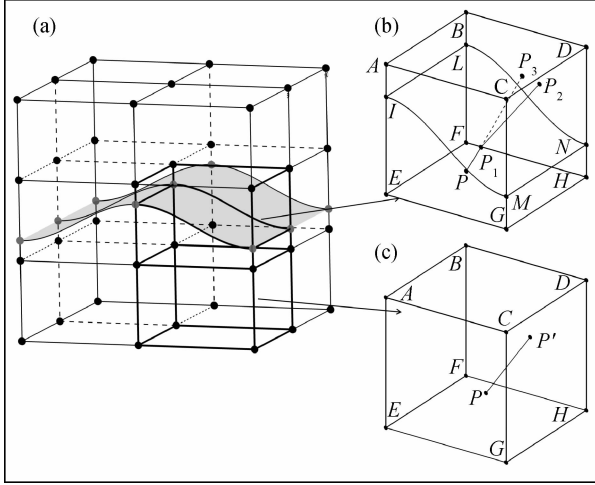


图2 模型局部网格剖分示意图(a), 以及含界面的单元(b)和不含界面的单元(c)

Fig. 2 Local model parameterization (a) and interface crossing cell (b) and regular cell (c)

2) 当射线追踪点 P 在不规则网格内时(图2b所示), 若 P 点在界面下方, P_3, P_2 在界面上方, P_1 位于界面上, 采用上行有限差分算法可计算该点的梯度分量(图2b情况中的透射波为例, 其他情况与此类似), 公式为

$$\begin{cases} T_x = (t_E - t_F + t_G - t_H) / (2.0 \times h) \\ T_y = (t_C - t_E + t_H - t_F) / (2.0 \times h) \\ T_z = (\dot{u}_1 + \dot{u}_L + \dot{u}_M + \dot{u}_N - t_E - t_F - t_G - t_H) / (d_1 + d_2 + d_3 + d_4) \end{cases}, \quad (10)$$

其中 \dot{u}_j ($j = I, L, M, N$) 分别为界面上节点 I, L, M, N 的走时值, d_1, d_2, d_3, d_4 分别为 I, L, M, N 距 E, F, G, H 点的距离. 所以此时 $\{p_x(m+1), p_y(m+1), p_z(m+1)\}$ 同样可以通过(8)一(9)式得到, 但是此时, 需要对所追踪到的该点进行判断: 若此点还是位于界面下方, 继续计算; 若此点位于界面上方, 如图2b中 P_3 点所示, 此时 PP_3 为一条直线, I, L, M, N 为界面上的四点, 各点位置坐标已知, 所以可求出 PP_3 与 $ILMN$ 面的交点 P_1, P_1 即为透射点(当计算反射波时 P_1 即为反射点), 舍弃 P_3 点, 记 P_1 点为所追踪的下一点. 此时由分区概念可知射线追踪进入下一区, 从 P_1 点开始, 此时有:

$$\begin{cases} T_x = (t_A - t_B + t_C - t_D) / (2.0 \times h) \\ T_y = (t_C - t_A + t_D - t_B) / (2.0 \times h) \\ T_z = (t_A + t_B + t_C + t_D - \dot{u}_1 - \dot{u}_L - \dot{u}_M - \dot{u}_N) / (d_5 + d_6 + d_7 + d_8) \end{cases}, \quad (11)$$

其中 d_5, d_6, d_7, d_8 分别为 A, B, C, D 点到 I, L, M, N 点的距

离. 同样, 射线追踪下一点坐标 $\{p_x(m+1), p_y(m+1), p_z(m+1)\}$ 可以通过(8)一(9)式得到. 综上所述, 射线追踪步骤为:

(1) 读取检波器位置并将其位置赋值为当前射线追踪点 P (即射线追踪起始点), 已追踪到射线点个数 m 赋值为 1;

(2) 读取当前射线追踪点 P 所在区内各个节点走时;

(3) 计算当前射线追踪点 P 所在网格, 并判断当前射线追踪点 P 所在网格是否存在界面, 若存在界面, 用不规则网格走时梯度计算公式计算当前走时梯度; 若不存在界面, 用规则网格走时梯度计算公式计算当前走时梯度;

(4) 计算走时梯度三个方向的方向余弦并乘以射线追踪步长运用公式(8), 得到射线追踪下一点 P_1 位置坐标;

(5) 判断射线追踪下一点 P_1 与当前射线追踪点 P 连线 PP_1 是否穿过界面:

① 若没有穿过界面, 则给已追踪到射线点个数 m 加 1, 将射线追踪下一点 P_1 位置记为当前射线追踪点 P 位置并判断与震源距离是否到达精度要求, 若达到精度要求, 则射线追踪结束; 若没达到精度要求, 则返回第(3)步;

② 若穿过界面, 则计算 PP_1 与界面交点位置 P_2 , 舍弃射线追踪下一点 P_1 , 给已追踪到射线点个数 m 加 1, 将射线追踪下一点 P_2 位置记为当前射线追踪点 P 位置并判断与震源距离是否到达精度要求, 若达到精度要求, 则射线追踪结束; 若没达到精度要求, 则按需求读取所需下一区内各个节点地震走时, 然后返回第(3)步.

