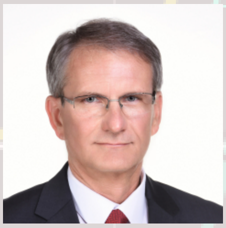
Kalkulus feladatok megoldása

8. Olvasólecke

Egyváltozós függvények deriválása, a derivált alkalmazásai

Az olvasólecke szerzője



Kozma József
PhD, főiskolai docens
SZTE TTIK
Bolyai Intézet, Geometria tanszék

A lecke feldolgozásának időigénye 40 perc.

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával. Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

1. A lecke tartalma

Szükséges ismeretek

- ☐ A differenciálhányados szemléletes fogalma. Pillanatnyi sebesség, pálya érintője, folyamatok változási sebessége. Egyéb szemléletes példák
- ☐ A derivált definíciója, derivált függvény
- ☐ Függvény érintő egyenese. A differenciálhatóság és a féloldali differenciálhatóság, szemléltetés a féloldali érintőkkel.
- ☐ Elemi függvények deriváltjai, műveleti szabályok, láncszabály.
- ☐ Függvény és inverzének deriváltja, szemléltetés a megfelelő pontbeli érintők szimmetriájával (meredekségével).

Jó tanácsok az Olvasónak

- Itt olvashatja el a lecke feldolgozása előtt a szerző tanácsait.
- Ennek a leckének a feldolgozásához már szükséges tudni a 7. olvasóleckében feldolgozott anyagot. Ezért érdemes azon végig menni mielőtt az olvasó nekilát ennek a leckének.

A gyakorlati OL fókusza

- Függvények differenciálhányadosa adott pontban, függvény grafikonjának érintője.
- Féloldali differenciálhányados egy adott pontban, féloldali érintő.
- Elemi függvények deriválási szabályainak alkalmazása.

Az OL áttanulmányozásával az olvasó elérheti, hogy

- ✓ meg tudja állapítani differenciálhányados létezését egy adott pontban;
- ✓ meg tudja állapítani, hogy egy adott pontjában a függvény grafikonjához húzhatóak-e érintő, illetve félérintők;
- ✓ fel tudja írni függvény grafikonja adott pontbeli érintőjének egyenletét;
- ✓ a deriválási szabályok alkalmazásával megállapítsa különféle függvények deriváltját.

Az OL áttanulmányozásának időigénye

- A feladatok és számítások áttanulmányozásának és az ellenőrző kérdések megválaszolásának ideje: kb. 40 perc.
- A szükséges időbe nem számítottuk bele az előismeretként nélkülözhetetlen megelőző olvasóleckék tartamának rövid átismétlését.
- Természetesen szükséges lehet megszakítani az előre haladást, és az előadás Olvasó-, valamint Videóleckéjébe, hasonlóképpen a Gyakorlatéba is beletekinteni magyarázatért, fogalmak pontos meghatározásáért, iránymutatásért, és ez további egyéni időszükségletet jelent.
- A tudás elmélyítését szolgáló kitűzött gyakorlatok elvégzése szintén további időszükséglettel jár.

2. Kidolgozott mintafeladatok

2.1. Mintafeladat.

A differenciálhányados definíciója alapján állapítsa meg az $f: x \mapsto \dfrac{4x^2 - x}{4}$ függvény $x_0 = 2$ pontbeli differenciálhányadosának értékét!

Megoldás a 4. oldalon

2.2. Mintafeladat.

Határozza meg a következő függvények deriváltját!

$$\text{(a)}\quad f: x \mapsto 4x^3 - 5x^2 + 3, \qquad \text{(b)}\quad f: x \mapsto (x^2+1)e^x.$$

Megoldás a 4. oldalon

2.3. Mintafeladat.

Határozza meg a következő függvény deriváltját!

$$f: x \mapsto \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Megoldás az 5. oldalon

2.4. Mintafeladat.

Határozza meg a következő függvény deriváltját!

$$f: x \mapsto \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}.$$

Megoldás a 6. oldalon

2.5. Mintafeladat.

Határozza meg az $y = x\ln x + 1$ egyenletű görbéhez az egységnyi ordinátájú pontjában húzható érintőjének egyenletét!

Megoldás a 8. oldalon

2.6. Mintafeladat.

Állapítsa meg, hogy az $f : x \mapsto |\sqrt{x} - 1|$ függvény differenciálható-e az $x = 1$ helyen! Vizsgálja meg a pontbeli félérintőket a függvény grafikonjához!

