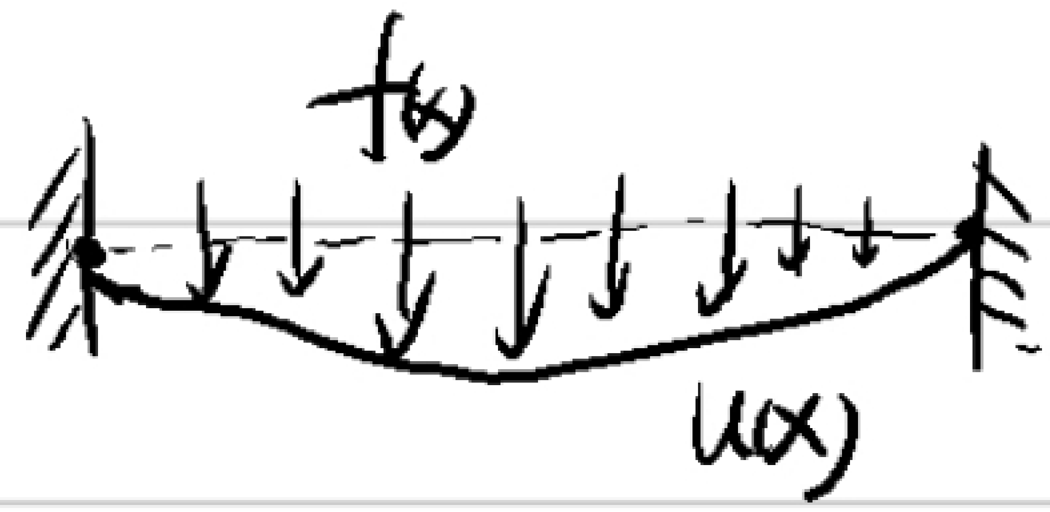
第五章，椭圆问题的变分形式

✡ 引例，两点BVP

(D) $\quad -u'' = f(x),\ 0<x<1$

$\quad$ B.C. $\ u(0) = u(1) = 0$



定义 $(v,w) = \int_0^1 v(x)w(x)\,dx, \qquad F(v) = \frac{1}{2}(v',v') - (f,v)$

令 $V = \{v$ "光滑"，$v(0)=v(1)=0\}$

最小作用量原理 (M) $\quad$ Find $u\in V$, s.t. $F(u)\le F(v),\ \forall v\in V$.

虚功原理 (V) $\quad$ Find $u\in V$, s.t. $(u',v') = (f,v),\ \forall v\in V$

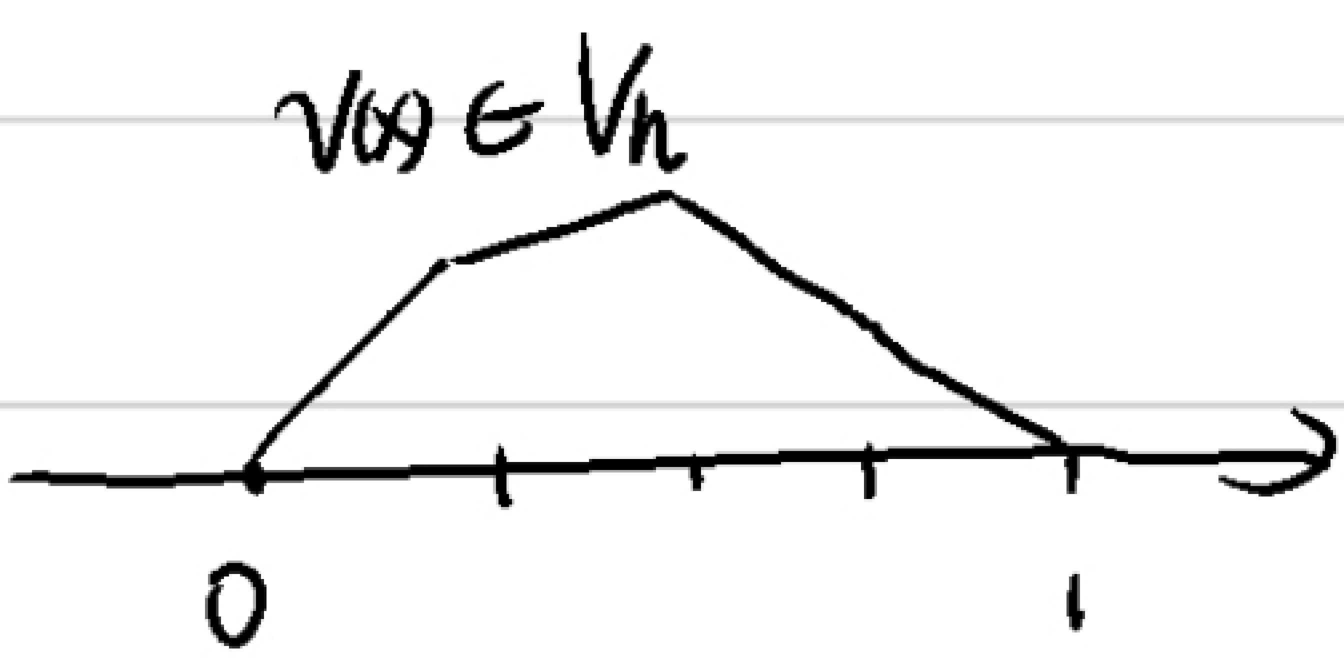
易知：① $(D) \Rightarrow (V) \Leftrightarrow (M)$