2 走时计算精度分析

选用均匀介质 ($V = 4$ km/s), 模型大小: $40 \text{ km} \times 40 \text{ km} \times 40 \text{ km}$, 网格剖分大小为 $0.5 \text{ km} \times 0.5 \text{ km} \times 0.5 \text{ km}$, 震源置于模型中心 ($20 \text{ km}, 20 \text{ km}, -20 \text{ km}$) 位置. 采用常规 FMM 算法计算地震波走时(未进行震源区细化), 并与解析解进行比较, 图3给出了四个不同剖面的百分比误差分布.

由图3可知, 在震源附近, 地震波走时计算误差较大, 最大百分比误差可达 3.0%. 这是由于本文在网格剖分时采用的是规则的立方体网格, 由于在源点附近的波前曲率非常高, 规则网格很难近似这种曲率, 不能恰当地拟合波前, 导致有限差分方程在震源附近有较大的计算误差. 这个问题已经被认识, 并且采用了很多方法处理. 本文采用文献(Rawlinson and Sambridge, 2004)类似的源点网格细化的方法来减小这种误差. 本节分析震源加密点数与外扩层数对地震波走时计算误差的影响, 并且在兼顾计算精度与效率的条件下选取了最佳的震源加密点数与外扩层数讨论了网格间距对计算地震波走时的计算精度及其效率的问题.

2.1 震源加密点数对走时计算精度及其效率的影响

为了分析震源加密点数对走时计算精度及其效率的影响, 这里仍采取上述均匀介质进行分析. 网格间距 $H = 0.5 \text{ km}$, 震源至于中心位置 ($20 \text{ km}, 20 \text{ km}, -20 \text{ km}$), 并且控制外扩层数为 $L_N = 5$ 保持不变, 将 FMM 计算出的走时与解析解进行对比, 如表1所示.

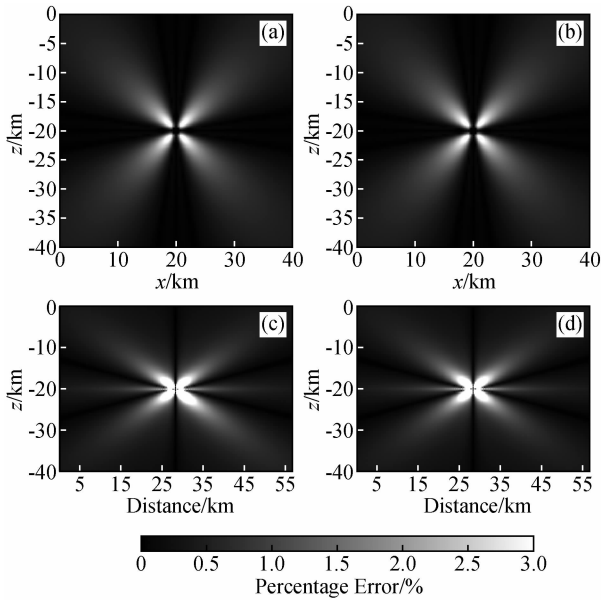


图3 均匀速度模型中百分比误差分布

(a) $Y=20$ km; (b) $X=20$ km; (c) $Y=X$; (d) $Y=-X$.

Fig. 3 The computed percentage errors in a uniform model

(a) $Y=20$ km; (b) $X=20$ km; (c) $Y=X$; (d) $Y=-X$.

表1 震源加密点数与走时误差、计算时间关系
(注:震源外扩层数为5)

Table 1 Computed traveltimes errors and CPU time after applying dense source region (Note that the expended layers are 5)

加密点距/原网格间距 (N/H)	平均相对误差 (%)	平均绝对误差 (ms)	CPU TIME (s)
1	0.310	13.59	9.34
1/2	0.220	9.81	9.56
1/4	0.140	6.56	9.87
1/6	0.100	4.83	10.82
1/8	0.079	3.54	11.21
1/10	0.065	2.87	12.46
1/12	0.056	2.44	15.79
1/14	0.054	2.36	18.56
1/16	0.054	2.36	24.50

表1可知,随着细化网格间距与原网格间距比值(N/H)的增大,平均绝对(或相对)误差随之增大,但计算用时则呈指数型降低.当细化网格间距与原网格间距比值为 $N/H=1/8$,计算所得平均相对误差已降至0.1%以下,可满足计算精度的要求.故接下来讨论外扩层数对FMM计算走时精度及其效率的影响时,我们设 $N/H=1/8$.

2.2 外扩层数对FMM计算走时精度及其效率的影响

与3.1节所用均匀速度模型相同,且设定细化网格间距与原网格间距的比值为 $1/8$,讨论外扩层数对计算精度和

CPU时间的影响,表2给出了震源区外扩层数变化时的情形.

