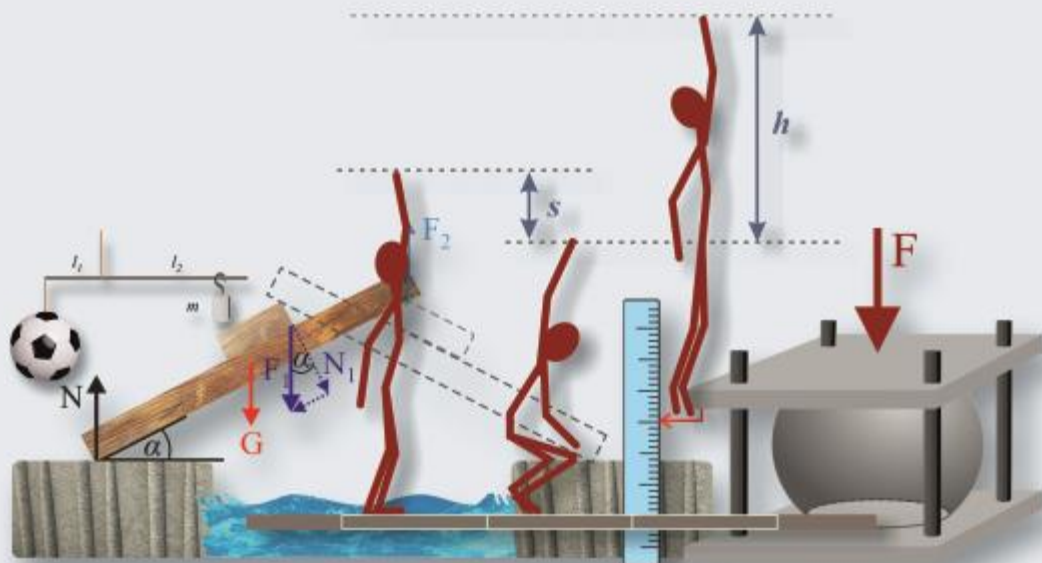


JUHÁSZ ANDRÁS – TASNÁDI PÉTER

KÍSÉRLETEKHEZ, JELENSÉGEKHEZ KAPCSOLT FIZIKAPÉLDÁK, GYAKORLATI FELADATOK



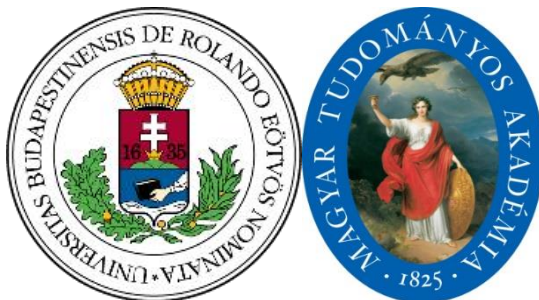
Juhász András – Tasnádi Péter

**KÍSÉRLETEKHEZ,
JELENSÉGEKHEZ KAPCSOLT
FIZIKAPÉLDÁK, GYAKORLATI
FELADATOK**

ELTE FIZIKA DOKTORI ISKOLA BUDAPEST

2021

**A kiadvány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia
Tantárgypedagógiai Kutatási Programja támogatta**



Szerkesztette: Gócz Éva

ISBN: 978-963-489-312-7

© Juhász András és Tasnádi Péter

Kiadja az ELTE Fizika Doktori Iskola

Felelős Kiadó: Dr. Gubicza Jenő

Budapest, 2021

Nyomtatta és kötötte: Kucsák Könyvkötőde és Nyomda, Vác

Felelős vezető: Kucsák Gábor

Előszó

A természettudományos tantárgyakra vonatkozó attitűdvizsgálatok az utóbbi években elszomorító eredményeket mutattak. Különösen élesen látszott, hogy a fizikai törvények készséggé fejlesztését segítő feladatmegoldás szokásos formái a diákoknak csak szűk csoportját aktivizálják. A felvételizők (érettségizők) körén kívül a tanulók többsége nem érzi kihívásnak, érdekes feladatnak a példamegoldást. A tanári tapasztalatok és felmérések szerint sokkal inkább mozgósító hatású a jelenségbemutató és az önálló kísérletezés.

A bemutatott érdekes jelenségből indított kérdés, az egyszerű kísérletek, a mindennapi eszközök, játékok működésére kért magyarázat, és a magyarázattal kapcsolatban adható becslés, számítás, sokszor azoknak a tanulóknak az érdeklődését is felkelti, akik a hagyományos példamegoldásra oda sem figyelnek. Hasonlóan a diákok széles körét érdekli, hogy a fizikapélda számított eredménye vajon ellenőrizhető-e méréssel.

Ebben a gyűjteményben olyan tanári szakanyagot állítottunk össze, amelynek feladatai kísérletezésre, illetve mérésekkel kapcsolatos problémákra épülnek. A könyv nem diákok számára készült, hanem jellegzetesen tanári segédkönyv! Bár a feladatokat többnyire tanórán feladható formában szövegezzük, a feladatok után közvetlenül megadott megoldás és a hozzá illeszkedve kidolgozott kísérletek elsősorban a tanári munkát kívánják segíteni. Ezt célozzák a didaktikai ajánlások és kísérletechnikai megjegyzések is. Mivel a feladatok konkrét megfogalmazása csak egy lehetőség a téma feldolgozására, ezért gyakran, megjegyzésként, alternatív megfogalmazási lehetőséget is felvetünk. Minden esetben szükséges azonban az előzetes tanári felkészülés a kísérletek és a mérések gyakorlati elvégzésére.

A feladatokat többféleképpen is csoportosítottuk. Egyrészt sorrendjük követi a fizika hagyományos felépítését, másrészt minden feladatot nehézsége szerint is besoroltunk. Az *A* jelöli a legegyszerűbb, *B* az átlagos, *C* pedig a nehéz feladatokat. Gyakran utalást teszünk arra is, hogy általános vagy középiskolában javasoljuk megoldásra. További fontos különbség a feladatok jellegében, hogy egy részük lényegében hagyományos feladatnak tekinthető, amelynek eredménye utólag kísérlettel verifikálható, méréssel ellenőrizhető. Más részükben a kiindulási pont valamilyen természeti jelenség, vagy kísérlet megfigyelés, illetve a diák által elvégzendő egyszerű mérés. A kísérletező munka, a tanulók önálló mérései segítik a mérési pontosság és a fizikai törvények alkalmazásához szükséges egyszerűsítések fontosságának megértését. Vannak olyan feladatok is, ahol a kísérlet elvégzése nagyobb rutint kísérletezői gyakorlatot kíván, ezért bemutatása tanári feladat.

Célunk volt a sokszínűség is, a feladatok jelenségbemutatáson, megfigyelésen, videofilmén, fotókon és egyszerű méréseken alapulnak, a mérés kiértékelésben általában a hagyományos grafikon rajzolást és függvény illesztést javasoljuk, de megmutatjuk a számítógépes lehetőségeket is.

Az összegyűjtött feladatok bemutatásával célunk az is, hogy kedvet csináljunk a tanár kollégáknak a hagyományostól eltérő feladatok kipróbálására, rendszeres alkalmazására és hasonló szellemiségű új feladatok kidolgozására.

Végül reméljük, hogy a fizika érdekesebbé tétele az utóbbi időben a természettudományoktól elforduló tanulói érdeklődést, is megváltoztatja, s ismét sokan vallják majd, hogy kedvenc tárgyuk a fizika.

Budapest, 2020. december 15.

A szerzők

TARTALOMJEGYZÉK

KINEMATIKA

Mozgó autó sebességének becslése fotó alapján (B)	10
Biztonságos követési távolság (A)	11
A vasúti menetrend-táblázat értelmezése (A)	12
A nehézgépjárművek mozgását rögzítő tachográf (A)	14
Az autó kerekének mozgása (B)	16
A csillagos ég látszólagos mozgása (B)	18
Rugós játékautó indulási gyorsulása (B)	19
Lejtőn guruló golyó mozgása (A)	21
Kosárlabda esése és pattogása a padlón (B)	22
Szabadesés gyorsulása a Holdon (B)	24
Kis súllyal terhelt játékléggömb esése (B)	26
Galilei érdekes lejtő-problémája (B)	27
Locsolócsőből kifolyó víz (fotó-elemzés) (B)	29
Palackból kifolyó víz sebességének meghatározása (B)	31
Részecskék áramlási sebessége gyertyalángban (B)	32
Pingpong labda sebességének becslése stroboszkópos kép alapján (C)	33

ERŐK ÉS NYOMATÉKOK EGYENSÚLYA

Erők egyensúlyára vonatkozó megfontolások (A-B)	35
Három összekapcsolt rugós erőmérő egyensúlya (A)	36
Erő meghatározása vele egyensúlyt tartó két másik erő ismeretében (A)	37
Lapátoló munkás (A)	38
Talicskát toló munkás (B-C)	39
Könyvbe szorított labda (C)	40
Leonardo találmánya a kötések nélkül összerakható híd (C)	42
Lejtőn egyensúlyt tartó teniszlabdák (B)	45

Sziklamászó egyensúlya (B)	47
Gyöngyfűzér egyensúlyának vizsgálata (B).....	48
Mágnes dipólusok taszításának távolságfüggése (B).....	50
Lebegő mágnesek megváltozott egyensúlya (B).....	51
Mérleghinta a játszótéren (B).....	52
Dugóhúzó, mint kétkarú emelő (B).....	53
Síkidom tömegközéppontjának meghatározása számítással és kísérlettel (B) ...	55

HIDRO- ÉS AEROSZTIKA

A vízbe merülő testre ható felhajtóerő (ellenerejének) meghatározása (A-B) ...	57
Kódarab sűrűségének egyszerű meghatározása rugós erőmérővel (A).....	58
Kavics sűrűségének meghatározása (A).....	59
Sűrűségmérés házi készítésű Mohr-Westphal mérleggel (B).....	61
Vízbe lógatott, végén felfüggesztett fa rúd sűrűsége (B)	63
A jéghegy csúcsa (B)	64
Cola cukortartalmának meghatározása Arkhimédész törvénye alapján (B).....	66
Nem elegyedő folyadékok relatív sűrűségének meghatározása (A).....	67
Mit bír el a héliummal töltött léggömb (B).....	68
Lassan leeresztő gázzal töltött játékléggömb (B).....	69
Levegő sűrűségének mérése (B)	71
Vízből kiemelt alul nyitott, felül befogott csőben vízoszlop (B)	72

IMPULZUS, ÜTKÖZÉSEK, ERŐK

Vízszintesen szétlökött golyók, impulzusmegmaradás (B).....	75
Tapadókorongos pisztoly lövedékének sebessége (B)	77
Mekkorát üthet fejeléskor egy focilabda? (C).....	78
Egymásra ejtett labdák sorozatos rugalmas ütközése (C)	83
Miért csúszik be a leejtett gyufásdoboz fiókja? (C).....	85
Asztalra ejtett golyóstoll (C).....	87

KÖRMOZGÁS

Kúpinga periódusidejének számítása és mérése (B)	89
Megtört fonálú inga mozgásának vizsgálata stroboszkópos fotó alapján (B)	90

Vízszintesig kitérített majd szögbe ütköző fonalinga körbefordulása (C)	92
Vásári körhinta (B)	94
Kanyarodó motor mozgásának elemzése fényképek alapján (B).....	95
Forduló repülőgép fotójának értékelése (B).....	97

REZGÉSEK

Rugón rezgő test periódusidejének meghatározása vonalzóval (B).....	99
Tömegmérés az úrállomáson (B)	100
Rugók soros és párhuzamos kapcsolása (B)	102
Felugorhat-e az asztalról két rugóval összekötött test? (C).....	103
Felugró tapadókorongos rugós játékok (C).....	105
Milyen erők a lábizmink (C).....	107
Mennyi munkát végzel fekvőtámasz során?	109
Vízben úszó, söréttel terhelt kémcső rezgése (B)	112
Folyadék lengő-mozgása U alakú csőben (B).....	114
Hang magasságának meghatározása hossz mérés alapján (B)	116

ÖSSZETETT MECHANIKA FELADATOK

Súrlódási tényező értékének közelítő meghatározása (C).....	118
Hengerről lecsúszó pontszerű test mozgása (C).....	121
Asztalról ingával leütött golyó mozgása (C).....	124
Palackból kifolyó víz sugár érdekességei (C)	125
Súrlódási erő, ami gyorsít és fékez is (B)	127
Asztal szélén túllógó lánc egyensúlya (C)	130
Hogyan mozog a pedálnál visszahúzott kerékpár? (C)	132

HŐTAN

Sörét fajhőjének becslése mechanikai munkavégzés alapján (B)	134
A teremben lévő levegő páratartalmának mennyiségi meghatározása (B).....	135
Elektromos vízmelegítő teljesítményének kalorikus meghatározása (B).....	137
Egy érdekes tojásfőző készülék működése	138

ELEKTROMOSSÁGTAN

Autó ködlámpájának kapcsolása (A)	141
-----------------------------------------	-----

Egyszerű elektromos kapcsolás értelmezése (B)	142
Izzólámpák kapcsolása (A-B)	143
Tervezzük meg a kapcsolást! (A–B)	145
Többféleképpen változtatható kapcsolás vizsgálata (A-B)	145
Izzólámpák kapcsolásának értelmezése (B).....	147
Áramkör két teleppel (B-C)	148
Az elemi töltés becslése elektrolitikus vízbontás alapján (B-C)	149
Egyszerű kísérlet a mágneses kölcsönhatás értelmezésére (B)	150
Elektromágneses indukció (B-C)	151
Önindukciós tekercs hatása (B).....	153
Az indukált feszültség mérése zárt ellenálláshurok pontjai közt (C)	154

OPTIKAI FELADATOK

Fényfolt a falon (B).....	156
Gyűjtőlencse árnyéka a falon (A)	157
Szemüveg dioptriájának meghatározása (B)	158
Egyszerű nagyító (lupe) vizsgálata fotó alapján (C)	159
Gyűjtőlencse sugármeneteinek szerkesztése (A)	160
Pénzérmék takarásban (C)	162
Távolságbecslés fotó alapján (A)	165
Görbült tükör képe (A-B).....	166
Szappanhártyákon kialakuló tükörképek értelmezése (B)	167
Folyadék törésmutatójának meghatározása óraüveggel (B).....	169
„Megtört” kanál egy pohár vízben (A).....	171
„Háttérfordító” borospohár (B).....	172
Törésmutató meghatározása felületi víz hullámok esetén (B, C).....	173
Budapest földrajzi szélességének meghatározása bot árnyéka alapján (B)	175
Milyen magasak a Hold hegyei? Galilei-módszer	176

KINEMATIKA

Ebben a fejezetben fotókkal, táblázatokkal, grafikonokkal, illetve videókockákon látható képekkel megfogalmazott feladatok találhatók. A közölt feladatszövegek és megoldások csak lehetőséget mutatnak a feladatok megfogalmazásához. A képek sokféle egyéb megfogalmazást is lehetővé tesznek, és a megoldások is sokféleképpen variálhatók. A lényeg minden esetben az, hogy a képeken méréseket kell végezni, illetve a táblázatokat, grafikonokat jól meg kell érteni. A példák mintául szolgálhatnak hasonló felvételek készítésére, a diákok saját fotóinak kiértékelésére, ami azzal, hogy személyessé teszi a problémamegoldást, óriási motivációs erőt jelenthet a fizika megszerettetésében.

Mozgó autó sebességének becslése fotó alapján (B)

Az alábbi fénykép egy felüljáró hídról készült egy mozgó autóról. A fotós a mozgást úgy kívánta érzékletessé tenni, hogy a szokásosnál hosszabb, 1/8 másodperces záridőt használt, így az autó képe elmosódott, amíg a háttér, például a sávokat elválasztó vonalak élesen látszanak.

Becsüld meg a fotó alapján az autó sebességét, ha tudjuk, hogy az úton látható szaggatott terelővonal egy szakaszának hossza a valóságban 1,5 m!

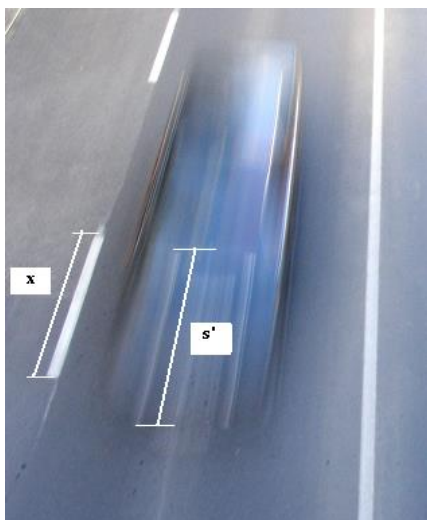


Megoldás

Az autó átlagsebességét az elmozdulás és a hozzá szükséges idő hányadosaként tudjuk kiszámolni.

A mozgó autó képén vonalzóval jól lemérhető a lámpa elmozdulása (s'), és az úton látható szaggatott terelővonal egy szakaszának hossza (x). Az autó tényleges elmozdulását (s) a terelővonal szabványos hosszúságát (1,5m) ismerve határozzuk meg.

$$\frac{1,5 \text{ m}}{x} = \frac{s}{s'}$$



A mérést és a számolást elvégezve az autó elmozdulása $\frac{1}{8}$ másodperc $s = 1,8 \text{ m}$. A foto expozíciós idejének felhasználásával az autó sebessége

$$v = \frac{1,8 \text{ m}}{\frac{1}{8} \text{ s}} \approx 14,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 52,1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Megjegyzés:

- A feladat egyszerűnek látszik, azonban amikor a diák először találkozik vele, gyakran teljesen tehetetlenül áll a kérdéssel szemben. Érdemes időt adni rá, hogy magától rájöjjön, hogy a megoldás kulcsa a fényképen mért adatok valós adatokra történő átszámítása.

Biztonságos követési távolság (A)

A normál esetben szükséges minimális követési távolság betartására az autópályák mellett táblák, óriásplakátok figyelmeztetik a vezetőt. (A bemutatott két tábla közül az első a követési távolság minimális értékét 70 m-ben határozza meg, a második 2 másodpercnyi követési távolságról beszél.

Igazold egyszerű számítással, hogy az autópályán megengedett maximális sebesség esetén a két különböző meghatározás gyakorlatilag egyenértékű!



Megoldás

A magyar autópályákon megengedett maximális sebesség 130 km/óra, azaz 36,1 m/s. Az első ábrán látható tábla arra figyelmeztet, hogy két kocsi közt minimálisan 70 m követési távolságot kell tartani.

A második plakát szerint két kocsi közti követési távolságnak legalább akkorának kell lennie, amit a maximális sebesség esetén 2 másodpercnyi idő alatt lehet megtenni.

A megengedett maximális sebesség: $v_{max} = 36,1 \text{ m/s}$

A maximális sebességgel 2 másodperc alatt megtett s út: $s = v_{max}t = 72,2 \text{ m} \approx 70 \text{ m}$

A két tábla autósoknak szánt üzenete tehát lényegében ugyanaz.

Megjegyzés:

- A feladat azonnal nehezebbé válik, ha kihagyjuk a szövegből a maximális sebességre utalást és csak annyit kérdezzünk, hogy egyenértékű-e a két felirat. Ebben az esetben a diáknak ki kell találnia azt is, hogy a távolság a maximális sebességre vonatkozóan jelent csak határesetet.

A vasúti menetrend-táblázat értelmezése (A)

(táblázat adatainak értelmezése, grafikus feldolgozása)

A vasúti menetrendből kimásoltunk egy oldalt. Az állomások helyét jelölő km adatokat az első oszlopban találod, a további oszlopok a vonat állomásra érkezésének idejét tartalmazzák.

km	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
157	nyírd	...	5:08	7:24	6:35	8	8:32	9:51	11:01
158	Álláslep	...	5:11	7:27	6:38	9:54	11:04
161	Álláslep	...	5:1	7:20	6:40	9:57	11:07
164	Állásleves	...	5:18	7:34	6:48	9:51	11:11
166	Állásleves	...	5:21	7:36	6:52	10:05	11:14
168	Állásleves	...	5:24	7:38	6:54	10:07	11:17
173	Állásleves	...	5:29	7:43	7:00	10:12	11:26
177	Állásleves	...	5:34	7:48	7:04	10:17	11:30
180	Balasszentgyörgy	3:10	5:37	7:51	7:07	8:48	10:05	10:20	10:33	10:40
182	Keszthely	7:23	10:15	10:30
189	Balasszentgyörgy	7:35	8:54	10:25	10:40
192	Zalaegerszeg	7:51	9:51	10:35	10:50
194	Balasszentgyörgy	...	4:30	6:39	8:00	8:53	10:10	11:35
191	Sely	...	4:34	6:43	8:04	10:14	11:38
200	Alaszentjacob	...	4:40	6:51	8:10	10:28	11:45
205	Alaszentjacob	...	4:45	6:12	8:34	10:24	11:50
215	Sely	...	5:02	6:18	8:34	10:24	11:50
221	Sely	...	5:08	6:25	8:41	10:45	12:06
...	Hegyfőcsanak	7:00	9:21	10:45	12:12
...	Murakeresztúr	9:38
...	Murakeresztúr
...	Gyékényes

A megjelölt oszlop időadatait használva határozd meg a vonat átlagos sebességét az egyes állomások között, Fonyódtól Keszthelyig! Ábrázold a kapott átlagsebesség-adatokat sebesség-idő grafikonon!

Rajzold rá a grafikonra a vonatnak az egész útszakaszra számolt átlagsebességét is!

Lehetett-e a vonat sebessége a vizsgált útszakaszon 1 km/perc-nél nagyobb?

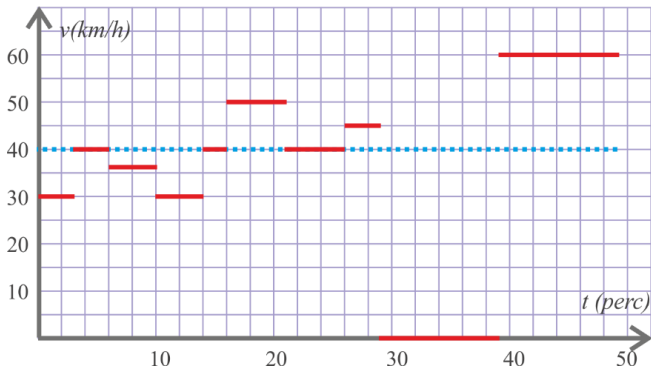
Megoldás

A sebesség-idő grafikon elkészítéséhez a menetrend-táblázatból össze kell gyűjteni az állomások távolságára és a vonat menetidejére vonatkozó adatokat, majd ezekből kiszámítani a vonat átlagsebességét az adott szakaszokon. Az adatokat a táblázat mutatja

Távolság	Időtartam	Átlagsebesség
2 km	3 perc	30 km/h
2 km	3 perc	40 km/h
3 km	4 perc	36 km/h
2 km	4 perc	30 km/h
2 km	2 perc	40 km/h
5 km	5 perc	50 km/h
4 km	5 perc	40 km/h
3 km	3 perc	45 km/h
0 km	10 perc	0 km/h
10 km	10 perc	60 km/h

A táblázat adatait feltüntető grafikon az ábrán látható. A teljes útra számított átlagsebesség berajzolásához (vízszintes szaggatott vonal) felhasználjuk, hogy a vonat Fonyód és Keszthely közötti távolságot összesen 49 perc alatt tette meg. A teljes útra vonatkoztatott átlagsebesség 40 km/h.

A második kérdésre „igen” a válasz. Az utolsó szakaszon ugyanis a vonat átlagsebessége éppen 60 km/h, amibe természetesen benne van az indulás és a fékezés tartománya is, amikor a vonat lassabban ment az átlagsebességnél, a köztes tartományban tehát nagyobb sebességgel is kellett, hogy haladjon.



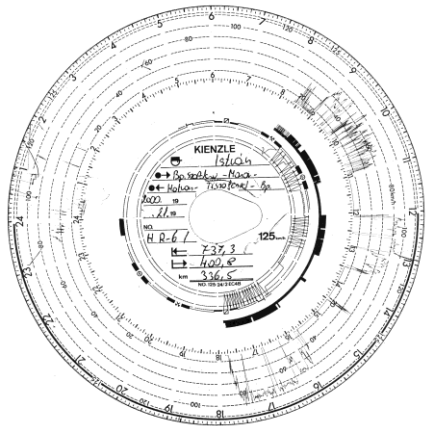
Megjegyzés:

- A táblázatos adatokból grafikont készíteni nem egyszerű feladat. Érdekes a folyamatot begyakoroltatni. A grafikon készítéséhez megengedhető a számítógép használata is, azonban táblázatos adatokból automatikusan grafikont készítő program használatát a bevezetés szintjén célszerű megtiltani.

A nehézgépjárművek mozgását rögzítő tachográf (A)

(speciális grafikon értelmezése)

A mellékelt ábrán egy autóbusz sebességrögzítő műszerének (tachográfjának) korongja látható. A busz Budapestről Monoron és Hatvanon át Tiszafüredre ment, majd visszajött. A busz sebessége a korongról leolvasható. A műszerbe helyezett korong 24 óra alatt fordul körbe, és egy írószerkezet a sebességgel arányos jelet rajzol rá. Minél nagyobb a sebesség, annál nagyobb a rajzolt jel távolsága a kör középpontjától. A korongon koncentrikus körök jelzik a sebesség numerikus értékét



Autóbusz sebességrőrző műszerének egy lapja

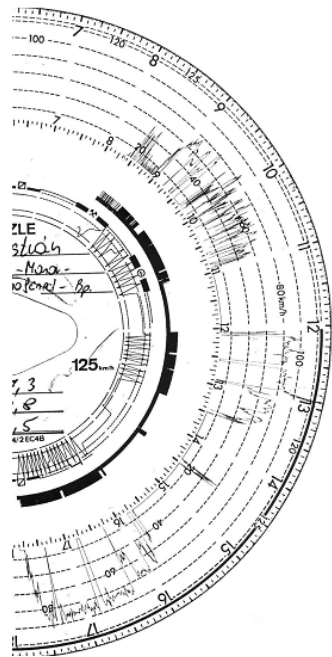
(20 km/h léptékben), amíg az időadatok a belső és a külső körökről olvashatók le.

Elemzd az ábra alapján a busz mozgását: írd le, hogy milyen események történhettek az utazás közben. Ment-e a busz a megengedettnél gyorsabban? (A korong egy részlete a következő oldal ábráján, felnagyítva látható. A korong adatainak felvételekor érvényes szabályok szerint autópályán a busz megengedett legnagyobb sebessége 80 km/h volt.)

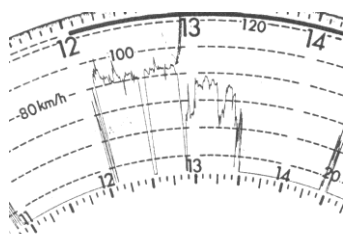
Megoldás

A tachográf-korong körtárcsára rajzolt sebesség-idő diagram, ezért ugyanúgy elemezhető, mint a derékszögű koordináta-rendszerbe rajzolt „hagyományos” változat.

Az autóbusz reggel fél kilenc előtt nem sokkal indulhatott el. Az első néhány „tüske” 50km/óra körüli maximális sebességet jelez: a busz a városban haladt, és sokszor rövid megállásokra is kényszerült a piros lámpáknál. Ezután (9 óra előtt) a tüskék alacsonyabbak, amit élénkebb forgalom vagy talán útépítési munkák indokoltak. 9 óra körül – úgy tűnik – gyorsforgalmi útra ért, és néhány további piros lámpa után pontosan fél tízkor érhetett Monorra. Ott körülbelül tíz percig állt. Ekkor bizonyára utasok szálltak le és fel, majd az autóbusz újra elindult: 11 óráig valószínűleg alacsonyrendű utakon haladt. Ekkor – talán egy korai ebéd kedvéért, Hatvanban – megálltak, és csak délben indultak el újra. Fél egyig megállás nélkül, jó tempóban vezetett a sofőr, minden bizonnyal az M3-as autósztrádán. A fél egy órakor látható rövid, kb. 2 perces megállás az autópálya egyik parkolójában (A tachográf-lap egy részlete), valószínűleg utas (utasok) kérésére történhetett. Egy óra előtt térhettek le a sztrádáról, és várhatóan a 33-as úton, kisebb sebességgel haladtak tovább. Fél kettőre megérkeztek Tiszafüredre. Itt fél háromkor a sofőr rövid utat tett (a grafikon alatti terület mutatja a megtett utat!),



A tachográf-lap egy részlete



A tachográf -lap mozgást ábrázoló része

talán átállt az utasokkal a megbeszélte találkozóhelyre, majd még egy óra pihenés következett.

Háromnegyed négykor indultak vissza, először lassabban haladtak, majd az autópályán ismét gyorsabban. Szerencsés volt a visszaút: a városban kisebb volt a forgalom, mint reggel, így alig kényszerült a sofőr megállásra.

Az autó kerekének mozgása (B)

Amerikai diákoknak kitűzött fizikai fotóverseny egyik díjazott képe sötétben készült az $L = 5,3$ m hosszú mozgó autóról. Hogy a kép érdekesebb legyen, a fotós fényesen világító LED-et erősített fel az autó első kerekére, és a $\Delta t = 10$ másodpercig tartó expozíciós idő végén még vakuval is villantott egyet.



Így a fotón nemcsak a lámpák fénycsíkja látszik, de a vaku egy pillanatra az autót is megvilágítja.

Határozd meg az autó sebességét!

Mennyi az autó kerekének fordulatszám, ha a kerék átmérője $R = 60$ cm.

A kerék mely pontjára erősítette a diák a LED-et?

Megoldás

Az egyenesen haladó autó sebességének meghatározásához a fotón látható tetszőleges útszakasz valódi hosszát és a megtételéhez szükséges időtartamot kell ismernünk. Feltéve, hogy a fotós akkor indította a felvételt, amikor az autó első helyzetjelző lámpájának fénye a kép bal oldalán megjelent, az autó $\Delta t = 10$ másodperc alatt megtett útja az első helyzetjelző fénycsíkjának teljes hossza (Δs). Ez a fotón vonalzóval lemérhető, csakúgy, mint a kocsiszekrényi hossza is, aminek méterben kifejezett értékét a feladat megadja (5,3 m). A fotón mért távolságok arányából és az autó valós hosszából a megtett út, majd az utat az idővel elosztva a kocsis sebessége $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ kiszámítható.

A foton végzett mérés szerint $\Delta s \approx 1,8m$, $L = 9,5 m$, az autó sebessége:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 0,95 m/s.$$

Az egyenletesen haladó autó kereke tisztán gördül, azaz a kerék egy körfordulása alatt az autó épp egy kerületnyi távolságot tesz meg. Az autó haladási sebessége megegyezik a forgó kerék kerületi sebességével. Ezt felhasználva kerék sugarának ismerében meghatározhatjuk a kerék egy körfordulásának T idejét és ennek reciprokaként a fordulatszámot is.

$$v = \frac{2R\pi}{T} = 2R\pi \cdot f$$

A foton látható autó kerekének fordulatszáma:

$$f = \frac{v}{2R\pi} \approx \frac{0,95}{0,6 \cdot 3,14} = 0,5 1/s$$

A foton jól látszik, hogy az autó a havas, jeges úton lassan óvatosan halad előre, valóban egyenletesen mozog, amit a kerékre szerelt LED szabályos, periodikus pályagörbéje mutat.

A foton a kerék forogva haladó mozgását jól jelzi az első kerék egy pontjára rögzített világító LED. A LED jellegzetes periodikus pályáját cikloisnak nevezzük. A ciklois periódustávolsága mozgó pont tengelytől mért távolságával, mint sugárral számított kör kerülete. A ciklois alsó hegyes pontjainak távolsága (k) a foton jól lemérhető, és valós távolsággá átszámítható (jelölje ezt K). E távolság ismeretében meghatározható a LED rögzítési pontjának tengelytől mért távolsága (R^*)

$$K \approx 2,65m \quad K = 2R\pi$$

A LED rögzítési távolsága a kerék forgástengelyétől $R^* \approx 42 cm$

Megjegyzés:

- A feladat sokéle elméleti megfontolásra ad lehetőséget. A megoldásban feltételeztük, hogy a kerék tisztán gördül, tehát, hogy a talajjal érintkező pontja minden pillanatban zérus sebességű. Ebből következik, hogy a gépkocsihoz képest a kerék kerületi sebessége megegyezik a kocsi mozgásának sebességével. Megállapítható, hogy a LED a kerék szélső pontjához van rögzítve. Pályája ekkor lesz a képen látható csúcsos ciklois. A kerék tengelyéhez közelítve a LED-et, lapos, a tengelytől távolítva hurkolt cikloisot kapunk. (Közúton haladó gépkocsi esetén természetesen a hurkot ciklois nem valósítható meg.) Matematikai érdeklődésű osztályban a cikloisok egyenlete is levezethető. (lásd Wikipédia).

A csillagos ég látszólagos mozgása (B)

A mellékelt felvételt ifj. Radnóczy György fizikus hallgató készítette éjszaka a csillagos égboltról.

Értelmezd a képen látottakat!

Becsüld meg a fotó alapján, hogy mennyi lehetett a fényképfelvétel készítésének az ideje!

Megoldás

A Föld tengelykörüli forgása következtében a csillagok a Sarkcsillag körül koncentrikus körpályákon látszanak mozogni. A fotón a különböző csillagok pályájának ívszakaszai láthatók. Ha lemérjük a felvételen valamely ív hosszát (S) és a középponttól mért távolságát (R) a fénykép készítésének ideje meghatározható. 24 óra alatt a Föld megfordul tengelye körül, a kiszemelt csillag tehát ez idő alatt épp egy körkerületnyi ívet ($2R\pi$) fut be. A fotó T expozíciós ideje ennek pont annyiad része, ahányszor a terület nagyobb a mért ívhossznál. Azaz:

$$T = \frac{24S}{2R\pi}$$

Az expozíciós idő kiszámításához tehát hosszúságokat kell mérnünk. A mérés mm beosztású vonalzóval kellő pontossággal elvégezhető, ha valamelyik kellően fényes és Sarkcsillagtól távoli csillagot választjuk.

A mérést és a számítást elvégezve a fénykép készítésének ideje mintegy 25 perc.



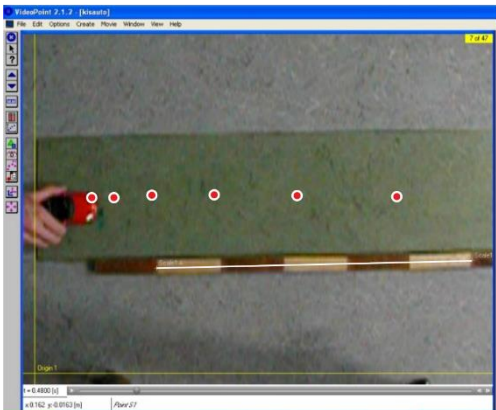
Rugós játékautó indulási gyorsulása (B)

A gyerekjátékok gyakran remek kísérleti eszközök. A velük végzett egyszerű kísérletek, mérések segítségével jobban megérthetjük a fizika törvényeit és a modern technikai eszközök működésének alapjait is.

A játékboltokban kapható kisméretű rugós játékautó. Az autó hátsó kerekeit meghajtó rugó úgy feszíthető meg, hogy a játékot a talajhoz nyomva hátra húzzuk. Az elengedett játékautó lendületesen indul előre.

Az ilyen játékautó indulásáról készített videofelvétel számítógépes mozgáskiértékelő programmal (pl. VideoPoint, Trackerk, LabCamera stb.) értékelhető ki.

Az induló kisautó stand-fotója, rajta a távolság hitelesítését szolgáló méterrúddal, továbbá bejelölve rajta a gyorsuló kisautó lámpájának helyzetét egyenlő időszakaszok után, az első ábrán látható. A VideoPointtal számítógépes programmal készített mozgás-elemzés eredményét az elmozdulás-idő és sebesség-idő grafikonok mutatják.



A grafikusan adott mérési eredmények alapján számítsd ki a játékautó gyorsulását!

Mennyi idő alatt gyorsulna fel a játékautó 100 km/óra sebességre, ha feltételezzük, hogy az indulás során mért gyorsulás változatlan marad! Hasonlítsd össze ezt az eredményt a forgalomban használt valódi autók gyorsítási jellemzőivel!

