



陈俊磊, 黄跃鹏, 侯爵. 2021. 合成理论地震图方法综述. 地球物理学进展, 36(5) : 1797-1809 doi: 10. 6038/pg2021EE0584.

CHEN JunLei, HUANG YuePeng, HOU Jue. 2021. Review of synthetic seismogram calculation methods. *Progress in Geophysics* (in Chinese), 36(5) : 1797-1809 doi: 10. 6038/pg2021EE0584.

合成理论地震图方法综述 Review of synthetic seismogram calculation methods

陈俊磊^{1,2,3}, 黄跃鹏^{1,2}, 侯爵^{1,2,4}

CHEN JunLei^{1,2,3}, HUANG YuePeng^{1,2}, HOU Jue^{1,2,4}

1. 中国科学院地质与地球物理研究所 岩石圈演化国家重点实验室, 北京 100029
2. 中国科学院大学, 北京 100049
3. 云南省地震局, 昆明 650224
4. 中国地震局地球物理研究所, 北京 100081

1. *State Key Laboratory of Lithospheric Evolution, Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Science, Beijing 100029, China*
2. *University of Chinese Academy of Science, Beijing 100049, China*
3. *Yunnan Earthquake Agency, Kunming 650224, China*
4. *Institute of Geophysics, China Earthquake Administration, Beijing 100081, China*

摘要 合成理论地震图对震源和地下结构的研究而言是一项重要的基础工作. 一直以来, 诸多地震学领域的先驱们都致力于合成理论地震图的方法发展与改进, 是一个愈久弥新的研究课题. 同时, 经过很多非常有影响力的地震学家的发展, 合成理论地震图的方法种类变得多种多样. 本文全面而深入地总结合成理论地震图的不同理论、不同方法所具有的优势与不足, 并讨论各种理论地震图计算方法的研究进展. 以为为理论地震图计算方法的发展以及在实际应用中选择合适的方法提供有价值的参考. 经过对比研究, 我们得到以下三点认识: (1) 在解析类方法中, 波数积分法在使用上不区分局部或全球尺度、计算精确且为全波形模拟, 因此适用性更为广泛; (2) 在数值类方法中, 谱元法在适用性和计算效率上是一种最受欢迎且最精确的计算方法; (3) 根据不同的需求采用不同方法相结合的混合计算方法是较好的选择.

关键词 理论地震图; 波动方程; 解析解; 数值解

中图分类号 P315

文献标识码 A

doi: 10. 6038/pg2021EE0584

Abstract The synthetic seismogram calculation is a very important basic work for seismic source research and Earth's structure inversion. For a long time, many pioneers of seismology have devoted themselves to the development and improvement of the synthetic seismograms calculation method. At the same time, after the development by many very influential seismologists, there are various synthesizing-seismogram methods. This article comprehensively and deeply summarizes the advantages and disadvantages of different theories and methods, and discusses the development of various theoretical seismogram calculation methods, which provides a valuable reference for the development and application of theoretical seismogram calculation methods. Through comparative study, we obtained the following three understandings: (1) for analytical methods, the wavenumber integration method is more widely used, due to the advantages of undistinguishing between local and global dimension, accurate calculation and full waveform simulation. (2) Among numerical methods, spectral element method is one of the most popular and accurate calculation methods in terms of applicability and calculation efficiency. (3) According to different requirements, the hybrid calculation method combining different methods is a better choice.

Keywords Synthetic seismogram; Wave equation; Analytical solution; Numerical solution

0 引言

理论地震图的计算是震源物理和地下结构研究的重要基础. 在震源机制解和破裂过程等震源研究中, 需首先合成理论地震图, 再将理论地震图与观测波形匹配, 这一过程通

常称为波形拟合. 因此合成理论地震图的误差与精度直接关系到震源参数反演的误差与精度. 而在利用接收函数反演地下几何结构等研究中, 理论地震图的计算也直接影响到反演计算的精度与结果的解释 (Monteiller *et al.*, 2013). 因此, 理论地震图计算方法一直是地震学领域里的重要基础研究, 并

收稿日期 2021-03-22; 修回日期 2021-08-15. 投稿网址 <http://www.progeophys.cn>

基金项目 云南省地震局科技专项(2020ZX01, 2021YBZX15)、云南省地震局科技创新团队(地震机理及孕震环境研究团队)和国家自然科学基金(41804060)联合资助.

第一作者简介 陈俊磊, 男, 1985年生, 助理研究员, 在读博士研究生, 研究方向为地震学. E-mail: jlchen@mail.iggcas.ac.cn

且前人基于不同理论发展了多种理论地震图合成方法. 理论地震图合成方法包含两类(温联星和姚振兴, 1994): 一类可称为解析类方法, 即通过求解弹性波动方程, 得到波动方程的解析解; 另一类可称为数值方法, 即对波动方程直接进行离散化模拟地震波. 一般而言, 解析类方法发展较早, 其理论较为成熟, 特点是计算速度快、精度高, 占用计算机内存小. 而近些年来随着计算机科学的迅速发展, 数值类方法也得到快速发展, 并朝着快速计算、高频地震波形模拟等方向迈进. 根据不同的理论基础, 不同的理论地震图合成方法具有其自身的优势与不足, 只有全面而深入的分析各类方法的特点, 才能有利于进一步发展理论地震图合成方法并在实际应用中选择最为有效的方法. 本文的主要目的是通过总结现有的各种理论地震图合成理论与方法, 分析各种方法的优势与劣势, 并讨论各种理论地震图计算方法的进展, 以期为进一步理论地震图计算方法的发展与应用提供有价值的参考.

1 解析类方法

理论地震图合成的解析类方法可根据解析变换的种类分为两类(李旭和陈运泰, 1996). 一类是基于 Laplace 变换的 Cagniard-de Hoop 方法, 即广义射线法(HelMBERGER, 1968, 1974). 另一类是基于 Fourier 变换的波数积分法(HASKELL, 1953; KENNETT and KERRY, 1979; BOUCHON, 1981).

1.1 广义射线类

1.1.1 广义射线法

广义射线法的基本理论是在水平均匀层状介质假设基础上, 由 Cagniard-de Hoop 方法建立(GILBERT and HELMBERGER, 1972; HELMBERGER, 1974). 其中, 广义射线理论对波动方程进行了高频近似假设, 所以是一种渐进射线理论. 在这一近似下, 该方法的解与射线的物理本质有了更加直接的联系. 同时, 在这一假设下, 理论地震图计算比精确解计算更加快速(DRIJKONINGEN, 1991). 然而, 该方法仅适用于在水平分层或近似水平分层介质模型情况下, 计算远场的某些中低频特定震相. 当计算层数较多或者计算近场高频信号时, 由于存在转换波和多次反射、折射波, 计算量将大大增加, 使得合成具有全响应的理论地震图比较困难.

1.1.2 反射率法

与广义射线法在数学上等价的另一种方法称为反射率法(FUCHS and MÜLLER, 1971). 但是与广义射线法不同的是反射率法包含了不同方面的近似, 从而有不同的特点. 其中, 由于广义射线法不能计算包含所有多次反射波的理论地震图, 因此在实际应用中受到一定的限制. 在利用波形信息研究地球内部精细结构时, 考虑层内多次波是十分必要的. 对于远震, 震源区与接收区的速度结构一般不同, 反射率法不再适用这种情况, 于是前人扩展了经典的反射率法, 使之适用于简单横向非均匀介质(王椿镛, 1982; KIND, 1985). 为了适用于震源区和接收区速度结构不同的情况, 同时又能自动包含指定介质层内的混响, 反射率法得到了进一步扩展(刘启元和范会吉, 1992).

1.1.3 广义射线的不同近似

(1) WKBJ 近似是基于二维动态问题(时间依赖)的薛定谔方程(即抛物线波动方程)解的一种近似. 广义射线理论

在应用到非均匀介质时会受到频带限制, 因此为了拓宽合成理论地震图的频带, 将 WKBJ 近似引入广义射线理论的 Cagniard-de Hoop 解法, 将该方法称为 WKBJ 方法(Chapman, 1974, 1976). WKBJ 方法采用指数函数表达波传播, 避免了长周期地震信号的计算限制. 但是当垂直向传递系数为零时, WKBJ 方法将失效(Verweij and de, 1990).

(2) Kirchhoff-Helmholtz(KH)积分方法(Frazer and Sen, 1985)是一种很好的计算横向非均匀介质合成理论地震图的方法. 传统的广义射线方法在介质非均匀性远大于地震波波长时有较好的效果, 但当存在奇点的时候, 广义射线理论失效. 为了解决奇点问题, 发展了 KH 积分方法. KH 积分方法将反射界面上每个点都看成一个点源, 每个点源对地震波振幅均有贡献, 于是将反射界面上每个点的贡献相加就得到了理论地震图. 经过测试, KH 积分方法能模拟强烈非均匀介质中的反射波震相, 在计算复杂界面反射波时具有很高的效率(李红光和吴庆举, 2008).

(3) 为了在非均匀介质中求解时间调和的高频理论地震图, 前人引入高斯束方法(Červený, 1983). 该方法基于一系列高斯束拟合高频波场, 高斯束仅集中于射线附近, 而集中在射线附近的射线由薛定谔方程解给出. 薛定谔方程的解随距射线的平方距离增加呈指数衰减, 即垂直于射线的振幅剖面呈钟形, 因此该方法称为高斯束法. 该方法分为三个变种, 包括谱方法(spectral method)、卷积法(convolatory method)、波包法(wave-packet method). 以波包法为例, 该方法的原理是: 将地震波场分解为一系列由震源向任意方向且沿射线传出的波包. 当遇到绕射体、散射体或反射折射时, 波包改变传播特性. 任一点的理论地震图可由邻近点接收到的波包求和获得.