表2 外扩层数与走时误差、计算效率的关系
Table 2 Computed traveltimes errors and CPU time with increased expended layers

外扩层数 (L_N)	平均相对误差 (%)	平均绝对误差 (ms)	CPUTIME (s)
0	0.310	13.59	9.34
2	0.140	6.16	9.83
4	0.095	4.41	10.42
6	0.093	4.33	12.36
8	0.090	4.15	16.47
10	0.086	3.93	23.67
12	0.081	3.67	35.53
14	0.077	3.34	54.41

根据表2可以发现,当外扩层数从零增加至四的过程中,平均相对误差和平均绝对误差都呈大幅度减小,随后下降幅度变小,但CPU用时则呈指数型增长;另外,当外扩层数达到6以后CPU用时增长幅度明显加快,故在兼顾计算精度与效率的同时,认为外扩层数选择 $L_N=6$ 时为最佳.图4给出了四个不同剖面的百分比误差分布.

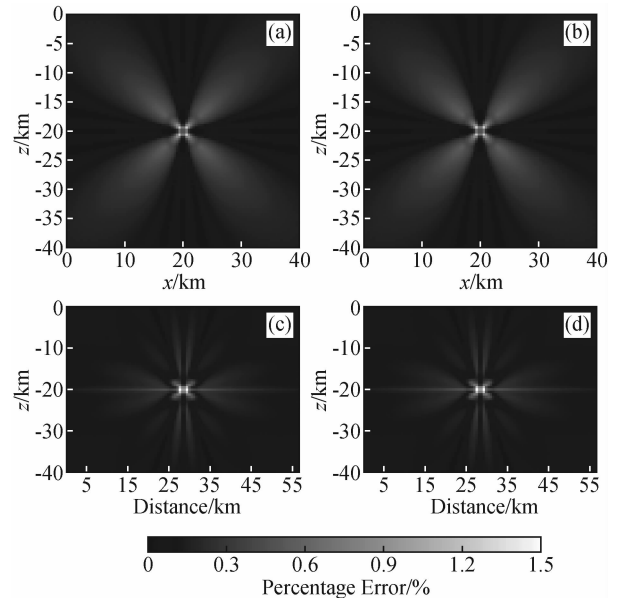


图4 剖面网格间距 $H=0.5$ km,震源外扩层数 $L_N=6$,震源加密 $N/H=1/8$ 时四个不同剖面的百分比误差分布
(a) $Y=20$ km; (b) $X=20$ km; (c) $Y=X$; (d) $Y=-X$.

Fig. 4 The computed percentage errors in a uniform model after applying dense source region with $H=0.5$ km,

$L_N=6$ and $N/H=1/8$

(a) $Y=20$ km; (b) $X=20$ km; (c) $Y=X$; (d) $Y=-X$.

通过图 3 和图 4 对比可知,网格剖分大小不发生变化,经过震源细化,计算精度得到显著提高(特别是震源附近).然而,尽管如此,相比于远场的走时计算误差,震源附近的计算误差仍然偏大(最大误差可达 1.0%).可能的技术措施是采用圆形波前扩展的思路.

2.3 网格间距对 FMM 计算走时精度及其效率的影响

由前两节可知,当细化网格间距与原网格间距之比 $N/H = 1/8$,震源外扩层数为 $L_N = 6$ 时,其平均计算精度($< 0.1\%$),基

表 3 网格间距对计算精度及其效率的影响

Table 3 Computed traveltimes errors and CPU time with varied cell length

网格间距 H /km	平均相对误差 (%)	平均绝对误差 (ms)	CPU TIME (s)
$H = 0.2$	0.026	0.113	104.14
$H = 0.4$	0.045	0.195	35.90
$H = 0.5$	0.053	0.227	30.96
$H = 0.8$	0.078	0.320	27.93
$H = 1.0$	0.098	0.394	27.5

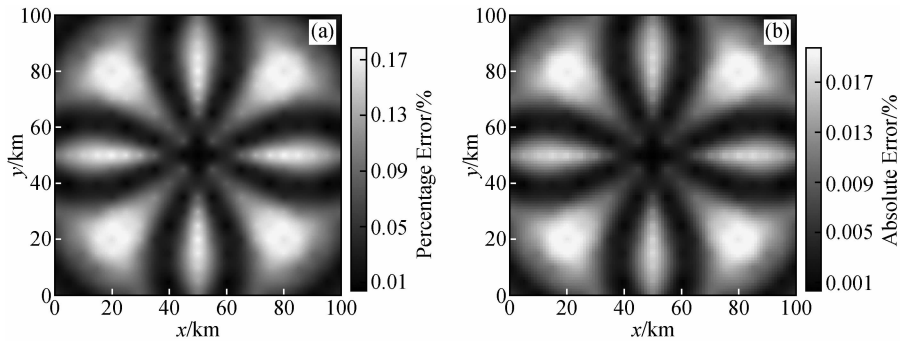


图 5 百分比误差 (a) 和绝对误差分布图 (b)

Fig. 5 Distribution of percentage errors (a) and absolute errors (b)

3 多震相走时计算精度对比分析

以上简单分析了直达波计算的精度,下面讨论多震相走时计算的精度问题.因为此时无解析解,则将 Multistage ISPM 算法 (Bai *et al.*, 2010) 作为参考值.所用模型见图 6a 所示,其中含有一个起伏地下界面,速度模型的剖面图见图 6b 所示.地表 P 波速度 $v = 4 \text{ km/s}$, 地下界面上的 P 波速度 $v =$

本能够满足要求,并且计算 CPU 用时也相对较小.故本节讨论上述震源细化参数不变时,网格间距对计算精度和 CPU 用时的影响.所用模型如 3.1 节所示,表 3 给出了不同网格划分时的计算精度和 CPU 用时.