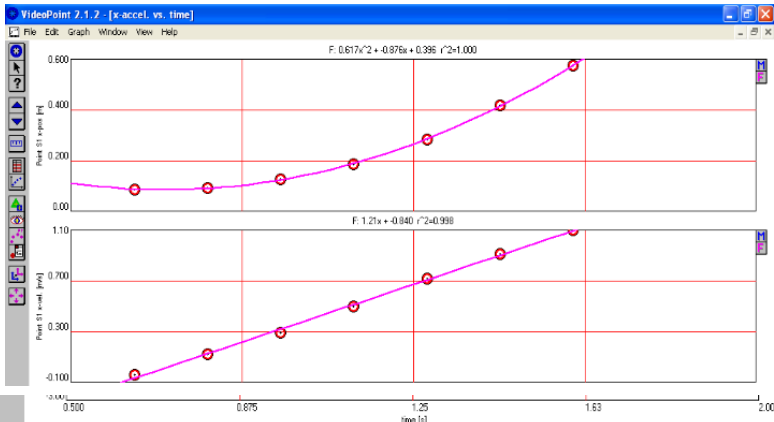
Megoldás

A kisautó gyorsulásának vizsgálatára a második grafikon alkalmas, ami a sebesség időbeli változását ábrázolja. A mérési pontok egyenes vonalra illeszkednek, azaz a játékautó mozgása indulás után egyenletesen gyorsuló mozgás. A gyorsulás nagyságát az egyenes meredeksége adja. Ennek a grafikonról leolvasott adatok felhasználásával kapott értéke:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx 1,2 \frac{m}{s^2}$$

A valódi autók jellemzésére gyakran használják azt az időtartamot, ami alatt a gyorsuló autó eléri a 100 km/óra sebességet.

Ha feltételezzük, hogy a kisautó gyorsulása nem változik, a mérésünkből kapott gyorsulással haladva $t = \frac{v}{a} \approx \frac{27,8}{1,2} = 23,1s$ idő alatt érni el a 100 km/h = 27,8 m/s sebességet. Ez az idő kényelmes vezetéssel egy átlagos személykocsival is elfogadható (gondoljunk például az autópályán történő felgyorsulás idejére).



Megjegyzés:

- Vegyük észre, hogy a gyorsulás a grafikon feletti függvényről, ami a legkisebb négyzetek módszerével illesztett sebesség idő függvényt adja, azonnal leolvasható. A grafikon extrapolációja mutatja, hogy a kocsit negatív kezdősebességgel indult. A függvényről leolvashatóan a kezdősebesség majdnem 1 m/s volt.

További dinamikai jellegű kérdések:

Határozzuk meg a kiskocsit gyorsító erőt, ha a kísérletben használt játékautó tömege 0,16 kg!

Becsüljük meg a meghajtó kerék és a talaj között fellépő tapadási súrlódás μ súrlódási tényezőjének értékét!

Newton II. törvényének felhasználásával a gyorsító erő a tömeg és a gyorsulás értékéből adódik:

$$F = ma \approx 0,16 \cdot 1,2 = 0,19N$$

A kiskocsit gyorsító erőt a meghajtó kerekekre ható tapadási súrlódás biztosítja. Ennek átgondolásához érdemes felidézni azt a mindennapos tapasztalatot, hogy a sáros úton vagy homokon hirtelen gázzal induló kocsik kipörgő kereke hátrafelé szórja a talajt, ami meggyőzően mutatja, hogy a súrlódási erő a talajra hátrafelé, ellentéte a kerékre menetirányba hat. (A menetellenállás a játékautó esetén, ahol nagy sebesség nincs, elhanyagolható.)

A kocsi kerekére ható tapadási súrlódási erő maximumát (F_S) a kocsi súlyából adódó nyomóerő (F_{ny}) és a tapadási súrlódási együttható (μ_0) határozza meg: $F_S = mg\mu_0$.

Ha kisautó gyorsulásakor a tapadási súrlódás maximális lenne, akkor a kísérleti adatok alapján becsült értéke

$$\mu = \frac{F_S}{mg} \approx \frac{0,19}{0,16 \cdot 10} = 0,12$$

lenne. Pontosabban azonban csak annyit mondhatunk, hogy $0,12 \leq \mu_0$

Lejtőn guruló golyó mozgása (A)

A lejtőn guruló golyó mozgását már Galilei is vizsgálta. Kísérleti tapasztalatait a következő állításban összegezte: „A lejtőn leguruló és kezdősebesség nélkül induló golyó által azonos időközök alatt megtett utak úgy aránylanak egymáshoz, mint a páratlan egész számok 1-től kezdődően.”

Galilei nehézkes kísérleti technikával megvalósított mérésorozatot ma már egyetlen fotóba lehet sűríteni. A mellékelt strobokép 4 cm átmérőjű lejtőn guruló golyóról készült és az indulási pillanattól számított 0,4 másodperces időközönként mutatja a golyó pillanatnyi helyzetét.

A képen vonalzóval végzett mérések alapján igazold Galilei fent idézett állítását!



Megoldás

Mérjük le a fényképen az induló golyó átmérőjét, majd sorra a golyók közti távolságokat, azaz a golyótól egymást követő azonos időszakaszok alatt megtett utakat! A golyó valós átmérőjének ismeretében számítsuk át a fotón mm beosztású vonalzóval mért távolságok valódi értékét! Az eredményeket foglaljuk értéktáblázatba (ábra)!

Időintervallum	1	2	3	4
Δx (cm)	3,6	10	18	24

(Δx jelenti az egyes időintervallumokban megtett utakat.)

Hogy megvizsgáljuk a Galilei-féle állítás teljesülését, elegendő az egyes utakat az elsővel összehasonlítani. Így

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{10}{3,6} = 2,78 \approx 3; \quad \frac{\Delta x_3}{\Delta x_1} = \frac{18}{3,6} = 5; \quad \frac{\Delta x_4}{\Delta x_1} = \frac{24}{3,6} = 6,67 \approx 7$$

A felvétel során fellépő torzítást és az esetleges vágási hibát beleszámítva kijelenthetjük, hogy az állítás teljesül, tehát a golyó mozgása egyenletesen változó.

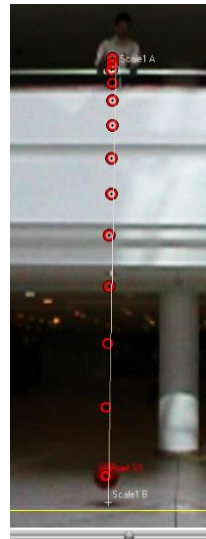
Kosárlabda esése és pattogása a padlón (B)

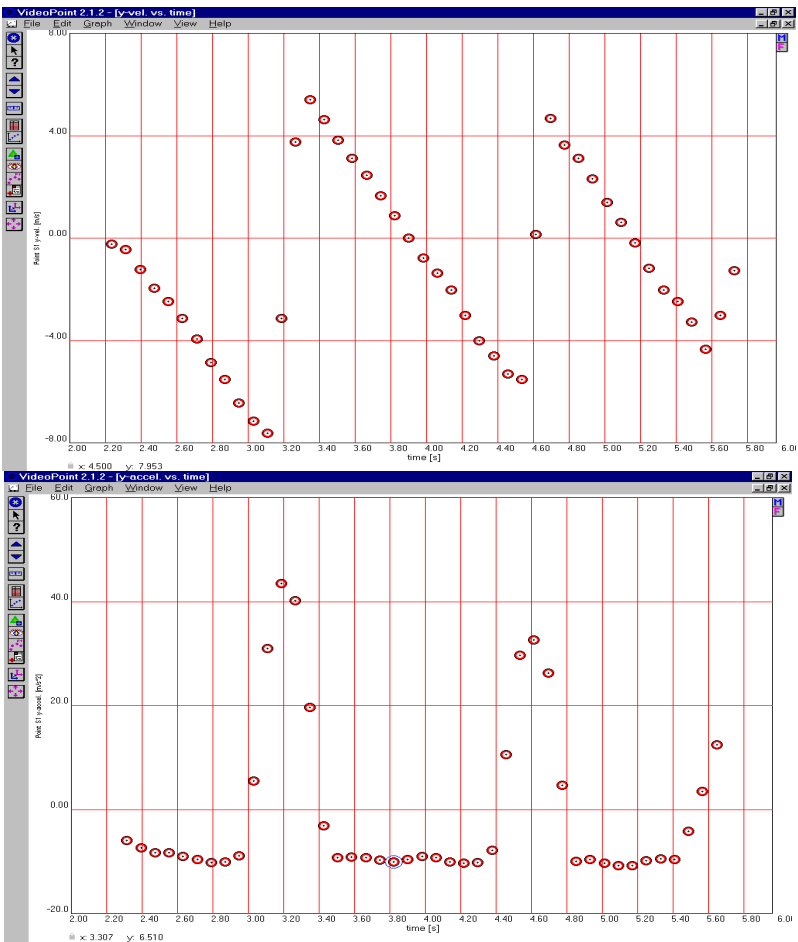
Kosárlabdát, melynek tömege $m = 0,63$ kg, átmérője $D = 26$ cm, 4,5 m magasból leejtettünk. A leeső és a földönpattogó labda mozgásáról videofelvételt készítettünk. (A fotó a labda helyzetét mutatja egyenlő időközönként az elengedés pillanatától a földetérésig.) A videofelvételt VideoPoint számítógépes programmal értékeltük ki. Az emeleti erkélyről leeső, majd pattogó labda sebesség-idő és gyorsulás-idő grafikonját az ábrák mutatják. Végezz számításokat a grafikonok alapján, és válaszolj az alábbi kérdésekre!

Mekkora a visszapattanó labdára jellemző ütközési szám?

Mekkora a labda és a talaj közt ható átlagos erő az első visszapattanáskor?

A grafikon csak a labda első három pattanását ábrázolja. Becsüld meg azt az időtartamot, amíg a labda pattog!





Megoldás

Az ütközési szám – definíció szerint – a test ütközés utáni és ütközés előtti impulzusának hányadosa

$$k = \frac{mv_1}{mv_2}$$

Az első grafikonról két egymást követő ütközés esetén olvashatók le adatok. Az első pattanáskor a labda becsapódási sebessége kb. $-7,5 \text{ m/s}$, visszapattanási sebessége $5,5 \text{ m/s}$.

A második pattanáskor $v_1 = -6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_2 = 4,5 \text{ m/s}$. A labdára jellemző ütközési szám:

$$k = 0,7 - 0,8$$

A talaj és a labda közt ható átlagos erő az impulzus-tétel alapján számítható. Eszerint az impulzus megváltozása (ΔI) az erő-lökéssel ($F\Delta t$) megegyező.

Az első ütközéskor a labda impulzusának megváltozása, az első grafikonról leolvasott korábbi sebességadatokkal: $\Delta I = m[v_2 - (-v_1)] \approx 8,2 \text{ kg m/s}$.

Az ütközés ideje a második grafikonról olvasható le. A levegőben mozgó labda gyorsulása mindig a gravitációs gyorsulás ($g = -9,81 \text{ m/s}^2$). A kiugró gyorsulásértékek az ütközés alatt adódnak. Az első ütközés időtartama $\Delta t \approx 0,4 \text{ s}$.

A labda és a talaj közt ható átlagos erő:

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} \approx \frac{8,2}{0,4} = 20,5 \text{ N}$$

A labda pattogásának ideje az első grafikon alapján, extrapolációval adható meg. A sorozatos ütközések során a labda becsapódási és visszapattanási sebessége is egyre csökken. Bár a változás nem lineáris, mégis elfogadható becslést ad, ha a csökkenő értékekre illesztett egyenest illesztünk, és az egyenesnek a 0 sebességet jelentő vízszintes osztásvonallal adott metszéspontját határozzuk meg. A pattogás ideje így kb. 7 s .

Szabadesés gyorsulása a Holdon (B)

(Az első holdraszállás során készült videó számítógépes kiértékelése)

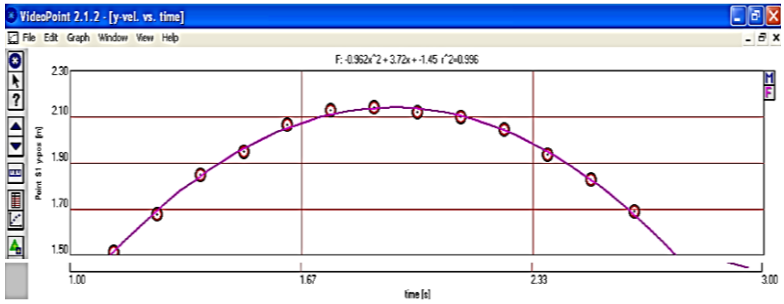
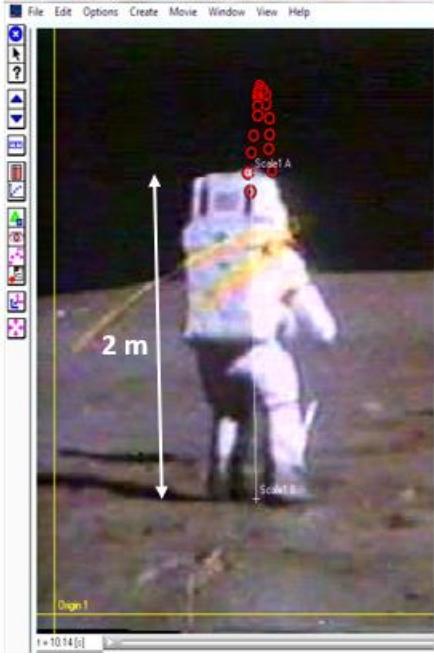
A tudomány számára történelmi jelentőségű dátum 1969 július 20, amikor először lépett ember a Holdra. Az egész világon ismert videofelvételek örökítik meg, ahogyan az Apollo 11 parancsnoka Neil Armstrong, társával Edwin Aldrinnal sétál, sőt ugrál a Holdon. A szabadon letölthető videó

<http://www.youtube.com/watch?v=efzYblYVUFk&feature=related> alapján, számítógépes iskolai mozgáskiértékelő programmal (VideoPoint, Tracker, LabCamera stb.) meghatározható a felugró űrhajós gyorsulása!

A kép a felugró űrhajós „holdatérése” után mutatja a hátzsák felső sarkának az egymást követő film kockákon megjelölt helyzetét. A video hosszúságskáláját az űrruhában lévő űrhajós magasságával (hátzsákkal együtt 2m) kalibráltuk.

A VideoPoint programmal végzett elemzés eredményét a kép, és a felugró űrhajós függőleges elmozdulását az idő függvényében ábrázoló grafikon mutatja. A grafikon mérési pontjaira a számítógép által illesztett függvényt külön kiemeltük. A formulában az x változó az idő (szokásos jele t).

Értelmezd a számítógép által a mérési pontokra illesztett elmozdulás-idő függvényt és határozd meg a Holdon mérhető nehézségi gyorsulás (g_H) értékét!



$$F: -0,962x^2 + 3,72x - 1,45$$

$$r^2 = 0,996$$

Megoldás

A videó mutatja, hogy az űrhajós pároszlábú felugrása fizikai szempontból függőleges hajtás.

A Holdra jellemző gravitációs gyorsulás mért értéke $1,7\text{--}1,8 \text{ m/s}^2$, ami a földi gravitációs gyorsulásnak mintegy ötöde.

Megjegyzés:

- Kiemeljük, hogy az utóbbi két példa (labda esése és úrhajós felugrása) és más hozzájuk hasonlóan a mindennapi életből vett videó, vagy videóra vett laboratóriumi kísérlet nemcsak a kinematikában alkalmazható, de a dinamika és energetikai tanítása során is. A kosárlabda ejtését bemutató videón a labda többszöri felpattanásának folyamatát kiértékelve, az ütközési szám mellett az ütközések során disszipálódó energiahányad, vagy akár az ütköző labda impulzusváltozása is meghatározható. Armstrong Hold-ugrásához kapcsolódva a Hold átmérőjének ismeretében meghatározhatjuk a Hold tömegét, illetve átlagos sűrűségét. A Hold és a Föld sűrűségének egybevetéséből következtethetünk a két égitestet belső felépítésének hasonlóságára is.
- A mozgások video elemzése nemcsak önálló egységként illeszthető az iskolai fizikatanításba, hanem felhasználható a hagyományostól eltérő feladatok kitűzésére is. Ilyenkor a feladat megoldásához szükséges adatokat a feladat közvetlenül nem tartalmazza, a videoklip kiértékelésével juthatnak hozzá a diákok.

Kis súllyal terhelt játékléggömb esése (B)

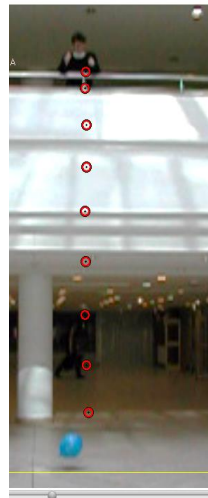
A kb. 25 cm átmérőre felfújtt játékléggömböt kis súllyal terhelve leejtettük a 4,5m magas erkélyről. A léggömb esését videóra vettük, majd a felvételt VideoPoint számítógépes mozgáskiértékelő programmal elemeztük. A fotó a leeső léggömb elmozdulását mutatja a videofilm képkockáján egyenlő időközönként bejelölve. Mellette az ábrán a mozgás sebesség-idő grafikonja látható.

A fotó és a grafikon alapján elemezd a léggömb mozgását!

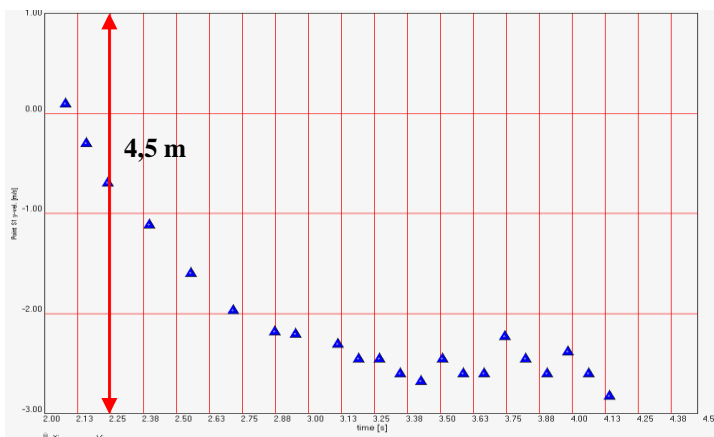
Határozd meg mennyi idő után állandósul a léggömb sebessége, és becsüld meg az állandósult sebesség nagyságát!

Fakultatív kiegészítő kérdés

Milyen erők hatnak a léggömbre állandó sebességű mozgás esetén?



Függvénytáblázati adatokat felhasználva becsüld meg a léggömbre ható közegellenállási erőt!



A játékléggömb sebesség-idő grafikonja

Megoldás

A mozgás fotón látható nyomképe és a sebesség-idő grafikon egyaránt mutatja, hogy az elengedett léggömb lefelé mutató (negatív irányú) sebessége először nagyobb, majd egyre kisebb ütemben növekszik, majd az esési idő második felére állandósul. A sebesség ilyen változása azt jelzi, hogy a léggömbre ható erők az esés során változnak. Az lejtés pillanatában a léggömb a gumi-héj és a nehezék súlyának hatására lefelé gyorsul. A sebesség növekedése miatt egyre nagyobbá válik a mozgást fékező közegellenállási erő. Ha a sebesség már akkora, hogy a közegellenállási erő eléri a léggömb és a nehezék együttes súlyát, a sebesség állandósul. Ez a grafikon alapján kb. 1 másodperc esési idő után következik be. A léggömb állandósult sebességének grafikon alapján becsült értéke $v \approx -2,5 \text{ m/s}$.

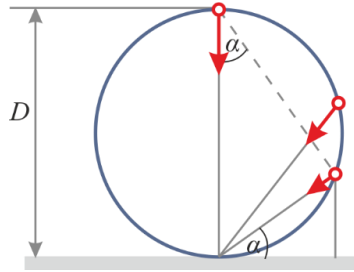
Galilei érdekes lejtő-problémája (B)

(kísérlettel egyszerűen igazolható fizikatörténeti feladat)

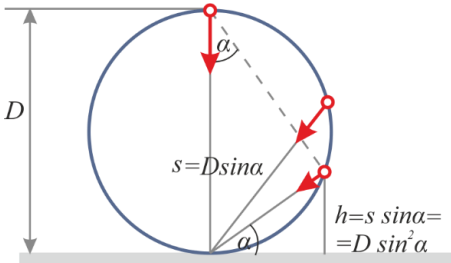
Galilei sokat foglalkozott a lejtőn lecsúszó testek mozgásával. Igazolta, hogy a D átmérőjű függőleges abróncs bármely kerületi pontjáról a talppontba vezető „húr-lejtő” súrlódás nélkül csúszó test mozgási ideje azonos.

Galilei alábbi ábráját felhasználva végezz számítást annak igazolására, hogy különböző α dőlésszögű húr-lejtőkön csúszó test mozgásideje azonos és megegyezik az abroncs tetőpontjából szabadon eső test mozgásának idejével!

Megoldás



Tekintsünk egy tetszőleges húrlejtőt, amelynek lejtési szögét az ábrán α jelöli! Az elhanyagolható súrlódású lejtőn mozgó test egyenletesen gyorsulva ($a = g \cdot \sin \alpha$ gyorsulással) mozog az s hosszúságú lejtőn. A lejtő tetejéről kezdősebesség nélkül induló test s úton a gyorsulással mozogva t idő alatt ér a lejtő alá:



$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

Figyelembe véve, hogy a húrlejtő hossza kifejezhető a kör átmérőjével és a lejtő szögének szinuszával

$$s = D \sin \alpha$$

továbbá a lejtőn mozgó test gyorsulása $a = g \sin \alpha$, a mozgás időtartamára adódó

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2D \sin \alpha}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2D}{g}}$$

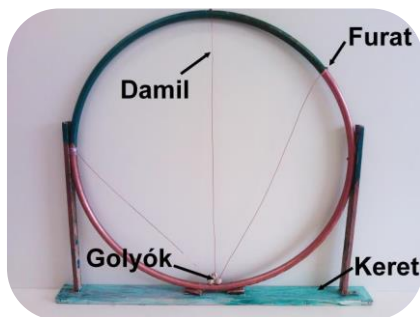
eredmény tetszőleges α szögű lejtőre azonos, és megegyezik a kör tetőpontjáról szabadon eső test esési idejével is. Ezzel elméletileg igazoltuk Galilei húrlejtőkre vonatkozó állítását.

A tézis igazságáról egyszerű kísérlettel is meggyőződhetünk.

Kísérlet

A kísérlet bemutatásához szükséges egyszerű eszköz házilag is elkészíthető. A ritmikus gimnasztikában használatos karika egyik átmérőjének két végpontját fúrjuk át és a furatokon keresztül áthúzva feszítsünk ki vékony drótszálat, amire előzőleg kifúrt fa golyót vagy nagyobb műanyaggyöngyöt fűztünk. A karikát rögzítsük fa talpra úgy, hogy az átmérő mentén kifeszített drót egyik pontja a talpon legyen,

Hasonló módon készítsünk drótból két eltérő hajlászögű húrlejtőt a függőlegesen álló átmérőnyi drót két oldalán. Ezekre is húzzunk egy-egy könnyen mozgó gyöngyöt. A talpán álló eszköz esetén mindhárom gyöngy az abroncs alsó pontján van. Az abroncsot megfordítva a gyöngyök a húrlejtők felső pontjába csúsznak. Ez kísérletünk kezdőállapota. Egy lendületes gyors mozdulattal fordítsuk át az abroncsot ismét függőleges helyzetbe úgy, hogy a húrlejtők közös pontja ismét alulra kerüljön! A feszes drótszalakon szabadon csúszó golyók egyszerre érnek a lejtők aljára.



Megjegyzés:

- A feladat fenti megfogalmazásában a kísérlettel verifikáljuk a számítás eredményét. A sorrend azonban megfordítható, ha először a meglepő eredményű kísérletet mutatjuk be.

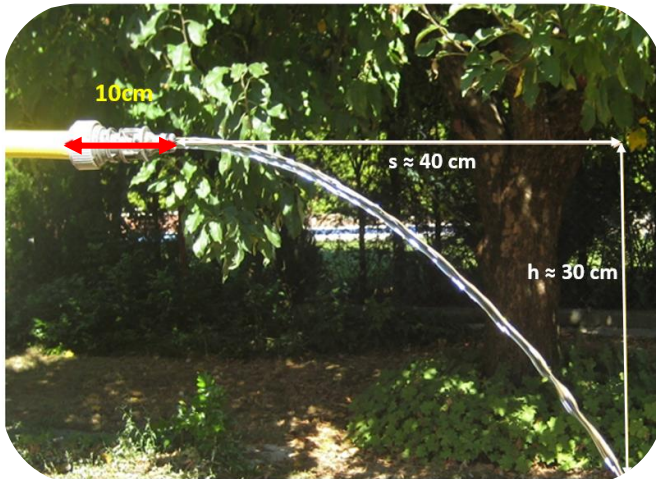
Locsolócsőből kifolyó víz (fotó-elemzés) (B)

A fotón vízszintesen tartott kerti locsolócsőből sugárban kifolyó víz látható. Becsüld meg a csőből kilépő vízszugár sebességét, ha a locsolófej bejelölt mérete 10 cm?



Megoldás

A fotó alapján feltételezhető, hogy a locsolócsőből kilépő vízszugár vízszintes hajtás parabolapályáját rajzolja ki. Illesszünk derékszögű koordinátarendszert a locsolócső nyílásához! A vízszugár mozgása a koordinátarendszer tengelyeinek irányába eső két egyszerű mozgásból tehető össze. A vírzészecskék az x tengely mentén egyenletes mozgással, az y tengely irányában szabadeséssel mozognak. Válasszuk ki a vízszugár tetszőleges pontját, jelöljük be a pont koordinátáit és határozzuk meg őket! Ez utóbbihoz használjuk fel a locsolófej megadott méretét!



A kifolyó víz vízszintes irányban megtartja v_0 kezdősebességét így t idő alatt

$$s = v_0 t$$

távolságot tesz meg. Függőleges irányban a víz szabadon esik és t idő alatt $h = 30$ cm távolsággal kerül lejjebb a kifolyás szintjénél.

$$h = \frac{g}{2} t^2$$

Behelyettesítve az adatokat.

$$t = \sqrt{\frac{0,6}{10}} \approx 2,44 \text{ s}$$

$$v_0 = \frac{s}{t} \approx \frac{0,4}{2,44} \approx 16 \text{ cm/s}$$

Megjegyzés:

- Célszerű a számítást a sugár több pontjára vonatkozóan elvégezni, és ellenőrizni, hogy a víz valóban paraboláívet rajzol ki.

Palackból kifolyó víz sebességének meghatározása (B)

(fotó-dokumentum kiértékelése)

A fotón látható vizes palack oldalán, a felszín alatt h mélységben kis nyílás van, amelyen vízszintes irányba, vékony sugárban folyik a víz.

Határozd meg a kilépő víz sugar sebességét!



Megoldás

I. A víz sugar részecskéi vízszintes hajítás pályája mentén mozognak. A fotón lemérhető a hajítás kezdő magassága (l) és a hajítás vízszintes távolsága (s). A kép alján látható 10 cm-enként különböző színnel festett méterrúdról meghatározható, hogy a kép milyen arányban kicsinyít. Ezt felhasználva a fotón mért távolságok valódi értéke meghatározható ($l \sim 9,5\text{cm}$, $s \sim 16,5\text{cm}$).

A hajítás vízszintes távolsága:

$$s = vt$$

A függőleges elmozdulás-szabadesés:

$$l = \frac{g}{2} t^2$$

A mért értékeket behelyettesítve, a két egyenletből a sebesség értékére azt kapjuk, hogy

$$v \approx 1,45\text{m/s}$$

II. A feladat más úton is megoldható. A tartály oldalnyílásán kiömlő víz sebessége a Bernoulli-törvény segítségével is kiszámítható. Mivel az edény keresztmetszete sokkal nagyobb a nyílás keresztmetszeténél, ezért a folyadék áramlási sebessége az edényben elhanyagolható a kifolyási sebességhez képest, azaz az edényben a nyílás helyén a víz hidrosztatikai nyomása megegyezik a nyíláson kilépő víz sugar torlónyomásával

$$\rho gh = \frac{1}{2} \rho v^2$$

ahonnan

$$v = \sqrt{2gh}$$

Itt h kiömlőnyílás és a palackban lévő vízszint magasságkülönbsége. Ennek értéke a fotó szerint 16,4 cm. A számított kiömlési sebesség:

$$v \approx 1,7 \text{ m/s}$$

A két sebességérték összevetéséből kiténik, hogy a súrlódásmentes áramlás feltételével számított érték nagyobb, mint a hajítás alapján meghatározott.

Részecskék áramlási sebessége gyertyalángban (B)

A gyertyaláng jellegzetes alakját a forró, felfelé áramló gázok alakítják ki. A fotón látható gyertya 45/perc fordulatszámmal forgó lemezjátszón, a lemezjátszó forgástengelyétől 10 cm távolságban áll. A mellékelt fotó segítségével becsüld meg, mekkora a gyertyalángban a feláramlás sebessége!



Megoldás

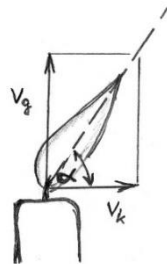
A lemezjátszó tányérján forgatott gyertya lángja a pillanatnyi mozgásiránnyal ellentétes irányban elhajlik. A láng hossz tengelye a felfelé áramló gázáramlás és a menetszél sebességének vektori eredőjébe esik.

A fotón megmérhető a láng hajlásszögének tangense ($tg\alpha$), ami a két sebességkomponens arányával egyezik meg:

$$tg\alpha = \frac{v_g}{v_k}$$

Tudva, hogy a v_k menetszél a forgó lemezjátszó tányérján álló gyertya kerületi sebessége $v_k = R \cdot \omega$, a gázban áramló gázok sebességére kapjuk:

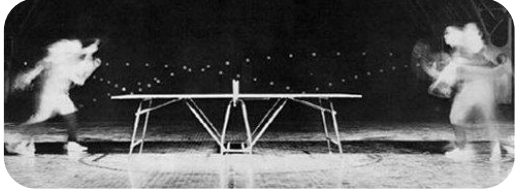
$$v_g = R\omega \cdot tg\alpha$$



A fotón lemérve a láng dőlésszögének meredekségét ($tg\alpha \approx 1/15$), és felhasználva a feladatban megadott adatokat ($R = 0,1 \text{ m}$, $\omega = 2\pi f = 6,28 \cdot \frac{60}{45} \approx 8,1 \text{ s}^{-1}$, $v_g \approx 0,5 \text{ m/s}$).

Pingpong labda sebességének becslése stroboszkópos kép alapján (C)

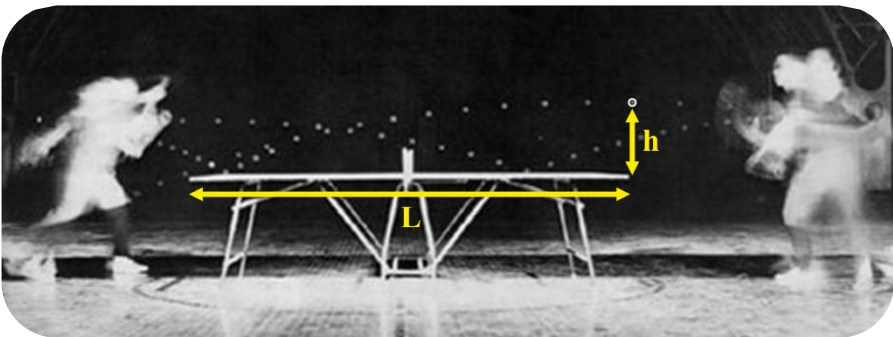
Az alábbi bravúros sport-fotót évekkel ezelőtt egy diák, aki maga is pingpongozott, töltötte le az internetről. Sajnos a stroboszkópos képet készítő fotós nevét nem ismerjük.



Az érdekes kép szabályosan villogó lámpás (stroboszkópos) megvilágítással készült hosszabb megvilágítási idővel egy asztalitenisz meccs labdamenetéről. A fotón jól látszik a labda villanásról villanásra változó helyzete, miközben a mozgásban lévő játékosok képe elmosódott.

Becsüld meg a fénykép alapján a labda sebességét a játék közben. A számításnál használd fel, hogy a pingpong-asztal hossza 2,75 m!

Megoldás



A stroboképet tanulmányozva több labdamenet nyomvonalát láthatjuk. A labda valós sebességének meghatározásához a szomszédos labdahelyzetek tényleges távolságára és a lámpa villanásai közt eltelt időtartamra lenne szükségünk. A távosságértékek meghatározásához jó támpontot ad az asztal hosszának ismerete ($L = 2,75$ m). A nehézséget a villanásközök meghatározása jelenti.

A megoldást segíti, ha észrevesszük, hogy a labdamenetek egyik nyomvonala jó közelítéssel vízszintes hajítást ír le. Ez az asztal jobb széle felett indul és balra haladva szinte sűrűn halad el az asztal bal széle mellett (éppen úgy nem „csusza”).

A fotóra bejelöltük a vízszintes hajítás kezdőpontjának magasságát az asztal széle fölött, és az asztal hosszát, azaz a hajítás távolságát. A hajítás nyomvonalát követve leszámolható hány villanás alatt tette meg a labda az asztal hosszának megfelelő vízszintes távolságot. Az asztal L hosszának megtételéhez éppen annyi időre volt szükség, mint a h magasságból bekövetkező szabadeséshez. A villanásközök száma 13, A vízszintes hajítás vizsgált szakaszának fotón mért h magasságkülönbsége átszámolható valós értékke, felhasználva az asztal fotón mért és valódi s hosszúságnak az arányát. Így a magasságkülönbség kb. 46 cm. A 46 cm magasból történő szabadesés időtartama 0,3 s. A stroboszkóp villanásai közt eltelt idő $0,3/13 \approx 0,02s$. Két villanásköznyi idő alatt a labda által megtett út (a vízszintes hajítás kezdeti szakaszán mérve kb. 55 cm. A pingpong-labda átlagsebességének becsült értéke

$$v \approx 10 - 12 \text{ m/s}$$

Megjegyzés:

- A feladat tanári útmutatás nélkül nagyon nehéz, mert a fotó speciális részleteinek megfigyelése alapján tett feltételezéssel kell élni. A diákok által megszokott feladatokhoz képest ez azt jelenti, hogy a feladat szövegében nem szereplő, rejtett adatokat kell felhasználni a megoldáshoz. Természetesen segíthet a megoldásban, ha a feladat szövegét kiegészítjük például azzal, hogy „Tanulmányozd gondosan a képet! Találsz-e rajta olyan pályát, amely valamelyik jól azonosítható hajítására emlékeztet.”

ERŐK ÉS NYOMATÉKOK EGYENSÚLYA

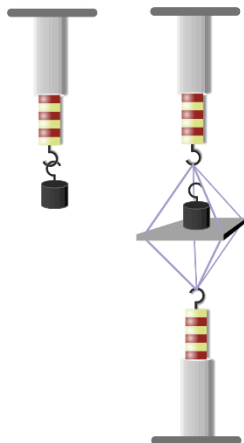
Ebben a fejezetben olyan feladatokat gyűjtöttünk össze, amelyek kísérletileg könnyen megismételhető helyzetekre vonatkoznak. A feladatok egy része itt is fotók kiértékelésén alapul, de a lefényképezett helyzetek könnyen reprodukálhatóak. Amennyiben időnk engedi érdemes a feladatokat a kísérletek megisméltésével tanulói munkát követően feladni. A feladatok szövege itt is csak minta, a csoport felkészültségét ismerve fogalmazhatjuk a kérdéseket pontosított, illetve kevésbé körvonalazott, a gyakorlati élethez közelebb álló módon.

Erők egyensúlyára vonatkozó megfontolások (A-B)

A helyszínen bemutatott bevezető kísérlet során rugós erőmérőre testet akasztottunk. Az erőmérő 4N erőt mutatott.

Ezután két egyforma erőmérőt egy elhanyagolható súlyú tányér közbeiktatásával függőlegesen egymáshoz csatlakoztattunk, majd úgy feszítettük meg, hogy mindkét erőmérő 4 N erőt jelezzon.

Mekkora erőt mutatna a felső erőmérő, ha a tányérra ráhelyeznénk a 4 N súlyú testet?