(4) Maslov 渐进理论(Chapman and Drummond, 1982)的引入也是为了解决广义射线方法计算理论地震图中的奇点问题. 该方法结合了渐进射线理论和变换理论, 兼具二者对奇点简洁性和一般性的处理方式, 用于计算体波信号.

(5) 与高斯束理论近似, 固定高斯渐进理论(Chai *et al.*, 2017)是一种基于波阵面近似表达, 通过严格数学推导的波动方程解. 固定高斯渐进理论(Frozen Gaussian Approximation, FGA)的核心在于将地震波场沿射线路径分解为固定宽度的高斯函数. 与高斯束渐进的不同之处在于, FGA 采用固定高斯函数不需调整高斯函数的宽度参数, 即可有效提高地震波场在遇到散射情况时的精度. FGA 也不需对波算子采用相干态变换(coherent state transform), 因而避免了复杂的程函方程运算. 在 3D 高频地震波模拟问题中, 激增的计算量和存储需求是其面临的巨大挑战, 引入固定高斯渐进理论可有效降低地震波模拟中遇到的上述问题(图 1).

1.2 波数积分类

波数积分法基于 Fourier 变换求解波动方程, 该方法可较为快速地合成多层介质下具有全响应的理论地震图. 且该方法对近场和远场未加严格限制, 因此在近场和远场情况下, 该方法均可应用于理论地震图合成计算. 但该方法存在共性问题, 是往往难以用于合成包含高频成分的理论地震图.

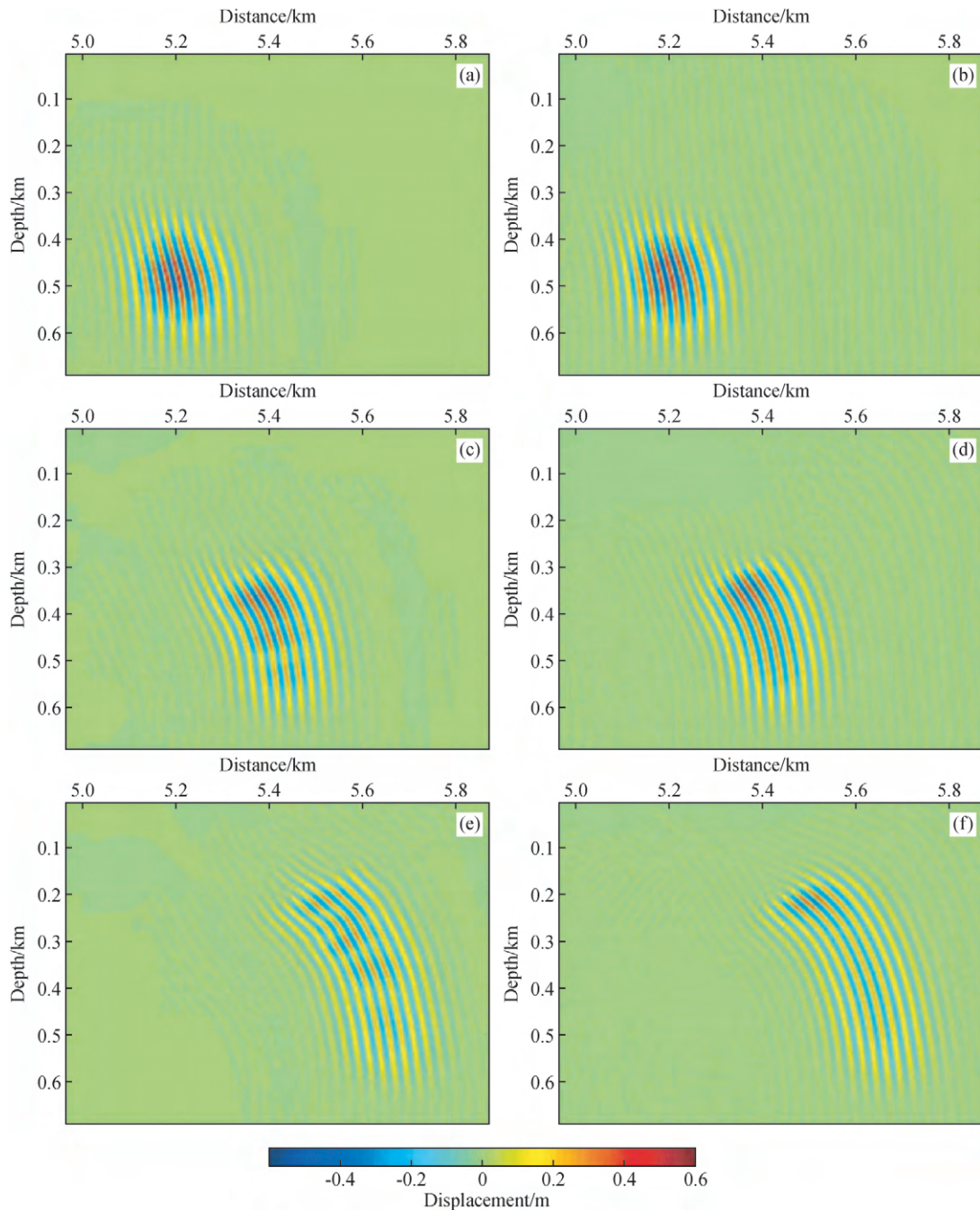


图 1 基于 Marmousi 模型的波场快照(据 Chai *et al.* ,2017)

左侧为 FGA 模拟结果,右侧为 SPEC-FEM3D 模拟结果,由上至下为 0.1 s、0.2 s、0.3 s 的结果.

Fig. 1 Wavefield snapshots of Marmousi model(modified from Chai *et al.* ,2017)

Left column: FGA solutions; right column: SPEC-FEM3D solutions. Top to bottom row: at 0.1 s ,0.2 s ,0.3 s.

1.2.1 传输矩阵法(FK)

由于在分层介质中,每一层介质的质点速度、界面上的法向应力和剪切应力满足连续性边界条件,从而上下层介质的质点速度和应力满足递推关系,对于层状均匀介质,地震波通过该介质系统可通过传输矩阵合成理论地震图(Thomson,1950).该方法在频率-波数域求解波动方程的数值解,因此也称为FK方法.之后,该方法被应用于多层固体介质的 Rayleigh 波和 Love 波相速度、群速度的计算

(Haskell,1953,1964).由此,传输矩阵法在理论地震图合成中的应用得以广泛地发展(Herrmann,1979;Wang and Herrmann,1980;Zhu and Rivera,2002).

1.2.2 广义反透系数矩阵方法

广义反透系数矩阵方法(Kennett and Kerry,1979)是将传输矩阵法(Haskell,1953,1964)分成反射和透射系数矩阵的一种表达方式.该方法由平面内 P-SV 波的广义反透系数矩阵来计算波数积分中的被积函数 $F(k, \omega, z)$,经波数积分

得到单频响应的频率域解. 计算波数积分的方式有很多,既可以在有限波数域内进行,也可以在半无限波数域内将 $F(k, \omega, z)$ 展成 $1/k$ 的多项式来计算波数积分(刘鹏程和姚振兴, 1994). 由于简单的矩阵技术存在精度丢失问题,反透系数矩阵能够更为简洁地表达地震波波场,并避免了精度丢失的问题(Wang, 1999).

1.2.3 离散波数积分法

弹性分层介质的格林函数可由关于频率和水平波数的双重积分来表达,而波数积分可由离散求和近似替代,由此提出离散波数积分法求解格林函数(Bouchon, 1981). 当获得介质格林函数后,通过与震源时间函数褶积合成理论地震图. 我们由波动方程的离散波数解析理论了解其细节. 无限大均匀介质中的线源能量辐射可表达为柱面波,或与柱面波等价的均匀和非均匀平面波的连续叠加. 在 $x-z$ 平面内,位移或应力有公式(1):

$$F(x, z; \omega) = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} f(k, z) e^{-ikx} dk, \quad (1)$$

其中,积分变量 k 是水平波数. 假设存在沿 x 轴的无限长线源,可将积分表达改写为求和:

$$G(x, z; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k, z) e^{-ikx} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ikmL} dk, \quad (2)$$

L 为线源的等间隔长度.

(2) 式的离散形式可改写为:

$$G(x, z; \omega) = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_n, z) e^{-ik_n x}, \quad (3)$$

其中 $k_n = \frac{2\pi}{L}n$. 在级数收敛的情况下, (3) 式可近似表达为:

$$G(x, z; \omega) = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=-N}^N f(k_n, z) e^{-ik_n x}. \quad (4)$$

为了实现求和假设引入复频率 $\omega = \omega_R - i\omega_I$, 于是脉冲响应 $g(x, z; t)$ 可由(5)式表达:

$$g(x, z; t) = e^{-\omega_I t} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, z; \omega) e^{i\omega_R t} d\omega_R, \quad (5)$$

于是可通过 FFT 计算(5)式的积分获得理论地震图.

方程由(1)改写为(4)将极大降低计算量. 由(5)式可知,在任一时窗下,波数积分可由离散求和精确表达. 通过将特殊点源周围的一系列有限周期源叠加,实现方程离散化. 选定线源间隔长度 L 取决于点源响应的时长和水平波数的离散化程度. 离散波数法的优势在于用很小的运算量就可精确计算较为完备的理论地震图.