Megoldás a 9. oldalon

2.1. Mintamegoldások

2.1. Mintafeladat megoldása (3. o.)

A differenciálhányados definíciója alapján állapítsa meg az $f : x \mapsto \frac{4x^2 - x}{4}$ függvény $x_0 = 2$ pontbeli differenciálhányadosának értékét!

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

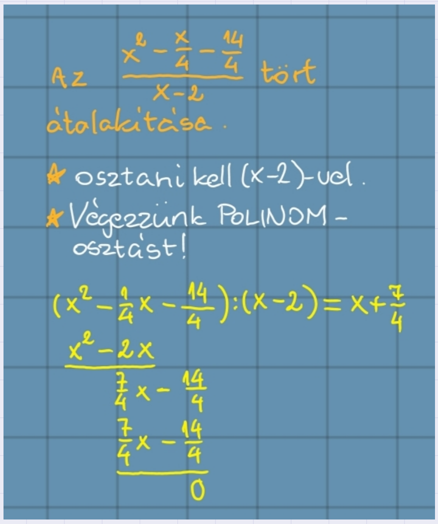
1. Függvény differenciálhányadosa egy pontjában.
2. Függvény határértékének fogalma.

Képezni kell az $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $(x \neq x_0)$, vagyis esetünkben az

$$\frac{\frac{4x^2-x}{4} - \frac{4\cdot 2^2-2}{4}}{x-2} \qquad x \neq 2,$$

úgynevezett differenciahányados határértéket:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - \frac{x}{4} - \frac{14}{4}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(x+\frac{7}{4}\right)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\left(x + \frac{7}{4}\right)$$
$$= 2 + \frac{7}{4} = \frac{11}{4}.$$



2.2. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Határozza meg a következő függvények deriváltját!

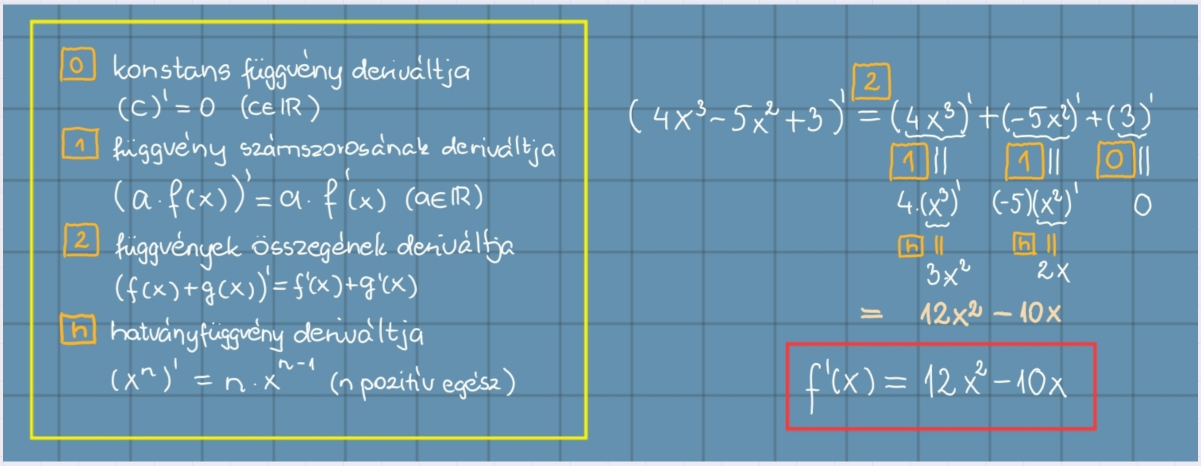
(a) $f : x \mapsto 4x^3 - 5x^2 + 3$, (b) $f : x \mapsto (x^2 + 1)e^x$.