Megoldás

A tányér a két megfeszített erőmérő között nyugalomban van, az erőmérők azonos nagyságú ($F_0 = 4N$), de ellentétes irányú erővel húzzák a tányért. Ha a 4 N súlyú testet rárakjuk a tányérra a felső erőmérő jobban kinyúlik és ezáltal erőkifejtése nő, az alsó erőmérő összehúzódik, így ereje csökken. A két erőmérő elmozdulása ellentétes értelmű, de egyforma nagyságú. Mivel a rugós erőmérők által kifejtett (és jelzett) erő a megnyúlással arányos, a felső erőmérő az új helyzetben

$$F_1 = F_0 + \Delta F$$

erőt, az alsó erőmérő

$$F_1 = F_o - \Delta F$$

erőt mutat. Mivel a tárgy az új helyzetben is nyugalomban van, a rá ható erők eredője zérus. A tárgyra függőlegesen felfelé mutató erővel hat a felső erőmérő (F_1), lefelé hat a test súlya ($F_o = -4N$) és az alsó erőmérő ($-F_2$). Az egyensúly feltétele:

$$F_1 = F_o + F_2$$

A fenti két egyenletet behelyettesítve a harmadikba meghatározható ΔF értéke ($\Delta F = 2N$).

Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe adódik a felső erőmérő által kifejtett (mutatott) erő ($F_1 = 6N$).

Kísérleti igazolás

A rajzon bemutatott kísérletet ismétljük meg az osztályteremben, két egyforma dinamómérő és alkalmas tömeg felhasználásával! A feladatban szereplő kiindulási erő-adatokat illesszük a rendelkezésre álló dinamómérő skálájához!

Három összekapcsolt rugós erőmérő egyensúlya (A)

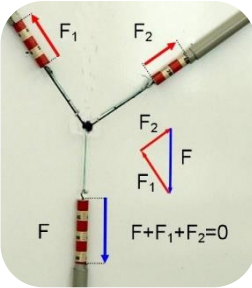
A fotó három, egy síkban elhelyezett és különböző mértékben megfeszített rugós erőmérőt („dinamómérőt”) mutat. A három erőmérő kicsiny testhez csatlakozik, amely a három erő hatására egyensúlyban van.

Igazold szerkesztéssel, hogy a három erőmérő által kifejtett erők eredője zérus!

(A különböző mértékben megfeszített erőmérők sávok jelzése az erők nagyságát mutatja. A vörös és fehér sávok száma az erőt mutatja önkényes mértékegységben, a különböző erőmérőkön látszó sávok számaránya az erőmérőktől kifejtett erők arányával egyezik meg.)



Megoldás



Az ábra egy részletét kinagyítottuk, és az erőmérők mellett bejelöltük az erőmérők által a testre kifejtett \vec{F}_1 , \vec{F}_2 és \vec{F} erők arányos nagyságát és irányát. Egyensúly esetén az erők eredője zérus. Ez azt jelenti, hogy az egymáshoz csatlakoztatott erők zárt vektorháromszöget alkotnak.

Amint a szerkesztésből látható, az első erővektor végéhez illesztve a második kezdőpontját, majd a hasonlóan a harmadik erővektort, az erő-háromszög záródik. Ez bizonyítja, hogy a három erő összege zérus.

Erő meghatározása vele egyensúlyt tartó két másik erő ismeretében (A)

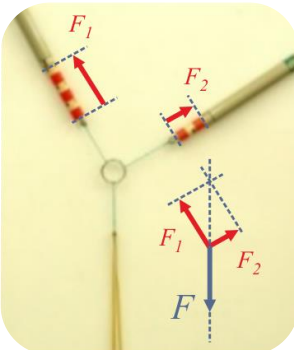
A fotón két megfeszített, egymással szöget bezáró rugós erőmérő hatását megfeszített gumikarika egyensúlyozza ki.

A fotó alapján határozd meg mekkora és milyen irányú erőt fejt ki a gumikarika?

A feladatot szerkesztéssel oldd meg! (Az erőmérőn minden piros és fehér sáv 10 N erőt jelez.)



Megoldás



Az ábra középső részét kinagyítva a szerkesztés kényelmesebben elvégezhető. Az erőmérők mellett bejelölve az \vec{F}_1 és \vec{F}_2 vektorokat, paralelogrammaszabállyal meghatározható az eredőjük. A gumiszál által kifejtett \vec{F} erőnek az $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ összeget kell kiegyensúlyoznia. Az erők, ábráról leolvasott számértéke:

$$F_1 = 5,8N, F_2 = 3,0N, F = 6,4N$$

Megjegyzés:

- Az \vec{F}_1 és \vec{F}_2 erők az ábra tanúsága szerint jó közelítéssel derékszöget zárnak be. A Pitagorasz-tétel szerint számolva F értékét az $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \cong 6,5N$ eredmény adódik.

Lapátoló munkás (A)

A fotón lapátot tartó munkás látható. A lapát egyensúlyi helyzetben van. Az ábrán rajzold be a lapátra ható erőket!



Megoldás

A lapát egyensúlyának feltétele az, hogy a rá ható erők vektori összege (eredője) és az erők forgatónyomatékainak összege is zérus legyen. Az emelt teherhez képest elhanyagolva a lapát súlyát, a lapátra három erő hat. A lapát végét fogó kéz által kifejtett \vec{F} erő egyensúlyozza ki a teher (\vec{G}) forgatónyomatékát. A lapátot középen fogó kéz által kifejtett erő $\vec{F} + \vec{G}$. \vec{F} és \vec{G} aránya az erőkarokkal (a képen ez az arány egyhez közeli) fordítottan arányos. Amennyiben a tartó kéz a teherhez közelebb kerül, mindkét kéz által kifejtett erő kisebb lesz.



Megjegyzés (csak tanárok számára):

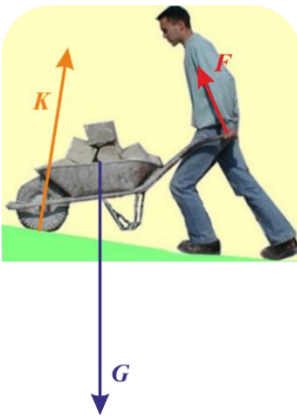
- A feladat statikailag határozatlan. Elképzelhető például, hogy a homok a lapátról lecsúszna, de a súrlódás ebben megakadályozza. A súrlódási erő a lapátot a lapátnyel egyenesében lefelé húzza. Ezt az erőt, a lapátot tartó két kéz egyenlíti ki. A feladat adatai alapján ezek az erők nem határozhatók meg. Az sem javít a helyzeten, ha kikötjük, hogy a homok a lapátra csak függőleges erőt gyakorol. A két kéznél ekkor is felléphetnek a nyél irányába eső erőösszetevők, amelyekről csak annyit tudunk, hogy egymással ellentétesek és egyenlő nagyságúak.

Talicskát toló munkás (B-C)

*A fotón a munkás talicskát tol a lejtőn felfelé.
Az ábrán rajzold be a talicskára ható erőket!*



Megoldás



A feladat bármely korosztálynak feladható, és az elvárt válasz finom részleteitől függ, hogy mennyire nehéz. Általános iskolában bevezető feladatként elegendő, ha a diák a három erőt az ábrán látható módon, az erők nagyságára vonatkozó követelmények nélkül berajzolja. Ekkor azzal sem foglalkozunk, hogy a talicska hogyan mozog. Szorosan véve a diáknak csak annyit kell tennie, hogy megállapítja milyen testekkel kerül kölcsönhatásba a talicska és az általuk kifejtett erőknek hol van a támadáspontja.

Ugyanezt a feladatot középiskolában feladva, már elvárható, hogy a diák a mozgás körülményeit is diszkutálja. Rengeteg ugyanis a meggondolásra érdemes részlet. Az erők: a talicska és a teher közös tömegközéppontjában hat a \vec{G} nehézségi erő, amelynek iránya függőleges, és nagysága is meghatározott. A talicska kerekének és a talajnak az érintkezési pontjában hat a talaj által kifejtett erő, amely általános esetben a \vec{K} kényszererőre és a lejtő mentén ható súrlódási erőre bontható. A talicska rúdjának és a két kéznek az érintkezési pontjában hat a munkás keze által kifejtett erő, amelynek iránya sem nyilvánvaló, bár kézenfekvőnek tűnik, hogy a kar irányába esik. Az erők nagyságára (a nehézségi erő kivételével) csak a mozgásra vonatkozó további feltevésekkel élve tehetünk megállapításokat.

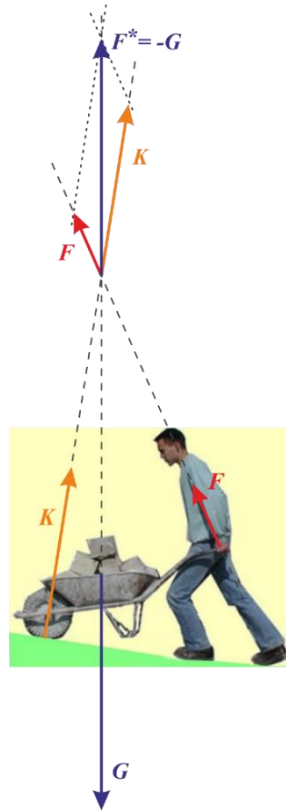
A fotóról nem olvasható le, hogy a munkás egyenletesen mozog vagy sem. Amennyiben gyorsulna, úgy a feladat hiányos. Józan feltevés azonban, hogy a munkás egyenletes sebességgel tolja a talicskát és a talicska kereke tisztán gördül. Ebben az esetben a talicska kerekének és a talajnak az érintkezési pontjában a súrlódás elhanyagolható. A talicskára ható három erőnek egyensúlyt kell tartani, ami azt jelenti, hogy hatásvonaluk egy pontban metszi egymást. A nehézségi erő iránya

és a kényszererő iránya adott, és az egyensúly megszabja a talicska rúdjára ható erő irányát. Ez azt jelenti, hogy ez az erő nem biztos, hogy a munkás karja mentén hat, a talicska szárára ható erő irányát a munkás csukló-tartása is befolyásolhatja.

Pontosabb, az erők nagyságát is meghatározó megoldáshoz csak akkor juthatunk, ha a talicska geometriai adatait, azaz az erők támadáspontját is megadjuk.

Érdeemes megbeszélni, a lejtőn nyugalomban tartott talicska egyensúlyának feltételeit is. Ebben az esetben a feladat statikailag határozatlan, a munkás által kifejtett erő lejtő menti összetevője attól függ, hogy a tapadási súrlódást mennyire tudja kihasználni a talicska tartására. A talicska megindításának pillanatában pedig ez az erőösszetevő a súrlódási erő maximumának és a talicskára ható nehézségi erő lejtő menti komponensének összege lesz.

Végül felmerül a kérdés, hogy miért nem tehetjük meg, hogy a feladat egyszerűsítésére a súrlódást elhanyagoljuk. Az „életből merített” feladatban ez szemléletromboló lenne, hiszen ekkor a munkás sem tudna felmenni a lejtőn, és a talicska kerekét sem tudná nyugalmi helyzetéből tiszta gördülésbe hozni.



Könyvbe szorított labda (C)

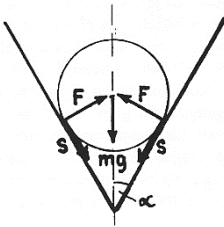
Keményfedelű, nyitott könyvbe pingpong labdát helyezünk és a könyvet, ügyelve arra, hogy gerince vízszintes helyzetben maradjon és oldalai mindvégig szimmetrikusak legyenek a függőleges síkra – lassan összecsuksukjuk. A labda kissé felemelkedik a könyv gerincéről és ott megszorul.

Az elvégzett kísérletből kiindulva adj becslést a labda és a kartonlap közötti μ súrlódási tényezőre! Milyen más módszert (mérést) ajánlanál az eredmény ellenőrzésére?



Megoldás

A két kartonlap összezárásakor a labda kezdetben felfelé mozdul el, majd megszorul. Ekkor labdára az mg nehézségi erő, a lapok által kifejtett, a lapok síkjára merőleges F nyomóerők és a lapok síkjában fekvő, S súrlódási erők hatnak. A megszorulás pillanata azt a határesetet jelenti, amikor a súrlódási erők maximálisak ($S = \mu_o F$) és a lapok síkja mentén lefelé mutatnak. Az egyensúlyi állapot feltétele, hogy a labdára ható erők függőleges komponenseinek összege zérus legyen. A rajz jelöléseit használva adódik:



$$2F_y - 2S_y - mg = 0$$

$$2F \sin \alpha - 2\mu F \cos \alpha = mg$$

átrendezve

$$\sin \alpha - \mu \cos \alpha = \frac{mg}{F}$$

A tapasztalat szerint a megszorult labda az F nyomóerő növelése esetén is egyensúlyban marad.

Ha $F \gg mg$, akkor a tört értéke zérushoz tart, tehát:

$$\sin \alpha = \mu \cos \alpha$$

azaz

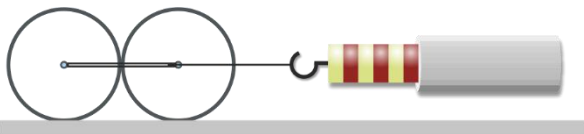
$$\mu = \tan \alpha$$

A két kartonlap közötti szög tangense vonalzóval mérhető hosszúságok arányából kapható meg.

Saját mérésünk szerint:

$$\mu = \tan \alpha = 0,25$$

A kapott eredmény más módszerekkel is ellenőrizhető. Ezek közül az egyik legegyszerűbb elvét mutatja az ábra. Két, belül gyertyával kiöntött és így megnehezített pingpong labdát egymáshoz ragasztjuk, majd dinamométerrel az erőt lassan növelve húzunk a vízszintes talajon. Az erőmérőt akkor olvassuk le, amikor a golyók éppen megcsúsznak. Az erőmérőről leolvasott erő (F) és a két golyó súlyát (G) lemérve a tapadási súrlódási tényezőt kiszámíthatjuk. Érdekes megmutatni, hogy amikor a golyók már egyenesen csúsznak, akkor a mozgás fenntartásához kisebb erő kell, mint amit a megindulás pillanatában mérünk. A csúszási súrlódási erő általában kisebb, mint a tapadási maximuma.



Megjegyzés:

- A feladat nehéz. A kísérlet némi ügyességet igényel, és lényeges eleme, hogy a könyv két fele szimmetrikus legyen a függőleges síkra, mert csak ekkor igaz, hogy a két lapon az erők teljesen azonosak. Aszimmetrikus esetben az egyensúlyi feltételeket mindkét lapra fel kellene írni, és általában nem igaz, hogy mindkét lapon kihasználható a tapadási erő maximuma. Ez pedig azt jelenti, hogy a feladat statikailag határozatlaná válik.
- A két labda összeragasztása megakadályozza a labda gördülését és egyszerűsíti a dinamométer csatlakoztatását.

Leonardo találmánya a kötések nélkül összerakható híd (C)

Az itáliai reneszánsz kiemelkedő alakja Leonardo da Vinci. Nem csupán festőművész, de polihisztor tudós is volt. Egyaránt érdekelték a tudományos eredmények és a hasznosítás gyakorlati lehetőségei is. Számos eszközt, gépet konstruált. 1483-ban írt levelében gerendákból gyorsan összeállítható és szétszedhető hídszerkezetet ajánl Ludovico de Sforza figyelmébe, hangsúlyozva annak hadászati alkalmazhatóságát. A híd elemeinek rögzítéséhez nem szükségesek csavarok, vasalatok, kötőelemek. A híd alapegysége 6 megfelelően egymásra helyezett gerendából áll, amelyek önmagukat tartják. Ha a hat gerendából így összerakott szerkezet fesztávolsága nem elegendő a képzeletbeli szakadék, vagy folyó áthidalására, a híd négy-négy újabb gerenda felhasználásával lépésről lépésre tovább toldható.

A híd modelljének összeállítását a YouTube portálon megtekinthető videó mutatja.

https://www.youtube.com/watch?v=U6dGJiv0C4w&feature=emb_logo

Feladatok:

a) Nézd meg a videót, majd a rendelkezésre álló lécekből állítsd össze magad is a hat elemből álló híd modelljét, majd újabb négy elem felhasználásával bővítsd a szerkezetet nagyobb fesztávolságúra!

b) Mekkora, illetve mitől függ a négy hosszabb (L hosszúságú) és két rövidebb, (keresztmetszetében d vastagságú és h szélességű) gerendából összerakott híd fesztávolsága? (A válaszadáshoz készíts rajzot, és használd a megépített modellt! Vizsgáld meg, milyen változást okoz, ha a keresztgerendák helyét a hosszabb tartógerendákon változtatod, illetve, ha keresztgerendákat rövidebb vagy hosszabb oldalukra fektetve használod fel!)

c) Készíts oldalnézeti vázlatrajzot a hat elemből álló híd egymásra támaszkodó gerendáiról, és rajzold be a tartógerendákra ható erőket a terheletlen és a középén megterhelt hidon! A rajz alapján adj rövid értelmezést a szerkezet stabilitásának fizikai alapjairól!

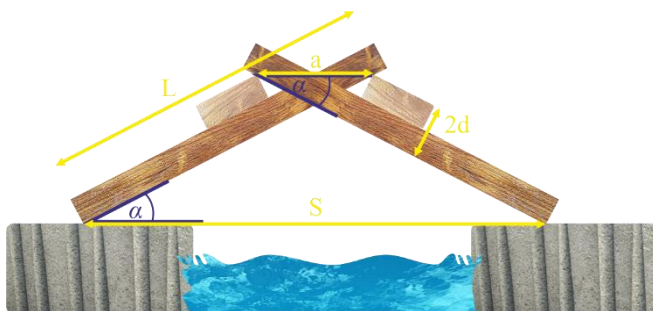
d) Hogyan befolyásolja a szerkezet stabilitását a tartógerendák meredeksége, illetve a külső terhelés nagysága? Mi határozza meg, hogy meddig bővíthető az egyszerű hídszerkezet?

Megoldás

a) A 10 lécből összeállított „bővített” modell fényképét az ábra mutatja.



b) A 6 elemből álló alap-híd oldalnézeti rajza, bejelölve rajta a híd fesztávolságát (S) meghatározó paramétereket, és a velük meghatározható fesztávolságot.

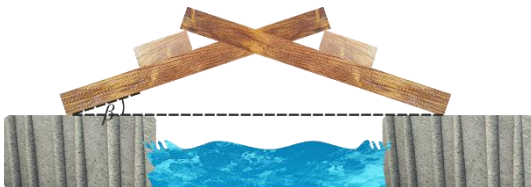


$$a = \frac{2d}{\sin \alpha}$$

$$S = 2 \cdot L \cdot \cos \alpha - a = 2 \cdot \left(L \cdot \cos \alpha - \frac{d}{\sin \alpha} \right)$$

A híd maximális fesztávolságát a tartógerendák L hossza, a gerendák d vastagsága és a hosszú gerendák vízszinteshez viszonyított dőlésszöge (α) határozza meg.

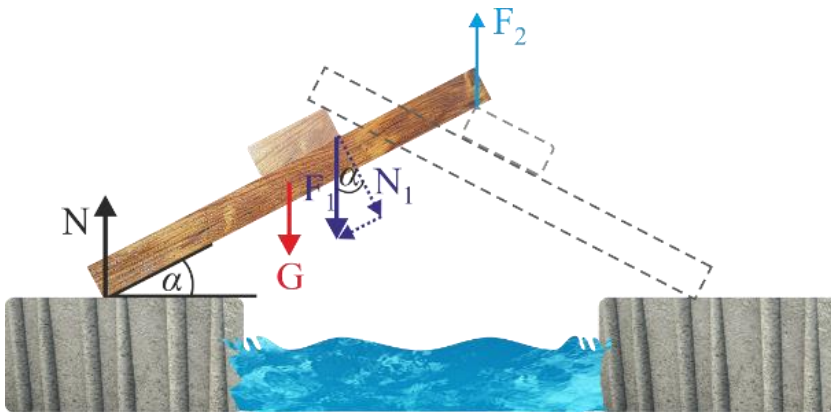
A kisebb fesztávolság esetén a szög a keresztgerendák helyzetétől, illetve vastagságától függ.



Az egyensúly elvi feltétele, hogy a gerendára ható erők és forgatónyomatékok eredője zérus legyen. Mivel a híd gerendái közt nincs igazi kötés, a híd stabilitásának feltétele,

hogy a ferde tartógerenda talajra támaszkodó vége ne csússzon ki, illetve a lejtős gerendán fekvő kereszttrúd ne csússzon le a lejtős felületen.

c) A feladat teljes általánosságban nem oldható meg egyértelműen, mert a gerendák érintkezésénél fellépő tapadási súrlódási erők nem határozhatók meg, és az sem tehető fel, hogy mindig mindenütt a maximális súrlódási erő bekövetkezése jelzi a megcsúszást. A feladat statikailag határozatlan. A statikai határozatlanság megszüntetéséhez a tapasztalaton alapuló feltevésekkel élhetünk. Tapasztalat szerint a híd sima talajon is felépíthető, a szétcsúszás tehát nem a talajon támaszkodó „pillérenél” indul. Számoljunk tehát olyan hídra vonatkozóan, amelynek esetében a pillérekre ható kényszererő merőleges a talajra (azaz ott egyensúly esetén nincsen súrlódás.) Ezután vizsgáljuk meg a híd egyik hosszanti gerendájának egyensúlyát. Egyszerűsítő feltételezésünkéből adódik, hogy a gerendára ható többi erőknek is vertikálisnak kell lennie. A híd baloldali tartógerendájára ható erőket a rajz szemlélteti.



N a talaj tartóereje; G a gerenda súlya; F_1 és F_2 a bal-, illetve a jobboldali keresztgerenda által kifejtett erő; N_1 a nyomóerő normális komponense; S_1 a nyomóerő érintő komponense; F_2 kereszttrúd nyomóereje.

Mivel a keresztgerenda függőleges erőt fejt ki a hosszantira, a hosszanti és a keresztgerenda között a felületek érintősíkjába eső erőnek is fel kell lépni. Ezt esetünkben csak a két gerenda közötti súrlódás hozhatja létre. A híd szétesése akkor indul meg, amikor a két gerenda között az érintő menti erő meghaladja a tapadási súrlódási erő maximumát. Ez az indulás pillanatában azt jelenti, hogy a keresztgerenda lejtőre tett testként elkezd lecsúszni a hosszanti tartó gerendán. Ennek feltételét jól ismerjük:

$$F_1 \sin \alpha \leq \mu_o F_1 \cos \alpha$$

azaz

$$\mu_o \geq \operatorname{tg} \alpha$$

d) A híd terhelése a szerkezet stabilitását növeli, hiszen a terheléssel nő a keresztgerendára ható nyomóerő és így a ferde tartógerenda és a keresztgerenda közt ható súrlódási erő maximuma is. A terhelhetőség természetes határát a gerendák hajlítószilárdsága szabja meg.

A hídszerkezet bővítésével azonban a híd terhelhetősége csökken. Ennek az oka az, hogy a híd-elemek számának növelésével az alsó tartógerendák meredeksége nő. Ha az egyre növekvő α szög tangense eléri a tapadási a gerendákra jellemző súrlódási együttható értékét, a keresztgerendák megcsúsznak. A híd-szerkezet összeomlása mindig a legmeredekebb tartógerendán lévő keresztgerenda lecsúszásával kezdődik meg. Az alábbi fotó a leghosszabb, még stabil modell-szerkezetről készült. A fotón jól látszik a ferde tartógerendák dőlésszögének változása a híd íve mentén.



Lejtőn egyensúlyt tartó teniszlabdák (B)

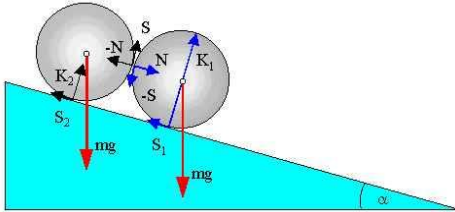
Lejtős vályúba helyezzünk szorosan egymás mellé két labdát! (Érintkezzenek egymással!) Kedvező esetben a két labda nem gurul le.

Értelmezze a jelenséget, és vizsgálja meg, milyen feltételek teljesülése esetén következhet be!



Megoldás

Az ábra alapján írjuk fel a labdákra a mozgásegyenleteket!



$$mgsina - S_1 + N = 0 \quad (1)$$

$$(S_1 - S)R = 0 \quad (2)$$

$$mgsina - S_2 - N = 0 \quad (3)$$

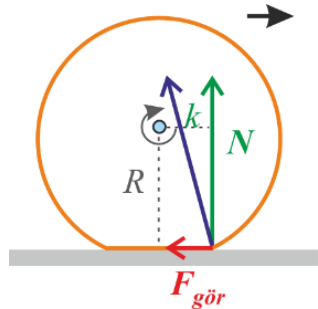
$$(S_2 - S)R = 0 \quad (4)$$

Látszik, tehát, hogy $S_1 = S_2 = S$, azaz mindkét labdára ugyanakkora súrlódási erő hat mind a labdák, mind a lejtő és a labda érintkezési pontjában.

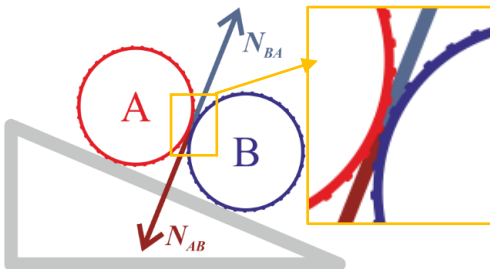
Az (1) és (3) egyenletet összeadva adódik, hogy:

$$S_2 = mgsina$$

amiből $N = 0$ adódik. Ez azt jelentené, hogy a súrlódási erő forgatónyomatékaival nem tart egyensúlyt semmilyen más erő nyomatéka, ami nyilvánvaló ellentmondás.



A feladat jó példa arra, hogy a szokásos idealizált feltételek nem mindig tarthatók fenn. Esetünkben vagy a golyók és a talaj ideálisan egy pontbeli érintkezését kell feladni, vagy a golyók érintkezési pontjában kell nem a szokásos súrlódás típusú érintő irányú erőt feltételezni. Ha a golyó és a talaj érintkezésére feltételezzük, hogy



N_{AB} az A kerék B-re kifejtett ereje,

N_{BA} a B kerék A-ra kifejtett ereje

a talaj vagy a kerék benyomódik és az érintkezés nem ideálisan egyetlen pont, hanem kicsiny felület, akkor a kényszererő hatásvonala már nem megy át a (tömeg)középponton, így nyomatéka ($N \cdot k$) ellentart a súrlódási erő nyomatékának ($F_{gör} \cdot r$) (ábra). (Ez az

elképzelés hasonló a gördülő ellenállás magyarázatára szokásos modellhez.)

A másik lehetőség, ha a golyók érintkezési pontjában figyelembe vesszük, hogy a teniszlabdák felülete szál-as-bolyhos anyaggal van borítva. A bolyhok fogaskerekéhez hasonlóan kapaszkodnak egymásba és a függőleges súrlódási érként értelmezett erőt az egymásra felfekvő szálakon ébredő függőleges nyomóerő hozza létre. Az ábra ezt illusztrálja a golyókra berajzolt kis peremek egymásra támaszkodásával.

Sziklamászó egyensúlya (B)

Petra sziklamászást tanul. Lábával a meredek sziklának támaszkodva a fent rögzített kötélben lógva tartja egyensúlyban magát. Petra tömege 50kg. Rajzold be a fotóra az erővektorokat, és becsüld meg mekkora erővel támaszkodik Petra a sziklára és mekkora erőt fejt ki a kötél!



(A szikla és a cipő közötti súrlódástól a feladat megoldása során tekints el!)

Megoldás

Petra egyensúlyban van. Ennek feltétele az, hogy a rá ható erők és forgatónyomatékok eredője zérus legyen. Petrára három erő hat, a nehézségi erő, a kötél-erő és a támaszkodó lábnál fellépő kényszererő. Az erők vektori összege zérus. A nehézségi erő függőleges irányú, nagysága Petra tömegével számolva $G = mg \approx 500N$, támadáspontja pedig Petra testének tömegközéppontja. (Az emberi test tömegközéppontja a derék vonalában van.) A feszes kötél, kötélirányú ferdén felfelé ható erővel hat. A kötél-erő és a nehézségi erő egy síkban, a test középsíkjában van. A lány két nyújtott lábbal támaszkodik a sziklára, a szikla a lábak vonalában ható ferde tartóerőt fejt ki Petrára, amely két erő eredője a nehézségi erővel és a kötél-erővel azonos síkban, a test szimmetriasíkjába esik. Ismert továbbá, hogy amennyiben a három erő hatásvonala egy ponton megy át, akkor az egyensúlyt tartó erők forgatónyomatéka automatikusan zérus. A fotóra berajzolt erővektorok az egyensúlyi helyzetet magyarázzák, vektori eredőjük zérus. A test tömegközéppontjában felvett derékszögű koordináta-rendszer esetén ez azt jelenti,

hogy a berajzolt két ferde erő (a kötélérő és a szikla lábak által közvetített tartóereje) vízszintes komponense ellenkező irányú és azonos nagyságú, míg a két erő függőleges irányú komponensének összege megegyezik a nehézségi erővel.



A feladat szerint a kötélérőt és Petra szikára kifejtett támasztóerő nagyságát kell megbecsülnünk (ez utóbbi a hatás ellenhatás törvénye miatt megegyezik a szikla által Petrára kifejtett erővel, amit a fotóra berajzoltunk).

Az egyensúlyi feltételnek megfelelően berajzolt vektorok hosszát a fotón vonalzóval

lemérve, a keresett erők nagyságát a nehézségi erő mért hosszához, illetve annak ismert értékéhez ($G \approx 500N$) viszonyíthatjuk.

A fotón végzett mérések alapján a kötélérő nagyságának becsült értéke $K \approx 470 N$, a Petra által a szikára kifejtett nyomóerő $F \approx 275 N$.

Megjegyzés:

- A feladatmegoldásban gyakran használható tétel, hogy amennyiben három egyensúlyt tartó erő hatásvonalja egy ponton megy át, akkor az erők forgatónyomatéka is zérus. A tétel nyilvánvaló, hiszen nyugalom esetén a forgatónyomatékok eredőjének bármely pontra zérusnak kell lenni. Így, ha találunk egyetlen pontot, amelyre a forgatónyomaték eltűnik, akkor bármely pontra eltűnik. Az erők közös pontja pedig ilyen, hiszen mindegyik erő átmegy rajta.

Gyöngyfűzér egyensúlyának vizsgálata (B)

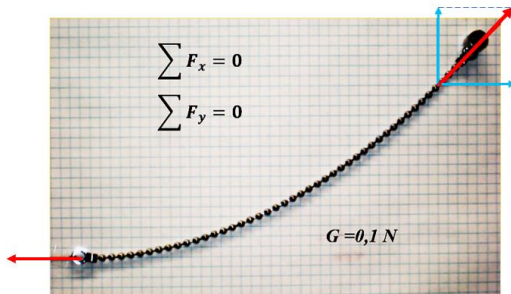
Vékony, hajlékony nyaklánc egyik végét felfüggesztettük, a másik végét cérnaszál segítségével vízszintes irányba húzzuk 0,1 N erővel. Az ábra oldalról, négyzethálós háttér előtt mutatja a mozdulatlanul tartott lánc alakját.



Állapítsd meg az ábra alapján, hogy mekkora a lánc súlya!

Megoldás

Az egyik végén felfüggesztett és a másik végén oldalra húzott lánc jellegzetesen görbült. Vonala a felfüggesztési ponttól meredeken indul és fokozatosan válik egyre laposabbá, hogy a másik végén az erővel ható cérnaszál vízszintes irányához simuljon. A lánc az adott helyzetben egyensúlyban van, ami azt jelzi, hogy a rá ható külső erők eredője zérus. Külső erő a lánc végpontjain ható két erő, továbbá a nehézségi erő, ami minden összekapcsolt láncszemre külön hat, de természetesen vonatkozatható a lánc egészére is, amit a feladat kérdez. A lánc két végén ható külső erőkről vannak információink.



A lánc vízszintesre kihúzott végén ható erő irányát és nagyságát is tudjuk (az utóbbi 0,1 N). A felfüggesztési ponton ható erő nagyságát nem ismerjük, de irányát a lánc induló meredekségéből meg tudjuk állapítani. A lánc háttérében lévő négyzetháló segítségével megállapítható

(1. ábra), hogy a lánc a függőleges iránytól mért 45 fokos szöggel indul, ami a felfüggesztési pontban ható ismeretlen erő iránya is. Mivel tudjuk, hogy a láncszemekre ható nehézségi erők függőleges irányúak, a lánc kihúzott végén ható erő pedig vízszintes, kimondhatjuk, hogy egyensúly esetén a felfüggesztési pontra ható erő függőleges komponensének nagysága megegyezik láncrea ható teljes nehézségi erővel, iránya ellentétes a nehézségi erőével. Az erő vízszintes összetevője a másik végponton ható 0,1 N húzóerővel egyenlő és ellentétes irányú. A fotó tanúsága szerint a lánc 45 fokos szöggel indul, a felfüggesztési pontban ható erő vízszintes és függőleges összetevője megegyező nagyságú, azaz 0,1 N.

A feladat kérdésére adódó válasz tehát: a lánc súlya $G = 0,1 \text{ N}$.

Megjegyzés:

- A felfüggesztett lánc alakja az ún. *katenuoid görbe*, amelyet koszinusz hiperbolikus függvényvel fejezhetünk ki.

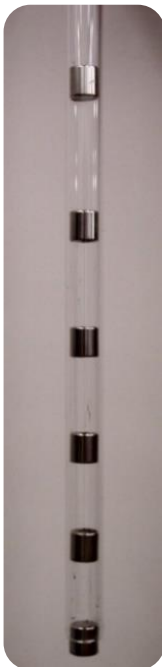
Mágnes dipólusok taszításának távolságfüggése (B)

A neodym mágneshengerek átmérőjénél alig nagyobb belméretű üvegcső egyik végét zárjuk le dugóval, majd a csövet függőlegesen tartva engedjük bele két, azonos pólusával egymás felé fordított mágneset! (Az üvegcső mérete engedje könnyedén mozogni a mágneseket a csőben, de ne engedje, hogy a mágnesek tengelye kibillenjen a függőlegesből) A szembefordított mágnesek között ható taszítóerő nem engedi „lecsni” a felső hengert, ami néhány cm magasságban lebeg az alsó fölött.

Helyezzünk a csőbe további mágneshengereket, ügyelve arra, hogy a szomszédos hengerek rendre taszítsák egymást! – Az egymás fölött lebegő mágnesek sorát a fotója mutatja.

A fotón végzett mérések alapján határozd meg az azonos mágnespólusok közti taszítóerő távolságfüggését!

Megoldás



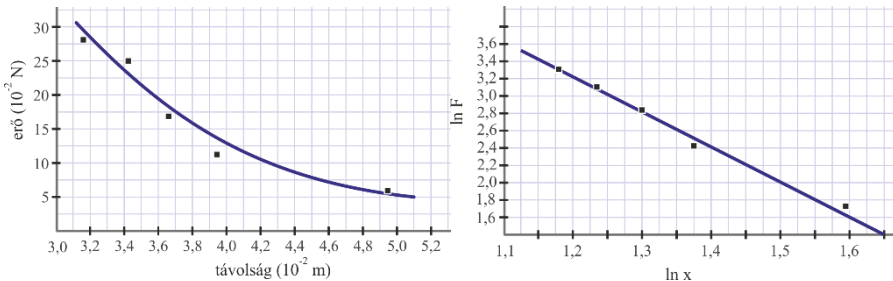
A fotón megfigyelhető, és vonalzóval le is mérhető, hogy a mágnesek közti távolság változik: lentől fölfelé haladva egyre nő. Az egyszerű kísérletet felhasználhatjuk a mágneses erőhatás távolságfüggésének meghatározására. A megoldásban feltételezhetjük fel, hogy valamennyi mágneshenger súlya és mágneszettsége azonos. (Az általunk elvégzett és a fotón is bemutatott kísérletben használt mágneshengerek tömege 5,6 g.)

A megoldás arra alapozható, hogy bármelyik lebegő mágnesre igaz, hogy a közvetlenül fölötte lévő mágnesre kifejtett taszításával az összes fölötte lévő mágnes együttes súlyát egyensúlyozza.

Ezzel közelítésként csak az első szomszédok közti kölcsönhatást vesszük figyelembe, Így a legalsó mágnes taszítóereje h_1 távolságban a fölötte lévő 5 mágneshenger súlyát tartja. (A h_1 távolság a legalsó és a fölötte lévő mágneshenger középpontjának távolsága.) Az második mágnes felett 4 mágnes lebeg, azaz a második mágnesről a harmadikra kifejtett taszítóerő – h_2 távolság mellett – a 4 henger súlyával egyenlő, és így tovább. A mágneses taszítóerő távolságfüggését az A grafikon mutatja. A néhány pontra húzott görbe mutatja, hogy azonos pólusaikkal egymás felé

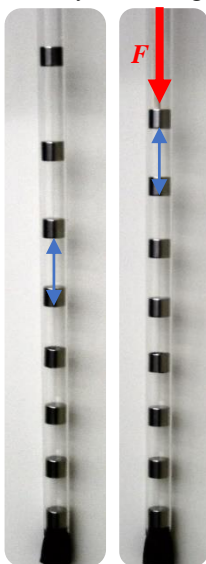
fordított két neodým-mágnes közti erő rohamosan nő a két mágnes közelítésével.

A dipólusok közti kölcsönhatást (elektrosztatikai analógia alapján) hatványfüggvény alakjában kereshetjük. A mért erő- és távolságotok logaritmusát mutatja az alsó grafikon. A pontok negatív dőlésű egyenesre illeszkednek. Az illesztett egyenes meredeksége, azaz az erő távolságfüggésének hatványkitevője jó közelítéssel ≈ -4 .



Lebegő mágnesek megváltozott egyensúlya (B)

A lebegő mágnesekkel végzett kísérlet folytatásaként, a legfelső mágnes \vec{F} vékony hurkapálcával lenyomtuk, aminek hatására a többi mágnes is kimozdult eredeti helyzetéből. A mágnesek szabad elrendeződését az üvegcsőben, és a pálcával összenyomott mágnessort a két fotó mutatja.



Becsüld meg a két fotó alapján azt az F erőt, amivel a második képen a felső mágneset a hurkapálcával nyomjuk!

(Egyetlen mágneshenger tömege 6,8 g.)

Megoldás

A hurkapálcával kifejtett nyomóerő hatására minden mágnes kimozdult eredeti egyensúlyi helyzetéből. Az elmozdulás mértéke alulról felfelé haladva egyre nagyobb. A jelenség oka az, hogy a felső mágnesre ható külső erő a sor minden tagjának átadódik. Bármely egymást követő két mágnes esetén elmondható, hogy a köztük mérhető távolság úgy változik meg az eredeti állapothoz képest, hogy a mágnesek közti taszítóerő a hurkapálca \vec{F} nyomóerejét is kompenzálja. Ennek figyelembevételével az \vec{F} erő a két fotó összehasonlítása

alapján megbecsülhető. Válasszuk ki például az összenyomott mágnessort mutató foton a legfelső két mágnes közti távolságot, és keressük meg az első foton, hogy ez a távolság mely két mágnes távolságához áll a legközelebb! Esetünkben ez a fentről harmadik és negyedik mágnes közötti távolság. Az első foton a negyedik mágnesre ható erő három mágnes henger súlya, Ez megegyezik az összenyomott mágnessor második hengerére ható erővel, ami a legfelső henger súlya és a hurkapálca által kifejtett F nyomóerő összege. Így a $3mg \approx mg + F$ egyenlőségből adódóan a

$$F \approx 2mg = 0,136 \text{ N}$$

Természetesen hasonló eredményre jutunk akkor is, ha az erő meghatározásához az előző feladatban meghatározott erő-távolság függvényt használjuk fel, az összenyomott mágnessor bármely két szomszédos távolságát lemérjük és a grafikonon leolvassuk az e távolsághoz tartozó erő értékét.

Mérleghinta a játszótéren (B)

Kati és Klári ikrek, úgy hasonlítanak egymásra, mint két tojás. Természetesen tömegük is egyformán 36 kg. A mérleghintára úgy ültek fel, hogy nagymamájukat kiegyensúlyozzák. A fotó alapján határozd meg a nagymama súlyát!

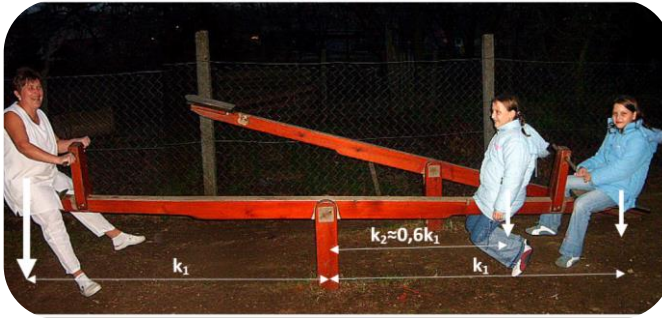


foto: Csépany Tamara

Megoldás

A mérleghinta kétkarú emelő. Egyensúlya azt jelzi, hogy a vízszintes rúd két oldalán ható erők forgatónyomatéka egyenlő. A forgatónyomatékok meghatározásához szükségünk van a ható erőkre, és hatásvonaluknak a forgástengelytől mért távolságára (erőkarok). A két kislány egyformán $mg = 360 \text{ N}$ súlyú, a nagymama súlya ($M \cdot g$) ismeretlen. Az erőkarok nagyságát azonban a feladat nem adja meg. A feladat megoldását az teszi lehetővé, hogy a forgatónyomatékok egyensúlyát leíró egyenletben elegendő az erőkarok arányát figyelembe venni, ez pedig a foton

vonalzóval végzett mérésekkel jó közelítéssel meghatározható. A súlyerők hatásvonalának tengelytől mért távolságát a fotóra berajzoltuk és vonalzóval lemértük.



A fotó alapján feltehető, hogy a nagymama és a második kislány hasonlóan a mérleghinta végén ül. Forgástengelytől mért távolságukat egyformán k_1 jelöli. A forgástengelyhez közelebb ülő kislány fotón mért távolsága k_2 . A fotón mért hosszúságértékeket felhasználva $k_2 \approx 0,6 k_1$.

E jelölésekkel a forgatónyomatékok egyensúlyát kifejező egyenlet:

$$Mg \cdot k_1 = mg \cdot k_1 + mg \cdot 0,6 \cdot k_1$$

A nagymama súlya tehát: $Mg = 1,6 mg \approx 576 \text{ N}$

Megjegyzés:

- Érdemes a diákokkal megbeszélni, hogy a feladat megoldásához azért nem szükséges az erők eredőjének eltűnését is felhasználni, mert az egyensúlyt a tengelypontban fellépő erő biztosítja, amelynek forgatónyomatéka zérus.

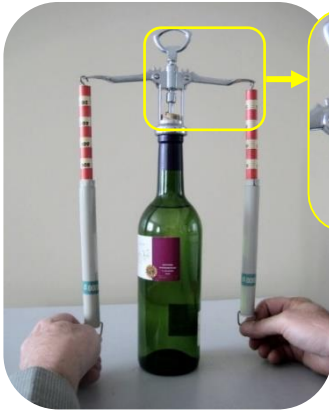
Dugóhúzó, mint kétkarú emelő (B)

A fotó a helyszínen bemutatott kétkaros dugóhúzót mutatja működés közben. A két karon ható erőt rugós erőmérő méri, az erőmérő méréshatára 10 N, egy-egy színezet skálatarományra 1 N, a piros és fehér sávok magassága 1 cm.

A fotó alapján becsüld meg a dugó és az üveg közt ébredő súrlódási erőt!

Megoldás

A bemutatott dugóhúzó megduplázott kétkarú emelő. A fotó azt a pillanatot mutatja, amikor az éppen vízszintesen álló oldalsó karokra ható erők, (amit a rugós erőmérők fejtenek ki), egyenletes lassú mozgással emelik felfelé a szoruló dugót. A dugóhúzó mindkét karja kétkarú emelőként működik. Az erőkar a dinamométer csatlakozási pontjától a kinagyított képen jól látható forgástengelyig tart. A teherkar a tengelyre rögzített „fogaskerék” sugara. A fogaskerék a dugóhúzó középső rúdján lévő fogaslécbe kapaszkodva emeli a dugóba behajtott csavart szárát. A dugó nekifeszül a borosüveg csőszerű falának, ezért a dugó kihúzását a súrlódási erő akadályozza. A dugóhúzó két emelőjének teherkarjára a súrlódási erő hat. A dugóhúzó egyensúlyi működése esetén az oldalsó emelők erőkarjához (k_1) kapcsolt dinamométerek lefelé



ható húzóerejének (F) forgatónyomatéka tart egyensúlyt a súrlódási erőnek (F_S) a teherkarokon (k_2) ébredő nyomatékával.

$$2F \cdot k_1 = 2 \cdot \frac{F_S}{2} k_2$$

A fotóról leolvasható, hogy a rugós erőmérők által kifejtett erő $F = 9N$, továbbá tudjuk, hogy az erőmérő piros és fehér sávjainak valós szélessége 1 cm. Ez utóbbi lehetővé teszi, hogy a kinagyított fotó-részleten vonalzóval végzett méréssel meghatározzuk a dugóhúzó emelőinek valós

erőkarját és teherkarját. Az elvégzett mérések alapján számított valós méretek $k_1 \approx 6,5 \text{ cm}$, $k_2 \approx 1,0 \text{ cm}$.

A fotón végzett mérések eredményét a fenti egyenletbe beírva, a súrlódási erő értéke

$$F_S = \frac{2F \cdot k_1}{k_2} \approx 117 \text{ N}$$

Megjegyzés:

- A kísérletet egyszer már kihúzott és az üvegbe visszadugott és kipróbáltan könnyen kihúzható dugóval érdemes bemutatni, mert egyébként kellemetlen meglepetés érhet bennünket.

Érdemes megbeszélni a diákokkal, hogy a súrlódási erő természetesen a dugó palástján eloszló felületi erő. A dugóra felírt egyensúlyi egyenlet azonban mutatja, hogy a teherkarokon ébredő erő a súrlódási erő és a nehézségi erő összegének felével

egyenlő. A dugó általában könnyű parafából készül, így súlya a súrlódási erőhöz képest elhanyagolható.

Síkidom tömegközéppontjának meghatározása számítással és kísérlettel (B)

Az a élhosszúságú d vastagságú lemez sarkából kivágunk – a rajzon látható módon – egy $\frac{a}{2}$ oldalú négyzetet darabot.

Határozd meg az így kialakult idom tömegközéppontját számítással, majd kísérleti módszerrel is!



Megoldás

A kivágott négyzet területe a teljes négyzet területének éppen negyed része. Mivel a kartonlap vastagsága mindenütt azonos, a kartonpapír tetszőleges darabjának tömege arányos a lap területével. Tekintsük egységnyinek a kivágott darab tömegét. A maradék lap tömege ekkor 3.

Egészítsük ki a lapot a kivágott negyed darabbal teljes négyzetté. A teljes négyzet tömegközéppontja szimmetria okból a négyzet O középpontjában van. A kiegészítő négyzeté hasonló okból saját P_1 középpontjába esik. A háromszoros területű egyenlőszárú L alakú síkidom P_2 tömegközéppontja a szimmetria miatt az OP_1 egyenesre, a négyzetek átlójára esik. Tudjuk, hogy az $\overline{OP_1}$ szakasz hossza teljes négyzet $d = a\sqrt{2}$ hosszúságú átlójának negyede.

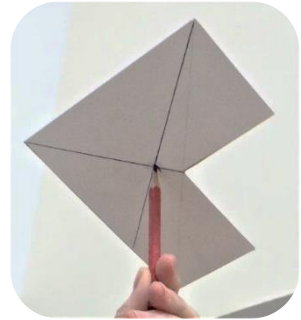
Jelöljük x -szel az OP_2 távolságot, azaz az L alakú test tömegközéppontjának a teljes négyzet középpontjától mért távolságát.

A kis négyzet és az L alakú test tömegét rendre a P_1 és P_2 pontban egyesítve, a két tömegpontból álló rendszer tömegközéppontjának az O pontba kell esni. Így, fennáll, hogy

$3x = \frac{d}{4}$, azaz $x = \frac{d}{12}$, vagyis az L alakú idom tömegközéppontja az O ponttól a négyzet átlójának $\frac{1}{12}$ -ed résznyi távolságban az átló mentén.

Kísérleti ellenőrzés:

Függesszük fel cérnaszálon az L alakú lapot tetszőleges A pontjánál fogva és jelöljük be a lapon a felfüggesztő szál egyenesét. Végezzük el ezt egy másik C pontbeli felfüggesztéssel is. A két egyenes a lap két súlyvonala, metszéspontjuk megadja a tömegközéppont helyét. A számított és a kísérlettel meghatározott tömegközéppont megegyezik.



Megjegyzés:

- Természetesen a lapot tetszőleges helyen felfüggeszthetjük, a fonal egyenesé kijelöli az idom egy súlyvonalát. Két súlyvonal metszéspontja mindig ugyanazt a pontot, a test súlypontját jelöli ki.
- Ha a lap szimmetriáját kihasználjuk, azaz észrevesszük, hogy a tömegközéppontnak az OP_1 egyenesére kell esni, akkor elegendő egyetlen felfüggesztett helyzetben kijelölni a súlyvonalat. A tömegközéppont a súlyvonal és az OP_1 egyenes metszéspontja lesz.
- Eljárásunkat tovább ellenőrizhetjük úgy is, ha a lapot kijelölt tömegközéppontjában a függőlegesen tartott hegyes ceruzára helyezzük. A tömegközéppontjában alátámasztott lap a ceruza hegyén egyensúlyban marad.

A különböző pontbeli felfüggesztéseket vizsgálva megbeszélhetjük a labilis, stabilis és semleges egyensúlyi helyzet kérdéskörét.

HIDRO- ÉS AEROSZTATIKA

A gimnáziumban, korábban, a hidrosztatikai feladatok a „szamarak hídjának” számítottak, hiszen a viszonylag könnyű témakör a tantervekben nagy súllyal szerepelt. A hidrosztatika mára gyakorlatilag az általános iskola tananyagává vált, így mára a korábban egyszerű hidrosztatikai feladatok sem számítanak könnyűnek. A hidrosztatika rengeteg jelenséget kínál bemutatásra és mérésre, ezek közül választottunk ki néhányat, ismét előre bocsátva, hogy a feladatok minták, az eszközparkhoz, a diákok felkészültségéhez igazítva átfogalmazhatók, egyszerűsíthetők, nehezíthetők.

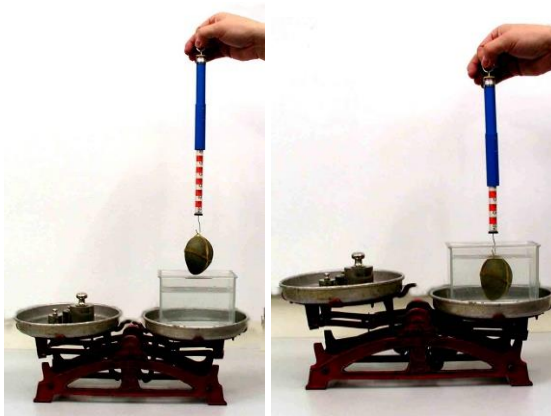
A vízbe merülő testre ható felhajtóerő (ellenerejének) meghatározása (A-B)

Vízzel teli kádat konyhamérlegen kiegyensúlyoztunk.

Hogyan változik meg a mérleg egyensúlya, ha a rugós erőmérőre akasztott követ belelógatjuk a vízbe?

Mekkora súllyal hozhatnánk újra egyensúlyi helyzetbe a mérleget, melyik serpenyőbe helyeznéd a súlyt?

(A vízbe lógatott kő továbbra is az erőmérőn lóg, nem ér a kád falához.)



Megoldás

A kő vízbe merülésekor a kádban megemelkedik a folyadékszint, megnő a hidrosztatikai nyomás és az edény aljára ható nyomóerő. Ez utóbbi hatására a mérleg vizeskádát tartó serpenyője lesüllyed.

A jelenséget a második fényképfelvétel mutatja.

Az egyensúly helyreállítására a bal oldali tányérban lévő tárasúlyokhoz kell még további súlyt helyeznünk. A szükséges súly nagysága a kőre ható felhajtóerő nagyságával egyenlő. Értéke megegyezik a rugós erőmérőkön leolvasható erők különbségével.

Megjegyzés:

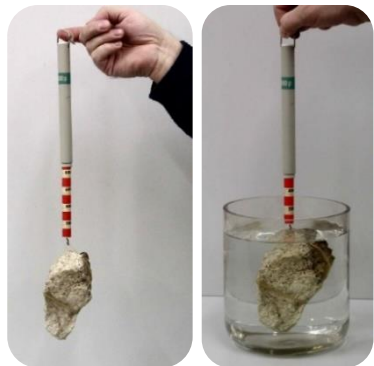
- Természetesen a kísérlet modern digitális konyhamérleggel is elvégezhető, de kevésbé látványos.

Kődarab sűrűségének egyszerű meghatározása rugós erőmérővel (A)

Kődarab súlyát levegőben, majd vízbe merítve is megmérve, meghatározható a kő sűrűsége. A bemutatott fényképfelvételek a kísérletről készültek.

A fotóról leolvasott mérési adatok alapján számítsd ki a kő sűrűségét!

(A képeken látható rugós erőmérő 10 N felső erőhatárig tud mérni – ez felel meg az 1000 jelzésértéknek. Az egymást követő piros és fehér sávok 1 N erőintervallumot jelölnek.)



Megoldás

A kő sűrűségének meghatározására szükségünk van a kő tömegére és a térfogatára.

$$\rho_K = \frac{m_K}{V_K}$$

A kő levegőben mért súlya $F_1 = m_K g = 8,2\text{N}$, innen a kő tömege $m_K = 0,82\text{kg}$.

A követ vízbe lógatva az erőmérő $F_2 = 5\text{ N}$ erőt mutat. A mért erő a kő levegőben mért súlyának és a víz által kifejtett felhajtóerőnek a különbsége

$$F_2 = m_K g - V_K \rho_{\text{víz}} g$$

ahol V_K a kő térfogata, $\rho_{\text{víz}}$ a víz sűrűsége ($\rho_{\text{víz}} = 1000 \text{ kg/m}^3$).

Innen, az ismert adatok és a mért erőértékek felhasználásával a kő térfogata:

$$V_K = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

A kő keresett sűrűsége:

$$\rho_K = 2500 \text{ kg/m}^3$$

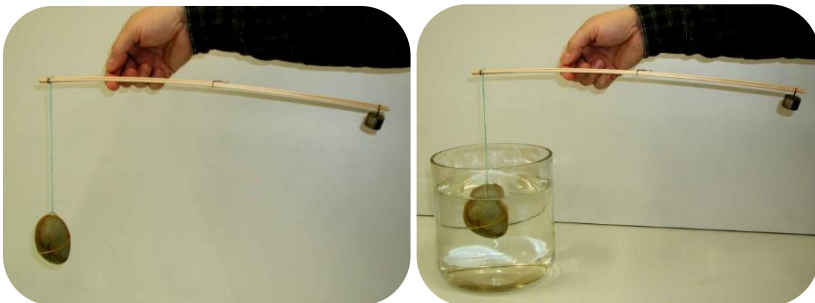
Kavics sűrűségének meghatározása (A)

Az alábbi két fotó egyszerű kísérlet két fázisát mutatja. A 35 cm hosszú vékony fapálca egyik végére nagyobb kavicsot függesztettünk, a másik végére $m=50 \text{ g}$ tömeget rögzítettünk.

Az első kép azt mutatja, hogy a pálca alkalmas helyén egyetlen újjal alátámasztva is egyensúlyban marad a rendszer.

Ez az egyensúly azonban megbomlik, ha a kavicsot egy pohár vízbe merítjük figyelve arra, hogy a kavicsot ellepje a víz, de a kő sehol ne érjen a pohárhoz. A megbomlott egyensúly úgy állítható helyre, ha ujjunkkal más feltámasztási helyet keresünk. Ezt a helyzetet mutatja a második fotó.

A fotókon vonalzóval végzett mérések alapján határozd meg a kavics sűrűségét!



Megoldás

A kavics ρ_K sűrűsége a tömegnek (m_K) és a térfogatnak (V_K) ismeretében határozható meg

$$\rho_K = \frac{m_K}{V_K}$$

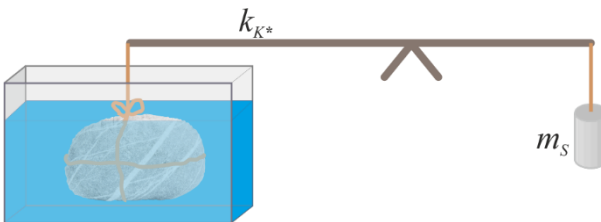
A kavics tömegének mérésére a hurkapálca-rúd használható fel mérlegként. A rúd egyik végére az ismeretlen m_K tömegű kavicsot, a másik végére az $m_S = 50\text{g}$ tömegű súlyt kell felakasztani, majd próbálgatással megkeresni, hogy hol kell a rudat alátámasztani (illetve felfüggeszteni), hogy a „mérleg” egyensúlyban legyen. A kavics és a súly forgástengelytől való távolsága (k_K és k_S) vonalzóval megmérhető, a keresett tömeg a forgatónyomatékok egyenlősége alapján kiszámítható.

$$k_K m_K = k_S m_S$$

$$m_K = \frac{k_S m_S}{k_K}$$



A kavics térfogata meghatározható, ha a korábbi mérleg-összeállítást használva a kavicsot a pohár vízbe lógatjuk. A kavics oldalán ekkor a mérlegkart a kavics súlyának és a vízben ható felhajtóerőnek a különbsége húzza. A mérleg egyensúlyát a forgástengely helyének változtatásával állíthatjuk helyre. A karok távolságát ismét lemérve, felírható az egyensúlyt jellemző egyenlet, amiből a kavics térfogata kifejezhető.



$$k_K^* (m_K - V_K \rho_{\text{víz}}) = k_S^* m_S$$

$$V_K = \left(\frac{k_S}{k_K} - \frac{k_S^*}{k_K^*} \right) \frac{m_S}{\rho_{\text{víz}}}$$

A kavics keresett sűrűsége tehát

$$\rho_K = \rho_{\text{víz}} \left(1 - \frac{k_S k_K^*}{k_K k_S^*} \right)$$

Megjegyzés:

- A feladatot az 1995. évi Károly Ireneusz Verseny 12-13 éves korcsoportjában tűztük ki. A versenyzők közül többen kifogástalanul megoldották a feladatot, megoldásuk lényegében az ismertett gondolatmenetet követte. Mivel a gyerekek gondolkodása ebben az életkorban konkrét, ezért a legjobbak sem a fenti általános számítással dolgoztak, hanem a részeredményeket lépésenként kiszámították. Az általános megoldásból látszik, hogy a tárasúly értékének ismeretére a feladat megoldásához nincs szükség, a feladat kitűzésekor mégis megadtuk ennek értékét azért, hogy a diákok lépésről lépésre haladva elvégezhesék a számításokat.

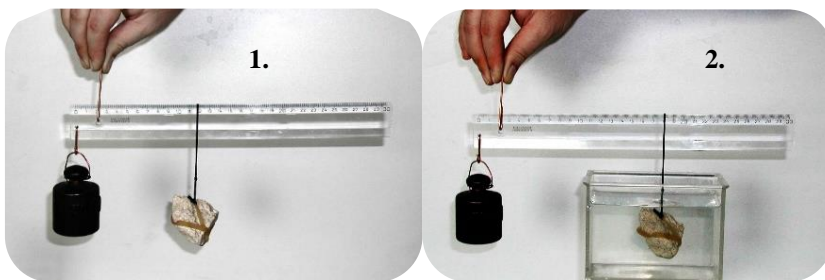
Sűrűségmérés házi készítésű Mohr-Westphal mérleggel (B)

A Mohr-Westphal-mérleg szilárd anyagok sűrűségének meghatározására szolgáló műszer. A melléklet fénykép és vázlatrajz egyszerű, házilag készített változatát mutatja. Az eszköz lényegében egy aszimmetrikusan felfüggesztett lécszerű (műanyagvonalzó), ami akkor vízszintes, ha a rá ható forgatónyomatékok egyensúlyt tartanak. A mérlegrúd rövidebb karján nagy tömegű tárasúly lóg, a hosszabbik oldalra függesztjük a vizsgálandó testet, majd a függesztési pont változtatásával megkeressük a mérleg egyensúlyi helyzetét. A függesztési pont távolságát (a) a forgástengelytől lemérjük. Ezután a vizsgálandó testet vízbe merítjük, majd a felfüggesztési pont helyének változtatásával helyreállítjuk a mérleg egyensúlyát. Ismét meghatározzuk a forgástengelytől mért távolságot (b). A test sűrűsége a mért két távolságból meghatározható.

a) Add meg a sűrűség kiszámítására alkalmas általános képletet (amelybe behelyettesítve a mérési adatokat közvetlenül kiszámítható a sűrűség)!

b) Mekkora a lefotózott kísérletben a kő sűrűsége?

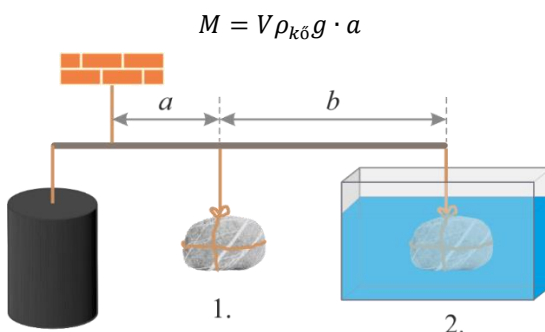
c) Milyen sűrűség értékhatárok közt használható az eszköz?



Megoldás

a) A sűrűség kiszámítására alkalmas képlet megadásához a mérés egyes lépéseinek értelmezésével juthatunk el.

Az aszimmetrikusan felfüggesztett mérleg-rúd egyensúlyának feltétele, amikor a kő a levegőben van:



Az egyenletben M a táratömeg súlyából származó nyomatékot jelenti, V a mérendő kő térfogata, $\rho_{kő}$ a kő anyagának sűrűsége, a a kő felfüggesztési helyének távolsága a mérleg forgástengelyétől.

Az egyensúly feltétele, amikor a kő vízbe merül:

$$M = (a + b)(V\rho_{kő}g - V\rho_{víz}g)$$

ahol $(a+b)$ a vízbe merített kő felfüggesztési pontjának forgástengelytől mért távolsága (lásd az ábrát!), $\rho_{víz}$ a víz sűrűsége. A két egyenlet egybevetésével kapott kifejezésből a kő térfogata kiesik, és $\rho_{kő}$ értéke kifejezhető. A feladat által kért képlet, amiből a kő sűrűsége a mért adatok segítségével, a víz sűrűségének ismeretében kiszámítható:

$$\rho_{kő} = \frac{(a + b)\rho_{víz}}{b}$$

b) A fotókról leolvasható a és b értéke

$$a = 9,6 \text{ cm}, b = 16 \text{ cm}$$

A mért adatokat felhasználva a kő sűrűsége:

$$\rho_{\text{kő}} = 1,6 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

c) Az egyszerű sűrűségmérővel a víz sűrűségénél nagyobb sűrűségek mérhetők. A mérlegrúd hossza és beosztásának finomsága határozza be a mérhető sűrűségtartomány felső határát. Esetünkben a mérleg mm-beosztású műanyagvonalzóból készült. A leolvasható legkisebb távolság tehát $a = 1 \text{ mm}$, a legnagyobb ($a + b$) távolság a vonalzó hossza a forgástengelytől a végéig (kb. 25 cm). A legnagyobb mérhető sűrűség így a víz sűrűségének 250-szerese.

Vízbe lógatott, végén felfüggesztett fa rúd sűrűsége (B)



Helyszínen elvégzett jelenségbemutató kísérlet a következő:

Egyik végén vékony dróthurokra kötött zsinegen függő fa rudacskát óvatosan vízbe eresztünk. Eleinte a rúd függőlegesen lógva merül egyre mélyebben a vízbe, majd bizonyos mélységet elérve elbillen és ferde helyzetben kerül újra egyensúlyba.

Ha a fonalat tovább engedjük, a rudacska állásszöge laposabb lesz, de a vízbe merülő rész hossza nem változik. A tanulók saját mobiltelefonjukkal készítik el az ábrán bemutatott fotóhoz hasonló felvételt a rúd egyensúlyi helyzetéről, majd saját fotójuk alapján kell megoldaniuk az alábbi feladatot.

Az elvégzett kísérlet megfigyelése, illetve a kísérletről készített fotó alapján határozd meg a rúd vízre vonatkoztatott relatív sűrűségét!

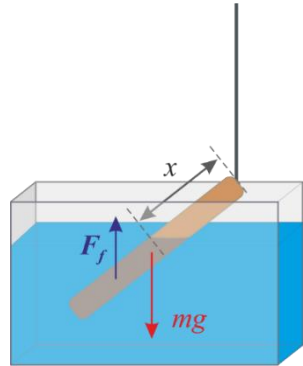
Megoldás

A vízbe eresztve a rudacska bizonyos mélységben kifordul függőleges helyzetéből. Annál laposabb ferde szögben lesz nyugalomban, minél lejjebb eresztjük a fonalat. A fotó adott állásúg esetén mutatja az egyensúlyi helyzetet.

A rúdra ható mg nehézségi erő és az F felhajtóerő forgatónyomatéka (vonatkoztatási pont a rúd fonállal tartott vége) épp egyensúlyt tart:

$$mg \cdot \frac{l}{2} \sin \alpha = F \cdot \left(x + \frac{l-x}{2} \right) \sin \alpha$$

ahol x a rúd szárazon maradt szakaszát, α a rúd függőlegessel bezárt szögét jelenti. A rúd tömegét és a felhajtóerőt kifejezhetjük a rúd ismertnek feltételezett A keresztmetszetével és ρ_{fa} sűrűségével, illetve a víz $\rho_{víz}$ sűrűségével. Így az egyensúlyi egyenlet:



$$A l \rho_{fa} \cdot \frac{l}{2} = A (l-x) \rho_{víz} \cdot \left(\frac{l+x}{2} \right)$$

A matematikai átalakítások és egyszerűsítések után a fa rudacska vízre vonatkoztatott sűrűsége

$$\frac{\rho_{fa}}{\rho_{víz}} = \frac{l^2 - x^2}{l^2}$$

A bemutatott fényképről leolvassva az adatokat a fa vízre vonatkoztatott relatív sűrűsége $0,75 \text{ kg/dm}^3$.

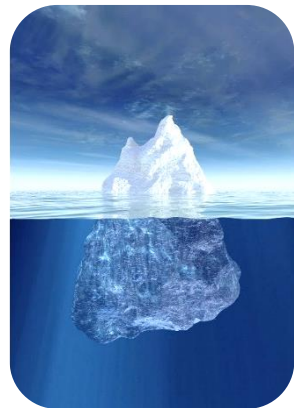
A jéghegy csúcsa (B)

A sarkkörök közelében a hajósok gyakran látnak a tengerben úszó jéghegyeket. A jéghegyek anyaga fagyott édesvíz.

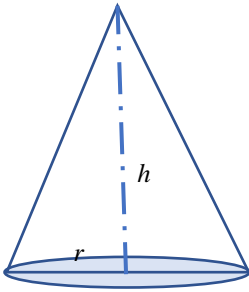
a) Végezz számítást, arra vonatkozóan, hogy a jéghegy egészének hányad része emelkedik a tenger szintje fölé!

Adatok: a sós tengervíz sűrűsége: $\rho_{svíz} = 1024 \text{ kg/m}^3$, az édesvíz sűrűsége: $\rho_{évíz} = 1000 \text{ kg/m}^3$, az édesvízből képződött jég sűrűsége: $\rho_j = 971 \text{ kg/m}^3$.

b) A mellékelt bravúros fotót speciális kamerával készítették, így a jéghegy víz alatti és víz feletti része is látható. A jéghegy alakja – kisebb felületi egyenetlenségektől eltekintve, körkúpra emlékeztet.



E hasonlóság alapján végezz közelítő számítást arra, hogy a fotón látható jéghegy térfogatának hányad része lóg ki a vízből!



$$V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h$$

(A jéghegy egészét és a vízből kiemelkedő részét tekintsd geometriailag hasonló kúpoknak! A képen végezz méréseket vonalzóval, és ezek felhasználásával add meg a jéghegy vízből kilógó résznek a jéghegy teljes térfogatához viszonyított arányát!)

A fotó alapján végzett becslés eredményét hasonlítsd össze a feladat a) részének eredményével!

Megoldás

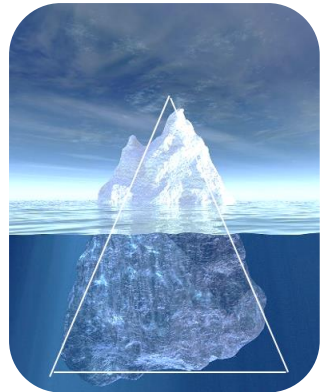
a) Jelölje a jéghegy teljes térfogatát V_{jhegy} , a jéghegy vízszint feletti térfogatát V_1 , a jéghegy vízszint alatti térfogatát ($V_{\text{jhegy}} - V_1$)

A jéghegy úszik:

$$V_{\text{jhegy}} \rho_j = (V_{\text{jhegy}} - V_1) \cdot \rho_{\text{svíz}} \quad \text{innen:}$$

$$\frac{V_1}{V_{\text{jhegy}}} = 1 - \frac{\rho_{\text{jég}}}{\rho_{\text{svíz}}} \approx 1 - 0,946 \approx 0,05$$

b) A feladatlapon mérve: $2R \sim 3\text{cm}$, $H \sim 3,7\text{cm}$, $V_j \sim 8,7\text{cm}^3$, $2r \sim 1,3\text{cm}$, $h \sim 1,7\text{cm}$, $V_1 \sim 0,75\text{cm}^3$



$$\frac{V_1}{V_j} = \frac{0,75}{8,7} \approx 0,086$$

Megjegyzés:

- A feladat lényegéből adódóan a hosszmerések mértékegysége nem játszik szerepet az arányok megállapításában.

Cola cukortartalmának meghatározása Arkhimédész törvénye alapján (B)

A fotó érdekes kísérletről készült. Két egyforma méretű (13 cm magasságú) Cola-ás dobozt felbontatlanul, függőlegesen tartva óvatosan vizeskádba merítettünk. Az egyik dobozban 2,5 dl hagyományos „Coca-Cola” volt, a másikban ugyanennyi „Coca-Cola light”. Mindkét doboz függőleges helyzetét megtartva úszott a vízben. A hagyományos Coca-Cola a dobozának fedőlapjáig elmerült, a Cola light dobozából egy rész kilógott a vízből. A reklámok szerint a két ital a cukortartamában különbözik, a Cola light nem tartalmaz cukrot.



A fotó alapján határozd meg, hogy mennyi a 2,5 dl Cola cukortartalma!

Megoldás

A fénykép egyértelműen mutatja, hogy a *Coca-Cola* nehezebb, mint az azonos dobozban lévő *Cola light*, hiszen a *Coca-Cola* felszínig merül el a vízben (az ital és a doboz átlagsűrűsége a víz sűrűségével azonos), míg a *Cola light* dobozának egy része kiemelkedik a vízből.

Elfogadva az állítást, hogy a két ital csak cukortartalmában különbözik, Arkhimédész törvényére hivatkozva azt mondhatjuk, hogy a 2,5 dl-nyi hagyományos *Coca-Cola* annyi cukrot tartalmaz, amennyi a *Cola light* dobozából a vízből kilógó rész térfogatára jutó felhajtóerő a vízben, azaz

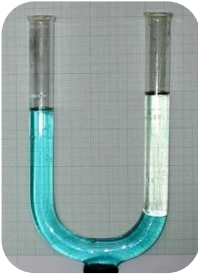
$$m_{\text{cukor}} \cdot g = \rho_{\text{víz}} \cdot \Delta V \cdot g$$

A *Cola light*-doboz vízből kilógó ΔV térfogatát a fotón vonalzóval elvégezhető hosszúságmérések alapján határozhatjuk meg, figyelembe véve, hogy a 2,5 dl-es colás-dobozok magassága 13 cm.