2 数值类方法

在非均匀介质模型中,现在广泛采用并迅速发展起来的方法是数值类方法. 这类方法对波动方程直接进行离散化,其优点是方法简便,无需在数学上采取很复杂的变换,对边界条件的处理相对比较灵活,可以得到确定时刻的波场. 但是这种方法所能计算的频率与时间、空间步长的关系紧密,当计算高频成分时将大大增加格点数目,从而导致计算倍增. 随着计算机科学的飞速发展,一些常规的计算已经可以满足,但从时效性和经济性角度看,仍有进一步发展的空间. 弹性波动方程的数值解也可分为强解形式和弱解形式两类. 强解形式通常采用波动方程的微分形式,需要满足位移和应

力连续的边界条件. 而弱解形式采用积分形式,仅需满足自由边界条件即可.

2.1 强解形式

2.1.1 有限差分法(Finite Difference Method, FDM)

有限差分方法属于微分的波动方程“强”条件解,即用相邻网格点间的差分近似表达位移偏导数,因此很难满足精确边界条件(Alterman and Karal, 1968). 耦合了时间和空间一阶偏导数的有限差分本构关系写为方程(6)和(7):

$$\rho \partial_t v = (\nabla \cdot T + f), \quad (6)$$

$$\partial_i T = c: \nabla v, \quad (7)$$

其中 $v = \partial_i u$, μ 为位移, v 为具有 3 个速度分量的向量, T 为 3 阶应力张量. 方程(6)和(7)中的空间微分算子在介质内部能够用差分算子离散,而在介质边界由于不存在相邻网格与之差分,难以精确处理自由边界条件(图 2). 因此,有限差分方法很难精确模拟自由边界附近的面波. 有限差分法的主要优势是实现简单、计算高效. 但在全球尺度下,要设计一个包含较大数量的网格模型绝非易事,相对恒定不变的介质条件也很不常见.

2.1.2 低秩近似法(Low-Rank Approximation, LRA)

理论上地震波传播的问题可通过分析近似的数值解,以减少混合域的空间波数算子. LRA 即是通过低秩分解近似空间波数矩阵实现地震波传播运算的一种方法(Fomel et al., 2013). 低秩近似意味着仅需较少的波数数量,可有效提高各向异性介质下地震波传播模拟的计算效率. 只要介质的速度连续, LRA 可用于声波方程和弹性地震波等不同类型的地震波模拟. 因此, LRA 主要用于地震勘探领域的地震波模拟.

2.1.3 伪谱法(Pseudospectral Method, PSM)

伪谱法(Furumura et al., 1998)是将地震波场的空间偏导数采用正余弦(Fourier 变换)、切比雪夫多项式等类型的球谐基函数展开,进行波场模拟的一种数值方法. PSM 在进行球谐展开时同样基于波动方程数值解的“强”形式,因此同样存在难于满足精确处理自由边界条件的缺陷. PSM 的思路源自于更加精确的空间偏导数算子,并有效应用于部分幔内传播的波场(Furumura et al., 1999),因此具有一定的适用性. PSM 可根据球谐展开的类型进一步分为傅里叶基函数型、切比雪夫基函数型和傅里叶与切比雪夫混合型. 傅里叶基函数是周期性函数,通常适用于周期性边界条件,自由边界为非周期性条件,因此不适用于自由边界条件. 切比雪夫型为非周期性基函数,不但适用于自由边界条件,而且适用于非均匀空间网格点(图 3, 图 4). 由于 PSM 基于球谐基函数,因此其主要优势是对光滑的均匀或非均匀介质均有很高的精度. 但其不足之处在于:(1)对全球结构很难设计高效快速的数学变换;(2)当介质存在不连续界面时其适用性受到一定限制;(3)同样缺乏对面波信号的合成(由于难以精确处理自由边界条件).

2.2 弱解形式

2.2.1 Rayleigh-Ritz 方法

Rayleigh-Ritz 方法的思想是将未知位移场 s 展开为一系列已知的基函数 s_k (Dahlen and Tromp, 1998):

$$s = \sum_k q_k s_k, \quad (8)$$

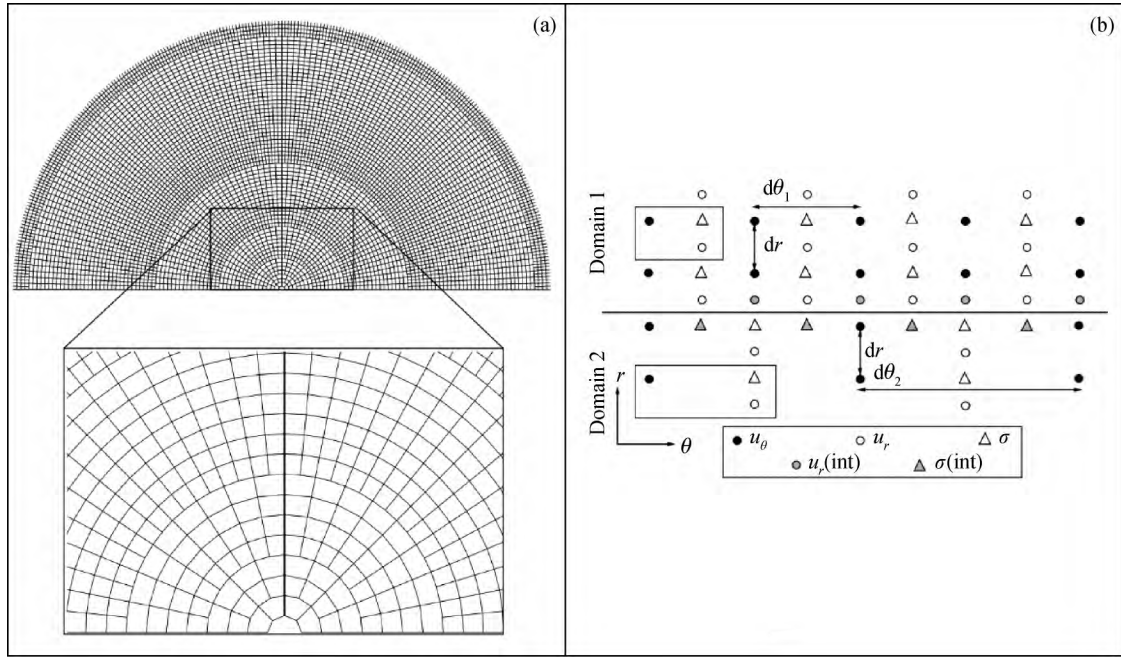


图2 (a) 轴对称 2D 有限差分网格; (b) 两种维度下的格点示意图(据 Thomas *et al.* ,2000)
 Fig.2 (a) Two-dimensional finite difference grid used in the axisymmetric simulations;
 (b) The grid points with two kinds of domains(modified from Thomas *et al.* ,2000)

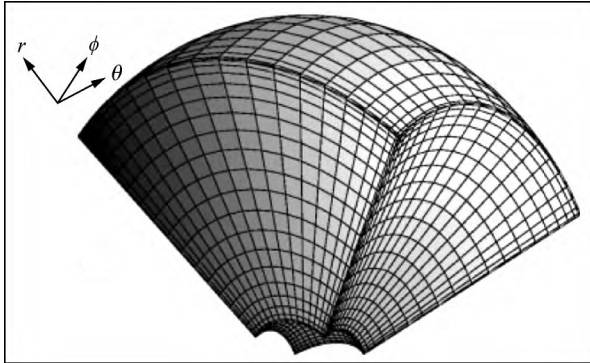


图3 基于切比雪夫多项式的伪谱法 3D 网格(据 Igel ,1999)

Fig.3 Physical domain for a 3D pseudospectral simulation based upon Chebyshev polynomials(modified from Igel ,1999)

该方法通过确定展开系数 q_k 在展开的过程中需要选择合适的基函数. Rayleigh-Ritz 方法在频率域,有弱解形式的运动方程:

$$-\omega^2 \int_V \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{s} d^3 \mathbf{x} = - \int_V \nabla \mathbf{w} : \mathbf{T} d^3 \mathbf{x} + \mathbf{M} : \nabla \mathbf{w}(\mathbf{x}_s) S(\omega) \quad (9)$$

将(8)代入(9),并选择测试向量 $\mathbf{w} = \mathbf{s}_k^c$,可获得矩阵形式(10):

$$\sum_k (\mathbf{V}_{kk} - \omega^2 \mathbf{T}_{kk}) q_k(\omega) = S_k(\omega) \quad (10)$$

其中, $\mathbf{V}_{kk} = \int_{\Omega} \nabla s_k : \mathbf{c} : \nabla s_k d^3 \mathbf{x}$ 为势能矩阵, $\mathbf{T}_{kk} = \int_{\Omega} \rho s_k \cdot$

$s_k d^3 \mathbf{x}$ 为运动学矩阵, $S_k(\omega) = \mathbf{M} : \nabla s_k(\mathbf{x}_s) S(\omega)$ 为震源项, s_k 为基函数, \mathbf{c} 为弹性张量, \mathbf{x} 为笛卡尔坐标. 耦合模式法和直接解法是由该表达式选用不同的基函数形成的两种方法.

(1) 耦合模式法(Coupled-Mode Method ,CMM)

在 CMM 中,方程(10)的基函数 s_k 为球对称地球模型的特征函数. 该特征函数在径向上依赖于球对称地球模型的径向结构,在横向上依赖于球谐性质. CMM 主要存在两个问题: ①CMM的基函数是球对称模型,但一般而言,地球模型是椭球模型,且具有地形和海洋覆盖; ②在耦合计算时将涉及不能并行计算的矩阵运算,当合成地震图的频带越宽时,矩阵-向量运算的次数就会快速增长,计算量将会倍增. 由于上述两个原因,除非要计算非常长周期的理论地震图,否则一般不再选用该方法.

