LOGIKA

Hatodik téma – az analitikus fa

Harmadik lecke – következtetések érvényességének bizonyítása

Egy egyszerű esettel kezdünk. Az érvényes következtetési sémák között első helyen a *modus ponens* nevű alakzat szerepelt. Az állítás tehát ez:

$p \supset q, p \vdash q$

Azt kell megmutatnunk, hogy nem lehetséges olyan helyzet, amelyben a premisszák igazak, a konklúzió viszont hamis. Ez úgy is kifejezhető, hogy a premisszákból és a konklúzió tagadásából képzett formulahalmaz inkonzisztens. Ez utóbbi lehetőséget az analitikus fa segítségével teljes bizonsággal ellenőrizhetjük.

Első lépésben úgy tekintjük, hogy egy következtetés voltaképpen állítások (a premisszák és a konklúzió) együttes igazságának kinyilvánítása, azaz állítások konjunkciója. Ezért egy fában a következtetést alkotó propozíciók egymás alatt, törzsként jelenhetnek meg. Mi azonban arra vagyunk kíváncsiak, hogy a konklúzió tagadása összefér-e a premisszák igazságával. Valójában <u>ellenpéldát keresünk a következtetés érvényességére</u>. Ezért azzal kezdjük az elemzést, hogy egy törzsben egymás alatt elhelyezzük a premisszákat és a konklúzió negációját:

$$p \supset q$$

$$p$$

$$\sim q$$

(Itt és a továbbiakban eltekintünk a törzsvonalak megrajzolásától. Ezt a gyakorlatot a puszta kényelmesség honosította meg, de miért ne lennénk kényelmesek? A függőlegesen egymás alá helyezett kifejezések egy törzset, azaz egyazon utat alkotnak – ez törzsvonalak nélkül is jól kivehető).

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Nagyon fontos: soha ne felejtsük el, hogy a törzsben a premisszákat és a konklúzió ***negációját*** kell elhelyezni! Ha nem negáljuk a konklúziót az analízis teljesen fals eredményhez vezet.

Látjuk, hogy a törzsben két egyszerű és egy összetett formula szerepel (hiszen egy egyedi negált mondatbetű egyszerű formulának számít). Így egyetlen kifejezést, a $p \supset q$-t kell elemeire bontanunk. Megtesszük:

$p \supset q$

p

$\sim q$

$\sim p$ $\qquad\qquad$ q

Nincs több felbontandó kifejezés, a fa teljes. Most a fa bejárása következik: egyenként végighaladunk az összes úton, hogy megnézzük, találkozunk-e ellentmondásos kifejezésekkel. Jelen esetben összesen két út van, az egyik a legfelső, $p \supset q$ formulától a bal alsó $\sim p$ formuláig, a másik szintén a legfelső $p \supset q$-tól a jobb alsó q-ig vezet. Először nézzük a bal oldali utat. Ahogy haladunk lefelé, találunk egy p-t, majd az elágazás után lent egy $\sim p$-t. Ellentmondás. Ezért lezárjuk ezt az utat: ennek jelölésére az × jelet használjuk, amelyet az ellentmondást tartalmazó út alá illesztünk:

$p \supset q$

p

$\sim q$

$\sim p$ $\qquad\qquad$ q

×

Mostantól az × jelet mindig a lezárt út jelzésére használjuk.

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Most végighaladunk a másik úton is. A törzsben $p \supset q$-t, p-t és $\sim q$-t látunk, az elágazás után jobbra lent pedig q-t: $\sim q$ és q ellentmondásban áll, tehát ezt az utat is lezárjuk:

$p \supset q$

p

$\sim q$

$\sim p$ $\qquad\qquad$ q

$\times$ $\qquad\qquad$ $\times$

A fában az összes út lezárt. Ez azt jelenti, hogy a $\{p \supset q, p, \sim q\}$ formulahalmaz inkonzisztens, tehát a premisszákkal nem fér össze a konklúzió tagadása, más szóval, a premisszáknak a konklúzió logikai következménye. Bebizonyítottuk tehát, hogy a következtetés érvényes.

Lássunk most egy olyan esetet, ahol valamivel több döntést kell hozni. Vegyük a láncszabály egyik instanciáját, vagyis a következő állítást:

$p \supset q, q \supset r, r \supset s \vdash p \supset s$

Először is elhelyezzük a törzsben a premisszákat és a konklúzió negációját. Ennek a műveletnek rutinszerűnek kell majd lennie.