A mérések szerint a dobozból a víz felszíne fölé emelkedő henger magassága $\Delta h \approx 1,1$ cm, a doboz sugara $R \approx 2,6$ cm. A vízből kiemelkedő térfogat $\Delta V = R^2 \pi \cdot \Delta h \approx 22,1$ cm³. A 2,5 dl hagyományos *Coca-Cola* cukortartalma:

$$m_{\text{cukor}} = \rho_{\text{víz}} \cdot \Delta V \approx 23,3 \text{ g}$$

Nem elegyedő folyadékok relatív sűrűségének meghatározása (A)



U-alakú csőbe kék festékkel színezett vizet öntöttünk, majd a cső jobb oldali szárába, a víz fölé, a vízzel nem keveredő folyadékot öntöttünk. A folyadékszintek állását az edény két szárában a foto mutatja.

Határozd meg a vízre öntött folyadék sűrűségét!

(A víz sűrűsége 1000 kg/m^3)

Megoldás

Vizsgáljuk a hidrosztatikai egyensúlyt a víz és a ráöntött folyadék határán! A határfelületre a felette lévő folyadékoszlop

$$p_1 = h_1 \rho_F g$$

nyomást gyakorol. A határfelület nyugalomban van, mert a cső másik szárában a határréteg magassága fölött áll a víz és ennek p_2 hidrosztatikai nyomása egyensúlyt tart a p_1 nyomással. Azaz

$$p_1 = p_2$$

$$h_1 \rho_F g = h_2 \rho_{\text{víz}} g$$

Innen a folyadék keresett sűrűségét kifejezve kapjuk:

$$\rho_F = \frac{h_2 \rho_{\text{víz}}}{h_1}$$

A h_1 és h_2 értéke a fotón a cső mögé helyezett mm-papír osztásvonalairól leolvasható, ($h_1 = 6,5 \text{ cm}$, $h_2 = 5,7 \text{ cm}$).

Az ismeretlen folyadék sűrűsége: $\rho_F = 877 \text{ kg/m}^3$

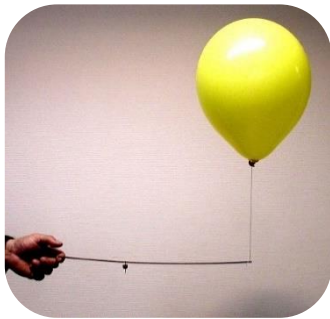
Mit bír el a héliummal töltött léggömb (B)

A héliumgázzal töltött játékléggömb felfelé száll.

Becsüld meg mekkora súlyú testet tud felemelni a kb. 30 cm átmérőjű léggömb!

A számítás eredményét ellenőrizd mérőkísérlettel!

A mérést a fotó mutatja. A léggömb a hurkapálca egyik végét emeli, a pálca másik vége ujjunkra támaszkodik. A pálcát kicsiny kis súly megfelelő tologatásával tudjuk vízszintes helyzetben kiegyensúlyozni.



(A fotón látható mérésnél használt gumiballon tömege üresen 3,6 g a hurkapálca hossza 45cm, tömege 2,8 g, az egyensúly beállítására használt kis súly tömege 10 g.)

Megoldás

A feladatban megadott adatok szerint a léggömb 30 cm átmérőjű gömb. A ballonra ható felhajtóerőt a $F_f = V\rho_{lev}g$ formulából számoljuk, ahol a levegő sűrűsége $\rho_{lev} = 1,2 \frac{kg}{m^3}$. Az adatokat felhasználva a felhajtóerő

$$F_f \approx 0,17N$$

A ballon emelőerejét megkapjuk, ha a felhajtóerőből kivonjuk a ballon gumi anyagának és a benne lévő töltőgáznak a súlyát. A gumi tömege 3,6 g, a He atomsúlya mintegy hetede a levegő mólsúlyának (töltőgáz kissé nagyobb nyomása elhanyagolható). A léggömb emelőereje tehát

$$F_e \approx F_f - m_Gg - \frac{F_f}{7} = 0,12N$$

Mérés

A fényképen látható, hogy a léggömb emelő ereje egyensúlyban tartja a kis súllyal is megterhelt pálcát. Az l hosszúságú pálca egykarú emelőnek tekinthető. Forgástengelye a feltámasztott pálcavég. A léggömb emelőereje által kifejtett nyomatékkal a pálca saját súlyának és a forgástengelytől alkalmas távolságra helyezett terhelés súlyának nyomaték-összege tart egyensúlyt.

$$F_e^* \cdot l = mg \frac{l}{2} + Mgs$$

ahol F_e^* a mérhető emelőerő, m a pálca tömege, M a terhelő súly tömege, s a terhelő súly forgástengelytől mért távolsága.

A tömeg adatokat a feladat közli, a többi szükséges adatot a fotón vonalzóval elvégezhető hosszúságmérésekből határozhatjuk meg. A fényképen mért hosszúságértékek a pálca megadott hossza (45 cm) alapján számíthatók át a valódi értékekre. A fotón látható léggömb nem gömb alakú, a pontosabb eredmény érdekében a tekintsük forgásellipszoidnak, és jellemző méreteit határozzuk meg mérésekkel!

A megadott tömegértékek és a méréssel kapott hosszúságadatok felhasználásával a léggömb emelőereje a fenti egyensúlyi egyenletből meghatározható.

A számolás végeredményeként az emelőerő értéke:

$$F_e^* = 0,095N$$

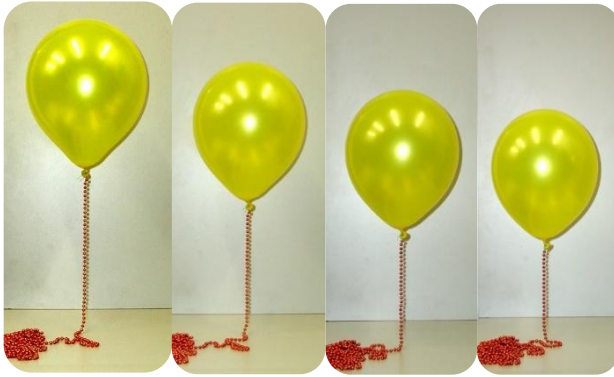
Lassan leeresztő gázzal töltött játékléggömb (B)

A héliumgázzal (He) töltött léggömb könnyebb a levegőnél, ha elengedjük felszáll. A fotósorozaton héliumgázzal töltött játékléggömb látható. A ballonra, hogy „el ne szálljon”, hosszú, 300 gyöngyből álló, 30 g tömegű gyöngysort kötöttünk. Észrevettük, hogy a léggömb az idő múlásával egyre lejjebb ereszkedik. Ezt a folyamatot rögzítettük a fotósorozaton. A fényképfelvételek között eltelt időtartamok rendre 2 óra, 5 óra, 12 óra.

Ábrázold a gázzal töltött léggömb emelő erejének változását az idő függvényében!

A grafikon segítségével becsüld meg, mekkora a léggömb emelő ereje 5 órával, illetve egy nappal a kísérlet kezdete után!

Magyarázd meg, mi lehet az oka a jelenségnek!

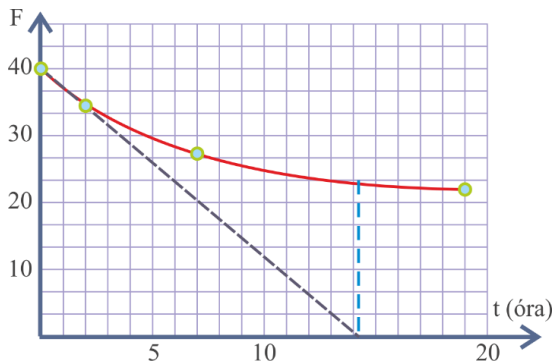


Megoldás

A héliummal töltött játékléggömbnek az idő múlásával csökkenő emelő erejét jelzi, hogy egyre rövidebb láncszakaszt tud megemelni. A lánc szemecinek súlya egyenlő, tekintjük egy láncszem súlyát erőegységnek! Ha a láncszemeket az egymást követő fotókon megszámloljuk, megkapjuk a léggömb változó emelő erejét láncszem-súly egységekben. Az így kapott emelő erőt és a kísérlet kezdetétől (első fotó) eltelt időt táblázatba foglaltuk.

idő (óra)	0	2	2+5 = 7	2+5+12 = 19 óra
emelő erő (láncszem-súly egységben)	40	35	27	23

Az léggömb emelőerejének csökkenését az idő függvényében a négyzethálós füzetlapon készített grafikon mutatja. A léggömb emelő ereje eleinte gyorsabban, majd egyre lassabb ütemben csökken. Ezt szemlélteti a kezdeti csökkenés ütemét jelző ferde egyenestől vett eltérés.



A mérési pontokra húzott folytonos vonal (empirikus függvény-görbe) segítségével azokban az időpontokban is megbecsülhető a léggömb emelő ereje, amikor tényleges mérési adattal nem rendelkezünk. Ehhez a kérdéses időpillanathoz emelt függőleges

egyenes és a függvénygörbe metszéspontjának y koordinátáját kell a leolvasnunk. Az ábra szerint 5 órával a mérés kezdete után a léggömb kb. 27 gyöngyöt emel a magasba, egy nap után a gyöngyök becsült száma 21-22.

A héliummal felfújtt léggömbre a levegő felhajtó erővel hat. A léggömb teljes súlya (anyagának és a benne lévő héliumgáznak a súlya) együtt kisebb, mint a léggömb által kiszorított levegő súlya. A kísérlet azt mutatja, hogy a héliummal felfújtt léggömb emelő ereje eleinte gyorsabban, majd egyre lassuló ütemben folyamatosan csökken. A fotón látszik az is, hogy eközben a léggömb térfogata is csökken. Ebből arra következtethetünk, hogy a léggömbből lassan szökik a héliumgáz, ami a felhajtó erő (a láncot emelő erő) csökkenését okozza. A folyamat csökkenő üteme arra utal, hogy a ballonnál kijutó He-részecskék a feszülő gumifalon keresztül juthatnak ki. A kísérlet kezdetén a nagyobb léggömb fala jobban feszül és vékonyabb, így a falon lévő láthatatlanul kicsi hézagokon át a belső nyomás több részecskét présel át. A He-részecskék számának csökkenésével belső nyomás csökken, így a falon keresztül egyre lassuló ütemben szökik ki a gáz.

Levegő sűrűségének mérése (B)

Az alábbiakban leírt kísérletet csoportmunkában elvégezve határozzátok meg a levegő sűrűségét!

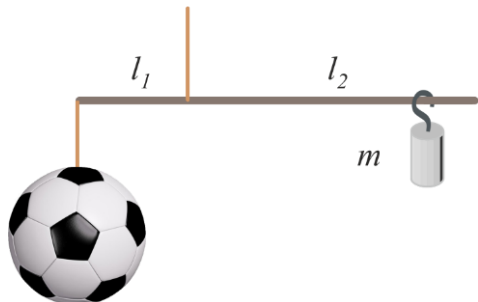
Kísérlet:

Jól felfújtt futball-labdát könnyű műanyag vonalzóra akasztunk, majd az ábrán látható módon ismert nagyságú kis tömeggel kiegyensúlyozunk, és lemérjük a rajzon jelölt l_1 és l_2 hosszúságokat.

Ezután a vonalzóról lekasztott labdából kiengedünk 4 liter, légköri nyomású levegőt (lásd: *Megjegyzések*). A labdát ismét eredeti helyére akasztjuk, majd a kis súlyt úgy toljuk el, hogy a vonalzó vízszintesen újból egyensúlyba kerüljön, és lemérjük a kis súly eltolásának mértékét.

A kísérletet elvégezve a következő adatokat kaptuk:

A kiegyensúlyozáshoz használt kis súly tömege: $m = 30$ g



A labda távolsága a rúd felfüggesztési pontjától: $l_1 = 2,5 \text{ cm}$

A kiegyensúlyozó tömeg távolsága: $l_2 \text{ cm}$

A labdában lévő levegő egy részének kiengedése után az súly új távolsága a rúd felfüggesztési pontjától: $l^* = l_2 + 0,4 \text{ cm}$

Megoldás

A mérleg egyensúlyának feltétele kezdetben

$$Mgl_1 = mgl_2$$

majd a levegő egy részének kiengedése után:

$$(M - \Delta M)gl_1 = mg(l_2 + \Delta l)$$

ahol M a teljesen felfújt labda tömegét, ΔM a kiengedett levegő tömegét, Δl a kiegyensúlyozó m tömeg eltolási távolságát jelöli.

A két egyenlet felhasználásával a 4 liternyi levegő tömege meghatározható

$$\Delta M = \frac{\Delta l}{l_1} m$$

A levegő keresett sűrűsége $\rho = \frac{\Delta M}{\Delta V}$ az adatokat felhasználva:

$$\rho = \frac{4,8}{4} = 1,2 \frac{g}{l}$$

Megjegyzés:

- A labdából tűszelepre csatlakoztatott gumicsővön keresztül engedték ki a levegőt, amit víz alatt fogtunk fel. A levegő felfogásához előzőleg vízzel megtöltött 5 literes műanyagpalackot használtunk. A lezárt palackot szájával lefelé a vizes kád vízszintje alá merítettük, majd a kupakot levettük és a palackba vezettük a gumicsövet. A kiengedett levegő légköri nyomását úgy biztosítottuk, hogy a palackban a víz szintjét a külső vízszinttel azonos magasságban tartottuk.

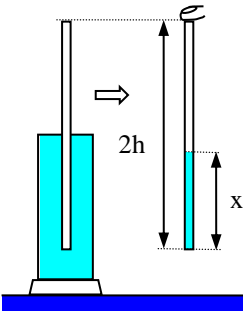
Vízből kiemelt alul nyitott, felül befogott csőben vízoszlop (B)

Az 1m hosszú, néhány mm belméretű, mindkét végén nyitott üvegcsövet függőlegesen, 50 cm mély vízbe állítjuk, majd a felső végét ujjunkkal befogva kiemeljük.

Milyen hosszúságú vízoszlop marad a csőben? Az eredményt ellenőrizd kísérlettel!

Megoldás

Oldjuk meg a feladatot először paraméteresen, az ábra jelöléseivel!



A csőben mielőtt kiemeltük, h hosszúságú p_o nyomású levegőt zártunk el. Kiemelés után a cső alsó végén a nyomás megegyezik a p_o külső nyomással. Mivel a hőmérséklet a kezdeti és végállapotban azonos, felírhatjuk a Boyle-Mariotte-törvényt.

$$p_o h = p(2h - x)$$

A hidrosztatikai egyensúlyt kifejező összefüggés:

$$p_o = p + \rho g x$$

A bezárt levegő nyomását kifejezve és behelyettesítve a Boyle-Mariotte-törvénybe:

$$p_o h = (p_o - \rho g x)(2h - x)$$

Beszorzás és átrendezés után a

$$x^2 - \left(2h + \frac{p_o}{\rho g}\right)x + \frac{p_o h}{\rho g} = 0$$

A megoldás:

$$x_{1,2} = h + \frac{p_o}{2\rho g} \pm \sqrt{h^2 + \frac{p_o^2}{4\rho^2 g^2}}$$

Nyilvánvaló, hogy fizikai értelme csak a negatív előjelnek van, hiszen egyébként a vízoszlop hosszabb lenne, mint maga a cső. Mielőtt az adatokat behelyettesítenénk, hozzuk a megoldást a

$$x = h + \frac{p_o}{2\rho g} - \frac{p_o}{2\rho g} \sqrt{1 + \frac{4h^2 \rho^2 g^2}{p_o^2}}$$

Ezután az adatok felhasználásával becsüljük meg a vízoszlop hosszát, külső nyomásként használjuk a $p_o = 10^5 Pa$ értéket. A gyökjel alatti érték a $\rho = 10^3 \frac{kg}{m^3}$ értékkel és a $g = 10 \frac{m}{s^2}$ közelítéssel 0,01.

Így

$$x = h - 0,005 \cdot \frac{p_o}{2\rho g} = 0,475m$$

Kísérlet

Vegyünk 1 m hosszúságú csövet és a feladatnak megfelelően, hajtsuk végre a kísérletet! Nagyon fontos, hogy sem kapilláris, sem túl nagy átmérőjű csövet ne használjunk.

Megjegyzés:

- A feladat nagyon tanulságos a nagyságrendi becslések szempontjából! A gyökjel alatt szereplő érték csak 1%-kal nagyobb, mint 1. Mégis, ha elhanyagolnánk éppen a vízoszlop hosszának csökkenését veszítenénk el. Ugyanakkor az eredmény nem érzékeny sem a nehézségi gyorsulás, sem a külső légnyomás kis változásaira.

Matematikai gondolatmeneteket kedvelő osztályokban egyszerűen levezethető, hogy a négyzetgyökfüggvény az $x = 1$ hely környezetében az alábbi módon közelíthető:

$$\sqrt{1 + \Delta x} = 1 + \frac{\Delta x}{2}$$

Induljunk ki a

$$\sqrt{1 + \Delta x} - 1 = \sqrt{1 + \Delta x} - \sqrt{1}$$

azonosságból, és szorozzuk be jobb oldalát az alábbi kifejezéssel:

$$\frac{\sqrt{1 + \Delta x} + \sqrt{1}}{\sqrt{1 + \Delta x} + \sqrt{1}} = 1$$

Azt kapjuk, hogy

$$\frac{(\sqrt{1 + \Delta x} - \sqrt{1}) \left((\sqrt{1 + \Delta x} + \sqrt{1}) \right)}{\sqrt{1 + \Delta x} + \sqrt{1}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 + \Delta x} + \sqrt{1}} = \sqrt{1 + \Delta x} - 1$$

Mivel a nevező jó közelítéssel 2, adódik a bizonyítandó közelítés.

Bár az 1m hosszúságú csővel nem kényelmes kísérletezni, sokkal rövidebbel nem dolgozhatunk, mert a mérés lehetetlenné válik.

IMPULZUS, ÜTKÖZÉSEK, ERŐK

A fejezet nagyon fontos témakört, a pontrendszerekben fellépő belső erők kérdéskörét érinti. A feladatok kérdései könnyen variálhatóak és az elméleti magyarázatok is különböző mélységben kezelhetők. Nagyon tanulságos az ütközések időtartamának diszkussziója. Az ideális, végtelenül kicsiny ütközési idők esetén a fellépő erők végtelen nagyvá válnának. Az erőlkés mégis véges nagyságú lesz. Ennek megértetése és elfogadtatása elvi jelentőségű lehet a matematikai analízis elemeinek kifejllesztésekor is.

Vízszintesen szétlökött golyók, impulzusmegmaradás (B)

Az r és $R = 2r$ sugarú acélgolyókat h magasságban elhelyezett, x távolsággal összenyomott, D direkciós állandójú rugó két oldalára helyezzük. Ezután a rugót összeszorítjuk, majd a tartó kötést feloldjuk és a rendszert magára hagyjuk. (A rugó tömege elhanyagolható a golyókéhoz képest.)

Határozzuk meg, a golyók vízszintes irányú elmozdulásának arányát.

Mekkora sebességgel rendelkeztek a golyók, amikor elhagyták a hasábot?

Megoldás

A golyókból és a rugóból álló rendszerre a rugó szétugrásának folyamata során érvényes mind az impulzus, mind a mechanikai energia megmaradás törvénye. A golyók sebességét a rugótól való elválás pillanatában u_1 és u_2 -vel, tömegét pedig rendre m_1 és m_2 -vel jelölve a megmaradási törvények az

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}Dx^2$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0$$

alakban írhatók fel. A két egyenletből a vízszintes sebességekre

$$v_1 = \sqrt{\frac{m_2Dx^2}{m_1(m_1+m_2)}} \quad \text{és} \quad v_2 = \sqrt{\frac{m_1Dx^2}{m_1(m_1+m_2)}}$$

adódik. Mivel a golyók h magasságból vízszintes hajítási pályán esnek a talajra, a megtett távolságok aránya megegyezik a fenti sebességek arányával, azaz

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

(Ez az eredmény azonnal adódik az impulzusmegmaradás törvényéből is. Az arány a feladat adataival kifejezve éppen 8, hiszen a kétszeres sugarú acélgolyó tömege nyolcszoros.)

Kísérleti ellenőrzés

A feladat ellenőrzésére szolgáló kísérletet a fotók illusztrálják.



A golyókat 25-30 cm magas fahasáb tetejére helyezük, rugóként körbronzcs alakú laprugót (pl. órarugót) használunk. A rugót összenyomott helyzetben kössük össze fonallal úgy, hogy közepe szinte összeérjen, majd helyezük a hasáb tetején a golyók közé. A golyók a rugó két oldalán keletkező bemélyedésbe kerüljenek. Ezután égessük el a rugót rögzítő fonalat és vizsgáljuk meg, hogy a golyók hol érkeznek az asztalra. A becsapódás helyét könnyen megállapíthatjuk, ha homokkal töltött tálcákat helyezünk a hasáb két oldalára. A homok megfogja a becsapódó golyókat és nem engedi elgurulni.

Megmérve a golyók tömegét és vízszintes elmozdulásukat azonnal ellenőrizhetjük az

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

összefüggés teljesülését.

A golyók vízszintes hajítási pályán mozognak, ennek alapján a hasáb h magasságának és az s hajítási távolságnak ismeretében könnyen kiszámíthatjuk kezdősebességüket is a:

$$v = \sqrt{\frac{gs^2}{2h}}$$

összefüggés segítségével. A kapott eredményt akkor vethetjük össze az előzőekben kiszámított sebességértékekkel, ha megmérjük a rugó direkciós állandóját is.

Megjegyzés:

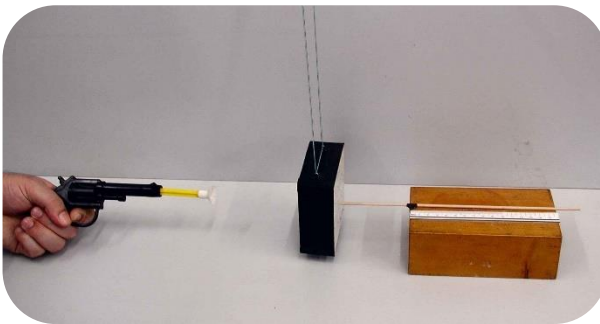
- A feladat tanórai kísérletként az impulzusmegmaradás igazolására szolgálhat. A bemutatott megoldásban számítással kapott eredményt utólag verifikáljuk a kísérletből adódó mérési eredményekkel.

Tapadókorongos pisztoly lövedékének sebessége (B)

A helyszínen elvégzett kísérlet adatai alapján határozd meg a tapadókorongos játékpisztoly lövedékének sebességét!

Kísérlet:

A tapadókorongos játékpisztoly lövedékét néhány cm távolságból rálöjjük az ingaként felfüggesztett fahasábra. A lövedék tapadókorongja a hasábra tapad, amely a becsapódás hatására kilendül. A kilendülés vízszintes vetületét az elmozduló hasáb által hátratólt pálcika elmozdulásával mérhetjük.



A mérési adatokat a kísérlet bemutatásakor a felhasznált összeállítás adatai alapján adjuk meg. (A fahasáb tömege: $M = \dots\dots\dots g$, a lövedék tömege $m = \dots\dots\dots g$, az inga hossza: $l = \dots\dots cm$, a kilendülés vízszintes vetülete: $s = \dots\dots cm$, az inga $\dots\dots s$ alatt végez 10 lengést.) A hiányzó adatokat a helyszínen elvégzett mérések alapján írd be! Figyeld meg a bemutatott kísérleteket, és a látottakból kiindulva válaszolj a kérdésekre!

Megoldás

1. A bemutatott kísérlet helyszínen meghatározott adatai:

A fahasáb tömege: $M = 225g$, a lövedék tömege $m = 3,7g$, az inga hossza: $l = 56cm$, a kilendülés vízszintes vetülete: $s = 5cm$. Az inga 10 lengést 15,3 s alatt végezt.

A tapadókorongos lövedék és a fahasáb tökéletesen rugalmatlan ütközésére az impulzusmegmaradás törvényét alkalmazhatjuk:

$$mv = (M + m)v_*$$

ahol v a lövedék keresett sebessége, v_* az összetapadt testek közös sebessége.

Innen a lövedék becsapódási sebességét v_* ismeretében tudjuk meghatározni. A v_* meghatározására több lehetőség is van.

a) A kevesebb számolást igénylő megoldás a következő: A ballisztikus inga mozgásának vízszintes vetülete közel harmonikus rezgésnek tekinthető, amelynek maximális sebessége éppen v_* , ami a rezgés mért maximális kitérésével (s) és a rezgésidővel (T) kifejezhető:

$$v_* = s \frac{2\pi}{T}$$

A mért adatok felhasználásával $v_* = 0,2 m/s$

b) Hasonló eredményre jutunk, ha abból indulunk ki, hogy a v_* sebességgel kilendülő inga mozgási energiája a kitérés szélső pontján helyzeti energiává alakul. Az inga emelkedési magassága az inga hosszát és a kitérés vízszintes vetületét (s) mérve elemi geometriai módszerekkel meghatározható.

A lövedék keresett sebessége $v = 12,36 m/s$.

Mekkorát üthet fejeléskor egy focilabda? (C)

Gera Zoltán egyik feleséről Meggyesi Bálint készített sportfotót, ami 2005-ben a Nemzeti Sport-ban jelent meg. A bravúros kép láttán jogosan gondolhatunk arra,

hogy a labda lyukas, hiszen jól felfújtt labda esetén a képen látható benyomódás irreálisan nagy erőt jelentene.

Vajon igazolható-e utólag a fotó alapján, hogy a labda tényleg lyukas volt-e, amikor a fotó készült?

Becsüljük meg, mekkora erővel hathat a belapult labda a játékosra, majd vizsgáljuk meg, reális-e a kapott eredmény!



Megoldás

Induljunk ki abból, hogy a fejelés során deformálódó labda és a sima falnak ütköző, hasonló mértékben belapuló labda által kifejtett erő nem különbözhet lényegesen egymástól. Így végezzük számításainkat az egyszerűbben kezelhető utóbbi esetre vonatkozóan.

A sima falnak ütköző labda deformálódását a rajz mutatja.

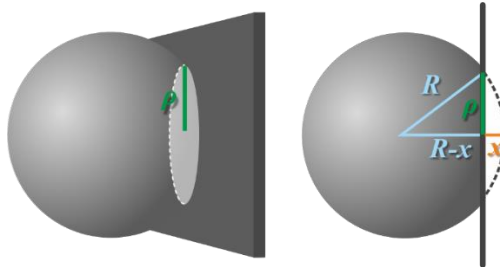
Ha az R sugarú labda belapulásának mértéke x , akkor a labda

$$\rho = \sqrt{R^2 - (R - x)^2}$$

sugarú körlapon érintkezik a fallal. A falra kifejtett nyomóerő

$$F = p\rho^2\pi$$

ahol p a labdában levő levegő túlnyomása. Első közelítésként vegyük ezt a szabványosan felfújtt labda $p_o = 0,6105 Pa$ túlnyomásának! (Ez biztosan alábecslés, hiszen a deformálódó labdában a levegő (adiabatikusan) összenyomódik.)



Az érintkezési körlap ρ sugara nem túl nagy x -ek esetén a

$$\rho = \sqrt{2Rx}$$

értékkel becsülhető. (Ez utóbbit ρ fentebb megadott kifejezéséből kapjuk, ha a négyzetgyök alatti beszorzást elvégezzük és a másodrendű tagot elhanyagoljuk.) A falnak ütköző és belépülő labda által kifejtett erő így

$$F \approx 2R\pi p_0 \cdot x$$

azaz az erő a benyomódás mértékével egyenesen arányos. A fényképfelvételen vonalzóval lemérhető a labda $2R$ átmérője, továbbá $(2R - x)$ értéke. Ismerve a szabványos futball-labda átmérőjét ($2R = 22\text{ cm}$), meghatározható a fotón látható benyomódás tényleges mértéke ($x \approx 4,6\text{ cm}$). A kapott x értéket a fenti erőformulába helyettesítve megkapjuk a fejelő játékosra ható erő közelítő nagyságát: $F \approx 1870\text{ N}$

Térjünk most vissza a kiindulási kérdéshez, hogy reális-e a fotó alapján megbecsült erő nagysága? Azt kell tehát megvizsgálnunk, hogy normál játék során, fejeléskor, felléphetnek-e ilyen nagy erők?

Meg gondolásainkat a dinamika alaptörvényére alapozhatjuk. Eszerint az ütköző labda mozgásmennyiségének megváltozása (ΔI) megegyezik a labdára ható átlagos F erő nagyságának és az erőhatás Δt idejének szorzatával:

$$F\Delta t = \Delta I$$

Feltételezve, hogy a labda a sportoló fejével tökéletesen rugalmasan ütközik, és a fej tömegét 8-10 kilogrammra becsülve a labda közelítőleg ugyanolyan sebességgel pattan vissza, mint amilyenvel becsapódott, sebességének változása tehát:

$$\Delta v \approx 2v$$

Ennek alapján, ha az m , v és Δt értékeket ismerjük, a labdára ható, illetve a labda által kifejtett erő a dinamika alaptörvényéből meghatározható.

A futball-labda hivatalosan előírt tömege 0,45 kg. Az ütközés ideje igen rövid, mérési adatok szerint kb. 0,01s. Az ütköző labda sebességét a korábbiakban tárgyaltak alapján 25 m/s-ra becsülhetjük. Ezekkel az adatokkal számolva a labda által kifejtett erő kb. 2500 N. A fotó alapján számított erő tehát nem irreális, nem kell feltételeznünk, hogy a labda a fejelés pillanatában lyukas volt.

A fent alkalmazott két közelítés jó egyezését alátámasztja az is, hogy lineáris erő - deformáció kapcsolat alapján jól megbecsülhető az ütközési idő nagyságrendje is. A lineáris erőtörvény szerinti erő hatására a testek rezgőmozgást végeznek, így a maximális deformáció bekövetkezéséhez szükséges idő megegyezik a benyomott, majd magára hagyott test rezgésidejének negyedével.

Az ütközési idő tehát a lineáris erőtörvényből adódó

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

rezgésidő fele. A képletben m a labda tömege, D a grafikon meredeksége.

Tehát

$$D \sim 2R\pi p_0$$

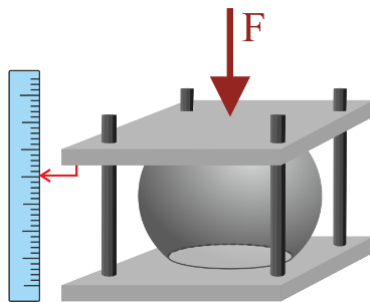
Az adatok felhasználásával az ütközési időre $t = 0,014$ s adódik, ami jól egyezik a mérésekből ismert 0,01 s-os értékkel.

A kiértékelt bravúros sportfotóhoz kapcsolódóan az erők meghatározása mellett érdemes a fellépő gyorsulásokat is megvizsgálni. A gyorsulás mértékét a dinamika alaptörvénye szerint az erő és a gyorsított tömeg hányadosa adja meg. Eszerint a fejelés során a labda gyorsulása a szabadesés gyorsulásának több mint 500-szorosa. Természetesen a visszapattanó labda által kifejtett erő a játékos fejét is gyorsítja. A 8-10 kg-os fej gyorsulásra is óriási érték, nagyjából 250 m/s^2 adódik.

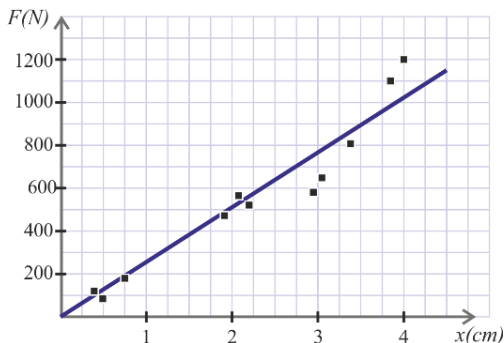
Ez az adat természetesen nem reális, hiszen meghaladja a károsodás nélkül elviselhető maximális gyorsulás értékét. A fej azért különösen érzékeny a nagy gyorsulásokra, mert az agyvelőt szalagok rögzítik a koponyacsontokhoz, s ezek nem tudják az agyat nagy gyorsulással mozgatni. Így a gyorsan mozgó koponyacsont mintegy nekiszorul az agyvelőnek, s azon sérülést okoz. (Így keletkeznek pl. az ökölvívók agysérülései is.) A sérülés úgy kerülhető el, hogy a sportoló nyakizmait megfeszítve megakadályozza a fej önálló elmozdulását. Az ily módon megnövelt tömeg a sportoló teljes tömegével azonosnak tekinthető, így a gyorsulás hat-hétszer kisebb lesz. A foton jól látható a fejelő játékos nyakizmainak feszülése. Ez az oka, hogy Gera Zoltán nem kapott súlyos agyrázkódást a labdával való nagy erőjű ütközés hatására.

Megjegyzés:

- Az erő-benyomódás függvény lineáris közelítése nemcsak elméleti megfontolásból adódik, de kísérletileg is alátámasztható. Ennek elvégzéséhez célszerű elkészíteni két rajztáblából az ábrán látható egyszerű eszközt.
- (Fontos, hogy a felső lap a vezetést szolgáló négy függőleges rúdon könnyen mozogjon. A méréshez a szabványosan felfújott labdát helyezük a két deszkalap közé; majd terheljük a felső lapot egyre nagyobb erőkkel úgy, hogy a felső rajztábla mindvégig vízszintes helyzetben maradjon és ne szoruljon a vezető rudakhoz. A terhelés kezdeti értéke 10-20 kg legyen, majd először kisebb, később egyre nagyobb súlyú tanulók álljanak rá a lapra. Mérjük meg vonalzóval a különböző terheléseknél a két lap távolságát. A mérési adatokat ábrázoló erő-



benyomódás grafikon mutatja, hogy a benyomódás és az erő közti kapcsolat jó közelítéssel lineáris.



- Bár a labda és az emberi fej közötti ütközéskor a károsodás nélkül elviselhető gyorsulásról beszéltünk, érdemes megemlíteni, hogy valójában nem a gyorsulás, hanem az erőhatás módja az, ami az emberi szervezetet károsítja. Ha a test minden pontja ún. *tömegerők* hatására azonos mértékben gyorsulna, azaz az erőhatás felléptekor a testen belül nem lennének deformációk, akkor az emberi szervezet tetszőleges gyorsulást elviselne. (Ilyen erő pl. a nehézségi erő.) Az erők többsége azonban nem ilyen, a testek többnyire a felületükön lépnek kölcsönhatásba, s ez a fentiekben leírt módon belső deformációkhoz és károsodásokhoz vezethet.
- A futball-labda esetén alkalmazott gondolatmenethez hasonlóan természetesen a többi labdajátékra jellemző erő és gyorsulás értékek is meghatározhatók. Ilyen becslések eredményét tartalmazza az alábbi táblázat.

Játék	jellemző sebesség	a labda tömege	ütközési idő	átlagos erő	a labda átlagos gyorsulása
futball	25 m/s	0,45 kg	10^{-2} s	2250 N	500g
tenisz	30 m/s	0,06 kg	$5 \cdot 10^{-3}$ s	720 N	1200g
pingpong	15 m/s	0,0025 kg	-	-	-
golf	70 m/s	0,05 kg	$3-5 \cdot 10^{-4}$ s	23 300-14000 N	46700-2800g

A becslések a talajról vagy a pingpongasztalról tökéletesen rugalmas ütközéssel visszapattanó labdára vonatkoznak. Megjegyezzük, hogy ilyen feltételek mellett a gyorsulás függetlenek a labda tömegétől, az $a = \frac{2v}{\Delta t}$ összefüggéssel határozható meg.

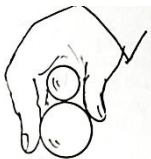
Megjegyzés:

- A feladat akár több részletre szedve különböző céllal építhető be a tanórai anyagba. Az itt leírt teljes formában tanári vezetésű projekt feladat lehet diákcsoport számára.

Egymásra ejtett labdák sorozatos rugalmas ütközése (C)

Bevezető kísérlet:

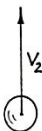
Ejtsünk le 1m magasságból pingponglabdát, majd rugalmas tömör műanyagból vagy gumiból készült ún. *trükk-labdát!* Figyeljük meg a labdák visszapattanási magasságát!



Ejtsünk le ezután 1 méterről egymásra helyezve, egyszerre a két labdát! Az alsó legyen a nagyobb tömegű tömörgumi, a felső a pingponglabda!