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

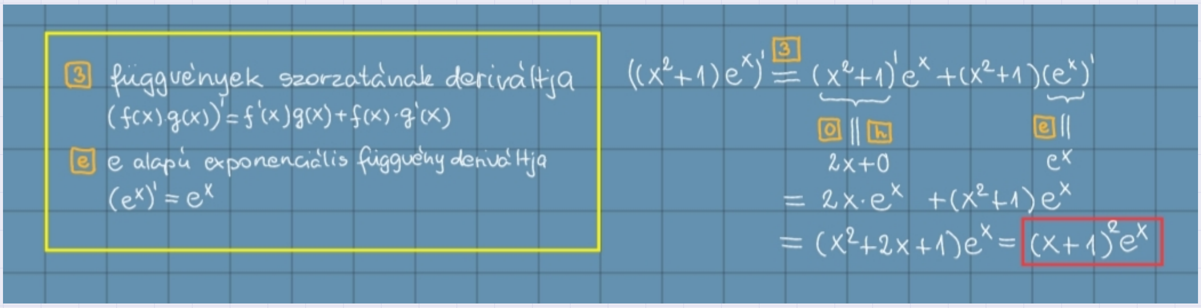
1. Függvény deriváltjának fogalma.
2. Hatványfüggvény deriváltja. Az $f : x \mapsto x^n$ deriváltja: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.
3. Exponenciális függvény deriváltja. Az $f : x \mapsto e^x$ deriváltja: $(e^x)' = e^x$.
4. Függvények összegének, szorzatának, illetve hányadosának deriváltja.

Az (a) feladat megoldása

A levezetés során a bal oldalon bekeretezett szabályok alkalmazását lépésenként jeleztük.



A (b) feladat megoldása során további szabályokat használunk: a függvények szorzatára és a természetes alapú exponenciális függvény deriváltjára vonatkozóakat.



2.3. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Határozza meg a következő függvény deriváltját!

$$f : x \mapsto \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

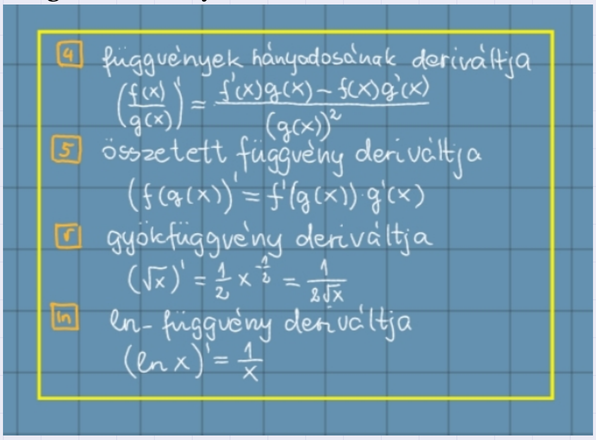
1. Függvény deriváltjának fogalma.
2. Az $\ln : x \mapsto \sqrt{x}$ függvény deriváltja.
3. Az $\ln : x \mapsto \ln x$ függvény deriváltja.
4. Függvények hányadosának deriváltja.
5. Összetett függvény deriváltja.

A feladat megoldása

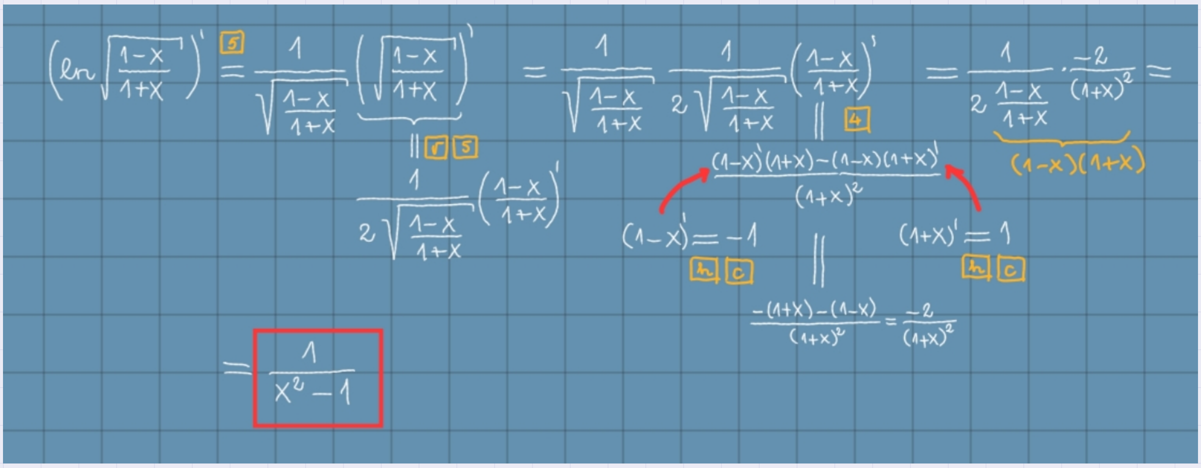
Mivel a feladat megfogalmazásnál az f függvény értelmezési tartományára nem szerepelt kikötés, úgy értjük, hogy a lehető legbővebb halmazon értelmezzük.

