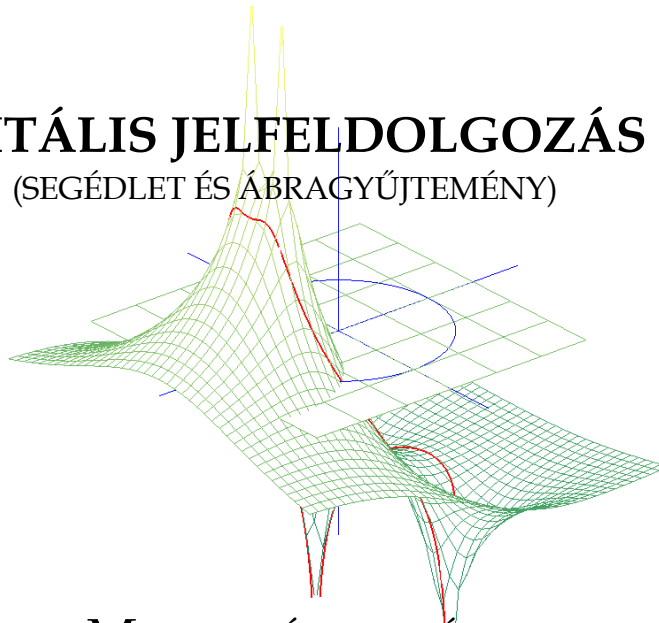


DIGITÁLIS JELFELDOLGOZÁS I.

(SEGÉDLET ÉS ÁBRAGYŰJTEMÉNY)



MINTAVÉTELEZÉS
DIGITÁLIS SZŰRÉS
DISZKRÉT TRANSZFORMÁCIÓK

Készítette: Fellegi József

2004

TEMATIKA

A tárgy anyaga be kívánja vezetni a hallgatót egy korszerű, széleskörűen csak az utóbbi évtizedekben elterjedt szakterületre; az analóg jelek közvetlen, numerikus módon történő feldolgozásába. Meg kívánja ismertetni a fontosabb elméleti alapokat, a jelfeldolgozási technikával megoldható feladatokat, azok néhány ismert megoldását, az alkalmazott speciális processzorokat, és ezek főbb jellemzőit. Végül egy konkrét alkalmazást, a digitális beszédfeldolgozás témakörét mutatja be. A kurzus anyagának elsajátításához az AUTOMATIKA tárgyban tanultak ismerete szükséges.

Óraszám: 2-0-1

Követelmény:

A tárgy félév végi számonkérési formája: **vizsga (3 kreditpont)**

A vizsga írásbeli, feleletválasztós teszt jellegű. A minimális szint: >50%-os pontérték.

Ajánlott irodalom:

[1.]	Dr. Simonyi Ernő:	Digitális szűrők	M.K. 1984.
[2.]	Csákány Antal:	Jelfeldolgozás	ELTE TTK jegyzet 1992.
[3.]	Rabiner, Rader:	Digital Signal Processing	IEEE edition, 1972.
[4.]	Craig Marwen, Gillian Ewers:	A Single Approach to Digital Signal Processing	TEXAS INSTRUMENTS 1993.
[5.]	Takács Gy., Gordos G.:	Digitális beszédfeldolgozás	M.K. 1985.
[6.]	Fallside, Woods.:	Computer speech processing	Prentice Hall, 1985.
[7.]	Kempelen Farkas:	Az emberi beszéd mechanizmusa, valamint a szerző beszélőgépeznek leírása	Szépirodalmi Kiadó, 1989.
[8.]	Gábor Dénes:	Válogatott tanulmányok	Gondolat 1976.
[9.]	ANALOG DEV.:	VISUAL DSP++	CD+EZLITE
[10.]	ANALOG DEV.:	ADSP-2189M leírás	CD
[11.]	G.A. KORN-T.M.KORN:	Matematikai kézikönyv műszakiaknak	M.K. 1984.
[12.]	Mikolás Miklós:	Valós függvénytan és ortogonális sorok	Tankönyvkiadó 1978.
[13.]	TEXAS INSTR.:	TMS320Cxx ASSEMBLER	T.I. 1993.
[14.]	TEXAS INSTR.:	TMS320C5x USER'S GUIDE	T.I. 1993.

IDŐBEOSZTÁS, RÖVID TEMATIKA

1.-2.	A mintavételezés és a Z transzformáció. A digitális jelmanipuláció elméleti megközelítései.
3.-4.	A digitális szűrés. IIR, FIR, adaptív szűrők.
5.-6.	A FOURIER analízis digitális megvalósításai. DFT, FFT algoritmusok.
7.	A DSP hardver elemei. A/D, D/A konverterek, jelprocesszorok.
8.	A TMS 320C50, mint tipikus HARVARD architektúra. A fixpontos DSP assembler.
9.	AD 2189M és a VISUAL DSP.
10.	Zárthelyi.
11.	Digitális moduláció, demoduláció.
12.-13.-15.	A lineáris predikció. Alkalmazási példa: a gépi beszédfeldolgozás.

TARTALOM

I. Mintavételezett rendszerek leírása

1. A mintavételezés elve. A SHANNON feltétel és következményei. Az A/D és D/A konverzió és hatása a jelfeldolgozásra.
2. A matematikai modell: a LAPLACE transzformáció diszkrét alakja.
3. A Z és az inverz Z transzformáció.

II. A konvolúció és diszkrét formája

1. A diszkrét konvolúció megvalósítása: a transzverzális szűrő.
2. A FIR szűrők lehetőségei, méretezési elvek.
3. Az IIR szűrő. Analógia a hagyományos szűrőkkel.
4. Szűrőtervezési példák.

III. A FOURIER analízis módszerei.

1. Spektrumszámítás diszkrét módon: a DFT.
2. Gyors számítási módszerek: FFT.
3. Alkalmazási példa.

IV. AD és DA konverterek

1. A DSP processzorok hardver környezete. Az A/D konverterek új típusai. (Túlmintavételezéses, "maradék", szigma-delta modulátorral kialakított, stb.) A párhuzamos és a kaszkád átalakítók.
2. A túlmintavételezéses konverter.

V. Jelprocesszorok (TMS320Cxx, ADSP 2100, PLESSEY komponensek.)

1. A jelprocesszorok általános architektúrája, fő jellemzői. A HARVARD architektúra.
2. ADSP 2189M jelprocesszor és fejlesztői környezete.
3. A TMS 320 processzorcsalád. A TMS 320C50.
4. Szisztolés rendszerek.
5. A DSP szoftver.

VI. A digitális moduláció.

1. A digitális kommunikáció.
2. QAM moduláció elemi műveletei és algoritmusai.

VII. A digitális beszédfeldolgozás.

1. A digitális beszédfeldolgozás két fontosabb területe.
2. A humán beszélőszervek analitikus modelljei.
3. A beszédszintézis lehetőségei és megvalósításai.
4. Fizikai szintű analízis: egy adaptív modell. A lineáris predikció.

1. BEVEZETÉS

Napjainkban széleskörű gyakorlati alkalmazása miatt, főleg az alkalmazott tudományok egyik igen dinamikusan fejlődő - bár igen sok részletében mára már lezárt - területe a JELFELDOLGOZÁS. (Továbbiakban DSP¹). A DSP analóg jelek közvetlen, numerikus módszerekkel történő feldolgozását jelenti, természetesen a digitális technika eszközeinek felhasználásával.

A digitális jelmanipuláció elmélete a tágabban vett diszkrét idejű rendszerek analizisére alapozódik. Matematikai modellként az ismert integrál-transzformációk (LAPLACE, FOURIER) szaggatott, szakaszos jelekre vonatkozó általánosításai, elsősorban a Z transzformáció szolgál. A szűkebben értelmezett elméleti alapokat ezen a szakterületen RABINER, RADER (pl. [3.]) munkái jelentik. Magyar nyelven SIMONYI ERNŐ könyve [1.] sorolható ide.

Igen fontos történeti tény: a csaknem lezárt - és az önmagában is szép - elmélet gyakorlattá válását az integrált áramköri technológia hatalmas iramú fejlődése tette lehetővé. Mindez persze kölcsönösen egymásra ható, egyre gyorsuló ütemű, hatalmas ívű fejlődést eredményezett kb. 1970-től az ezredfordulóig. Az is figyelemre méltó továbbá, hogy a DSP alkalmazásának egyik következményeként létrejött távközlési 'forradalom' az egyik legfontosabb profittermelő technológia volt az elmúlt évtizedekben.

Jelen kurzus ezen a kiemelkedő fontosságú területen kíván szemléletes képet adni. Előnyben részesítjük a megértést talán jobban segítő grafikus interpretációt. Célunk egy átfogó ismertetés, ahol először a jelek és rendszerek transzformált alakjaival lehetővé tett tervezési és méretezési elvek fő vonulatának bemutatását követően a digitális technika - jelenlegi, 2000-es évek körüli - hardver segédeszközeiről adunk áttekintést. Végül egy alkalmazást sejtetünk: ezt a digitális beszédfeldolgozás területére való bepillantással tesszük, illusztrálva a DSP lehetőségeit, alkalmazásának új minőséget is nyújtó erejét.

¹ Digital Signal Processing

1. A JEL INFORMÁCIÓTARTALMA

1.1. Bevezető

Egy időfüggvénnyel megadott jel a klasszikus módszerekkel jól leírható. Például:

$$\text{legyen } f(t) = A \sin \omega t, \quad \text{ha } t_1 < t < t_2.$$

$$\text{és } f(t) = 0 \quad \text{a fenti tartományon kívül.}$$

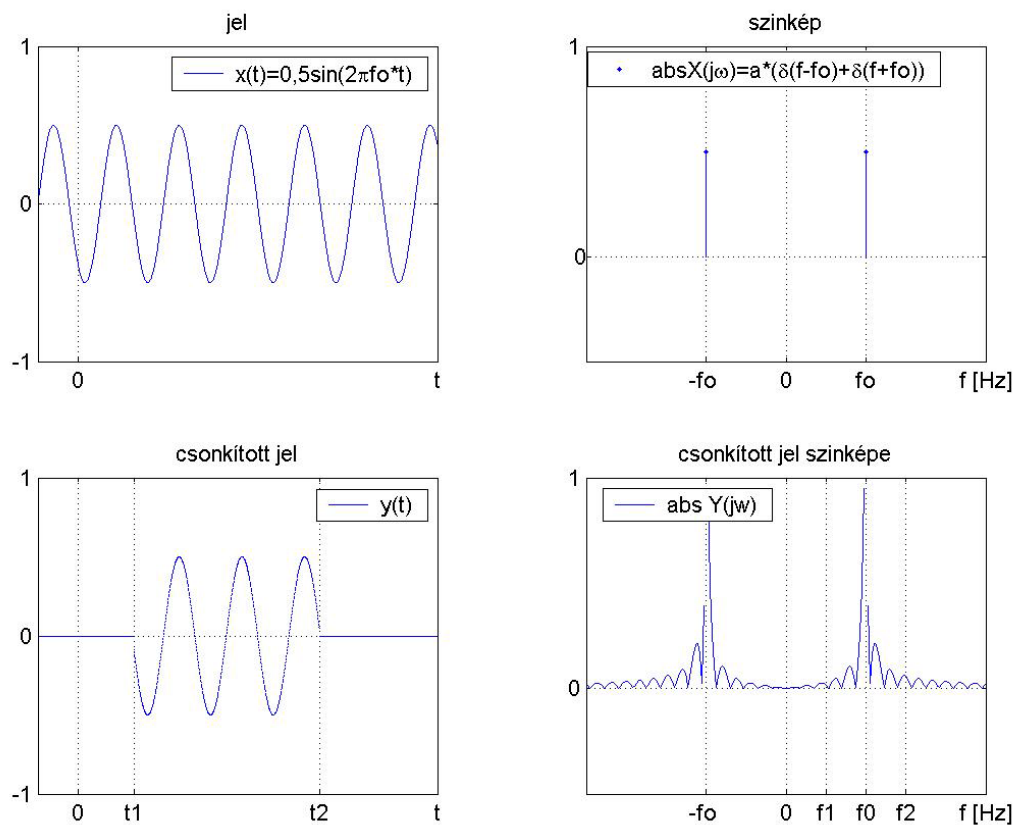
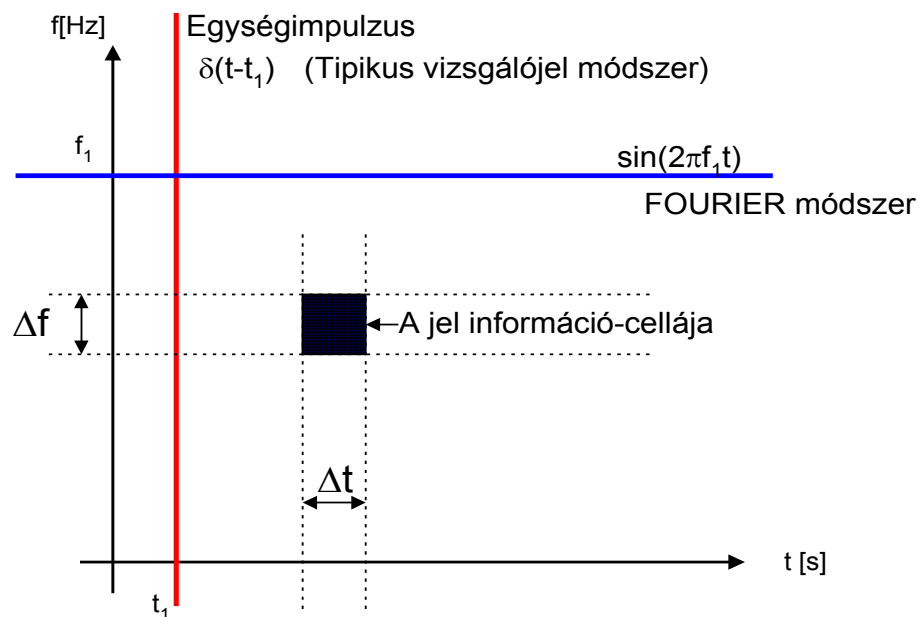
Jelünk tehát csak korlátozott ideig: $\Delta t = t_2 - t_1$ "él".

Frekvenciatartományban e jelnek a FOURIER integrállal meghatározhatóan valamilyen spektrális kép felel meg. Egy biztosan tudható; nem egyetlen végtelenül keskeny vonal lesz a jellemző pozitív körfrekvencián, hanem valamely véges szélességű frekvenciasávban fog megjelenni zérustól eltérő jelenergia. Az elemi információ területének meghatározásához írjuk fel $f(t)$ spektrumát!

$$F(j\omega) = \int_{t_1=-\tau}^{t_2=\tau} \sin(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \frac{4\omega}{\omega^2 + \omega_0^2} \sin \omega \tau \sin \omega_0 \tau$$

A jel egy adott "helyet" foglal el a frekvenciatartományban is, azaz a frekvencia- és az időtartományban egyaránt létezik.

Úgy is mondhatjuk: a jelet két koordinátája jellemzi, egyik a pillanatnyi frekvenciasávja, a másik az időtartama. [8] Ezt egy téglalappal -az elemi információ cellájával - lehet ábrázolni. A kérdés az, hogy ez a cella lehet-e tetszőlegesen kicsiny? Másképpen szólva: vizsgáljuk, hogy a jellemző mérhető marad-e akkor is, ha a kettő közül az egyik (mondjuk az időtartam) tetszőlegesen kis intervallumra korlátozott. (Példa erre a rövid idejű zenei hang magasságának felismerhetősége.) Láthatóan $\Delta t = 2\tau$ csökkentése a frekvenciatartományban bizonyos küszöbszint feletti, lényeges energiával rendelkező $\Delta\omega$ sáv növekedését vonja maga után. Az alábbi ábrán az összehasonlítás kedvéért látható a két hagyományos tárgyalási módszerhez tartozóan az egységimpulzus függvény („tipikus vizsgálójel”), és a végtelen időtartamúnak feltételezett szinuszos vizsgálójel is („frekvenciatartomány”).



1.1. ábra. Jel és információtartalom

Alaposabb elemzés után azt írhatnánk:

$$\Delta\omega \Delta t \geq 2\pi$$

azaz a jel információs cellájának mérete legalább egységnyi.

Ez formailag azonos a kvantummechanika határozatlansági relációjával. Azt is mondhatjuk; a cellaméret nem lehet tetszőlegesen kicsiny, azaz az információ kvantált. (Ez abból ered, hogy - komplementer leírásmóddal - egyszerre akartunk két jellemzőt megadni.)

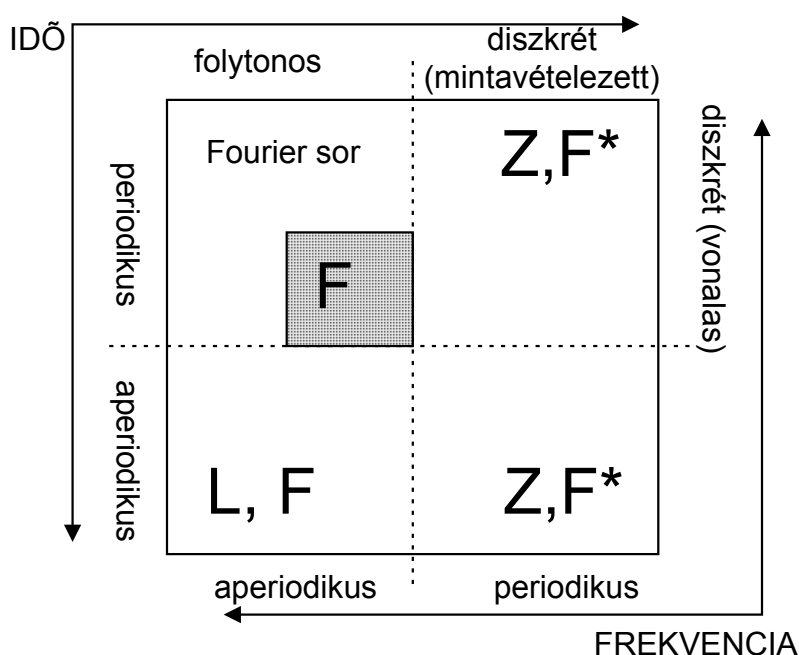
Érdekes módon az emberi fül is tudja ezt! Sőt, meglepő módon szinte tökéletesen ki is használja a maximális határig, amit technikai eszközökkel nem lehet egyszerűen utánózni. Fiziológiai mérésekkel alátámaszthatóan [8]:

$$\Delta t \Delta f \cong 1,17$$

1.2. A jelek osztályozása

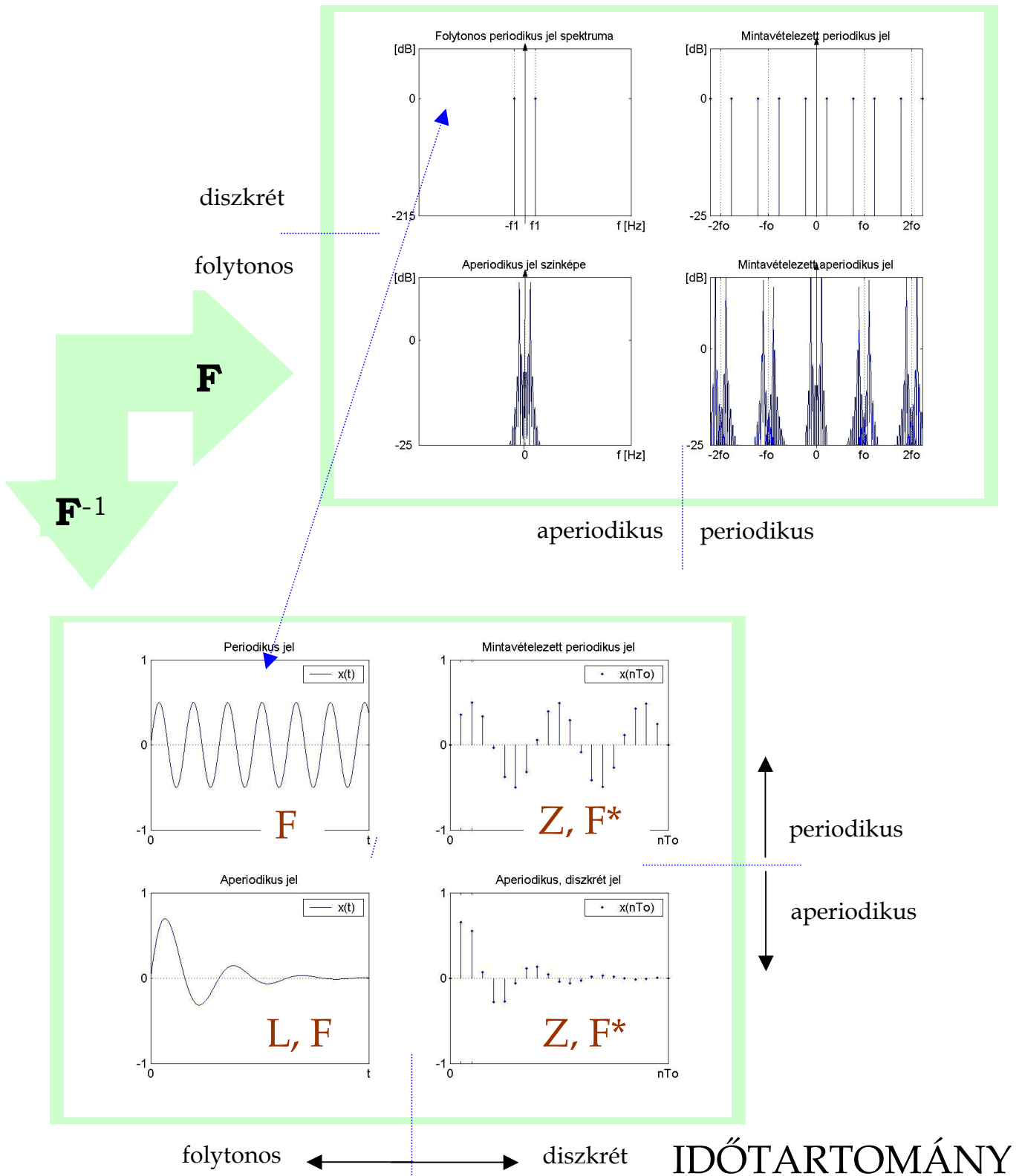
Egyéb megközelítés, csoportosítási szempont is létezik, azonban most tekintsük át a következő ábra szerinti osztályokat!

Figyeljük meg a komplementer leírásmód szimmetriáit! A négy tartomány néhány gyakrabban használt, szokásos transzformációit is jelöltük, amelyek a leírásmódok közötti átjárást határozzák meg.



1.2.1. ábra. A jelek felosztása és a használt transzformációk

FREKVENCIATARTOMÁNY



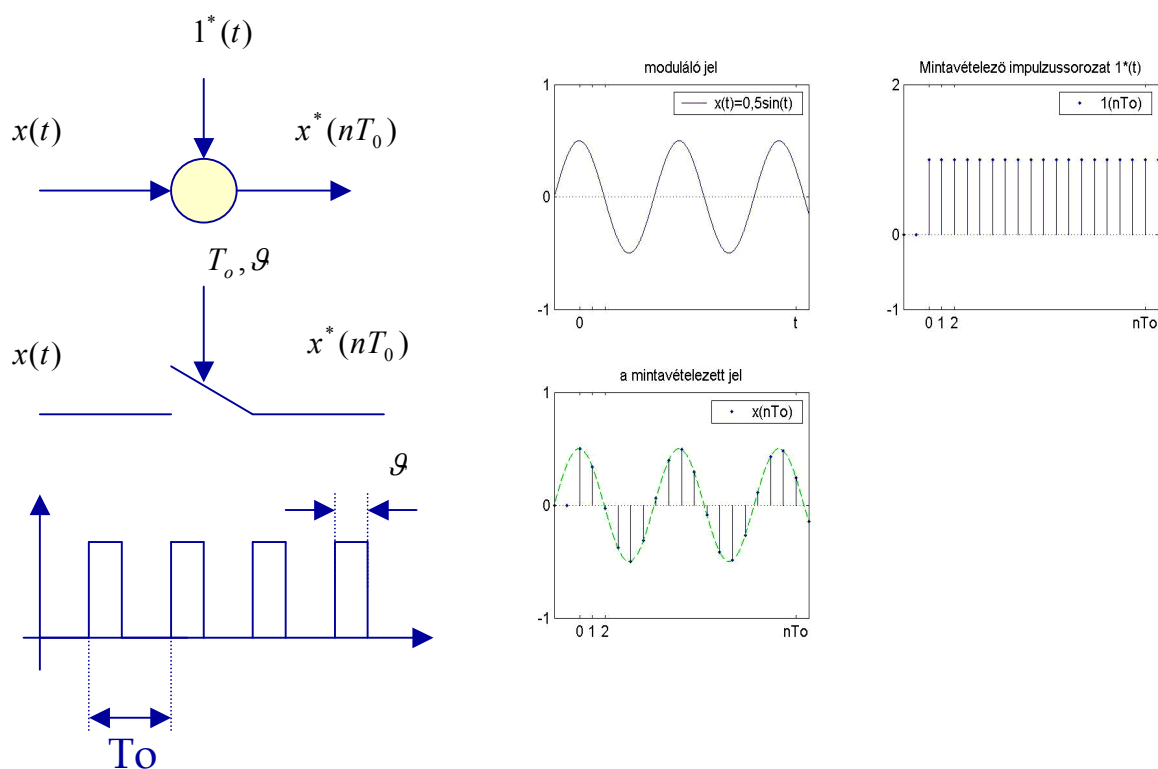
1.2.2. ábra. A jelek, szinképek és a használt transzformációk

2. A MINTAVÉTELEZÉS

2.1. A mintavételezés időtartományban

A mintavételező szervet egy ideális kapcsolónak tételezzük fel, amely legtöbbször periodikusan², végtelenül kis időtartamra zár csak, majd a következő mintavételezésig ismét szakadással jellemezhető. Ez a modell a mintavételezendő $x(t)$ jelet tehát csak meghatározott időegységenként (T_0 : mintavételi periódusidő) egy igen kis időpillanatra (ϑ) engedi át. Az n -ik időpillanatban keletkezett jelértéket jelöljük $x(nT_0)$ -al, magát a sorozatot $x^*(nT_0)$ -al, és mintavételezett jelnek, illetve mintavételezett impulzus-sorozatnak nevezzük.

Belátható, hogy a leírt folyamatot egy szorzás operáció fogja jól leírni, hiszen a kapcsoló zárt állapota 1-el való szorzásként, a szakadás állapot pedig 0-val való szorzásként fogható fel.



2.1. ábra. A mintavételezés folyamata időtartományban

² Elképzelhető más mintavételezés is, pl. aperiodikus, vagy akár véletlenszerű. Mi a továbbiakban kizárólag periodikus mintavételezéssel foglalkozunk.

Kritikus a mintavételező impulzussorozat szigorú periodicitása és a mintavételező jel szélessége. Nyilvánvaló, hogy a $\nu \rightarrow 0$ állapot lenne a megnyugtató, mert ekkor a jel nem változhat a mintavételi folyamat során, és az $x(t)$ jelfüggvény mintavételi időpontban vett helyettesítési értéke lenne a mintavételezett függvény azon időpillanathoz tartozó számértéke. Ezt az elméleti, ideáлизált mintavételi folyamatot *matematikai mintavételezésnek* nevezzük. Vegyük észre, hogy ily módon egy folytonos függvényt diszkrét számok halmazára képeztünk le, valamint egy olyan rendezett számhalmazt kaptunk, amelyben minden egyes mintavételi pillanathoz egy számkettős tartozik! (T.i. a jel pillanatnyi amplitúdója és a mintavétel helye.)

A *fizikai mintavétel*, a realitásnak megfelelően, számol a tényleges $\nu > 0$ értékkel. Ekkor a helyettesítési függvényérték a ν szélességgel szorozva adná a mintavételezett számértéket, ha a jel nem változna a középértékhez képest. A ν időintervallum kellően kis értékre szorításával a matematikai mintavételezés ideája jól közelíthető. (A gyakorlatban ez legtöbbször teljesültnek tekinthető, és nem okoz mérhető eltérést.) A továbbiakban mindig a matematikai mintavételezés feltételezésével élünk.

A matematikai mintavételezést egy periodikus egységimpulzus sorozattal lehet leírni, amely a képzeletbeli mintavételező szervet működteti. Ugyanis a $\delta(t)$ definíciószerűen 1 értékű ott, ahol létezik, 0 egyébként. Bár alapvetően az origóban definiált, de időeltolás transzformációval tetszőleges helyre tolható az időskálán. A T_0 periódusidővel, és annak egész számú többszöröseivel eltolt impulzusok összességét **mintavételező impulzussorozatnak** nevezzük és $1^*(t)$ -vel jelöljük. A leírtak, és a 2.1. ábra szerint:

$$1^*(t) = \delta(t) + \delta(t - T_0) + \delta(t - 2T_0) + \delta(t - 3T_0) \dots + \delta(t - nT_0) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

Ekkor:

$$x^*(nT_0) = x(t) * 1^*(t) = x(t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_0) \right) \neq \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0) \delta(t - nT_0)$$

Felületes szemlélődés alapján úgy tűnik, mintha az eredeti $x(t)$ jel információtartalma jelentősen csökkenne a mintavételezési folyamat miatt. Gondolhatnánk, hogy egy folytonos függvény azért mégis csak végtelenszer több információt hordoz, mint a ritkán leolvasott számértékek halmaza. Később be fogjuk látni, hogy ez nem így van. Egy apró szabály (a SHANNON-feltétel) betartása esetén egyáltalán nem változik emiatt a jel információtartalma! Felhívjuk a figyelmet azonban arra is, hogy a matematikai mintavételezés abszolút periodicitást is követel T_0 -ra nézve. Minden hiba (dzsitter) könnyen beláthatóan véletlen jel (zaj) hozzáadásával egyenértékű a mintavételezett jelben.

2.2. A mintavételezés operátor-és frekvenciatartományban

Operátortartományba történő áttéréshez LAPLACE-transzformáljuk a korábbi, időtartományban megadott összefüggést!

$$L\left\{\sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0)\delta(t - nT_0)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0)e^{-snT_0}$$

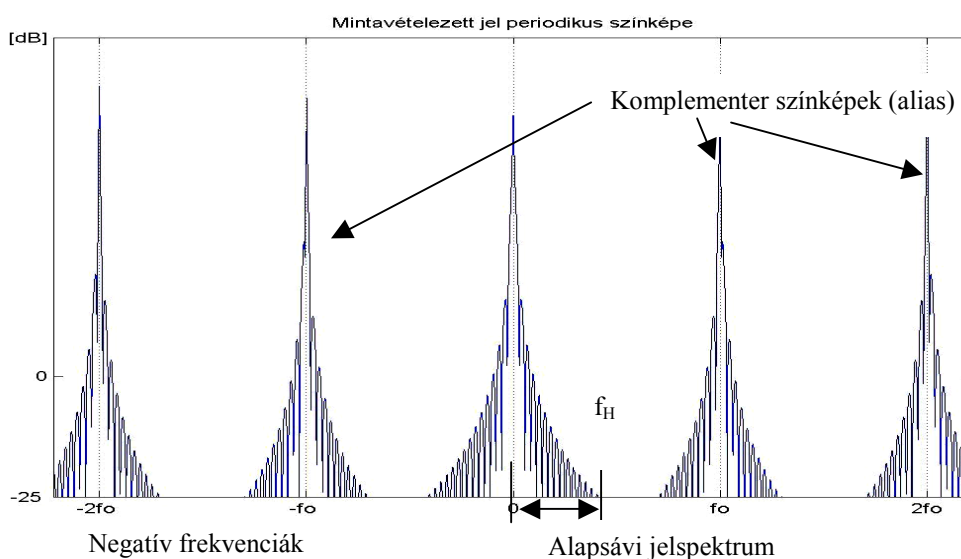
A LAPLACE-transzformáció linearitását kihasználván, - miszerint az összeg tagonként transzformálható és a konstans kiemelhető - az $x(nT_0)$ konstansokat kiemeltük, így csak a mintavételező impulzussorozat transzformáltját kellett meghatározni. Ehhez az eltolási tételt használtuk.

A FOURIER-transzformálthoz a szokásos $s=j\omega$ helyettesítéssel jutunk.

$$F\left\{\sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0)\delta(t - nT_0)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0)e^{-j\omega nT_0} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0)\left[\cos\left(\frac{n\omega}{\omega_0}2\pi\right) - j\sin\left(\frac{n\omega}{\omega_0}2\pi\right)\right]$$

mivel $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$;

Figyeljük meg, *periodikussá vált a színekép*, - harmonikus trigonometrikus függvények lineárkombinációjaként állítható elő, - és ez a mintavételezés következménye!



2.2.1. ábra. Mintavételezett jel színeképe

A periodikussá vált spektrum egyik legfontosabb következménye a SHANNON-feltételként ismert szabály megjelenése. A jel információtartalmának megőrzése végett a jel alapsávi színekének és a komplementer színeknek egymástól szétválaszthatóknak kell lenniük. Amennyiben a spektrumok átfednék egymást, a spektrum sérülése miatt a jel többé nem lenne visszaállítható. A 2.2.1. ábrából olvasható le a könnyen megjegyezhető szabály:

$$\omega_H < \frac{\omega_0}{2}$$

ahol ω_H a mintavételezendő jelben előforduló legmagasabb frekvenciaösszetevő körfrekvenciája, ω_0 pedig a mintavételi körfrekvencia.