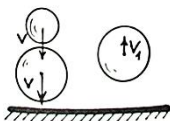
Azt tapasztaljuk, hogy ütközés után a felső labda az ejtési magasságot messze meghaladó magasságba ugrik fel. Magyarázzuk meg a jelenséget!

Segítségként megadhatjuk, hogy a labdák talajra érkezésekor kettős ütközés zajlik le. Az alsó labda először a talajjal ütközik, majd kicsivel később, már visszafelé haladva összeütközik a lefelé haladó felső labdával. A felső labdát tehát nem egyszerűen a talaj löki felfelé, hanem a már vele szemben haladó alsó labda.



A feladat kísérleti értelmezése

Ismételjük meg a bevezetőben leírt kísérletet és figyeljük az alsó labdát!



Az alsó labda visszapattanási magassága a kettős ütközéskor lényegesen kisebb, mint amikor csak egyedül ejtjük le, a felső labdát egy másikra cserélve jól látható, hogy az alsó labda felpattanási magassága is változik.

Feladat:

A bevezető kísérletben leírt módon ejtsünk le két egymásra helyezett m_1 és m_2 tömegű tömörgumi labdát.

a) Milyen $\frac{m_1}{m_2}$ tömegarány esetén marad az alsó (m_1) labda ütközés után a talajon nyugalomban?

Tegyük fel, hogy minden ütközés függőleges egyenes mentén történik és tökéletesen rugalmas.

b) Milyen magasra ugrik ekkor a második (m_2 tömegű) labda?

Megoldás

a) Ha a labdák mérete sokkal kisebb az ejtés magasságánál (h_1), akkor mindkét labda becsapódási sebességét (v_o) azonosnak tekinthetjük:

$$v_o = \sqrt{2gh_1}$$

Az alsó labda, a talajjal történő tökéletesen rugalmas ütközés után a becsapódási sebességgel azonos nagyságú, de ellentétes irányú, tehát felfelé irányuló $-v_o$ sebességgel rendelkezik.

A második labda a már ($-v_o$) sebességgel felfelé mozgó alsó labdába ütközik. Ez az ütközés is tökéletesen rugalmas. Az impulzus- és energiamegmaradás tételét leíró két egyenlet, figyelembe véve, hogy az alsó labda ütközés utáni sebességének zérusnak kell lennie, az

$$\begin{aligned} -m_1v_o + m_2v_o &= m_2v_2 \\ \frac{1}{2}m_1v_o^2 + \frac{1}{2}m_2v_o^2 &= \frac{1}{2}m_2v_2^2 \end{aligned}$$

alakot ölti. Az első egyenletből v_2 -t kifejezve és a másodikba behelyettesítve, továbbá felhasználva v_o -nak h_1 -gyel kifejezett értékét azt kapjuk, hogy

$$gh_1(m_1 + m_2) = \frac{1}{2}m_2 \frac{2gh_1(m_1 + m_2)^2}{m_2^2}$$

Innen a labdák keresett tömegaránya: $\frac{m_1}{m_2} = 3$

b) A kapott tömegarányt felhasználva fejezzük ki m_1 értékét m_2 -vel és írjuk be az energiamegmaradást kifejező egyenletbe! A visszapattanó labda mozgási energiája az emelkedés során helyzeti energiává alakul. Ezt felhasználva adódik, hogy a második labda az eredeti ejtési magasság négyeszeresére pattan fel: $h = 4h_1$

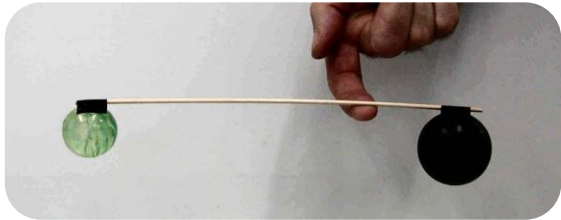
A megoldás kísérleti igazolása

A számítás eredményének igazolására olyan labdákra van szükségünk, amelyek megfelelnek a 3:1 tömegaránynak. A feltétel jó közelítéssel teljesíthető, ha a kereskedelemben kapható különböző méretű, azonos anyagú tömör műgumi labdák közül olyanokat választunk, amelyek átmérőjének aránya kissé kevesebb mint $3/2$!

A labdák leejtése előtt mutassuk be, hogy tömegarányuk valóban $1/3$. Ezt legegyszerűbben úgy tehetjük meg, ha a két labdát szigetelő szalaggal hurkapálca két végére rögzítjük, majd megkeressük, hogy hol kell alátámasztanunk a pálcát, hogy a "mérleg" egyensúlyban legyen.

A tömegek aránya az erőkarok arányának reciprokával egyezik meg. Ezután a két labdát egymásra helyezve ejtsük le! Jól látszik, hogy az alsó labda a talajon marad.

A feladat második részének kísérleti igazolása nehezebb. Ha ugyanis a labdákat elegendően magasról ejtjük ahhoz, hogy méretük elhanyagolható legyen, az esés során fellépő energiaveszteség már jelentős. Nem várhatjuk tehát, hogy a felpattanás mérhető magassága kisebb, mint 20-25%-os hibával megegyezzek a számított értékkel.



Miért csúszik be a leejtett gyufásdoboz fiókjá? (C)

A helyszínen bemutatott kísérlet során egy gyufával nagyjából félig töltött gyufásdobozt körülbelül 10 cm magasról függőlegesen az asztalra ejtünk. A zárt gyufásdoboz talajt érve kicsit visszapattan, és felborul. Ha a kísérletet félig kihúzott „fiókkal” megismételjük, a doboz nem borul fel, de a félig kihúzott „fiók” a gyufákkal együtt beljebb csúszik.

Magyarázd meg a jelenséget!

A mellékelt fotókon végzett mérések alapján becsüld meg a gyufásdoboz tokja és a fiók közti súrlódási erőt (a gyufásdoboz tömege $M = 8 \text{ g}$)!



Megoldás

A zártan leejtett gyufásdoboz felborulásának oka az, hogy a dobozban lazán lévő gyufák elhelyezkedése ütközéskor megváltozik, és belülről a doboz falának ütközve kibillentik a dobozt az egyensúlyi helyzetből. Félig nyitott fiókkal megismételve a

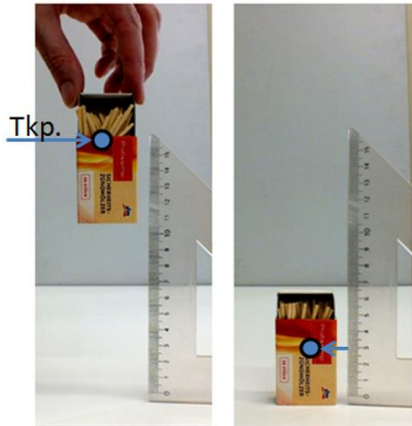
kísérletet a doboz ütközése a talajjal rugalmatlanná válik, a nyitott fiók tovább folytatja mozgását a tok ütközése után, és a tok és a fiók közti súrlódási erő munkája felemészti a leejtett doboz kinetikus energiáját.

A mellékelt fotók alapján becslést tehetünk a fiók becsúszására, azaz súrlódási erő útjára és ezzel a súrlódási erő mértékére is.

A bal oldali fotó a félig nyitott gyufásdobozt az ejtés előtti pillanatban mutatja, a jobb oldali a földet érés után. A kezdeti állapotban (az első fotón) a felemelt doboz gyufának helyzeti energiája van. Az esés folyamán a helyzeti energia kinetikus energiává alakul. Miután a doboz külső része az asztalra leérve megáll, a fiók tehetetlensége révén még folytatja mozgását lefelé. A doboz külső burkolata és a gyufákat tartalmazó fiók közt fellépő súrlódási erő (ami a fiókra a mozgásirányával ellentétes irányban felfelé hat) lefékezi az fiók mozgását. Energetikailag megfogalmazva a súrlódási erő munkája még azelőtt felemészti a teljes kinetikus energiát, mielőtt a fiók alja az asztalhoz érne. Kimondhatjuk, hogy a súrlódási munka (W_S) egyenlő a doboz gyufa helyzeti energiájának megváltozásával.

$$W_S = \Delta E_h$$

A súrlódási munka a feladatban kiszámítandó F_S súrlódási erő és a Δs út szorzata ($W_S = F_S \Delta s$). A helyzeti energiaváltozást, a doboz gyufa M tömege és a tömegközéppontjának Δh magasságváltozása határozza meg ($\Delta E_h = Mg\Delta h$). A doboz gyufa M tömege a feladatban adott ($M = 8\text{g}$), a g nehézségi gyorsulás értéke ismert, Δh a doboz tömegközéppontjának magasságváltozása, továbbá Δs a gyufás fiók elmozdulása a súrlódási erő ellenében, a fotókról leolvasható.



A megoldáshoz szükséges hosszúságadatoknak a leolvasását a fotókról az ábra mutatja.

A fotón bejelölt tömegközéppont magasságának változása $\Delta h \approx 13\text{ cm}$.

A súrlódási erő útja, azaz a doboz fiókjának becsúszása földet éréskor $\Delta s \approx 1,5\text{ cm}$.

A súrlódási erő számított értéke

$$F_S = \frac{Mg\Delta h}{\Delta s} \approx 0,68\text{N}$$

Asztalra ejtett golyóstoll (C)

A közismert egyszerű golyóstoll hegye a szokásos módon, a toll végén lévő gombbal nyomható ki. A gombot egy rugó ellenében kell benyomni addig, amíg azt a toll zárszerkezete összenyomott állapotban megakasztja. Ha a nyomógombbal lefelé függőlegesen tartott tollat kellő magasságból ráejtjük az asztalra, a hegy kinyomódik.

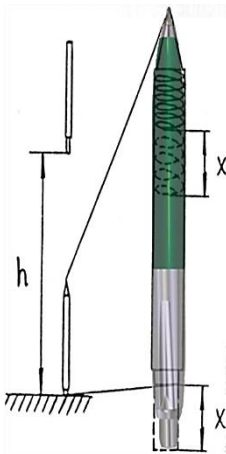
Végezd el a kísérletet, és ennek alapján becsüld meg a golyóstollban lévő rugó rugóállandóját!

Mennyire lehet jó a becslésed? Mi a hiba forrása?

A golyóstoll tömegének meghatározására szükség lesz: műanyag vonalzóra, db vonalzónál, 1 db mérlegként használható hurkapálcára, 1 db 11 g-os csavar, zsineg, befőttesgumi.

Megoldás

Vonalzóval mérjük le azt a *legkisebb* magasságot, ahonnan a tollat (függőlegesen, nyomógombbal lefelé) az asztalra ejtve, a toll hegye kinyomódik. Legyen ez a magasság h (az asztaltól a nyomógombig mérve). Ha a toll hossza l , akkor h -nak és $l/2$ -nek az összege közelítőleg megadja a toll tömegközéppontjának távolságát az asztaltól számítva.



A toll m tömegét a mérlegként használt hurkapálca segítségével határozhatjuk meg. A pálca egyik végére a tollat, a másikra a $m_{CS} = 11$ g tömegű csavart akasztjuk.

Próbálgatással megállapítjuk, hol kell alátámasztani (vagy felfüggeszteni) a mérleget, hogy egyensúlyban legyen. Lemérjük a tollnak és a csavarnak az alátámasztási helytől való távolságát; a karok legyenek k , illetve k_{CS} . A forgatónyomatékok egyenlősége alapján: $m \cdot k = m_{CS} \cdot k_{CS}$. Innen a toll tömege adódik.

A toll nyomógombját lassan benyomva mérjük meg a rugó összenyomódását addig, amíg a zárszerkezet megakasztja a rugót (ekkor halljuk a jellegzetes kattantást). Ez az összenyomódás legyen x , ugyanennyi lesz a rugó összenyomódása földet éréskor, miután a tollat a kritikus magasságból ejtjük le. Ekkor a toll tömegközéppontja az asztaltól számítva $(\frac{l}{2} - x)$ magasságban van.

A tollnak a kritikus magasságban csak helyzeti energiája van: $E_1 = mg \left(h + \frac{l}{2} \right)$

Leérkezés után, a maximális összenyomódás állapotában az összes mechanikai energia a helyzeti és a rugalmas energia összegeként adódik. Ekkor a toll helyzeti energiája:

$$E_1 = mg \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

A rugalmas energia:

$$E_r = \frac{1}{2} D x^2$$

Így:

$$E_2 = mg \left(\frac{l}{2} - x \right) + \frac{1}{2} D x^2$$

A súrlódást és a közegellenállást elhanyagolva, felírhatjuk az összes mechanikai energia megmaradását a legfelső és a legalsó helyzetre:

$$mg \left(h + \frac{l}{2} \right) = mg \left(\frac{l}{2} - x \right) + \frac{1}{2} D x^2$$

Innen a rugóállandó:

$$D = \frac{2mg(h+x)}{x^2}$$

(A toll l hosszára nincs is szükségünk.)

Megjegyzés:

- A mérés csak nagyságrendi becslésre alkalmas. A nyomógomb benyomódás közbeni súrlódásának elhanyagolása ugyanis durva közelítés. A rugalmas ütközés folyamata úgy képzelhető el, hogy a toll és az asztallap érintkezésének pillanatától a tollban lévő rugó elkezdi deformálódni és miközben a deformáció növekszik, a rugóerő lassítja a tollat. Ha nem lenne zárszerkezet, akkor a rugó addig deformálna, amíg a toll megáll, ezután a deformáció visszaalakulna, a rugóerő gyorsítani kezdené a tollat felfelé. A kritikus leejtési magasság a rugalmas ütközés folyamatában azt jelenti, hogy az ütközéskor a zárszerkezet a maximális deformáció pillanatában rögzíti a rugót. Így a leeső toll teljes helyzeti energiája a rugóban tárolódik. Ha a kritikusnál magasabbról ejtjük a tollat, akkor a zár úgy rögzíti a rugót, hogy a toll még lefelé mozog. A deformáció mechanizmusa azonban megváltozik, a toll elpattan az asztalról. A kritikus leejtési magasság szórást mutat, hiszen a tollat soha nem sikerül pontosan ugyanúgy leejteni. (Ezen befogással lehet segíteni.) Mindenesetre több mérés eredményét kell átlagolni. További hibaforrás az asztaltól számított magasság mérésének hibája, a rugó összenyomódásának mérési hibája, illetve a tömegmérés hibája.

KÖRMOZGÁS

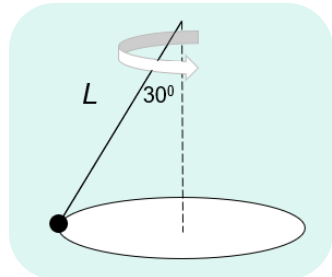
A körmozgás és az ugyancsak körpályán zajló ingamozgás a periodikus mozgások alappéldája. Már az egyenes körmozgás tárgyalása is gyakran nagy nehézséget okoz a diákok számára azzal, hogy a gyorsulásnak van a pályára merőleges összetevője. A száraz elméleti tárgyalást jól oldhatjuk, ha az órákat egyszerű mérési feladatokkal színesítjük.

A kísérleti megvalósítás mellett itt is nagyon hasznos lehet a fénykép- és videó felvételek analizálása. A fényképfelvételek esetén fontos, hogy ügyeljünk a perspektivikus torzítás hatásának figyelembevételére.

Kúpinga periódusidejének számítása és mérése (B)

Kisméretű testet $L=0,5\text{ m}$ hosszú, elhanyagolható tömegű zsinigre kötve kúpingaként mozgatunk (a test vízszintes síkban egyenes körmozgást végez, a kötélt 30° -os nyílásszögű kúp képzeletbeli palástját súrolja).

Határozzuk meg a mozgás T periódusidejét!



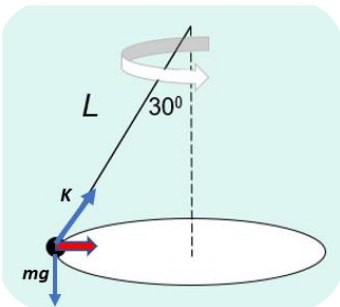
Megoldás

A test vízszintes síkban egyenes körmozgást végez. Az egyenes körmozgás dinamikai feltétele, hogy a testre ható erők eredője állandó nagyságú legyen és a kör középpontja felé irányulva biztosítsa a testnek az $r\omega^2$ centripetális gyorsulást.

A kúpingaként mozgó m tömegű kis testre ható nehézségi erőt (mg), kötélerőt (K) és két erő eredőjét az ábra mutatja.

A körmozgást végző test dinamikai alapegyenlete

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_{cp} = m \frac{v^2}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = m\vec{r}\omega^2$$



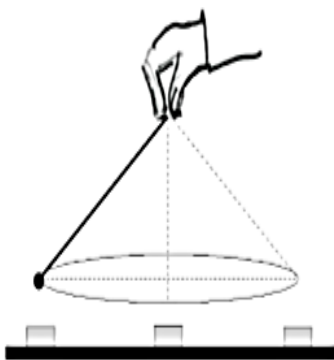
Az eredő erőt a nehézségi erővel és a kúp nyílásszögével kifejezve, továbbá r és ω átírásával kapjuk:

$$m \cdot g \cdot \operatorname{tg} 30 = m r \omega^2 = m \cdot L \sin \alpha \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

Innen a lehetséges egyszerűsítések után a keresett periódusidőt kifejezve

$$T = \sqrt{\frac{L 4\pi^2 \cdot \cos \alpha}{g}} \approx 1,7 \text{ s}$$

Az eredmény egyszerű kísérleti igazolása

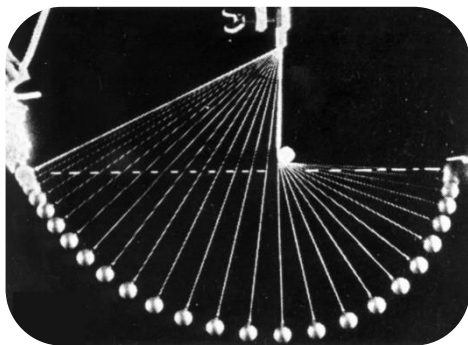


Kisebb testet kössünk $L = 0,5$ m hosszú zsinagra, majd az asztalra helyezzünk el egyvonalban három gyufásdobozt egymástól 25 cm távolságra! (A három gyufásdoboz kijelöli a mozgás körpályájának átmérőjét és középpontját.) Az ingát kézben tartva lógassuk a középső doboz fölé, majd kezünket mozgatva hozzuk mozgásba a kúpingát! Némi gyakorlás után elérhető, hogy az ingatest egyenes körmozgást végezzen és a két szélső gyufásdoboz fölött haladjon át. A diákok oldalról nézve a kúpinga mozgását könnyen ellenőrizhetik, hogy a mozgás megfelel a feladat geometriai feltételeinek. A tanulók

saját mobiltelefonjuk stopperével 10 körbefordulás idejét mérik, majd ebből meghatározzák a T periódusidő értékét. A számított és mért periódusidő értéke általában jól egyezik.

Megtört fonalú inga mozgásának vizsgálata stroboszkópos fotó alapján (B)

Az alábbi fotó stroboszkópos kép, ami fonálingával végzett kísérletről készült. Az $L = 0,5$ m hosszúságú fonálingát a kísérlet során kb. 60° -os szöggel kitérítettük, majd elengedtük. Az inga $r = L$ sugarú köríven akadálytalanul mozogva érte el függőleges egyensúlyi helyzetét, de ott fonala beleütközött a kezdeti kitérítési magasságban vízszintesen álló rúdba. Így az ingát tartó fonál felső szakasza nem tudott tovább mozogni, az inga pedig megrövidült fonálon kisebb sugarú körpályán haladt tovább.



A képen az inga mozgásának fázisképeit látjuk. A felvétel szaporán villogó ún. *stroboszkóp-lámpa* megvilágításában készült hosszú expozíciós idővel. Így a lámpa minden felvillanása ugyanazon a képfelületen rögzítette az inga pillanatnyi helyzetét.

Tanulmányozd figyelmesen a fotót és fogalmazz meg állításokat a kísérlettel kapcsolatban.

Becsüld meg a fotó alapján a lámpa villogási frekvenciáját, ha az inga fonálának hossza $L = 0,5 \text{ m}$!

Mekkora a változást okozott a fonalat feszítő erőben, hogy a fonál felső része fennakadt a rúdon?

Megoldás

A fotón az egyenlő időközönként készült fázisképek távolsága változik, ami azt jelzi, hogy a mozgás sebessége változó, függ az inga pillanatnyi kitérésétől. A szélső helyzetekhez közel az inga mozgása lassabb, lefelé gyorsabb és a sebesség a függőleges egyensúlyi helyzeten áthaladva a legnagyobb. A fonál fennakadása a rúdon nem változtatja meg érzékelhetően az ingatest kerületi sebességét (a fázisképek távolsága észrevehetően nem változik.)

A feladatban megadott ingahosszhoz ($L = 0,5\text{m}$) arányítva a fotón vonalzóval végzett méréssel megállapítható az inga kezdő kitérésének magassága a mozgás legalsó pontjához képest $h_o \approx 28\text{cm}$.

A képen jól látszik, hogy a szélső helyzetekben az inga kitérése azonos magasságú, a kezdetivel, azaz az ingatest helyzeti energiája a kezdetben levővel azonos, tehát a mozgás egy periódusa alatt az inga összenergiája nem változott.

A stroboszkóp-lámpa két villanása közti idő megbecsülhető, ha az inga mozgására érvényes energiamegmaradás törvényét felhasználva, a kezdeti kitérés magasságát felhasználva kiszámítjuk az inga kerületi sebességét, amivel az inga mozog amikor az egyensúlyi helyzetén áthalad.

$$mgh_o = \frac{1}{2}mv^2$$

Innen

$$v = \sqrt{2gh_o} \approx 2,4 \text{ m/s}$$

Az energiamegmaradásból számított sebességgel mozgó inga elmozdulása a két villanás közti idő alatt a fotón végzett méréssel meghatározható, így a villanások közti idő értéke meghatározható.

Az egyensúlyi helyzetben átlendülő inga két szomszédos fázisképének távolságát vonalzóval lemérve, és az ismert ingahosszhoz viszonyítva az inga két villanás közti elmozdulásának értéke $\Delta s \approx 5,7 \text{ cm}$.

A stroboszkóp-lámpa két villanása közt eltelt idő $\Delta t = \frac{\Delta s}{v} \approx 0,02 \text{ s}$, a stroboszkóp frekvenciája így

$$f \approx 50 \text{ s}$$

A fonal ütközése a rúddal, az ingatest sebességén nem változtatott, azonban megrövidítette a mozgás pályájának sugarát. Az új pályasugár éppen a h_0 indítási magasság. A kötélrő az alsó pontban a

$$K - mg = \frac{mv^2}{R}$$

radiális mozgásegyenletből határozható meg. Az R sugár a szöghöz érkezés pillanatában az l kötélhosszról h_0 -ra változik, a kötélrő megváltozása tehát

$$\Delta K = \frac{mv^2}{h_0} - \frac{mv^2}{l}$$

Beírva ide a korábban meghatározott sebességet, azt kapjuk, hogy

$$\Delta K = 2mgh_0 \left(\frac{1}{h_0} - \frac{1}{l} \right)$$

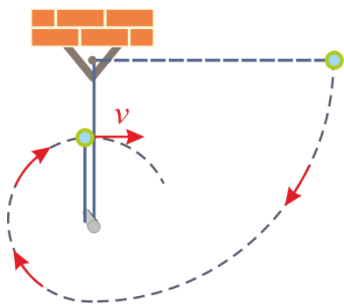
Áttekinthetőbb eredményre jutunk, ha a kezdeti magasságot kifejezzük az inga kezdeti kitérésének α szögével: $h_0 = l(1 - \cos\alpha)$. Ezzel:

$$\Delta K = 2mg\cos\alpha$$

vagyis a kötélrő a nehézségi erő kezdeti kitéréskor fellépő sugár irányú összetevőjének kétszeresével növekszik.

Vízszintesig kitérített majd szögbe ütköző fonalinga körbefordulása (C)

A feladat tanári bemutató kísérlettel indul. Fonálingát nyugalmi helyzetéből 90° -kal kitérítve elengedünk. A mozgó inga fonala, a felfüggesztési pont alatt x távolságban



vízszintesen álló vékony rúdba ütközik. Az ütközést követően a fonál felső szakasza nem mozog tovább, míg az ingatest az alsó fonálhosszal a rúd körül körbefordul. A kísérletről készített vázlatrajzot az ábra mutatja.

A felfüggesztési pont alatt milyen távol, a fonálhossz hányadában kell lennie a rúdnak, hogy az ingatest egy teljes fordulatot megtegyen?

Megoldás

A feladat szerint a szögben megakadó fonálon a test mindvégig függőleges síkú körpályán mozog.

Érdeemes a kísérletet többször megismételni úgy, hogy a fonalat megakasztó szöget egyre közelebb visszük a felfüggesztési ponthoz, azaz az ingatest pályájának sugara egyre nagyobb lesz. Észrevehetjük, hogy meghatározott magasságot túllépve az ingatest már nem kerül körpályára, hanem a vízszintes sík fölé emelkedve, a fonál valahol meglazul és az ingatest lehullik a körpályáról. A kísérletek arra utalnak, hogy az rúd emelésével hosszabbodó ingafonálban ébredő húzóerő valahol zérusra csökken. A megoldáshoz válasszuk ki gondolatban azt a helyzetet, amikor az inga éppen körbemegy, azaz a fonalerő a pálya legmagasabb pontjában válik zérussá. Ekkor a fonalat megakasztó szög a lehető legmagasabban van és az ingatest a körpálya tetején v sebességgel mozog. A tetőpontra a sebesség vízszintes, a körmozgás centripetális gyorsulását a nehézségi erő biztosítja (a kötélben ébredő erő zérus)

$$mg = \frac{mv^2}{R}$$

ahol R a körpálya sugara, a fonál l hosszának α -ad része ($R = l/\alpha$). Az ingatest sebességét a mozgás során teljesülő mechanikai energia-megmaradás törvényéből számolható. A pálya legfelső pontján a test $(l - 2R)$ távolsággal van lejjebb, mint az indításkor, ennek a szintkülönbségnek megfelelő helyzeti energia alakul át a test mozgási energiájává, tehát:

$$mg \left(l - \frac{2l}{\alpha} \right) = \frac{mv^2}{2}$$

A felírt két egyenletet felhasználva a keresett α -ra 2,5 érték adódik, azaz a szöget a fonál felső rögzítési pontja alatt $0,6l$ távolságra kell beverni.

Kísérleti igazolás

Az ingát deszkalapba (rajztábla) vert szögre függesztjük. A függőlegesen lógó inga zsinórhosszának (l), fentről mérve $0,6l$ -nyi osztópontjában beverjük a táblába az ingát megakasztó szöget (jól megfelel a célnak a nagyméretű acél varrottú is). Ezután megrajzoljuk a deszkán az utóbb bevert szög köré $R = 0,4l$ sugárral húzott kört. Az ingát vízszintesig kitérítjük és elengedjük. Jól megfigyelhető, hogy az ingatest a fonal fennakadása után a berajzolt kör mentén mozog.

Vásári körhinta (B)

Az alábbi fényképfelvétel vásárban készült a körhintáról.

A fotó alapján becsüld meg milyen fordulatszámmal forgott a hinta!

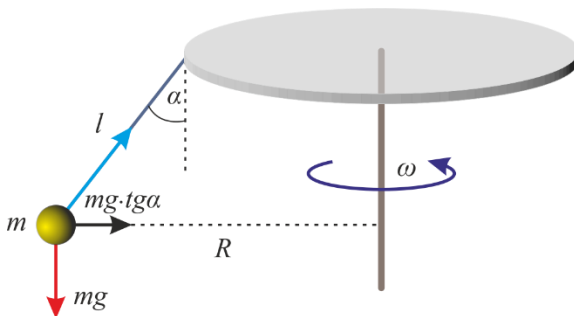
(A körhinta képen is látható kezelője $1,7$ m magasságú.)



Megoldás

A hintában ülők vízszintes síkban körmozgást végeznek.

A szükséges centripetális erőt a székeket tartó lánc biztosítja, amely a függőlegeshez képest α szögben kilendült. A körpályán mozgó testre ható erőket, illetve a geometriai adatokat (a körpálya R sugarát és a lánc l hosszát) a vázlatrajz mutatja.



A körmozgást végző m tömegű test mozgásegyenlete:

$$mg \cdot \operatorname{tg} \alpha = mR\omega^2$$

ahol ω a körhinta szögsebessége, R a székek körpályájának sugara. Innen

$$\omega^2 = \frac{g \cdot \operatorname{tg} \alpha}{R}$$

a fordulatszám pedig

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g \cdot \operatorname{tg} \alpha}{R}}$$

A fordulatszám kiszámításához szükséges adatok a fényképről egyszerű méréssel megállapíthatók, ha a hosszméreteket összevetjük a hintáslegény megadott magasságával. Eszerint a vízszintes síkú körpálya sugara a legény magasságának mintegy ötszöröse, kb. 8,5 m.

A hinta láncának kilendülési szöge a fényképről szintén meghatározható: $\alpha \approx 55^\circ$. (Arra kell ügyelni, hogy a perspektivikus torzulás ne zavarjon meg minket, hiszen a közelebbi székeket tartó láncok látszólag magasabban állnak)

Ezekkel az adatokkal számolva a körhinta kb. 13 fordulatot tesz meg percenként.

Kanyarodó motor mozgásának elemzése fényképek alapján (B)

A mellékelt két fotón egyenes irányban és kanyarban haladva.



A motoros a lehető legnagyobb állandó sebességgel szeretné körbementetni azt a 400 méter hosszúságú pályát, ami két 100 m hosszú félkörívből és két 100 m hosszú egyenes szakaszból áll.

Rajzold be a kanyarodó motorosra ható erőket, és szerkeszd meg az eredő erőt!

Vajon meddig dőlhet be a motoros, hogy megcsúszás nélkül növelhesse sebességét az adott kanyarban?

Mekkora legyen a tapadási súrlódási együttható, hogy ez sikerüljön?

Mekkora lehet a sebesség maximális értéke?

Megoldás

A nagy sebességgel haladó motor számára a kanyarok a kisodródás veszélyét jelentik. A biztonságos kanyarvételt a motoros úgy segíti, hogy a kanyar középpontja felé megdönti a motort. A dőlés szögének a kanyar sugarához és a motor sebességéhez kell illeszkednie.

A kanyarban bedőlve haladó motorosra a nehézségi erő és a talaj által kifejtett erők hatnak. A motorból és a motorosból álló rendszer tömegközéppontjában hat az $(M + m)g$ nehézségi erő. A talaj hatását érdemes két erőre bontva tárgyalni. A motor kerekének az úttal érintkező pontján függőlegesen felfelé hat a talaj F_{ny} nyomóereje, vízszintesen pedig a kanyar közepe felé mutató F_s súrlódási erő, ami megakadályozza a kicsúszást és biztosítja a kanyarodást.

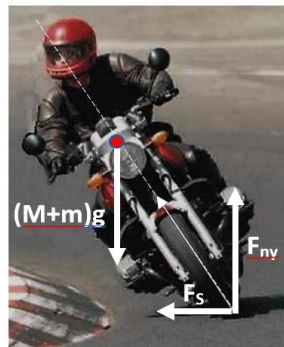
Ezt mutatják a fotóra berajzolt erővektorok.

A motoros egyensúlyának (hogy ne boruljon fel) feltétele az, hogy az erők tömegközéppontra vonatkoztatott forgatónyomatékának eredője is zérus legyen. Ez akkor teljesül, ha a keréknél ható két erő eredője (K) átmegy a tömegközépponton. Az így megszerkesztett \vec{K} vektor a hatásvonalában eltolható a tömegközéppontba. Ezt megtéve a motorosra ható erők végső eredője (F_e) is berajzolható a tömegközéppontba, ahogyan a második ábra mutatja.

Az F_e eredő erő biztosítja a kanyarodó motornak és a motorosnak a v sebességű körmozgás centripetális gyorsulását

$$F_e = (M + m) \frac{v^2}{R}$$

Ha a vektorháromszögbe bejelöljük a fotó alapján a motor α dőlési szögét, az F_e erő kifejezhető:



$$F_e = (M + m)g \cdot ctg\alpha$$

Ezt felhasználva kapjuk az egyenletet, amiből a motor sebessége a kanyarban meghatározható:

$$(M + m)g \cdot ctg\alpha = (M + m)\frac{v^2}{R}$$

A számításához még szükséges adatok:

- a motor dőlésszöge a foton lemérve ($\alpha \approx 53^\circ$, $ctg53^\circ \approx 0,75$)
- R értéke a félkör alakú kanyar feladatban megadott hosszából: $R \approx 32m$

A motor sebessége a kanyarban

$$v = \sqrt{gR \cdot ctg\alpha} \approx \frac{15,5m}{s} = 55,7km/h$$

A F_e eredő erő és az F_S súrlódási erő egyenlősége alapján az út és a motor kereke közti tapadási súrlódást jellemző súrlódási tényező értéke:

$$\mu = ctg53^\circ \approx 0,75$$

Megjegyzés:

- A feladatot a motorhoz rögzített gyorsuló koordináta-rendszert használva egyszerű statika feladatra vezethetjük vissza. Ekkor a tömegközéppontban fel kell venni a kifelé mutató centrifugális erőt, és a forgatónyomatékok eredője tetszőleges pontra vonatkozóan, tehát például a motor kerekének a talajjal érintkező pontjára is. A megoldás azonban rengeteg fogalmi problémát vet fel, ezért csak olyan osztályban ajánljuk, ahol a tehetetlenségi erőkkel részletesen foglalkoztunk. Mindemmel azonban, ha diákjaink vetik fel a centrifugális erő segítségével adható megoldást, akkor ne utasítsuk el, világítsunk rá, hogy a centrifugális erő nem kölcsönhatási erő.

Forduló repülőgép fotójának értékelése (B)



Határozd meg a kép alapján, hogy milyen sugarú körben fordul a repülőgép, ha tudjuk, hogy sebessége 100 m/s, és magasságát tartja!

Hogyan függhet a sugár a gép tömegétől?

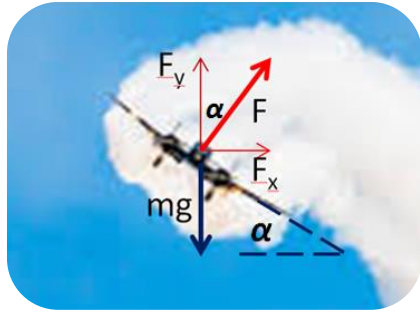
Megoldás

A repülőgépre ható aerodinamikai erők eredője mindig a szárnyak síkjára merőlegesnek tekinthető. Ha a repülőgép megdől, automatikusan fordulni kezd. A fordulási kör sugarát a dőlt helyzetű gépre ható erők értelmezésével adhatjuk meg. A fotóra berajzolható a gépre ható két meghatározó erő, a függőlegesen lefelé ható nehézségi erő (mg) és az szárnyak síkjára merőleges, a megdőlt repülő esetén ferdén felfelé mutató aerodinamikai erő. Az F erőt célszerű függőleges és vízszintes komponensekre bontani.

Mivel a feladat szerint a gép magassága nem változik, az F erő függőleges komponense megegyezik a nehézségi erővel

$$F_y = F \cos \alpha = mg$$

Az F erő vízszintes komponense a gép haladási sebességére merőleges ezért centripetális gyorsulást ad a gépnek, amely így R sugarú pályán kanyarodik.



$$F_x = F \sin \alpha = m \frac{v^2}{R}$$

A két egyenletet egymással elosztva kapjuk

$$\frac{F_x}{F_y} = \tan \alpha = \frac{v^2}{gR}$$

Innen a forduló görbületi sugara

$$R = \frac{v^2}{g \cdot \tan \alpha}$$

A gép sebességét a feladat megadja ($v = 100$ m/s), az egyenletekben szereplő $\tan \alpha$ értéke a fotón az aerodinamikai erő két komponensét lemérve, ezen hosszúságok arányaként meghatározható.

$$\tan \alpha = \frac{F_x}{F_y} \approx \frac{2}{3}$$

A számítás végeredményeként a repülőgép fordulási sugarára kapott érték:

$$R \approx 1,7 \text{ km}$$

REZGÉSEK

A rezgések témaköre a körmozgáshoz hasonlóan nem egyszerű, ezért itt is segíthet a tanulók motiválásában a kísérleti munkával, mérésekkel oldott tárgyalás. A rezgések az iskolai fizikában nagyon erősen kötődnek a lineáris erőtvényű rugókhoz. Ennek az egyoldalú szemléletnek az oldására érdemes a fizika többféle területéről vett rezgőmozgást is megvizsgálni, ahol az erők eredője lesz lineáris erőtvényű. Szemléletformáló lehet a csillapodó rezgésekről készített felvételek analízise is. A kísérletezés során a különböző rugók vizsgálata megmutatja a rugók lineáris erőtvényének érvényességi körét is.