Külön szorgalmi feladatként javasolt az f legbővebb értelmezési tartományának meghatározása.

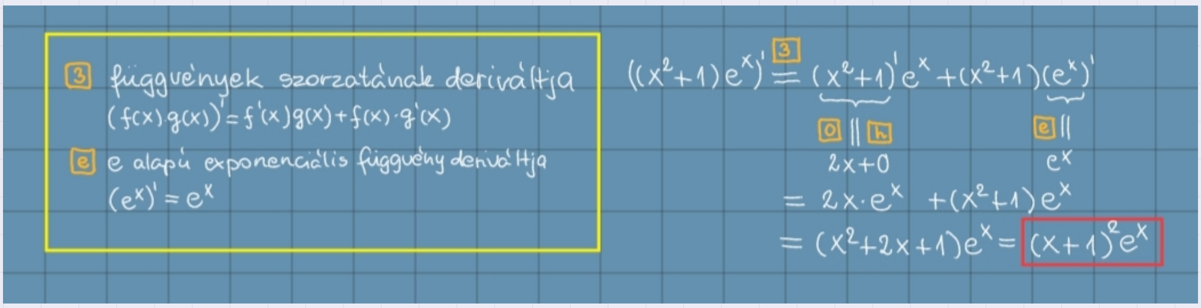
A deriváltfüggvény megadását is úgy értjük, hogy azon a lehető legbővebb halmazon kell megadni, amelyen az létezik.



A levezetés során a bal oldalon bekeretezett szabályok alkalmazását lépésenként jeleztük.
Amikor összetett függvényt deriválunk, akkor a külső függvény deriváltfüggvényének argumentumában a belső függvény teljes egészében szerepel.
A használt szabályokat most is jeleztük az alkalmazás helyén.



A (b) feladat megoldása során további szabályokat használunk: a függvények szorzatára és a természetes alapú exponenciális függvény deriváltjára vonatkozóakat.



2.4. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Határozza meg a következő függvény deriváltját!

$$f : x \mapsto \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}.$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. A szinusz-, a koszinusz- és a tangensfüggvény deriváltja.
2. Függvény inverzének deriváltja.

A feladat megoldása

A levezetés során egy újabb szabályt kell alkalmaznunk, ez egy inverzzel rendelkező függvénynek és inverzének deriváltjára vonatkozik.

Függvény inverzének deriváltja

Ha az $f(x)$ függvény inverze a g függvény, vagyis $g\big(f(x)\big) = x$, akkor

$$g'\big(f(x)\big) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Figyelem! A formula is mutatja, hogy a g inverz függvény deriváltjának értéke az $f(x)$ helyen egyezik meg az f függvény deriváltjának értékével.

A deriválandó függvényt szemügyre véve megállapíthatjuk, hogy függvények kompozíciója.

$f:\ x \mapsto \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$ egy ÖSSZETETT FÜGGVÉNY

$$x \xrightarrow{h} \underbrace{\frac{x+1}{x-1}}_{z = h(x)} \xrightarrow{g} \underbrace{\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}}_{y = g(z) = \operatorname{arctg} z}$$

Vagyis: $y = f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x))$

Ki kell számítanunk az egyes tényezők deriváltjait, amelyek maguk is külön kalkulációt igényelnek.

$$h(x):\ h'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' \overset{\boxed{4}}{=} \frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} \overset{\boxed{h}}{=} \frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Kell: a $\operatorname{tg}: y \mapsto z = \operatorname{tg} y$ függvény deriváltja

$$\operatorname{tg} y:\ \operatorname{tg}' y = \left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)' \overset{\boxed{4}}{=} \frac{\sin' y \cos y - \sin y \cos' y}{\cos^2 y} = \underbrace{\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y}}_{= 1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

Felhasználjuk: $\boxed{\begin{aligned} \sin' y &= \cos y \\ \cos' y &= -\sin y \end{aligned}}$

$g: z \mapsto y = \operatorname{arctg} z$ a $\operatorname{tg}: y \mapsto z = \operatorname{tg} y$ függvény inverze.