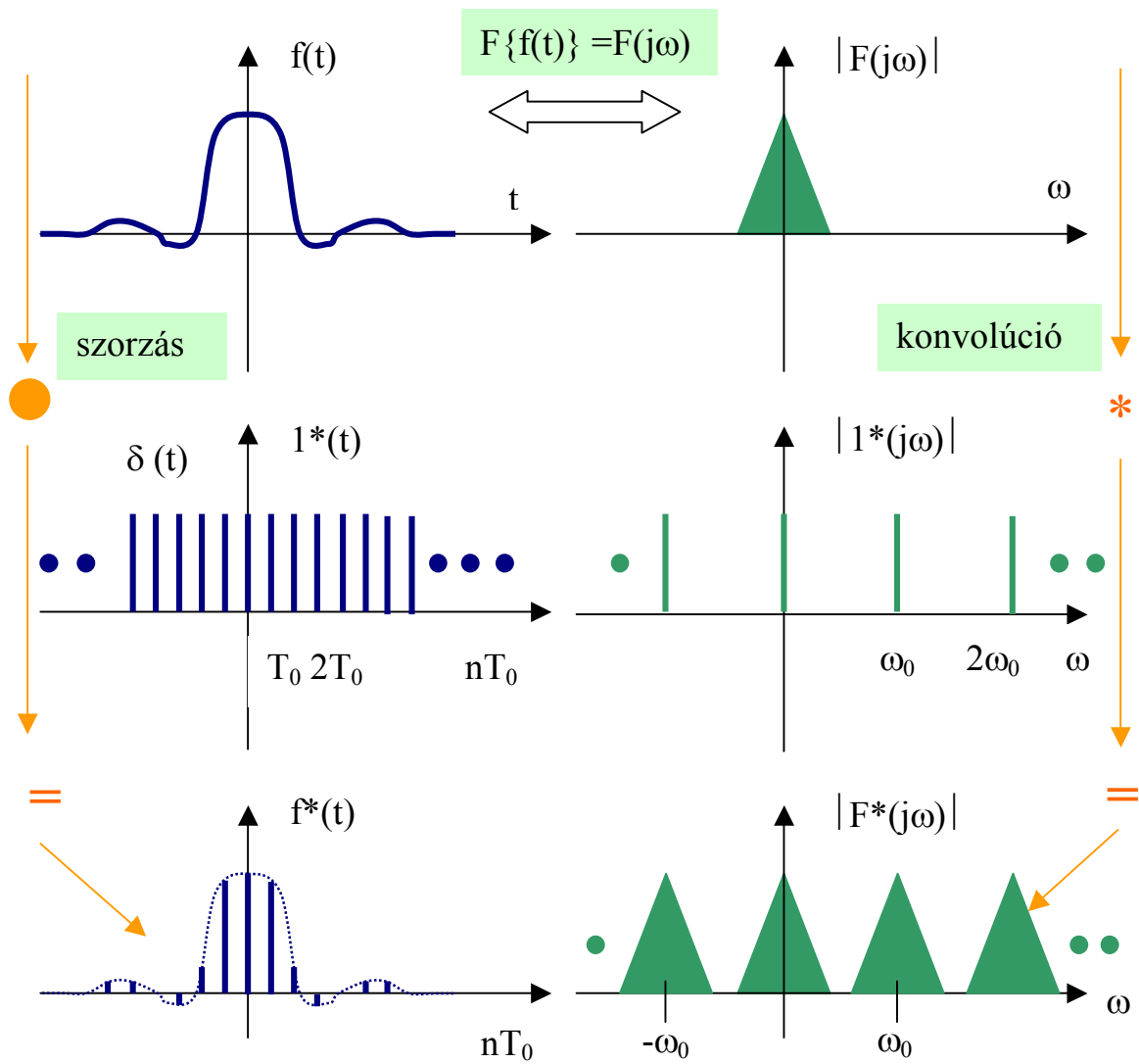
Egy ideális aluláteresztő szűrő használatával - legalábbis elméletben - mindig meg is akadályozható a spektrumok átfedése, elérhető, hogy ne legyen a mintavételezendő jelben ω_H -nál magasabb frekvenciájú jelösszetevő. A gyakorlatban a feltétel betartása a mintavételező szervet megelőzően elhelyezett, alkalmas törésponti frekvenciájú aluláteresztő szűrővel történik.

Az előzőekből következik a mintavételezett jel folytonossá alakításának lehetősége, és módja is. A mintavételezett impulzussorozatot egy $\omega_p = \frac{\omega_0}{2}$ törésponti frekvenciájú, ideális³(!) aluláteresztő szűrőn átvezetve, a kimeneten a folytonos, folyamatos - elvileg az eredetivel teljesen megegyező - időfüggvény jelenik meg.

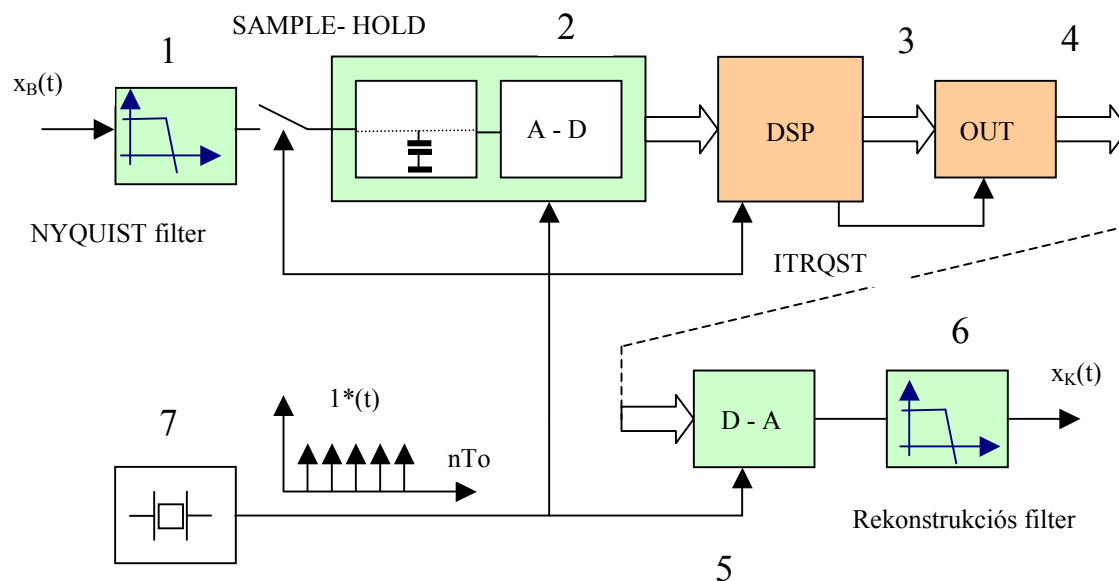
Technikai nehézséget okozhat az ideális aluláteresztő szűrők kivitelezése, főleg akkor, ha kevés engedményt tehetünk a levágás meredekségét illetően, mert $\omega_H \cong \frac{\omega_0}{2}$. Ez a tény azonban az elméleti megoldás létét nem kérdőjelezi meg, csak a gyakorlat számára állít feltételt.

Végül összefoglalásként a 2.2.2.1 ábra mutatja be a mintavételezés hatását idő- és frekvencia tartományban, majd a 2.2.2.2 ábra egy általánosított digitális jelmanipulációt megvalósító rendszer elemeit vázolja. Megjegyezzük, hogy esetenként hiányozhatnak a hatásvázlat DSP előtti, vagy az azt követő komponensei. Az előbbire a digitális QAM moduláció, az utóbbira a demoduláció jó példa, ugyanis ekkor a bemenet (vagy a kimenet) mindössze egy digitális jelfolyam, és nyilvánvalóan nincs szükség az A-D, vagy a D-A konverziókra sem.

³ Amennyiben nem teljesül a feltétel, úgy a Nyquist szűrő karakterisztikája a teljes feldolgozó lánc eredőjét átviteli függvényének szorzattényezőjével módosítja.



2.2.2.1. ábra. A mintavételezés és hatása



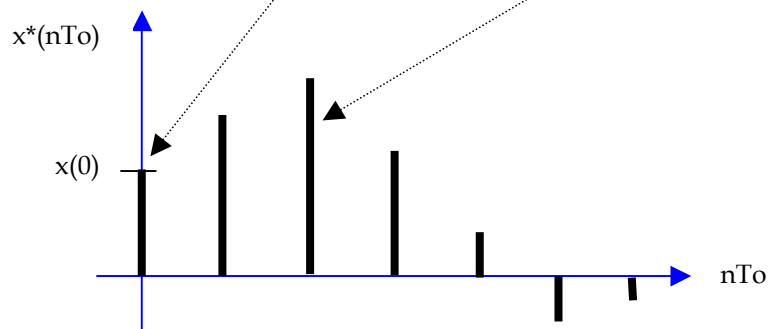
1. A SHANNON feltétel miatt szükséges bemeneti **sávkorlátozó szűrő**. (Szokásos megnevezései: SHANNON, vagy NYQUIST szűrő, vagy NYQUIST filter)
2. Mintavevő-, tartó- és kódoló szerv. A mintavevő-tartó szervet az A-D konverter tartalmazhatja, vagy külön áramkörrel kell megvalósítani. (**Sample-Hold**, vagy Track-and-Hold áramkör) A kódoló egy n bites szószélességű **A-D konverter**, rendszerint kettes komplementes kódú bináris értéké alakítja a mintavételi pillanatban megjelenő jelamplitúdót.
3. DSP: digital signal processor. A beérkező minták feldolgozása a **jelprocesszor** feladata, a mintavétel ütemében aktivált megszakítási alprogramban megvalósítva. (ITRQST) Az interrupt végén a kiszámított jelminta a
4. **kimeneti perifériára** (regisztersor) kerül egy OUT utasítás hatására.
5. A **D-A konverter** (a mintavételezéssel szinkronban) analóg jellé alakítja vissza a manipulált, kódolt kimeneti jelet.
6. A **helyreállító szűrő** a mintavételezés hatását szünteti meg azzal, hogy a komplementer spektrumkomponenseket eltávolítja. Karakterisztikája azonos lehet a bemeneti szűrőével.
7. Mintavételi ütemet adó **óragerátor**, rendszerint kvarcoszcillátor pontosságú és stabilitású.

2.2.2.2. ábra. A mintavételezett (digitális) jelfeldolgozó rendszer elemei

2.2.3 A Z-transzformáció

A mintavételezett jel LAPLACE-transzformált alakjából az $e^{sT_0} = z$ helyettesítéssel kapjuk a Z transzformált alakot:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0) e^{-snT_0} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0) z^{-n} = x(0)z^0 + x(T_0)z^{-1} + x(2T_0)z^{-2} + \dots$$



2.2.3.1. ábra. A Z transzformáció és szemléltetése

A transzformált alak két módon is értelmezhető.

Az első, igen egyszerű felfogásban a z rendező egységvektor szerepű: hatványkitevője a mintavételezett jel „helyének” megadására szolgál. A hatványsor alak esetleg lehetőséget adhat zárt formájú kifejezésre alakításra is.

Példaként képezzük a mintavételező egységimpulzussorozat Z transzformáltját!

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1(nT_0) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Itt használtuk a végtelen mértani sor összegképletét, és feltételeztük, hogy a sor konvergens, mert :

$$q = \left| \frac{1}{z} \right| < 1$$

Egy másik szemléletben a Z transzformált alak - mivel az a LAPLACE-transzformáltból származtatott, tehát rokon *integráltranszformáció* - az operátortartományban megszokott jellemzőkkel bír, és hasonló módon interpretálható, azaz lehetőséget ad a megszokott módszerek (pólus-zérus elrendezés elemzés, frekvenciatartományba való áttérés lehetősége, stb.) használatára.

A LAPLACE-transzformálthoz hasonlóan használjuk a formális leírasmódot is. (Azzal a kiegészítéssel, hogy ne feledjük, csak mintavételezett jelhez lehet Z transzformáltat rendelni!)

A formális alak és a definíciók:

$$Z\{x^*(nT_0)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0)z^{-n}$$

$$Z^{-1}\{X(z)\} = x^*(nT_0) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{c-j\infty} X(z)z^{n-1} dz$$

A végtelen sorral megadott forma a szemléletessége mellett a gyakorlatban hátrányos is lehet, ugyanis nem mindig található meg hozzá a zárt forma, pl. összegképlettel. Anélkül, hogy részletekbe bocsátkoznánk, jelezzük, hogy a mintavételezendő folytonos jel LAPLACE-transzformált alakjából is előállítható a mintavételezett alak Z transzformáltja. Például, ha a LAPLACE-transzformált racionális törtfüggvény, és egyszeres pólusai vannak, akkor egy használható összefüggés a következő:

$$F(z) = \sum_{j=1}^k \frac{F_z(p_j)}{F_p(p_j)} \frac{1}{1 - z^{-1}e^{p_j T_0}}$$

$$F(s) = \frac{F_z(s)}{F_p(s)}$$

Az összegzést az összes k számú pólusra el kell elvégezni, a vessző az s változó szerinti deriválást jelent.

Számítsuk ki a T_0 periódusidővel mintavételezett $e^{-\alpha t}$ függvény Z transzformáltját!

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n T_0} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\alpha T_0} z^{-1} \right)^n = \frac{1}{1 - z^{-1} e^{-\alpha T_0}} = \frac{z}{z - e^{-\alpha T_0}}$$

Itt is használtuk a végtelen mértani sor összegképletét, feltételezve a konvergenciát.

Határozzuk meg ugyanezt a Laplace-transzformált alakból is!

$$L\{e^{-\alpha t}\} = F(s) = \frac{1}{s + \alpha} \qquad F(z) = \frac{F_z(p_j)}{F_p(p_j)} \frac{1}{1 - z^{-1} e^{-\alpha T_0}} = \frac{1}{1 - z^{-1} e^{-\alpha T_0}}$$

Z transzformációt a gyakorlatban - hasonlóan a LAPLACE transzformációhoz - táblázat segítségével is meghatározhatjuk. Erre vonatkozóan az irodalomra utalunk. (Például a [11.] kézikönyv, és az alábbi, 2.2.3 táblázat.)

A zárt alakban adott Z transzformált inverzét, az idősorozatot, - amely természetesen csak a mintavételi időpontokban adja meg a függvény értékét - a gyakorlatban legtöbbször z^{-1} hatványsorába fejtéssel, azaz polinom osztással nyerjük. A zárt alakban adott transzformált ugyanis legtöbbször polinomok hányadosaként jelenik meg, hasonlóan a LAPLACE-transzformálthoz. (Nyilvánvaló, hogy a végtelen sorral adott formát kapjuk ezzel vissza, és annak együtthatói pedig az idősorozat elemeivel azonosak, emlékeztvén a Z transzformált egyik interpretációjára!)

Határozzuk meg a mintavételezett egységugrás függvény inverz transzformáltját!

$$F(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$z : (z-1) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

$$\underline{-(z-1)}$$

$$1 : (z-1)$$

$$\underline{-(1-z^{-1})}$$

$$z^{-1} : (z-1)$$

$$\underline{-(z^{-1} - z^{-2})}$$

$$(z^{-1} - z^{-2}) : (z-1) \dots$$

2.2.3. táblázat Néhány Z transzformált

S.sz.:	$f(t)$	$f(nT_0)$	$F(z)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	$\begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$	1	1
2	$1(t)$	1	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{s}$
3	$\sum_0^{\infty} \delta(t - nT_0) = i^* (t)$	1	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{1 - e^{-sT_0}}$
4	$t1(t)$	nT_0	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2}$	$\frac{1}{s^2}$
5	$e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha nT_0}$	$\frac{z}{z - e^{-\alpha T_0}}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
6	$te^{-\alpha t}$	$nT_0 e^{-\alpha nT_0}$	$\frac{zT_0 e^{-\alpha T_0}}{(z - e^{-\alpha T_0})^2}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$
7	$e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}$	$e^{-\alpha nT_0} - e^{-\beta nT_0}$	$\frac{z(e^{-\alpha T_0} - e^{-\beta T_0})}{(z - e^{-\alpha T_0})(z - e^{-\beta T_0})}$	$\frac{\beta - \alpha}{(s + \alpha)(s + \beta)}$
8	$\sin \omega t$	$\sin(\omega nT_0)$	$\frac{z \sin(\omega T_0)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_0) + 1}$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
9	$\cos \omega t$	$\cos(\omega nT_0)$	$\frac{z(z - \cos(\omega T_0))}{z^2 - 2z \cos(\omega T_0) + 1}$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
10	$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$e^{-\alpha nT_0} \sin(\omega nT_0)$	$\frac{z \sin(\omega T_0)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_0) + 1}$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$

A határérték tételek:

Kezdeti érték tétel	$\lim_{n \rightarrow 0} f(nT_0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$
Végérték tétel	$\lim_{n \rightarrow \infty} f(nT_0) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z)$

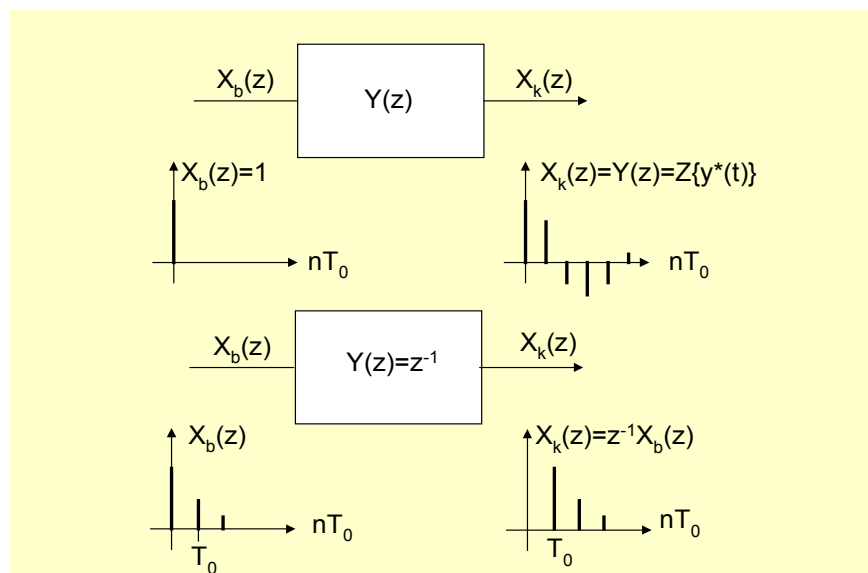
A Z transzformáció, mint már említettük, a LAPLACE-transzformációval azonos értékű, és az automatika tárgyban megismert módon használható egy tag, illetve tag által módosított jel leírására is, figyelembe véve a mintavételezett környezetet. A 2.2.3.2. ábra szerint, ha egy tag bemenőjele az $X_B(z)$ bemeneti sorozat, akkor az $X_K(z)$ kimeneti mintasort fogja produkálni, amennyiben jelmódosító tulajdonságát az

$$Y(z) = Z\{y^*(t)\}$$

súlysorozat jellemzi. (Az $Y(z)$ az $y(t)$ súlyfüggvény T_0 periódusidővel mintavételezett, majd Z transzformált alakja.)

Felmerülhet az a kérdés, hogy milyen kapcsolattal lehet megadni Z tartományban a tag jelmódosító hatását. A válasz, mint már utaltunk rá: a LAPLACE-transzformációból való származtatás miatt itt is alkalmazható a „blokk-algebra” szabályrendszere, tehát egyszerű szorzással fejezhető ki a kimenőjel a bemenősorozat és a súlysorozat ismeretében. (A konvolúció művelete Z tartományban is a sorozatok összeszorzását jelenti.)

$$X_K(z) = X_B(z)Y(z)$$



2.2.3.2. ábra. A tag Z tartományban

Az ábrán megfigyelhető a z^{-1} operáció hatása is egy bemenősorozatra. Minden bemeneti minta egy T_0 mintavételi periódusidővel később, eltolva jelenik meg a kimeneten. (Eltolás operáció, lásd: T_0 holtidővel rendelkező tag!) Érdekes gondolkísérlet lehet, ha a következő kérdésekre próbálunk megoldást keresni: hogyan lehet folytonos jelekre kimenetet meghatározni mintavételezetten működő tag esetén, vagy mi történik akkor, ha egy mintavételezett jel egy folytonos működésű tag bemenetére érkezik? A válasz első ránézésre egyszerű, miszerint a megszokott eljárás csak és kizárólag Z transzformáltakra vonatkozik, tehát csak *teljesen mintavételezett környezetben* igaz. Ezen tétel érvényességét nem csökkenti ugyan, de általánosságban bonyolultabb válasz is adható, és mivel a gyakorlatban sokszor előfordul a vegyes felépítésű rendszer, jelezzük, hogy ez mintavételező szervek megfelelő elhelyezésével (pl. szinkron be- és kimeneti mintavételezés) és további matematikai apparátus bevetésével mindig megoldható feladat.

A Laplace-transzformációs módszerek „átmentése” a Z tartományba például az alábbi, 2.2.3.3. ábrán szemléltetett transzformációval történik.

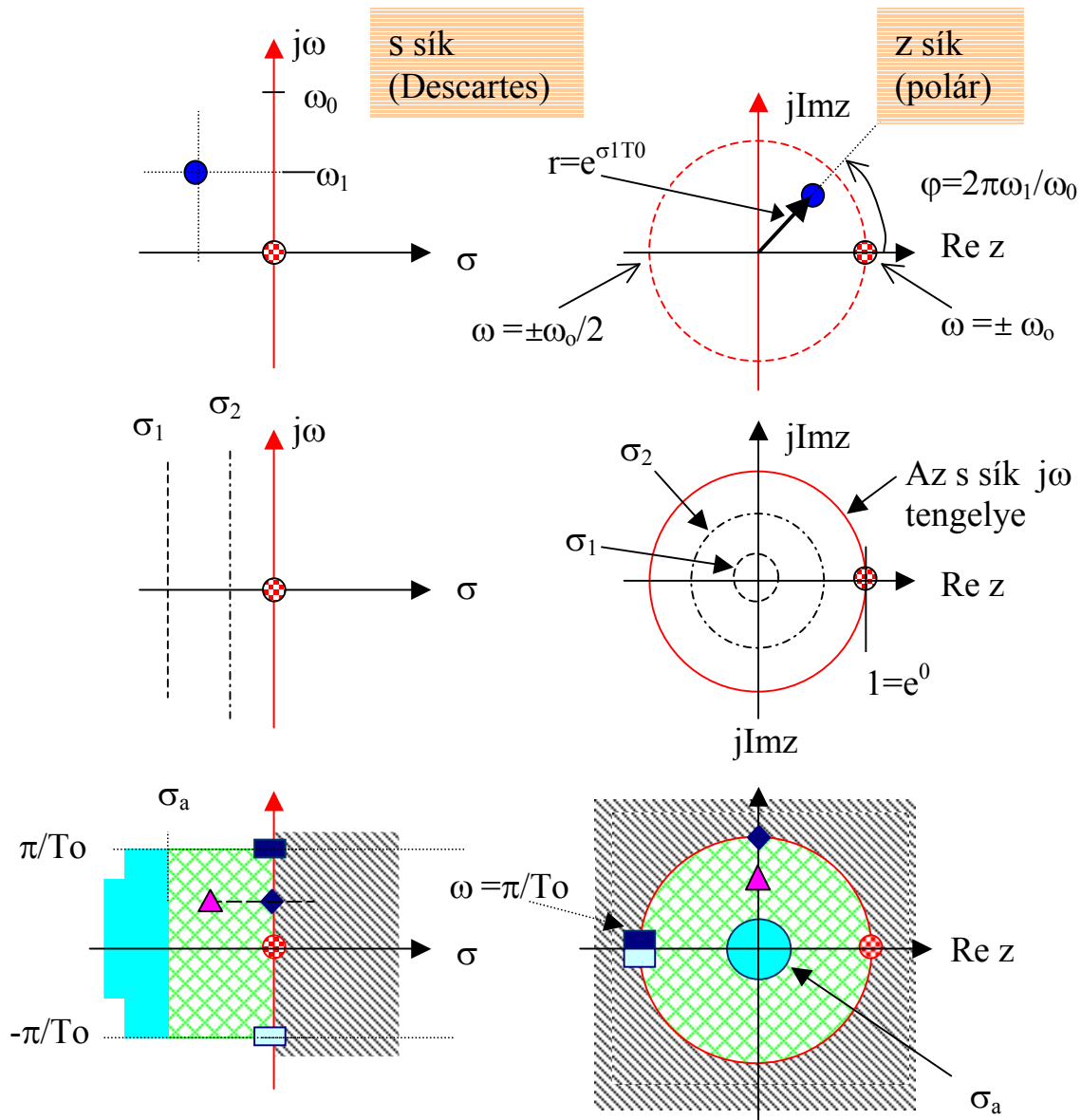
Megfigyelhető, hogy a transzformáció az s síkon a SHANNON-feltételnek eleget tevő **frekvencisávot** a z sík **egységsugarú körébe** képezi le.

Használatos még más komplex leképezés is, mint például a bilineáris transzformáció, ezt most nem részletezzük, csak bemutatjuk a 2.2.3.5. ábrán.

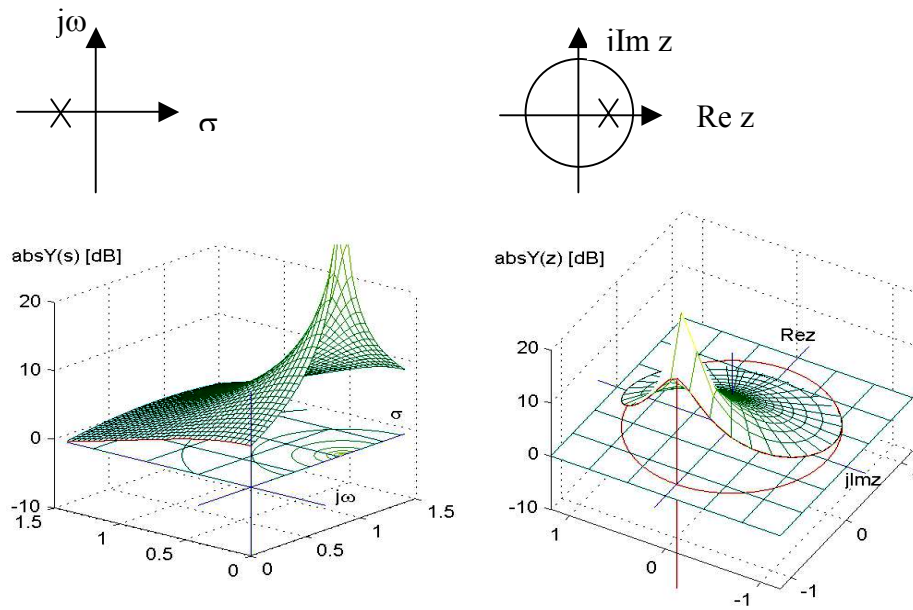
$$e^{-snT_0} = z^{-n}$$

$$z = e^{sT_0} = e^{\sigma T_0} e^{j\omega T_0} = r e^{j\varphi}$$

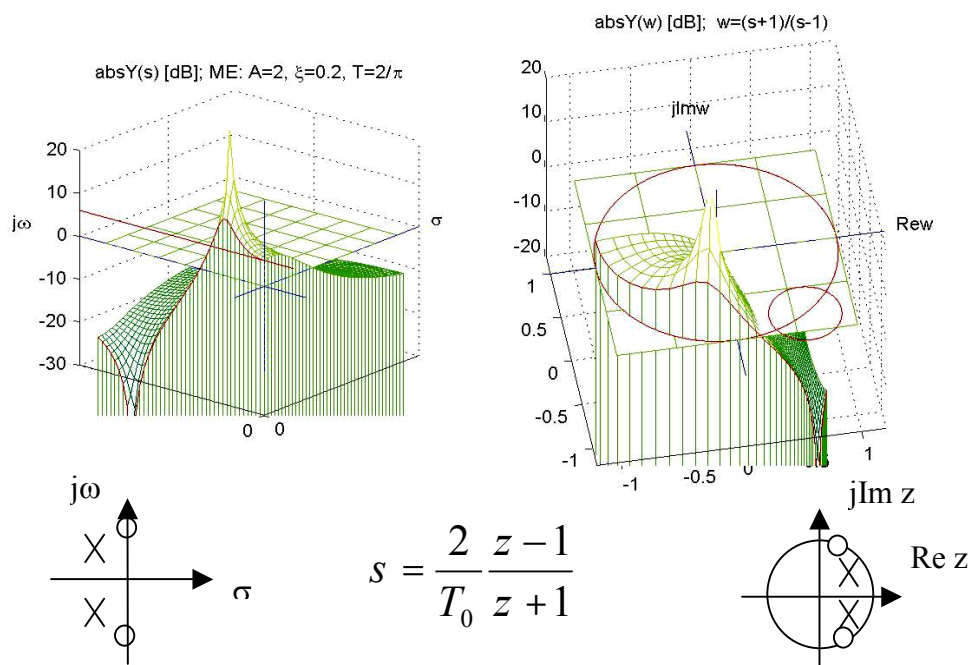
$$r = e^{\sigma T_0} \dots \dots \dots \varphi = \omega T_0 = \frac{\omega}{\omega_0} 2\pi$$



2.2.3.3 ábra. Az s és a z sík kapcsolata



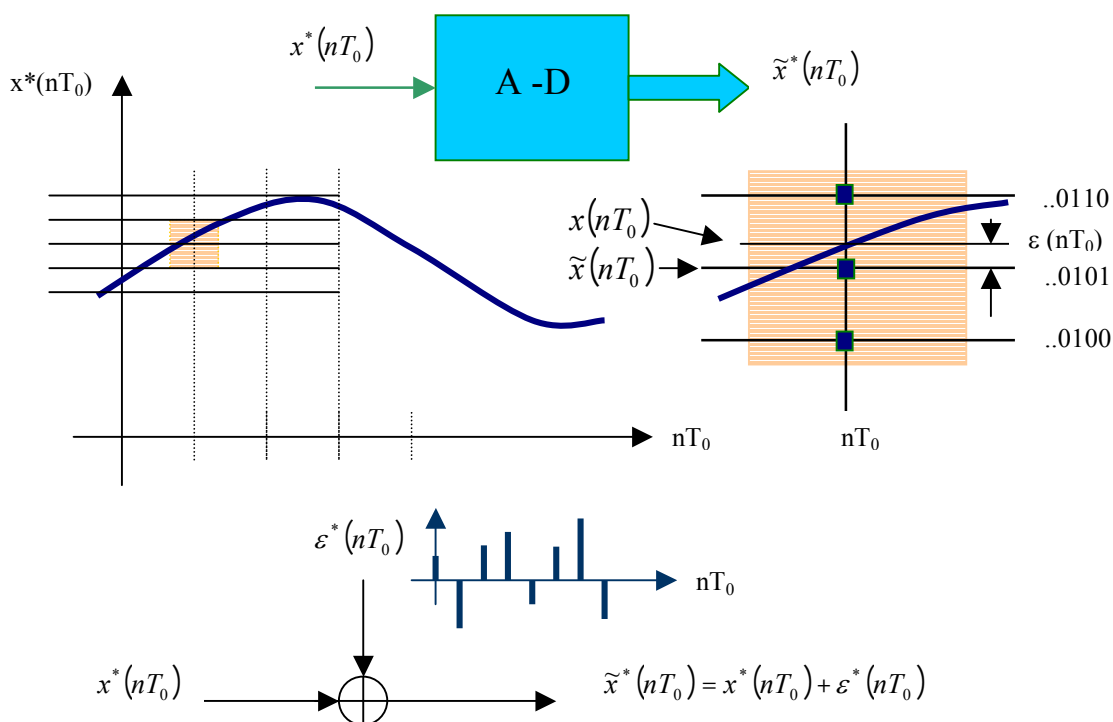
2.2.3.4 ábra. A $z=e^{sT_0}$ transzformáció. PT1 tag LAPLACE- és transzformált z felületével szemléltetve



2.2.3.5 ábra. Bilineáris (TUSTIN) transzformáció ME alaptag z felületével szemléltetve

2.3 A mintavételezett jel kvantálása az értékészletben

A jel további - rendszerint digitális környezetben történő - feldolgozásához szükséges a „végtelenül finom” amplitúdók véges számú értékcsoportokba sorolása, azzal összefüggésben, hogy a digitális jelábrázolás szószélessége, - azaz a pontossága is - csak véges lehet. Ez a folyamat az analóg-digitális jelkonverzió. A feladat nyilvánvalóan az **A-D** konverternek nevezett áramkörrel oldható meg. Az A-D áramkörök jelfeldolgozással kapcsolatos vizsgálatát az 5. fejezetben adjuk meg, most csak a jel információtartalmára kifejtett hatását elemezzük. Ez a 2.3 ábra segítségével könnyen elvégezhető. Megfigyelhető, hogy a tényleges jelérték a kiválasztott mintavételi időpillanatban egy legközelebbi diszkrét, ábrázolható értéként csak $\varepsilon(nT_0)$ hibával helyettesíthető. Az ily módon kapott számsorozat viszont beláthatóan veszített információtartalmából, egy hozzáadott véletlen számsorozat - a $\varepsilon^*(nT_0)$ - miatt, ami zajként jelenik meg a kvantált jelben. Innen a későbbiekben már semmilyen módon el nem távolítható.



2.3. ábra. Az értékészletbeli kvantálás hatása

A továbbiakban mindenhol kellően megválasztott szószélességű, digitális, kettes komplementben kódolt, rendezett számhalmazokon végzett műveletekre gondolunk, de külön nem jelezzük.

Végül a kettes komplement fogalmát és képzését, valamint a fixpontos aritmetika néhány alapelemét elevenítjük fel.

Pozitív bináris szám: $A=0*2^3+1*2^2+0*2^1+1*2^0= +5$

Sgn	2 ³	2 ²	2 ¹	2 ⁰
0	0	1	0	1



Egyes komplement: \bar{A} (negáció)

1	1	0	1	0
---	---	---	---	---



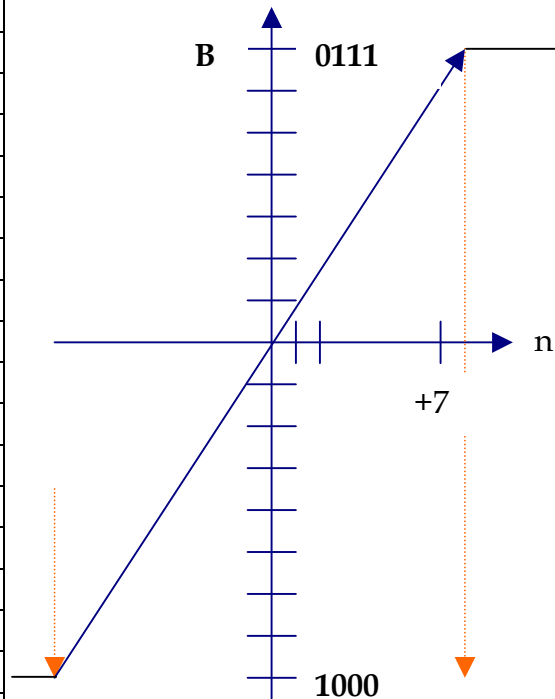
Kettes komplement: $\bar{A} + 1 = B = -5$
(a negatív szám)

1	1	0	1	1
---	---	---	---	---

Adjuk össze! $A + \bar{A} + 1 = A + B = 0$
(minden helyiértéken keletkezett átvitel!)

0	0	1	0	1
+1	1	0	1	1
0	0	0	0	0

B				n
1	0	0	0	<i>túlcsordulás</i>
0	1	1	1	+7
0	1	1	0	+6
0	1	0	1	+5
0	1	0	0	+4
0	0	1	1	+3
0	0	1	0	+2
0	0	0	1	+1
0	0	0	0	0
1	1	1	1	-1
1	1	1	0	-2
1	1	0	1	-3
1	1	0	0	-4
1	0	1	1	-5
1	0	1	0	-6
1	0	0	1	-7
1	0	0	0	<i>(-8)!</i>
0	1	1	1	<i>alulcsordulás</i>



A fixpontos aritmetikában (16, 24, vagy 32 bites) a számok 1-nél kisebb abszolút értékűnek tekintettek, azaz az előjelbit (szignum) után értendő a 'kettedes' (tizedes) vessző. Ez a szokásos ábrázolási mód, mert így pl. szorzásnál biztosan nincs túlcsordulás, és egy arányossági tényező segítségével bármikor meg is valósítható eljárás.

SGN	2 ⁻¹	2 ⁻²	2 ⁻³	2 ⁻⁴	2 ⁻⁵	2 ⁻⁶	2 ⁻⁷	2 ⁻⁸	2 ⁻⁹	2 ⁻¹⁰	2 ⁻¹¹	2 ⁻¹²	2 ⁻¹³	2 ⁻¹⁴	2 ⁻¹⁵
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1

2.3.1 ábra. Egy fixpontos, kettes komplement szám (-0,0172...)

3. DIGITÁLIS SZŰRŐK

A frekvenciatartományban végezhető egyik jelmanipuláció a színekép-összetevők arányainak megváltoztatása, a szűrési feladat. Alapjaiban azonos a feladat a hagyományos, a folytonos-folyamatos jelekkel végzendő „analóg” esettel, amikor is adott egy frekvenciatartománybeli előírás a jelspektrum kívánt módosítására, - a specifikáció -, ami a „törésponti” frekvenciaértékekhez tartozó csillapításmenettel és a hozzátartozó túrésmezőkkel jellemezhető. (Az analóg szűrőtervezés menetét itt nem, vagy csak rendkívül érintőlegesen tárgyaljuk.)

A digitális szűrés a mintavételezés figyelembevételével általában azonos eredményeket is ad az analóg esettel, de mindenképpen azonnal szembetűnik számos előnye:

- a jellemzők állandósága, (nincs hőfokfüggés, az elemértékek szórásából származó pontatlanság is eltűnik; ezért például érzékenységvizsgálat sem szükséges),
- igen nagy jósági tényezőjű (gerjedéshatárhoz közeli) paraméterértékek is beállíthatók, a begerjedés tényleges veszélye nélkül,
- a paraméterek könnyen, akár üzemeltetés alatt is változtathatóak, (hiszen csak egy paramétertömb átírása szükséges hozzá)
- az előbbi okból adódóan az adaptív szűrés egyszerű megoldhatósága,
- sokszor hasznos a jellemző frekvenciák mintavételi frekvenciával való egyszerű hangolhatósága.

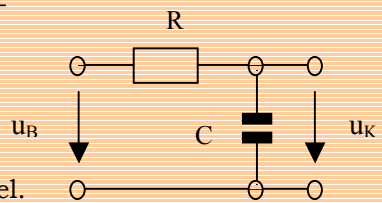
A digitális szűrés bizonyos eseteiben (pl.: szimmetrikus súlysorozattal bíró FIR szűrők) azonban a hagyományos szűrés megszokott tulajdonságaihoz képest teljesen új, igen kedvező eredmények is megjelennek. Emiatt alkalmazásuk több helyen kizárólagos, és alapvetően meghatározó használata sok, mára rendkívüli eredményt felmutató területen (pl.: telekommunikáció).

Alapvetően két csoportba sorolhatóak az ismert digitális szűrők:

- **FIR** (*Finite Impulse Response* filter), vagy nemrekurzív szűrők, a konvolúció diszkrét megvalósítási formájának tekinthetők.
- **IIR** (*Infinite Impulse Response* filter), vagy rekurzív szűrők, amelyek tulajdonképpen differenciaegyenletet megoldó algoritmusok. Ide sorolhatóak a lattice-filterek is.

3.1. Rekurzív digitális szűrők (IIR: Infinit Impulse Response)

A két szűrőtípus (IIR és FIR) megjelenése alapvetően a lineáris rendszer kétféle időtartománybeli megoldási módjához köthető.

<p>Példaként egy PT1 tag megoldása - mint ismeretes - történhet:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ I. Differenciálegyenlet módszerrel. ➤ II. Konvolúcióval. <p>Látni fogjuk, hogy az I. módszer a rekurzív (IIR), a II. a nemrekurzív digitális szűrőkhöz (FIR) vezet el.</p>	
--	--

Elsőként az IIR szűrőket tárgyaljuk.

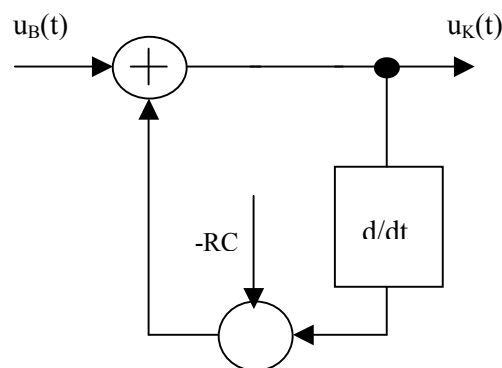
3.1.1 A mintavételezett PT1 időtartományban: elsőfokú aluláteresztő alaptag (IIR-EA)

A 3.1.1-a. ábrán megfigyelhető, hogy a kiválasztott, ismert tagtípus, differenciálegyenletének átrendezésével egyszerű hatásvázlat rajzolható, amely rögtön megoldási algoritmust is ad. Tetszőleges bemenőjel mellett kimenőjel számítható ezen a módon. LAPLACE transzformáltakra hasonló a megoldás menete, de itt a deriválás helyett az s változóval kell szorozni. (3.1.1-b. ábra) Amennyiben arra gondolunk, hogy ez az egytárolós, ernyedő dinamikát adó tag frekvenciatartományban aluláteresztő jellegű amplitúdó-jelleggörbével rendelkezik, akkor „szűrőnyelvre” lefordítva azt mondhatjuk, ez egy **elsőfokú aluláteresztő (EA)** alaptag is egyben.

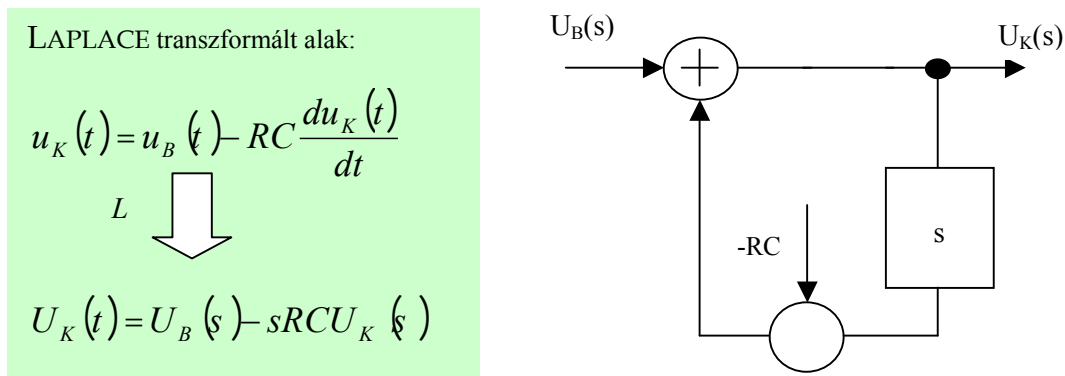
A KIRCHOFF-egyenletekből a differenciálegyenlet:

$$u_K(t) = u_B(t) - Ri(t)$$

$$i(t) = C \frac{du_K(t)}{dt} \dots (Q = CU)$$

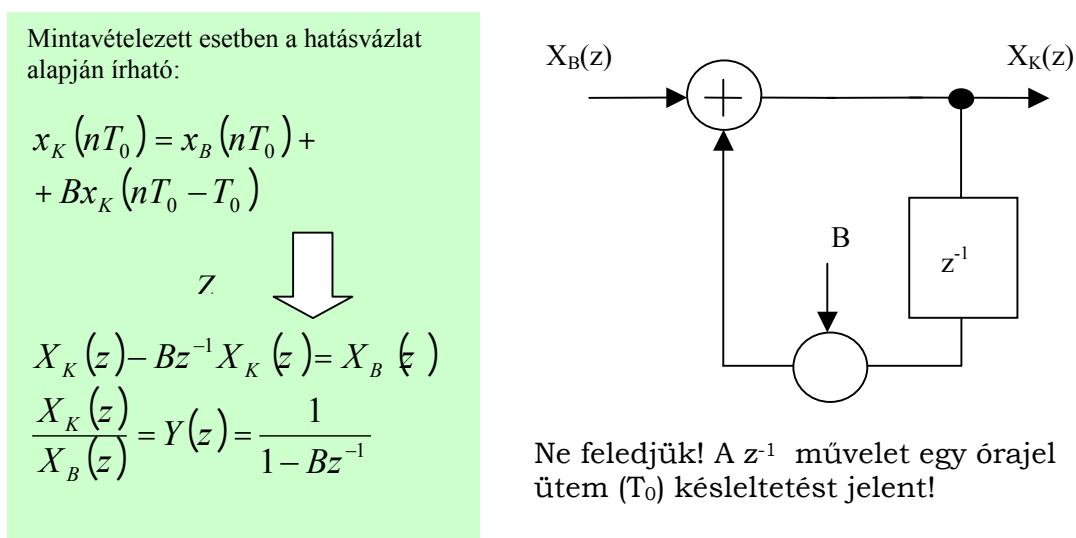
$$u_K(t) = u_B(t) - RC \frac{du_K(t)}{dt}$$


3.1.1-a. ábra. A PT1 differenciálegyenletének megoldása



3.1.1-b. ábra. A PT1 megoldása operátortartományban

Megállapítható, a 3.1.1-c. ábra visszacsatolt struktúrájának hasonló hatásvázlata épp a mintavételezett, kvantált környezetben megjelenő PT1, amely tehát egy elsőfokú aluláteresztő szűrő alaptagot ad meg. (A mintavételezett PT1 differenciaegyenletét oldja meg.)



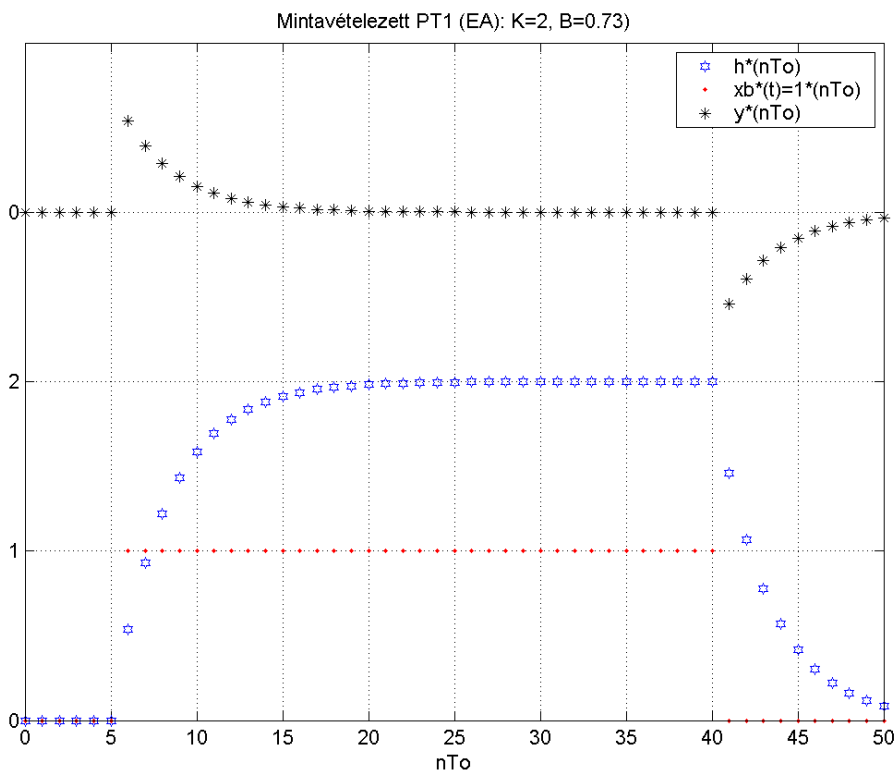
3.1.1-c. ábra. A PT1 mintavételezett alakja

A kimeneti sorozat igen egyszerűen számolható a hatásvázlat alapján. Egy szimulációval előállított súlysorozat és átmeneti függvény a 3.1.1.1. ábrán látható. A 3.1.1.2. ábra szemlélteti részletesen mintavételezett eset súlysorozatának ismert, PT1 súlyfüggvényvel való rokonságát.

```

% IIR PT1 időtartományban
xb=0; xk=0; y=0; z=0;
K=2; %átviteli tényező
%
k=0.05; %k=fp/fo
B=exp(-k.*2.*pi);
A=(1-B);
%
for t = 0:1:50;
xk=A.*K.*xb+B.*xk; %átmeneti függvény
y=xk-z; %súlyfüggvény differencia képzéssel
z=xk;
plot(t,xk,'bh',t,xb,'r.',t,y+3,'k*');
hold on;
if t==5; xb=xb+1;
elseif t==40; xb=xb-1;
else xb=xb;
end
end
%
axis([0 50 0 4]);
legend('h*(nTo)', 'xb*(t)=1*(nTo)', 'y*(nTo)');
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
set(gca,'XColor','k','YColor','k');
set(gca,'YTick',[0 1 2 3]);
set(gca,'YTickLabel',{'0','1','2','0'});
xlabel('nTo');
%ylabel('xk*(nTo)=h*(nTo), y*(nTo), 1*(nTo)');
title('Mintavételezett PT1 (EA): K=2, B=0.73');
hold off;

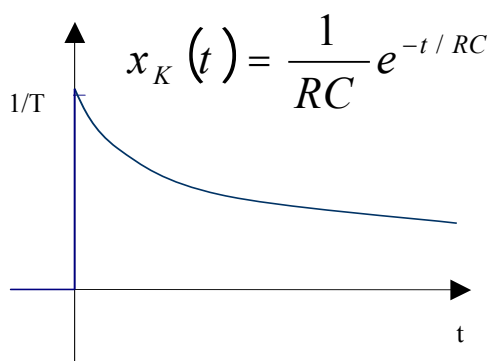
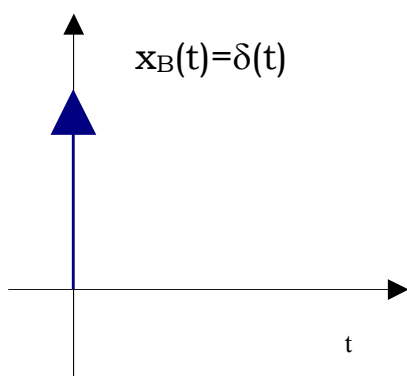
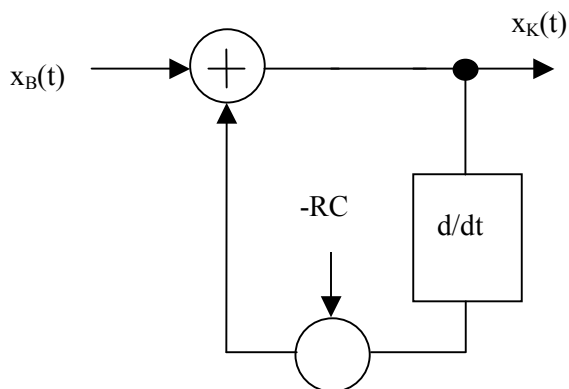
```



3.1.1.1 ábra. PT1 súlysorozata és átmeneti függvénye (MATLAB)

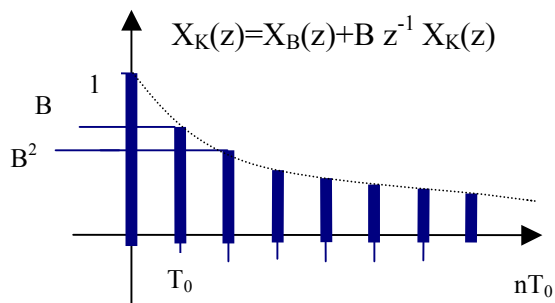
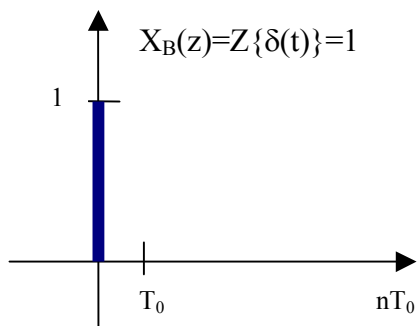
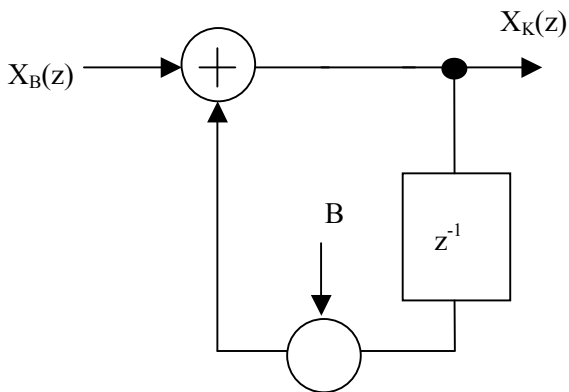
PT1-EA

$$Y(s) = \frac{1}{1 + sT}$$



IIR PT1-EA

$$Y(z) = \frac{1}{1 - Bz^{-1}}$$



3.1.1.2 ábra. PT1 és mintavételezett változatának súlysorozata

Figyeljünk fel arra, hogy ha a bemenőjelet nem csillapítanánk, meglehetősen nagy amplitúdójú kimenet keletkezne válaszként, például az egységugrás bemenetre. Ennek oka az összegzések sorozata. Amennyiben egységnyi átviteli tényezőt (0 dB) szeretnénk beállítani, úgy a bemeneten kell megfelelő csillapítást beiktatni. A csillapítást egy $A < 1$ szorzótényezővel való szorzással valósíthatjuk meg. Ennek pontos értéke $A = 1 - B$, amint erről egyszerű próbával meggyőződhetünk. (a MATLAB szimulációban ez már szerepel.)

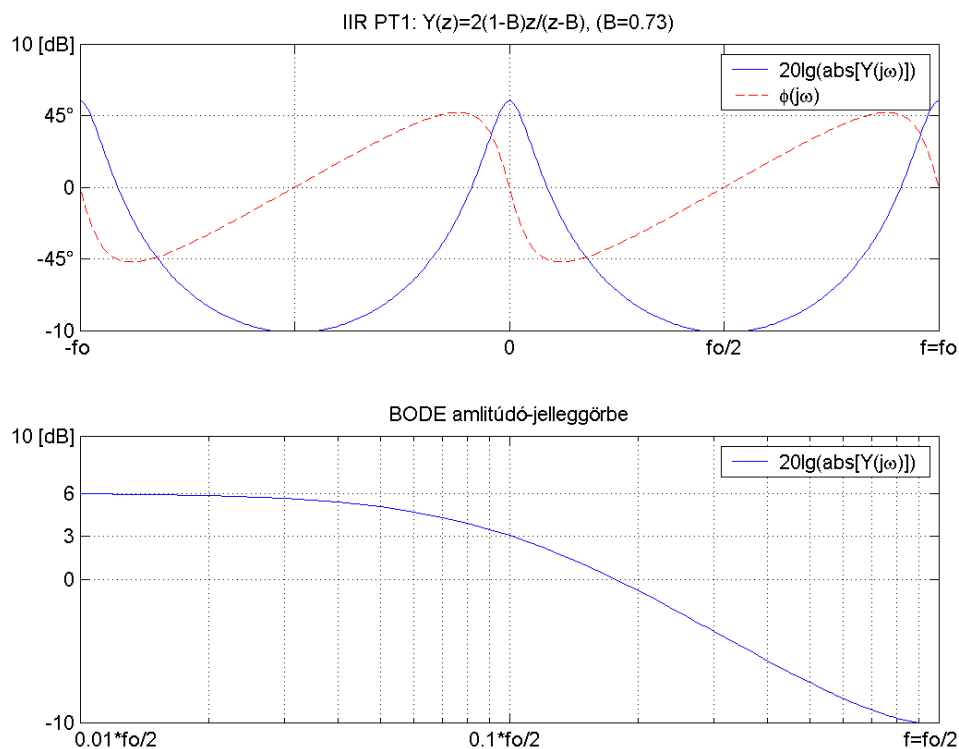
3.1.1.1 Az IIR-EA frekvenciatartományban

Elemezzük frekvenciatartományban az EA alaptagot!

$$Y(z) = \frac{A}{1 - Bz^{-1}} = \frac{Az}{z - B} \dots \dots \dots \text{és} \dots \dots \dots z = r \cos(\omega T_0) + jr \sin(\omega T_0)$$

$$F\{Y(z)\} = \frac{A}{1 - B \cos(\omega T_0) + jB \sin(\omega T_0)} = \frac{A}{1 - B \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} 2\pi\right) + jB \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} 2\pi\right)}$$

Szimulációval nyert amplitúdó- és fázis jelleggörbék:



3.1.1.3. ábra. Az IIR-EA frekvenciafüggvényei

A frekvenciafüggvény BODE-alakján jól látható a hasonlóság a megszokott analóg esettel. (Tulajdonképpen azonosság a frekvenciatartomány nagy részén.) Azonban már itt is feltűnhet a SHANNON-határ közelében az eltérés is: messze nem teljesül a -20 dB/dekádós távolvégi csillapításmenet, a „fordított arányosság”, de ez igazán a lineáris frekvencialéptékű felső ábrán látszik jól. Emlékeznünk kell a mintavételezés frekvenciatartománybeli periodicitására, a színeképek átlapolódására, mert itt is ez történik. A komplementer frekvencisáv, a tükörkép hatása látszik az eredményen, amit egyébként a frekvenciafüggvény analitikus alakja ugyanígy mutat be.

Gyakorlati következmény: csak a mintavételi frekvenciához képest alacsony törésponti frekvenciájú szűrő készíthető kellően nagy csillapításmenettel IIR szűrővel megvalósított módon!

Végül összefoglalásképpen az EA alaptag együttthatóinak meghatározását mutatja be a 3.1.1.4 ábra.

Vegyük észre, hogy **B=1 esetén integrátort kapunk**, és természetesen ezt nem lehet 0 decibeles átvitelűre állítani egyenáramon! (A=0 kellene, jogosan, hiszen az integrátor maga egyenáramon végtelen átvitelű!)

Az IIR-PT1 (EA) paramétereinek számításához:

$$s_p = -\sigma = -\omega_p = -\frac{1}{T_p} \quad \rightarrow \quad z_p = e^{s_p T_0} = e^{-\omega_p T_0} = e^{-\frac{\omega_p}{\omega_0} 2\pi}$$

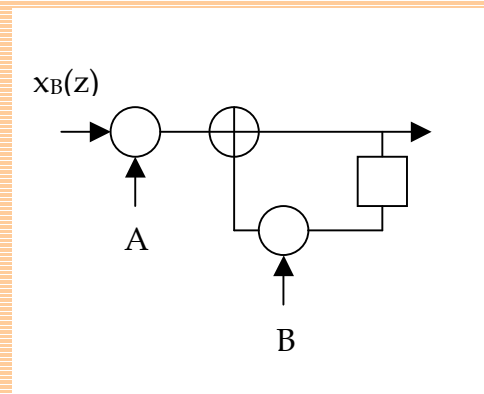
Mivel:

$$Y(z) = A \frac{1}{1 - Bz^{-1}} = A \frac{z}{z - B}$$

$$z_p = B$$

$$B = e^{\left[\frac{\omega_p}{\omega_0} 2\pi \right]}$$

$$A = (1 - B)$$



ahol A a szűrő 0 [dB]-es átvitelre számított átviteli tényezője.

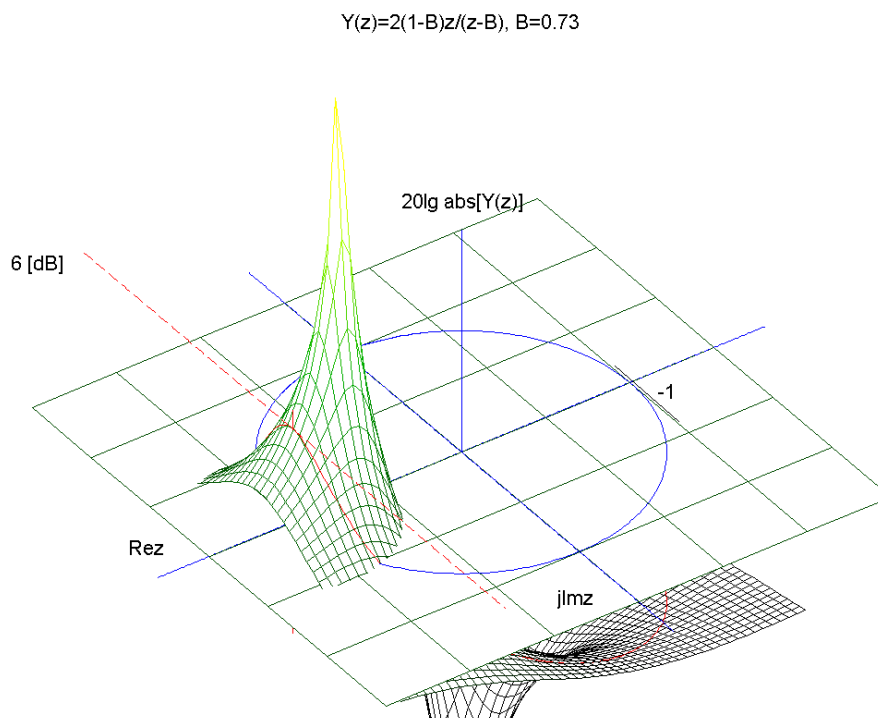
3.1.1.4. ábra. Az IIR-EA együttthatóinak meghatározása

3.1.1.2 Az IIR-EA Z tartományban

Az EA alaptag impulzusátviteli függvényét célszerű az alábbi alakra hozni:

$$Y(z) = \frac{A}{1 - Bz^{-1}} = \frac{Az}{z - B}$$

A Z transzformált szimulációval kirajzolt felületét a z-sík felett az alábbi 3.1.1.5 ábra mutatja be, ahol jól látható az egyetlen pólus a valós tengelyen, - B értékénél - az egységsugarú körön belül való elhelyezkedése, valamint az origóba bevitt zérus hatása. Az egységsugarú hengerpaláستtal való metszévonal természetesen most is a fentebb tárgyalt frekvenciafüggvényt adja. Érdekes összevetni az analóg PT1 Laplace-felületével, és pólus- elrendezésével. B=1 esetén az integráló hatást az s sík origójának itt megfelelő $z=1+j0$ pontban megjelenő pólus mutatja. (v.ö.: Függelék III.)



3.1.1.5. ábra. Az IIR-EA a z síkon

3.1.2. A mintavételezett PT2 időtartományban: másodfokú aluláteresztő alaptag (IIR-MA)

A 3.1.2 ábra mutatja be a PT2 differenciálegyenletének átrendezésével rajzolt egyszerű hatásvázlatot és a mintavételezett eset azonos megoldási algoritmusát.

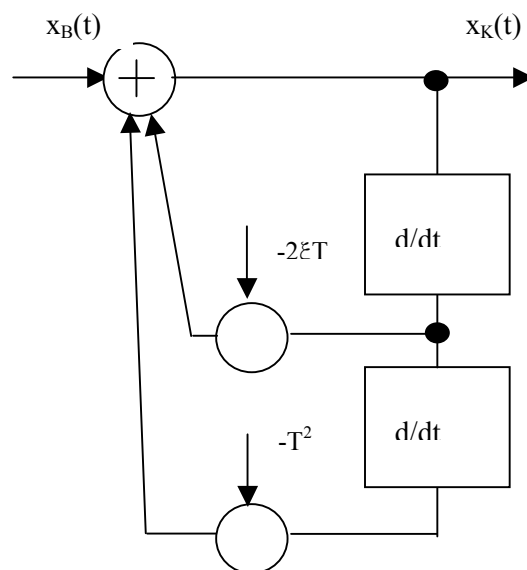
Látható, hogy itt a két energiatárolónak megfelelően két információ-tároló szerepel a hatásvázlatban, ezzel természetesen a megfelelő tagdinamikát, a lengésekre való képességet létrehozva. Ismeretes, hogy ez a tagtípus frekvenciatartományban -40 dB/dekádós távolvégi aluláteresztő jellegű amplitúdó-jelleggörbével jellemzett, ez „szűrőnyelven” a **másodfokú aluláteresztő (MA)** alaptagot jelzi.

A differenciálegyenlet:

$$T^2 \frac{d^2 x_K(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx_K(t)}{dt} + x_K(t) = x_B(t)$$

↓

$$x_K(t) = x_B(t) - 2\xi T \frac{dx_K(t)}{dt} - T^2 \frac{d^2 x_K(t)}{dt^2}$$

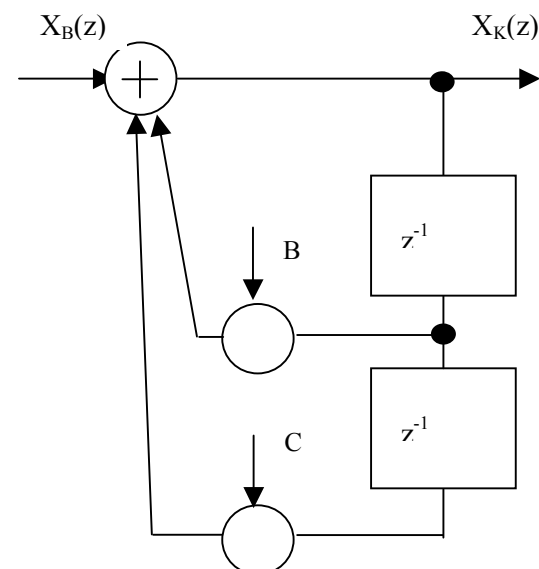


IIR MA alaptag:

$$X_K(z) = X_B(z) + z^{-1} B X_K(z) + z^{-2} C X_K(z)$$

↓

$$Y(z) = \frac{1}{1 - Bz^{-1} - Cz^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - Bz - C}$$

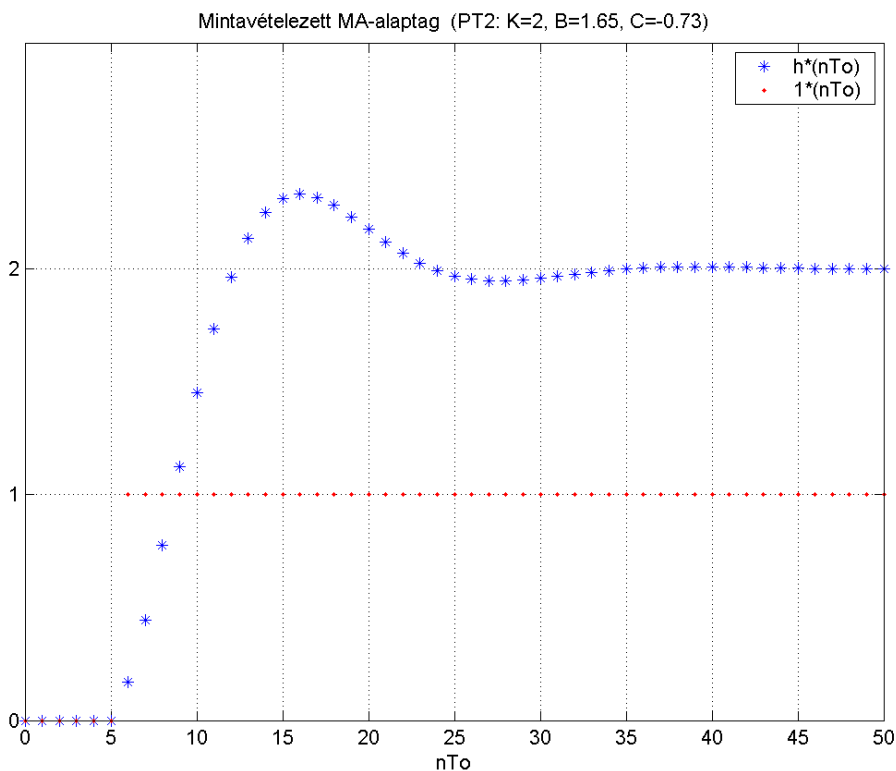


3.1.2 ábra. Az IIR-MA

```

% MV_PT2, (IIR_MA) MATLAB sim.
xb=0;   xk=0;   y=0;   h=0;   q=0;   %kezdeti értékek
K=2;    %átviteli tényező a 0 dB-hez képest
%
k=0.05; %k=w/w0, relatív frekv., ahol w0=2*pi/To.
kszi=0.5; %PT2 csillapítási tényezője
%
%gyökök az 'S' síkon
root1=k.*(-kszi+sqrt(kszi^2-1));
root2=k.*(-kszi-sqrt(kszi^2-1));
B=2.*exp(2.*pi.*real(root1))*cos(2.*pi.*imag(root1)); %s-z átszámítás
C=-exp(4.*pi.*real(root1));
z=(B+sqrt(B^2+4.*C))./2; %gyökök a 'z' síkon
%
A=(1-B-C); %a 0 dB-es átviteli tényezőhöz
for t = 0:1:50;
    q=h; %z-1 műveletek (tárolás)
    h=xk;
    xk=A.*K.*xb+B.*xk+C.*q;
    y=xk-z; %súlyfüggvény deriválással
    plot(t,xk,'b*',t,xb,'r. ');
    hold on
    if t==5;   xb=xb+1;
    elseif t==25; xb=xb-0;
    else xb=xb;
    end
end
axis([0 50 0 3]);
*****

```



3.1.2.1. ábra. IIR-MA átmeneti függvénye ($\xi=0,5$)

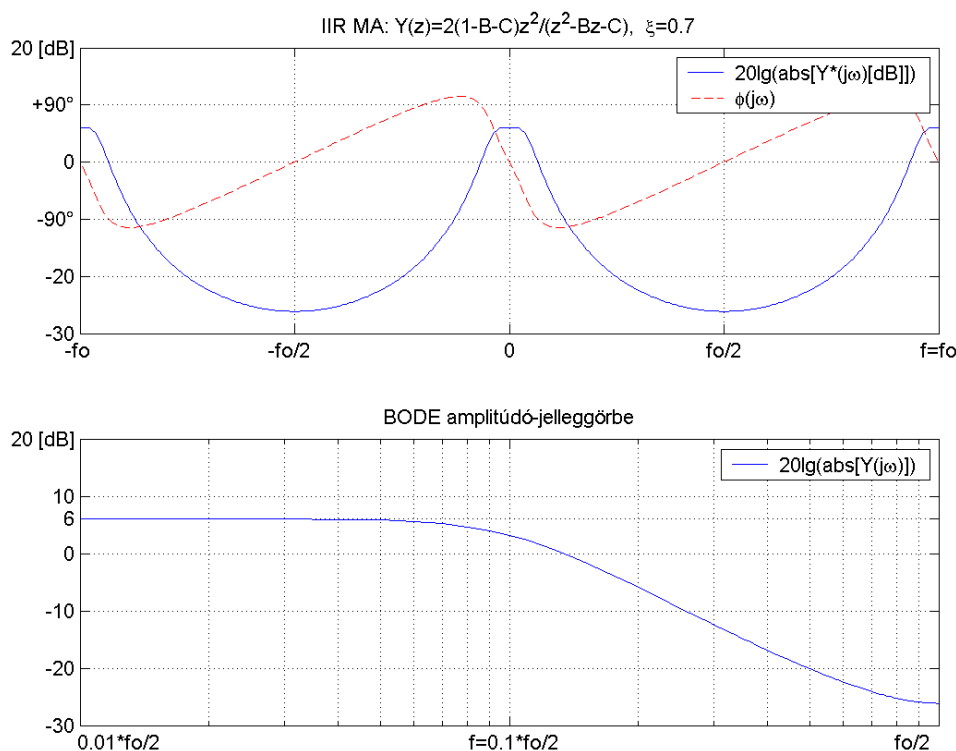
3.1.2.1 Az IIR-MA frekvenciatartományban

Az MA alaptag frekvenciafüggvénye az $Y(z)$ impulzusátviteli függvényéből:

$$Y(z) = \frac{A}{1 - Bz^{-1} - Cz^{-2}} = \frac{Az^2}{z^2 - Bz - C}$$

$$F\{Y(z)\} = \frac{A}{1 - B \cos(\omega T_0) + jB \sin(\omega T_0) - C \cos(2\omega T_0) + jC \sin(2\omega T_0)}$$

Szimulációval nyert amplitúdó- és fázis jelleggörbék:



3.1.2.2 ábra. IIR-MA frekvenciafüggvénye

Itt is érvényes az EA alaptagnál említett átlapolódás okozta távolvégi csillapításcsökkenés, annál inkább, minél közelebb van a törésponti frekvencia a mintavételi frekvenciához. Egyébként amplitúdómenete azonos az analóg PT2-vel. Ismét megemlítjük, hogy zéró csillapítású paraméterek választása is lehetséges, ekkor természetesen **színuszjelet adó oszcillátort** kapunk.