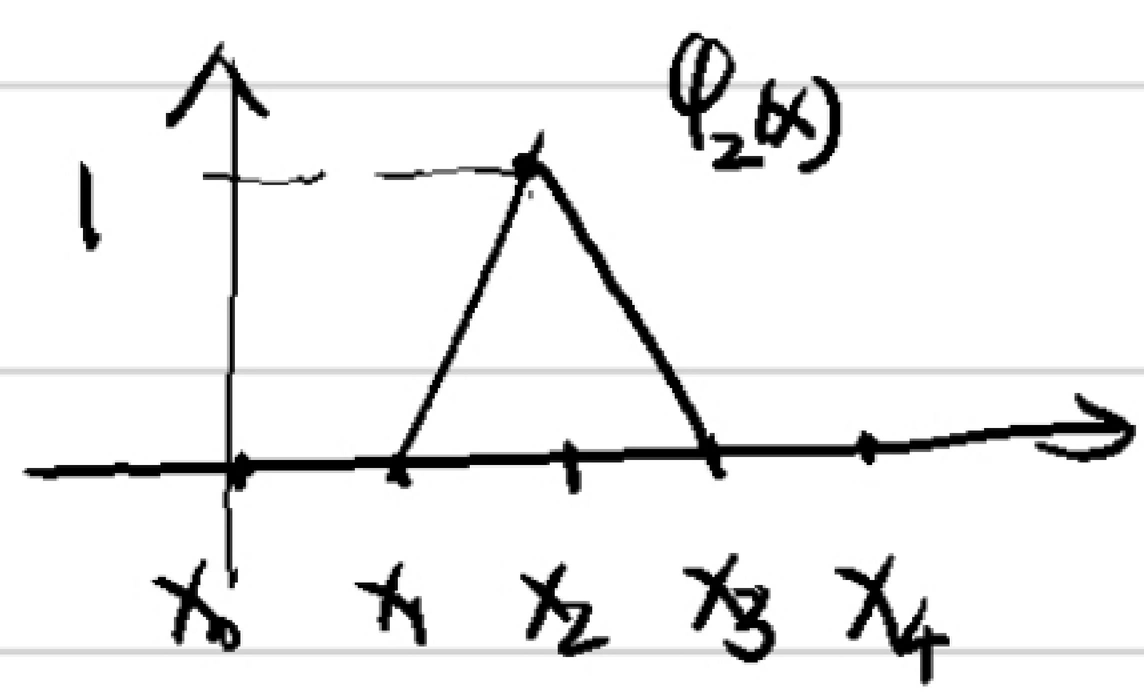
② 若 u "光滑"，则 $(V)\Rightarrow(D)$

有限元方法 (FEM)

令 $\Delta x = \frac{1}{M+1},\quad x_j = j\Delta x,\quad j=0,1,\cdots,M+1,\quad I_j = [x_{j-1}, x_j]$

令 $V_h = \{v$ 在 I_j 上线性，$v(0)=v(1)=0\}$





则 $v\in V_h$ 可表示为 $v=\sum_{i=1}^{M}\eta_i\varphi_i(x)$

(V_h) Galerkin 法

Find $u_h\in V_h$ s.t. $(u_h', v')=(f,v)\quad \forall v\in V_h$

令 $u_h=\sum_{i=1}^{M}\xi_i\varphi_i(x)$, $b_i=(f,\varphi_i)$

则 $(V_h)\Leftrightarrow A\xi=b$, 其中 $A=\frac{1}{h}\begin{bmatrix}2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1\\ & & -1 & 2\end{bmatrix}$

(M_h) Ritz 法

Find $u_h\in V_h$ s.t. $F(u_h)\le F(v)\quad \forall v\in V_h$

也可用优化方法求解.

总结: 有限元方法

① 变分形式 (第五章)

② 构造有限元法 (第六章)

③ 误差分析 (第七章)

1950's 60's structure engineering "finite element"

mid 60's roots in variational method

考虑抽象的变分问题

(M) Find $u \in U$ s.t. $J(u) = \inf_{v \in U} J(v)$

这里: ① U 非空, 闭 $U \subseteq V$ Banach/Hilbert

② $J: V \to \mathbb{R}$ 能量泛函

考虑 J 的通常形式

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - f(v)$$

这里: ① $a(\cdot,\cdot): V \times V \to \mathbb{R}$ 对称, 连续, 双线性

② $f: V \to \mathbb{R}$ 连续, 线性.

eg. $a(v,v) = \frac{1}{2}(v,v)$ $f(v) = \langle f, v \rangle$.

求解: ① 构造 $\{u_k\}$ $u_k \to u$

② 找到 u 满足的方程 (Euler-Lagrange)

需要定义 泛函 $J(v)$ 的"微商"!

回忆: 多元微分 $f(x_1, \cdots, x_n) = f(x_0)$

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i}_{} + o(|\Delta x|)$$

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^{n} A_i dx_i = \vec{A} \cdot d\vec{x} = A(dx)$$

$$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

设 $\Omega\subset X$（函数空间） Ω 开 $F:\Omega\to Y$（视为 $\mathbb{R}$）

定义1 F 在 $x\in\Omega$ 处 Fréchet 可微

如果存在 $A: X\to Y$ s.t. $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$

当 $\|z\|\le\delta$ 时，有 $\|F(x+z)-F(x)-Az\|_Y\le\varepsilon\|z\|_X$

称 A 为 F 在 x 点处的 Fréchet 微商 $F'(x)=A$

$F'(x)z=Az$ 为 F 在 x 点处的 Fréchet 微分

注：方向导数的推广为 Gâteaux 微商

计算： $F'(x)z=\frac{d}{dt}F(x+tz)\big|_{t=0}$

Fréchet 可微泛函 F 在 x 处取（局部）极值的

必要条件： $F'(x)z=0$

eg. $J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-f(v)$

$J'(u)v=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}(J(u+tv)-J(u))=a(u,v)-f(v)$

J在u取极值(必要)条件　$a(u,v)=f(v),\ \forall v\in U$

若：① (V) u满足 $a(u,v)=f(v),\ \forall v\in V$

② $\exists\ \alpha>0$ s.t. $a(v,v)\geq\alpha\|v\|^2$

则 $J(u+tv)=\frac{1}{2}a(u+tv,u+tv)+f(u+tv)$

$$=\frac{1}{2}a(u,u)+f(u)$$

$$+t\,a(u,v)+t f(v)+\frac{1}{2}t^2 a(v,v)$$

$$\geq J(u)+\frac{1}{2}t^2\alpha\|v\|^2$$

若 u 在J的唯一最小值点

注：(V)可抽象地写作

(V)　Find $u\in V$ s.t. $A(u)v=0,\ \forall v\in V.$

下面讨论 (V) 的解的存在唯一性.