$$g(z):\ g'(z) = \operatorname{arctg}'(z) = \frac{1}{\operatorname{tg}' y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+z^2}$$

A kapott eredményeket figyelembe véve elvégezhetjük a deriválást:

$$f'(x)=g'(z)\cdot h'(x)=\frac{1}{1+z^2}\cdot\frac{-2}{(x-1)^2}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}\cdot\frac{-2}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2+(x+1)^2}=$$

$$=-\frac{2}{2x^2+2}=\boxed{-\frac{1}{x^2+1}}$$

2.5. Mintafeladat megoldása (4. o.)

Határozza meg az $y = x \ln x + 1$ egyenletű görbéhez az egységnyi ordinátájú pontjában húzható érintőjének egyenletét!

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Pont abszcisszája és ordinátája.
2. A természetes alapú logaritmusfüggvény.
3. A differenciálhányados szemléletes jelentése: az adott pontbeli érintő meredeksége.
4. Egyenes iránytényezős (iránytangenses) egyenlete.

A feladat megoldását lépésekre bontjuk.

(1) A görbét megadó $f : x \mapsto x \ln x + 1$ függvény értelmezési tartománya:

$$D_f = \{x > 0\}.$$

(2) Abban a pontban keressük az érintőt, amelyben a második koordináta 1, vagyis

$$x \ln x + 1 = y = 1.$$

(3) Melyik ez a pont? Amelynek x koordinátája kielégíti a fenti egyenletet. Ebből

$$\begin{aligned} x \ln x + 1 &= 1 \\ x \ln x &= 0. \end{aligned}$$

Ebből $x = 0$ vagy $\ln x = 0$ következik. Mivel $x \notin D_f$, csak a második eset jöhet szóba:

$$\ln x = 0 \implies x = 1.$$

A keresett pont tehát az $E(1;1)$ pont.

(4) A görbe az f függvény grafikonja. Az f az értelmezési tartományán deriválható, és deriváltja:

$$f'(x) = (x \ln x + 1)' = (x \ln x)' + 0 = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

(5) Az $x = 1$ pontbeli differenciálhányados a deriváltfüggvény e pontbeli értéke:

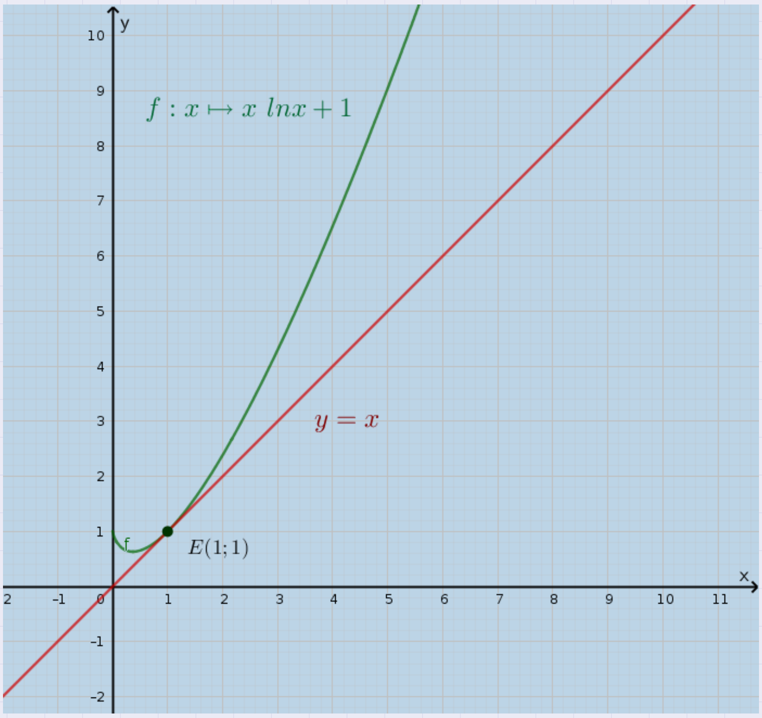
$$f'(1) = \ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1.$$

(6) Ismerjük tehát a pontot: $E(1;1)$; a meredekséget: $m = 1$. Az iránytényezős ("meredekséges") egyenlet: $y = m(x - x_0) + y_0$. Ide behelyettesítve a keresett egyenlet:

$$y = 1 \cdot (x - 1) + 1,$$

vagyis a megoldás: $y = x$.