$p \supset q$

$q \supset r$

$r \supset s$

$\sim(p \supset s)$

Ezúttal nincs egyszerű formulánk, tehát mindegyik elemzésre szorul. Elvileg mindegy, hogy az analízist milyen sorrendben végezzük (a végeredmény mindenképpen ugyanaz lesz), de érdemes olyan formulával kezdeni, amely nem hoz létre elágazást – ezzel is munkát takarítunk meg, hiszen elágazás után a létrejött utak mindegyikén el kell végeznünk a további bontásokat. Jelen

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

esetben az egyetlen olyan formula, amelyet elágazás nélkül lehet analizálni, az utolsó, vagyis a negált konklúzió.

Mivel tudjuk, hogy egy negált kondicionális ekvivalens az előtag állításával és az utótag tagadásával, az elemzést így folytatjuk:

$$p \supset q$$

$$q \supset r$$

$$r \supset s$$

$$\sim(p \supset s)$$

$$p$$

$$\sim s$$

Van tehát két tovább már nem elemezhető formulánk. A fennmaradó három összetett propozíció logikai formája azonos (mindhárom kondicionális), ezért az elemzési sorrendet megint csak kényelmi szempontok irányítják. Célszerű olyan formulát választani, amelyről látjuk, hogy felbontása után ellentmondáshoz jutunk valahol, mert azt az ágat lezárhatjuk. Mindjárt kiderül, miről van szó. Folytassuk, mondjuk, az $r \supset s$ elemzésével. A kondicionális igaz, ha előtagja hamis, vagy ha utótagja igaz:

$$p \supset q$$

$$q \supset r$$

$$r \supset s$$

$$\sim(p \supset s)$$

$$p$$

$$\sim s$$

$$\sim r \qquad\qquad s$$

Amikor továbblépünk, és nekilátunk a maradék összetett formulák felbontásának (kezdve például a $q \supset r$-rel), az analízist az elágazással megnyitott mindkét úton el kellene végeznünk:

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

$p \supset q$

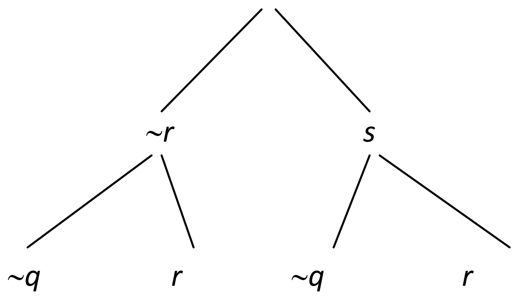
$q \supset r$

$r \supset s$

$\sim(p \supset s)$

p

$\sim s$



Azonban egyszerűsíthetjük a dolgunkat. Még mielőtt a $q \supset r$ analízisébe belekezdtünk volna, észrevehettük, hogy a fa jobb oldali ága (amely akkor az s mondatbetűvel végződött) ellentmondás tartalmaz, hiszen korábban a törzsben már megjelent egy $\sim s$. Ezért ezt az ágat lezárhatjuk (ahol egyszer ellentmondás van, az olyan út már soha nem lesz ellentmondásmentes), és elegendő, ha az elemzést a másik, még nyitott ágon folytatjuk:

$p \supset q$

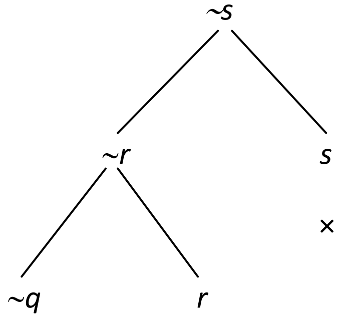
$q \supset r$

$r \supset s$

$\sim(p \supset s)$

p

$\sim s$



Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

A létrejött új elágazás jobb oldali ága megint csak ellentmondást tartalmaz (r és $\sim r$ is feltűnik rajta), így lezárjuk azt is, és az utolsónak megmaradt összetett formula (a $p \supset q$) elemzését csak a nyitott bal oldali ágon végezzük el:

$p \supset q$

$q \supset r$

$r \supset s$

$\sim(p \supset s)$

p

$\sim s$

$\sim r$ $\qquad$ s

$\qquad\qquad$ ×

$\sim q$ $\qquad$ r

$\qquad\qquad$ ×

$\sim p$ $\qquad$ q

Nincs már felbontandó kifejezés; végighaladunk a nyitottan maradt utakon. Emlékezzünk: egy út a legfelső formulától az azonos ágon belüli legalsó formuláig tart! A bal oldali úton, amely $\sim p$-ben végződik, a törzsben már találkoztunk egy p-vel, a másik, q-val végződő út utolsó elágazása pedig egy $\sim q$-nál jött létre. Tehát mindkét fennmaradó út tartalmaz ellentmondást, azaz egyik sem marad nyitott:

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

$p \supset q$

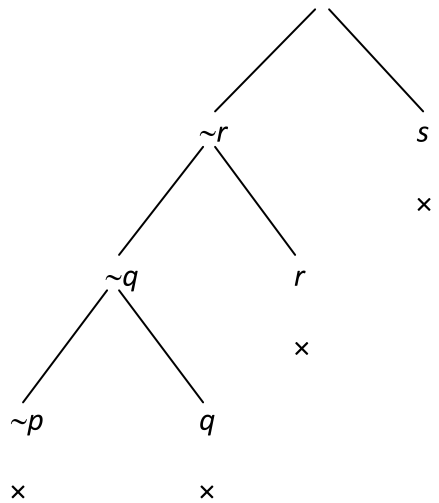
$q \supset r$

$r \supset s$

$\sim(p \supset s)$

p

$\sim s$



A premisszák igazsága nem konzisztens a konklúzió hamisságával; a következtetés érvényes.

Még egy példát megvizsgálunk, ám most már nem megyünk végig lépésről lépésre az analitikus fa konstrukciójában, csak az elemzés eredményét mutatjuk meg. Annak rekonstrukciója, hogy miért éppen ilyen alakú lett a fa, jó alkalom az eddig tanultak begyakorlására.

Az ellenőrzendő állítás legyen ez:

$(p \vee q) \supset r$, $\sim(q \,\&\, r) \vdash \sim p$

Analitikus fával elemezve:

$(p \vee q) \supset r$

$\sim(q \,\&\, r)$

$\sim\sim p$

p

$\sim(p \vee q)$	r	
$\sim q$		
$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$
×	|	×

Az a cikkcakkos út, amely a legfelső $(p \vee q) \supset r$-től a legalsó sor $\sim q$-jáig vezet, nyitott marad, hiszen ha végighaladunk rajta, sehol nem ütközünk ellentmondásba. Ennek a grafikus jele az út végén feltűnő függőleges vonal. Ez egyben azt is megmutatja, hogy a vizsgált következtetés *érvénytelen*, hiszen konzisztensen elgondolható olyan lehetőség, amelyben a premisszák igazak, de a konklúzió hamis.

Az analitikus fa arra is módot ad, hogy konkretizáljuk az érvénytelenség diagnózisát, vagyis hogy ellenpéldát mondjunk a szóban forgó következtetés érvényességére. Az ellenpélda egyszerűen leolvasható a nyitottan maradt ágról (vagy ágakról). A jelen esetben az egyetlen nyitott ágon a p, az r és a $\sim q$ egyszerű formulák találhatók. Ebből tudjuk, hogy abban az esetben, ha p igaz, r is igaz, de q hamis, a konklúzió tagadása összefér a premisszák állításával.

Még egy megjegyzés: az analitikus fa segítségével mindazt megtehetjük, amire az igazságtáblázat módot adott. A törzsképző és elágazásképző szabályok alkalmasak a konnektívumok jelentésének meghatározására. A fa révén bizonyíthatjuk egy propozícióról, hogy logikai igazság, ellentmondás vagy kontingens állítás-e. Például ha azt szeretnénk kimutatni, hogy egy formula logikai igazságot (tautológiát) reprezentál, akkor kiindulópontként az adott formula negációját vesszük, majd annak rendje és módja szerint elemezzük az így kapott formulát. Amennyiben az összes út lezárt lesz, bizonyítást nyer, hogy a vizsgált propozíció tagadása ellentmondáshoz vezet, vagyis az, hogy a propozíció, pusztán logikai formájának köszönhetően, nem lehet hamis – ez pedig a logikai igazság definíciója. Ha marad nyitott út, a propozíció lehet hamis, tehát nem logikai igazság.

Ha azt kívánjuk megtudni, konzisztens-e egy propozíció, akkor eredeti alakjában (negáció nélkül) vizsgáljuk, ha egy logikai ekvivalenciát ellenőrzünk, akkor (mivel minden ekvivalencia-állítás valójában egy tautológia állítása) a negált állítást. Végül egy propozíció akkor lesz kontingens, ha sem állítása, sem tagadása nem ellentmondásos, azaz így is, úgy is maradnak nyitott utak elemzése során.

(A leckéhez tartozó kérdések és feladatok a következő lecke végén találhatók.)

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu