

Szegedi Tudományegyetem TTIK
Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék

Spektrális interferogramok kiértékelése Pythonnal

szakdolgozat

Készítette:

Leéh Péter

fizika BSc szak

Témavezető:

Dr. Kovács Attila Pál

adjunktus

Szeged

2021

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Elméleti összefoglaló	4
2.1. Lineáris impulzusterjedés	4
2.2. Spektrálisan bontott interferometria	5
2.3. Spektrális interferogramok kiértékelési módszerei	6
2.3.1. Fázismodulált koszinusz-függvény illesztése	7
2.3.2. Állandó fázisú pont módszere	7
3. Célkitűzés	11
4. Eredmények	12
4.1. A kiértékelőprogram leírása	12
4.2. Interferogram normálása	13
4.3. Fázismodulált koszinusz-függvény illesztéses módszer szukcesszíven	15
4.4. Szimulációs vizsgálatok	17
4.4.1. Normálás	17
4.4.2. Kiértékelési eljárások tesztelése	18
4.5. Mért interferogramok kiértékelése	21
4.5.1. Üres interferométer diszperziója	21
4.5.2. Üveglap diszperziója	22
5. Összefoglalás	24
6. Mellékletek	25
6.1. Kiértékelés az állandó fázisú pont módszerével	25
6.2. Kiértékelés fázismodulált koszinusz-függvény illesztésével	26
6.3. Egyszerre több interferogram kiértékelése fázismodulált koszinusz-függvény illesztéssel	26
6.4. Hagyományos és burkológörbékkel való normálás	28
Irodalomjegyzék	29
Köszönetnyilvánítás	30
Nyilatkozat	31

1. Bevezetés

Az ultrarövid lézerimpulzusok fókuszálásánál használt optikai elemek jelentősen befolyásolhatják a rajtuk áthaladt jel időbeli alakját. Az impulzus időbeli alakjának megváltozását okozza a diszperzió jelensége, azaz hogy az anyagi közegben terjedő monokromatikus hullámok fázisának terjedési sebessége függ a hullámhossztól. Emiatt az ultrarövid lézerimpulzusokat alkalmazó optikai rendszerek tervezésénél elengedhetetlen a rendszert alkotó optikai elemek diszperziójának pontos ismerete.

Homogén, lineáris közegen való áthaladás során fellépő diszperziós hatásokat az optikai elem spektrális fázisfüggvényének segítségével írhatjuk le, melynek mérésére általában lineáris interferometrikus módszert alkalmazunk, ami történhet idő-, illetve frekvenciatartományban. Előnye, hogy ezen technikák a nemlineáris módszerekkel szemben nagyobb érzékenységek, ami lehetővé teszi a diszperzió nagy pontosságú meghatározását, emellett költséghatékony is. Munkám során frekvenciatartománybeli, vagy más néven spektrálisan bontott interferometria során kapott interferogramok kiértékelési módszereit vizsgálom meg.

Spektrális interferometriával készített interferogramok többféle módon értékelhetők ki, azonban jelenleg nincs egyetlen széles körben elterjedt kereskedelmi forgalomban kapható szoftver sem, ami ezeket a módszereket megvalósítaná. A szakdolgozati kutatómunka keretében kifejleszték egy kiértékelőprogramot, amely alkalmas spektrálisan bontott interferogramokból az optikai elem diszperziós együtthatóinak pontos meghatározására. A megvalósításhoz a mára már az iparban és tudományos közösségben is egyaránt népszerű Python 3 programozási nyelvet használom.

Az alapvető fogalmakat, valamint tudományos előzményeket a dolgozat első részében tekintem át, majd rátérek a kiértékelési módszerek bemutatására. Ezután a dolgozat célkitűzéseinek ismertetése után bemutatom a program struktúráját, majd ismertetek egy, a hagyományostól eltérő interferogram normálási módszert, valamint a koszinusz illesztésen alapuló kiértékelési eljáráshoz egy automatizálható algoritmust. Ezt követően szimulált, illetve valós interferogramok esetében is tesztetem az általam készített kiértékelőprogram működését, végül rövid összefoglalóval zárom a dolgozatot.

2. Elméleti összefoglaló

2.1. Lineáris impulzusterjedés

Egy impulzus különböző ω körfrekvenciájú monokromatikus komponensek szuperpozíciójából állítható elő, melyek amplitúdója az $a_{be}(\omega)$, fázisa pedig a $\varphi_{be}(\omega)$ függvényekkel írható le. Ekkor az impulzus E_{be} térerősségének időbeli alakját az alábbi inverz Fourier-transzformáció adja [1–4]:

$$E_{be}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_{be}(\omega) \cdot e^{i(\omega t - \varphi_{be}(\omega))} d\omega \quad (2.1.1)$$

Az impulzus amplitúdó spektruma diszperzív közegben haladva a közegre jellemző $A(\omega)$ amplitúdóátviteli függvénnyel megszorzódik, valamint a közeg diszperzióját jellemző $\varphi(\omega)$ függvénnyel eltolódik, melynek eredményeképpen a jel időbeli alakja is megváltozik, torzul. A közegből kilépő impulzus térerőssége a megváltozott amplitúdójú és fázisú monokromatikus komponensek összegzésével számolható:

$$E_{ki}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) a_{be}(\omega) \cdot e^{i(\omega t - \varphi_{be}(\omega) - \varphi(\omega))} d\omega \quad (2.1.2)$$

A továbbiakban az $A(\omega) = 1$ feltevéssel élünk, vagyis a frekvenciafüggő abszorpciótól eltekintünk. Ekkor az impulzus időbeli alakjának megváltozásáért csak a $\varphi(\omega)$ spektrális fázisfüggvény felelős. Ahhoz, hogy a $\varphi(\omega)$ függvénynek az impulzusra kifejtett hatását kvantitatív módon jellemezni tudjuk, fejtsük Taylor-sorba az impulzus ω_0 központi körfrekvenciája körül [2, 5]:

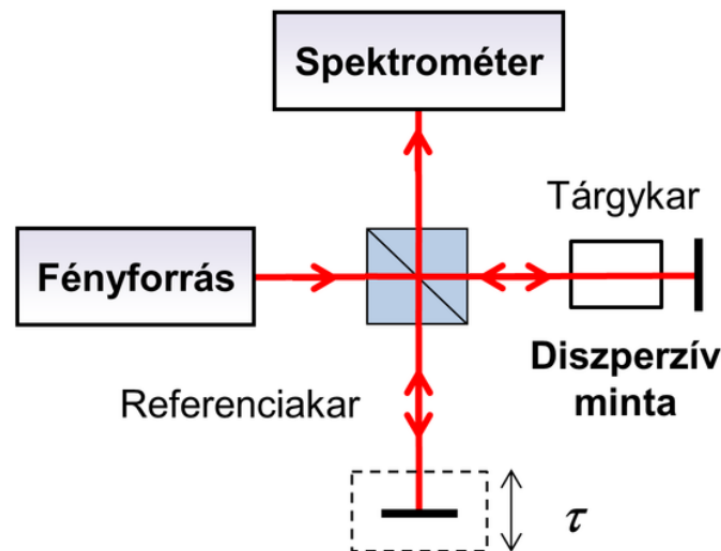
$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n \varphi}{d\omega^n} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^n \quad (2.1.3)$$

A sorfejtés első tagja csupán a néhány femtoszekundumos nagyságrendű impulzusok esetén bír jelentőséggel, viszont a magasabb rendű tagok ennél hosszabb idejű impulzusok esetén is kitüntetett szerepet kapnak. A fázisfüggvény körfrekvencia szerinti első deriváltja a *csoportkésleletés* (*group delay*, GD), ami egy idő dimenziójú mennyiség. Azt mutatja meg, hogy az adott vivőfrekvenciával rendelkező hullámcsomag mennyi idő alatt halad át az anyagon. A sorfejtésben a második deriváltat *csoportkésleletés-diszperzió*nak (*group delay dispersion*, GDD) hívjuk, és az impulzus időbeli kiszélesedését okozza. A következő tag neve harmadrendű diszperzió (*third order dispersion*, TOD), mely a jelealakban aszimmetriát okoz, illetve hatására mellékimpulzusok is megjelenhetnek. Az ennél magasabb rendű tagoknak - a harmadrendhez hasonlóan - már nincs saját nevük, a deriválás rendjével azonosítjuk

őket. Általában hagyományos üvegek esetén jó közelítést ad a legfeljebb harmad- vagy negyedrendű diszperzió feltételezése, azonban különleges optikai szálak vagy lézerrendszerek tervezése során szükséges a magasabb rendű tagok figyelembevétele is [2].

2.2. Spektrálisan bontott interferometria

A spektrális interferometria egy széles körben elterjedt lineáris módszer optikai elemek diszperziójának nagy pontosságú meghatározására [6]. Tekintsünk egy kétsugaras (leggyakrabban Michelson- vagy Mach-Zehnder-) interferométert, amelyet megfelelően nagy sávszélességű fényforrással világítunk ki. Az interferométer kimenetéhez egy spektrométert helyezünk el. A vizsgálni kívánt diszperzív mintát az interferométer tárgykarjába helyezzük (1. ábra).