(2) 直接解法(Direct Solution Method ,DSM)

DSM 最初应用于强地动地震学的反演问题中(Hara *et al.* ,1993). 之后,考虑自由边界条件后将其引入到全球尺度的理论地震图合成(Geller and Ohminato ,1994). DSM 在弱解形式下,选用低阶的样条或者解析函数多项式作为基函数 s_k 计算理论地震图及其偏导数. 与射线方法仅能计算直达 P 和 S 波不同(Zhan *et al.* ,2012), DSM 方法是一种精确计算全波形理论地震图的方法(Wu *et al.* ,2018). 但是当存在强烈横向非均匀介质时需要较宽的子波频带,因此该方法在数学上将变得比较繁琐. 同时,该方法在处理地壳厚度有变化时也比较困难,因为直接解法在处理边界起伏情况时将处理较大的数学矩阵,于是限制了长周期地震信号的模拟.

2.2.2 有限元法(Finite Element Method ,FEM)

在 FEM(Hughes ,1987) 中,根据需求按四面体、六面体、

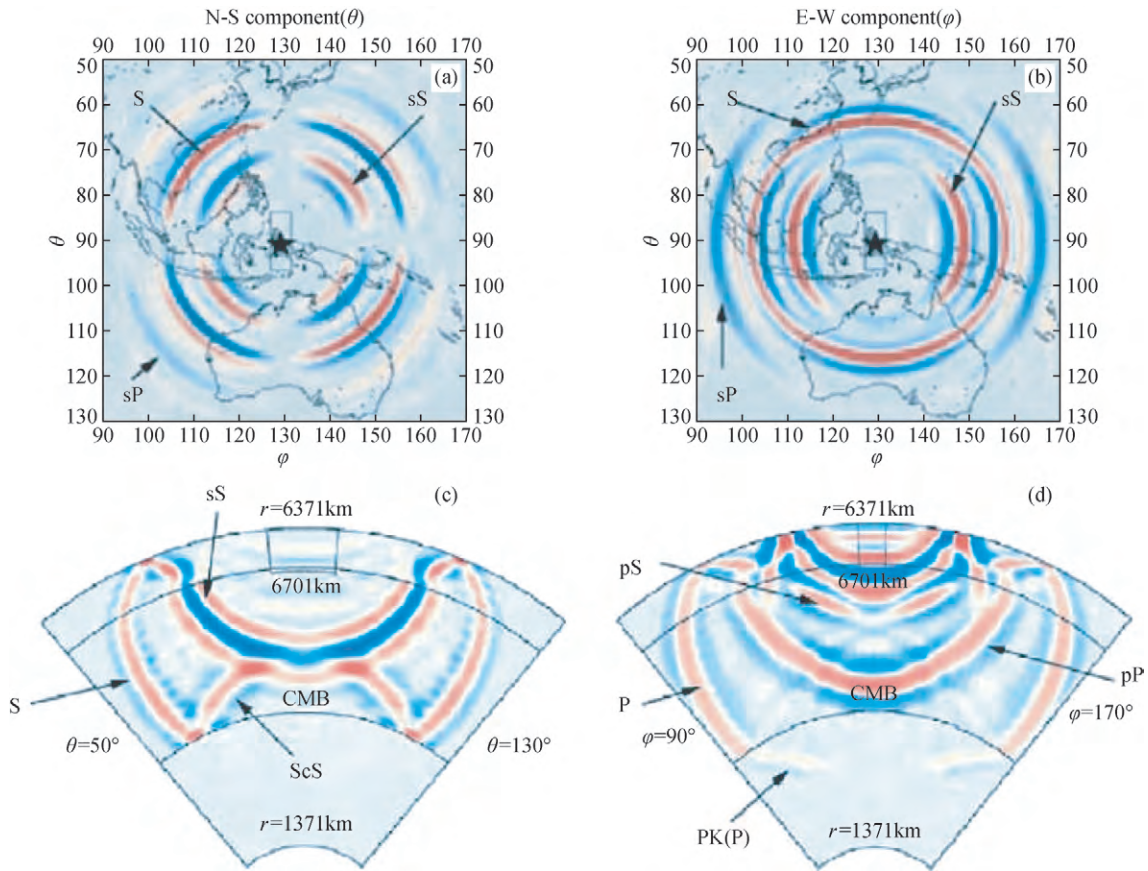


图4 根据图2 网格模型获得的波场快照(据 Igel , 1999)

(a) 南北分量速度场快照; (b) 东西分量速度场快照; (c) 速度场切向分量沿经线切片;
 (d) 速度场径向分量沿经线切片. 红色代表正的速度值, 蓝色代表负的速度值.

Fig. 4 Pseudospectral snapshots of model Fig. 2(modified from Igel , 1999)

(a) North-south components of the velocity field; (b) East-west components of the velocity field; (c) Snapshots of the transverse component velocity field in longitude; (d) Snapshots of the radial component velocity field in longitude.
 Red and blue colors denote positive and negative velocities , respectively.

椎体等形状分割为大量的有限元. 通过变换, 将有限元 Ω 从笛卡尔坐标 x 投影到参考坐标 ξ :

$$x(\xi) = \sum_{a=1}^{n_a} N_a(\xi) x_a, \tag{11}$$

控制点 x_a 定义了有限元的几何形态, 形函数 N_a 控制映射和插值. 以六面体为例, 六面体中的基函数采用 1 阶或 2 阶拉格朗日多项式. n 阶的拉格朗日多项式由 $n + 1$ 个控制点定义. 若 $-1 \leq \xi_\alpha \leq 1 \alpha = 0, \dots, n$ 则:

$$\ell_\alpha(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0) \cdots (\xi - \xi_{\alpha-1})(\xi - \xi_{\alpha+1}) \cdots (\xi - \xi_n)}{(\xi_\alpha - \xi_0) \cdots (\xi_\alpha - \xi_{\alpha-1})(\xi_\alpha - \xi_{\alpha+1}) \cdots (\xi_\alpha - \xi_n)}. \tag{12}$$

在(12)的定义下, 拉格朗日多项式在任意控制点有 $\ell_\alpha(\xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, 即为 0 或者 1, 其中 δ 为狄拉克函数. 于是位移场 s 或者测试向量 w 可展开为具有 n_a 个节点的形函数 N_a 的函数:

$$f(x(\xi)) = \sum_{a=1}^{n_a} f_a N_a(\xi), \tag{13}$$

f_a 表示函数 f 在节点 x_a 的值. 由弱形式的位移场 s 或者测试

向量 w 的梯度, 定义梯度函数:

$$\nabla f = \sum_{i=1}^3 \hat{x}_i \partial_i f = \sum_{i=1}^3 \hat{x}_i \sum_{a=1}^{n_a} f_a [\partial_\xi N_a(\xi) (\partial_i \xi) + \partial_\eta N_a(\xi) (\partial_i \eta) + \partial_\zeta N_a(\xi) (\partial_i \zeta)], \tag{14}$$

其中 $\hat{x}_i (i = 1, 2, 3)$ 表示 x, y 和 z 沿梯度增加方向的单位向量, $\partial_i (i = 1, 2, 3)$ 表示沿 x, y 和 z 的偏导数.

FEM 梯度的精度受控于形函数多项式的阶数. 如果基函数为低阶多项式则偏导数的精度将会降低. FEM 弱解形式在数学上是对有限元的积分, 利用高斯求积公式有限元 Ω 的积分表示为:

$$\int_{\Omega} f(x) d^3x = \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n \sum_{\gamma=0}^n \omega_\alpha \omega_\beta \omega_\gamma \times f(\xi_\alpha, \eta_\beta, \zeta_\gamma) \zeta(\xi_\alpha, \eta_\beta, \zeta_\gamma), \tag{15}$$

其中 $\omega_\alpha (\alpha = 0, \dots, n)$ 表示高斯正交的 $n + 1$ 权重, $(n + 1)^3$ 的点 $(\xi_\alpha, \eta_\beta, \zeta_\gamma)$ 表示相应的高斯积分点, ζ 表示雅克比映射. 为了实现有限元函数积分与偏导, 转置后的雅克比矩阵值被存储于每个有限元的高斯积分点内. 若要实现 FEM 的并行计算, 需将每个有限元分开, 每个并行计算的处理器对