Az IIR-PT2 (MA) paramétereinek számításához:

$$z_{1,2} = e^{s_1 T_0} = e^{\sigma T_0} e^{j\omega T_0} = e^{\left[\frac{\operatorname{Re}(s_1)}{\omega_0} 2\pi \right]} \left\{ \cos \left[\frac{\operatorname{Im}(s_1)}{\omega_0} 2\pi \right] \pm j \sin \left[\frac{\operatorname{Im}(s_1)}{\omega_0} 2\pi \right] \right\}$$

Mivel:
$$s_{1,2} = -\omega \xi \pm j\omega \sqrt{\xi^2 - 1} = \operatorname{Re}(s_1) \pm j \operatorname{Im}(s_1)$$

$$Y(z) = A \frac{z^2}{z^2 - Bz - C}$$

$$z^2 - Bz - C = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - z(\xi_1 + z_2) + (\xi_1 z_2)$$

$$B = (z_1 + z_2)$$

$$C = -z_1 z_2$$

Tehát:

$$B = 2e^{\left[\frac{\operatorname{Re}(s_1)}{\omega_0} 2\pi \right]} \cos \left[\frac{\operatorname{Im}(s_1)}{\omega_0} 2\pi \right];$$

$$C = -e^{\left[\frac{\operatorname{Re}(s_1)}{\omega_0} 4\pi \right]}; \dots \dots \dots A = (1 - B - C)$$

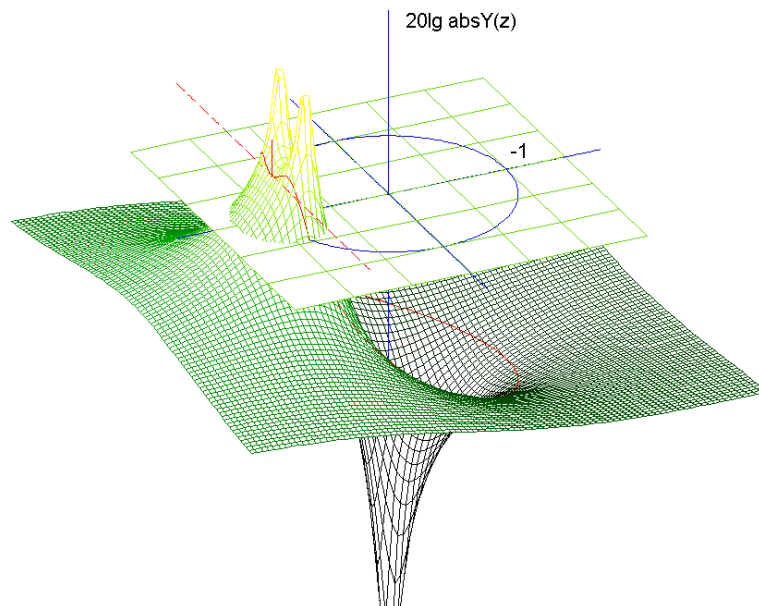
ahol A a szűrő 0 dB-es átvitelhez számított átviteli tényezője.

3.1.2.3. ábra. IIR-MA paramétereinek számítása

3.1.2.3 Az IIR-MA Z tartományban

Az előbbi szimuláció adataival készített Z felületet az ábra mutatja be. Megfigyelhető a konjugált komplex póluspár hatására kialakuló, kiemelést adó frekvenciafüggvény.

$$Y(z)=2(1-B-C)z^2/(z^2-Bz-C)$$



3.1.2.4. ábra. Az IIR-MA z felülete

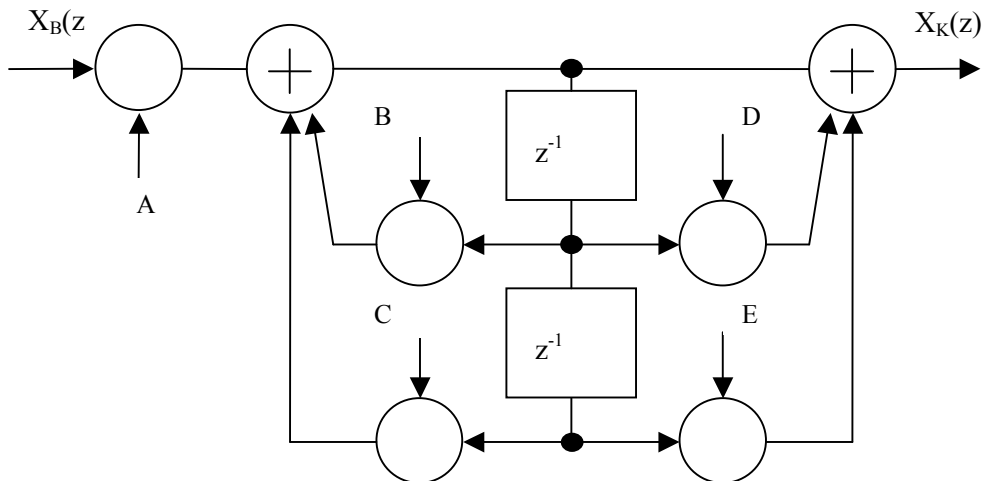
3.1.3. A másodfokú elliptikus alaptag (BIQUAD, IIR-ME)

A másodfokú aluláteresztő alaptag mint láttuk, csak pólusokat tartalmaz. Alkalmos helyen beiktatott zérussal a zárótartománybeli csillapítás növelhető az MA alaptaghoz képest. Ebben az esetben **másodfokú elliptikus** alaptagról **ME** beszélünk. (Az angolszász irodalomban BIQUAD betűszóval jelölik az alaptagot megvalósító elrendezést.)

A 3.1.1.-c és 3.1.2. ábrákról leolvashatóak alapján itt is könnyen meghatározható az impulzusátviteli függvény a hatásvázlatból. Bízgatjuk az olvasót ennek elvégzésére, az eredmény az alábbi ábrán megtalálható.

IIR ME alaptag:

$$Y(z) = A \frac{1 + Dz^{-1} + Ez^{-2}}{1 - Bz^{-1} - Cz^{-2}} = A \frac{z^2 + Dz + E}{z^2 - Bz - C}$$



IIR ME együtthatói:

$$A = \frac{(1 - B - C)}{(1 + D + E)}$$

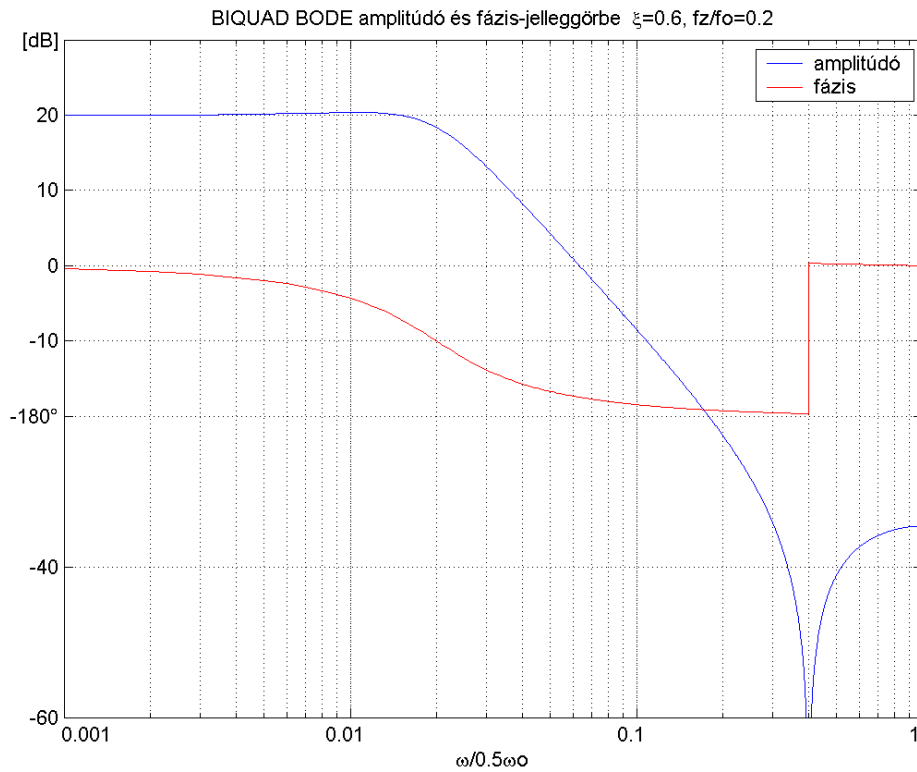
$$B = 2e^{\left[\frac{\text{Re}(s_1)}{\omega_0}\right] 2\pi} \cos\left[\frac{\text{Im}(s_1)}{\omega_0} 2\pi\right]$$

$$C = -e^{\left[\frac{\text{Re}(s_1)}{\omega_0}\right] 4\pi}$$

$$D = -2 \cos\left[\frac{\omega_z}{\omega_0} 2\pi\right]$$

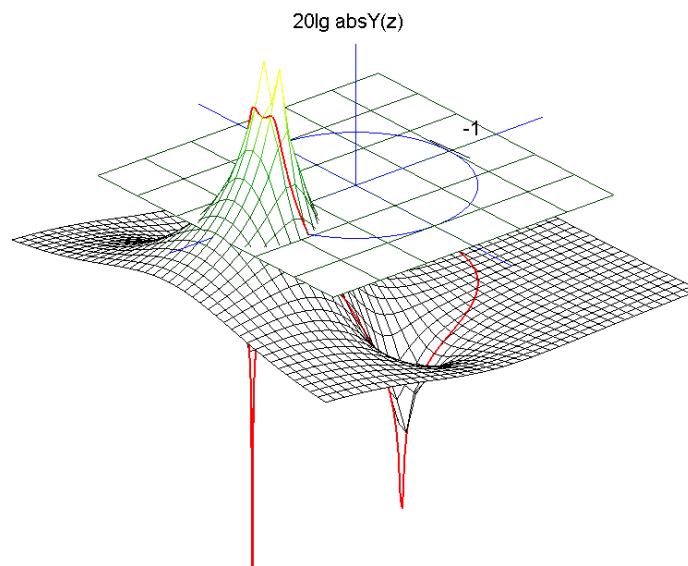
$$E = 1$$

3.1.3.1. ábra. A BIQUAD mint IIR-ME alaptag



3.1.3.2. ábra. Az IIR-ME frekvenciafüggvénye

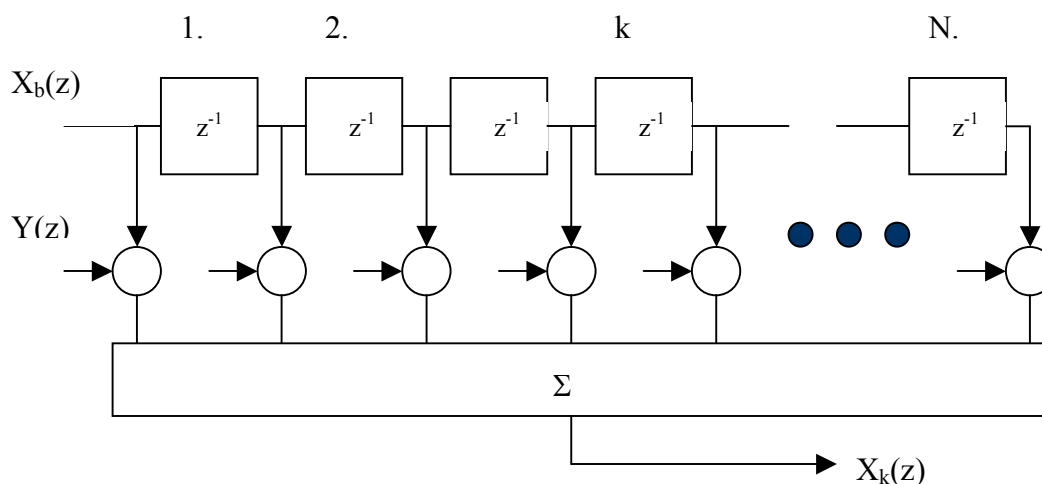
$$\text{BIQUAD } Y(z) = 10(z^2 + D^*z + E)/(z^2 - B^*z - C) \quad f_p/f_o = 0.01, f_z/f_o = 0.25, \xi = 0.5, K = 10$$



3.1.3.3. ábra. Az IIR-ME Z felülete

3.2 A konvolúció diszkrét formája: a FIR szűrők.

Ismeretes, hogy a konvolúció művelete segítségével is meghatározható egy tag kimenete adott bemenőjel esetén. Már a II. világháború idején használták KALMAN, LEE és WIENER „transzverzális szűrőjét” (3.2.1. ábra) kívánt tulajdonságú tag modellezéséhez, és felismerték alkalmazásának sok, alapvetően új minőséget adó lehetőségét. Példaként megemlítjük, hogy egy időben változó torzítású átviteli csatorna automatikus, önműködő kiegyenlítése is rendkívül vonzó lehetőség, ami az általuk javasolt struktúra használatával kivitelezhető. Ezeknek az úgynevezett adaptív kiegyenlítőknél köszönhető, hogy az egyébként gyenge és változó minőségű, ~3,4 kHz-re sávkorlátozott telefonvonalakon mára elérhetővé vált a ~36 kbit/s sebességű átvitel is, a korábbi 0,2-2,4 kbit/s helyett. Az eljárás hatásosságára jellemző, hogy ez az érték a zajos, sávkorlátozott csatornára vonatkozó SHANNON formula⁴ szerint az elvileg elérhető maximum!



3.2.1. ábra. A transzverzális szűrő (FIR_N)

Természetesen a számunkra most legegyszerűbbnek tartott alapesetet, a tetszőleges frekvenciatartománybeli tulajdonságokkal rendelkező tag, - a szűrő - megvalósítását elemezzük először.

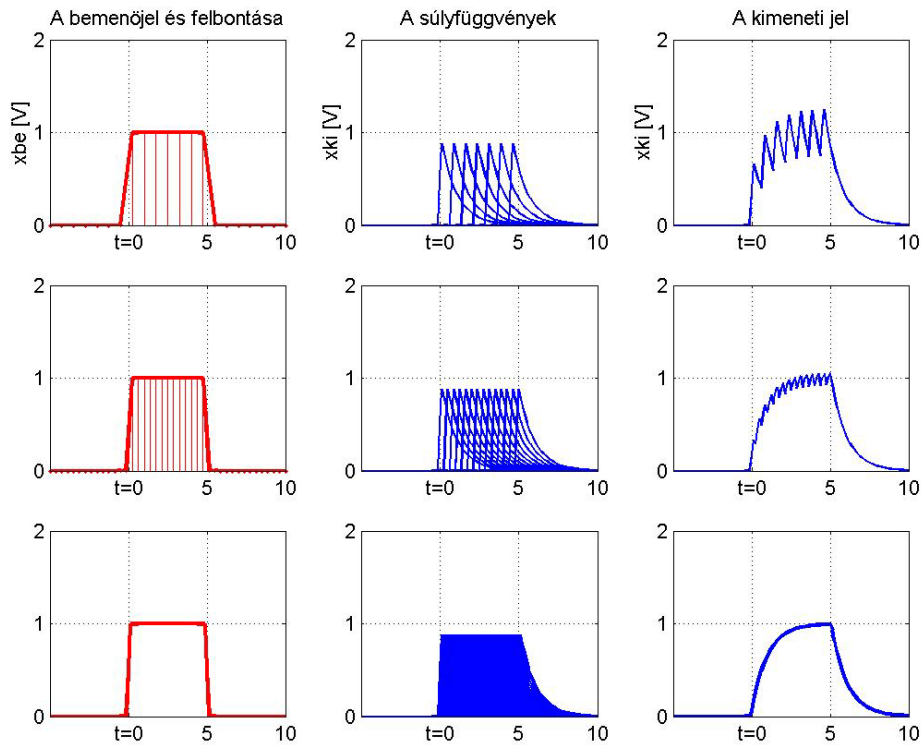
Legyen a szűrő bemenőjele $X_b(z)=1$, az $Y(z)$ sűlysorozat tetszőleges, és legyen rendre a szorzóművek egyik bementére adva. A szorzók másik bemenete a T_0 késleltetéseket adó elemi tárolók kimenetéről, a megcsapolásokról érkezik, és ezzel itt a bemenőjel NT_0 hosszúságú múltjának értéksorozata van megjelenítve. A kimeneti összegző a szorzatokat adja össze.

⁴ $C=B\log_2(1+S/N)$; ha $B=3400$ Hz, $S/N=60$ dB, akkor $C=20$ kbit/s

Kövessük gondolatban, hogyan alakul a kimenőjel! Miután feltesszük, hogy a bementi egységimpulzust megelőzően a művonal üres, ezért az első mintavételi ütemben mindenütt nullával kell szorozni a súlysorozat komponenseket, kivéve a bemeneten közvetlenül meglévő megcsapolást, ahol egy a szorzótényező, és ez az $Y(z)$ sorozat első elemével fog összeszorozódni. Tehát az első kimeneti minta a súlysorozat első eleme lesz. A következő ütemben ez az egységnyi bemenőjel már az első tároló kimenetén jelenik meg, mindenütt máshol zérus van. Ekkor a súlysorozat második eleme lesz a kimenet. Amikorra az egységimpulzus végigér az N hosszúságú művonalon, minden súlysorozat komponenszt letapogat, és a kimeneten ezek rendre megjelennek, de a továbbiakban nem kapunk nullától eltérő kimenetet. (Csak újabb gerjesztés esetén.)

Ebből következik:

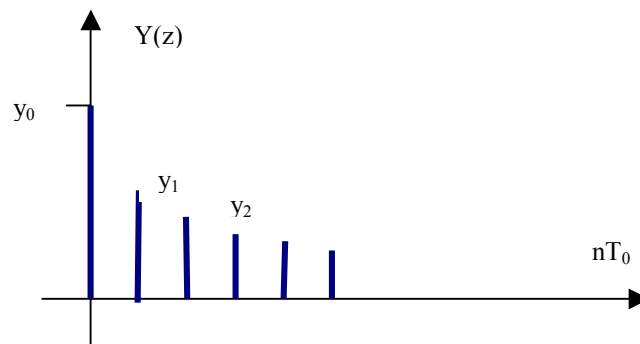
- Mivel kimenet egységimpulzus gerjesztés hatására a súlysorozat lett, ez definitíve azt jelenti, hogy egy $Y(z)$ sorozattal meghatározott tulajdonságú tagot valósítottunk meg.
- A súlysorozat hossza maximálisan N értékű, véges hosszúságú. (Innen a 'fájnát' megnevezés.) Ebből következik, hogy csak elegendően nagyra választott N értékkel, azaz műveletszámmal lehet a kívánt jellemzőket kellő pontossággal megvalósítani.
- A kimenet számításához nem kell felhasználni az előző ütem kimeneti értékét, tehát nem visszacsatolt a struktúra. Ebből a nemrekurzív megnevezés.
- Miután semmi megkötés nincs az $Y(z)$ -re, az tetszőleges lehet, választhatunk akár a természetben nem szokásos, szimmetrikus súlysorozat formátumokat is. Ennek az lesz az előnye, hogy az eredő frekvenciafüggvényt tisztán valóssá, vagy tisztán képzetessé tehetjük. Ekkor viszont függetlenné válik az amplitúdómenet a fázismenettől, tehát a klasszikus szűrőtervezés dilemmája megszűntethető. Azt is mondhatjuk, ezzel a természetben nem „kitalált” módszerrel rendkívül hasznos eszközhöz jutottunk a tervezésben.
- Vegyük észre, hogy a kimenet tulajdonképpen a bemenet késleltetett változatainak, a reflexióknak a súlyozott összege. Ez pedig maga a konvolúció. (3.2.2 ábra)
- Ahhoz, hogy kimenetet tudjunk számolni, szükség van a bemenőjel megfelelő hosszúságú múltbeli értékeire. A tároló - a művonal - hosszát a súlysorozat még nem elhanyagolható amplitúdóval bíró elemeinek száma határozza meg.



3.2.2. ábra. A konvolúció szemléltetése PT1 tag súlyfüggvénnyel

A szűrő impulzusátviteli függvénye tehát az alábbi polinom, amelynek együtthatóinak értéke jellemzi a szűrőt:

$$Y(z) = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots = \sum_{n=0}^N y_n z^{-n}$$



A polinomnak természetesen fokszámaival azonos számú gyöke, azaz zérusa van. Ezen zérusok alakítják ki a kívánt frekvenciamenetet, az úgynevezett „leszívásokkal”. (A negatív kitevő ne zavarjon meg bennünket

most, hiszen bármikor eltolhatjuk a sorozatot időben „z” alkalmas pozitív hatványával való szorzással, és ekkor már pozitív kitevőkkel a szokásos formában áll előttünk).

3.2.1 A FIR szűrők frekvencia tartományban

Képezzük az $Y(z)$ sűvsorozat FOURIER transzformáltját!

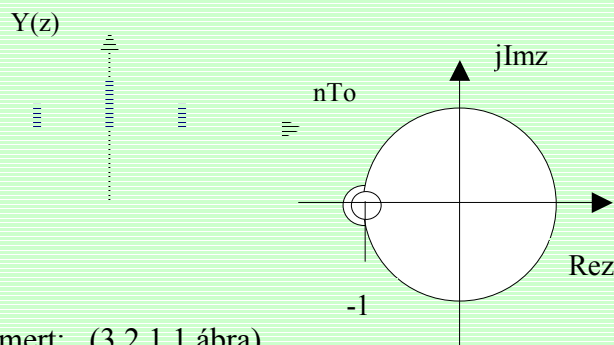
$$\begin{aligned} F\{Y(z)\} &= F\left\{\sum_{n=0}^N y_n z^{-n}\right\} = \sum_{n=0}^N y_n \left[\cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} n 2\pi\right) - j \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} n 2\pi\right) \right] = \\ &= \sum_{n=0}^N y_n \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} n 2\pi\right) - j \sum_{n=0}^N y_n \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} n 2\pi\right) = \operatorname{Re} Y^*(j\omega) + j \operatorname{Im} Y^*(j\omega) \end{aligned}$$

Amint látható, **harmonikus trigonometrikus függvények szuperpozíciójaként állítható elő a kívánt frekvenciafüggvény.**

3.2.1.1 példa (FIR_3)

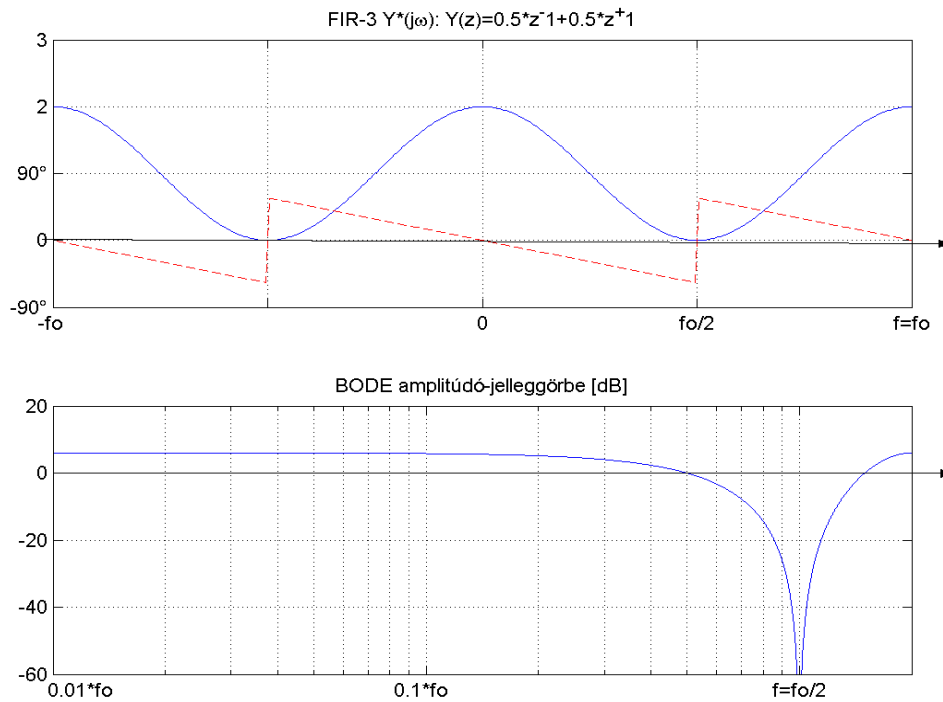
Legyen:

$$\begin{aligned} Y(z) &= 0,5z^{+1} + 1 + 0,5z^{-1} = \\ &= 0,5z^{-1}(z+1)(z+1) \end{aligned}$$



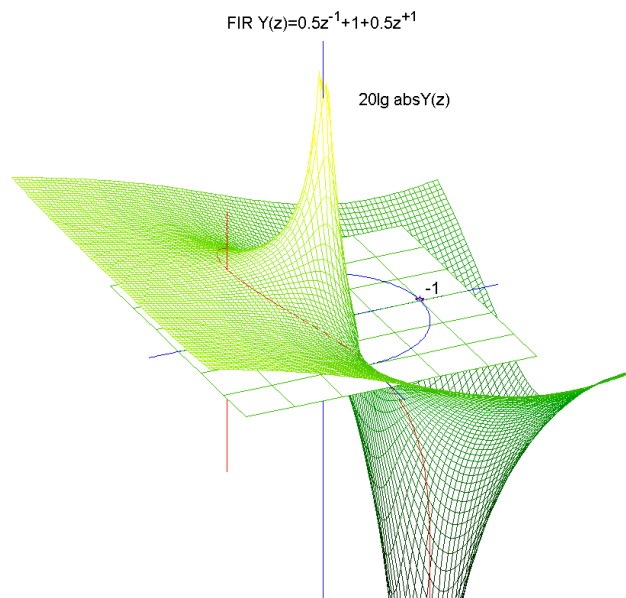
Ekkor a frekvenciafüggvény tisztán valós, mert: (3.2.1.1 ábra)

$$\begin{aligned} Y^*(j\omega) &= 1 + 0,5 \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} 2\pi\right) + j0,5 \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} 2\pi\right) + \\ &+ 0,5 \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} 2\pi\right) - j0,5 \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} 2\pi\right) = 1 + \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} 2\pi\right) \end{aligned}$$



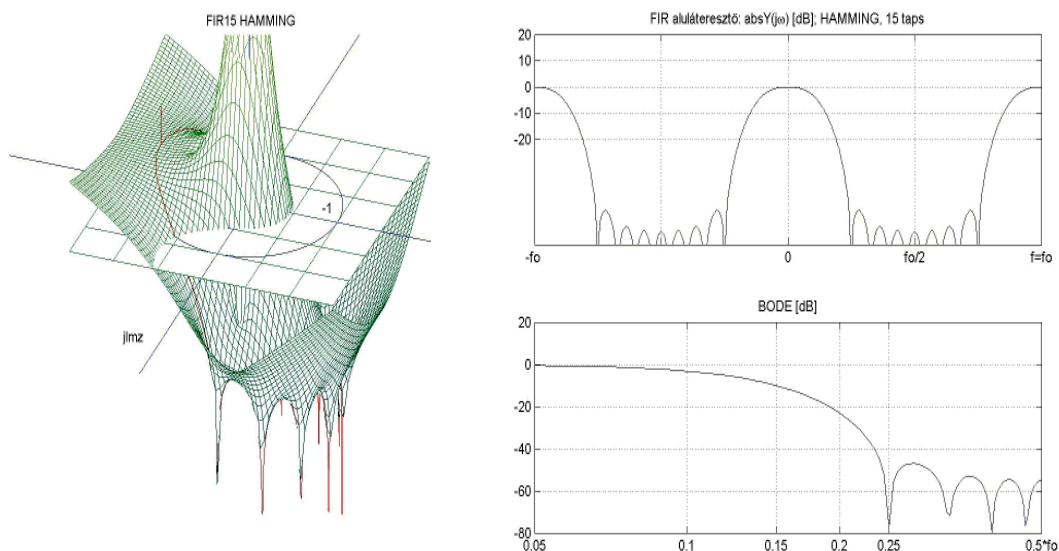
3.2.1.1 ábra. A példa frekvenciafüggvénye

A fenti példa több fontos tulajdonságot szemléltet. Z tartományban a súlysorozatnak láthatóan két zérusa van a $z = -1$ helyen, az egységsugarú körön. (3.2.1.2. ábra.)



3.2.1.2. ábra. A példa Z felülete a zérusokkal

Ezek a zérusok alakítják ki a frekvenciafüggvényt. Visszaidézve a korábban elmondottakat, miszerint a Z sík egységsugarú köre az S sík $j\omega$ tengelyének felel meg, észrevehető, hogy ez a zérus tisztán képzetes, „csillapításmentes”, és pontosan a mintavételi frekvencia felének megfelelő helyen van. Ez a leszívás a 3.2.1.1 ábra BODE amplitúdó-jellegörbéjén látszik jól. Több zérushellyel, azaz magasabb fokszámú polinommal tetszőleges karakterisztika alakítható ki. (3.2.1.3. ábrák.)



3.2.1.3. ábra. FIR_15 Z felülete és frekvenciafüggvénye

A frekvenciafüggvény alakja mutatja, hogy az egyrészt a mintavételi tétellel összhangban periodikus, másfelől ebben az egyszerű példában kapott eredmény tisztán valós frekvenciafüggvényt eredményezett. Ez által volt elérhető, hogy a T_0 idővel késő reflexiót semlegesítette egy ugyanennyivel siető, azonos amplitúdójú „visszaverődés”. Matematikai formában ez úgy jelentkezett, hogy a képzetes komponensek kioltották egymást. A természetben nem fordul elő ilyen szimmetrikus súlysorozat elrendezés, ezért ekkor mindig van valós és képzetes komponense is a függvénynek. Következésképpen ekkor az amplitúdó- és fázismenet kölcsönösen egymáshoz kötött. Jelen példánkban egyszerűen nincs „fázismenet”. Az ábrát alaposan tanulmányozva látjuk, hogy az lineárisan csökkenő, összefüggésben azzal, hogy a szimmetria érdekében eltoltuk az origót, ez pedig egy T_0 holtidő beiktatásával, azaz egy holtidős tag hatásával egyenértékű.

Az olvasóra bízunk, hogy ellenőrizze, feluláteresztő szűrőt is készíthetünk ugyancsak FIR_3 alapon, ha a 3.2.1.1. példa siető és késő reflexiót adó együtthatóinak értékét -1 -el szorozzuk.

3.3. A FIR szűrők a gyakorlatban

Alapvetően két típusa használatos:

- A szimmetrikus súlysorozat elrendezéssel megvalósított, (mint az előző pont példája szerinti), és
- az antiszimmetrikus elrendezésű forma. Könnyen beláthatóan most a valós komponensek kiejtése miatt tisztán képzetes lesz a frekvenciafüggvény. Ez a HILBERT-szűrők csoportja.

Külön kell tárgyalni az adaptív szűrőket, és a tetszőleges tagot megvalósító általános esetet, amely utóbbi például a rendszeridentifikáció fontos eleme. Bemutatjuk még a gyakorlati jelentősége miatt fontos fésűszűrőket is.

3.3.1. Szimmetrikus súlysorozatú FIR szűrők

Ebben az esetben minden együtthatóra igaz, hogy $y_{-n}=y_n$, és y_0 rendszerint nullától eltérő értékű. Nyilvánvaló, hogy az együtthatók száma ekkor $N=2n+1$. A frekvenciafüggvény értelemszerűen csak koszinuszos tagokat tartalmaz:

$$Y^*(j\omega) = \operatorname{Re} Y^*(j\omega) = \sum_{n=0}^N y_n \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} n 2\pi\right) = \sum_{n=0}^N y_n \cos(n\alpha)$$

$$\operatorname{Im} Y^*(j\omega) = 0$$

Két kérdés merül fel a tervezés során:

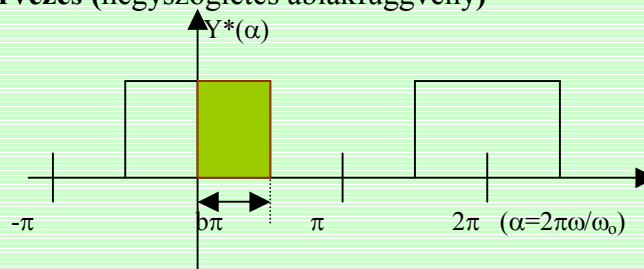
- Hogyan válasszuk meg az y_n súlysorozat elemeit, a szűrő együtthatóit, ha ismert a kívánt frekvenciatartományi előírás?
- Milyen hosszú sorozatot kell figyelembe venni, azaz, mekkora legyen N értéke?

Az első kérdésre adott válasz első ránézésre triviális: ismeretes, hogy a súlyfüggvény $y(t)$ FOURIER transzformáltja az $Y(j\omega)$ frekvenciafüggvény, tehát az utóbbi ismeretében inverz transzformációval adódik a súlyfüggvény, majd ebből a súlysorozat. A problémát az okozza, hogy egy trigonometrikus sor szükségszerű csonkítása (nem számolhatunk végtelen együtthatószámmal) nehezen felmérhető eredménnyel jár frekvenciatartományban. Mindig kétségeink maradhatnak, hogy esetleg sokkal jobb eredményt is el tudnánk érni N egy-egy együtthatóval való növelésével. A megvalósításkor is felvetődik egy probléma, a véges szószélességből eredő pontatlanság hatása.

3.3.1. példa Aluláteresztő szűrő tervezés (négyzetes ablakfüggvény)

Legyen a kívánt frekvenciafüggés:

$$Y^*(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{ha } -b\pi < \alpha < b\pi \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



A közelítő függvény:

$$\hat{Y}(n\alpha) = \sum_n y_n \cos(n\alpha)$$

Legyen a $-\pi < \alpha < \pi$ intervallumban a közelítés hibája négyzetes értelemben minimális. Ekkor:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [Y^*(\alpha) - \hat{Y}(n\alpha)]^2 d\alpha \rightarrow \min.$$

Az m -edik együttható meghatározásához írhatjuk:

$$\frac{\partial}{\partial y_m} \int_{-\pi}^{\pi} [Y^{*2}(\alpha) + \hat{Y}^2(n\alpha) - 2Y^*(\alpha)\hat{Y}(n\alpha)] d\alpha = 0$$

Mivel $Y^*(\alpha)$ nem függ y_n -től, deriváltja zérus. Tehát:

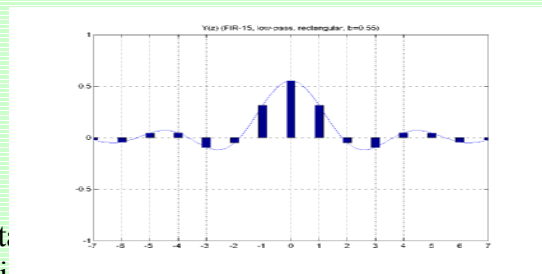
$$\frac{\partial}{\partial y_m} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_n y_n \cos(n\alpha) \right]^2 d\alpha = 2 \frac{\partial}{\partial y_m} \int_{-b\pi}^{b\pi} \sum_n y_n \cos(n\alpha) d\alpha$$

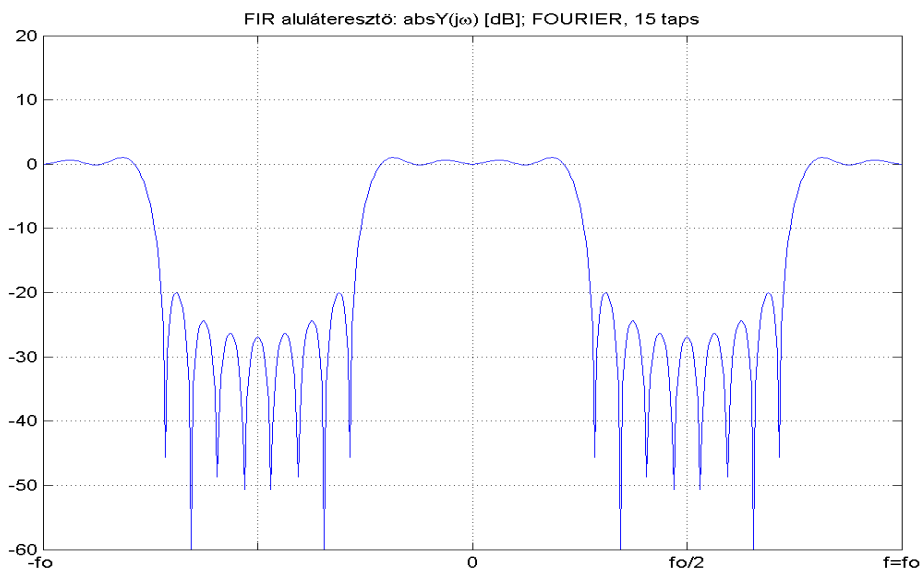
$$2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\alpha) \sum_n y_n \cos(n\alpha) d\alpha = 2 \int_{-b\pi}^{b\pi} \cos(m\alpha) d\alpha$$

$$y_m \pi = \frac{\sin(mb\pi)}{m}$$

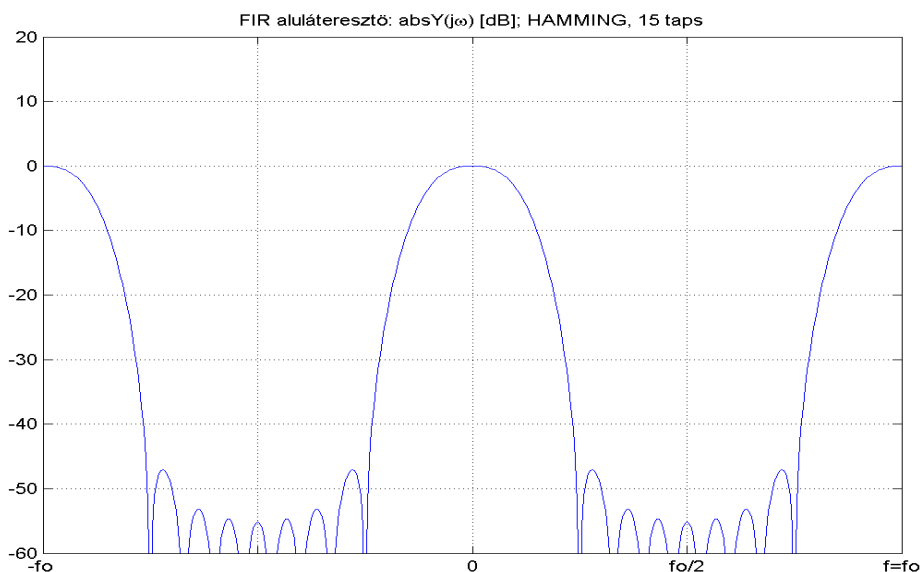
$$y_m = b \frac{\sin(mb\pi)}{mb\pi}$$

Az eredményt illetően; v.ö. a „Függelék” I. táblázat. A levezetett eredmény a Fourier transzformációval kapcsolatban természetesen azonos. $N=15$ értékre a szimulált eredmény a 3.3.1.a. ábrán látható.





3.3.1.a. ábra FIR_15 frekvenciafüggvénye, négyszögletes ablakfüggvénnyel (a frekvencia lépték lineáris!)

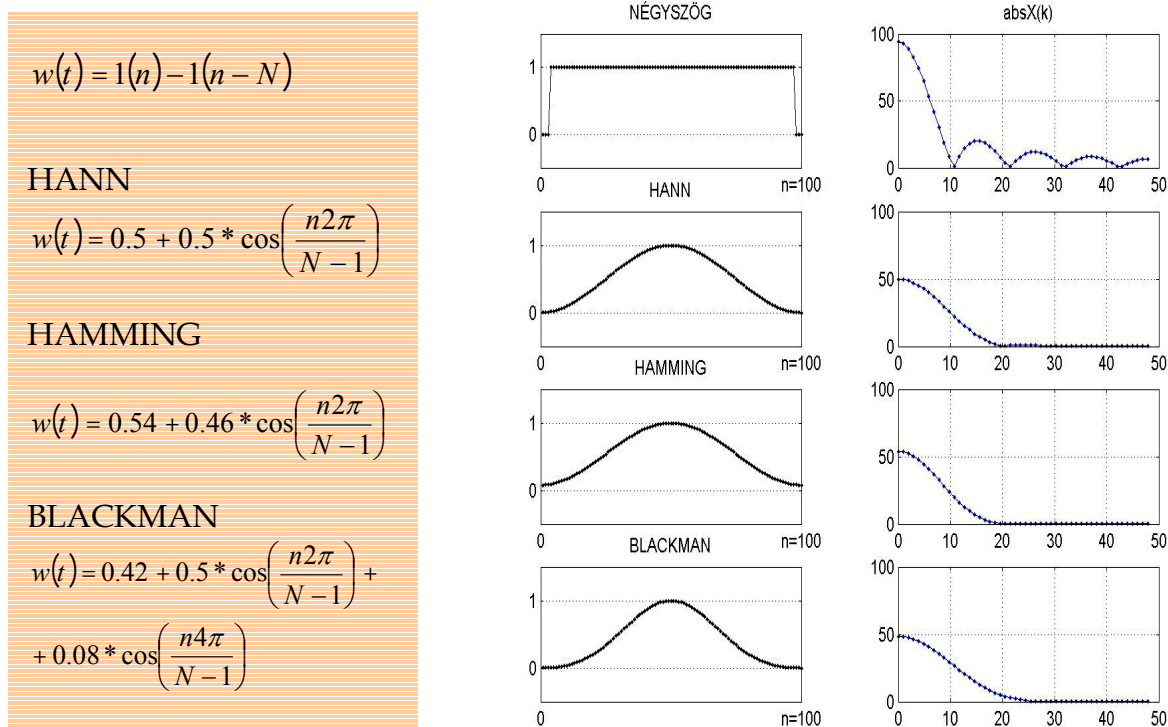


3.3.1.b. ábra FIR_15 frekvenciafüggvénye, HAMMING ablakfüggvénnyel

A fenti ábrákon megfigyelhető, hogy a „négyszögletes” karakterisztika igénye, - ami a gyakorlatban egyébként igen szigorú követelmény - viszonylag kis csillapítást eredményez zárótartományban. Az optimál kritériumunk tehát korrekcióra szorul, ha javítani szeretnénk az adott fokkal elérhető csillapításon. (Természetesen N növelése mondjuk 101-re már majdnem „tökéletes” amplitúdómenetet adna!) A gyakorlatban azonban a különböző ablakfüggvények használatával elérhető kompromisszumos megoldás terjedt el, amelynek eredményessége a 3.3.1.b.

ábrán jól lemérhető. Az alapgondolat nyilvánvaló, ha belátjuk, hogy „lágyabb” átmenetű függvényeket használva a sorfejtés konvergenciája nő, így kevesebb taggal is elérhető a zárótartományi előírás teljesítése. A használatos ablakfüggvényeket később, az FFT transzformációnál ismét tárgyaljuk, most a 3.3.1.2. ábrán csak bemutatjuk ezeket.

A szűrőtervezés többnyire rendkívül egyszerűen, valamilyen számítógépes program használatával történik a gyakorlatban. A program a menükészletből választott paraméterekhez hozzárendeli a súlysorozat együttthatókat, természetesen a szimulált eredmény megjelenítésével egyidejűleg.



3.3.1.2. ábra Néhány ablakfüggvény és frekvenciatartománybeli hatásuk

Antiszimmetrikus súlysorozatú FIR szűrők

Ebben az esetben minden együtthatóra igaz, hogy $y_{-n} = -y_n$, és $y_0 = 0$. (Páratlan függvényhelyzet) Az együtthatók száma most is $N = 2n + 1$. A frekvenciafüggvény értelemszerűen most csak szinuszos tagokat tartalmaz, mert a valós (koszinuszos) tagok kiesnek:

$$Y^*(j\omega) = j \operatorname{Im} Y^*(j\omega) = j \sum_{n=1}^N y_n \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} n 2\pi\right) = j \sum_{n=1}^N y_n \sin(n\alpha)$$

$$\operatorname{Re} Y^*(j\omega) = 0$$

$$y_0 = 0$$

A szűrő frekvencia függvénye tehát képzetes, tisztán szinuszos trigonometrikus sor eredőjeként áll elő az amplitúdómenet. A fázistolás pedig minden frekvencián konstans, $\pm\pi/2$ értékű. Ezeket a szűrőket a szakirodalom HILBERT szűrőként tartja számon, rendszerint mindent-áteresztő amplitúdómenettel rendelkeznek, és a konstans fázistolást használják ki pl. SSB modulátorok, demodulátorok megvalósításakor.

3.3.2. példa HILBERT szűrő tervezés

$$|Y^*(\alpha)| = \begin{cases} 1 & \text{ha } b\pi < \alpha < c\pi \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A közelítő függvény:

$$\hat{Y}(n\alpha) = \sum_n y_n \sin(n\alpha)$$

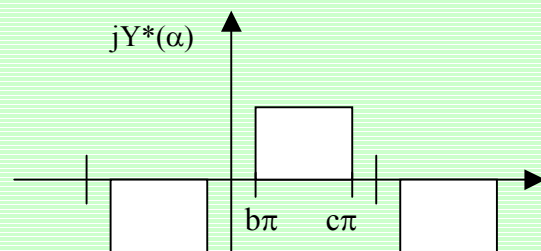
Legyen a $0 < \alpha < \pi$ intervallumban a közelítés hibája négyzetes értelemben minimális. Ekkor az előző 3.3.1. példa gondolatmenete szerint:

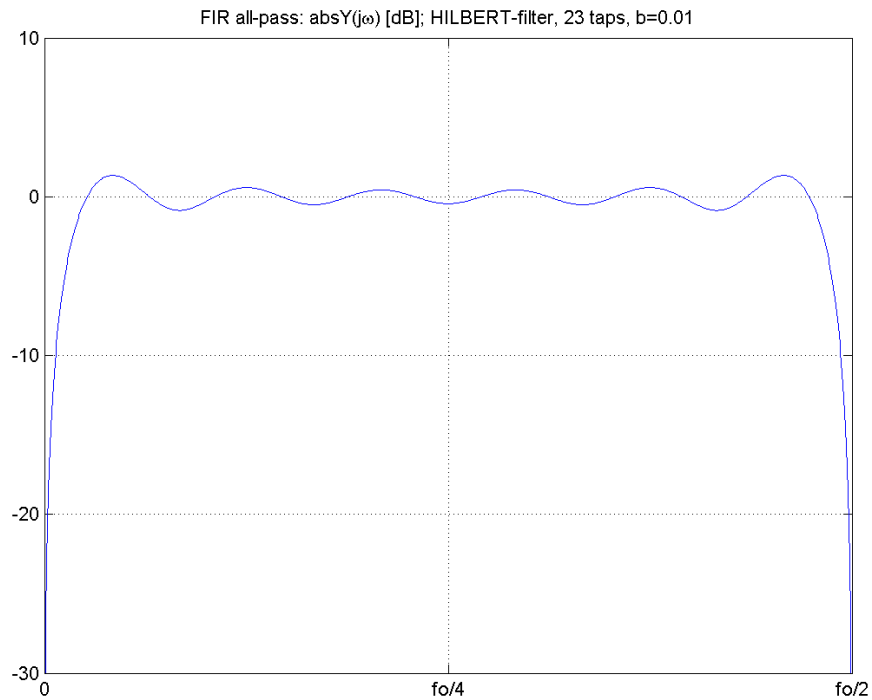
$$\frac{\partial}{\partial y_m} \int_0^\pi \left[\sum_n y_n \sin(n\alpha) \right]^2 d\alpha = 2 \frac{\partial}{\partial y_m} \int_{b\pi}^{c\pi} \sum_n y_n \sin(n\alpha) d\alpha$$

$$2 \int_0^\pi \sin(m\alpha) \sum_n y_n \sin(n\alpha) d\alpha = 2 \int_{b\pi}^{c\pi} \sin(m\alpha) d\alpha$$

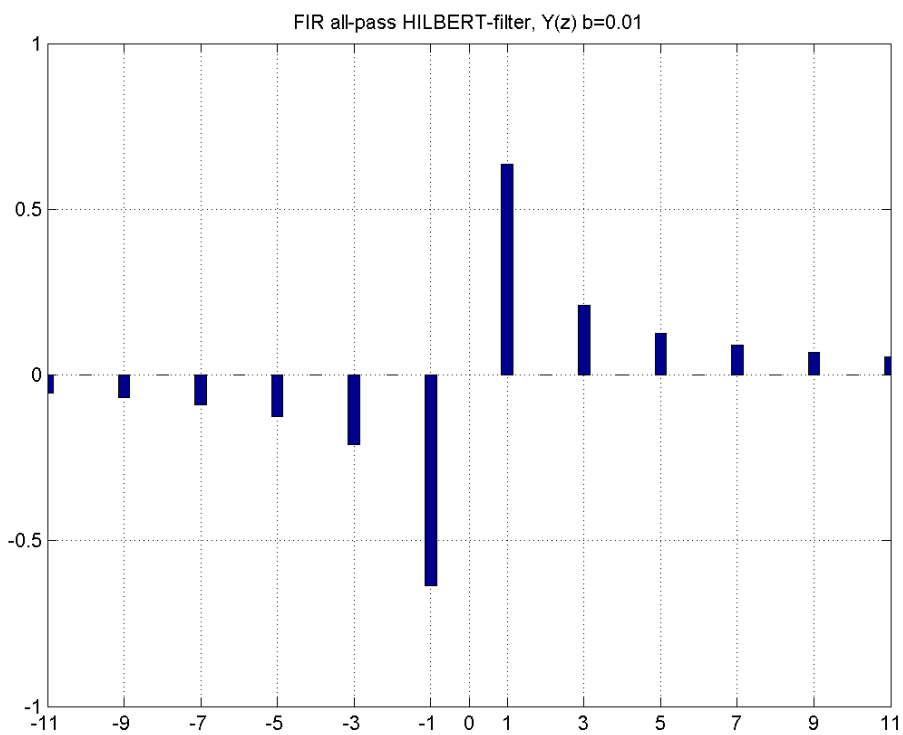
$$y_m = \frac{\cos(mb\pi)}{m\pi} - \frac{\cos(mc\pi)}{m\pi}$$

$b=0.01$, $c=1-b$ és $N=23$ értékre a szimulált eredmény a 3.3.2.1. ábrán látható.





3.3.2.1. ábra. HILBERT szűrő, mindent átteresztő amplitúdó - és konstans, -90° -os fázis-jelleggörbével



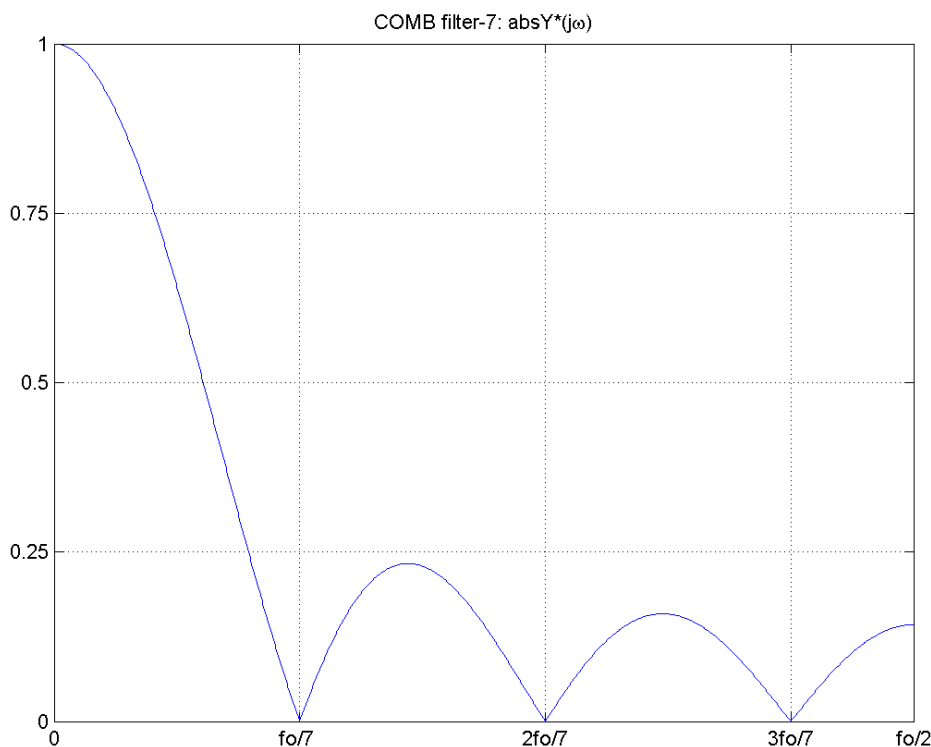
3.3.2.2. ábra. Egy HILBERT szűrő súlysorozata

3.3.2. A fésűszűrő

Amennyiben egy FIR_N szűrő súlysorozatára teljesül, hogy

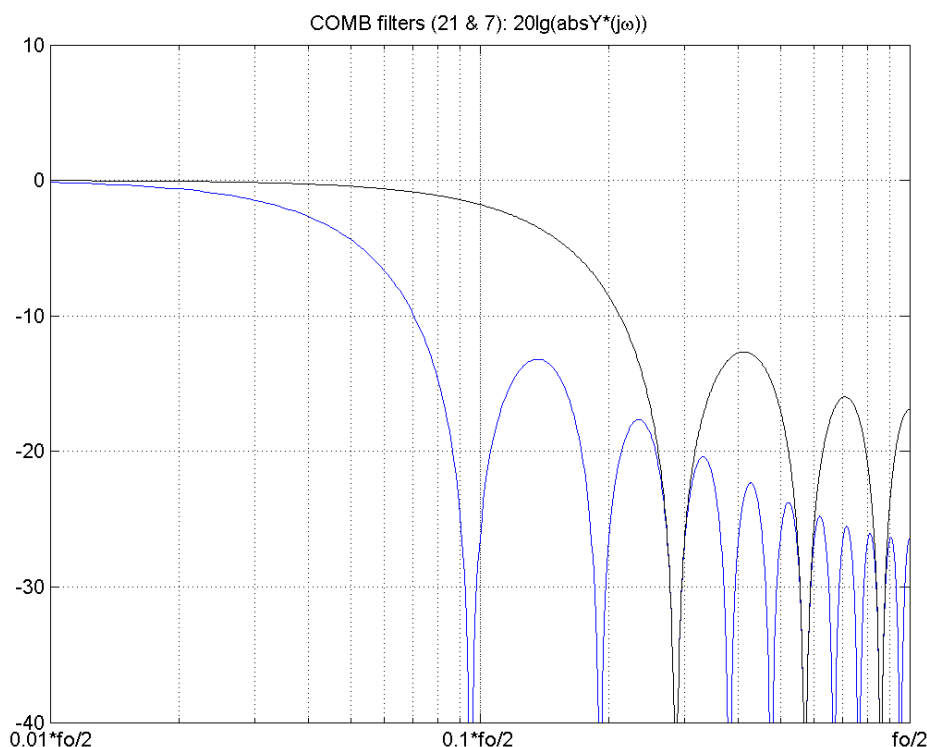
$$y_0=y_n=y_{-n}=1,$$

akkor a szűrő jellegzetes frekvenciafüggvénye miatti szokásos megnevezése: fésűszűrő, vagy Comb filter. N=7 esetre egy lineáris léptékű frekvenciafüggvényt a 3.3.3.1 ábra mutat be. Használata elterjedt, mivel a szorzótényezők mindegyike 1, így a megvalósításkor csak összegezni kell, sőt azt sem sokat, hiszen ha meggondoljuk, az akkumuláció során elegendő két összevonást végezni mintavételi ütemenként, egyet a bemeneten az új minta belépésekor, és egy másikat a legöregebb kilépő minta értékének kivonásakor. Ezért ez a szűrőtípus többnyire direkt, hardveres megvalósításban jelminták átlagolására használatos, például a túlmintavételezéses technikával működő A-D konverterekben⁵. Az ábra szerint frekvenciafüggvénye aluláteresztő jellegű, bár szerény zárócsillapítással. Az N fokszám növelése persze ezen jelentősen javít, de akkor alacsony relatív töréspontú aluláteresztő lesz az eredmény. (3.3.3.2. ábra.)



3.3.3.1. ábra. A fésűszűrő frekvenciafüggvénye. $\|Y^*(j\omega)\| = \left\| \frac{\sin(cx)}{cx} \right\|$

⁵ Lásd: a "DSP hardver elemei" füzetben



3.3.3.2. ábra. A fésűszűrő BODE amplitúdó-jelleggörbéi N=21 és N=7 esetre

A már megismert FOURIER transzformációs példák (például a Függelék I. példája) alapján könnyen belátható, hogy a frekvenciaválasz $\sin x/x$ függvény szerint alakul, hiszen a súlysorozat alakja egy téglányfüggvény. Az is logikusnak tűnik, hogy $Y(z)$ egy N -ed fokú polinom lévén,

$$Y(z) = z + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-N} = (z^N + z^{N-1} + z^{N-2} + \dots + z) / z^N = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_N) / z^N$$

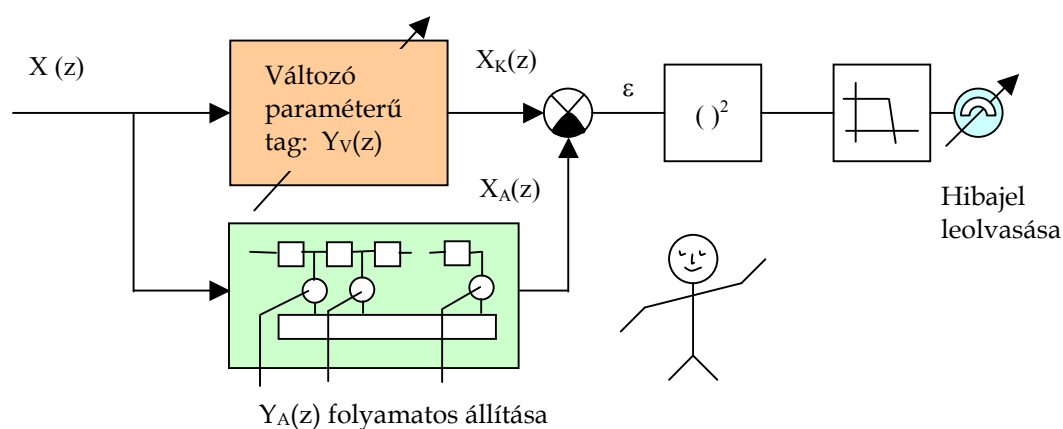
N számú gyökkel, azaz zérussal alakítja ki az amplitúdó-jelleggörbét. Az első leszívás $f_{z1} = f_0/N$ helyen van, és az összes többi ennek többszöröseinél, a $\sin x/x$ függvény jellege szerint. Ezek a periodikusan megjelenő leszívások, mint egy fésű fogai, további kiválóan hasznosítható lehetőségként kínálóznak néhány applikáció számára.

Végül megjegyezzük, hogy természetesen egy 0 dB-es egyenáramú átvitel, vagy másképpen a korrekt átlagérték számításához szükség van valahol a hatásláncban egy $1/N$ értékkel való szorzásra. Hardveres megoldásokban egyszerűen eltolás művelettel szokásos ezt megoldani, és N értékét is ezzel összhangban jelölik ki. ($N=2^m$ -el való osztás)

3.4. Adaptív szűrők

Egy klasszikus megoldás a kezdeti évekből SOUTHWELL relaxációs módszere [8]. Ebben egy manuális szabályozási körrel a számszerűsített hibajellemzőt (mondjuk egy műszer leolvasásával megfigyelhető értéket) kell minimális értékűre állítani. A kezelő figyeli a műszert, és egy FIR szűrő első súlysorozat együtthatóját pl. potenciométer állításával kismértékben megváltoztatja. Amennyiben csökken a kijelzett hiba, ugyanabban az irányban tovább változtatja az együttható értékét, egészen a lokális minimum eléréséig. Ezután az eljárást megismétli a következő megcsapolás együtthatójával az itt elérhető minimumig, és így tovább, egészen addig, amíg az utolsó megcsapolás beállításával is nem végez. Ilyen módon bizonyíthatóan mindig eredményesen érhető el az extrémum. Folyamatosan ismételve az eljárást, változások esetén meg is tartható ez az optimum, azaz (lassan) változó körülményeket adaptív módon követni is képes ez az eljárás.

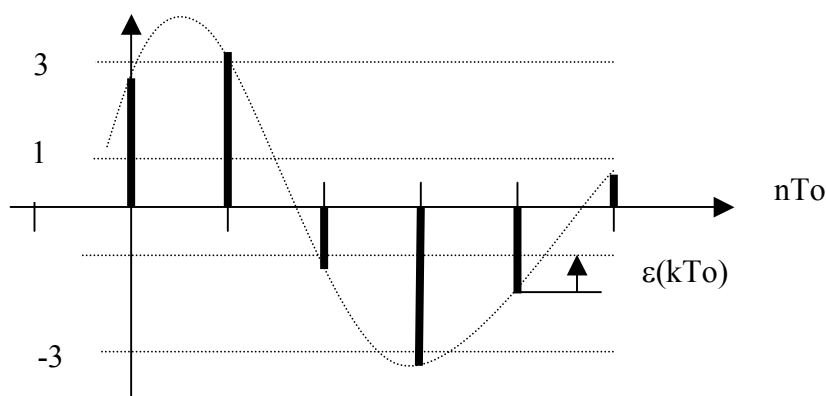
Az alábbi ábra ismeretlen, változó paraméterű rendszer identifikálásának egy, - fentebb ismertetett módszer szerinti - elvi lehetőségét mutatja. Az $Y_V(z)$, ismeretlen és változó súlysorozatú tag pontos hasonmását egy N megcsapolásos FIR szűrő $Y_A(z)$ súlysorozattal igyekszik folyamatosan megvalósítani, manuális visszacsatolással. A két kimeneti sorozat eltérését, a közelítés minőségét az $\varepsilon^*(z)$ hibajelsorozat jelzi. Négyzetre emelés és átlagolás után analóg módon kijelvezve a hibát, a pillanatnyi 'hasonlóság' mértéke megítélhető. Ennek figyelembevételével tesz kísérletet a kezelő az $Y_A(z)$ súlysorozat javítására. A folyamat végén $Y_V(z) \cong Y_A(z)$, ezzel egy kvázistabil paraméterérték sor meghatározhatóvá vált. Ez a módszer is kihasználja, hogy egy FIR szűrő tetszés szerinti tagtulajdonság megvalósítására alkalmas, hiszen az ezt meghatározó súlysorozat korlátozás nélkül beállítható. Az elérhető pontosságot csak N értéke korlátozza.



3.4.1. ábra. Rendszeridentifikáció SOUTHWELL módszerével

Egy mai tipikus feladat: egy adott telefonvonal, mint információ továbbító csatorna frekvenciatartománybeli jellemzőjének, - amely ráadásul menet közben változhat is - a nagy sebességű adatátvitelhez igazítása, azaz adaptív módon való kiegyenlítése. A folyamat eredményeképpen az eredő frekvenciamenet a sávon belül optimális, torzításmentes lesz azzal, hogy a csatorna frekvenciafüggését a kiegyenlítő egy pontosan megvalósított inverz karakterisztikával kompenzálja.

Akár az előbb bemutatott elvi módszer is használható lenne, ha a folyamat automatikusan menne végbe. A modemek tervezői több módszert is kitaláltak, a leginkább használt az úgynevezett döntésvisszacsatolt kiegyenlítés. Ennek egyszerű elvi változatát ismertetjük példaként. Legyen az alapsávi jel $L=4$ szintű, a szimbólum intervallum T_0 , a jel pillanatnyi hibája $\varepsilon(kT_0)$. (3.4.2. ábra) Legyen példánkban az átviteli út most zajmentes, csak harmonikus torzítással terhelt.