1. ábra. Michelson-interferométer a tárgykarjába elhelyezett mintával

Ekkor az spektrométer kimenetén létrejövő spektrálisan bontott interferogram intenzitáseloszlása a következő formulával adható meg [5,7]:

$$I(\omega) = I_r(\omega) + I_t(\omega) + 2\sqrt{I_r(\omega) \cdot I_t(\omega)} \cdot \cos(\Phi(\omega)), \quad (2.2.1)$$

ahol $I_r(\omega)$ és $I_t(\omega)$ a referencia- és tárgykar intenzitáseloszlása. $\Phi(\omega)$ a két kar között mérhető frekvenciafüggő fáziskülönbség, ami a minta $\varphi_m(\omega)$ spektrális fázisából és a két kar közötti eltérő levegőbeli úthossz okozta időbeli τ késésből tevődik össze:

$$\Phi(\omega) = \varphi_m(\omega) + \omega\tau = \varphi_m(\omega) + \frac{\omega(l_t - l_r)}{c}, \quad (2.2.2)$$

ahol l_t és l_r a tárgy- és referenciakarban a fényhullám által levegőben megtett út hossza, ahol feltételeztük, hogy a levegő törésmutatója $n_L = 1$, c pedig a vákuumbeli fénysebesség. A (2.1.3) összefüggéshez hasonlóan fejtsük Taylor-sorba a $\Phi(\omega)$ spektrális fáziskülönbséget az ω_0 körfrekvencia körül:

$$\Phi(\omega) \approx \Phi(\omega_0) + \sum_{n=1}^K \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n \Phi}{d\omega^n} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^n \quad (2.2.3)$$

Használva a korábbi megállapításokat:

$$\Phi(\omega_0) = \varphi_m(\omega_0) + \omega_0 \tau \quad (2.2.4a)$$

$$GD(\omega_0) = GD_m(\omega_0) + \tau \quad (2.2.4b)$$

$$GDD(\omega_0) = GDD_m(\omega_0) \quad (2.2.4c)$$

$$TOD(\omega_0) = TOD_m(\omega), \quad (2.2.4d)$$

ahol az m index arra utal, hogy az a mennyiség a mintát jellemzi.

Látható, hogy a fázis- és csoportképletelés esetében a minta mellett a karok hosszának különbségéből származó hatásokat is figyelembe kell vennünk. A GDD és a magasabb rendű tagok viszont már nem függenek τ -tól, így az m index használatát mellőzhetjük.

2.3. Spektrális interferogramok kiértékelési módszerei

A spektrálisan bontott interferogramok kiértékelésére több módszert is kidolgoztak [2,5]. Több kiértékelési eljáráshoz szükséges az ún. normált interferogram előállítása. Tekintsük a (2.2.1) egyenletet, majd rendezzük át úgy, hogy csak a koszinuszos tag maradjon az egyik oldalon:

$$\cos(\Phi(\omega)) = \frac{I(\omega) - I_r(\omega) - I_t(\omega)}{2\sqrt{I_r(\omega) \cdot I_t(\omega)}} \quad (2.3.1)$$

Ha a mért $I(\omega)$ interferogram, illetve a tárgy- és referencianyaláb spektrumát használva elvégezzük a (2.3.1)-gyel adott műveleteket, akkor a kapott ún. normált interferogram értékei a $[-1, 1]$ intervallumba esnek. Ekkor azt mondjuk, hogy az interferogram normált. Természetesen ennek előállításához szükséges a tárgy- és referencianyaláb spektrumának rögzítése is.

Bár az általam írt programmal lehetőség nyílik a Fourier-transzformációs és a minimum-maximum módszeres kiértékelésre is, a dolgozatom során a gyengébb felbontás mellett is jól működő eljárásokat tárgyalom.

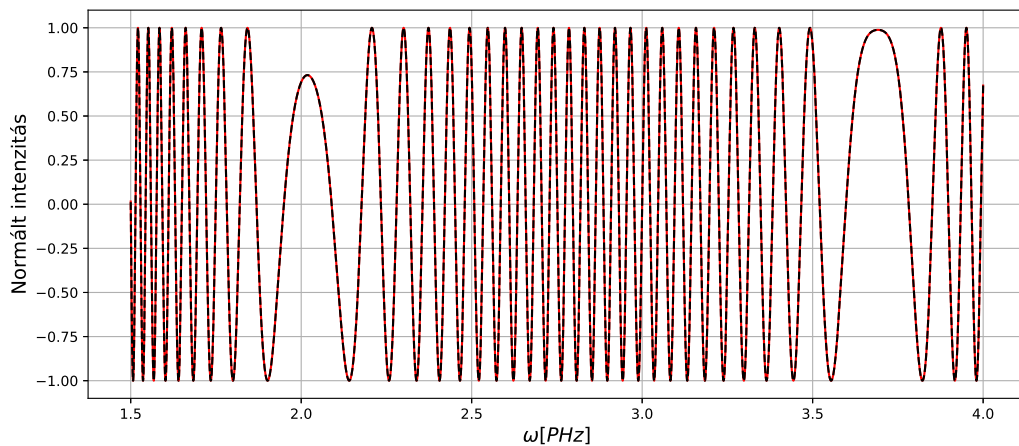
2.3.1. Fázismodulált koszinusz-függvény illesztése

A módszer lényege az, hogy a normált interferogramra egy megfelelő fokszámú fázismodulált koszinusz-függvényt illesztünk (2. ábra):

$$I_i = c_1 + c_2 \cos (b_0 + b_1\Delta\omega + b_2\Delta\omega^2 + b_3\Delta\omega^3 + b_4\Delta\omega^4 + \dots), \quad (2.3.2)$$

ahol c_1 és c_2 a diszperzió szempontjából a legtöbb esetben nem lényeges illesztési paraméterek, $GD = b_1$, $GDD = 2b_2$, $TOD = 6b_3$ és $FOD = 24b_4 \dots$, illetve $\Delta\omega = \omega - \omega_0$.

Az eljárás bizonyítottan alkalmas magasabb rendű diszperzió mérésére [2]. Előnye, hogy elég egyetlen interferogram kiértékelése a diszperziós koefficiensek számértékének meghatározásához. A \cos függvény páros volta miatt azonban az együtthatók előjelének eldöntéséhez szükséges legalább egy további, más karhosszaknál felvett interferogram kiértékelése is. Az eljárás hátránya, hogy nagyobb diszperziók esetén az amplitúdóértékek hullámhosszfüggése az illesztést pontatlanná teheti. További hátrány, hogy a módszer nagyon érzékeny az illesztési paraméterek kezdőértékeire: a pontos illesztéshez sokszor hosszasan kell találgatni a változók értékeit. Ennek a bővebb kifejtését a 4.3 fejezetben teszem meg.



2. ábra. Szimulált interferogram (piros) és a rá illesztett fázismodulált koszinusz-függvény (fekete).

2.3.2. Állandó fázisú pont módszere

Az állandó fázisú pont módszeréhez azt kell megvizsgáljunk, hogy a normált interferogram fázisfüggvényének hol van szélsőértéke. Ehhez differenciáljuk

körfrekvencia szerint a (2.3.1) összefüggést:

$$\frac{d}{d\omega} [\cos(\Phi(\omega))] = -\sin(\Phi(\omega)) \cdot \frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} = 0 \quad (2.3.3)$$

A szorzat miatt ebből két kiértékelési módszer is következik. Az állandó fázisú pont módszeréhez azt használjuk ki, hogy a

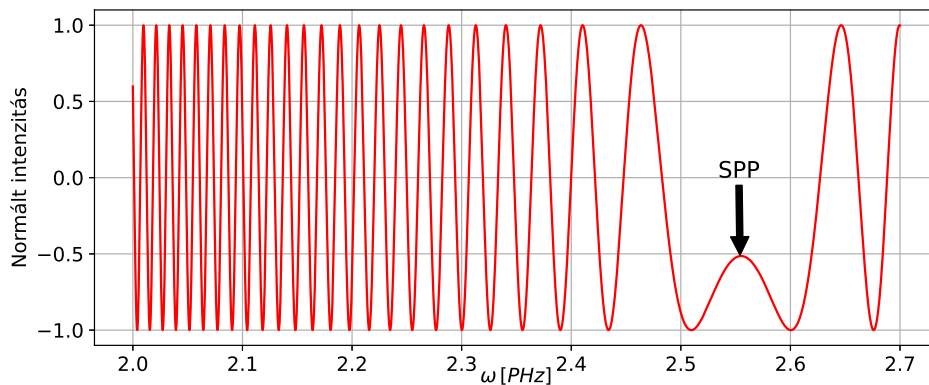
$$GD(\omega) = \frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} = 0 \quad (2.3.4)$$

feltétellel adott ω körfrekvenciaértéknél egy állandó fázisú pont (továbbiakban SPP) alakul ki, amely környezetében a fázis nagyon lassan változik (3. ábra).