定理5.1 (Lax-Milgram 引理)

设 V 是 Hilbert 空间，$a(\cdot,\cdot): V\times V\to\mathbb{R}$ 连续双线性泛函.

满足 V 椭圆性条件（强制性条件）

$$\exists\ \alpha>0 \quad s.t. \quad a(u,u)\geq\alpha\|u\|^2, \quad \forall u\in V$$

又设 $f: V\to\mathbb{R}$ 连续线性泛函 则问题

(V) 求 $u\in V$ s.t. $a(u,v)=f(v)$ $\forall v\in V$.

存在唯一解.

准备：① Riesz 表示定理

H 是 Hilbert 空间，H^* 由 H 到 $\mathbb{R}$ 的连续线性泛函构造

给定 $x\in H$，可定义 $\phi_x y=\langle x,y\rangle$ $\quad \forall y\in H$

即 $\phi_x\in H^*$.

定理：映射 $\Phi: H\to H^*$，$\Phi(x)=\phi_x$

是双射（令 $\tau=\Phi^{-1}$，$\tau(\phi_x)=x$，称为 Riesz 映射）

且 $\|\tau(\phi_x)\|=\|\phi_x\|$ 即 $\|\Phi(x)\|=\|x\|$. ———

② 压缩映射原理

(X,d) 为非空的完备度量空间

设 $T: X\to X$ 为 X 上的一个压缩映射

即 $\exists\, q<1$ s.t. $\forall x,y\in X$ 有

$$d(T(x),T(y))\leq q\, d(x,y)$$

则 T 在 X 内有且只有一个不动点

思路: $a(u,v)=f(v)\quad \forall v\in V$

$LHS = A(u)v = \langle \tau A(u), v\rangle \qquad RHS = \langle \tau f, v\rangle$

再证 $\tau A(u)=\tau f$ 存在唯一解 (压缩映象)

证明: 由 $a(\cdot,\cdot)$ 连续知 $\exists M>0$

s.t. $\quad a(u,v)\leq M\|u\|\|v\| \quad \forall u,v\in V$

固定 u, 则有 $A(u)\in V^*$ s.t.

$$A(u)v = a(u,v),\quad \forall v\in V$$

可证 $A: V\to V^*$ 有界线性、(练习)

定义 $\tau: V^* \to V$ 为 Riesz 映射

则 $A(u)v = \langle \tau A(u), v\rangle = a(u,v)$

且 $f(v) = \langle \tau f, v\rangle$

由 v 的任意性，(V) 问题等价于

(V') 求 $u \in V$ s.t. $\tau A(u) = \tau f$

定义辅助映射 $F: V \to V$

$$F(v) = v - \rho(\tau A(v) - \tau f)$$

这里 $\rho > 0$ 为待定常数 $F(u) = u \Leftrightarrow \tau A(u) = \tau f$

可证当 ρ 充分小（约为 $\rho \in (0, \frac{2\alpha}{M^2})$）

F 是压缩映象 在 V 中有唯一不动点，记为 u

即 $\tau A(u) = \tau f$. 证毕.

☆ 椭圆边值问题

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 连通开区域　$\partial\Omega$ 是 Ω 的边界

$$\partial\Omega=\partial\Omega_0\cup\partial\Omega_1\qquad \partial\Omega_0\cap\partial\Omega_1=\phi$$

$$(D)\quad\begin{cases}-\Delta u=f, & x\in\Omega\\ u=\bar{u}_0 \quad x\in\partial\Omega_0, & \frac{\partial u}{\partial n}+bu=g \quad x\in\partial\Omega_1\end{cases}$$

更一般地，方程 k 阶　边界 l 阶

$u\in C^k(\Omega)\cap C^l(\bar{\Omega})$ 满足方程与B.C. 称为古典解

下面定义弱解

① —— $C_0^m(\Omega)$：紧支集，m 次连续可微

② —— 弱偏导（广义偏导）

若 $u\in C^m(\Omega)$，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$　$\forall\phi\in C_0^m(\Omega)$

有　$\int_\Omega \phi\,\partial^\alpha u\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int u\,\partial^\alpha\phi\,dx$

定义 若 $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ 若 $\exists\, V_\alpha\in L^1_{loc}(\Omega)$

s.t. $\int_\Omega V_\alpha\phi\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u\,\partial^\alpha\phi\,dx,\ \forall\phi\in C_0^\infty(\Omega)$

则称 V_α 是 u 关于 α 的弱偏导，记为 $\partial^\alpha u=V_\alpha$.