通过表 3 可以发现,随着网格间距的不断增大,其平均相对误差与平均绝对误差几乎呈线性增加,但其计算误差均满足追踪射线要求. CPU 用时则随着网格间距的不断减小而指数型增加.当兼顾计算精度和 CPU 时间,认为选择网格间距 $H = 0.5 \text{ km}$ 为最佳.

通过以上分析,加密点间距与原网格间距比值 $N/H = 1/8$,震源外扩层数 $L_N = 6$,网格间距为 0.5 km 时,不管走时绝对误差还是相对误差均能满足射线追踪需求,且所用 CPU 时间也是可以接受的.这里选取线性增加速度模型进一步进行分析.模型大小: $100 \text{ km} \times 100 \text{ km} \times 50 \text{ km}$,地表速度 4 km/s 线性增加至 8.0 km/s .震源位置 $(50 \text{ km}, 50 \text{ km}, -50 \text{ km})$, 441 个检波器均匀分布在地表.图 5 给出了 441 个检波器上计算的走时误差分布,其最大百分比误差小于 0.2% ,而最大绝对走时误差小于 0.02 s ,满足计算精度要求.

8.0 km/s (P 波速度与 S 波速度比值为 $\sqrt{3}$),地表与地下界面之间速度由上向下线性增加.炮点坐标 $(50 \text{ km}, 50 \text{ km}, -25 \text{ km})$,地表均匀布设 441 个检波器.为保证 Multistage ISPM 和 Multistage FMM 算法速度模型与界面完全一致,网格间距(主节点)相同 $(0.5 \text{ km} \times 0.5 \text{ km} \times 0.5 \text{ km})$,其中 Multistage ISPM 算法中在主节点间还加入了 7 个次级节点.这样 Multistage ISPM 算法的计算精度较高,可作为计算参考值.

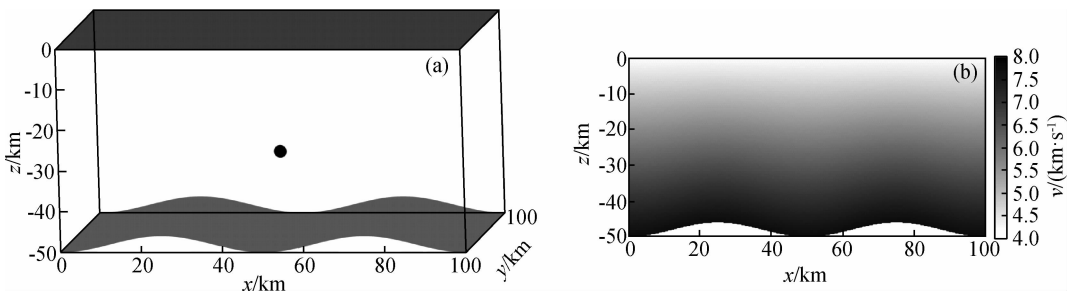


图 6 模型示意图 (a) 和垂直剖面速度分布 (b)

Fig. 6 Model (a) and vertical P-wave velocity profile (b)

模拟计算中我们计算了四种震相的走时,界面上的 P、S 波纯反射(P_1P^1 、 S_1S^1),以及反射转换波(P_1S^1 、 S_1P^1),两种算法的计算结果列于表 4,百分比误差 $|(T_{FMM} - T_{ISPM})/T_{ISPM} \times 100\%|$ 的分布图见图 7. 由表 4 可知,两种算法的计算平均百分比误差可限定在 0.065% 以内,平均绝对误差可限定在 0.11 s 内. 从图 7 中可以看出最大百分比误差可限定在 0.1% 以内. 由于模型参数化时 Multistage ISPM 算法的主节点与 Multistage FMM 算法的网格间距相同,因此, Multistage ISPM 算法计算 CPU 用时要多些,这也是正常的. 这是因为 ISPM 算法还需在主节点间加入 7 个次级节点以保证计算精度的要求. 因此,其总节点数(主节点数 + 次级节点数)是 FMM 算法中总节点数的 166 倍的缘故(341843601/2060451). 有关 FMM 与 ISPM 在 2D 模型中计算精度与 CPU 用时的对比,可参见文献(Bai *et al.*, 2010). 其基本结论是: 当 FMM 网格间距与 ISPM(或 MSPM)次级节点间距相当,且保证相同计算精度的前提下,ISPM(或 MSPM)算法的计算 CPU 时间较之 FMM 算法要快 3~4 倍. 另外,从图 7 中也可看出,两种算法的计算走时百分比误差呈对称性分布,这也从侧面说明算法计算的正确性.