Használjuk továbbá a (2.2.4b) egyenletet, miszerint a teljes csoportkésltetés a minta csoportkésltetéséből és a karok közti időbeli különbség összege. Azt kapjuk, hogy az állandó fázisú pont kialakulásának feltétele

$$GD_m = \frac{d\varphi_m(\omega)}{d\omega} = -\tau, \quad (2.3.5)$$

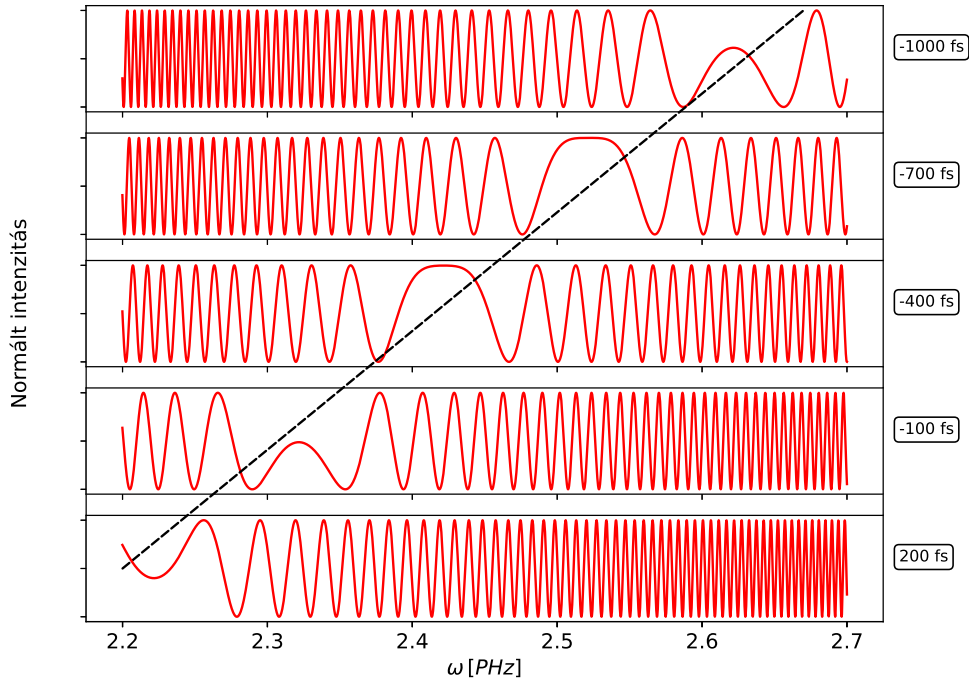
vagyis a minta csoportkésltetésének nagysága éppen megegyezik a karok közti késltetéssel. Ez a feltétel különböző τ időbeli késltetések esetén különböző körfrekvenciaértéknél teljesül, ezért az állandó fázisú pontok monitorozásával a $GD_m(\omega)$ függvény meghatározható, amiből a diszperziós koefficiensek polinom-illesztéssel megkaphatók.



3. ábra. Állandó fázisú pont a spektrális interferogramon

Fontos észrevenni, hogy e módon csak a minta relatív csoportkésltetés függvénye adható meg, ugyanis a két kar geometriai hosszából adódó késltetésnek csak a változását tudjuk mérni, mivel a mikrométercsavar egy választott x_0 kezdőhelyzetéhez a τ_0 késltetést legtöbbször nem ismerjük. Ez azonban nem okoz gondot, hiszen

a kirajzolódó $GD(\omega)$ függvény alakja megegyezik a mintára jellemző $GD_m(\omega)$ függvénnyel, csak az y tengely mentén τ_0 -val való eltoltja lesz.



4. ábra. Az állandó fázisú pont mozgása a különböző karok közti késleltetésnél, illetve a $GD(\omega)$ görbe alakja (fekete). A szimulált interferogram diszperziója $GD_m(\omega_0) = 200 \text{ fs}$ és $GDD(\omega_0) = 3000 \text{ fs}^2$ [8].

A 4. ábrán az SPP mozgásából egyértelmű módon következtethetünk a diszperzió előjelére: a karok közti τ késleltetés csökkenésével az állandó fázisú pont a nagyobb frekvenciák irányába tolódott el, ekkor a csoportkésleltetés-diszperzió pozitív. A diszperziós együtthatók számszerű meghatározásához tehát különböző τ késleltetések esetén szükséges leolvasni azt az ω körfrekvenciaértéket, ahol az állandó fázisú pont éppen van. Ezután a $\tau(\omega)$ grafikonra egy n -ed fokú polinomot illesztve a diszperziós együtthatókat $(n + 1)$ -ed rendig lehet meghatározni. Például egy

$$GD_i = d_0 + d_1\Delta\omega + d_2\Delta\omega^2 + d_3\Delta\omega^3 \quad (2.3.6)$$

illesztett függvénnyel a diszperziós koefficienseket negyedrendig tudjuk meghatározni. A formulában a paraméterek jelentései: $GD(\omega_0) = d_0$, $GDD(\omega_0) = d_1$, $TOD(\omega_0) = 2d_2$ és $FOD(\omega_0) = 6d_3$.

Magasabb rendű diszperzió esetén több állandó fázisú pont is megjelenhet az interferogramon [8] (pl. 2. ábra). Ilyen esetekben elengedhetetlen mindegyik SPP követése a diszperzió pontos vizsgálatához.

Gyengébb felbontású spektrométernél nagy diszperziók, vagy nagy karok közti késleltetések esetén az interferogram annyira sűrű oszcillációt mutathat, hogy azt már a spektrométer nem képes felbontani, így azon a tartományon az intenzitás valamilyen átlagát veszi. Ilyen esetekben az állandó fázisú pont módszere marad az egyetlen megbízható eljárás a diszperzió mérésére [9]. Hátránya, hogy pontossága elmarad a koszinusz illesztésen, vagy a Fourier-transzformáción alapuló módszerekhez képest, ami különösen megmutatkozik magasabb rendű diszperzió mérésekor [2]. További gyengesége, hogy sok interferogram mérése és kiértékelése szükséges hozzá, ami miatt időigényes.

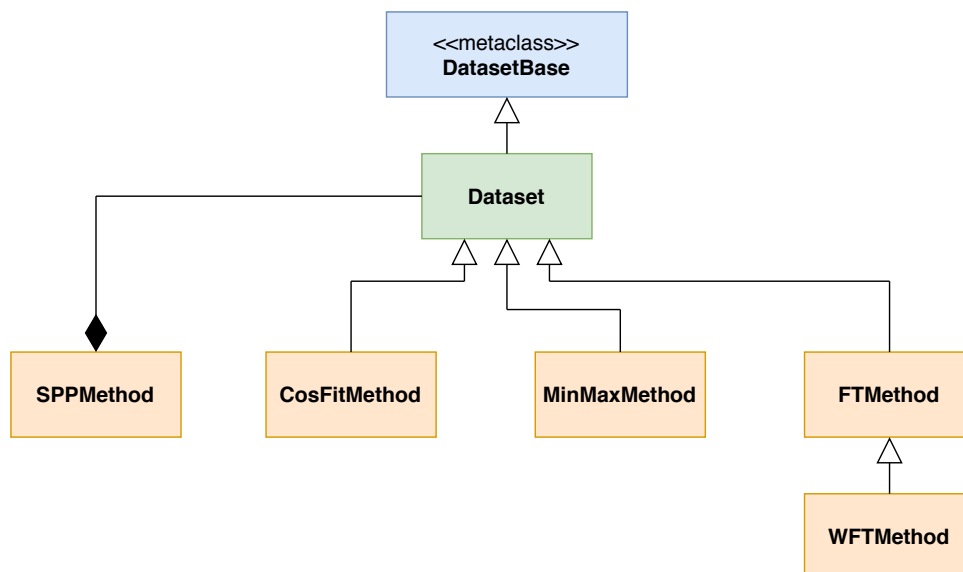
3. Célkitűzés

A munkám fő célja, hogy Python 3 nyelvet használva írok egy olyan logikusan felépített és könnyen bővíthető programot, ami alkalmas spektrális interferogramok kiértékelésére különböző módszerekkel. Dolgozatomban megvizsgálom egy újabb interferogram normálási módszert, valamint kísérletet teszek a fázismodulált koszinusz-függvény illesztéses módszer automatizálására. A megírt kiértékelési eljárások helyességét szimulációs vizsgálatokkal ellenőrzöm, majd saját mérések keretein belül egy ismeretlen anyagú üveglap diszperziós együtthatóit mérem meg, és a kapott eredményekből beazonosítom az üveg típusát.

4. Eredmények

4.1. A kiértékelőprogram leírása

A kiértékelőprogram megírásához a Python 3 nyelvet választottam. Napjainkra az egyik legnépszerűbb programozási nyelvvé tudott válni mind a tudományos körökben és az iparban is több indok miatt: egyszerű szintaxist helyezi előtérbe a futásidővel szemben, számtalan külső könyvtár elérhető hozzá, platformfüggetlen, stb [10]. Az általam írt program a tudományos számításokra fejlesztett *SciPy ecosystem* (NumPy, Matplotlib, stb.) csomagjait használja. A célom olyan modul létrehozása volt, ami egyszerűen kezelhető és áttekinthető, platform-független, ugyanakkor - ha a helyzet úgy kívánja - minél nagyobb mértékben testreszabható is. Az előbbi indokok miatt a program nem szkript, hanem teljesen objektumorientált szemléletben íródott. A programot a *Spectrally Resolved Interferometry* (Spektrálisan bontott interferometria) után *PySprint*-nek neveztem el. A komplexitása és hossza miatt teljes terjedelmében nem kerül bele a dolgozatba, de néhány kódrészlet a mellékletek között megtalálható, illetve a teljes kód elérhető a <https://github.com/Ptrskay3/PySprint> címen. Az 5. ábra mutatja a program osztálystruktúráját.

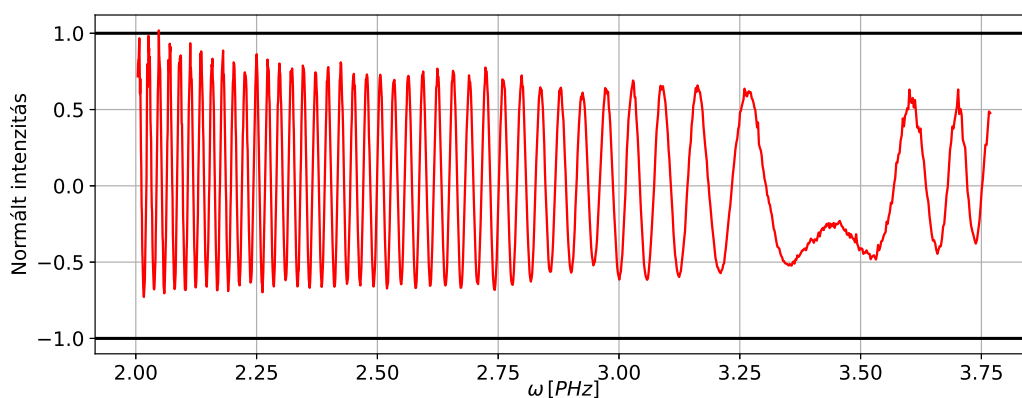


5. ábra. A modul osztálystruktúrája

A modulban a *Dataset* osztály reprezentál egy adatsort, és valósítja meg a legtöbb műveletet (adatok betöltése, manipulálása, ábrázolása, stb.), amit interferogramokon végezhetünk, ennek leszármazott osztályai pedig az adott kiértékelési eljáráshoz szükséges további metódusokat. Kivételt képez az *SPPMethod*, amely egyszerre több interferogramot tartalmaz (mivel az állandó fázisú pont módszeréhez több interferogramból kell információt gyűjteni), így tagjai *Dataset* osztályok.