下面导数都是弱偏导

③ —— Sobolev 空间　　$\|\cdot\|_{0,p}$ Lp范数

定义5.4. 设 $m\in\mathbb{N}$, $1\le p\le+\infty$ 令

$$W=\{u\in L^p(\Omega),\ \partial^\alpha u\in L^p(\Omega),\ \forall\alpha\ \text{s.t.}\ 0\le|\alpha|\le m\}$$

集合 W 在赋予范数

$$\|u\|_{m,p}=\Big(\sum_{0\le|\alpha|\le m}\|\partial^\alpha u\|_{0,p}^p\Big)^{\frac{1}{p}}\quad 1\le p<+\infty$$

$$\|u\|_{m,\infty}=\max_{0\le|\alpha|\le m}\|\partial^\alpha u\|_{0,\infty}$$

得到的线性赋范空间是一个 Sobolev 空间，记为 $W^{m,p}$

特别地 当 $p=2$ 时，$W^{m,p}$ 是一个 Hilbert 空间，记为 H^m

定理5.4 若 $\partial\Omega$ Lipschitz 连续

则 $1\le p<\infty$ 时　$C^\infty(\bar{\Omega})$ 在 $W^{m,p}$ 中稠密

$C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 内的闭包，记为 $W_0^{m,p}$

当 $p=2$ 时　记为 $H_0^m(\Omega)$

$W^{m,p}(\Omega)$中的元素：在Ω去掉一个零测集上定义的函数的等价类。

Q: $u \in W^{m,p}(\Omega)$，u在$\partial\Omega$上？可积性？

④ --- 嵌入与迹

Def 设 X, Y 为 Banach 空间 $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$

若 $\forall x \in X$, $x \in Y$ 且 $\exists C$ 与x无关

s.t. $\|x\|_Y \le C\|x\|_X$

则称 $I: X \to Y$, $Ix = x$ 为一个嵌入算子

记嵌入关系 $X \hookrightarrow Y$

* 若I是紧算子，$X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$ (紧嵌入)

由于$C^\infty(\bar\Omega)$在$W^{m,p}$中稠密，则 $\forall u \in W^{m,p}(\Omega)$

$\exists \{u_k\} \subset C^\infty(\bar\Omega)$ s.t. $\|u_k - u\|_{m,p} \to 0$, $k \to \infty$

记 u_k 在$\partial\Omega$上的限制为 $u_k|_{\partial\Omega}$

Def. 若 $\forall \{u_k\}$ $\{u_k|_{\partial\Omega}\}$ 在$L^p(\partial\Omega)$中收敛

称其极限为 u在$\partial\Omega$上的迹 记为 $u|_{\partial\Omega}$

Def：映射 $\gamma: W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\partial\Omega)$，$\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$

为迹算子.

若 $\gamma: W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\partial\Omega)$ 是连续的

则称 $W^{m,p}(\Omega)$ 嵌入到 $L^q(\partial\Omega)$，记为 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$.

可以证明：(1) $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$

(2) $H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0 \}$

$H_0^2(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \}$

考虑 (D) $\begin{cases} -\Delta u = f & x \in \Omega \\ u = u_0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$

$u \in C^2(\bar{\Omega})$ 是古典解，则 $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$

易得 $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$

记 $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$

则有 $a(u,v) = (f,v)$

目标：$u \in C^2(\bar{\Omega})$ 弱化为 $H^1(\Omega)$

(V) 定义5.5 若 $u \in V(\overline{u}_0;\Omega)=\{u\in H^1(\Omega): u|_{\partial\Omega}=\overline{u}_0\}$

满足 $a(u,v)=(f,v) \quad \forall v\in H_0^1(\Omega)$

则称 u 为 (D) 的弱解

$V(\overline{u}_0;\Omega)$ 试探函数空间, $H_0^1(\Omega)$ 检验函数空间.