表 4 FMM 与 ISPM 算法计算含起伏界面模型中多震相地震走时对比

Table 4 Computed traveltimes comparison between FMM and ISPM in complex model involving undulated interface

地震震相	平均百分比误差 (%)	平均绝对误差 (s)	SPM CPU TIME (s)	FMM CPU TIME (s)
P_1P^1	0.061	0.11	443.92	146.56
P_1S^1	0.053	0.09	452.31	145.32
S_1P^1	0.053	0.10	421.15	145.88
S_1S^1	0.058	0.11	452.46	146.32

4 追踪多震相地震射线精度对比分析

上节对比了多震相走时计算的精度问题,现在讨论追踪射线路径的精度问题. 这里选用较为复杂的三维模型(含地表起伏,地下界面起伏),地表函数: $z = 2 - 2 \times \cos(x \times 2 \times \pi / 100.0)$, 地下界面函数: $z = -30 + 4 \times \cos(x \times \pi / 100.0)$, 见图 8 所示. 地表速度: $v = 4.0 \text{ km/s}$, 地下界面速度: $v = 8.0 \text{ km/s}$, 且速度由地表线性增加至地下界面. 震源位置(50 km, 50 km, -15 km), 四个检波器位置(1 km, 1 km, 0.0 km)、(80.0 km, 80.0 km, 1.38 km)、(20 km, 20 km, 1.4 km)、(60 km, 60 km, 3.6 km) 置于地表. 采用 ISPM 和 FMM 算法计算了炮点至四个检波器的四种震相的射线路径,见图 8 所示. 从图 8 中可以看出,两者的射线路径是完全相同,说明 FMM 算法追踪射线路径是正确的.

下面选用更为复杂的模型,模型大小 $100 \text{ km} \times 100 \text{ km} \times 50 \text{ km}$, 地表起伏(起伏幅度 4 km), 含两个地下起伏界面,上界面位于地下 30 km 处(起伏幅度 $\pm 4 \text{ km}$), P 波速度 6 km/s; 下界面位于地下 48 km 处(起伏幅度 $\pm 2 \text{ km}$), P 波速度 8 km/s (P 波速度与 S 波速度比值为 $\sqrt{3}$). 地表至上界面、上界面至下界面速度线性增加(见图 9 所示). 炮点坐标位置

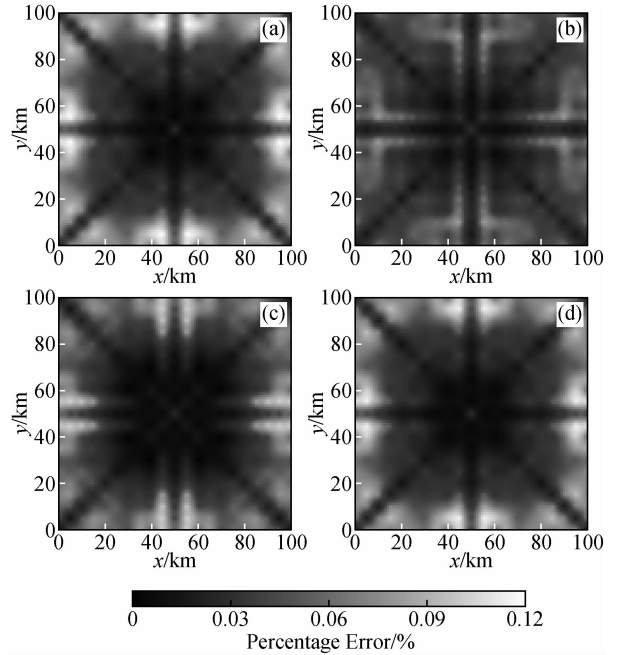


图 7 两种不同算法计算四种震相走时百分比误差 (a) 震相 P_1P^1 ; (b) 震相 P_1S^1 ; (c) 震相 S_1P^1 ; (d) 震相 S_1S^1 .

Fig. 7 Computed percentage errors between two different algorithms for four different seismic phases (a) P_1P^1 ; (b) P_1S^1 ; (c) S_1P^1 ; (d) S_1S^1 .

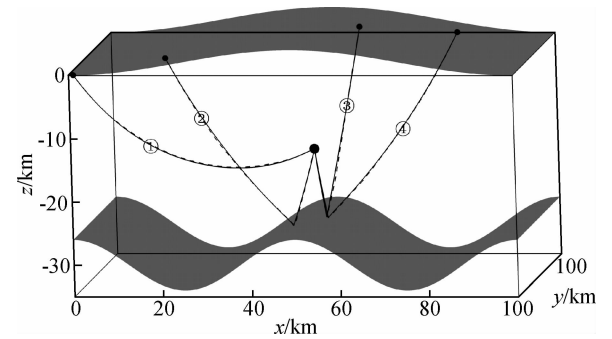


图 8 FMM(实线)和 ISPM(虚线)算法追踪相同震相射线对比(①直达 P 波; ② P_1P^1 波; ③ P_1S^1 波; ④ S_1P^1 波)

Fig. 8 Raypath tracing by FMM (solid lines) and ISPM (dotted lines) for four different seismic phases (①direct P; ② P_1P^1 ; ③ P_1S^1 ; ④ S_1P^1)