4.2. Interferogram normálása

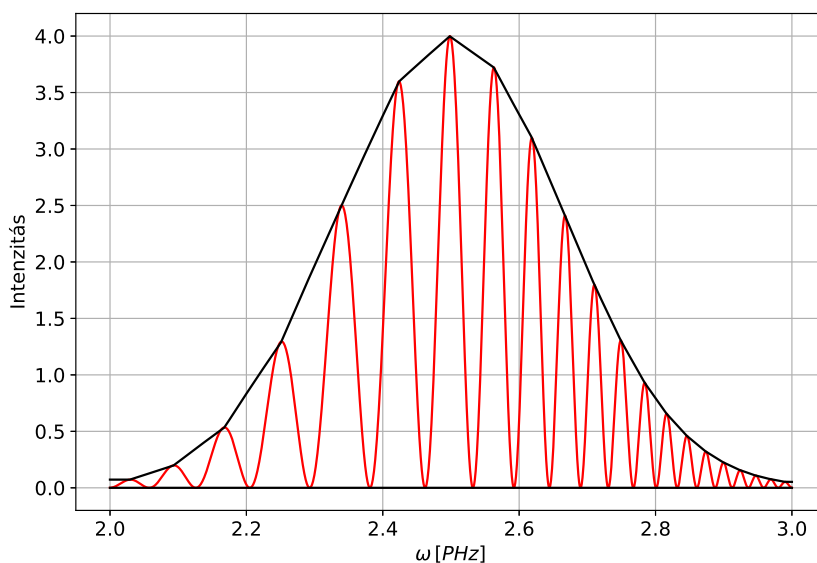
Az interferogramok normálása hagyományosan a 2.3 fejezetben leírt módon történik, azonban a valós méréseknél sokszor a tárgy- és referencianyaláb spektrumának időbeli ingadozása, a túl nagy diszperzió okozta sűrű moduláció, vagy az alkalmazott nyalábosztó kocka antireflexiós rétegének tökéletlensége miatt a kapott görbe akár jelentősen is eltérhet a várt $[-1, 1]$ intervallumtól. A 6. ábrán láthatunk erre példát egy általam mért interferogram esetén.



6. ábra. Hagyományos módon normált interferogram. A két fekete horizontális vonal mutatja a várt $[-1, 1]$ intervallumot.

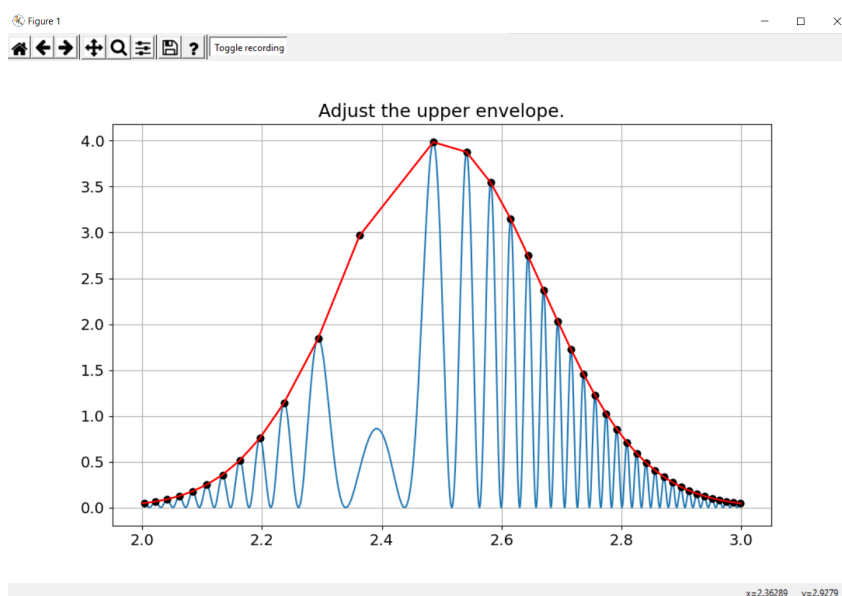
Ezen probléma megoldására több módszer is született [11,12]. Ebben a fejezetben a hivatkozott eljárásoknál egy lényegesen egyszerűbb normálási módszert mutatok be, mely lehetővé teszi a diszperzió pontosabb meghatározását. Az eljárás megértéséhez fontos megjegyezni, hogy mivel az interferogramok y tengelyén intenzitás szerepel, ezért a görbe bármely része tetszőlegesen skálázható e tengely mentén anélkül, hogy a spektrális fázisról információt vesztenénk. Az itt leírt módszer nem azonos tartományba szorítja a görbét, mint a hagyományos normálási eljárás, azonban a fenti indoklás miatt egyszerű algebrai műveletekkel ekvivalensé tehető vele.

A módszer lépései a következők: keressük meg az interferogram alsó burkolóját, majd vonjuk ki az értékét a görbéből, ezt követően keressük meg a kapott görbe felső burkolóját, aminek értékeivel pedig osszunk le. Az így kapott grafikon az y tengely mentén a $[0, 1]$ intervallumba esik, és a maximumai biztosan $y=1$ -ben, a minimumai pedig biztosan $y=0$ -ban vannak. Ekkor a koszinusz-függvény illesztésen alapuló módszerben használt c_1 és c_2 illesztési paraméterek értékei nagy biztonsággal 0.5-nek tekinthetők, ezáltal csökkentettük az optimalizálandó változók számát.



7. ábra. Szimulált interferogram a felső és alsó burkolójával.

Az általam írt program lehetőséget biztosít az interferogram alsó és felső burkolójának megtalálására, illetve manuális szerkesztésére is van mód. A dolgozat írásának időpontjában a program az alsó burkoló megtalálásához az interferogram minimumait keresi meg, majd ezen minimumok között lineárisan interpolál (11. ábra). A felső burkolóhoz ezzel azonos az eljárás, csak a maximumok értékeit keressük. A 4.4 és 4.5 fejezetekben részletesebben megvizsgálom és összehasonlítom a hagyományos normálással. További pontosításhoz érdemes lehet megvizsgálni, hogy hogyan változik a grafikon, ha a lineáris interpolációt valamilyen spline interpolációra cseréljük.



8. ábra. Felhasználói felület a felső burkoló megtalálásához

A felület alapját egy *Matplotlib* ablak képezi, azonban további funkciói vannak (8. ábra). A kurzor pozíciójánál az *i* billentyűvel (insert) új pontot adhatunk hozzá a burkolóhoz, a *d* billentyűvel (delete) törölhetünk, illetve a kurzorral bármely pont pozíciója tetszőlegesen elhúzható. A fenti eszköztárban a *Toggle recording* gombbal teljesen kikapcsolható a burkoló szerkesztése. A 6.4 mellékletben magyarázattal együtt megtalálható, hogy hogyan működik a szoftverben a hagyományos, és a burkolókkal való normálás.

4.3. Fázismodulált koszinusz-függvény illesztéses módszer szukcesszíven

Ahogy korábban már szó esett róla, a fázismodulált koszinusz-függvény illesztéses módszerrel lehetőség nyílik a magasabb rendű diszperzió pontos meghatározására. Vizsgálva a (2.3.2) összefüggést azonban látható, hogy csupán harmadrendű diszperziót feltételezve az optimalizáló algoritmusnak 6 paramétert kell minimalizálnia. Emiatt - amennyiben nem ismerjük pontosan a diszperziós együtthatókat - sokszor hosszasan kell az illesztés kezdőértékeit találgatni, hogy az jól közelítse az eredeti adatpontokat.