A megoldást az alábbi ábra szemlélteti.



2.6. Mintafeladat megoldása (4. o.)

Állapítsa meg, hogy az $f : x \mapsto |\sqrt{x} - 1|$ függvény differenciálható-e az $x = 1$ helyen! Vizsgálja meg a pontbeli félérintőket a függvény grafikonjához!

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. A féloldali differenciálhányados fogalma egy függvény adott pontjában.
2. A féloldali differenciálhányadosok és a függvény grafikonjának félérintői egy adott pontjában.

A feladat megoldását lépésekre bontjuk.

(1) Az f függvény ÉT-a: $D_f = \mathbb{R}_{\geq 0}$, a nemnegatív valós számok halmaza. Ezért f értelmezve van az $x_0 = 1$ hely egy (a, b) környezetében, ahol $a < x_0 < b$; esetünkben pl. a $(0, 2)$ intervallumon.

(2) Így vannak olyan jobbról, illetve balról zárt $(0, 1]$, illetve $[1, 2)$ intervallumok, ahol f értelmezve van.

(3) Az f egy összetett függvény, melyben abszolút érték szerepel. Ezért tudnunk kell, hogy az a kifejezés, amelynek abszolút értékét kell venni, mikor ≥ 0.

$$\sqrt{x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow (x \geq 1,\ \text{vagy}\ x \leq -1,$$

de a második lehetőség szerinti x-ek nincsenek az ÉT-ban.

(4) A fentire tekintettel a függvényünk

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - 1, & \text{ha } x \geq 1, \\ -\sqrt{x} + 1, & \text{ha } x \leq 1. \end{cases}$$

(5) Vizsgáljuk meg az első esetnek megfelelő függvény $x = 1$ pontbeli differenciálhányadosának a létezését! Ez a probléma nem más, mint az f függvény bal oldali differenciálhányadosának létezése. Minthogy ismert a $f(x) = \sqrt{x} - 1$ függvény deriváltja, tudjuk, hogy

$$\lim_{x \to 1^-} (-\sqrt{x} + 1) = (-f)'(1) = -\frac{1}{2\sqrt{1}} + 0 = -\frac{1}{2}.$$

A második esetbeli függvény vizsgálatával a jobb oldali differenciálhányadost kapjuk.

$$\lim_{x \to 1^+} (\sqrt{x} - 1) = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} + 0 = \frac{1}{2}.$$

(6) A bal és a jobb oldali differenciálhányadosok az $x = 1$ helyen különböznek, ezért a függvénynek e helyen nem létezik a differenciálhányadosa.

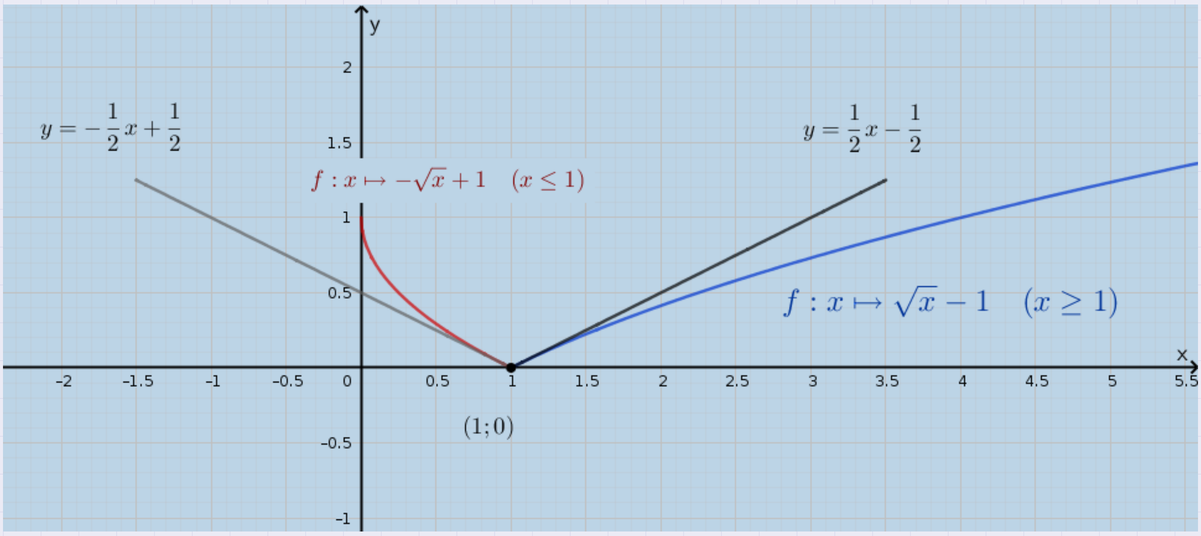
(7) Határozzuk meg a bal oldali félérintőt! Kezdőpontja az $(1, f(1))$, vagyis az $(1, 0)$ pont. Meredeksége $-\frac{1}{2}$.
Így egyenlete:

$$y = -\frac{1}{2}(x - 1) + 0 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (x \leq 1).$$

(8) Határozzuk meg a jobb oldali félérintőt! Kezdőpontja most is az $(1, f(1))$, vagyis az $(1, 0)$ pont. Meredeksége $\frac{1}{2}$.
Így egyenlete:

$$y = \frac{1}{2}(x - 1) + 0 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad (x \geq 1).$$

A megoldást az alábbi ábra szemlélteti.



3. Ellenőrző kérdések az olvasóleckéhez

Ellenőrző kérdések

? Egy függvényről tudjuk, hogy invertálható, és létezik a deriváltja. Igaz-e, hogy

- ha a függvény deriváltja egy pontban pozitív, akkor minden pontban pozitív?
- ha a függvény deriváltja egy pontban negatív, akkor sehol sem pozitív?

– ha a függvény deriváltja mindenütt pozitív, akkor inverzének deriváltja minden pontban negatív?

? Van-e olyan függvény, amelynek féloldali deriváltjai egy pontban megegyeznek, de a függvény mégsem deriválható abban a pontban?

? Mi az $x \mapsto e^x$ függvény inverzének deriváltja?

? Mi az $x \mapsto e^x$ függvény deriváltjának inverze?

4. Önálló munkára kitűzött gyakorlatok

1. A differenciálhányados definíciója alapján állapítsa meg az $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - x}{4}$ függvény $x_0 = 3$ pontbeli differenciálhányadosának értékét!
2. A differenciálhányados definíciója alapján határozzuk meg az $f : x \mapsto x^2$ függvény grafikonjához az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban húzott érintő egyenes egyenletét!
3. A definíció segítségével döntse el, hogy differenciálhatóak-e az alábbi függvények a megadott x_0 helyen! Határozza meg a differenciálhányadost, ha létezik!

   (a) $\mathrm{f : x \mapsto 5x^2 + 2x - 1 \quad x_0 = 2}$, (b) $\mathrm{f : x \mapsto x|x| \quad x_0 = 0}$, (c) $\mathrm{f : x \mapsto x|x| \quad x_0 = 0}$.

4. Határozza meg az alábbi függvények deriváltját!

   (a) $\mathrm{f : x \mapsto \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) \ln x}$, (b) $\mathrm{f : x \mapsto tg\left(2 + \dfrac{1}{x^4}\right)}$, (c) $\mathrm{f : x \mapsto \sqrt{\sin(x^2 e^{x+1})}}$.

   (d) $\mathrm{f : x \mapsto 2\sin\dfrac{\pi}{4} - 3\cos x}$, (e) $\mathrm{f : x \mapsto \dfrac{2x^3 + 3x^2}{\sqrt[3]{x^4}}}$, (f) $\mathrm{f : x \mapsto e^x \arcsin x}$.

5. Állapítsa meg, hogy differenciálható-e a következő függvény az adott x_0 helyen!

   $$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{ha } x \le 0, \\ x^5 + x, & \text{ha } x > 0, \end{cases} \qquad x_0 = 0.$$

6. Határozza meg az alábbi függvény $x_0 = 3$ pontbeli féloldali differenciálhányadosait, és írja fel a féloldali érintők egyenletét!

   $$f : x \mapsto \left|\sin\left(\frac{\pi}{3} x\right)\right| \qquad x_0 = 3$$

5. Ajánlott irodalom

1. Reimann István: Matematika, Typotex
2. Obádovics J. Gyula: Matematika, Scolar
3. Szabó Tamás: Kalkulus I. példatár informatikusoknak, POLYGON
4. Fülöp Vanda: Kalkulus I. példatár, POLYGON