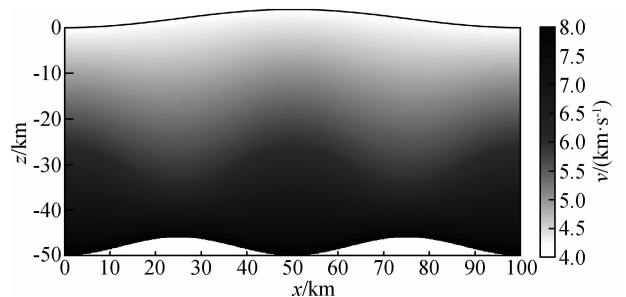


图 9 Y 等于任一值的 P 波速度剖面分布图

Fig. 9 P-wave vertical profile when Y is equal to any value

(50 km, 50 km, -15 km). 34 个检波器均匀放置在模型地表的三个边上. FMM 算法网格剖分间距 $H=0.5$ km, 最短路径法主节点及速度采样点个数为 $201 \times 201 \times 101$ 个, 次级节点数 11 个. 图 10 给出了两种算法追踪初至 P 波、一次纯 P 波反射(上图)、以及一次 P 到 S 反射转换波(下图)的射线路径. 为了对多震相射线追踪进行分析, 图 11 给出了地表与地

下界面的多次反射转换波的射线路径, 上图是 S 到 P 的一次反射转换波, 而下图则是震源激发的 S 波到达地表后反射转换成 P 波下行至界面 1、2 后的反射波的射线路径. 从图 10 ~ 图 11 中可以两种算法追踪一炮多道射线路径完全一样, 因而说明本文提出的 Multistage FMM 算法除了走时场计算正确外, 追踪射线路径也是正确的.

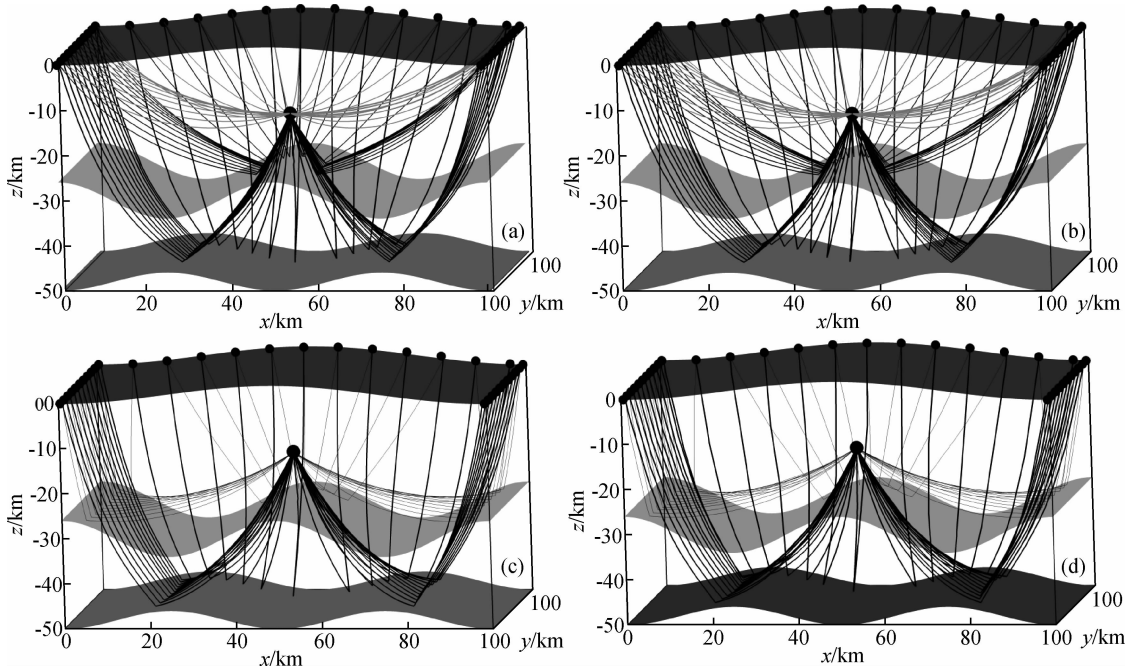


图 10 直达 P 波、一次纯 P 波反射(震相 P_1P^1 、 $P_1P_2P^2P^1$) (上图) 和反射转换波(震相 P_1S^1 、 $P_1P_2S^2S^1$) (下图) 射线路径, 其中左图为 FMM 算法结果, 右图为 ISPM 算法结果

Fig. 10 Raypaths for direct P and primary reflected phases (P_1P^1 、 $P_1P_2P^2P^1$) (Upper panels) and primary reflected and converted phases (P_1S^1 、 $P_1P_2S^2S^1$) (Lower panels). In figure the left panels is results for FMM and the right panels is for ISPM