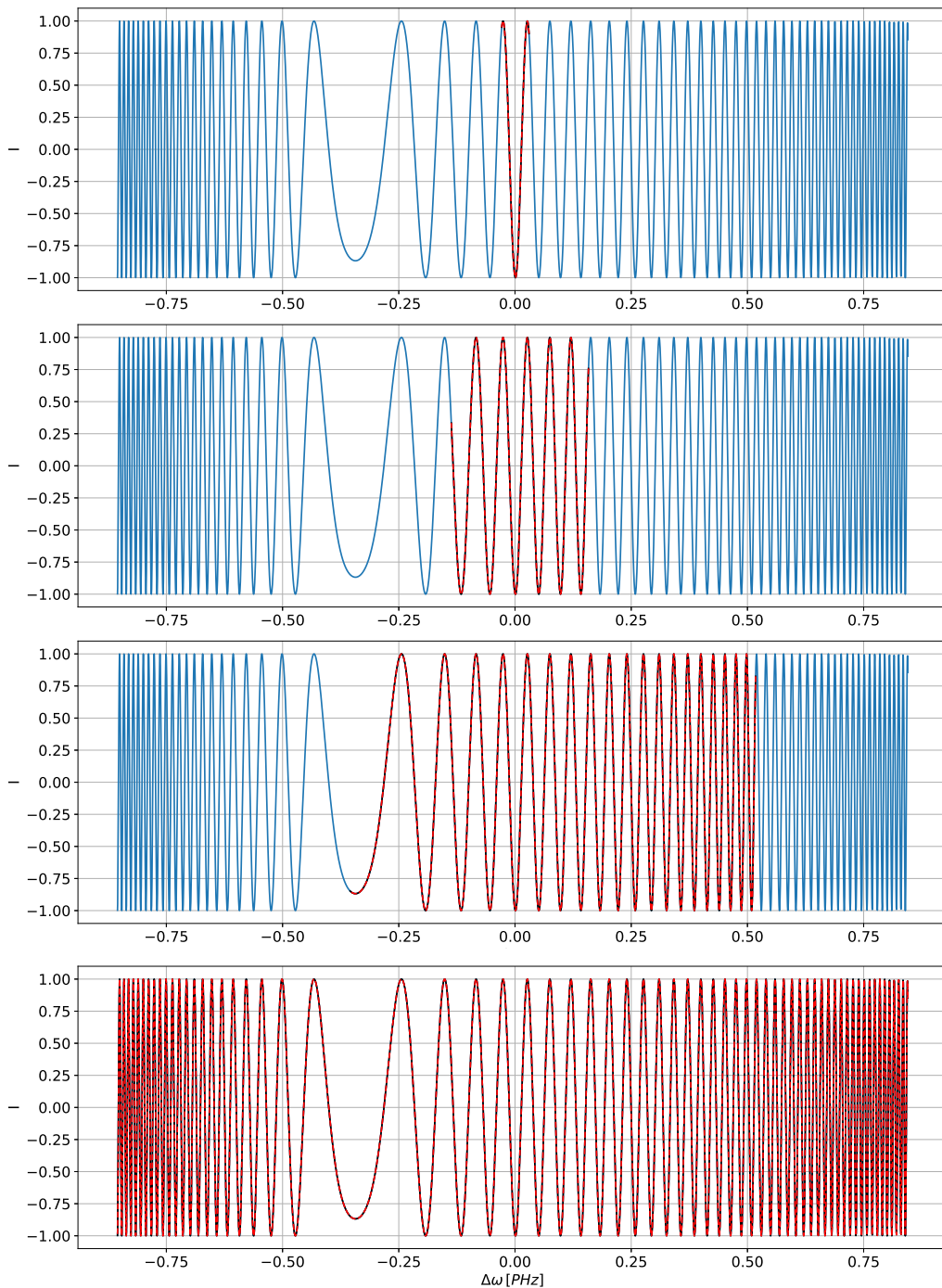
Ezen probléma könnyítése érdekében tekintsük a következő algoritmust: vegyük egy normált interferogramban az ω_0 központi frekvencia egy kis környezetét. Ebben a tartományban - függetlenül, hogy magasabb rendű diszperzió is jelen van - az interferogram jól közelíthető egy

$$I_1(\omega) = c_1 + c_2 \cdot \cos(b_0 + b_1 \cdot \omega) \quad (4.3.1)$$

alakú függvénnyel. Tudjuk továbbá, hogy a $b_1 (= GD)$ értéke jól becsülhető a $\frac{2\pi}{\Delta\omega}$ -val, ahol $\Delta\omega$ a referencia pont körüli két maximum, vagy két minimum távolsága. Ez az érték numerikus módszerekkel viszonylag könnyen megtalálható. Végezzük el a fenti görbe illesztését ezen a kis adatterületen. Amennyiben az R^2 értéke elér egy előre definiált határt (vagyis az illesztett görbe elég jól közelíti az adatpontokat) terjesszük ki a központi frekvenciára szimmetrikusan az illesztés tartományát valamennyivel és növeljük meg a *cos* argumentumába írt polinom fokszámát:

$$I_2(\omega) = c_1 + c_2 \cdot \cos(b_0 + b_1 \cdot \omega + b_2 \cdot \omega^2) \quad (4.3.2)$$

Újra végezzük el az illesztést az I_2 függvénnyel, azonban most kezdőértéknek az előző illesztésnél kapott optimális paramétereket használjuk. Ha ez az illesztés is eléri az előre beállított R^2 értéket, tovább folytatjuk a fenti lépéseket addig, amíg elérjük a kívánt diszperzió rendjét. Ezután már csak az illesztési tartományt kell növelnünk. A 9. ábra egy szimulált interferogram esetén mutatja az algoritmus néhány lépését.



9. ábra. Az algoritmus lépései szimulált interferogram esetén negyedrendű diszperzióval. Az adatpontokat kék, az illesztési területet piros, az illesztett görbét pedig fekete szín jelöli. Az illesztés rendje fentről lefelé nő. Megjegyzés: Az interferogram beosztása hullámhossztartományban egyenközű, így frekvenciatartományban már nem lesz az. Ez okozza az aszimmetrikus tartománynövekedést.

A fent leírt algoritmus előnye a hagyományos illesztési eljárással szemben, hogy könnyen automatizálható, akár egyszerre több interferogram is kiértékelhető egy *for* ciklus segítségével. Bővebben erről a 4.5 fejezetben. További előny, hogy nem feltétlen szükséges ismerni az illesztési paraméterek kezdőértékeit.

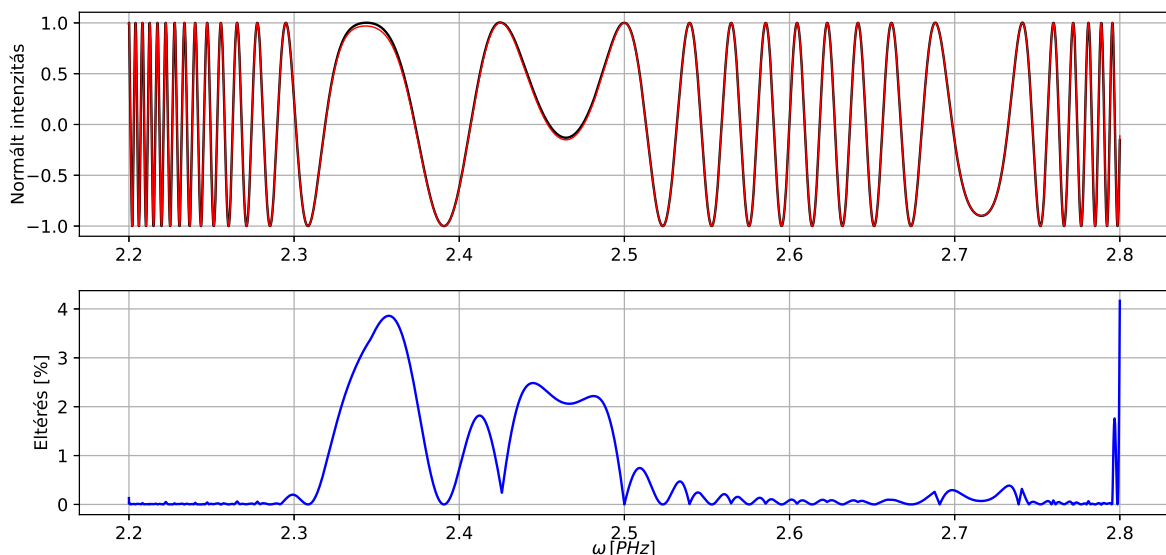
4.4. Szimulációs vizsgálatok

Ebben a szekcióban megvizsgálom, hogy a 4.2 fejezetben leírt normálás hogyan viszonyul a hagyományos módon normált interferogramokhoz, továbbá megvizsgálom, hogy az új normálási eljárás alkalmazásakor milyen hibák jelennek meg. Ezután szimulált interferogramokon tesztelem a megírt kiértékelési eljárások helyességét.

4.4.1. Normálás

A következőkben az általam implementált normálást hasonlítom össze a hagyományosan normált eredményekkel, és részletesen megvizsgálom milyen feltételek mellett alkalmazható optimálisan.

Tekintsünk egy analitikusan generált interferogramot negyedrendű diszperzióval, és normáljuk hagyományos módon, majd a burkolói megkeresésével is:



10. ábra. Egy negyedrendű diszperzióval rendelkező interferogram esetén a normálások összehasonlítása. A felső ábrán piros jelöli az analitikus megoldást, fekete pedig a burkolókkal normált görbét felskálázva a $[-1, 1]$ intervallumra. A lenti ábra a két grafikon eltérését mutatja.

A 10. ábra felső részén látható, hogy a fekete, burkolókkal normált görbe alig tér el látszatra az analitikus megoldástól, ezért a pontosabb vizsgálat érdekében a két interferogram eltérését is ábrázoltam százalékban ($100 \cdot |y_1 - y_2|$), ami a 10. ábra alsó részén látható. Több ezen kívüli szimulációt elvégezve minden esetben hasonló eredményre jutottam. Általánosságban elmondható, hogy az analitikus görbétől való eltérés két helyen lehet jelentősebb. Az első esetben a hiba az állandó fázisú pont környezetében jelentkezik, ugyanis itt nehéz megítélni hogyan halad pontosan a burkoló, ennek köszönhetően pontatlanná válik a transzformáció. További hangsúlyosabb eltérés általában a határokon mutatkozik meg. Ennek oka egyszerű:

a tartomány szélein túli, számunkra nem látható szélsőértékek helyzetéről nincs információnk, így a burkoló ott pontatlan lehet. E hiba elkerülése miatt érdemes a normálás után a tartomány két széléből levágni. Ezt minden további kiértékelésnél megtettem. További általános tapasztalat, hogy minél sűrűbb volt az oszcilláció periódusa, annál kisebb volt a hiba. Ez nem meglepő, mivel a sűrűbb oszcilláció sűrűbb beosztást jelent, így az első rendű közelítés is pontosabbá válik.

4.4.2. Kiértékelési eljárások tesztelése

Az állandó fázisú pont módszerének teszteléséhez többféle interferogramot szimuláltam. Minden esetben 10-15 db interferogramot generáltam átlagosan 50-200 fs lépésközzel, majd az általam létrehozott felületen megkerestem az állandó fázisú pont(ok) helyét és megadtam a hozzá tartozó késleltetést. Az 1. táblázatban összefoglaltam a szimulált értékeket és a kiértékeléssel kapott eredményeket.

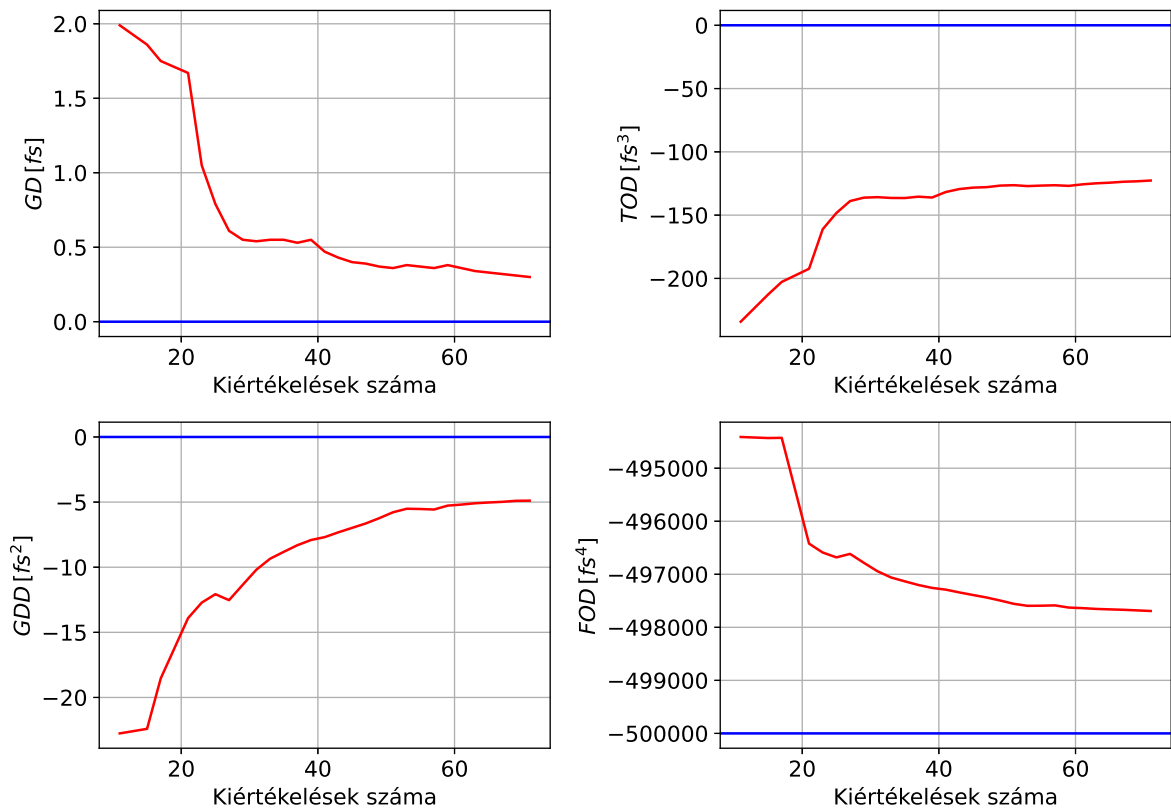
		GD [fs]	GDD [fs^2]	TOD [fs^3]	FOD [fs^4]
I.	Szimulált érték	200	3 000	-	-
	Számolt érték	201,86	3 005,66	-	-
II.	Szimulált érték	200	3 000	2 700	-
	Számolt érték	201,05	2 999,39	2 711,73	-
III.	Szimulált érték	-250	0	100 000	-
	Számolt érték	-248,93	40,92	99 849,64	-
IV.	Szimulált érték	0	0	0	-500 000
	Számolt érték	-0,39	28,50	-256,02	-503 580,86
V.	Szimulált érték	100	3 000	0	-500 000
	Számolt érték	111,67	3 126,72	800,56	-515 785,37
VI.	Szimulált érték	400	0	-100 000	-
	Számolt érték	401,16	-25,27	-100 189,96	-

1. táblázat. Az állandó fázisú pont módszerével kapott diszperziós együtthatók szimulált interferogramok esetén.

A tesztelésnél törekedtem arra, hogy minél szélsőségesebb eseteket is vizsgáljak, ezért olyan interferogramokat is választottam, ahol kettő (III.), vagy három (V.) állandó fázisú pont is megjelenik, valamint domináns FOD mellett is megvizsgáltam

az eredményeket. A kiértékeléssel kapott értékek már relatíve kevés interferogram felhasználásával is jól közelítették a szimulált együtthatókat.

Jól ismert, hogy domináns negyedrendű diszperzió esetén az állandó fázisú pont módszer pontossága romlik annak köszönhetően, hogy néhány késleltetés esetén az SPP nagyon gyorsan mozog és/vagy kiszélesedik [8]. Ez a szimulációk során is megmutatkozott: az 1. táblázat IV. és V. sorában jól látszik, hogy ott az eltérés nagyságrendben különbözik a többi esettől. Emiatt a szimulációk során felmerült bennem, hogy a kiértékelt interferogramok számát növelve mennyivel növekszik a módszer pontossága. Ehhez egy tisztán negyedrendű diszperziót tartalmazó interferogramot generáltam, majd egyre sűrűbb beosztású késleltetéseknél leolvastam az állandó fázisú pont helyét. A 11. ábra mutatja, hogy a különböző diszperziós együtthatók hogyan térnek el a szimulált értéktől.

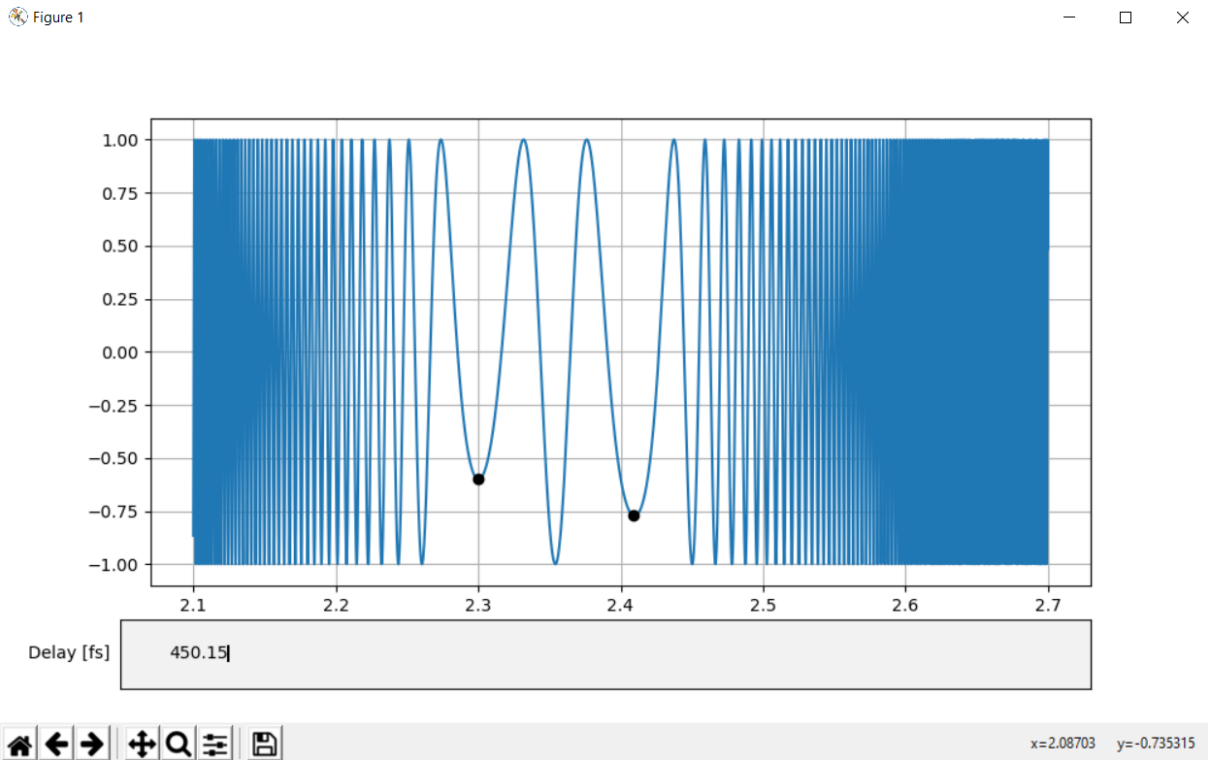


11. ábra. Szimulált interferogram esetén a kapott diszperziós együtthatók a kiértékeléshez felhasznált interferogramok számának függvényében. A valós értéket kék vonal mutatja.

Általánosságban elmondható, hogy egy bizonyos számú kiértékelésig minden együttható gyorsan konvergál a szimulált értékhez, de tovább növelve a kiértékeléshez használt interferogramok számát már ellaposodik, nem javul tovább szignifikánsan a pontosság. Ez az ábrán kb. 30 db interferogramnál következik be.

A módszerhez egy hasonló felületet hoztam létre, mint a 8. ábrán lévő normaláláshoz, kiegészítve egy alsó *Delay* sorral, ahova *fs* mértékegységben a karok

közti késleltetés értékét lehet írni (12. ábra). Állandó fázisú pontokat beilleszteni és törölni azonosan az i és d billentyűkkel lehetséges. Ha megtörtént az adatok bevitele, akkor az ablak bezárásával a program hitelesíti és rögzíti azokat, majd a soron következő interferogramot nyitja meg. Az állandó fázisú pont módszeréhez tartozó kódrészlet magyarázattal együtt a 6.1 mellékletben megtalálható.