Rugón rezgő test periódusidejének meghatározása vonalzóval (B)

Egy ismeretlen paraméterű rugó, az ugyancsak ismeretlen súlyú test ráakasztásakor Δx cm-rel megnyúlik. A megnyúlás nagysága vonalzóval lemérhető.

Számítsd ki a mekkora a rezgés periódusideje, ha a rugóra akasztott testet rezgésbe hozzuk?

Megjegyzés:

- A feladatban szereplő Δx számértékét előzetes mérés alapján adjuk meg! Válasszunk ki a szertárban egy nem túl erős spirálrugót és akasszunk rá akkora tömeget, hogy a megnyúlás jól mérhető (3-4 cm) legyen, de ne nyújtsa meg túlságosan a rugót. A szertárban előzetesen végezzük el a rezgésidő mérését is.

Megoldás

A rugóra akasztott rezgő test periódusidejét a test m tömegének és a rugó D direkciónak állandójának értéke határozza meg:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Az m/D hányados értékét a rugóra akasztott test nyugalmi állapotára felírt erőegyensúlyból határozhatjuk meg

$$mg - D\Delta x = 0$$



ahonnan

$$\frac{m}{D} = \frac{\Delta x}{g}$$

A keresett rezgésidő tehát a megadott Δx megnyúlás és g ismeretében:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta x}{g}}$$

formulából adódik.

Kísérleti igazolás

A kísérleti összeállítást az ábra mutatja. A rugó megnyúlásának pontos leolvasását segíti, ha tükörskálát alkalmazunk, vagy a rugó végére könnyű mutatót rögzítünk. A megnyúlást leolvasva a rezgésidő a feladat megoldásában leírt módon kiszámítható.

A számított eredmény ellenőrzésére hozzuk rezgésbe a testet és stopperrel mérjük le 10 rezgés idejét! Az ebből meghatározott rezgésidőt hasonlítsuk össze a kiszámított eredménnyel!

Ha a rugót és a testet jól választottuk meg, a lineáris erőtvény a maximális megnyúlás esetén is fennáll, a két érték 5% hibán belül megegyezik.

Tömegmérés az űrállomáson (B)

Az Föld körül keringő nemzetközi űrállomáson (International Space Station, ISS) egyre hosszabb ideig tartózkodnak az asztronauták. Az extrém életkörülmények miatt fontos az űrhajósok fizikai, egészségi állapotának ellenőrzése, így a „testsúlyuk” mérése is. Mivel az űrhajón a földi személymérleg nem használható, a mérnökök sajátos űrmérleget konstruáltak.



(<https://www.youtube.com/watch?v=8rt3udip714>)

Magyarázd el, miért nem működik az űrhajóban a közönséges fürdőszobamérleg!

Az „űrmérleg” lényegében egy rugós szék, amelynek saját tömege 6,88 kg. Az űrmérleg működése a NASA honlapjáról átvett YouTube videón megtekinthető.

Értelmezd röviden az űrmérleg működését!

A videót megnézve mérd meg az ismert tömegű szék (saját tömege $m_{szék} = 6,8 \text{ kg}$) rezgésidőjét, majd ismételd meg a mérést úgy is, hogy a székkal együtt rezeg az űrhajós is! (A mérési hiba csökkentése miatt célszerű minél több rezgési periódus összidejét lemérni és ebből számítani egyetlen rezgés periódusidejét.)

A két rezgésidő ismeretében határozd meg Jeffrey Williams űrhajós testtömegét!

Megoldás

Rugón rezgő test esetén a rezgés periódusidejét a test tömege (m) és a rugóállandó értéke (D) határozza meg: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$

Az üres szék rezgése esetén a videón lemérhető rezgésidő $T_0 \approx 0,8 \text{ s}$

A fenti közismert rezgésidőformula átrendezésével, valamint a mért rezgésidő és a szék tömegének behelyettesítésével fejezzük ki a szék rezgését meghatározó effektív rugóállandó értékét!

$$D_{eff} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} m_{sz}$$

A székre rákapaszkodó és azzal együtt rezgő űrhajós M tömege megnöveli a rezgő rendszer tömegét ($M + m_{sz}$). A rezgés effektív rugóállandója nem változott, a rezgésidő is megnőtt (T^*) az üres szék (T_0) periódusidejéhez képest. A megnövekedett rezgésidő videóról meghatározott értéke $T^* \approx 2,9 \text{ s}$.

A rezgésidő-formula aktualizált felírása után az egyenletből az űrhajós tömege kifejezhető.

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{m_{sz} + M}{D_{eff}}}$$

A rezgésidő-képletbe beírva D_{eff} fenti kifejezését a következő egyenletet kapjuk, aminek egyetlen ismeretlen mennyisége az űrhajós M tömege:

$$\frac{m_{sz}}{T_{sz}^2} = \frac{(m_{sz} + M)}{(T^*)^2}$$

Az ismert adatok felhasználásával az űrhajós keresett testtömege $M \approx 82 \text{ kg}$.

Rugók soros és párhuzamos kapcsolása (B)

Két pontosan egyforma spirálrugót egymásután kapcsolva M tömeggel megterhelünk majd rezgésbe hozva megmérjük a T_1 rezgésidőt. Ha ugyanezeket a rugókat párhuzamosan kapcsoljuk össze és ugyanazon M tömeggel megterhelve megrezgetjük, T_2 rezgésidőt mérünk. Mekkora a mért rezgésidők aránya?

Megoldás

A párhuzamosan egymásmellé kapcsolt rugók eredő rugóállandója az párhuzamos rugók rugóállandóinak egyszerű összege:

$$D_{eredő} = D_1 + D_2 + \dots + D_N$$

két egyforma párhuzamosan kötött rugó esetén tehát $D_{eredő} = 2D$. A párhuzamosan kapcsolt rugókra akasztott M tömeg rezgésideje:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{M}{2D}}$$

Sorba kapcsolt rugók eredő rugóállandóját "reciprokos összegzéssel" kapjuk meg

$$\frac{1}{D_{eredő}} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} + \dots + \frac{1}{D_N}$$

Két pontosan egyforma D rugóállandójú sorba kapcsolt rugó eredője:

$$D_{eredő} = \frac{D}{2}$$

A sorba kapcsolt rugókra akasztott M tömeg rezgésének periódusideje:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{M}{D/2}} = 2\pi \sqrt{\frac{2M}{D}}$$

A két rezgésidő aránya tehát

$$\frac{T_1}{T_2} = 2$$

Kísérleti igazolás

A kísérleti igazolás első lépéseként mutassuk be, hogy a kiválasztott két rugó valóban azonos rugóállandójú! Ehhez a két rugót akasszuk egymás mellé és terheljük mindegyiket ugyanakkora tömeggel, majd egyszerre hozzuk őket rezgésbe! Ha a két rugó folyamatosan szinkronban mozog, a két rugóállandó biztosan azonos.

Az egymás mellé akasztott rugók alsó végét az ábra szerint kössük össze könnyű merev rudacskával, majd a rúd közepére akasszunk valamilyen tömeget! A tömeget kissé lehúзва és magára hagyva hozzuk rezgésbe a rendszert és mérjük meg a rezgésidőt! (célszerű legalább 10 rezgés idejét mérni)

A rugókat kössük sorba és az alsóra akasszuk fel a korábban használt összekötő rudacskát és a tömeget! Hozzuk rezgésbe a rendszert és mérjük meg a rezgésidőt!

Megjegyzés:

- A tömeg és a rudacska megválasztásánál ügyeljünk arra, hogy a rezgésidő elegendően nagy legyen, (jól mérhető) de a rugó megnyúlása még a lineáris erőtartományban legyen.
- Egyszerűsíthetjük és gyorsíthatjuk az igazoló kísérletet, ha számítógépes rezgésidőmérést alkalmazunk.
- Film: http://fiztan.phd.elte.hu/letolt/rugok_kapcsolasa.wmv
- A párhuzamosan kapcsolt rugók esetén lényeges, hogy mindkét rugó megnyúlása ugyanakkora legyen, ezért, ha különböző rugóállandójú rugókat használunk, akkor ügyelni kell arra, hogy a teher úgy kapcsolódjék az összekötő rúdhhoz, hogy az ne billenjen ki vízszintes helyzetéből.

Felugorhat-e az asztról két rugóval összekötött test? (C)

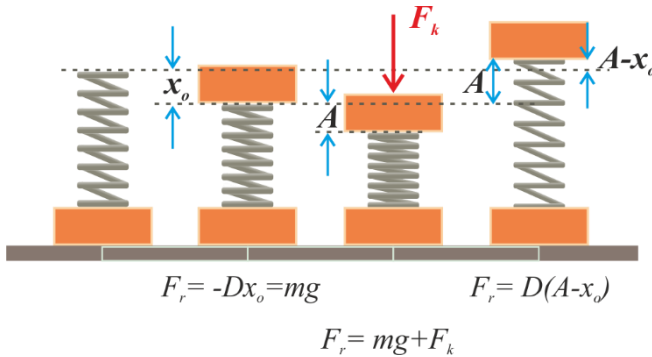
Vízszintes asztrra az ábrán látható módon helyezzünk húzó-nyomó rugóval összekötött egyforma tömegű korongokat.

A felső tömeget nyomjuk le, majd hirtelen engedjük el! Ha az összenyomás nem volt túl nagy, a rugón lévő test rezgésbe jön. (Mutassuk be a jelenséget!) Ha a nyomóerő bizonyos értéket meghalad, a kinyúló rugó az alsó testet is fejrántja az asztról. (Mutassuk be a jelenséget!)

Mekkora erővel kell összenyomni a rugót, hogy miután elengedjük, éppen annyira emelje meg az alsó m tömegű korongot, hogy az egy pillanatig ne nyomja az asztalt.

Megoldás

Tekintsük az ábra négy fázis-rajzát!



Az első rajz a deformálatlan rugót mutatja (a felső korong még nincs rárögzítve).

A második rajz nyugalmi állapotban ábrázolja a két korongból és a köztük lévő rugóból álló rendszert. A felső korong súlya alatt a rugó Δx -szel nyomódott össze, a rugóban ébredő nyomóerő $F_r = D\Delta x = mg$, az asztallapra ható erő éppen $2mg$. (Mivel az alsó korong nyugalomban van, a rá ható erők eredője zérus. Az asztal által kifejtett erő tehát megegyezik a korongra ható nehézségi erő és a rugó által kifejtett nyomóerő összegével.) Ha a rugót kissé lenyomjuk a felső test egyensúlyi helyzetétől le-fel mozogva végez rezgéseket. A rezgések amplitúdója az a távolság amennyivel a testet az egyensúlyi helyzeté alá nyomtuk.

A harmadik fázisrajz a kritikus erővel összenyomott állapotot mutatja, bejelölve a majdani rezgés A amplitúdóját. A rugót A -val összébb nyomó kritikus erő nagysága $F_k = DA$. Az utolsó rajz azt a pillanatot mutatja, amikor a nyomás megszűntetése után szétugró rugó éppen a legjobban kinyújtott állapotában van, azaz a rezgőmozgást végző felső korong pontosan felső szélő helyzetében van. Ebben az állapotban a felső test egyensúlyi helyzetétől A amplitúdónyi távolságban van, a rugó hosszának megnyúlása $(A - x_0)$, a rugó mindkét végén fellépő összehúzó erő pedig $F_r = D(A - x_0)$. Ez az a pillanat amikor a feladat szerint az alsó korong még nem emelkedik fel a talajról, de nem is nyomja azt. A testre ható két erő, a rugó által felfelé kifejtett emelő erő és a testre ható nehézségi erő, eredője ebben a pillanatban zérus; azaz

$$D(A - x_0) = mg$$

Felhasználva, hogy $F_k = DA$, továbbá $Dx_0 = mg$, a keresett F_k erő $F_k = 2mg$

Megjegyzés:

- A testek mozgásának teljes leírása szép, de bonyolult feladat.

Kísérlet

A feladat kísérleti illusztrálásához szükséges eszközt magunk is egyszerűen elkészíthetjük. Rugóként használjunk kis méretű kárpitos-rugót! A két egyforma korongot keményfából alakíthatjuk ki. Tömegük akkora legyen, hogy a rugó a felső korong súlya alatt már észrevehetően összenyomódjék, de még ennek az erőnek háromszorosát is egyensúlyozni tudja. Az alsó és a felső korongot erősítsük fixen a rugó két végére! Fontos, hogy a rugó függőlegesen tartsa a felső korongot és ne billenjen oldalra. Ha a rugó ezt nem tudná biztosítani, az alsó korongba rögzítsünk két függőleges kötőtűt, amit átvezetünk a felső korong kissé bővebbre készített furatain. A kísérlet bemutatásához készítsünk további kettőt, a rugóhoz rögzített korongokhoz teljesen hasonló (azonos tömegű) korongot is!

Állítsuk az eszközt az asztal szélére és helyezzünk alá vékony, az asztal szélén lelógó selyempapírcsíkot. A papírszelet lelógó végére csiptessünk krokodil- csipeszt! A csipesz súlya kirántja a papírt az alsó korong és az asztal közül, ha a korong nem nehezedik az asztalra – ez fogja jelezni, hogy a feladatban meghatározott feltétel teljesül. A számítás szerint, a rugó kellő összenyomásához szükséges erő két további korong felhelyezésével biztosítható. Hirtelen mozdulattal emeljük le (rántsuk felfelé) a kritikus erőt adó két korongot! Az asztal és az alsó test között ható erő megszűnését jelzi, hogy a papírcsík akadálytalanul csúszik ki közülük.

Felugró tapadókorongos rugós játékok (C)



Az alábbi tréfás gyerekjáték gyakran kapható trafikokban, búcsúban. A játék két részből áll: a műanyagkorong talpazatból és a rá rugóval csatlakozó felső részből. Ez utóbbi mintázhat ördögfejet, zöldbékát, nyuszt stb.

A figura alján a rugó felső végét tapadókorong veszi körbe. A rugót összenyomva a tapadókorong rátapad a játék alaplapjára és így hosszabb-rövidebb ideig összenyomott helyzetben rögzíti a rugót. Mivel a tapadó felület nem tökéletesen sima, ezért lassan levegő szívárog be a gumiharang alá és az egyszer csak elenged. Ekkor a feszülő rugó szétugrik és magasba röpíti a figurát rugóstól, talpastól. Az hirtelen ugrás általában váratlanul éri és meglepi a tájékozatlanokat. Határozzuk meg, mikor ugrik magasabbra a játékszer, ha össztömegének nagyobb része a talpában vagy ha a felső figurában van?

Megoldás

A jelenség azért is meglepő, mert első pillanatban úgy tűnik, mintha ellentmondana a Newton törvényeknek, hiszen az ördög figura látszólag belső erők hatására ugrik fel az asztalról. Részletesebben végig gondolva a folyamatot, könnyen megérthető azonban, hogy a talaj kényszererejének hatására ugrik fel.

A játékszer mozgásának leírásakor a fejet és talpat összekötő rugók nyomórugóként kezelhetjük, azaz úgy tekinthetjük, hogy csak összenyomással változtatható a hossza, megnyújtani nem lehet.

A tapadókorong kioldásának pillanatában a rugó a fejet felfelé löki, a talpat pedig lefelé nyomja. A fej gyakorlatilag szabadon mozog, a talp azonban nem mozdul el. Ez a mozgás addig tart, amíg a rugó eléri nyújtatlan hosszát. Eddig a pillanatig az ördögfej sebességet ér el, amit az

$$\frac{1}{2} M v_o^2 = \frac{1}{2} D x_o^2 - M g x_o$$

energia-megmaradási tételből határozhatunk meg.

Mivel a rugó eredeti hosszát elérve, nyújthatatlanná válik, a felső test, csak akkor folytathatja mozgását, ha az alsó is vele együtt mozog tovább, azaz a két test sebessége hirtelen azonossá válik.

Ezt a pillanatszerű változást az M és m tömegű test közötti tökéletes rugalmatlan ütközésként foghatjuk fel. Az ördög felugrási sebessége tehát

$$u = \frac{M v_o}{m + M}$$

lesz. Beírva ide az energia-megmaradás törvényéből adódó

$$v_o = \sqrt{\frac{D}{M} x_o^2 - 2 g x_o}$$

értéket

$$u = \sqrt{\frac{D M x_o^2 - 2 g M^2 x_o}{(M + m)^2}}$$

Amennyiben $M + m = \text{állandó}$, továbbá, ha a két tömeget megcseréljük, a felugrási sebessége

$$u' = \sqrt{\frac{D m x_o^2 - 2 g m^2 x_o}{(M + m)^2}}$$

Határozzuk meg, hogy mi a feltétele pl. annak, hogy $u > u'$ legyen.

$$DMx_0^2 - 2gM^2x_0 \geq Dmx_0^2 - 2gm^2x_0$$

$$Dx_0^2(M - m) \geq 2gx_0(M^2 - m^2)$$

$$Dx_0^2 \geq 2g(M + m)$$

Ez az előző feladat alapján éppen annak a feltétele, hogy az ördögfej felugorjon. Következésképpen az ördögfej akkor ugrik magasabbra, ha a tömegének nagyobb része a fejére jut, és a kisebb rész a talpára.

Megjegyzés:

- Érdemes megemlíteni, hogy a játékszer jól modellezi azt, amikor valaki leuggolva majd hirtelen kiegyenesedve felugrik a földről.

Kísérlet

A feladatot a sok magyarázat helyett célszerű a játékszer bemutatásával kezdeni. A bemutatás után feltett kérdés ezután már nem szorul további magyarázatra.

A feladat eredményének igazolásához a játékot előzőleg kicsit átalakítjuk, preparáljuk. A saját tömegével kb. megegyező többlet tömeggel szereljük fel, mégpedig úgy, hogy az egyszer a talprész, aztán a felső rész tömegét növelje. Az általunk használt és a rajzon is bemutatott ugró ördögfej esetén ezt úgy oldottuk meg, hogy először a játék talpának rugótartó kúpos részébe -ami alulról nézve belül üres-kis ólomrudacskát töltünk és a talpra ragasztott szigetelőszalaggal rögzítettük. A felugrás magasságát néhány ismételt méréssel meghatároztuk, majd az ólomrudat a talpból kivettük és a figura fejében előre elkészített furatba helyeztük. Az ólomrudat itt is szigetelőszalaggal rögzítettük, majd elvégeztük a kísérletet és megmértük a felugrás magasságát. A két magasság között jól látható a különbség, a játék magasabbra ugrik, ha a felső rész tömege a nagyobb.

Milyen erősek a lábizmaink (C)

Az előző feladatban tárgyalt felugró rugós játék egyszerű modellje lehet annak a jóval bonyolultabb folyamatnak, aminek során valaki guggolásból páros lábbal a magasba ugrik. Az elrugaskodáshoz behajlított lábak a munkavégzésre kész összenyomott rugónak felelnek meg. A lábak csak addig gyorsítják az ugrót, amíg a lábak nyújtott helyzetbe kerülnek, azaz amíg a talajra támaszkodnak. Itt is fennáll a hasonlóság a játékkal, ahol a nyomórugó kinyúlása elhanyagolható. A játék felugrásakor a rugóerő változik, ezért a játék maximális kinetikus energiáját a

munkatételből számíthatjuk. Az ember felugrása során a lábak izomereje is változik. Mivel itt a kezdeti „rugóenergia” sem használható. A sportoló lábizmainak átlagos erejének munkájával számolunk. Az alábbiakban a pároslábú felugráskor a lábizmaink által kifejtett átlagos erő nagyságára adunk becslést.

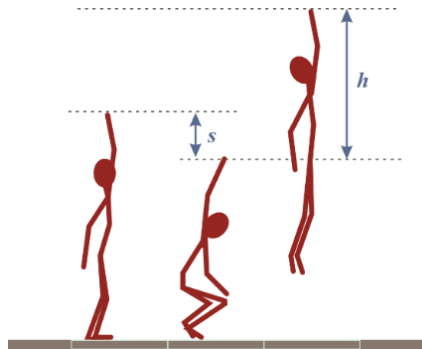
Végezzünk helyszíni mérést, amely alapján meghatározhatjuk, hogy saját testsúlyunkhoz viszonyítva mekkora átlagos erőt tudunk kifejteni lábizmainkkal, páros lábbal történő felugrás során!

A helyszíni kísérlet végrehajtásának fázisait az ábra szemlélteti. Álljunk egyenes testtartással magasba nyújtott karral a fal mellé, amelyre előzőleg egy ív csomagolópapírt rögzítettünk. Jelöljük meg a papíron nyújtott karunk magasságát! Hogy a páros lábbal történő felugráshoz kellő lendületet szerezzünk guggoljunk le, és ismét tegyünk jelet a papírra felnyújtott kezünk magasságában! A talajtól jól elrugaszkodva páros lábbal ugorjunk minél magasabbra, miközben nyújtott karunkkal megjelöljük a maximális emelkedési magasságot!

Mérd le a papírra rajzolt jelek távolságát az ábrának megfelelően és jegyezzük fel s és h értékét!

Értelmezd fizikai szempontból a lemért s és h távolságok szerepét a felugrás során, átgondolva, hogy a feladat során a lábizmok átlagos erejét kell kiszámolni!

Becsüld meg, hogy a Holdon hasonlóan elrugaszkodva és felugorva milyen magasra emelkednél?



(Ez utóbbi számítás során vedd figyelembe, hogy a Hold sugara 3/11 része a Föld sugarának, és a Hold tömege 1/81 szerese a Föld tömegének!)

Megoldás

A páros lábú felugrás első szakaszában lábunk a talajon támaszkodik és a lábizmok átlagos F erejének s úton végzett munkája mozgási energiát ad a testünknek. Az ugrás második szakaszában levegőbe emelkedve mozgási energiánk helyzeti energiává alakul át. A maximális h emelkedési magasságnál a helyzeti energia a lábizmok s úton végzett munkájával azonos.

$$F \cdot s = mgh$$

Innen a lábizmok átlagos ereje:

$$F = mg \frac{h}{s}$$

Átlagos kondícióban lévő diák esetén h értéke közel kétszerese s értékének. Ez azt jelenti, hogy páros lábbal elrugaszkodva izmaink kb. a testsúlyunk kétszeresének megfelelő erőt tudnak kifejteni.

Az eredményt alátámasztja az a tapasztalat is, hogy egylábás guggolás során hasonló terhelés van egy lábunk izomzatán. Az erő számítással becsült értékét nagyságrendileg igazolja az a tapasztalat, hogy meglehetősen nehéz a féllábás guggolás, ami során közel a számított terhelés jut egy lábra.

A Holdon a páros lábbal végzett felugrás magassága nagyobb, mert a nehézségi gyorsulás kisebb, mint a Földön. A gravitációs erőtörvényből adódóan egy M_x tömegű, R_x sugarú égitest felszínén a nehézségi gyorsulás (g_x) értéke

$$g_x = \gamma \frac{M_x}{R_x^2}$$

A Holdon a nehézségi gyorsulás értéke a földi értékhez viszonyítva

$$\frac{g_H}{g_F} = \frac{M_H R_F^2}{R_H^2 M_F} = \frac{1}{81} \left(\frac{11}{3} \right)^2 \approx 0,167$$

A nehézségi gyorsulás értéke a Holdon: $g_H = 1,57 \text{ m/s}^2$

A felugrás magasságának kiszámításánál azt vesszük figyelembe, hogy az ember lábainak izommunkája a Holdon és a Földön azonos, így felugráskor a helyzeti energia maximális értéke is azonos.

$$m g_H h_H = m g_F h_F$$

Innen az ugrás magassága a Holdon:

$$h_H = \frac{m g_F h_F}{m g_H} = \frac{h_F}{0,16} = 6,25 h_F$$

Mennyi munkát végzel fekvőtámasz során?

Gondold végig energetikai szempontból a fekvőtámasz gyakorlatot.

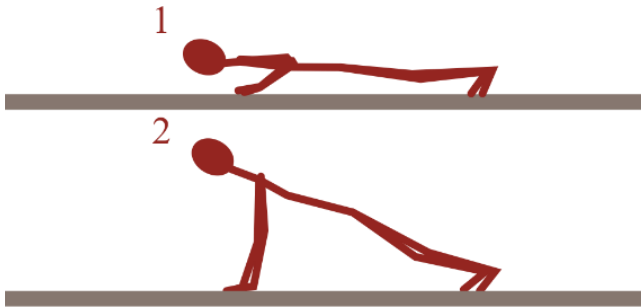
Becsüld meg mekkora munkát végzel, miközben fekvésből (1) lassú, egyenletes mozgással szabályos fekvőtámasz-helyzetbe (2) nyomod ki magad!

Mekkora munkát végzel, ha ugyanilyen lassan alaphelyzetbe engeded vissza magadat?

Mennyi munkát végzel a mozgás egy ciklusa alatt, azaz az előző két mozgás-szakasz alatt összesen?

Adj becslést arra, hogy hány kockacukrot kellene megenned, hogy a fekvőtámasz száz ciklusa alatt elhasznált energiádat pótolod.

A számításhoz szükséges adataidat önállóan becsüld meg! Az egy kockacukorban tárolt energiát pl. a félkilós csomagokban található cukrok számának és a dobozon található nagyjából 1600 kJ/100 g adat alapján határozhatod meg.

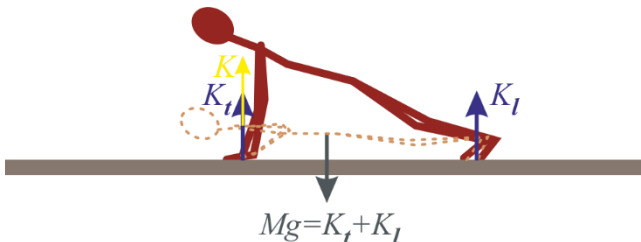


Megoldás

Amikor fekvő helyzetből támasz-helyzetbe nyomjuk ki magunkat, tömegközéppontunk felemelkedik, így karizmaink munkája a testünk helyzeti energiájának növelésére, felemelésére fordítódik. Tömegközéppontunk csípőnk táján, testmagasságunknak kb. felében van. Ha karunk kinyújtásakor vállunk magasságváltozása h , tömegközéppontunk magasságváltozása kb. $h/2$. Ezt felhasználva a fekvőtámasz során végzett munka közelítő értéke a

$$W = mg \frac{h}{2}$$

formulával határozható meg. A feladat numerikus megoldásához minden diáknak saját adatait, illetve ezek becsült értékeit kell behelyettesítenie a fenti képletbe.



Megjegyzés:

- A feladatra fentiekben adott megoldás nem szokott gondot okozni a tanulók számára. Néhány egyszerű kérdéssel azonban könnyen zavarba ejthetők, ami alkalmat ad arra, hogy a munkatétel és az impulzustétel fogalomkörét mélyebben megértethessük. Érdemes tehát feltenni a következő kérdéseket: Milyen előjelű a nehézségi erő munkája? A nehézségi erő mellett milyen erő és mekkora úton végez még munkát?
- A válaszok csak az impulzus és a munkatétel gondos analizisével adhatók meg. Abból indulunk ki, hogy a test impulzusát csak külső erők változtathatják meg, a kinetikus energiáját azonban belső erők is. Külső erők a nehézségi erőn túl a támaszkodó tenyérnél (K_t) és a lábfejnél (K_l) lépnek fel. Mivel a test egyenletesen emelkedik, a rá ható külső erők eredője zérus, tehát $Mg = K_t + K_l$. A nehézségi erő iránya ellentétes az elmozdulással, tehát munkája negatív. A talaj által kifejtett erők elmozdulása zérus, tehát ott munkavégzés nincsen. A munkatétel értelmében azonban az összes erők munkájának zérusnak kell lenni, hiszen a lassan mozgó test kinetikus energiája nem változik. Ez csak úgy lehetséges, ha a belső erők akkora pozitív munkát végeznek, mint a negatív irányú nehézségi erő. Ahhoz, hogy ezt a szokásos módon szemléletesé tegyük, el kell képzelnünk a belső erők hatását. A helyzet most egyszerű, a törzset emelő belső erőt a karok fejtik ki a vállnál (az ábrán K sárgával jelölve). A vállnál támadó erő nagysága durván fele akkora, mint a testre ható nehézségi erő, és nagysága és iránya is megegyezik a tenyérre és a támaszkodó lábfejre ható erővel. A váll magasságának változása azonban kétszerese a tömegközéppont emelkedésének, így a munkatétel szerinti számítás igazolódik. A belső (izom)erőhöz nem tudunk erőtvényt kapcsolni, munkája különböző tényezők (sebesség, hőmérséklet, előzmények stb.) függvénye, az azonban biztos, hogy szervezetünk kémiai energiát használ fel a munkavégzéshez. Így a fekvőtámasz első szakaszában minimálisan ezt az energiát kell kockacukorral pótolnunk.

A test leengedése során az erők eredője továbbra is zérus, azonban most a nehézségi erő pozitív munkát végez, az általunk kifejtett belső erő pedig a munkatétel értelmében ugyanekkor negatív. Hová lesz a nehézségi erő potenciális energiája? Ez az energia disszipálódik, szervezetünk hővé alakítja, és leadja környezetnek. A folyamat jobb megértését elősegíti, ha elképzeljük, hogy ha a karjainkkal nem tartunk ellen a nehézségi erőnek, hanem a fekvőtámasz csúcspontján elengedjük magunkat. A nehézségi erő munkája miatt ekkor kinetikus energiához jutnánk, és kisebb-nagyobb sebességgel arca zuhannánk. Földet éréskor a test megáll, kinetikus energiája elvész, és gyors folyamatban hőként szétszóródik a környezetben. Ennek a gyors folyamatnak disszipáló hatását lassítja le a fekvőtámasz során a belső erő. A test hőleadása miatti energiavesztését ismét pótolni kell példánkban

kockacukorral. Durva becsléssel azt mondhatjuk tehát, hogy egy fekvőtámasz-ciklusban az általunk végzett összes munka zérus, de a felhasznált energia ennél jóval több. A fekvőtámasz első ütemének helyzeti energia változását megduplázva becsülhetjük a fekvőtámasz teljes energiafelhasználását.

Mit jelent ez a kockacukorral való pótlásban? Ez függ a sportoló egyéni adataitól. Ha a fekvőtámaszt 60 kg-os gyerek végzi, akinek karja kb. 0,6m hosszúságú (ez a súlypont emelkedés kétszerese), akkor a száz fekvőtámasz során felhasznált energia 36 kJ. A fél kilogrammos kockacukor dobozában 147 cukor van, így egyetlen cukorral nagyjából 54 kJ energiát viszünk szervezetünkbe. A száz fekvőtámasz során mechanikai becsléssel megállapított energia pótlásához tehát egyetlen kockacukor is elegendő lenne.

Megjegyzés:

- A becslés azért rossz, mert az izomerő kifejtéséhez szükséges kémiai energiákat nem tudjuk teljes mértékben mechanikai munkává alakítani. Nem véletlen, hogy az emberi test energiafelhasználását sohasem a végzett munkával fejezik ki. Általában a test által leadott hővel mérjük. Amikor nyugalomban vagyunk, testünk akkor is lead hőt, hiszen testhőmérsékletünk magasabb a környezeténél. Amikor mozgunk, például futunk, akkor a hőleadás megemelkedik. A test energiamérlegének becslésére a hőleadás figyelembevétele pontosabb lehetőséget ad, mint az iménti mechanikai munkára alapozott próbálkozás. Természetesen az impulzus és munkatétel, az erők, tökéletesen használhatóak a mozgás leírására és kinetikus energiájának kiszámítására. A kockacukor energiájával való összevetés azonban csak játék, reális becslésre nem használható.

Vízben úszó, söréttel terhelt kémcső rezgése (B)

Söréttel nehezített kémcső (úszó) h_0 mélységig vízbe merül. Ha a kémcsövet, függőleges helyzetét megtartva, ujjunkkal mélyebbre nyomjuk, majd hirtelen elengedjük, az úszó csillapodó rezgésbe jön. Mekkora a rezgés periódusideje?

Megjegyzés:

- A h_0 számértékét a tanár az előzetesen elvégzett kísérlet alapján adja meg!

Megoldás

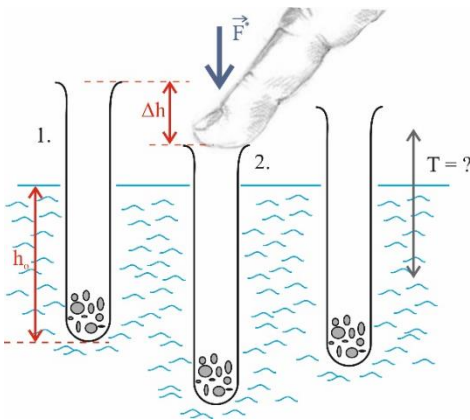
Az egyensúlyi helyzetéből kitérített úszó harmonikus rezgőmozgást végez, mert a testre ható erők eredője a kitérítés Δh mértékével arányos, de ellenkező irányú. Ez

könnyen igazolható, ha figyelembe vesszük, hogy a lenyomott úszóra a nehézségi erő és a felhajtóerő hat. Az eredő erő:

$$mg = A\rho_{\text{víz}}gh_o \quad \text{és} \quad F^* = A\rho_{\text{víz}}g(h_o + \Delta h) - mg$$

$$F^* = A\rho_{\text{víz}}g\Delta h$$

$$F_e = mg - A\rho g(h_o + \Delta h)$$



ahol m az úszó tömege, A a kémcső keresztmetszete, $\rho_{\text{víz}}$ a víz sűrűsége, h_o az úszó egyensúlyi merülése, g a gravitációs gyorsulás. Felhasználva, hogy egyensúly esetén $mg = A\rho gh_o$, az eredő erő kifejezése az

$$F_e = A\rho g\Delta h$$

összefüggésre egyszerűsödik. A lineáris erőtvényben a Δh kitérés együtthatója effektív rugóállandónak tekinthető ($D_{\text{eff}} = A\rho g$). A rezgésidőt a csillapodás lényegében nem befolyásolja így

meghatározására a szokásos $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ képletet használhatjuk, ahol a D rugóállandó helyére a $D_{\text{eff}} = A\rho g$ effektív rugóállandót, az m helyére az úszó egyensúlyi egyenletéből kifejezett tömegét ($m = A\rho h_o$) helyettesítjük.

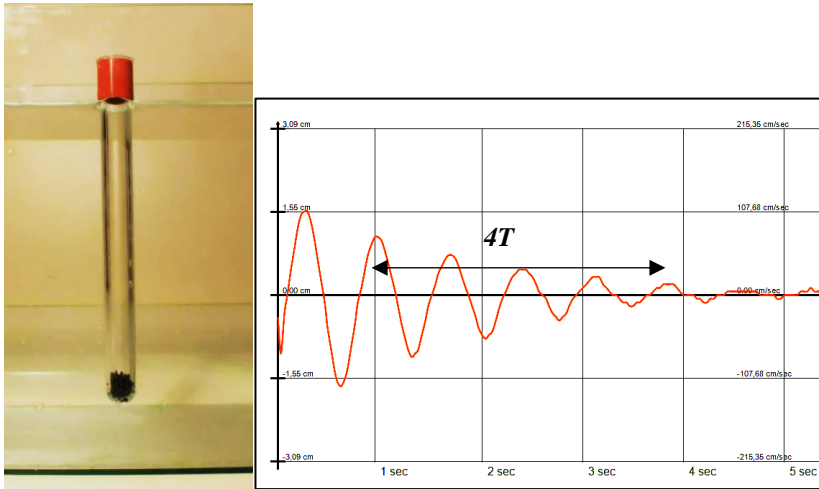
A keresett rezgésidő tehát:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{A\rho h_o}{A\rho g}} = 2\pi\sqrt{\frac{h_o}{g}}$$

Kísérlet

Válasszunk hosszú keskeny kémcsövet és tegyünk bele annyi sörétszemet, hogy stabilan ússzon, és lehetőleg minél nagyobb része nyúljon ki a vízből. Mérjük le a merülés h_o mélységét! A kémcsövet nyomjuk le addig, amíg szája a vízszint közelébe ér és engedjük el! A rezgésidő mérésére a jelentékeny csillapítás miatt csak 3-4 periódus áll rendelkezésünkre. Mivel a jó méréshez némi gyakorlat is kell, célszerű, ha a stoppert a tanár kezeli. Hasonlítsuk össze a számított és a mért rezgésidőt (A hiba nem több 10-20 %-nál.)