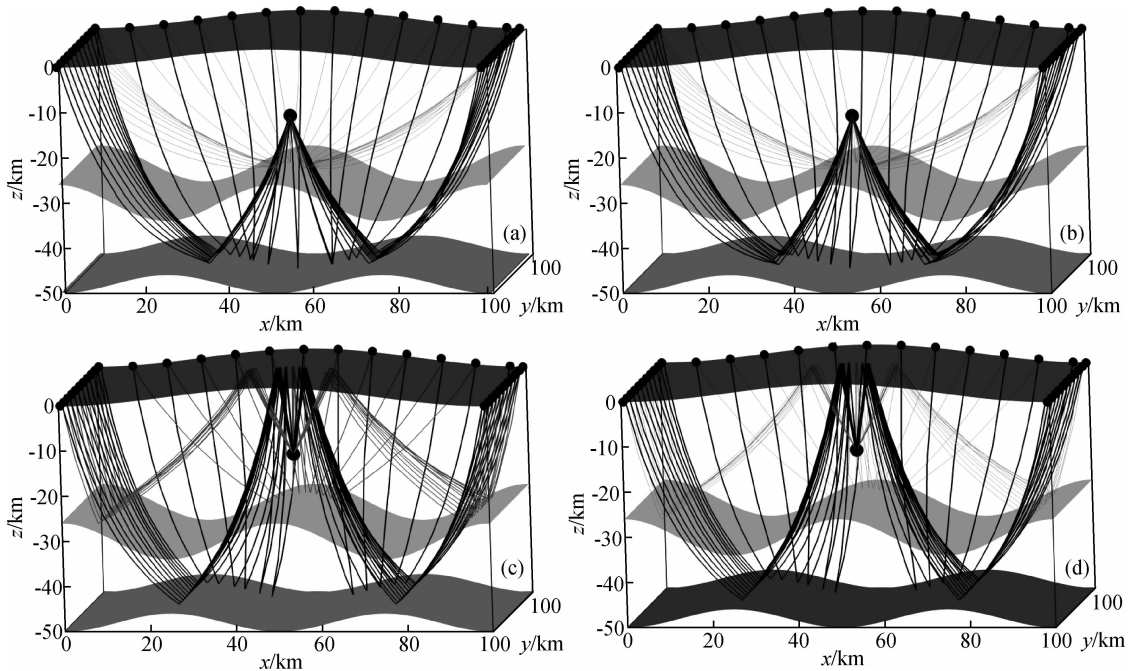


图 11 S 波反射转换波(震相 S_1P^1 、 $S_1S_2P^1P^2$) (上图) 和地表与界面的反射转换波(震相 $S^1P_1P^1$ 、 $S^1P_1P_2P^2P^1$) (下图) 的射线路径, 其中左图为 FMM 算法结果, 右图为 ISPM 算法结果

Fig. 11 Raypaths for S-wave reflected and converted phases (S_1P^1 、 $S_1S_2P^1P^2$) (Upper panels) and multiple reflected and converted phases between the free surface and subsurface interfaces ($S^1P_1P^1$ 、 $S^1P_1P_2P^2P^1$) (Lower panels). In figure the left panels is results for FMM and the right panels is for ISPM

5 结论

本文结合分区多步计算技术和快速行进法实现了三维复杂地学模型(含不规则起伏界面)中多震相地震走时和相应射线路径的追踪计算。对于震源附近计算误差较大问题,再不增加过多计算用时的前提下,采用震源区加密双重网格技术大幅度提高了计算精度。通过求解局域走时场最大梯度的方法准确地追踪相应的地震射线。数值模拟、以及与ISPM算法的对比分析,验证了所提Multistage FMM算法的正确性和有效性。结果表明:Multistage FMM是一种计算精度较高、算法稳定的多震相地震走时和射线路径追踪的方法技术,适应于任意三维起伏界面及起伏地表模型。

致谢 感谢审稿专家提出的修改意见和编辑部的大力支持!

References

- Bai C Y, Greenhalgh S, Zhou B. 2007. 3D ray tracing using a modified shortest-path method[J]. *Geophysics*, 72(4): T27.
- Bai C Y, Huang G J, Li X L, *et al.* 2013. Ray tracing of multiple transmitted/reflected/converted waves in 2-D/3-D layered anisotropic TTI media and application to crosswell traveltime tomography[J]. *Eophysical Journal International*, 195(2): 1068-1087.
- Bai C Y, Huang G J, Zhao R. 2010. 2-D/3-D irregular shortest-path ray tracing for multiple arrivals and its applications[J]. *Geophysical Journal International*, 183(3): 1596-1612.
- Bai C Y, Li X L, Tang X P. 2011. Seismic wavefront evolution of multiply reflected, transmitted, and converted phases in 2D/3D triangular cell model[J]. *Journal of Seismology*, 15(4): 637-652.
- Bai C Y, Tang X P, Zhao R. 2009. 2-D/3-D multiply transmitted, converted and reflected arrivals in complex layered media with the modified shortest path method[J]. *Geophysical Journal International*, 179(1): 201-214.
- Cerveny V, Psencik I. 1983. Gaussian beams and paraxial ray approximation in three-dimensional elastic inhomogeneous media[J]. *Journal of Geophysics*, 53: 1-15.
- de Kool M D, Rawlinson N, Sambridge M. 2006. A practical grid-based method for tracking multiple refraction and reflection phases in three-dimensional heterogeneous media [J]. *Geophysical Journal International*, 167(1): 253-270.
- Huang G J, Bai C Y, Greenhalgh S. 2013. Fast and accurate global multiphase arrival tracking; the irregular shortest-path method in a 3-D spherical earth model[J]. *Geophysical Journal International*, 194(3): 1878-1892.
- Huang X G, Sun J G, Sun Z Q, *et al.* 2016. A method for complex traveltime calculation based on the complex eikonal equation and the modified fast marching [J]. *Oil Geophysical Prospecting (in Chinese)*, 51(6): 1109-1118, 1147.
- Julian B R, Gubbins D. 1977. Three-dimensional seismic ray tracing [J]. *Journal of Geophysics*, 43(1): 95-113.
- Kim S, Folie D. 2000. The group marching method: an O(N) level set eikonal solver [C]//70th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 2297-2300.
- Lan H Q, Zhang Z, Xu T, *et al.* 2012. A comparative study on the fast marching and fast sweeping methods in the calculation of first-arrival traveltime field[J]. *Progress in Geophysics (in Chinese)*, 27(5): 1863-1870, doi: 10.6038/j.issn.1004-2903.2012.05.005.
- Li X W, Bai C Y. 2017. Multiple-phase seismic ray tracing in ellipsoidal coordinates[J]. *Chinese Journal of Geophysics (in Chinese)*, 60(9): 3368-3377, doi: 10.6038/cjg20170908.
- Lu H Y, Liu Y K, Chang X. 2013. MSFM-based travel-times calculation