12. ábra. Felhasználói felület az állandó fázisú pont módszeréhez.

A fázismodulált koszinusz-függvény illesztéses módszer viszonylag egyszerűen implementálható. Az 1. táblázatban lévő interferogramokat kiértékeltem ezzel a módszerrel is, először hagyományosan, majd az általam írt szukcesszív kiértékelést használva. Mindkettő esetben a kapott eredmények pontosan megegyeztek a szimulált értékkel. Összevetésként azonban elmondható, hogy a hagyományos kiértékelésnél csak akkor kaptam megfelelően illeszkedő görbét, ha kezdőértékként pontosan megadtam a szimulált együtthatót, ezzel szemben a szukcesszív illesztést használva - bármely interferogramról is volt szó - elég volt a GD értékét kezdőértékként megadni. A program képes a csoportkésleltetés automata becslésére is, a GD_lookup beépített függvényével. Ily módon egy mérési sorozat akár egy for ciklussal is kiértékelhető. Egy ilyen, és egy hagyományos kiértékelés példa kód is megtalálható a 6.2. és 6.3 mellékletekben.

4.5. Mért interferogramok kiértékelése

Ebben a fejezetben az általam mért interferogramokat értékelem ki az állandó fázisú pont módszerével és fázismodulált harmonikus függvény illesztésével, továbbá összevetem a hagyományosan és a 4.2 fejezetben leírt normálás után kapott eredményeket. Méréseim során a 1. ábrán látható Michelson-interferométeres elrendezést használtam Avantes 3648 spektrométerrel és 100 W-os halogénlámpával. Az összes mérést 800 nm-nek megfelelő központi frekvenciával értékeltem ki.

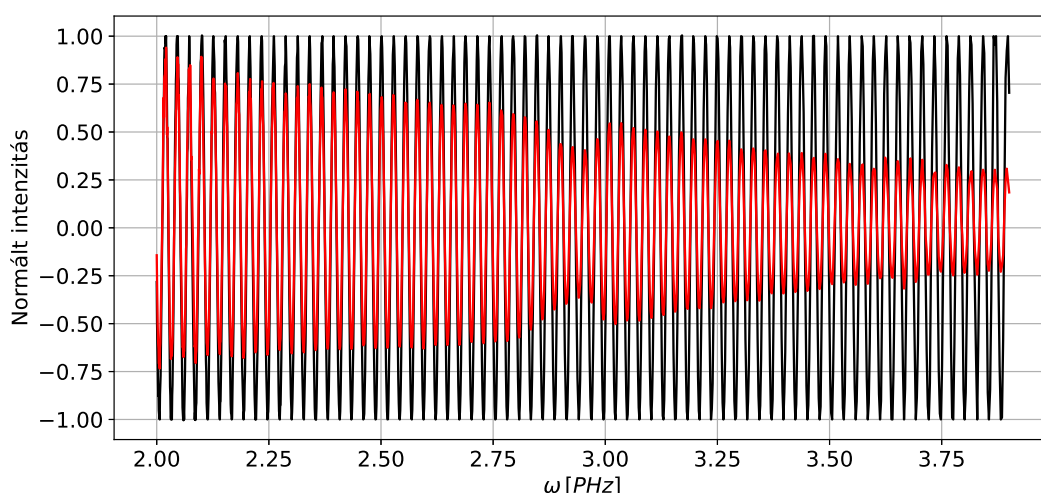
4.5.1. Üres interferométer diszperziója

Első lépésként fontos az interferométer maradék diszperzióját meghatározni, mivel ezzel majd a kapott eredményeket korrigálnunk kell. Ebben a szekcióban az erre vonatkozó eredményeimet mutatom be. Ezen kiértékeléseket csak koszinusz-függvény illesztéssel végeztem el, mivel diszperzív minta hiányában az interferogramokon nem jelent meg állandó fázisú pont. 18 különböző késleltetésnél felvett interferogramot használtam fel, amiket 2.0 és 3.9 PHz közötti tartományban értékeltem ki. A maradék diszperziót harmadrendig vizsgáltam. Az 2. táblázatban összefoglaltam a kapott adatokat.

	Hagyományosan normált	Burkolóval normált
GDD [fs^2]	$2,05 \pm 0,23$	$2,12 \pm 0,21$
TOD [fs^3]	$5,52 \pm 0,72$	$5,69 \pm 0,55$

2. táblázat. Üres interferométer maradék diszperziója

Bár a burkolóval való normálás több időt vett igénybe, az eredmény pontossága javult: e módon mindkét esetben csökkent a szórás értéke. Mivel állandó fázisú pont sem jelent meg, a széleken megjelenő hibajelenségeket pedig egyszerű kivágni, így ebben az esetben elmondható, hogy ideális körülmények között tudott működni az eljárás. További általános tapasztalat, hogy a koszinusz-függvény illesztés során az illesztést jellemző R^2 értéke is jelentős javuláson ment át: átlagban 0.8-ról 0.95-re javult a kiértékelések során. A 13. ábrán látható egy általam mért interferogram esetén a két normálás összehasonlítása.



13. ábra. Hagyományos (piros) és a burkolókkal normált (fekete) interferogram felskálázva a $[-1, 1]$ intervallumra.

4.5.2. Üveglap diszperziója

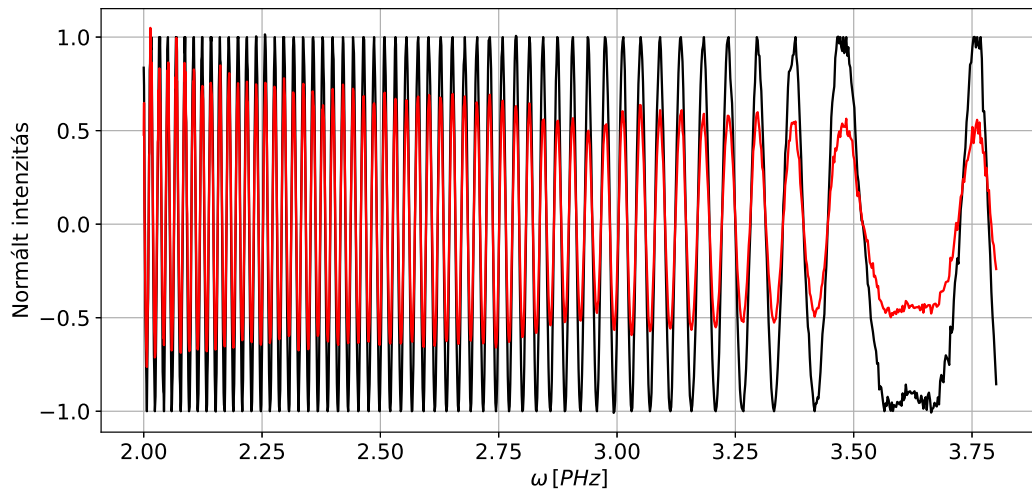
Ebben a fejezetben egy ismeretlen anyagú, $2.18 \pm 0.01 \text{ mm}$ vastagságú üveglap diszperziós együtthatóit fogom meghatározni, majd a kapott eredményekből kísérletet teszek az üveglap anyagának beazonosítására. A koszinusz-függvény illesztéses kiértékeléshez 14 különböző karok közti késleltetésnél felvett interferogramot használtam fel, szintén 2.0 és 3.9 PHz közti frekvenciatartományban, és itt is összehasonlítottam a két különböző normálást. Az állandó fázisú pont módszerével való kiértékelés során 3 interferogramot nem tudtam felhasználni, mivel azokon nem jelent meg SPP, így csak 11 interferogramból gyűjtöttem információt. Megjegyzendő, hogy az állandó fázisú pont módszerénél a két normálást nincs értelme összehasonlítani, mivel az állandó fázisú pont helye mindkettő esetben azonos. Mivel hagyományos üveglappal végeztem mérést, ennek megfelelően a diszperziót harmadrendig vizsgáltam.

Módszer	Koszinusz-függvény illesztés (hagyományosan normált)	Koszinusz-függvény illesztés (burkológörbékkel normált)	Állandó fázisú pont
GDD [$f s^2$]	$156,71 \pm 2,79$	$156,81 \pm 2,62$	159,37
TOD [$f s^3$]	$118,82 \pm 6,64$	$119,31 \pm 5,62$	115,99

3. táblázat. A kalibrálás után kapott eredmények az üveglap esetében.

A burkológörbékkel végzett normálás ebben az esetben már nem vezetett annyira szignifikáns javulásra, mint az üres interferométer esetén, mivel az állandó fázisú pontnál a burkoló pontatlansága is közrejátszott, de továbbra is előrelépést jelentett

a hagyományos normálással szemben. Fontos észrevenni, hogy a mérés során $2 \times 2.18 \text{ mm}$ üveg diszperzióját mértük meg, mivel az impulzus kétszer haladt keresztül a mintán. A mért együtthatók nagyban egyezést mutatnak a mért hullámhosszon az ömlesztett kvarcra (*fused silica*) jellemző együtthatókkal, melyek $GDD = 157.71 \text{ fs}^2$ és $TOD = 120.00 \text{ fs}^3$, így valószínűsíthető, hogy a mért üveglap ilyen anyagú volt. Ebben az esetben a két normálás összehasonlítása a 14. ábrán látható.



14. ábra. Diszperzív minta esetén a hagyományos módon (piros) és a burkolókkal normált (fekete) interferogram felskálázva a $[-1, 1]$ intervallumra.

A saját méréseim kiértékelése során a 4.2. fejezetben leírt normálás minden esetben jobb pontosságú eredményre vezetett.