3.4.2. ábra. Négy szintű, hibával terhelt alapsávi demodulálандó jel ($D_n = [-3, -1, 1, 3]$)

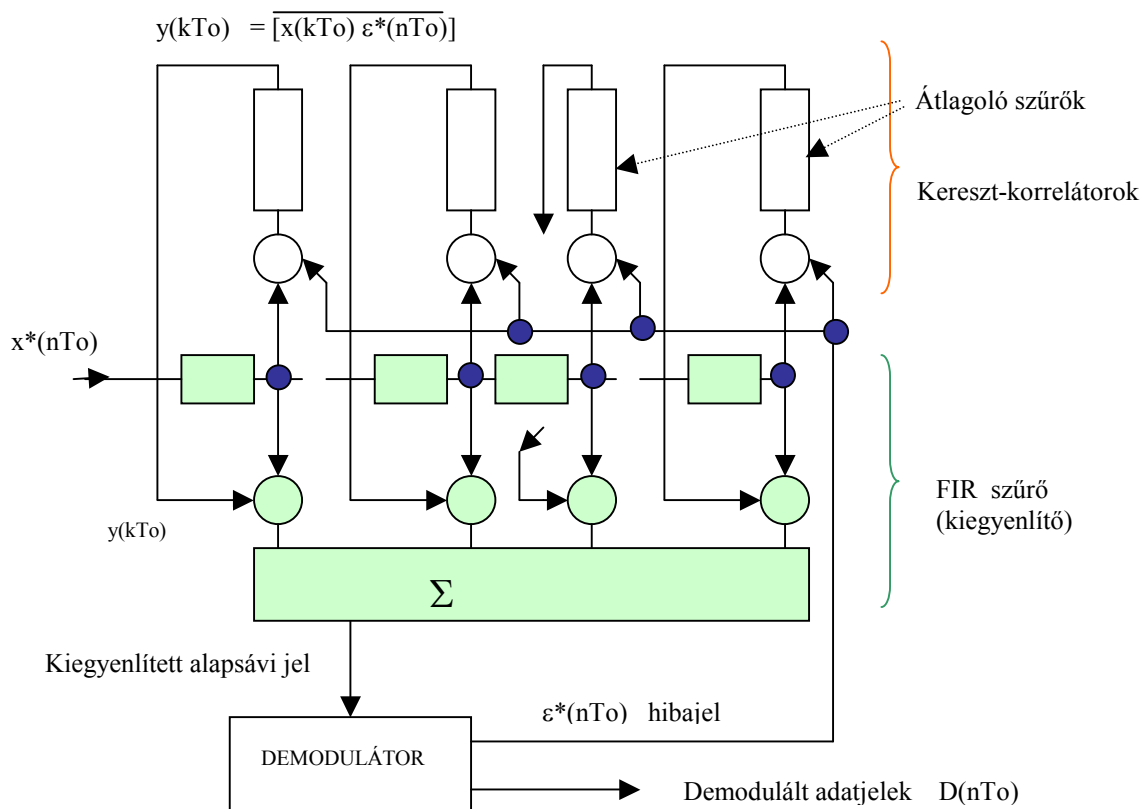
Feltesszük, hogy ezt a hibát néhány megelőző impulzus diszperziója okozta, azok reflexióinak lineárkombinációjaként állt elő. A feladat kettős, egyrészt ismerni kell a hibát az n -ik mintavételi időpontban, másfelől meg kell határozni, hogy a megelőző impulzusok milyen mértékben hatottak erre az amplitúdóra. Az első feladat elvileg nehéz, hiszen hogyan mondjuk meg a hibát, ha nem ismerjük a pontos értéket? A gyakorlati megoldás egyszerűbb, és erre vonatkozik a döntésvisszacsatolt jelző. Az alapgondolat: talán nincs akkora hiba⁶, amellyel szintet tévesztünk, és ekkor a szint a vett amplitúdóból adódik (a legközelebbi, példánkban a rajzon $D_k = -1$). Ezzel a „döntéssel” már

⁶ Az eljárások egy tanító sorozatot írnak elő, itt a szintek száma jóval kevesebb, mint a már kiegyenlített adatátviteli szakaszban, így biztosítható a vevő konvergenciája.

a hiba értéke is adottá vált. A kiegyenlítési folyamat ezzel megindulhat, és miután egyre kisebbek lesznek a hibák, a folyamat konvergens és elvileg tökéletesen eltüntetheti a harmonikus csatornatorzítást.

A feladat második részét rendszerint korrelációs technikával oldják meg. Az $\varepsilon^*(nT_0)$ hiba és egy korábbi kiegyenlítetlen jel, az $x(kT_0)$ keresztkorrelációja, jelöljük ezt $y(kT_0)$ -al, pontosan azt mutatja meg, hogy milyen mértékben okozója a hibának egy korábbi jel szóródása. Végül a korrelációs együtthatók ismeretében már csak egy FIR szűrő együtthatóit kell beállítani az inverz karakterisztika létrehozásához.

Az elviekben részletezett feladat visszacsatolt körökkel automatikusan oldható meg, például az alábbi ábra szerint.



3.4.3. ábra. Adaptív kiegyenlítő vázlata

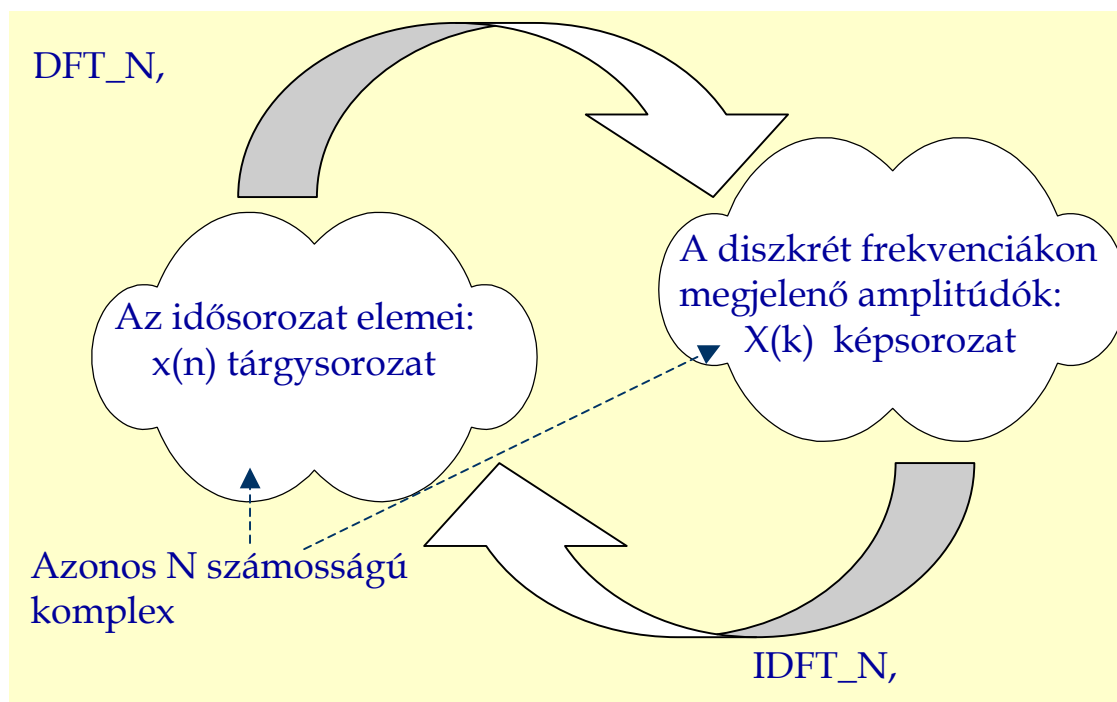
A konkrét megvalósításnál figyelembe kell venni, hogy a QAM jelek komplex számokként kezelendők, valamint azt, hogy egy rövid kezdeti training szekvencia után már csak igen lassú változásokat kell követni a kiegyenlítővel.

4. A DISZKRÉT FOURIER TRANSZFORMÁCIÓ (DFT)

A FOURIER transzformáció időfüggvényhez spektrális képet rendelő tulajdonsága igen sok gyakorlati feladatot tesz eszményi módon megoldhatóvá. A digitális számítástechnika robbanásszerű fejlődése ezt a lehetőséget növelte, mivel a valós idejű számításokhoz szükséges hardver elérhető áru lett az utóbbi néhány évben. Talán nem túlzás azt mondani, csodálatos virágzásnak indult ez a szakterület. Mivel a számításokat kizárólag digitális aritmetikával, mintavételezett jeleken végzik, nyilvánvaló, hogy a függvényanalízis eszköztára helyett a diszkrét számsorozatokon végezhető transzformáció tulajdonságainak részletesebb vizsgálata szükséges elsőként.

4.1. A diszkrét FOURIER transzformáció összefüggései

Célszerű a transzformációt sokkal általánosabban felfogni, mint csak - a bevezetőben említett -, idő-frekvencia tartomány közötti áttérést megadó formulát. Tekintsük ezért egy absztrakt transzformációnak, amely kölcsönösen egyértelmű leképezést ad két azonos számosságú, komplex elemű számhalmaz, a - tárgysorozat és a képsorozat - között. (4.1.1 ábra.)



4.1.1. ábra. A DFT, IDFT mint absztrakt leképezések

A transzformációkat DFT_N és FFT_N, míg inverzüket IDFT_N, IFFT_N betűszóval fogjuk jelölni. Mint később látni fogjuk, a két transzformáció azonos eredményű, csak végrehajtási módjában tér el jelentősen egymástól.

Elemezzük az analitikus alak és a diszkrét esetre vonatkozó összefüggések közötti kapcsolatokat!

Az alábbi táblán látható: a folytonos alak EULER formulájának a diszkrét változat „twiddle faktora” felel meg, az összefüggések pedig azonos alakúak. (Figyelembe véve a diszkrét értékekre vonatkozó formalizmust, miszerint az integrálnak a szummázás fel meg, és az összegzés nullás indexű elemtől kezdődően N-1-ig tart a végtelen határok helyett.)

A folytonos jelekre
alkalmazott
FOURIER transzformáció pár:

$$X(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t)$$

Mintavételezett esetre:

$$X^*(j\omega) = X(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-n,k}$$

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{+n,k}$$

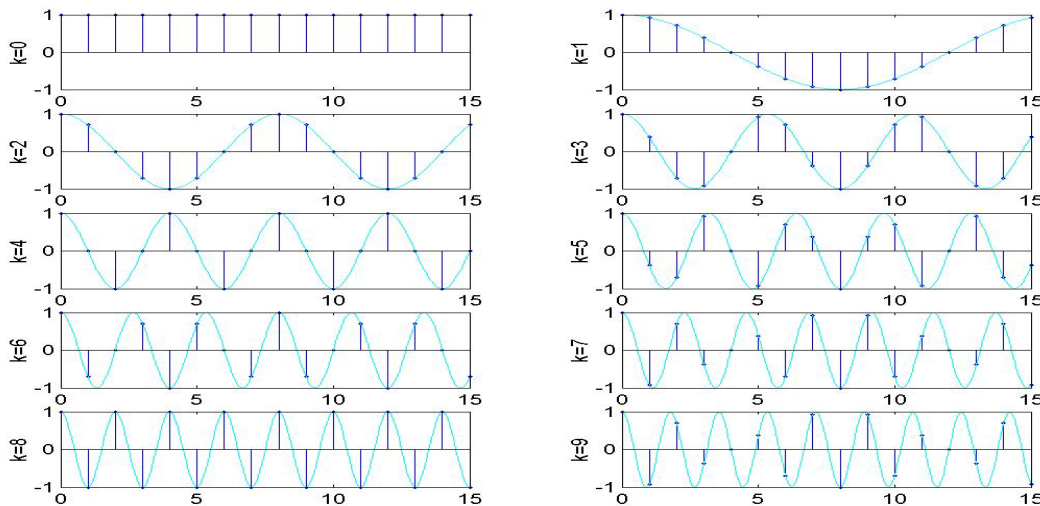
A „twiddle-faktor”:

$$W_N^{-n,k} = \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

Az X(k) elemeinek kiszámítása azonos egy mátrixszorzás elvégzésével, amely például N=16 esetére a következő alakú:

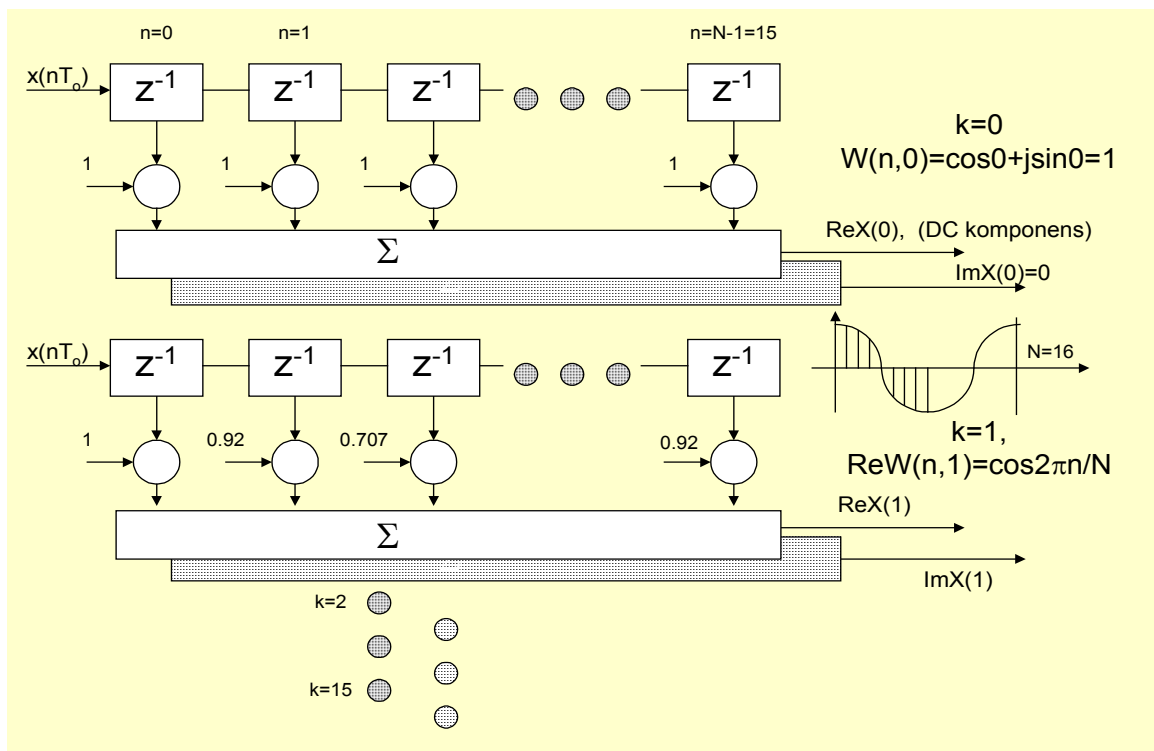
$$\frac{1}{\sqrt{N}} * \begin{bmatrix} W_N^{0,0} & W^{1,0} & W^{2,0} & W^{3,0} & \dots & W^{n,0} & \dots & W^{15,0} \\ W^{0,1} & W^{1,1} & W^{2,1} & \dots & \dots & W^{n,1} & \dots & W^{15,1} \\ W^{0,2} & W^{1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & W^{15,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W^{0,k} & W^{1,k} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & W^{15,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W^{0,15} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & W^{15,15} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \dots \\ x(n) \\ \dots \\ x(15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \dots \\ X(k) \\ \dots \\ X(15) \end{bmatrix}$$

A mátrix elemeit a twiddle faktor alkotja. (4.1.2 ábra.) Észrevehető a szimmetria, a $k=9$ -hez tartozó értékek már azonosak $k=7$ értékeivel. A $k=10$ értékei is azonosak lesznek a $k=6$ -al, és így tovább. (A képzetes komponensek antiszimmetrikusak a felezőpontra.)



4.1.2. ábra. A twiddle faktor valós részei $N=16$ esetén

A mátrixszorzás szabályai szerint a k -adik összetevő kiszámítása a mátrix k -adik sorának és a bemenőjelsorozat oszlopvektorának konvolúciója lesz, például a következő ábra szerinti elrendezésben. (v.ö. a FIR szűrő konvolvál!) A súlyozó sorozatok a twiddle faktor aktuális k -hoz tartozó értékei lesznek.



4.1.3. ábra. DFT számítás transzverzális szűrőkkel

Az $X(0)$ értékének számításakor a súlyozó faktor minden megcsapolásban $W(n,0)=\cos(0*n)=1+j0$, ezért az összeg az „egyenáramú” komponens értékének N -szerese lesz, ami természetes, hiszen ferkvenciatartományi szemlélettel ez a 0 Hz-es színkép vonal.

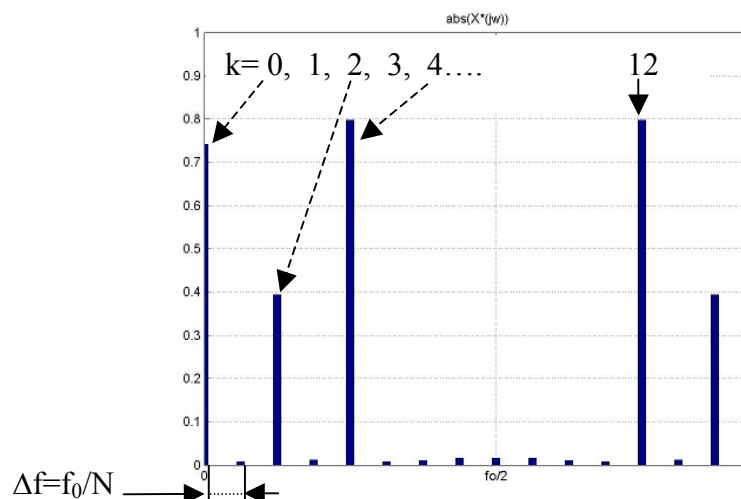
Az $X(1)$ értékhez tartozó twiddle faktor és a számítás menete is alaposabb vizsgálatra érdemes. Ekkor egy teljes periódusú koszinusz hullám N részre osztott fázisnövekményeinél kell a twiddle faktor valós és képzetes értékeit kiszámítani. Mekkora is lesz a teljes hullám periódusideje, illetve a megfelelő frekvencia? (T_0 a mintavételi periódusidő)

$$T_{period} = NT_0$$

$$\Delta\omega = 2\pi \frac{1}{NT_0} = \frac{\omega_0}{N}$$

Ez azért érdekes, mert a transzverzális szűrő $k=1$ mellett pontosan ezt a frekvenciaösszetevőt „szűri” a jelben, - azzal, hogy korrelációt⁷ számít -, és ez lesz a színkép legalacsonyabb frekvenciájú összetevője. A következő $X(2)$ komponens a kétszeres frekvencián mérhető korrelációt, „hasonlóságot” számszerűsíti, s így tovább.

Nyilvánvaló az is, hogy N értéke megszabja a frekvenciatengelyen mérhető felbontást. N kis értékei csak durva felbontást adnak a színképben. (4.1.4 ábra.)

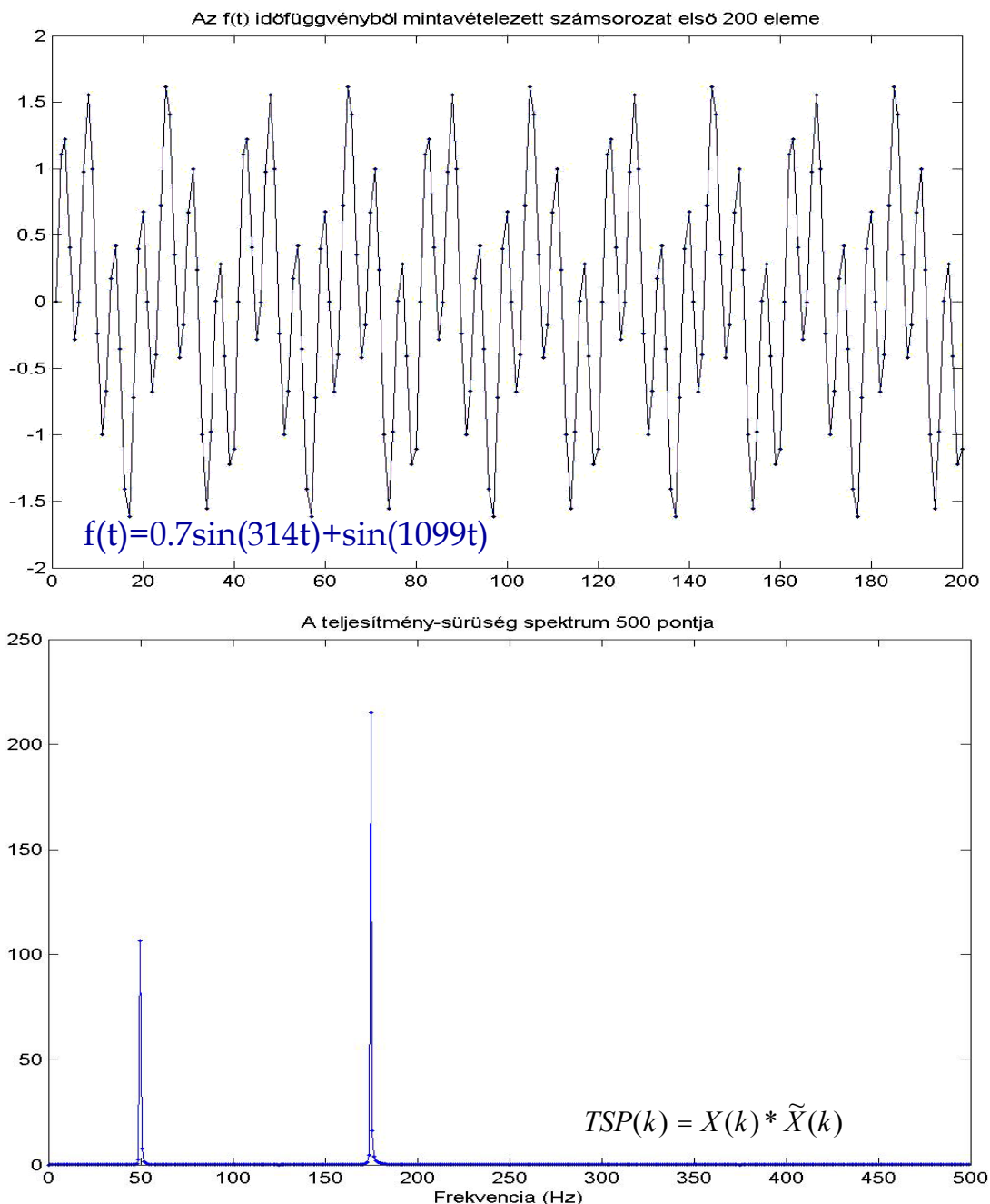


4.1.4. ábra. Egy DFT₁₆ eredménye. ($absX(k)$)

A következő megfontolás arra vonatkozik, hogy miért van szükség a twiddle faktor képzetes komponensére? A válasz az, hogy e nélkül a különböző fázishelyzetű tárgysorozatok más más értékeket eredményeznének a képsorozatban. Most viszont a twiddle faktor valós és képzetes összetevői külön-külön mérik az összetevők koordinátáit, ezzel a fázishelyzet közömbös lesz az abszolút érték (energiaérték) számításakor.

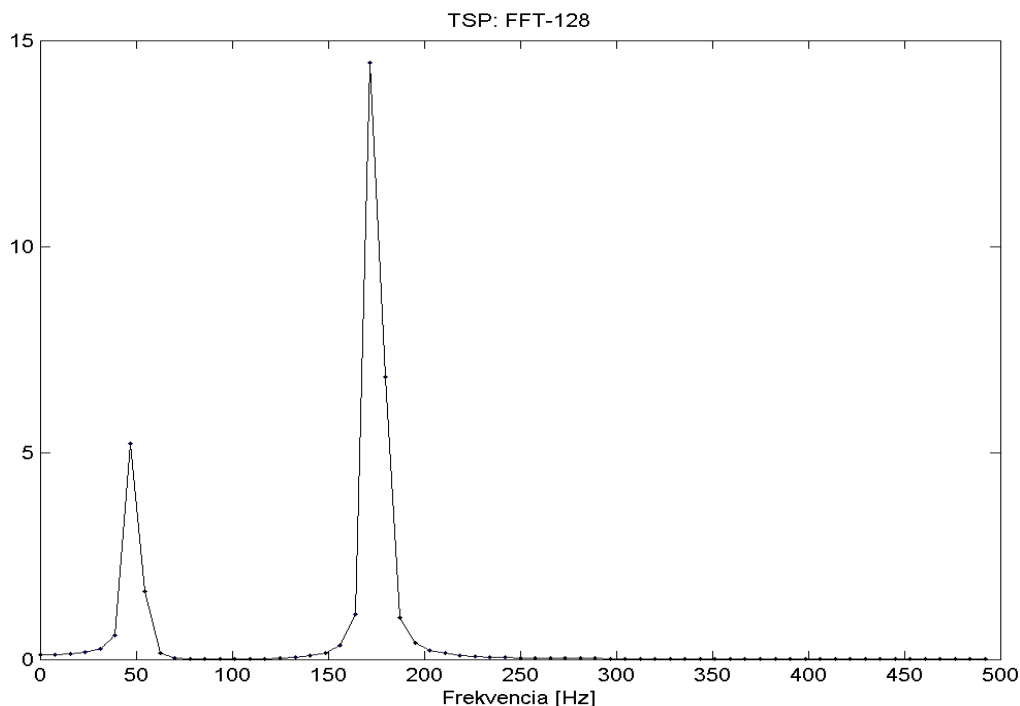
⁷ A Függelékben található meg a korrelációfüggvények vázlatos ismertetése.

Az $X(N/2)$ fölötti komponensek - csak valós elemeket tartalmazó bemeneti minta mellett⁸ - már nem tartalmaznak új információt, 'tükörképszerűen' jelenítik meg a kisebb sorszámú színképvonalakat. Ez is érthető, hiszen ez a mintavétel jól ismert következménye, a SHANNON határ megjelenése. (Egyúttal felhívja a figyelmet a bemeneti sávkorlátozás szükségességére is a DFT számítást végző egység bemenetén a komplementer összetevők „visszahajlásának” megakadályozása érdekében.)



4.1.5.a. ábra. Egy idősorozat, és a hozzá tartozó DFT_1024 eredménye

⁸ Komplex minta esetén ez általában nem igaz. Ekkor az N számosságú tárgyhalmazhoz N méretű, szimmetriát rendszerint nem mutató képhalmaz tartozik!



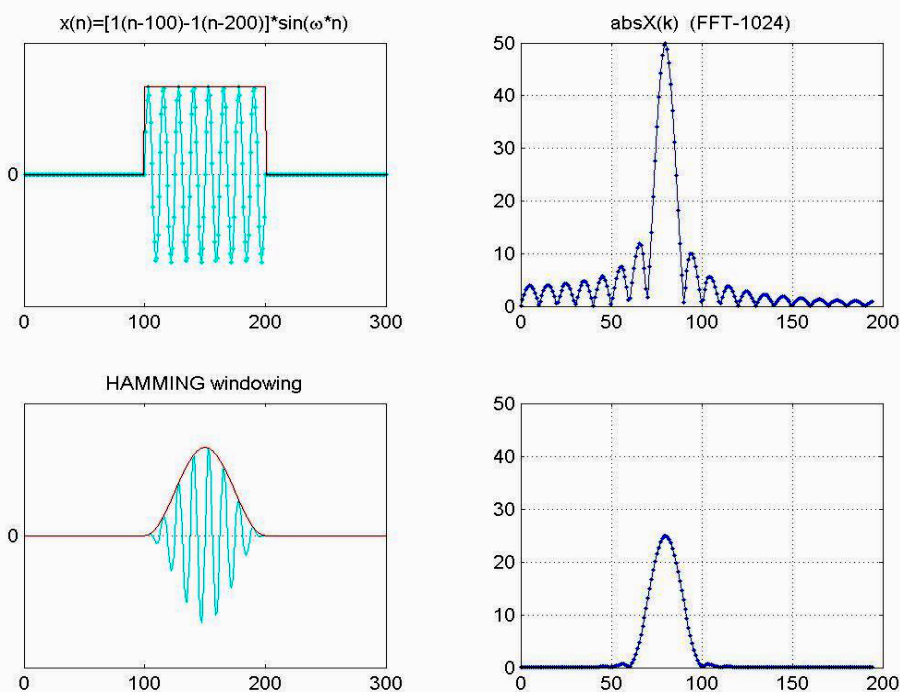
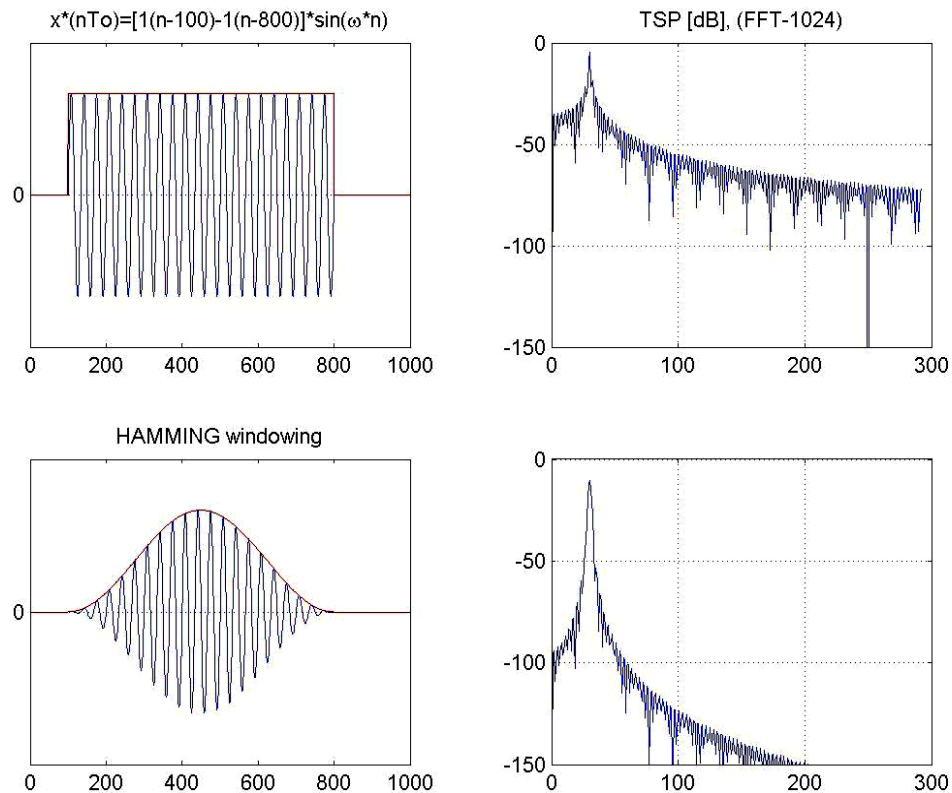
4.1.5.b. ábra. A fenti idősorozathoz tartozó DFT_128 eredménye

Egy használható felbontású DFT_1024 eredménye látható a fenti, 4.1.5.a ábrán. A b. ábrarészlet csak 128 pontos felbontású. Megfigyelhető a színeképvonalak kiszélesedése, a felbontás durvább volta. Megjegyezzük továbbá, hogy az ábrán most úgynevezett *teljesítmény-sűrűség spektrum* (TSP⁹) látható, ami a színeképvonalak értékeinek komplex konjugáltjakkal való összeszorozásával jött létre. A TSP gyakran használt jellemző, ugyanúgy nem tartalmaz fázisinformációt, mint az abszolút érték. Négyzetes jellege miatt az adott frekvencián jelenlévő jelteljesítménnyel arányos, és ez véletlen, sztochasztikus lefutású jeleknél is fizikai tartalommal bíró mérőszámot ad.

Az úgynevezett ablakolás technikájának bemutatásához figyeljük meg a következő, 4.1.6. ábrarészletet! Szembetűnő, hogy az ablakolt jelhez tartozó képsorozat mennyivel „keskenyebb” helyet foglal el, azaz a tényleges jelteljesítményt adó frekvenciaértéknél távolabb (ahol már tulajdonképpen semminek sem kellene lennie!) jelentősen megnőtt a csillapítás. A magyarázat kézenfekvő: a négyzetes ablakfüggvény abból adódik, hogy egy N hosszúságú mintát vizsgálunk csak az elméletileg akár végtelen hosszúságú sorozatból. Az így előállított tárgysorozat időtartományi szemlélettel egy N hosszúságú ablakfüggvénnyel összeszorozott idősorozatnak tekinthető. A szorzás művelete képsorozatban konvolúcióként jelenik meg, azaz tartalmazni fogja eredményként mind a tárgysorozat, mind az ablakolás hatását. A négyzetes ablakfüggvény lassan lecsengő sinc/x függvény

⁹ Lásd: Korrelációfüggvények (Függelék II.)

szerinti spektrumot eredményez. Ez konvolválódik az eredeti jel színekével, ami ezáltal maga is széles és lassan eltűnő lesz.



4.1.6. ábra. Négyzetes és HAMMING ablakkal készített szinuszjel 1024 pontos teljesítmény-sűrűség-spektruma logaritmikus (felül) és lineáris skálán (alul) ábrázolva

Például egy, a $w(t) = 0.54 + 0.46 * \cos\left(\frac{n2\pi}{N-1}\right)$ HAMMING függvényű

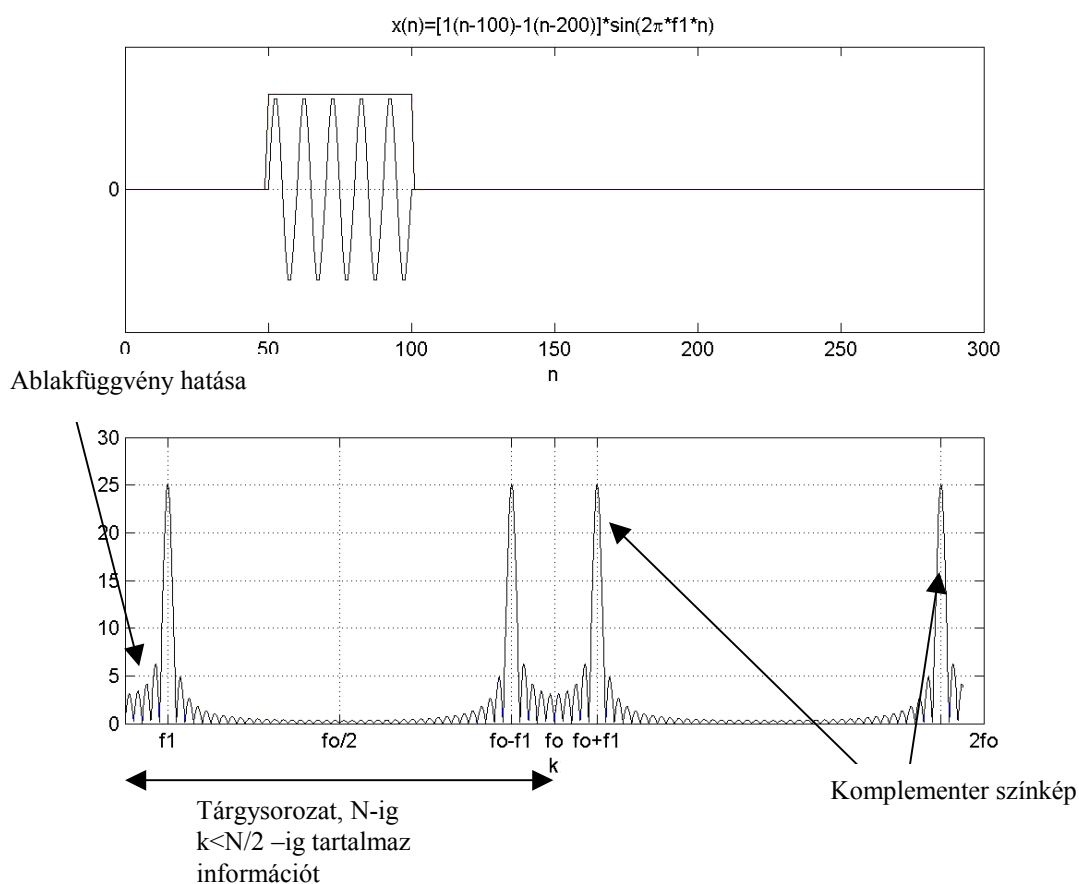
folyamatos átmenetet eredményező ablakolás (a belépő és a kilépő minták kis súllyal szerepelnek) sokkal jobb eredményt ad, mivel az ablakfüggvény spektruma maga is gyorsan eltűnő. A gyakorlatban néhány ablakfüggvény használata terjedt el. Ezeket a 3.3.1.2. ábrán tüntettük fel.