- in complex near-surface model[J]. *Chinese Journal of Geophysics (in Chinese)*, 56(9): 3100-3108, doi: 10.6038/cjg20130922.
- Moser T. 1991. Shortest path calculation of seismic rays [J]. *Geophysics*, 56(1): 59-67.
- Rawlinson N, Sambridge M. 2004. Multiple reflection and transmission phases in complex layered media using a multistage fast marching method[J]. *Geophysics*, 69(5): 1338-1350.
- Sethian J A, Popovici A M. 1999. 3-D traveltimes computation using the fast marching method [J]. *Geophysics*, 64(2): 516-523.
- Sun Z Q, Sun J G, Han F X. 2012. Traveltime computation using the upwind finite difference method with nonuniform grid spacing in a 3D undulating surface condition[J]. *Chinese Journal of Geophysics (in Chinese)*, 55(7): 2441-2449, doi: 10.6038/j.issn.0001-5733.2012.07.028.
- Sun Z Q, Sun J G, Wang X Q, *et al.* 2017. Computation of multiple seismic traveltime in mountainous areas with complex 3D conditions using the multistage group marching upwind hybrid method [J]. *Chinese Journal of Geophysics (in Chinese)*, 60(5): 1861-1873, doi: 10.6038/cjg20170521.
- Um J, Thurber C. 1987. A fast algorithm for two-point seismic ray tracing[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 77(3): 972-986.
- Vinje V, Iversen E, Gjøystdal H. 1993. Traveltime and amplitude estimation using wavefront construction [J]. *Geophysics*, 58(8): 1157-1166.
- Vinje V, Åstebøl K, Iversen E, *et al.* 1999. 3-D ray modelling by wavefront construction in open models [J]. *Geophysics*, 64(6): 1912-1919.
- Wang F, Qu X X, Liu S X, *et al.* 2014. A new ray tracing approach based on both multi-stencils fast marching and the steepest descent [J]. *Oil Geophysical Prospecting (in Chinese)*, 49(6): 1106-1114.
- Zhang F X, Wu Q J, Li Y H, *et al.* 2010. Application of FMM ray tracing to forward and inverse problems of seismology [J]. *Progress in Geophysics (in Chinese)*, 25(4): 1197-1205, doi: 10.3969/j.issn.1004-2903.2010.04.008.

附中文参考文献

- 黄兴国, 孙建国, 孙章庆, 等. 2016. 基于复程函数方程和改进的快速推进法的复旅行时计算方法[J]. *石油地球物理勘探*, 51(6): 1109-1118, 1147.
- 兰海强, 张智, 徐涛, 等. 2012. 地震波走时场模拟的快速推进法和快速扫描法比较研究[J]. *地球物理学进展*, 27(5): 1863-1870, doi: 10.6038/j.issn.1004-2903.2012.05.005.
- 李兴旺, 白超英. 2017. 椭球坐标系下多震相地震射线追踪[J]. *地球物理学报*, 60(9): 3368-3377, doi: 10.6038/cjg20170908.
- 卢回忆, 刘伊克, 常旭. 2013. 基于MSFM的复杂近地表模型走时计算[J]. *地球物理学报*, 56(9): 3100-3108, doi: 10.6038/cjg20130922.
- 孙章庆, 孙建国, 韩复兴. 2012. 三维起伏地表条件下地震波走时计算的不等距迎风差分法[J]. *地球物理学报*, 55(7): 2441-2449, doi: 10.6038/j.issn.0001-5733.2012.07.028.
- 孙章庆, 孙建国, 王雪秋, 等. 2017. 三维复杂山地多级次群推进迎风混合法多波型走时计算[J]. *地球物理学报*, 60(5): 1861-1873, doi: 10.6038/cjg20170521.
- 王飞, 曲昕馨, 刘四新, 等. 2014. 一种新的基于多模板快速推进算法和最速下降法的射线追踪方法[J]. *石油地球物理勘探*, 49(6): 1106-1114.
- 张风雪, 吴庆举, 李永华, 等. 2010. FMM射线追踪方法在地震学正演和反演中的应用[J]. *地球物理学进展*, 25(4): 1197-1205, doi: 10.3969/j.issn.1004-2903.2010.04.008.