5. Összefoglalás

Dolgozatom során rávilágítottam, hogy ultrarövid impulzusok esetében elengedhetetlen azon közegek anyagi diszperziójának ismerete, amiben az impulzus halad. Ennek mérésére spektrálisan bontott interferometria módszerét választottam, ezen belül is nagyobb hangsúlyt fektettem azokra a kiértékelési eljárásokra, amelyek alacsonyabb spektrális felbontás mellett is alkalmazhatók maradnak.

Munkám során Python nyelvet használva létrehoztam egy olyan modult, amely egyszerűen használható, logikus felépítésű. Dolgozatomban megvizsgáltam egy hagyományostól eltérő interferogram normálási módszert, ami az alsó és felső burkológörbék segítségével szorítja az interferogramot a kívánt tartományba. Ezt a normálási eljárást szimulációk útján vizsgáltam, amiből megállapítottam néhány kvalitatív tulajdonságát. Ezután bemutattam egy általam fejlesztett algoritmust, amely az egymás utáni koszinusz-függvény illesztésen alapszik, és amely nagyban meggyorsíthatja és automatizálhatja a fázismodulált koszinusz-függvény illesztésen alapuló kiértékeléseket.

Ezt követően megbizonyosodtam a megírt kiértékelési eljárások helyességéről, majd rátértem az általam mért spektrális interferogramok kiértékelésére. A saját méréseim során azt tapasztaltam, hogy az 4.2. fejezetben leírt normálást használva a kiértékelési eredményeim szórása minden esetben kisebb volt a hagyományossal szemben. Az általam létrehozott programmal sikeresen ki tudtam értékelni egy ismeretlen anyagú üveglap diszperzióját, ez alapján pedig nagy biztonsággal képes voltam beazonosítani.

Annak köszönhetően, hogy objektumorientált módon íródott az általam létrehozott modul, az könnyen bővíthető és továbbfejleszhető, de jelen formájában is jó kiindulási alapot jelenthet további spektrálisan bontott interferogramok kiértékelésére. Érdeemes lehet még implementálni az ablakolt Fourier-transzformációs módszert, illetve további magasabb rendű diszperziós együtthatók beépítése is fontos lehet (jelenleg maximum ötödrendig képes vizsgálni a program). Ezekkel akár alkalmassá tehető különlegesebb optikai elemek, pl. speciális optikai szálak fázisfüggvényeinek a vizsgálatára is.

6. Mellékletek

6.1. Kiértékelés az állandó fázisú pont módszerével

```
from pysprint import SPPMethod

# lista, ami tartalmazza a felhasználandó
# interferogramok fájlneveit sztringként
ifgs = [...]

# lista, ami tartalmazza a felhasználandó
# tárgykarok spektrumának fájlneveit sztringként
sam = [...]

# lista, ami tartalmazza a felhasználandó
# tárgykarok spektrumának fájlneveit sztringként
ref = [...]

# Az állandó fázisú pont módszeréhez tartozó objektum
# felépítése. A **options a betöltéshez tartozó paramétereket
# szimbolizálja
myspp = SPPMethod(ifgs, ref, sam, **options)

# ciklus, ami végigfut az `myspp`-ben lévő interferogramokon
for ifg in myspp:

    # az éppen aktuális interferogram adatainak kiíratása
    # a konzolba (opcionális)
    print(ifg)

    # az állandó fázisú pont módszeréhez tartozó
    # felület megnyitása
    ifg.open_SPP_panel()

# ahogyan az adatok rögzítése megtörtént a fenti
# ciklusban, úgy kiértékeljük őket
myspp.calculate(reference_point=2.355, order=2)
```

6.2. Kiértékelés fázismodulált koszinusz-függvény illesztésével

```
from pysprint import CosFitMethod

# interferogram betöltése fájlból a `parse_raw` konstruktorral
mycosfit = CosFitMethod.parse_raw('ifg.txt', 'ref.txt', 'sam.txt')

# frekvenciatartományba váltás
mycosfit.chdomain()

# csak a 2 és 4 PHz közti értékek használata
mycosfit.slice(2, 4)

# kezdőértékek az illesztési paramétereknek
mycosfit.guess_GD(20)
mycosfit.guess_GDD(200)
mycosfit.guess_TOD(-300)

# maximálisan csak harmadfokú diszperzió feltevése
mycosfit.set_max_order(3)

# illesztés végrehajtása
mycosfit.calculate(reference_point=2.355)

# az illesztés és az adatsor megjelenítése
mycosfit.plot_result()
```

6.3. Egyszerre több interferogram kiértékelése fázismodulált koszinusz-függvény illesztéssel

```
from pysprint import CosFitMethod

# lista, ami tartalmazza a felhasználandó
# interferogramok fájlneveit sztringként
ifgs = [...]

# lista, ami tartalmazza a felhasználandó
# tárgyakarok spektrumának fájlneveit sztringként
sam = [...]
```

```

# lista, ami tartalmazza a felhasználandó
# referenciakarok spektrumának fájlneveit sztringként
ref = [...]

for i in range(len(ifg)):

    # az i-edik fájlok betöltése
    mycosfit = CosFitMethod.parse_raw(ifgs[i], ref[i], sam[i])

    # frekvenciatartományba váltás
    mycosfit.chdomain()

    # csak a 2 és 3.9 PHz közti értékek használata
    mycosfit.slice(2, 3.9)

    # automata GD becslés
    mycosfit.GD_lookup(reference_point=2.355)

    # a szukcesszív koszinusz illesztés futtatása
    mycosfit.optimizer(
        reference_point=2.355,
        order=3,
        initial_region_ratio=0.05,
        extend_by=0.05,
        coef_threshold=0.7
    )

# Magyarázat:
# initial_region_ratio=0.05 : a kezdő régió legyen 5%-a az adatsornak
# extend_by=0.05 : a tartománynövekedés legyen 5% minden lépésnél
# coef_threshold=0.7 : csak akkor lépen tovább az algoritmus, ha
# az R négyzet értéke legalább 0.7.

```

6.4. Hagyományos és burkológörbékkel való normálás

```
from pysprint import Dataset

# adatok betöltése fájlból
ifg = Dataset.parse_raw('ifg.txt', 'ref.txt', 'sam.txt')

# Amennyiben a 'ref.txt' és 'sam.txt' fájlokat is megadjuk, vagyis
# a referencia- és tárgykar spektrumát is betöltjük, a program
# automatikusan normálni fogja az interferogramot.

# adatok betöltése fájlból
ifg2 = Dataset.parse_raw('ifg.txt')

# Ha a karok spektrumát nem töltjük be, akkor a normalize
# függvénnnyel elindíthatjuk a matplotlib felületet a
# burkoló megtalálásához. Ebben a példában a normálás után
# a program el fogja menteni az eredményt 'fájlnév.txt' névvel.

ifg2.normalize('fájlnév.txt')
```

Az általam írt szoftver teljes dokumentációja a <https://pysprint.readthedocs.io/> oldalon érhető el.

Hivatkozások

- [1] J.-C. Diels, W. Rudolph: *Ultrashort Laser Pulse Phenomena*, 2nd Edition, Academic Press (2006).
- [2] T. Grósz: *Mikrostruktúrált optikai szálak diszperziójának vizsgálata spektrális interferometriával*, Ph.D. értekezés, Szegedi Tudományegyetem, Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék, Szeged (2017).
- [3] A. Kovács: *Optikai elemek fázistulajdonságainak interferometrikus vizsgálata*, Ph.D. értekezés, Szegedi Tudományegyetem, Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék, Szeged (2000).
- [4] Á. Börzsönyi: *Spektrálisan bontott interferencián alapuló eljárás kidolgozása extrém kicsiny diszperzió mérésére* Diplomamunka, Szegedi Tudományegyetem, Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék, Szeged (2006)
- [5] A. Kovács, Á. Börzsönyi, Z. Horváth, K. Osvay: *A femtoszekundumos optika alapjai*, elektronikus tananyag
- [6] T. Grósz, A. Kovács, M. Kiss, R. Szipőcs: *Measurement of higher order chromatic dispersion in a photonic bandgap fiber: comparative study of spectral interferometric methods*, Applied Optics (2014)
- [7] R. D. Guenther: *Modern Optics*, Wiley & Sons (1990)
- [8] T. Grósz, A. Kovács, K. Mecseki, L. Gulyás, R. Szipőcs: *Monitoring the dominance of higher-order chromatic dispersion with spectral interferometry using the stationary phase point method.*, Optics Communications. (2015)
- [9] P. Hlubina, D. Ciprian, and L.Knyblová: *Direct measurement of dispersion of the group refractive indices of quartz crystal by white-light spectral interferometry*, Optics Communications. (2007).
- [10] T. Oliphant: *Python for Scientific Computing*, Computing in Science & Engineering. 9. (2007)
- [11] K. Staszek, M. Bogusz: *Simple fringe pattern normalization algorithm*. IFAC Proceedings Volumes (2012)
- [12] M. Bernini, A. Federico, G. Kaufmann: *Normalization of fringe patterns using the bidimensional empirical mode decomposition and the Hilbert transform.*, Applied Optics (2009)

Köszönetnyilvánítás

Ezúton meg szeretném köszönni témavezetőm, Dr. Kovács Attila támogatását a mérések kivitelezésében és a dolgozat elkészítésében nyújtott segítségét.

Köszönettel tartozom a www.stackoverflow.com közösségének a programozással kapcsolatos kérdéseim gyors megválaszolásáért.

Hálás vagyok a családomnak, barátaimnak és a páromnak, hogy segítségemre voltak és támogattak a dolgozat elkészítése során.

A szakdolgozat elkészültét az *EFOP-3.6.2-16-2017-00005* azonosítószámú „Ultragyors fizikai folyamatok atomokban, molekulákban, nanoszerkezetekben és biológiai rendszerekben” című projekt támogatta.

Nyilatkozat

Alulírott Leéh Péter kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szeged, 2021. május 15.

.....

aláírás