Összefoglalásként, egy DFT_N transzformáció eredményét a következő szempontok figyelembe vételével kell értékelni, amennyiben azt egy fizikai folyamathoz tartozóanvalós elemű idősorozat színeképének tekintjük. (4.1.7. ábra)

- A mintavételi tétel értelmében a kapott sorozat csak a $0 < k < N/2$ tartományban értelmezhető, ezen kívül a mintavételi tétellel összhangban már a tükrözések látszanak.
- A képsorozat felbontása frekvencitartománybeli szemlélettel N függvénye, a diszkrét frekvenciakvantum:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{N}$$

- A képsorozat tartalmazza a véges halmazméretből következő „négyzetes ablakfüggvény” színeképét is, ami a diszkrét vonal kiszélesedésével és lassan csillapodó oldalsávokkal jár együtt. (Ezen a problémán alkalmas ablakfüggvény használata enyhít.)



4.1.7. ábra. DFT_N értékelése

4.2. A gyors FOURIER transzformáció (FFT: Fast FOURIER Transformation)

Elöljáróban hangsúlyozzuk: nem jelent más, új eredményt adó eljárást, mint a már ismert DFT. Mint a neve is mutatja, csak elvégzésének módjából következő gyakorlati fontossága az, ami rendkívüli figyelemre méltóvá teszi, és külön tárgyalását indokolja. Ebben az eljárásban ugyanis a végrehajtás jelentősen csökkentett számú műveletet igényel a DFT-hez képest, ezért az FFT radikálisan lerövidült számítási időt biztosít.

Illusztrációként nézzük meg az alábbi táblázatot!

MAC műveletszám:

komplex szorzás-összegzés: $(x+jy)(u+jv)=xu-yv+j(xv+yu)$

	DFT	FFT
N	$(N-1)^2$	$N/2 \cdot \log_2 N$
16	225	32
128	16129	448
256	65025	1024
1024	1046529	5120

Egy DFT_N esetén közel N^2 szorzást kell elvégezni, komplex számokkal, a már megismert módon. Egy 1000 pontos – már elég jó eredményt adó – eset nagyjából egymillió szorzás-összegzés (MAC¹⁰) műveletet igényel. (Ami jelentős szám, pláne, ha valós időben szeretnénk spektrumot számolni! Ekkor ugyanis végeznünk kell a számítással a mintavételi periódusidőn belül.) Összevetve a táblázat FFT oszlopában szereplő értékekkel, az eljárás óriási előnye nyilvánvaló.

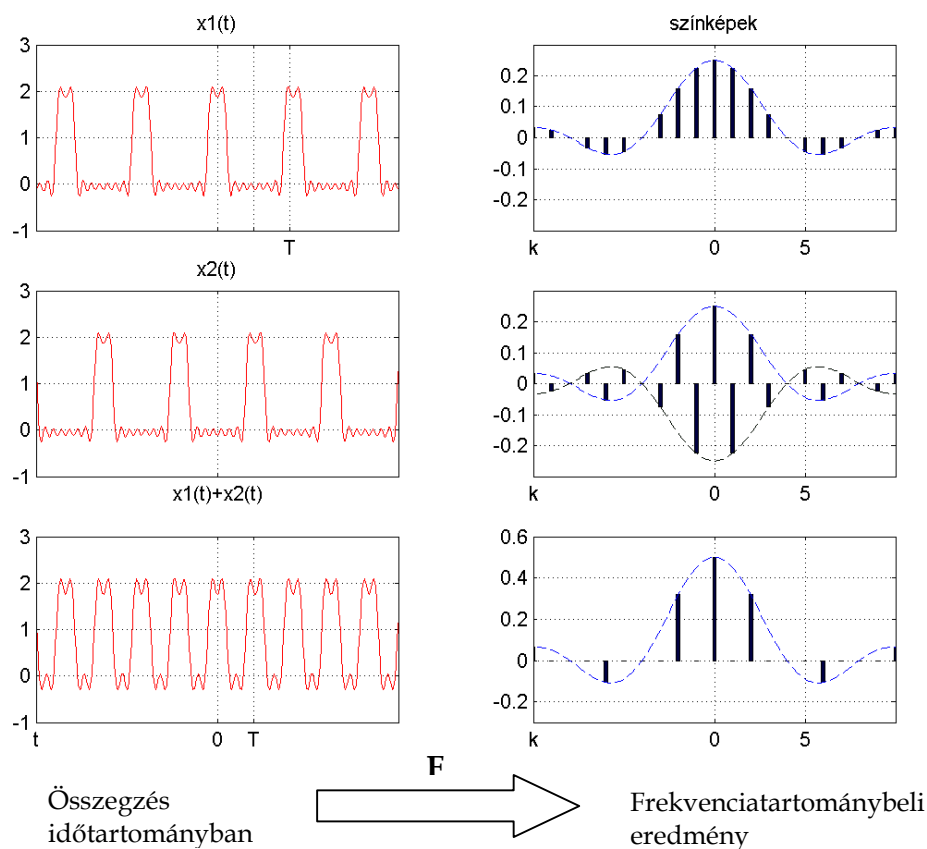
COOLEY és TUKEY 1965-ben, OPPENHEIM 1975-ben, WINOGRADOV 1978-ban, de sokan mások is dolgoztak ki hatékony eljárásokat, amelyekkel drasztikusan lecsökkenthető a számításigény. Az egyes algoritmusokban kis különbség van, alapötleteik azonosak, és a következő pontokba foglalhatóak :

- Felére csökkentve a N halmazméretet, annak négyzete kettővel szorozva is kisebb, mint az eredeti N^2 : $2(N/2)^2 < N^2$. Ha ezt az eljárást lehet folytatni is, mert a végén a részhalmazok eredményei majd „összefésülhetnek” lesznek, akkor máris hatalmas előrelépést jelent ez a dekompozíciónak nevezett módszer. A műveletszám ezzel rögtön

¹⁰ MAC: Multiply/Accumulate instruction

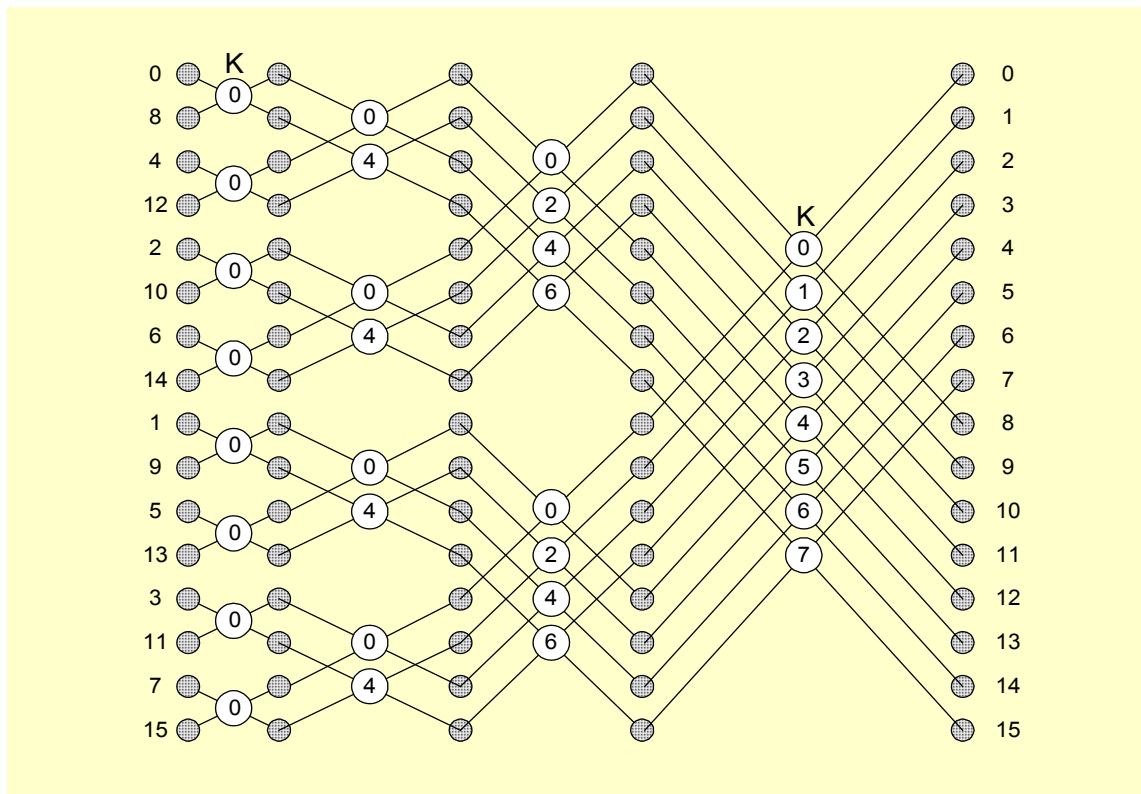
$N/2 \cdot \log_2(N)$ számúra csökkenthető. Rögtön észrevehető, hogy a felezések miatt az N halmazméretet célszerű 2 valamilyen egész számú hatványaként megválasztani. Az pedig, hogy az összefésülés megtehető, könnyen belátható, hiszen csak a FOURIER transzformáció linearitására kell gondolni, miszerint a transzformáció tagonként is elvégezhető. (Lásd a 4.2.1 ábrát)

- A twiddle faktor értékeit megfigyelve látható, hogy sokszor kell azonos számértékű tényezővel szorozni. Amennyiben a szorzás a leginkább időigényes kulcsművelet, akkor ennek száma csökkenthető úgy is, hogy előbb összeadjuk az ezzel a tényezővel szorzandó tagokat. (Az összegzés időigénye általában elhanyagolható a szorzások mellett.)
- Végül a tárgysorozat halmazának elemeit átrendezve az összevonásokat is egyszerűsíthetjük. A sorszámátrendezés az 'címfordított' ú.n. bit-reverz címmel valósítható meg. (4.2.5 ábra)

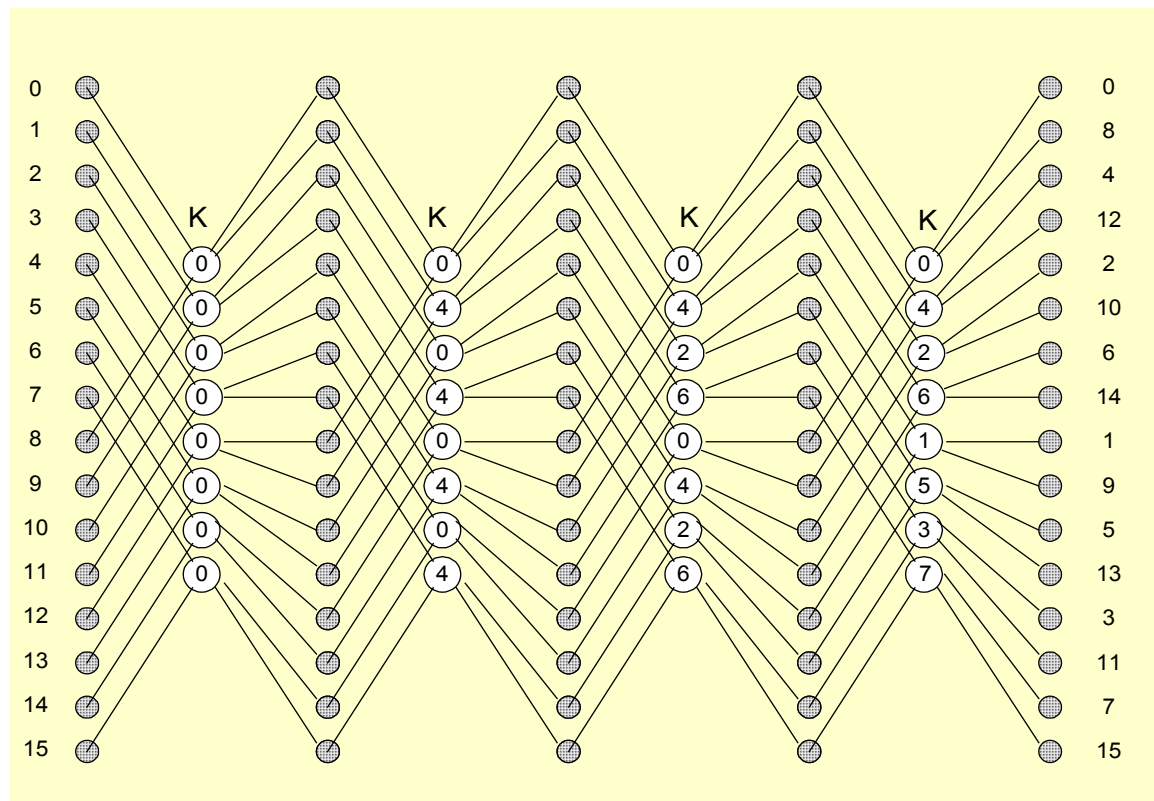


4.2.1. ábra. A FOURIER transzformáció linearitásának szemléltetése

Több algoritmus van használatban, mindegyikük kitüntetett előnnyel rendelkezik valamilyen szempontból. Példaként két elrendezést mutatunk be, $N=16$ esetére, amelyek a fenti alapgondolatokkal kivitelezett, gyakorlatban elterjedt megoldások.

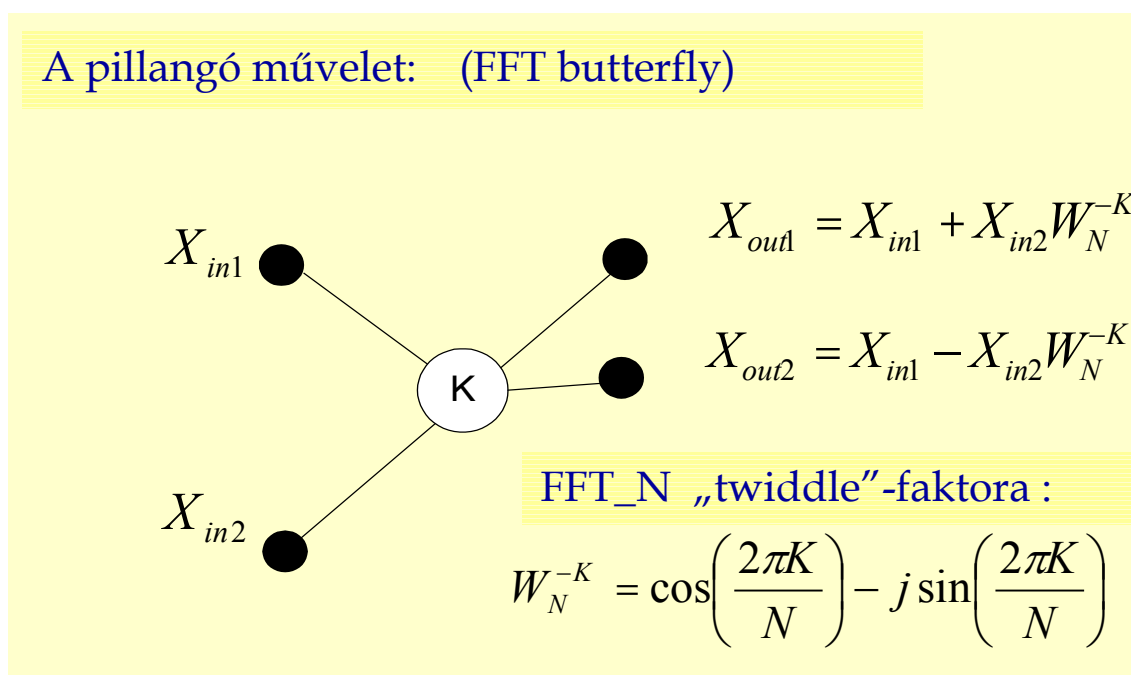


4.2.2. ábra. A klasszikus, in-place algoritmus



4.2.3. ábra. Az állandó geometriájú algoritmus

A klasszikus, - a számított értékeket „helybenhagyó”¹¹ - algoritmust elemezve jól látható a dekompozíció. A 16 elem nyolc, majd négy, aztán kétfelé osztottan lesz feldolgozva, négy ütemben, ahogyan azt a 4.2.2 ábra mutatja. Mindegyik kimeneti oszlop minden eredményét ugyanazzal az algoritmussal, a pillangó művelettel kell számítani. Mindkét elrendezés alapműveletének, sőt alapvetően az FFT speciális műveletének számít „butterfly”, azaz a pillangó, (néhány szerzőnél lepke) művelet. Az alábbi, 4.2.4. ábra ezt mutatja be.

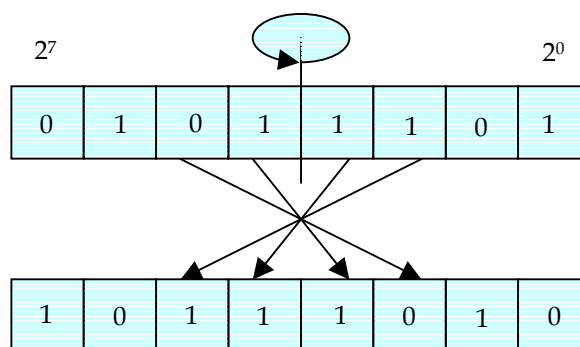


4.2.4. ábra. A pillangó művelet

Természetesen a két bemenetből eredő két kimenet oszloponként más-más twiddle faktoriall számítandó. Az is észrevehető, hogy a twiddle faktor értéke a DFT-vel ellentétben most nem függ az n mintasorszámtól, csak a K indextől. Ennek értékét jelzi az ábrában a körbe írt szám. Észrevehető még az is, hogy itt a bemeneti adatsorozatot meg kell „keverni”, úgynevezett 'reverz' művelettel kell átcímezni a természetes sorrend helyett. (4.2.5. ábra)

A másik változatban (4.2.3. ábra) előnyösnek tűnik, hogy azonos struktúrájúak a fokozatok, az algoritmus ugyanaz marad. Most a kimeneten kell helyretenni a mintákat. A természetes sorrendet itt is a minták indexsorrendjének átforgatásával a 'reverz' művelettel lehet elérni.

¹¹ ugyanis nem kell menet közben átrendezni a halmaz elemeit



Természetes minta sorrend	Decimális	Bináris	Bit-reverzált bináris	Bit-reverzált decimális	Bit-reverzált sorrend
x(0)	0	000	000	0	x(0)
x(1)	1	001	100	4	x(4)
x(2)	2	010	010	2	x(2)
x(3)	3	011	110	6	x(6)
x(4)	4	100	001	1	x(1)
x(5)	5	101	101	5	x(5)
x(6)	6	110	011	3	x(3)
x(7)	7	111	111	7	x(7)

4.2.5. ábra. Bit „reverzálás” az FFT transzformációhoz

Természetesen akkor, ha nem absztrakt transzformációként fogjuk fel az FFT-t, azaz a spektrum számításánál igen hasznos valamilyen ablakfüggvény használata. Ez további számítási kapacitást fog igényelni.

Egy FFT_16 szimulációt MATLAB programmal megvalósítva az alábbiakban mutatunk be. Ez a program az állandó geometriájú változat algoritmusát és négyszögletes ablakfüggvényt használ. A 4.2.6 ábra a futtatás eredményeit mutatja a megadott bemenősorozatra.

Itt hívjuk fel ismét a figyelmet, hogy az eredmény egy komplex számsorozat, aminek valós és képzetes komponenseit külön-külön ábrázoltuk. Mindig úgy tekintjük, hogy a bemeneti, tárgysorozat is az! A példában ez persze nem így van, hiszen valós függvény mintavételezésével nyertük, de ez csak annyit jelent, hogy a tárgysorozat minden elemében a képzetes rész ott van ugyan, csak nulla értékkel!

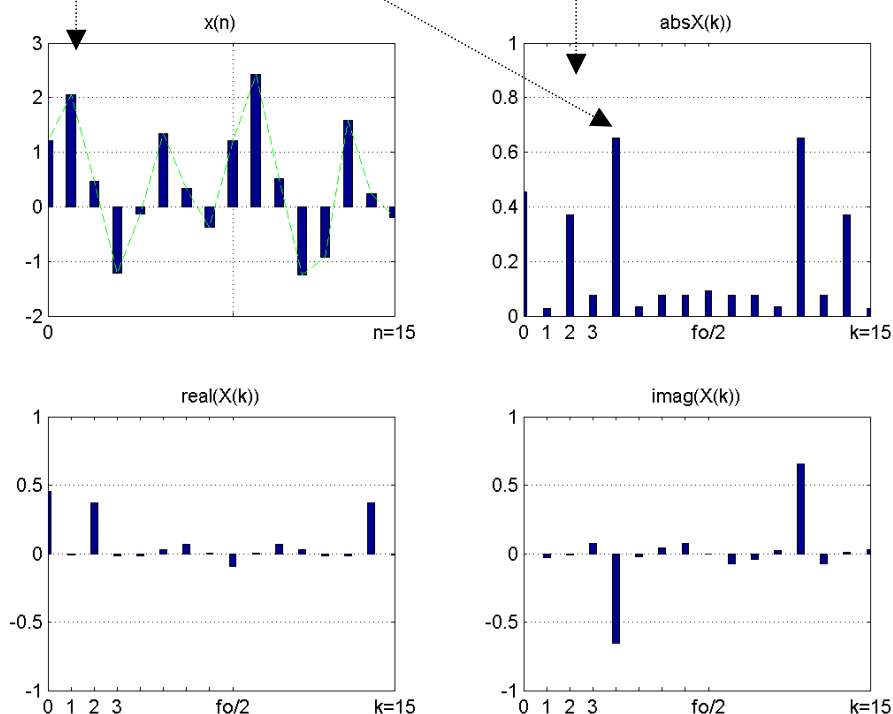
4.2. Példa:

```
%FFT_16, using a constant geometry, radix 2 algorithm;

%mintavételi periódusidő
t = 0:.001:0.015;
f1=250 ; f2=125;
a=0.25;
%
%Ez a bemenőjel!
Xin(1:16)=0.5+1.5*sin(2*pi*f1*t)+ 0.8*cos(2*pi*f2*t)+ a.*randn(size(t));
%
N=16;
TW=[0 0 0 0 0 0 0;0 4 0 4 0 4 0 4;0 4 2 6 0 4 2 6;0 4 2 6 1 5 3 7];
for n=1:4;
    for m=1:8;
        %Az aktuális twiddle-faktor konstansa
        K=TW(n,m);
        Wnk=cos(2*pi*K./N)-j*sin(2*pi*K./N);
        %Butterfly
        xout(2.*(m-1)+1)=xin(m)+Wnk.*xin(m+8);
        xout(2.*m)=xin(m)-Wnk.*xin(m+8);
    end
    xin(1:16)=xout(1:16);
end
%A kimeneti minták helyrerakása
permut=[1 9 5 13 3 11 7 15 2 10 6 14 4 12 8 16];
xin=[xout(permut)];
bar(t,abs(xin(1:16))/16,0.3);
title('abs(X*(j\omega))');
axis([1 16 0 1]);
%(Ez a program csak az abszolút értéket rajzolja ki)
```

A bemenő sorozat:

```
t = 0:0.001:0.015;
x(1:16)=0.5+1.5*sin(2*pi*250*t)+ 0.8*cos(2*pi*125*t)+ 0.25*randn(size(t));
```



4.2.6. ábra. A 4.2.példa FFT_16 MATLAB szimulációjának eredménye

4.3. Inverz transzformációk (IFFT, IDFT)

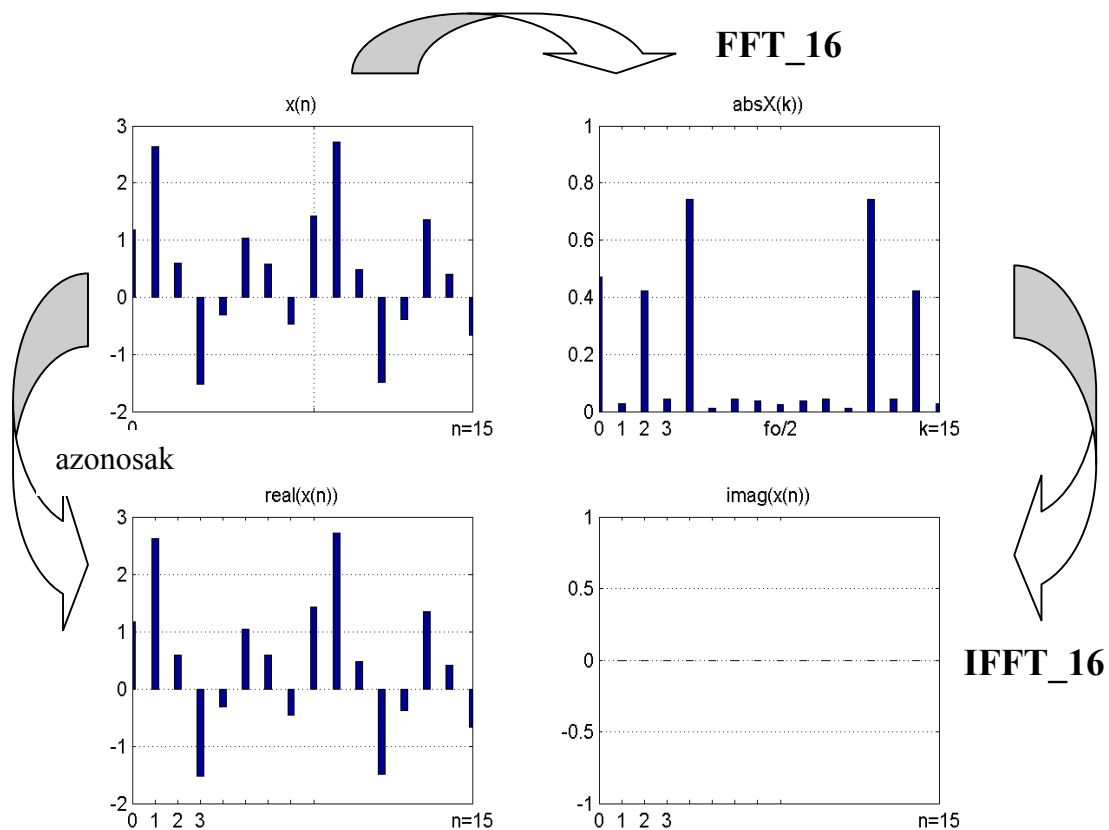
A DFT transzformáció inverze, az IDFT a 4.1 fejezetben megadott formula szerint teljes mértékben azonos a DFT -re megadottal, azzal a különbséggel, hogy a twiddle faktor felső indexe itt pozitív előjelű. Ez azt jelenti, hogy azonos algoritmus, azonos program használható, csak a twiddle faktor képzetes összetevőjét kell pozitív előjellel¹² kiszámítani. Ez persze az FFT, IFFT párja is igaz.

Ebből következik, hogy a 4.2. példa programrészlete is alkalmas IFFT számítására is. Amennyiben az FFT_16 képsorozatát bemenősorozatként

¹² Általában: ha egy transzformációtól megkívánjuk a kölcsönösen egyértelmű leképezést, akkor $FFT=T*P$ és $IFFT=P*T^{-1}*FFT$. Azaz $T*T^{-1}=I$ egységmátrix kell legyen. DFT (FFT) esetén T unitér mátrix, így $T^T=conj(T)$.

használjuk, és előjelet váltunk a twiddle faktor számításánál, torzítatlanul vissza kell kapjuk a korábbi $x(n)$ sorozatot.

Most már eleve komplex sorozat a bemenet, a kimeneti sorozat lesz tisztán valós, ahogy ez a 4.3.1. ábrán látható is.



4.3.1. ábra. IFFT_16, a 4.2. példa eredményének inverze

Végül néhány, gyakorlat számára hasznos értéket adunk meg :

A-D felbontás	Ablakf.v. szószélesség	SIN/COS ROM	Aritmetika szószélesség	Dinamika tartomány
8	7	7	14	38 dB
10	9	9	16	50 dB
12	11	11	18	62 dB
14	13	13	21	74 dB
16	15	15	23	86 dB

5. A DISZKRÉT KOSZINUSZ TRANSZFORMÁCIÓ (DCT)

A digitális képátvitel gyakorlattá válásával került elsősorban a figyelem középpontjába a DCT transzformáció. Ennek kétdimenziós változatát a DVB szabványok a képi információ tömörítéséhez használják. Az MPEG-2 eljárás keretén belül 8x8-as (újabbban 10x10) méretű tisztán valós elemeket tartalmazó pixel-mátrixok feldolgozása ugyanis a DCT transzformáció gyors változatával történik.

Tekintsük át először a transzformációk alapvető tulajdonságait!

A transzformációkat a 4.1. fejezet szerinti 'absztrakt' értelemben a *lineáris tér lineáris transzformációnak* tekintjük, annyiban elvonatkoztatva, hogy fizikai képet sem rendelünk szükségképpen hozzá. Elsőként az egydimenziós esetet vizsgáljuk.

Legyen a \mathbf{T} a komplex számtest felett értelmezett n -edrendű négyzetes mátrix a transzformáció operátora. Reprezentálja \mathbf{P} n elemű oszlopvektor a transzformálandó $x(n)$ bemeneti mintasorozatot.

A képsorozat \mathbf{K} oszlopvektorát, $\mathbf{X}(k)$ -t az alábbi lineáris operációval, mátrixszorzással nyerjük:

$$\mathbf{T} * \mathbf{P} = \mathbf{K}$$

Ahhoz, hogy \mathbf{P} visszaállítható legyen a \mathbf{K} -ból és minél egyszerűbb módon végezhesük el a műveleteket, teljesülnie kell az alábbiaknak:

- $\mathbf{P} = \mathbf{T}^{-1} * \mathbf{K} = \mathbf{T}^{-1} * \mathbf{T} * \mathbf{P} = \mathbf{I} * \mathbf{P}$ (\mathbf{I} : egységmátrix)
- \mathbf{T} és \mathbf{T}^{-1} legyen azonos, vagy legalább 'egyszerű' művelettel nyerhető.

Ez utóbbi tökéletesen akkor valósulna meg, ha $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}$ egyenlőség fennállna.

Viszont, ha \mathbf{T} *ortogonális*, akkor $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}$, vagy ha *unitér*, akkor $\mathbf{T}^{\sim} = \mathbf{T}^{-1}$, tehát a konjugált és transzponált¹³ mátrix lesz egyenlő az inverz mátrixsal.

Végül, ha \mathbf{T} szimmetriatulajdonságokat mutat, tehát *hermitikus*, vagy *ferdén hermitikus*, akkor $\mathbf{T}^{\sim} = \mathbf{T}$, illetve $\mathbf{T}^{\sim} = -\mathbf{T}$.

¹³ ezt a műveletet most felső indexben \sim -al jelöljük.