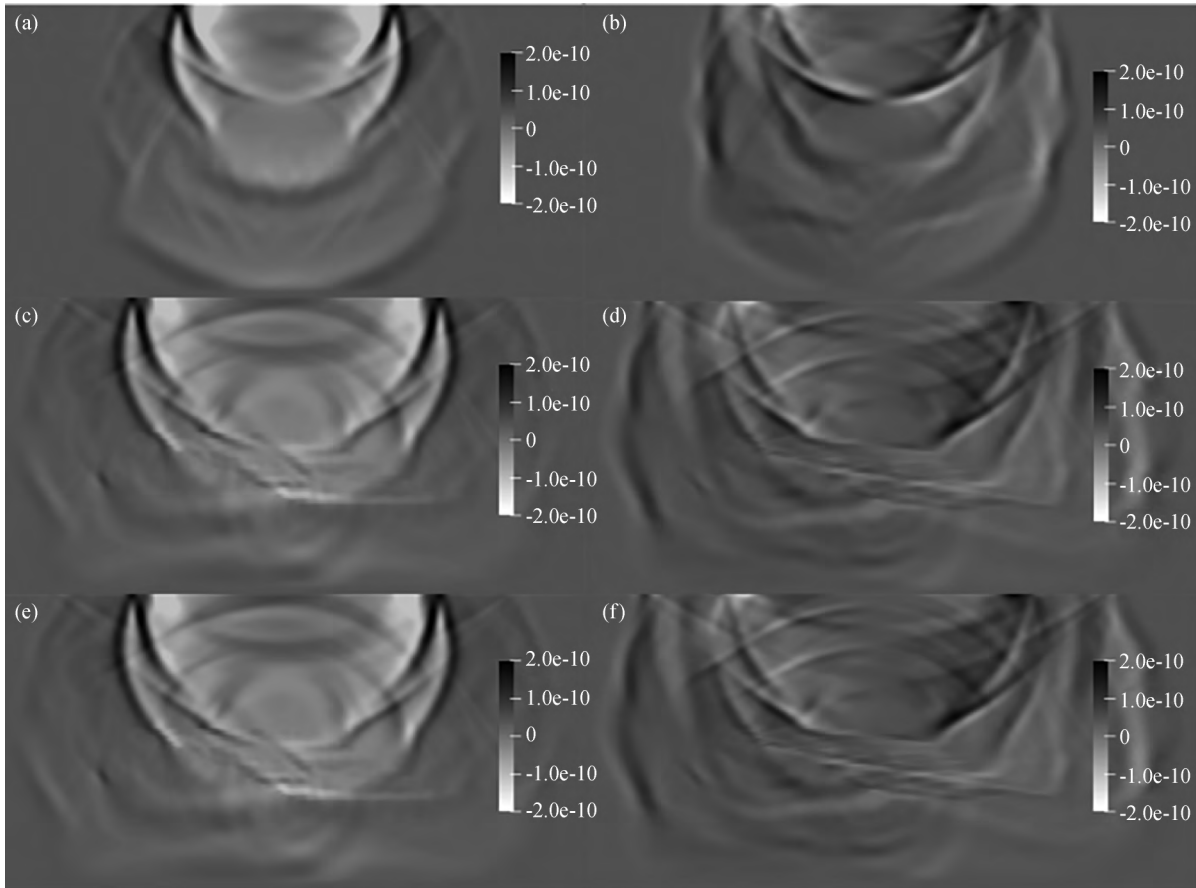


图5 由上到下分别是谱元法、DGM 有限元和 HGM 有限元波场模拟快照,其中左边是垂直分量,右边为水平分量(据 Vamaraju *et al.*, 2020)

Fig. 5 Snapshots from top to bottom denote wave field of SEM, DGM-FEM, HGM-FEM, vertical component (left-hand panel) and horizontal component (right-hand panel) (modified from Vamaraju *et al.*, 2020)

应一个有限元,在划分有限元时需要耗费大量计算节点进行额外的逻辑运算,所以 FEM 不适用于大规模的全球正演计算,一般仅用于小区域下的波场模拟(图 5)。

2.2.3 边界元法(Boundary Elements Methods, BEM)

BEM 也叫边界积分法,该方法将散射波场用地表的一个半解析积分表达,其中积分项中的格林函数一般在频率波数域中计算(Banerjee and Butterfield, 1981)。BEM 的理论基础是边界积分方程理论,作为一种计算方法,它是继有限元数值解法之后发展起来的一种新型数值计算方法(符力耘和牟永光, 1994)。该方法只需在区域边界上划分单元,计算精度高,适用于无限域问题,不必在无穷远边界划分单元,可快速模拟 3D 地震波场(Bouchon *et al.*, 2007)。BEM 具有不涉及体积离散、只需边界离散、精确描述不规则界面、自动满足无界域远场辐射条件等优点(侯爵等, 2014)。但同时也不适用于地表速度变化较大情况的缺点(何彦锋等, 2013)。

2.2.4 谱元法(Spectral Element Method, SEM)

SEM(Komatitsch *et al.*, 2002)在理论上与 FEM 相同,只是选取的积分节点和求积公式不同,被称为高阶的有限元法,既适用于 2D 或 3D 模型正演计算,又适用于局部、区域和全球尺度,因此是适用性很好的一种理论地震图正演方

法。与 FEM 一样,SEM 首先需将模型分为许多不重叠的单元,但 SEM 通常采用六面体划分方式,也有四面体的网格,但是其阶数仅到 4 阶。网格单元的划分可采用解析映射,全球尺度的网格模型将球体映射为立方体,称为立方球(图 6)。对于六面体单元,一般采用低阶拉格朗日多项式映射网格单元并建立形函数。剖分好网格模型后,确定基函数以表达未知位移场 s 或者测试向量 w 。在 FEM 中,几何性质和矢量场均采用低阶多项式的形函数。与 FEM 最大的不同之处在于,在 SEM 中有限元的几何性质由低阶拉格朗日多项式定义,但位移场和测试向量由高阶拉格朗日多项式来定义,并且插值节点为 Gauss-Lobatto 积分节点。由于插值节点与积分节点重合,可以获得对角的质量矩阵,避免了有限元法在每个时间步长求解线性代数方程组,从而可以显式递推,显著提高计算效率。经典的六面体 SEM 一般采用 4~10 阶拉格朗日多项式作为内插函数。

SEM 在处理流体与固体边界时采用区域分解的方式,于是可以在内核、地幔、地壳以弹性波动方程求解,而在流体性质的外核采用声波方程求解。在流体-固体边界,例如 ICB 和 CMB,利用位移的切向和垂向分量连续性条件,可以实现固-液耦合的地震波传播问题。SEM 广泛用于常规的理论地震波

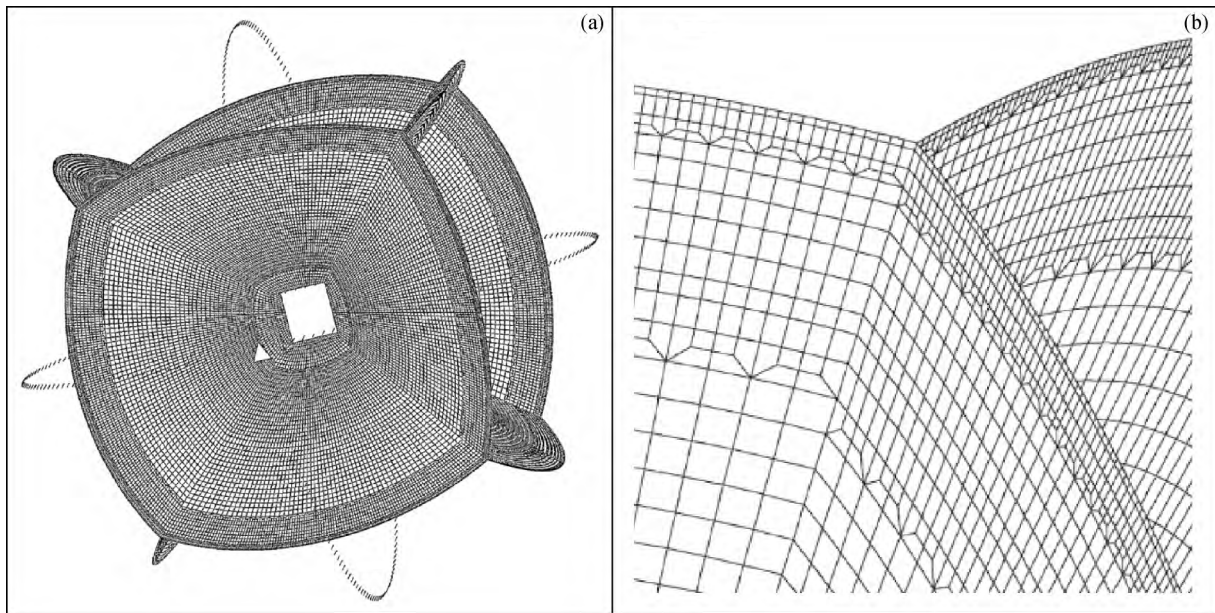


图6 地幔谱元法网格示意图(据 Komatitsch and Tromp, 2002)

(a) 立方球模型; (b) 上地幔耦合处网格连接细节.

Fig. 6 Example of spectral element mesh in the mantle (modified from Komatitsch and Tromp, 2002)

(a) The model of cubed sphere; (b) Close-up of the mesh doublings in the upper mantle.

场模拟,并且能获得震相全面、频带较宽的理论地震图(图7).

3 混合类方法

混合类方法是通过在解析类之间、数值类之间、解析类与数值类之间,根据不同的研究需求选用不同方法组合而成.混合类方法一般兼具不同方法的优点,具有取长补短、灵活多样的特点.因此混合类方法一直以来得到了很多探索和发展,并在一些领域取得良好效果.

3.1 解析类之间的混合

由于解析类方法发展较早,因此解析类之间的混合方法的提出也较早.下面我们以广义反射系数法与离散波数法的混合方法(Yao and Harkrider, 1983)为例简要介绍解析类之间的混合方法.

在地震震源过程反演中,近场地震断层不能作为点源处理,而需划分为很多个断层元,为了能快速的同时给出每个断层元的理论地震图,发展了将广义反透系数法与离散波数法相结合的方法(姚振兴和郑天愉, 1984).该方法采用广义反透射系数矩阵(Kennett and Kerry, 1979)来计算波数积分中的被积函数.同时,该方法结合利用离散波数方法(Bouchon, 1981)计算波数积分,并使用了复数频率.在实际问题中,六级以上大地震的震源面积通常为数百至上千平方公里,而研究非均匀断层扩展过程及其辐射波形的高频特性时,则需要对断层面作更细的划分,这均要求计算大量的点源格林函数.该方法充分整合了广义反透射系数矩阵法和离散波数法的优势,相比于整合前的两种方法极大地提高了计算效率.同时,该方法在处理同一介质层内的不同深度处的点源时,可以进行更为简便的处理.

