

微分方程数值解 HW 1

Due Date: 09-18, 在教学网上提交.

2022年9月10日

鼓励相互讨论, 但是请独立完成作业写作。

1. 考虑两点边值问题

$$u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

(1) 考虑特征问题

$$\phi''(x) = \lambda\phi(x), \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(1) = 0.$$

求特征值 λ 和特征函数 $\phi(x)$.

(2) 考虑用有限差分方法逼近此问题。将区间 $[0, 1]$ 进行 N 等分, 用二阶差商

$$L_h U_j = \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2}$$

代替二阶微商, 得到此边值问题的三点差分格式。将差分方程整理成如下形式的线性方程组

$$AU = f,$$

需要写清楚 A 和 f 的具体形式。求系数矩阵 A 的特征值和特征向量。与上一问相比, 你能得到什么结论?

2、证明模型问题的五点差分格式中, 差分算子 L_h 满足最大值原理。

3、考虑模型问题的九点差分格式

$$D_9^2 U_{i,j} = f_{i,j},$$

其中

$$D_9^2 u_{i,j} = \frac{1}{6h^2} [4u_{i-1,j} + 4u_{i+1,j} + 4u_{i,j-1} + 4u_{i,j+1} + u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1} - 20u_{i,j}].$$

(1) 求此方法的局部阶段误差。 f 满足什么条件时, $O(h^2)$ 的误差主项会消失?

(2) 对于, 一般的光滑右端函数 f , 定义函数 F , 使得如下的修正九点格式

$$D_9^2 U_{i,j} = F_{i,j},$$

对原模型问题截断误差有 4 阶的精度。

4、给出差分格式(1.3.12)的详细推导过程。

5、习题1, 第3题。