(M) 定义5.6 若 $u\in V(\overline{u}_0;\Omega)$ 满足 $J(u)=\min\limits_{u\in V(\overline{u}_0;\Omega)} J(v)$

则称 u 为 (D) 的弱解.

易证: $(D) \Rightarrow (V) \Leftrightarrow (M)$ (练习)

$+\, u\in C^2(\Omega)$

下面讨论弱解唯一性

回顾 Lax-Milgram

Find $u\in V$, s.t. $a(u,v)=(f,v)$, $\forall v\in V$

观察, u,v 属于相同的空间.

准备：由 Poincaré-Friedrichs 不等式（定理5.4）

$\exists\, \alpha > 0$ s.t. $a(v,v) \geq \alpha \|v\|_{1,2}^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$ (※)

定理5.9 设区域 Ω 有界，连通，边界 Lipschitz 连续

$f \in L^2(\Omega)$ 且 $\exists\, u_0 \in H^1(\Omega)$ 满足 $u_0|_{\partial\Omega} = \bar{u}_0$

则问题(D)的弱解存在唯一

分析：令 $\hat{u} = u - u_0$，则 $\hat{u}|_{\partial\Omega} = 0$

$a(\hat{u}+u_0, v) = (f,v)$，即 $a(\hat{u},v) = (f,v) - a(u_0,v)$

证明：取 $V = H_0^1(\Omega)$ 定义 $F: V \to \mathbb{R}$

为 $F(v) = (f,v) - a(u_0,v)$

则 $F(v)$ 是 V 上的连续线性泛函

又由(※)和 Lax-Milgram 引理知

变分问题 $\begin{cases} \text{求 } u \in V \text{ s.t.} \\ a(u,v) = f(v), \ \forall v \in V \end{cases}$

存在唯一解，记为 $\hat{u}$

则 $u = \hat{u} + u_0$ 是(D)的唯一弱解.

下面考虑 Neumann 边值问题

$$(D)\quad \begin{cases} -\Delta u = f, & x\in\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

设 $u\in C^2(\bar{\Omega})$ 是 (D) 的古典解

$\forall v\in C^\infty(\bar{\Omega})$ 有

$$\int_\Omega -\Delta u\, v\, dx = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n} v\, ds$$

令 $a(u,v)=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx \quad (g,v)_{\partial\Omega}=\int_{\partial\Omega} gv\, ds$

弱解：

(V) Find $u\in H^1(\Omega)$, s.t. $a(u,v)=(f,v)+(g,v)_{\partial\Omega}\quad \forall v\in H^1(\Omega)$.

可定义 $F(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-(f,v)-(g,v)_{\partial\Omega}$

(M) Find $u\in H^1(\Omega)$ s.t. $F(u)=\min\limits_{v\in H^1(\Omega)} F(v)$.

注：① $(D)\Rightarrow(V)\Leftrightarrow(M)$

② (V) (M) 不包含条件 $\frac{\partial u}{\partial n}=g$ on $\partial\Omega$

定理5.10 u是(V)弱解，且 $u\in C^2(\bar\Omega)$，则 u是(D)古典解

证明：将(V)改写成： $\forall v\in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega(-\Delta u-f)v\,dx+\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-g\right)v\,dx=0$$

先取 $v\in C_0^\infty(\Omega)\subset H^1(\Omega)$ 则有

$$\int_\Omega(-\Delta u-f)v\,dx=0\qquad\forall v\in C_0^\infty(\Omega)$$

则有 $-\Delta u=f\qquad\forall x\in\Omega$

再取 $v\in C^\infty(\bar\Omega)$，有 $\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-g\right)v\,dx=0$

则有 $\frac{\partial u}{\partial n}=g\quad\forall x\in\partial\Omega$. 证毕。

注：① 取 $v\equiv1$，得解存在必要条件 $\int_\Omega f\,dx+\int_{\partial\Omega}g\,dx=0$

② u是解 $u+C$也是解

常取 $V_0=\{u\in H^1(\Omega),\ \int_\Omega u\,dx=0\}$

③ 在V_0上，弱解存在唯一（练习）

④ 阅读强制/本质B.C.与自然B.C.