3.2 解析类与数值类混合

3.2.1 常规解析类与数值类混合法

在强地面运动学、工程地震学的研究中研究场地响应问题时,常遇到均匀上地壳之上覆盖一层很小的非均匀薄层这一情况.为了体现局部场地的影响,一般要细分时间和空间步长,为了降低计算量前人提出了广义射线和有限差分混合法(温联星和姚振兴, 1994).之后,广义射线和有限差分混合法被用于各向异性介质下的波形模拟,并与SKS各向异性分析结果相结合,展示出该混合方法对水平变化的各向异性介质具有较高的敏感性(Zhao *et al.*, 2008; 图8).

在横向不均匀介质中,例如在俯冲板片的洋壳与沉积层间,其产生的地震会对远震体波记录造成很大影响.为了克服这种近源结构的影响,前人提出一种FK与有限差分混合法(Okamoto, 1993, 1994)计算理论地震图.该方法利用3D方法模拟,但设定的分层模型为2D,比较适用于这种横向变化剧烈的介质模型.

除以上两种解析类与数值类的混合法外还有很多其他类似的混合法,例如:广义射线与谱元法混合(Meng *et al.*, 2012; Zhan *et al.*, 2012).

3.2.2 简正振型求和法(Normal-Mode Summation Method, NMSM)

基于地球简正振型求和表达位错点源的位移场的方法称为NMSM(Yang *et al.*, 2010).NMSM是在横向均匀介质条件下的一种半解析半数值方法.其理论是将波动方程分解为两部分:第一部分为水平偏微分方程,其解析解为水平分层模型或球对称模型下的矢量表面谐波(Vector Surface Harmonics);第二部分为垂直向常微分方程,通过简正振型叠加法进行数值求解.简正振型与一系列单频周期性运动模

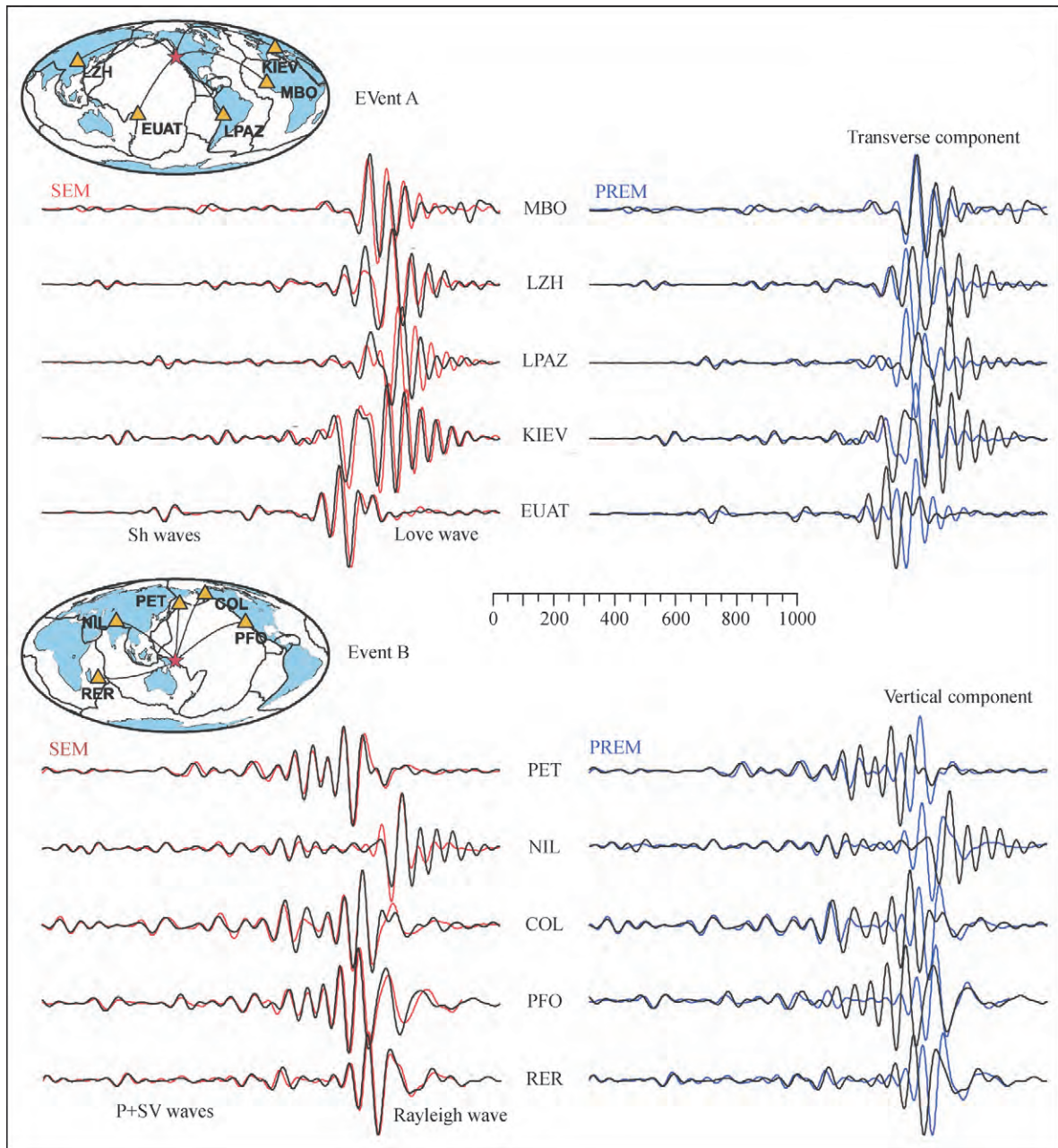


图7 3D SEM 和 1D PREM 合成理论地震图与观测数据比较(黑线)实例(据 Komatitsch *et al.*, 2002)

Fig.7 Comparison of 3D SEM and 1D PREM synthetic seismograms with recording seismograms (black) (modified from Komatitsch *et al.*, 2002)

式有关,因此简正振型通常可参照自由振荡处理.空间下的振荡模式及其频率称为特征函数和特征向量,二者均有物理含义.因此在数学上,特征函数是均匀介质波动方程的基本解,即地震波的位移可由一组线性简正振型特征函数叠加进行表达.对于球状地球模型,球状振型可表达 P-SV 波,环状振型可表达 SH 波.对于 1D 水平地球模型, NMSM 可实现计算精度和计算效率的有效折中.

3.3 数值类之间的混合

现在随着地下结构反演获得的速度模型越来越精细化,很多重点区域的精细 3D 速度模型已经建立起来.在诸如地

震破裂过程远震数据和近场强地动数据联合反演的实际应用中,我们既需要计算远场格林函数,又需要精确计算近场格林函数.因此利用 SEM 采用区域精细 3D 速度模型计算近场精细格林函数,同时利用 DSM 采用远场 1D 速度模型计算远场精确格林函数的数值混合方法得到发展和应用(Wu *et al.*, 2018).按照当前计算机的计算能力,已可满足数值类混合方法快速计算的需求,并且获得的理论地震图具有很高精度,在实际应用中具有很好的效果(图 9).但是,该方法也具有一定的局限性,如传播路径上存在不可忽视的异常体时,这些异常必然会引入到精细 3D 模型的区域理论地震图中