Ezek után nézzük meg a már ismert DFT unitér \mathbf{T} mátrixát! (N=8)

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a - ja & -j & -a - ja & -1 & -a + ja & j & a + ja \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -a - ja & j & a - ja & -1 & a + ja & -j & -a + ja \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -a + ja & -j & a + ja & -1 & a - ja & j & -a - ja \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & a + ja & j & -a + ja & 1 & -a - ja & -j & a - ja \end{pmatrix}$$

$$(a = \cos 45^\circ = 0,7071..)$$

Láthatóan $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}$, és ellenőrizhető, hogy $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^{-1}$, tehát $\mathbf{T}^* \mathbf{T} = \mathbf{I}$

Itt a mátrix $a_{nk} = a_{kn}$ elemét egy trigonometrikus függvény¹⁴
k és n: {0, 1, 2, ..., N-1} argumentumokhoz tartozó értékei alkotják

$$T = W_N^{-n,k} = \cos \frac{2\pi nk}{N} - j \sin \frac{2\pi nk}{N}$$

Nyilvánvaló, hogy más módon is generálható hasonló tulajdonságokkal rendelkező lineáris operátor. Ezek egyike a DCT ortogonális mátrixát adó függvény. \mathbf{T} a_{uv} elemei itt a következő módon számíthatók:

$$a_{uv} = \sqrt{\frac{2}{N}} c(u) \cos \frac{u(v + 0,5)\pi}{N}$$

$$c(u) = \begin{cases} 1 & u \neq 0 \\ 1/\sqrt{2} & u = 0 \end{cases}$$

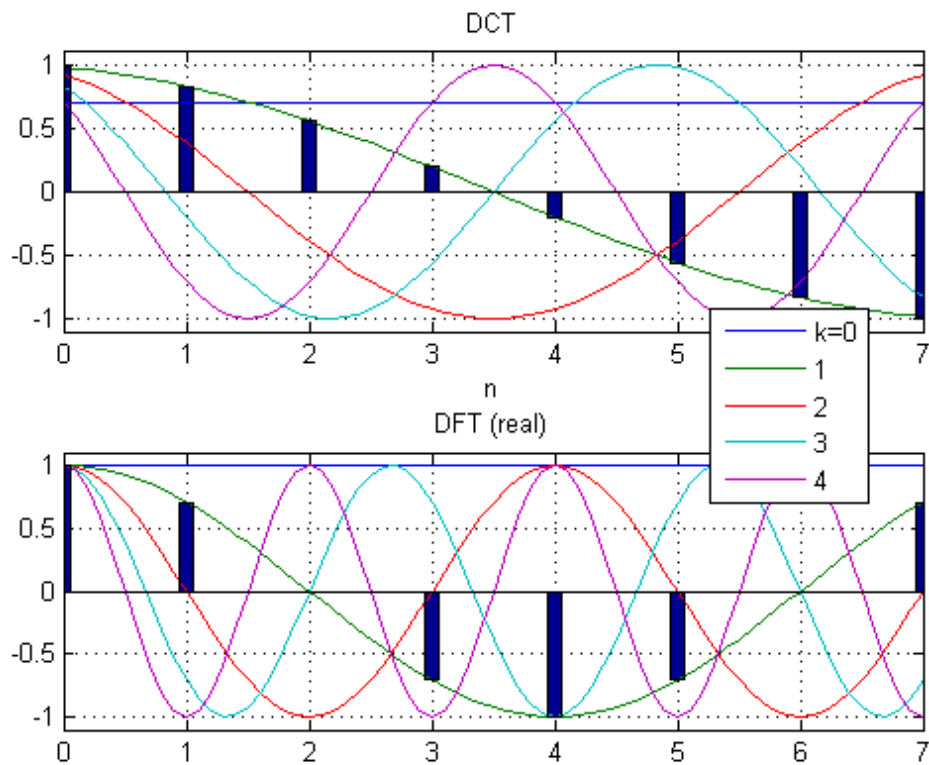
N=8 esetére a tisztán valós elemű mátrix így néz ki:

$$\mathbf{T} = \sqrt{\frac{2}{8}} \begin{pmatrix} 0.7071 & 0.7071 & 0.7071 & 0.7071 & 0.7071 & 0.7071 & 0.7071 & 0.7071 \\ 0.9808 & 0.8315 & 0.5556 & 0.1951 & -0.1951 & -0.5556 & -0.8315 & -0.9808 \\ 0.9239 & 0.3827 & -0.3827 & -0.9239 & -0.9239 & -0.3827 & 0.3827 & 0.9239 \\ 0.8315 & -0.1951 & -0.9808 & -0.5556 & 0.5556 & 0.9808 & 0.1951 & -0.8315 \\ 0.7071 & -0.7071 & -0.7071 & 0.7071 & 0.7071 & -0.7071 & -0.7071 & 0.7071 \\ 0.5556 & -0.9808 & 0.1951 & 0.8315 & -0.8315 & -0.1951 & 0.9808 & -0.5556 \\ 0.3827 & -0.9239 & 0.9239 & -0.3827 & -0.3827 & 0.9239 & -0.9239 & 0.3827 \\ 0.1951 & -0.5556 & 0.8315 & -0.9808 & 0.9808 & -0.8315 & 0.5556 & -0.1951 \end{pmatrix}$$

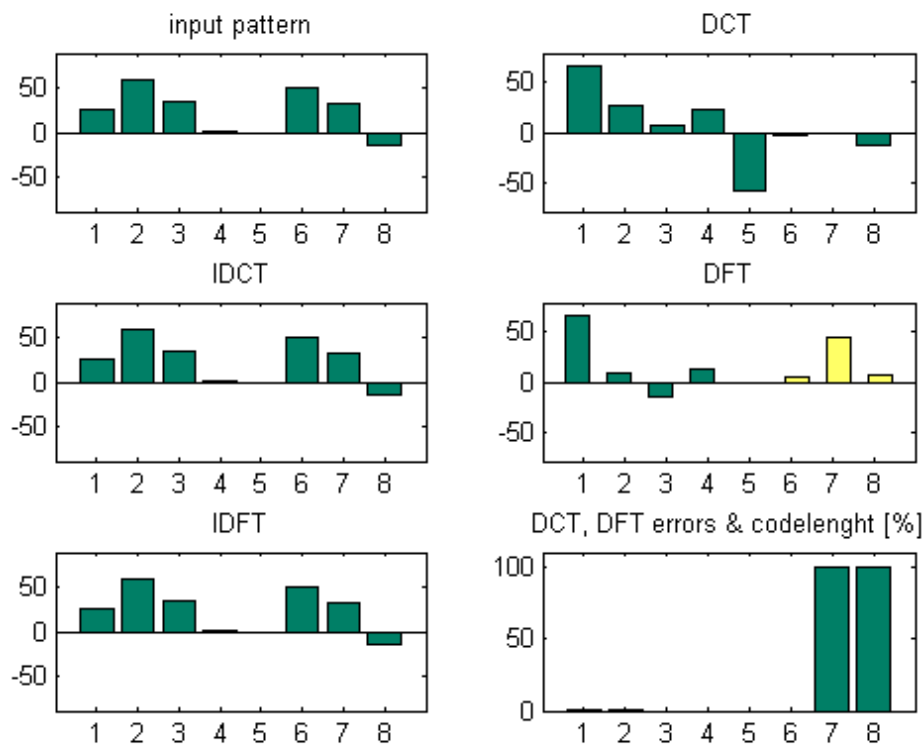
Most $\mathbf{T}^T \neq \mathbf{T}$, de ellenőrizhető, hogy $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}$, így igaz, hogy $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{I}$.

¹⁴ 4.1. szakasz: TWIDDLE faktor

Előny, hogy az elemek valósak, viszont a szimmetria foka csökkent.



5.1. ábra. A DCT és a DFT lineáris operátorainak származtatása



5.2. ábra. A DCT és a DFT összehasonlítása

Az 5.2. ábrán részben korrelált bemeneti mintára alkalmazottan mutatjuk be a két diszkrét transzformációt. Az triviális, hogy mindkét transzformáció veszteségmentes, az inverz művelettel az eredeti minta tökéletesen visszaállítható.

Kevésbé közismert, hogy az inverz transzformációt a DCT esetén a transzponált mátrixsal kell végrehajtani. A szakirodalom klasszikus formulái ugyanis ezt nem hangsúlyozzák. A generáló függvény változóinak sorrendje ezt rendszerint nem is jelzi. Érdekes az is, hogy a nem transzponált mátrixsal való visszaállítás is 'majdnem JÓ', csak éppen nem tökéletes! Ezt majd az 5.3. ábrán mutatjuk meg. IDFT során **T** transzponáltja önmaga, csak konjugálni kell, ami minden leírásban meg is jelenik, itt tehát nem lehet félreértés.

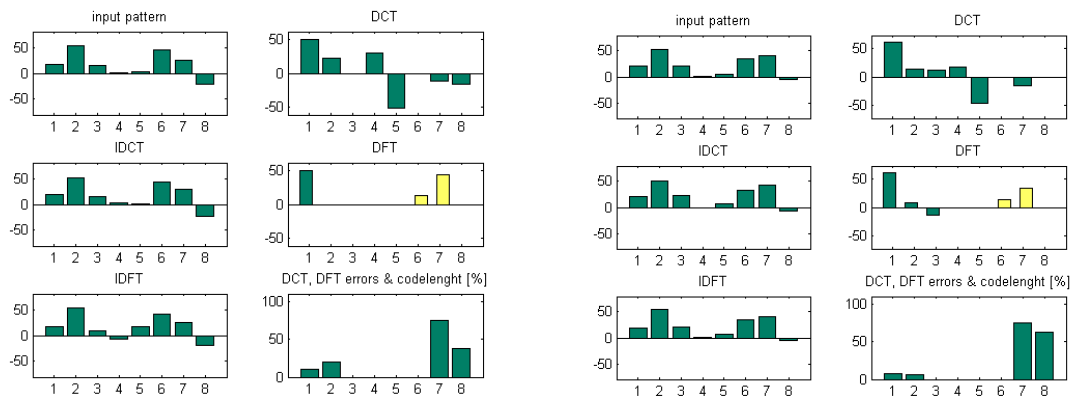
A lineáris transzformációk használatának egyik célja, hogy vele csökkenthető legyen a jel dimenziószáma. Ez láthatóan önmagától nem teljesül egyik transzformáció esetén sem. Bizonyos mértékű veszteség árán mégis van erre lehetőség. Feltesszük ugyanis, hogy transzformált alak a lényeges információkat kevesebb komponenssel is meg tudja jeleníteni, mint az eredeti. Valamennyi tehát elhagyható, vagy durvábban kvantálható és ez tömörítést eredményez.

A tömörítés esetleges hatékonyságának méréséhez most két paramétert használunk. Az egyik a visszaállított és az eredeti minta eltéréseinek felhalmozott abszolút értéke, a másik a csonkított kódszó hossza. Az 5.2. ábrán a gyakorlatilag csonkítatlan DCT és DFT kódok bitszámai vannak feltüntetve és százalékban kifejezve.

Felületes elemzés után azt mondhatnánk, hogy a DFT biztosan gyengébben teljesít, hiszen komplex értékek jelennek meg a kódszóban, azaz dupla annyi elem, mint a DCT esetén. Felismerhető azonban, hogy **P** a szokásos kép- és hang alkalmazásokban tisztán valós, ezért a DFT szimmetrikus eredményt ad. A transzformált valós része a középponttól felfelé tükrözve megismétlődik (SHANNON feltétel!), a képzetes rész pedig antiszimmetrikus a felezőpontra. Tehát az adónak elég átvinni a valós elemek felét, és ez igaz a képzetes elemekre is. Végül ebben az esetben is ugyanolyan hosszúságú kódszó szükséges, mint a DCT esetén, hiszen a vevő ezeket a szabályokat eleve tudván, vissza tudja állítani az eredeti DFT kódot. (Az OFDM moduláció $FFT \leftrightarrow IFFT$ transzformációpárjai jelentik az ellenpéldát. Itt komplex bemenetre komplex kimenet jelenik meg, ezért ez már nem is ad szimmetrikus DFT transzformált kódot!)

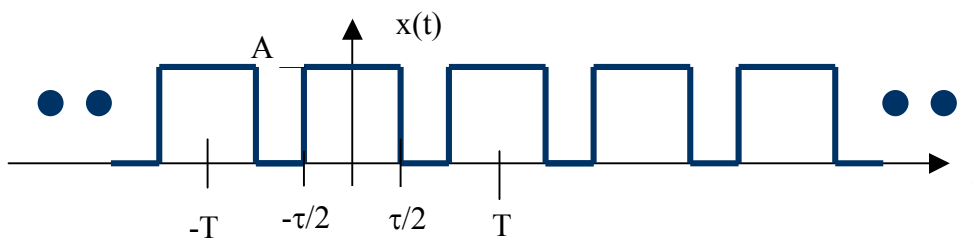
Alaposabban megnézve a veszteséges eseteket, itt sem található eltérés a két transzformáció között. A képfeldolgozás során megjelenő mintázatok statisztikája miatt mégis jelentős eredmény érhető el és itt egyértelműen a DCT javára. A DCT ugyanis kétszeres 'frekvenciákkal' dolgozik (5.1. ábra), ezért a lényeges alacsonyfrekvenciás komponenseket feleannyi együtthatóval

ábrázolja a DFT-hez képest. Nem túlságosan részletgazdag, vagy jól korrelált mintázatokra ezért előnyösebb használata.



5.4. ábra. A DCT és a DFT tömörítésének összehasonlítása

Székesfehérvár, 1994. jul.-aug. 2006.

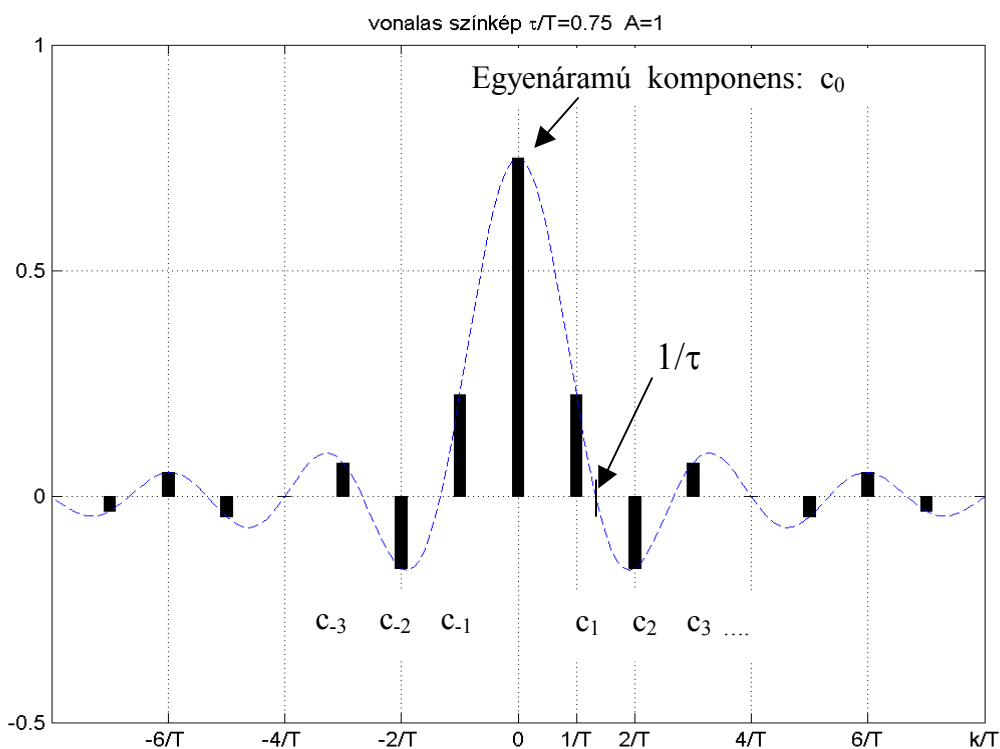


$$c(k) = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \left[\frac{-A}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \right]_{-\tau/2}^{+\tau/2} =$$

$$\frac{A}{jk\omega_0 T} \left(e^{jk\omega_0 \tau/2} - e^{-jk\omega_0 \tau/2} \right); \dots \omega_0 = \frac{2\pi}{T};$$

$$c(k) = \frac{A\tau}{T} \frac{\sin\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right)}{\frac{k\pi\tau}{T}}; \dots c(0) = \frac{A\tau}{T};$$

$$X(j\omega) = \frac{A\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right)}{\frac{k\pi\tau}{T}} e^{jk\omega_0 t}$$



Függelék I. ábra. Impulzussorozat színekpe

A *korreláció* szó megfelelést, hasonlóságot, kölcsönösséget, kapcsolatot jelent. A korrelációs számítás két megfigyelt mennyiség, folyamat (függvény) **hasonlóságának fokát** méri a matematikai statisztika módszereivel. A két vizsgált mennyiség alapján megkülönböztethetünk ugyanazon folyamat két különböző időbeli realizációjából meghatározott - úgynevezett *autokorrelációt* -, vagy két különböző folyamat lefutásából számoltat - a *keresztkorrelációt*. A korrelációanalízis jelei többnyire véletlenszerűek, azaz sztochasztikusak, de az eljárás érvényes, sőt tanulságos eredményt ad determinisztikus esetre is. Sztochasztikus jeleknél az egyszerűség kedvéért most feltételezzük, hogy azok stacionáriusak, és ergodikusak. (Az ergodicitás feltételezésével az időközéptérték alapján is meghatározhatóak a függvények, a stacionaritás pedig eltünteti a kezdő időponttól való függést.)

Egy $x(t)$ jel *autokorreláció-függvénye*:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$$

Az $x(t)$ és az $y(t)$ jelek *keresztkorreláció-függvénye*:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau) dt$$

Láthatóan mindkét függvény időfüggvény jellegű, de nem a futó időnek, hanem a két jel között mérhető τ eltolási időnek függvénye. Ezzel az autokorreláció-függvény a folyamat belső viszonyainak hasonlósági fokát mutatja τ függvényében, a keresztkorreláció pedig a két folyamat összefüggéséről ad képet.

Az autokorreláció-függvény tulajdonságai, jellegzetes eredményei:

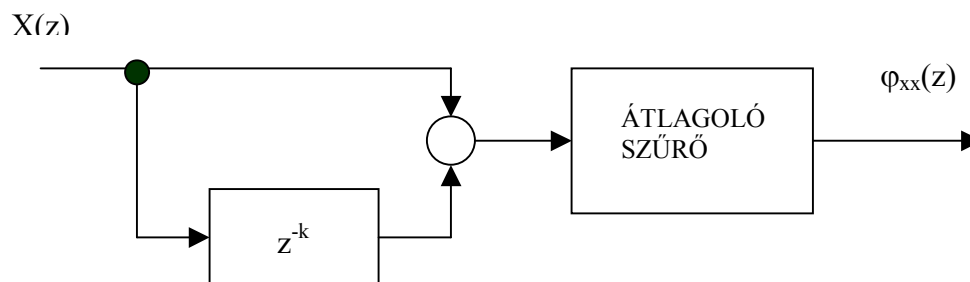
- páros függvény, $\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{xx}(-\tau)$
- $\tau=0$ -nál a jel négyzetes középértékét adja,
- a függvény maximuma $\tau=0$ -nál van, (itt maximális a hasonlóság)
- Determinisztikus, periodikus jelekre azonos periodicitású, de a fázisinformációtól megfosztott jel lesz az eredmény. Például tetszőleges φ mellett $\sin(\omega t + \varphi)$ -re $\varphi_{xx}(\tau) = \cos \omega \tau$.
- A fehérzaj autokorreláció-függvénye egy DIRAC impulzus. Ez egy érdekes lehetőséget ad a hasznos, periodikus jel zajoktól való különválasztására τ függvényében. BAY ZOLTÁN elsőként és eredményesen használta ezt ki híres holdradar kísérletében a rendkívül kis teljesítménnyel visszaverődő, jóval az erősítő zajszintje alatti jelek detektálására.

A korrelációfüggvények lehetőséget adnak sztochasztikus jelek frekvenciatartománybeli szerkezetének vizsgálatára. A determinisztikus esetben megszokott FOURIER analízis itt csak a korrelációfüggvényekre alkalmazható. Az összefüggés WIENER-HINCSIN formulaként ismeretes, és egy adott statisztikai jellemzőkkel bíró realizációhoz frekvenciaszerkezetet rendel:

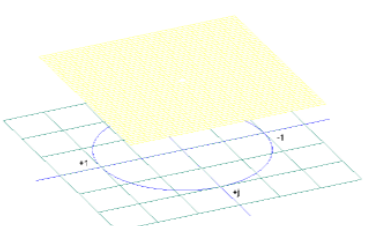
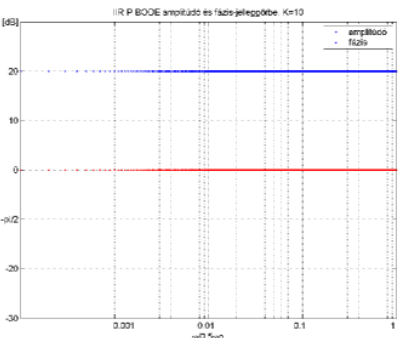
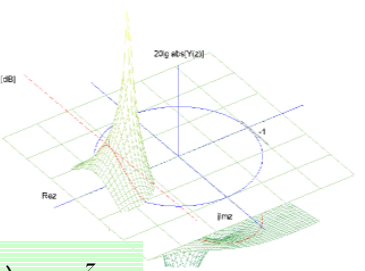
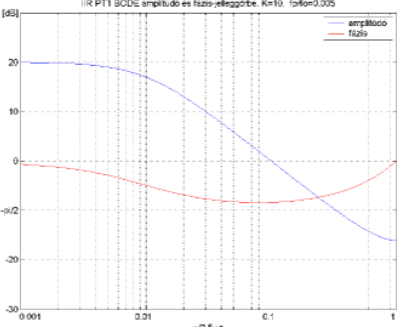
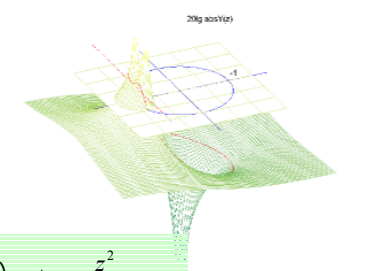
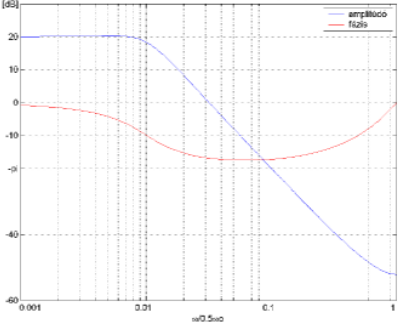
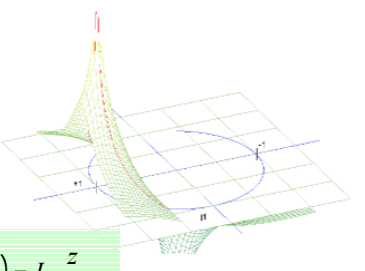
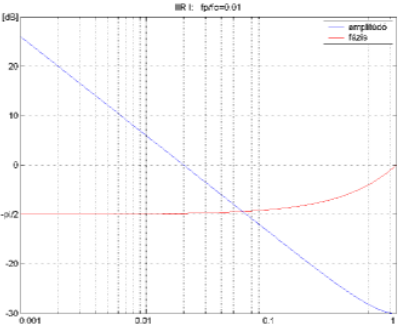
$$\phi_{xx}(j\omega) = \int_{-T}^T \phi_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

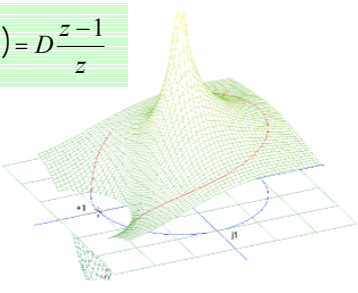
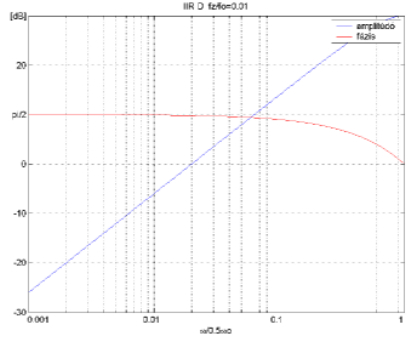
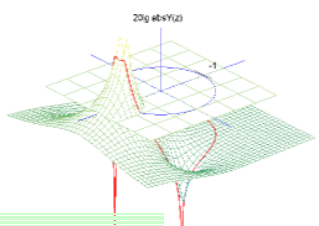
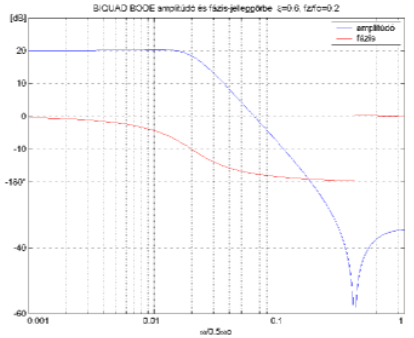
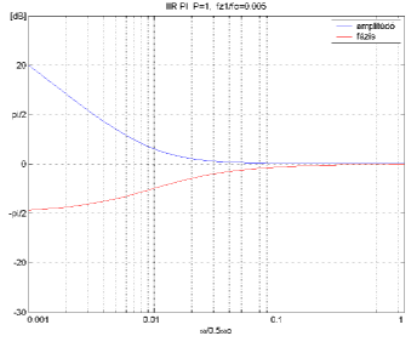
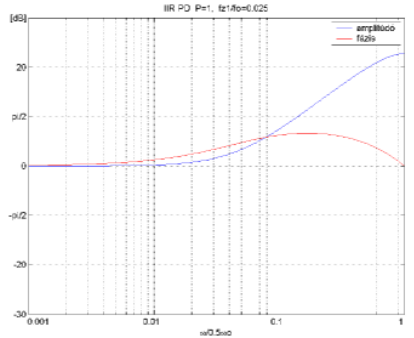
A függvény neve teljesítmény-sűrűség spektrum. (TSP) A TSP eredménye fizikai tartalommal rendelkezik, ugyanis a véletlen jel adott frekvencián mérhető - például egy 1 ohmos ellenálláson hővé alakuló - energiájával azonos, ha a jelet feszültség dimenziójúnak tekintjük. Figyelem! A jel ebből a frekvenciaszerkezetből nem állítható vissza, mert hiányzik a fázisra vonatkozó információ. A transzformáció inverze a folyamat autokorreláció-függvényét adja eredményül.

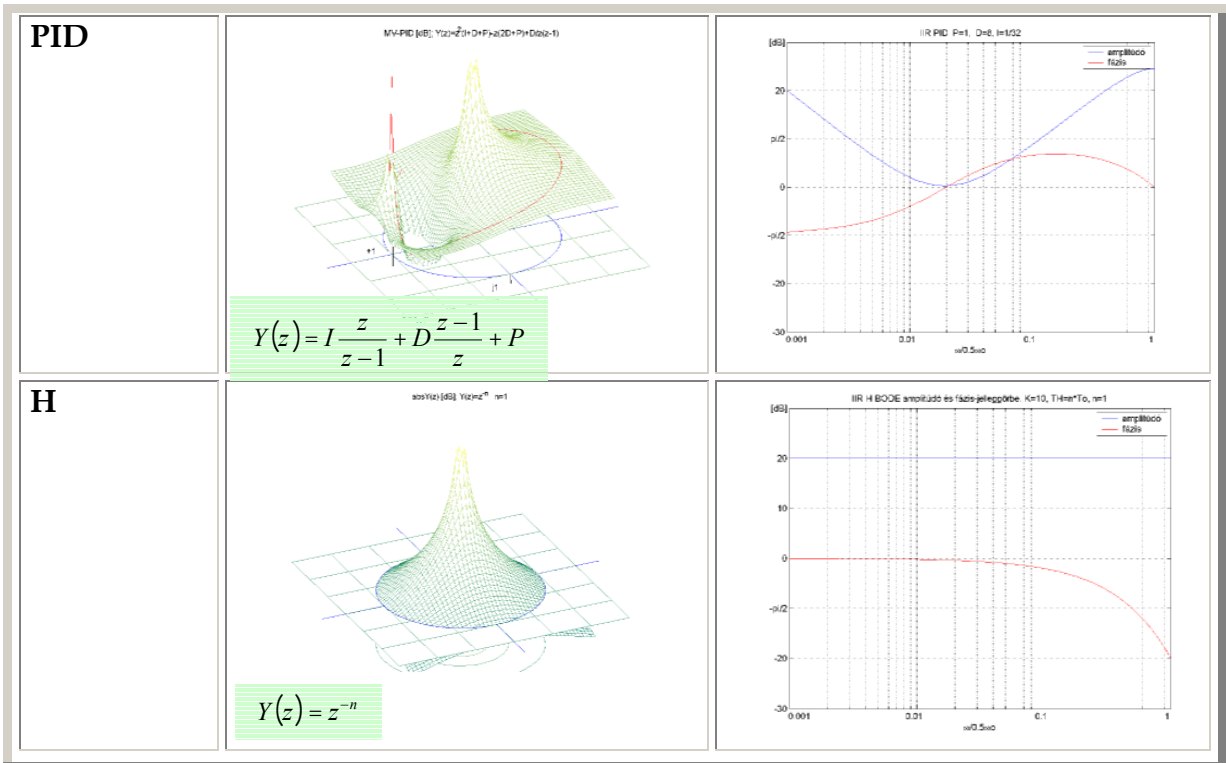
A korrelációfüggvények számítása korábban félig mechanikus módszerekkel (mozgatható, kétféjes magnetofon), szalagon tárolt jelmintákkal történt. A DSP lehetőségei itt is forradalmi változásokat hoztak, a gyakorlatban igen hasznos korrelációs analízisek technikai eszköztárát teremtették meg. Az elvi hatásvázlat, amely egy jelminta autokorrelációját számítja ki, az alábbi:



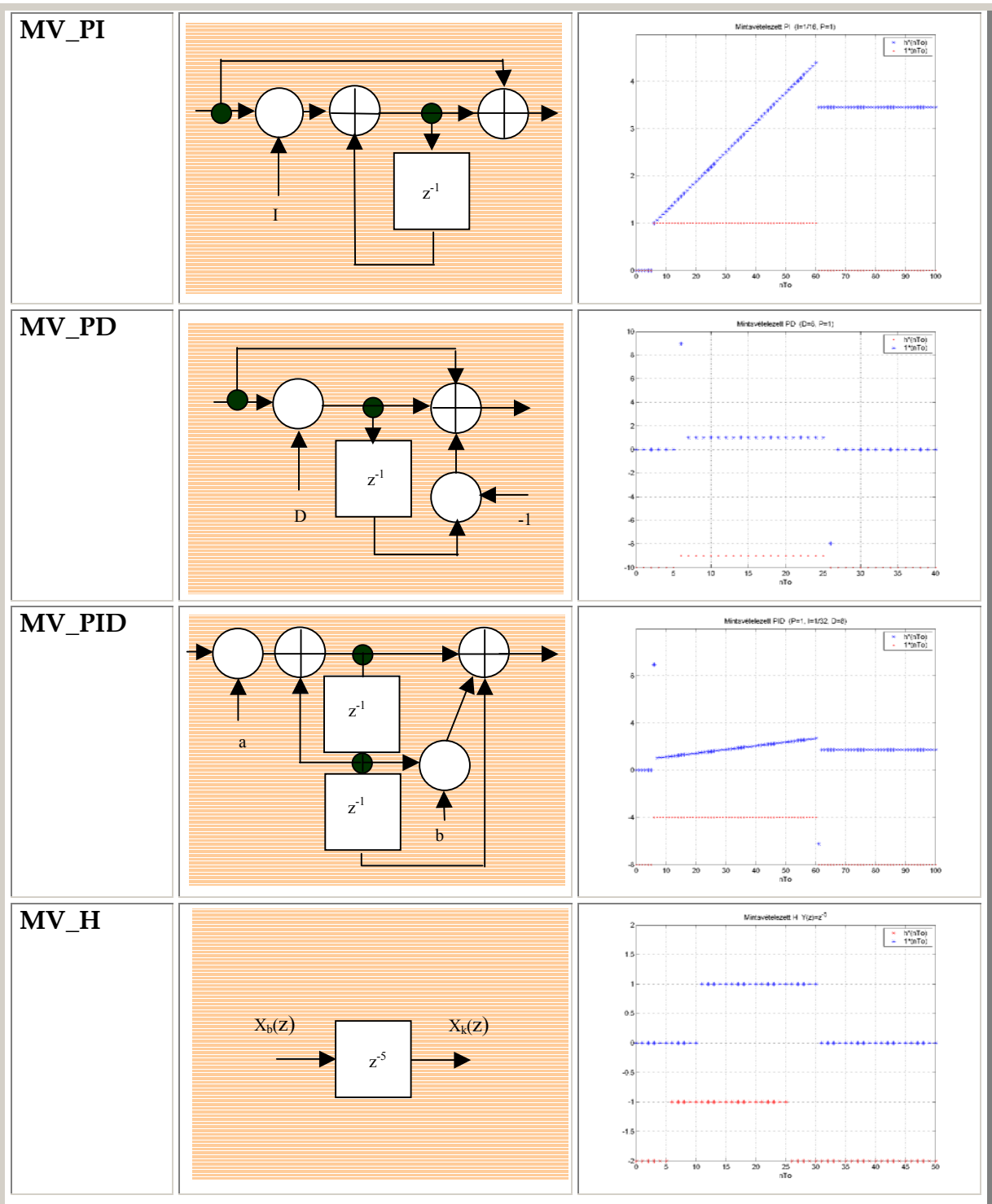
A k eltolás értékének változtatásával (τ) az autokorreláció-függvény minden pontja kiszámítható, látszólag akár párhuzamosan végezve, egy jelprocesszor algoritmusával. Az időátlagot egy aluláteresztő szűrővel lehet meghatározni, ami akár egy fésűszűrő is lehet. A mintavételezés frekvenciáját a folyamathoz megfelelő értékűre kell választani, nagyságrendi viszonyoktól függően akár valós időben is lehetőség van a processzálásra.

Tag:	Z transzformált	BODE amplitúdó és fázis-jelleggörbék:
<p>P</p>	<p>absY(z) [dB]; Y(z)=K</p>  <p>$Y(z) = K$</p>	<p>IR P BODE amplitúdó és fázis-jelleggörbe K=10</p> 
<p>PT1 IIR_EA</p> <p>$B = e^{-2\pi k}$ $A = 1 - B$ $k = \frac{f_p}{f_0}$</p>	<p>Y(z)=21-B*leak-Bz, B=0.73</p>  <p>$Y(z) = A \frac{z}{z - B}$</p>	<p>IR PT1 BODE amplitúdó és fázis-jelleggörbe K=10; f0/fm=0.005</p> 
<p>PT2 IIR_MA</p> <p>$B = 2e^{-r} \cos(q)$ $C = -e^{-2r}$ $A = 1 - B - C$ $r = \text{Re}(s)2\pi / \omega_0$</p>	<p>Y(z)=21-B*cos^2(q)-Bz-C</p>  <p>$Y(z) = A \frac{z^2}{z^2 - Bz - C}$</p>	<p>IR PT2 BODE amplitúdó és fázis-jelleggörbe K=10; z=0.6; f0/fm=0.005</p> 
<p>I</p> <p>$k = \frac{f_E}{f_0}$ $I = k2\pi$ $T_I = kT_0$</p>	<p>absY(z) [dB]; Y(z)=z/(z-1)</p>  <p>$Y(z) = I \frac{z}{z - 1}$</p>	<p>IR I; f0/fm=0.01</p> 

<p>D</p> $k = \frac{f_E}{f_0}$ $D = \frac{1}{k2\pi}$	<p>$Y(z) = D \frac{z-1}{z}$</p> 	
<p>BIQUAD</p> <p>IIR_ME</p>	<p>BIQUAD $Y(z) = 10z^2 + D^2z + E / (z^2 - Bz - C)$ $f_0/f_0=0.01, fz1f0=0.25, \varphi=0.5, K=10$</p>  $Y(z) = A \frac{z^2 + Dz + E}{z^2 - Bz - C}$	
<p>PI</p>	$Y(z) = I \frac{z}{z-1} + P$	
<p>PD</p>	$Y(z) = D \frac{z-1}{z} + P$	



<p>MV_P</p>		
<p>MV_PT1</p>		
<p>MV_PT2</p>		
<p>MV_I</p>		
<p>MV_D</p>		



A numerikus integrálás módja	Z átviteli függvény	Bode jelleggörbék $f_E/f_0=0.01$
Téglány szabály	$Y_{I0}(z) = T_0 \frac{z}{z-1}$	
Trapéz szabály	$Y_{I1}(z) = \frac{T_0}{2} \frac{z+1}{z-1}$	
Simpson szabály 1.	$Y_{I2}(z) = \frac{T_0}{3} \frac{z^2 + 4z + 1}{z^2 - 1}$	
Simpson szabály 2.	$Y_{I3}(z) = \frac{3T_0}{8} \frac{z^3 + 3z^2 + 3z + 1}{z^3 - 1}$	