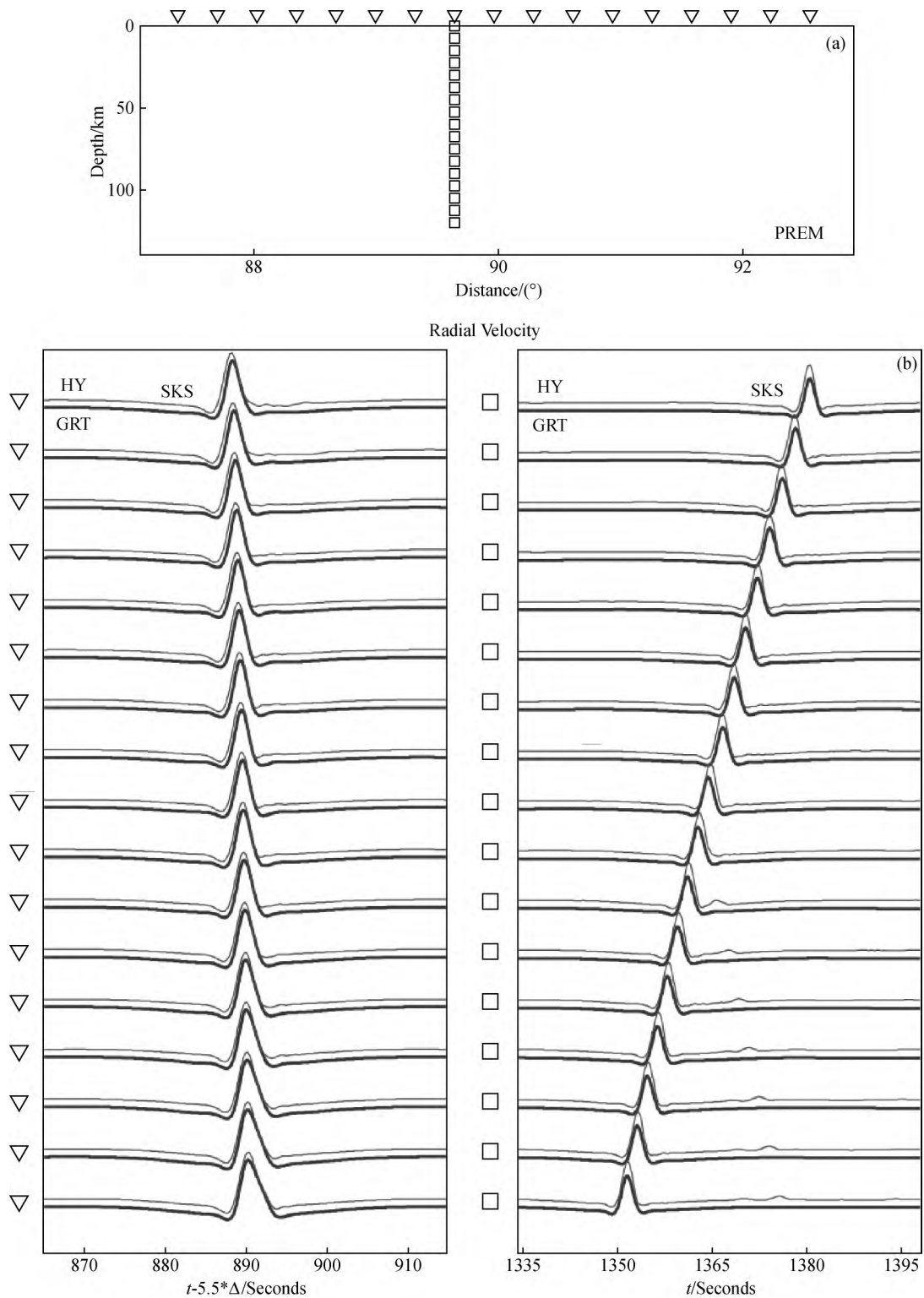


图8 (a) 采用的 PREM 模型和台站(三角形和正方形);(b) 水平速度波形对比, 粗线为广义射线模拟结果 细线为混合法模拟结果 震源深度 131 km

Fig. 8 (a) PREM used for the calculations in which the Earth flattening approximation is applied; the triangles and squares mark the receivers; (b) Comparison of horizontal velocities obtained by the generalized ray theory (heavy traces) and the hybrid method (light traces) with a source depth of 131 km

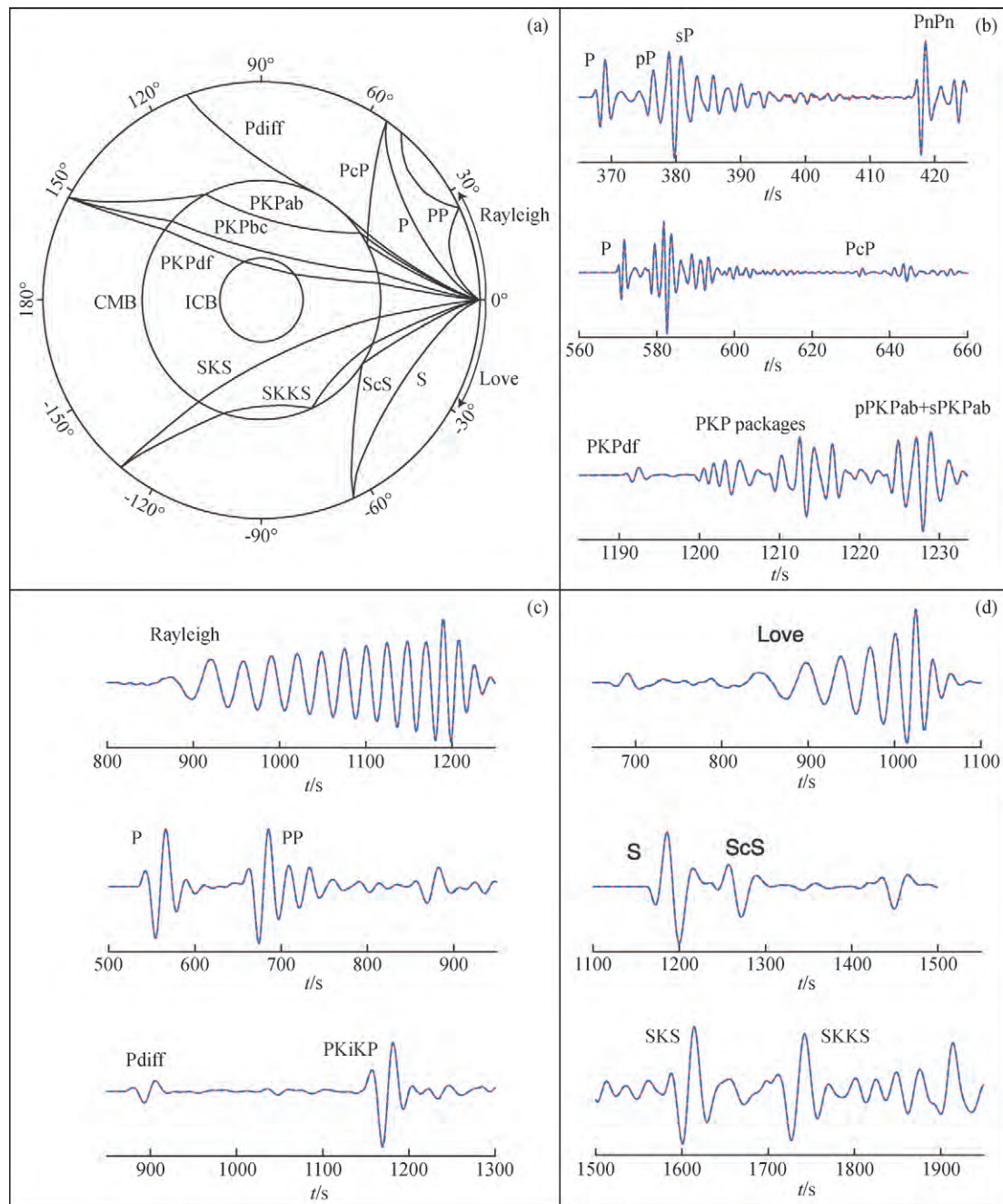


图9 DSM(蓝色)与DSM+SEM(红色)合成理论地震图比较(据Wu et al., 2018)

(a) 射线路径示意图; (b) 不同时间窗内的理论地震图对比; (c) Rayleigh波计算结果对比; (d) Love波计算结果对比.

Fig. 9 The comparison of DSM (blue) with DSM + SEM (red) synthetic seismograms(modified from Wu et al., 2018)

(a) Global ray path; (b) Comparison of DSM and DSM + SEM results of different time windows;

(c) and (d) Results comparison of Rayleigh and Love wave.

(桑莹泉等 2021).

4 总结与讨论

通过对理论地震图正演计算方法的系统总结,本文获得以下几点认识:

(1) 解析类方法发展较早、较成熟,与其他解析类方法相比,波数积分方法在使用上不区分局部或全球尺度、计算

精确且为全波形模拟,因此适用性更为广泛.

(2) 在数值类方法中,CMM、DSM、SEM适用于全球尺度的3D模型理论地震图正演计算,CMM和DSM在处理边界问题时存在大型矩阵向量计算,在适用性和计算效率上SEM是一种最受欢迎且最精确的数值正演计算方法,并能适用于强烈非均匀介质.

(3) 根据不同的需求采用不同方法相结合的混合计算

方法是较好的选择. 采用混合方式不但可以提高计算效率, 而且可以根据不同的应用需求灵活选择不同方法加以组合. 但是一般而言混合类方法往往是理论和计算的折中, 我们不能忽略混合这一方式可能带来的某些缺陷.

致谢 感谢审稿专家提出的修改意见和编辑部的大力支持!

References

- Alterman Z, Karal J F C. 1968. Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods [J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 58(1): 367-398.
- Banerjee P K, Butterfield R. 1981. *Boundary element methods in engineering science* [M]. London: McGraw-Hill.
- Bouchon M. 1981. A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media [J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 71(4): 959-971.
- Bouchon M, Sánchez-Sesma F J. 2007. Boundary integral equations and boundary elements methods in elastodynamics [J]. *Advances in geophysics*, 48: 157-189.
- Chai L H, Tong P, Yang X. 2017. Frozen Gaussian approximation for 3-D seismic wave propagation [J]. *Geophysical Journal International*, 208(1): 59-74.
- Chapman C H. 1974. Generalized ray theory for an inhomogeneous medium [J]. *Geophysical Journal International*, 36(3): 673-704.
- Chapman C H. 1976. Exact and approximate generalized ray theory in vertically inhomogeneous media [J]. *Geophysical Journal International*, 46(2): 201-233.
- Chapman C H, Drummond R. 1982. Body-wave seismograms in inhomogeneous media using Maslov asymptotic theory [J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 72(6B): S277-S317.
- Červený V. 1983. Synthetic body wave seismograms for laterally varying layered structures by the Gaussian beam method [J]. *Geophysical Journal International*, 73(2): 389-426.
- Dahlen F A, Tromp J. 1998. *Theoretical Global Seismology* [M]. Princeton: Princeton University Press.
- Drijkoningen G G. 1991. Generalized ray theory for an Epstein profile [J]. *Geophysical Journal International*, 104(3): 469-477.
- Fomel S, Ying L, Song X. 2013. Seismic wave extrapolation using lowrank symbol approximation [J]. *Geophysical Prospecting*, 61(3): 526-536.
- Frazer L N, Sen M K. 1985. Kirchhoff-Helmholtz reflection seismograms in a laterally inhomogeneous multi-layered elastic medium—I. Theory [J]. *Geophysical Journal International*, 80(1): 121-147.
- Fu L Y, Mou Y G. 1994. Boundary element methods for elastic wave forward modeling [J]. *Chinese Journal of Geophysics (in Chinese)*, 37(4): 521-529.
- Fuchs K, Müller G. 1971. Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations [J]. *Geophysical Journal International*, 23(4): 417-433.
- Furumura M, Kennett B L N, Furumura T. 1999. Seismic wavefield calculation for laterally heterogeneous earth models—II. The influence of upper mantle heterogeneity [J]. *Geophysical Journal International*, 139(3): 623-644.
- Furumura T, Kennett B L N, Furumura M. 1998. Seismic wavefield calculation for laterally heterogeneous whole earth models using the pseudospectral method [J]. *Geophysical Journal International*, 135(3): 845-860.
- Geller R J, Ohminato T. 1994. Computation of synthetic seismograms and their partial derivatives for heterogeneous media with arbitrary natural boundary conditions using the Direct Solution Method [J]. *Geophysical Journal International*, 116(2): 421-446.
- Gilbert F, Helmberger D V. 1972. Generalized ray theory for a layered sphere [J]. *Geophysical Journal International*, 27(1): 57-80.
- Hara T, Tsuboi S, Geller R J. 1993. Inversion for laterally heterogeneous upper mantle S-wave velocity structure using iterative waveform inversion [J]. *Geophysical Journal International*, 115(3): 667-698.
- Haskell N A. 1953. The dispersion of surface waves on multilayered media [J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 43(1): 17-34.
- Haskell N A. 1964. Radiation pattern of surface waves from point sources in a multi-layered medium [J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 54(1): 377-393.
- He Y F, Sun W J, Fu L Y. 2013. Comparison of boundary element method and finite-difference method for simulating seismic wave propagation in complex media [J]. *Progress in geophysics (in Chinese)*, 28(2): 664-678, doi: 10.6038/pg20130215.
- Helmberger D V. 1968. The crust-mantle transition in the Bering Sea [J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 58(1): 179-214.
- Helmberger D V. 1974. Generalized ray theory for shear dislocations [J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 64(1): 45-64.
- Herrmann R B. 1979. SH-wave generation by dislocation sources—a numerical study [J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 69(1): 1-15.
- Hou J, Zhang Z J, Lan H Q, et al. 2014. Progress in numerical simulation of seismic wave propagation under an undulating surface [J]. *Progress in geophysics (in Chinese)*, 29(2): 0488-0497, doi: 10.6038/pg20140203.
- Hughes T J R. 1987. *The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall International.
- Igel H. 1999. Wave propagation in three-dimensional spherical sections by the Chebyshev spectral method [J]. *Geophysical Journal International*, 136(3): 559-566.
- Kennett B L N, Kerry N J. 1979. Seismic waves in a stratified half space [J]. *Geophysical Journal International*, 57(3): 557-583.
- Kind R. 1985. The reflectivity method for different source and receiver structures and comparison with GRF data [J]. *Journal of Geophysics*, 58(1): 146-152.
- Komatitsch D, Ritsema J, Tromp J. 2002. The spectral-element method, Beowulf computing, and global seismology [J]. *Science*, 298(5599): 1737-1742.
- Komatitsch D, Tromp J. 2002. Spectral-element simulations of global seismic wave propagation—I. Validation [J]. *Geophysical Journal International*, 149(2): 390-412.
- Li H G, Wu Q J. 2008. Synthetic reflection seismograms in a laterally inhomogeneous medium by Kirchhoff-Helmholtz integral [J]. *Progress in Geophysics (in Chinese)*, 23(4): 1131-1137.
- Li X, Chen Y T. 1996. The generalized reflection-transmission coefficient matrix method for synthetic seismograms [J]. *Seismological and Geomagnetic Observation and Research (in Chinese)*, 3(17): 1-20.
- Liu P C, Yao Z X. 1994. A generalized reflection-transmission coefficient matrix for the solution of line source [J]. *Chinese Journal of Geophysics (in Chinese)*, 37(S2): 362-371.
- Liu Q Y, Fan H J. 1992. The ray-matrix method of synthetic seismograms for different source and receiver structures [J]. *Chinese Journal of Geophysics (in Chinese)*, 35(2): 193-203.
- Meng L, Ampuero J P, Luo Y, et al. 2012. Mitigating artifacts in back-projection source imaging with implications for frequency dependent properties of the Tohoku-Oki earthquake [J]. *Earth Planets Space*, 64(12): 1101-1109.
- Monteiller V, Chevrot S, Komatitsch D, et al. 2013. A hybrid method to compute short-period synthetic seismograms of teleseismic body waves in a 3-D regional model [J]. *Geophysical Journal International*, 192(1): 230-247.
- Okamoto T. 1993. Effects of sedimentary structure and bathymetry near the source on teleseismic P waveforms from shallow subduction zone earthquakes [J]. *Geophysical Journal International*, 112(3): 471-480.

- Okamoto T. 1994. Teleseismic synthetics obtained from 3-D calculations in 2-D media [J]. *Geophysical Journal International*, 118(3): 613-622.
- Sang Y Q, Liu Y S, Xu T, *et al.* 2021. Forward modeling method and application of teleseismic wavefield. *Reviews of Geophysics and Planetary Physics*, 52(6): 569-586, doi: 10.16738/j.dqyxx.2021-011.
- Thomas C, Igel H, Weber M, *et al.* 2000. Acoustic simulation of P-wave propagation in a heterogeneous spherical Earth: Numerical method and application to precursor waves to PKPdf [J]. *Geophysical Journal International*, 141(2): 307-320.
- Thomson W T. 1950. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium [J]. *Journal of applied Physics*, 21(2): 89-93.
- Vamaraju J, Sen M K, Basabe J D, *et al.* 2020. A hybrid Galerkin finite element method for seismic wave propagation in fractured media [J]. *Geophysical Journal International*, 221(2): 857-878.
- Verweij M D, De Hoop A T. 1990. Determination of seismic wavefields in arbitrarily continuously layered media using the modified Cagniard method [J]. *Geophysical Journal International*, 103(3): 731-754.
- Wang C Y. 1982. The reflectivity method of synthetic seismogram calculation for layered inhomogeneous media [J]. *Chinese Journal of Geophysics (in Chinese)*, 25(05): 424-433.
- Wang C Y, Herrmann R B. 1980. A numerical study of P-, SV-, and SH-wave generation in a plane layered medium [J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 70(4): 1015-1036.
- Wang R. 1999. A simple orthonormalization method for stable and efficient computation of Green's functions [J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 89(3): 733-741.
- Wen L X, Yao Z X. 1994. Theory and application of hybrid method seismograms [J]. *Chinese Journal of Geophysics (in Chinese)*, 37(2): 211-219.
- Wu W, Ni S, Zhan Z, *et al.* 2018. An SEM-DSM three-dimensional hybrid method for modelling teleseismic waves with complicated source-side structures [J]. *Geophysical Journal International*, 215(1): 133-154.
- Yang H Y, Zhao L, Hung S H. 2010. Synthetic seismograms by normal-mode summation: a new derivation and numerical examples [J]. *Geophysical Journal International*, 183(3): 1613-1632.
- Yao Z X, Harkrider D G. 1983. A generalized reflection-transmission coefficient matrix and discrete wavenumber method for synthetic seismograms [J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 73(6A): 1685-1699.
- Yao Z X, Zheng T Y. 1984. A generalized reflection-transmission coefficient matrix and discrete wavenumber method for synthetic seismograms (II) for multiple sources at different depths [J]. *Chinese Journal of Geophysics (in Chinese)*, 27(4): 338-348.
- Zhan Z, Helmberger D, Simons M, *et al.* 2012. Anomalous steep dips of earthquakes in the 2011 Tohoku-Oki source region and possible explanations [J]. *Earth planet. Sci. Lett.*, 353-354: 121-133.
- Zhao L, Wen L, Chen L, *et al.* 2008. A two-dimensional hybrid method for modeling seismic wave propagation in anisotropic media [J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 113(B12).
- Zhu L, Rivera L A. 2002. A note on the dynamic and static displacements from a point source in multilayered media [J]. *Geophysical Journal International*, 148(3): 619-627.

附中文参考文献

- 符力耘, 牟永光. 1994. 弹性波边界元法正演模拟 [J]. *地球物理学报*, 37(4): 521-529.
- 何彦锋, 孙伟家, 符力耘. 2013. 复杂介质地震波传播模拟中边界元法与有限差分法的比较研究 [J]. *地球物理学进展*, 28(2): 664-678, doi: 10.6038/pg20130215.
- 侯爵, 张忠杰, 兰海强, 等. 2014. 起伏地表下地震波传播数值模拟方法研究进展 [J]. *地球物理学进展*, 29(2): 488-497, doi: 10.6038/pg20140203.
- 李红光, 吴庆举. 2008. 横向不均匀介质中 Kirchhoff-Helmholtz 积分合成地震图 [J]. *地球物理学进展*, 23(4): 1131-1137.
- 李旭, 陈运泰. 1996. 合成地震图的广义反射透射系数矩阵法 [J]. *地震地磁观测与研究*, 3(17): 1-20.
- 刘鹏程, 姚振兴. 1994. 计算线源响应的广义反射透射系数矩阵方法 [J]. *地球物理学报*, 37(S2): 362-371.
- 刘启元, 范会吉. 1992. 震源区和接收区结构不同情况下体波合成地震图的矩阵-射线方法 [J]. *地球物理学报*, 35(2): 193-203.
- 桑莹泉, 刘有山, 徐涛, 等. 2021. 远震波场正演模拟方法及应用 [J]. *地球与行星物理评论*, 52(6): 569-586, doi: 10.16738/j.dqyxx.2021-011.
- 王椿镛. 1982. 层状不均匀介质中合成地震图的反射率法 [J]. *地球物理学报*, 25(05): 424-433.
- 温联星, 姚振兴. 1994. 用广义射线和有限差分计算近场理论地震图的混合方法 [J]. *地球物理学报*, 37(2): 211-219.
- 姚振兴, 郑天愉. 1984. 计算综合地震图的广义反射, 透射系数矩阵和离散波数方法 (二) —— 对不同深度点源的算法 [J]. *地球物理学报*, 27(4): 338-348.