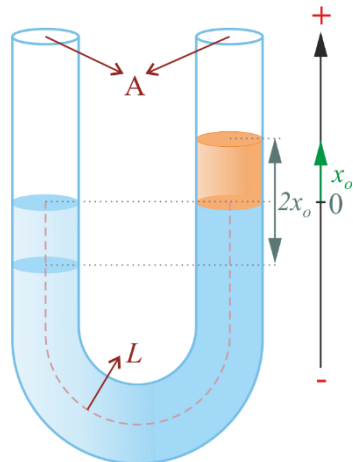
A mérés még érdekesebb, ha a kémcső rezgőmozgásáról videófelvételt készítünk és számítógépes mozgásértékelő programmal (pl. LabCamera, Tracker) kiértékeljük. A mozgás számítógéppel kirajzoltatott grafikonja csillapodó rezgés, amiről a rezgésidő egyszerűen leolvasható.



Folyadék lengő-mozgása U alakú csőben (B)

A helyszínen bemutatott kísérlet során az U alakú üvegcsőbe vizet töltünk. Függgőlegesen tartva az edényt a két szárban egyenlő magasságban áll a folyadék. Ezután az U alakú csövet oldalra döntjük, és az egyik oldalon ujjunkkal befogjuk a cső száját. Miután a csövet újra függőlegesbe állítottuk, a két szárban a folyadékszintek eltérő magasságban állnak. A cső száját elzáró ujjunkat elvéve, a csőben lévő víz lengésbe jön.

A rajznak megfelelően jelölje A a cső keresztmetszetét, L a „görbült” vízoszlop teljes hosszát a csőben, és $2x_0$ a folyadékszintek maximális magasságkülönbségét a két szárban!



Mutasd meg, hogy a csillapodástól eltekintve a víz mozgása harmonikus rezgés!

(Harmonikus rezgés feltétele, hogy az egyensúlyi állapotból kitérítve a rendszert, a kitérítés mértékével arányos visszatérítő erő lépjen fel.)

Fejezd ki a fenti paraméterek felhasználásával a lengés periódusidejét! (Ne feledd, hogy a rezgés csillapodása során a rezgésidő nem változik!)

Írd fel a kezdetben magasabban álló vízszint elmozdulás-idő függvényét úgy, mintha a csillapodástól a mozgás során eltekinthetnénk! Véleményed szerint milyen kísérleti paraméterektől függhet a csillapodás mértéke?

Megoldás

Az ábra a rezgés indulási pillanatát mutatja. A mozgás során bármely időpillanatban igaz, hogy az L hosszú vízoszlopra ható eredő erő a két szárban aszimmetrikusan álló vízoszlopok magasságkülönbségéből származik. Tekintsük azt a tetszőleges pillanatot, amikor a vízoszlop magassága az egyik szárban x magasságban áll az egyensúlyi szint felett, a másik szárban ugyanennyivel alatta! Ekkor a „görbült” vízoszlopot gyorsító erő értéke

$$F = 2A\rho g \cdot x$$

ahol A a cső keresztmetszete, ρ a folyadék sűrűsége, L a folyadékoszlop teljes hossza. A formulából látható, hogy a pillanatnyi erő az x „kitérés” aktuális értékével arányos, így a rezgést generáló rugóerőhöz hasonló. Esetünkben az x együtthatójaként szereplő $2A\rho g$ kifejezés effektív rugóállandónak tekinthető ($2A\rho g = D_{eff}$). A folyadékoszlop lengése a csőben harmonikus rezgésnek tekinthető.

A lengés periódusideje a rugó rezgésidőképletével adható meg, ha az abban szereplő rugóállandó helyére a fenti effektív rugóállandó kifejezését helyettesítjük és a rezgő tömegnek az A keresztmetszetű, L hosszú vízoszlop tömegét helyettesítjük be:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D_{eff}}} = 2\pi \sqrt{\frac{AL\rho}{2A\rho g}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}$$

A rezgés kezdőpillanatában az U-cső jobb oldali szárában vízszint magassága az egyensúlyi helyzet fölött áll x_0 magasságban. Ha a lengés csillapodásától eltekintünk, a szintmagasság időbeli változását leíró $x(t)$ függvény:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi) = x_0 \sin\left(\sqrt{\frac{2g}{L}} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

A folyadék mozgása a csőben csillapodik. A csillapodás mértékét a folyadék viszkozitása (belső súrlódása) határozza meg.

Hang magasságának meghatározása hosszmérés alapján (B)

Egyik végén zárt csőben lévő levegő rezonancia révén képes felerősíteni bizonyos rezgésszámú hangokat. A rezonancia feltétele, hogy a hang frekvenciája megegyezzek a csőben lévő levegőoszlop sajátfrekvenciájával.

Magas hengerbe tölts vizet és meríts bele néhány cm átmérőjű műanyagcsövet. A cső nyitott vége felett normál beszédhangodon adj monoton "á...áááá" hangot! A cső vízbe merülő hosszát változtatva keress meg két szomszédos rezonanciahelyzetet és mérd meg a csőben lévő légoszlopok hosszát!

Határozd meg hangod magasságát!

Megoldás

A hang a levegőben longitudinális hullámként terjed. Alkalmos hosszúságú csőben hang-állóhullámok jöhetnek létre. Állóhullám-állapotban a levegőoszlop rezgései állandósulnak. Az egyik végén zárt cső esetén ennek feltétele az, hogy a csőben lévő levegőoszlop L hossza és a hang λ hullámhossza között teljesüljön, hogy

$$L = (2k - 1) \frac{\lambda}{4}$$

ahol k egész szám.

Ha valamely hangforrás által keltett hanghullám hossza a fenti formula szerint megfelel a levegőoszlop hosszának, a levegő átveszi és ezáltal felerősíti a hangforrás rezgését. Lemérve a levegőoszlop hosszát két szomszédos a rezonancia esetén; a levegőoszlopok hosszának különbségéből meghatározható a hang hullámhossza, a hangsebesség ismeretében (levegőben $c \approx 340\text{m/s}$) pedig kiszámítható a hang frekvenciája.

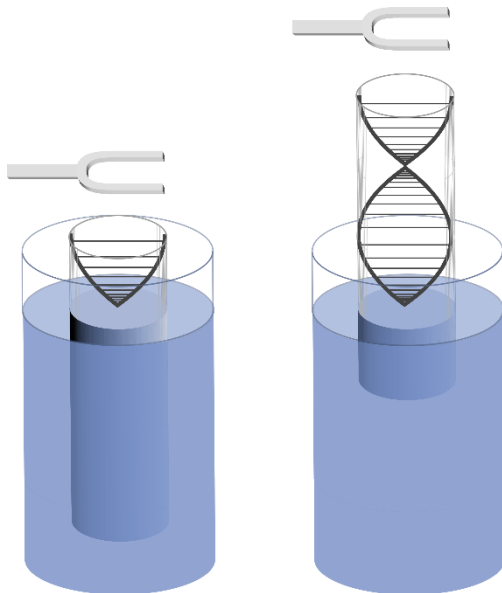
Kísérlet

Az üveghengerbe töltsünk vizet, majd merítsük a vízbe a csövet! A csőben lévő levegőoszlopot alulról a vízszint zárja be. A megütött hangvillát tartjuk a főtön látható módon a cső nyílása fölé! A csövet süllyesszük szinte a vízszintig, majd lassan emeljük ki és figyeljük a hang felerősödését! A maximális hangerősséghez tartozó levegőoszlop-magasságot (a cső peremének és a henger vízszintjének különbsége) mérjük le, majd folytassuk a cső kiemelését egészen a második



rezonancia-helyzetig. Az ábra a két rezonancia-helyzethez tartozó állóhullámot szemlélteti.

(A rajzon az állóhullámot transzverzális hullámként szemléltetjük, hangsúlyozva, hogy a levegőben a hang longitudinális hullám!)



ÖSSZETETT MECHANIKA

FELADATOK

Az összetett feladatokban többféle mozgás összetételével, illetve a fizika több területéről származó ismeretanyag felhasználásával megoldható feladatokat gyűjtöttünk össze. A méréssel, illetve kísérlettel történő összevetés mellett itt az elméleti megfontolások, a korábbi feladatokhoz képest nagyobb szerepet kapnak és nehezebbek. Összetettségük miatt többnyire „kisprojekteként” tanulócsoporthoz is kiadhatók. Megfogalmazásuk az itt megadotthoz képest sokféle módon variálható.

Súrlódási tényező értékének közelítő meghatározása (C)

A talajszint felett h magasságban lévő, s hosszúságú, $\alpha = 30^\circ$ -os dőlésszögű lejtő tetejéről kis test csúszik le, majd a lejtőt elhagyva leesik a talajra.

A becsapódás helyét meghatározva számítsd ki a lejtő és a test közt ható csúszási súrlódási együttható értékét!

Megoldás

A lecsúszó test a lejtőt elhagyva ferdén lefelé ferde hajítási pályára kerül. A talajra csapódásnak a lejtő alsó pontjától mért x vízszintes távolsága csak a megadott adatokon túlmenően csak a test és a lejtő közötti súrlódási együtthatótól függ. Az x távolságból ugyanis meghatározhatjuk, hogy a test milyen v_0 sebességgel érkezett a lejtő aljára, azaz milyen sebességgel hajítódott el.

Az ábra jelöléseivel a vízszintes távolság:

$$x = tv_0 \cos \alpha$$

az esési távolságra pedig fennáll, hogy:

$$h = tv_0 \sin \alpha + \frac{g}{2} t^2$$

Az első egyenletből az időt kifejezve és a második egyenletbe behelyettesítve:

$$h = x \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

Innen

$$v^2 = \frac{gx^2}{2\cos\alpha(h\cos\alpha - xsin\alpha)}$$

A hajtás v_0 kezdősebességét a lejtőn zajló mozgás adataiból is meghatározhatjuk pl. a munkatétel segítségével. Az ábra jelöléseit használva.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgs \cdot \sin\alpha - \mu mgs \cdot \cos\alpha$$

Ebből

$$v^2 = 2gs(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

A kétféle módon meghatározott sebesség négyzetet egyenlővé téve a

$$2gs(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = \frac{gx^2}{2\cos\alpha(h\cos\alpha - xsin\alpha)}$$

egyenletből kifejezhetjük a súrlódási együtthatót:

$$\mu = \operatorname{tg}\alpha - \frac{x^2}{4s\cos^2\alpha(h\cos\alpha - xsin\alpha)}$$

Kísérlet

A feladat mennyiségileg nem oldható meg a mozgás kísérleti megvalósítása nélkül, hiszen a súrlódási együttható meghatározásához szükséges az x hajítási távolság mérése. Állítsuk össze a feladat leírásának megfelelő kísérleti elrendezést, és csúsztassunk le a lejtőn kicsiny téglatestet. A talajra érkezés helyét megbecsülve, tegyünk a talajra papírlapot, amelyre indigót rögzítettünk. Csúsztassuk le ismét a testet. A becsapódás helyén az indigó nyomot hagy az alatta lévő papíron, így a hajítási távolságot pontosan megmérhetjük.

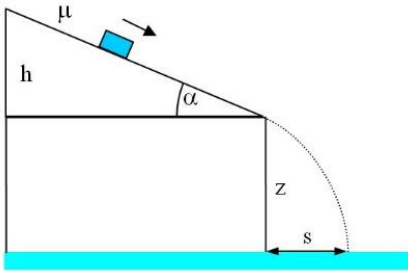
A kísérletet érdemes állítható lejtővel végezni, így a súrlódási együttható mérése a hagyományos lejtős eljárással is elvégezhető. (A lejtő hajlásszögét olyan α_0 értékre kell beállítani, hogy a rá helyezett test kis lökés hatására egyenesen sebességgel csússzon le rajta. Ekkor a csúszási súrlódási együttható

$$\mu = \operatorname{tg}\alpha_0$$

Megjegyzés:

- A mérés bonyolultnak tűnik, azonban kiküszöböli a hagyományosan használt lejtős mérésben a sebesség egyenletességének becsléséből adódó hibát.
- A súrlódási együttható erősen változhat a lejtő mentén, mérése általában csak nagy szórással valószínűsíthető meg. Érdemes tehát a mérést azonos kísérleti elrendezésben és változó hajlásszögű lejtőt használva is többször elvégezni.

- Számítógépes ismeretekkel rendelkező tanulókkal írassunk programot a súrlódási együttható kiszámítására. Ezzel felgyorsíthatjuk az adatok feldolgozását és több mérést végezhetünk el rövid idő alatt.



A feladat további variánsa lehet, ha nem a súrlódási együtthatóra, hanem a becsapódási távolságra vonatkozóan tesszük fel a kérdést:

Az ábrán látható 30° -os, lejtő $z = 50 \text{ cm}$ magasságban helyezkedik el. A lejtőről $h = 30 \text{ cm}$ magasságból hasáb alakú test csúszik le.

A lejtő aljától mekkora l távolságban csapódik a lecsúszó test a talajra, ha a test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható $0,2$?

Megoldás

A test mozgása két szakaszra bontható; A lejtőn történő mozgásra és az azt követő ferde hajtásra. A

$$mgh - \mu mgs \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}mv^2$$

munkatételből meghatározható a hajtás kezdősebessége:

$$v_o = \sqrt{2gh(1 - \mu c \cdot tg\alpha)}$$

Az adatokkal $v_o = 1,98 \text{ m/s}$

Az s hajtási távolság pedig ennek ismeretében az

$$s = v_o t \cdot \cos\alpha$$

és

$$z = v_o t \cdot \sin\alpha + \frac{g}{2} t^2$$

összefüggésekből:

$$s = -\frac{v_o^2}{2g} \sin 2\alpha \pm v_o \cos\alpha \sqrt{\frac{v_o^2}{g} \sin^2\alpha + \frac{4z}{g}}$$

Az adatokkal: $s \approx 0,5m$

Megjegyzés:

- Mielőtt a feladatot feladjuk célszerű a súrlódási együttható értékét úgy megválasztani, hogy összhangban legyen a mérésben használt eszközöknél tapasztalhatóval.

A feladat megoldásának ellenőrzése méréssel

Először mérjük meg a súrlódási együttható értékét. Ennek egyik legegyszerűbb módja az, hogy a feladatban szereplő hasábot változtatható hajlásszögű lejtőre tesszük és a hajlásszöget addig emeljük, amíg a test kis lökés hatására egyenes sebességgel csúszik le a lejtőn. Ekkor a lejtő hajlásszögének tangense éppen megegyezik a súrlódási együtthatóval. A hajlásszög tangense megegyezik a lejtő magasságának és alapjának hányadosával, így a súrlódási együttható meghatározásához hajlásszög ismerete nem is szükséges.

Ezután állítsuk a lejtő értékét 30° -osra és végezzük el a test becsapódási távolságának mérését a feladatban adott adatoknak megfelelően.

Megjegyzés:

- A mérés kritikus pontja a súrlódási együttható értékének megadása. Fontos tehát, hogy a lejtő mentén lehetőleg ne változzék a súrlódási együttható értéke. Ezt például úgy érhetjük el, hogy változtatható hajlásszögű lejtőként keményfedelű könyvet használunk, amelyre előzőleg papírlapot erősítettünk. Ugyancsak célszerű ellenőrizni a hasáb csúszó felületének homogenitását is.

Hengerről lecsúszó pontszerű test mozgása (C)

Vízszintes talajon álló R sugarú korong tetejéről pontszerűnek tekinthető kis test csúszik le. A korong és a talaj érintkezési pontjától mérve milyen távolságban ér talajt a test? A korong és a tömegpont közötti súrlódás elhanyagolható.

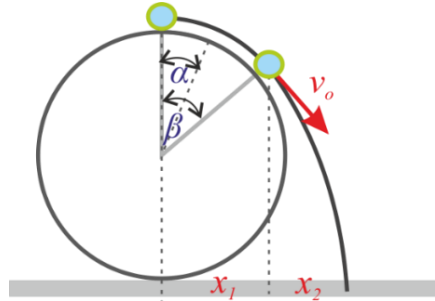
Megoldás

A test, mozgásának első szakaszában a korong kerületén csúszik, majd elválik a felülettől és a második szakaszban lefelé irányított ferde hajítás parabola-pályáján mozog. A mozgás első szakasza körpályán történő egyre növekvő sebességű kényszermozgás. A körmozgás gyorsulásának sugár irányú komponensét (centripetális gyorsulás) a nehézségi erő sugárirányú komponensének és a korong

felületére merőleges kényszererőnek az eredője adja. A test valamely, az ábra szerint α szöggel jelölt helyzetében:

$$mg\cos\alpha - K = \frac{mv^2}{R}$$

Az egyenlet jobb oldala a mozgás során növekszik, és mivel a bal oldal első tagja csökken, a negatív előjelű második tagnak még inkább csökkennie kell. A test abban a β szöggel jelzett helyzetben válik el a korong kerületétől, ahol a K kényszererő zérussá válik. Ekkor a centripetális erőt csak a nehézségi erő centrális komponense adja, azaz, ha a test sebessége ebben a pillanatban v_0 , akkor



$$mg\cos\beta = \frac{mv_0^2}{R}$$

Innen, β értéke meghatározható, ha a v_0 sebesség kifejezésére felhasználjuk a mechanikai energiamegmaradás törvényét. A kinetikus energia értéke $\left(\frac{mv_0^2}{2}\right)$ megegyezik a korong tetejéről induló test Δh magasságcsökkenéséből adódó helyzeti energiacsökkenéssel:

$$mg\Delta h = \frac{mv_0^2}{2}$$

A Δh magasságcsökkenést a korong R sugarával és a β szöggel a

$$\Delta h = R - R\cos\beta$$

alakban fejezhetjük ki. A számolás végeredményeként

$$\cos\beta = \frac{2}{3}$$

adódik. A mozgás második szakasza $R + R\cos\beta = (5/3)R$ magasságból, a vízszintestől β szöggel lefelé irányított, v_0 kezdősebességű ferde hajtás.

A test talajra érkezésének távolsága (X) a henger és a talaj érintkezési pontjától mérve két szakasz összegeként adódik.

$$X = x_1 + x_2$$

Az első, x_1 szakasz, a vízszintes elmozdulás azalatt, amíg a test a korong kerületén csúszott. Ennek értéke:

$$x_1 = R\sin\beta$$

Az x_2 szakasz a test vízszintes irányú elmozdulása a hajítás során

$$x_1 = v_{oX}t$$

Ez utóbbi megadásához a t idő értékét a hajított test függőleges irányú elmozdulását megadó

$$h = v_{oY}t + \frac{g}{2}t^2$$

egyenletből fejezhetjük ki. A számolás során felhasználjuk, hogy

$$v_{oY} = v_o \sin\beta = v_o \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{és} \quad v_{oX} = v_o \cos\beta = v_o \frac{2}{3}$$

A feladat végeredménye

$$X \approx 1,46R$$

Kísérlet

A kiszámított végeredmény kísérleti ellenőrzéséhez a feladatban megfogalmazott feltételeknek megfelelő körülményeket kell teremteni. Eszerint a kis test csúszik a henger felületén és a súrlódás eközben elhanyagolható. A kívánalmaknak jól megfelel, ha hengerként 20-25 cm átmérőjű kristályosító-csészét használunk és a kis test 5-6 mm átmérőjű acél csapágygolyó.

Helyezzük a hengert fehér papírlapra és jelöljük meg az érintkezés helyét (a hengert célszerű ebben a helyzetben oldalról megtámasztani, rögzíteni)! Helyezzünk a fehér lapra festékes felével lefelé fordított indigó-papírt!

A henger felső pontjáról elengedett golyó az indigóra esik és a fehér lapon nyomot hagy. Ismételjük meg néhányszor a kísérletet, majd a fehér lapot vegyük ki a henger alól és végezzük el az ellenőrző mérést! A mérés és a számítás eredménye 5% hibán belül megegyezik.

Megjegyzés:

- Érdemes megismételni a kísérletet úgy is, hogy a hengert csiszolóvászonnal fogjuk körbe, és 2-3 cm átmérőjű tömörgumi-labdát gurítunk le a tetejéről. Ekkor a méréssel kapott távolság lényegesen kisebb a fenti módon számított értéknél. Az eltérés oka az, hogy a megváltoztatott körülmények között a súrlódás nem elhanyagolható, a labda döntően nem csúszik a henger felületén, hanem gurul és emiatt a kezdeti helyzeti energia tetemes része forgási energiává alakul.

További érdekes feladatot jelenthet a súrlódási veszteségek becslése a csúszó, illetve csúszva gördülő testek esetén. A számítások általában nem vezetnek zárt alakban megadható eredményre, de jó képességű osztályban hasznos lehet a mozgásegyenletek felírása és a közelítések megvitatása.

Asztalról ingával leütött golyó mozgása (C)

A kiinduló kísérletben M tömegű golyót – ingaként – l hosszúságú fonalra függesztünk. A felfüggesztési pont $2l$ magasságban van a talaj felett. Az ingát vízszintesig kitérítjük, majd elengedjük. A visszalendülő inga fonala éppen függőleges, amikor rugalmasan ütközik egy hasonló M tömegű golyóval. Az utóbbi golyó az ütközéskor l magasságú asztal szélén áll.

Milyen távol ér talajt az inga által meglökött golyó? (A távolságot az inga egyensúlyi helyzetének megfelelő függőleges talppontjától számítjuk.)

Melyik golyó mozgása tart hosszabb ideig? Válaszodat indokold!

Megoldás

A kísérletet az ábra szemlélteti.

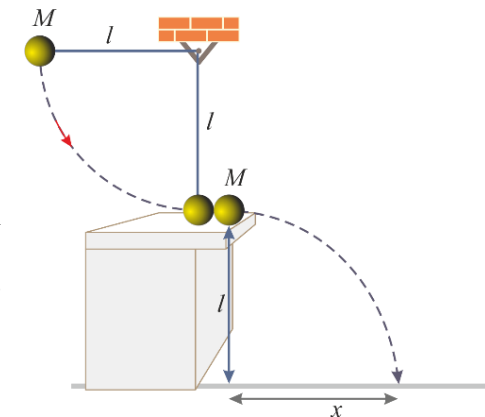
A vízszintesig kitérített és elengedett M tömegű inga gyorsulva körpályán mozog. A körpálya alsó pontján a sebesség vízszintes irányú, értékét az inga helyzeti energiájának megváltozását (Mgl) felhasználva számíthatjuk ki. Az inga mozgási energiája a helyzeti energia változásával egyenlő:

$$Mgl = \frac{1}{2}Mv^2$$

Innen az ingatest sebessége

$$v = \sqrt{2gl}$$

Az inga tökéletesen rugalmasan ütközik az asztal szélén álló M tömegű golyóval. A rugalmas ütközés esetén fennálló impulzus- és energiamegmaradás együttes feltételéből adódik, hogy a két azonos tömegű test sebességet cserél, azaz az ingatest megáll, miközben az asztal szélén meglökött golyó vízszintes v sebességet kap, és vízszintes hajítási pályán mozogva esik le a földre. A hajítás x távolságát a vízszintes kezdősebesség (v) és az esési idő (t) határozza meg:



$$x = vt$$

A t időt a mozgás függőleges összetevőjét adó szabadesés határozza meg:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

Az esés távolsága ezek alapján

$$x = 2l$$

Az ingamozgás és a hajítás idejének összehasonlításához azt kell megvizsgálni, hogy az inga mozgása során a gyorsulás függőleges komponense nagyobb vagy kisebb, mint a hajítás g gyorsulása.

A vízszintesig kitérített inga függőleges gyorsulása az indulás pillanatában éppen g . A mozgás további részében azonban ez az érték egyre inkább csökken. A függőleges gyorsuláskomponenst az ingatestre ható erők függőleges komponenseinek összege határozza meg. A körpályán kényszermozgást végző ingára a nehézségi erő (Mg) és a minden pillanatban kötélirányú K kényszererő hat. A K erő függőleges komponense a nehézségi erővel ellentétes irányú, ezért a test függőleges gyorsuláskomponense az indulási pillanat kivételével mindig kisebb, mint g . Ennek megfelelően az inga mozgásának ideje nagyobb, mint a hajítás ideje.



Kísérleti igazolás

A kapott végeredmény kísérleti igazolására szolgáló egyszerűen elkészíthető céleszközt a fénykép mutatja. A golyó becsapódási távolságának rögzítésére homokkal töltött tálcát használhatunk.

Film: http://fiztan.phd.elte.hu/letolt/ingaval_leutott_golyo.wmv

Palackból kifolyó víz sugarának érdekességei (C)

Egy víztartályba a víz szabad felszíne alatt h mélységben, oldalról A keresztmetszetű cső nyúlik be.

a) Milyen sebességgel ömlik ki a víz a csövön?

b) Igazold az impulzustétel segítségével, hogy a víz csak a nyílás felén, azaz $A/2$ keresztmetszeten lép ki!

c) Mekkora a kifolyó víz által okozott, az edényre ható visszalökő erő?

Megoldás

a) A tartály oldalnyílásán kiömlő víz sebessége a Bernoulli-törvény segítségével egyszerűen megadható. Mivel az edény keresztmetszete sokkal nagyobb a nyílás keresztmetszeténél, ezért a folyadék áramlási sebessége az edényben elhanyagolható a kifolyási sebességhez képest, azaz az edényben a nyílás magasságában a víz hidrosztatikai nyomása megegyezik a nyíláson kilépő vízszög torlónyomásával

$$\rho gh = \frac{1}{2} \rho v^2$$

ahonnan

$$v = \sqrt{2gh}$$

b) A nyíláson Δt idő alatt v vízszintes irányú sebességgel kiömlő víz impulzusa $I = mv$. A kifolyó víz m tömegét a nyílás A^* effektív keresztmetszetével, a v kiömlési sebességgel, a víz ρ sűrűségével és Δt -vel fejezhetjük ki

$$m = A^* v \rho \Delta t$$

Az impulzustétel értelmében az m vízmennyiség I impulzusra Δt idő alatt a nyílás szintjén ható hidrosztatikai nyomásból származó erő hatására ($F = A\rho gh$) tesz szert, azaz

$$F \Delta t = \Delta I \rightarrow A\rho gh \Delta t = A^* v \rho \Delta t v$$

$$A\rho gh \Delta t = A^* \rho v^2 \Delta t$$

A kiömlési sebesség fentebb kiszámított értékét felhasználva adódik a bizonyítandó állítás

$$\frac{A}{2} = A^*$$

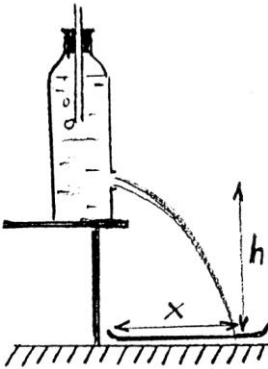
azaz a víz a nyílás felületének csak a felén lép ki.

Megjegyzés:

- A feladat második részének megoldása során alkalmazott impulzustétel felírása szemléletesen magyarázható a palack fala által a vízre ható erőkkel. A folyadékkal töltött palack oldalfala, a folyadék szabad felszínétől mért mélységgel arányos nyomóerőt gyakorol a folyadéokra. Folytonos oldalfalú edény, vagy zárt nyílású palack esetén az átellenes oldalfal részekén ható erők eredője zérus, a folyadék egyensúlyban van. Ha azonban az edény falán valahol lyukat vágunk, az erőegyensúly megbomlik. A nyílással szemközti falfelület által kifejtett erő kompenzálatlan marad, és ez gyorsítja fel a nyíláson kiáramló vizet.

Kísérleti ellenőrzés

A fenti meglepő eredmény kísérletileg is igazolható. Műanyag üdítőspalack oldalára megtüzesített fémcsővel vágjunk környílást, a lyukat befogva a palackot töltsük meg vízzel és dugaszoljuk le úgy, hogy a dugón átvezetett üvegső vége az oldalnyílás felett néhány cm magasan (h_0) legyen! A palackot állítsuk h magasságba a mosogató-medence fölé és tegyük szabaddá a palack oldalnyílását (l. a mellékelt ábra)!



A kifolyó víz pályája parabola. Lemérve a h magasságot és az x távolságot, a kiömlési sebesség kiszámítható

$$v = \frac{x}{\sqrt{2gh}}$$

Mérőhengerben felfogva mérjük meg a nyíláson Δt idő alatt ($\Delta t = 30 - 60$ s) kifolyó víz V térfogatát! A mért adatokkal meghatározható a kiömlő vízugar kezdeti A^* keresztmetszete

$$A^* = \frac{V}{v\Delta t} = \frac{V\sqrt{2gh}}{x\Delta t}$$

Ez az érték közel feleakkora, mint a palackra fűrt nyílás felülete.

Súrlódási erő, ami gyorsít és fékez is (B)

Vízszintes asztalra papírcsíkot fektetünk és a papírcsíkra fahasábot helyezünk. A papírcsíkot gyors mozdulattal vízszintes irányban kirántjuk a hasáb alól.

Ismételd meg a papírlappal és a fahasábbal bemutatott kísérletet!

a) *Becsüld meg csupán hosszúságmérések segítségével, hogy hányszor volt nagyobb a megrántott papírlap átlagsebessége a hasáb átlagsebességénél?*

b) *Mérd meg a papírlap és a hasáb közötti súrlódási együtthatót!*

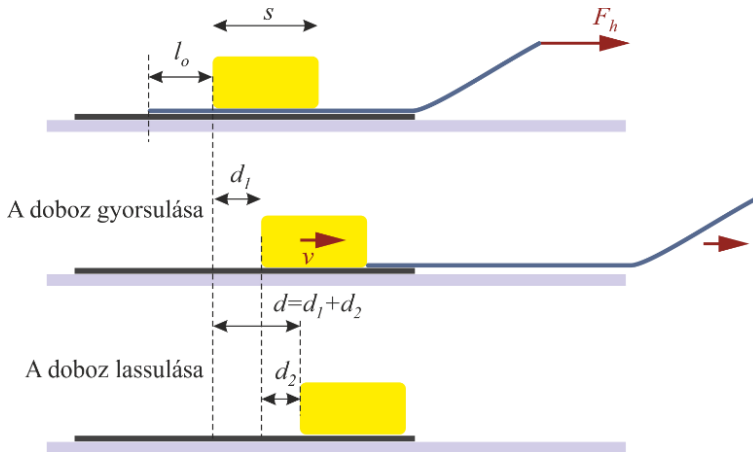
(Ehhez rögzítsd a papírlapot ragasztószalaggal karton lapra, és a lejtősre állított felületen csúsztasd le a fahasábot!)

c) *Méréseid eredményét felhasználva becsüld meg, hogy mekkora átlagsebességgel mozogt a papírlap a fahasáb alatt!*

Megoldás

A feladott kérdések megválaszolásához figyeljük meg a jelenséget és gondoljuk végig a test mozgásának részleteit! Amikor a felső lap mozogni kezd, akkor μmg súrlódási erőt fejt ki a testre a mozgás irányában. Első közelítésben feltételezhetjük, hogy mindaddig ez az erő gyorsítja a hasábot, míg a felső papírlap ki nem csúszik alóla. A hasáb tehát egyenletesen gyorsul és így v sebességet ér el. Ezután a v sebességű test az alsó papírlapon csúszik tovább, amíg a sebességgel ellentétes irányú μmg súrlódási erő fékező hatására megáll. A hasáb tehát útjának felét gyorsulva, felét pedig lassulva teszi meg.

Végezzük el a fenti megfontolások után újból a kísérletet úgy, hogy közben elvégezzük a szükséges méréseket is!



A rajzon l_0 a felső papírlap hasáb alól kilógó részének hossza, s a hasáb hossza, d a hasáb által megtett út.

a) A papírlap és a hasáb átlagsebességét a mozgás első szakaszán értelmezve hasonlítjuk össze. Mivel a két mozgás ideje azonos, az átlagsebességek aránya a megtett utak arányával egyezik meg. A rajz jelöléseinek felhasználásával:

$$\frac{v_{\text{papír}}}{v_{\text{test}}} = \frac{l_0 + s + d_1}{d_1}$$

b) A fahasáb és a papírlap közti μ csúszási súrlódási együttható értékét egyszerűen lehet meghatározni, ha a papírt kartonra ragasztva lejtőt készítünk. A lejtő laposabbra, illetve meredekebbre állítva keressük meg azt az α szöveget, amelynél a lejtőre helyezett fahasáb egy kis kezdőlökés után lassú egyenletes sebességgel éppen lecsúszik! Ekkor a testre ható $\mu mg \cos \alpha$ súrlódási erő éppen megegyezik a lejtő síkjára merőleges kényszererő és a nehézségi erő $mg \sin \alpha$ eredőjével. A μ súrlódási

tényező ebből: $\mu = tg\alpha$, azaz a lejtő háromszögének két befogóját lemérve egyszerűen meghatározható.

c) A papírlap átlagsebességének értékét az $(l_o + s + d_1)$ elmozdulás és a mozgás τ idejének ismeretében adhatjuk meg. Ez utóbbit a hasáb mozgásáról a bevezetőben mondottak alapján határozzuk meg. A hasáb a súrlódási erőből egyenletesen gyorsítva teszi meg útjának első felét, azaz

$$d_1 = \frac{\mu g}{2} \tau^2$$

Mivel d_1 értékét méréssel meghatároztuk, az egyenletből a τ idő kifejezhető.

A papírlap átlagsebessége tehát:

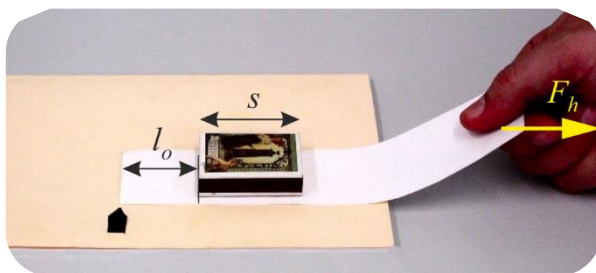
$$v_{\text{papír}} = \frac{l_o + s + d/2}{\sqrt{\frac{d}{\mu g}}}$$

Megjegyzés:

- A feladat megoldása során tett egyszerűsítő feltételezéseket és a számított végeredmény helyességét fénykapus méréssel ellenőriztük. A kísérlet megismételtük úgy, hogy a testre elhanyagolható tömegű kódlécet rögzítettünk.
- A papír kirántásakor az egyenletes osztású kódléc a fénykapu szarai között mozgott. A számítógép által felvett adatok bizonyítják, hogy a mozgás valóban egyenletesen gyorsulónak tekinthető. A számítógépes mérésből adódó átlagsebesség és a fenti gondolatmenet szerint számított érték kb. 5%-on belül egyezett. A kapott eredmény igazolja, hogy a súrlódási erő változásától is eltekinthetünk. Jogos ugyanis az észrevétel, hogy amikor a felső papírlap már kezd kicsúszni a hasáb alól, a lapra gyakorolt nyomóerő és ezért a súrlódási erő is változik.

A feladatot bevezető egyszerű kísérlet a következő

Vízszintes asztallapra két A4-es papírlapot fektettünk egymásra, majd a felső lap közepére egy kb. gyufásdoboz méretű fahasábot tettünk. A felső lap szélét megfogva a papírt egy hirtelen mozdulattal vízszintesen kirántottuk a hasáb alól. Miközben a papír kiszaladt a hasáb alól az is elmozdult valamennyit a húzás irányába. Ezt az elmozdulást lehet megmérni a kísérlet megismétlése során, ha a papírlapon bejelöljük a hasáb kezdeti helyzetét. A kísérlet kezdetén mérhető hosszúság adatokat az ábra mutatja.



Megjegyzés:

- A feladat alkalmas lehet néhány a testek tehetetlenségének bemutatására megszokott kísérlet mélyebb elemzésére.

A tehetetlenség törvénye kapcsán gyakran hivatkozunk arra a bűvésztükkre, amikor a bűvész az asztalterítőt hirtelen mozdulattal kirántja a teríték alól. Magyarazatként arra szokás hivatkozni, hogy a tányérok, poharak és evőeszközök tehetetlenségüknél fogva nem követik a gyors mozgást, helyben maradnak. A most elvégzett kísérlet mutatja, hogy a trükk sikere a súrlódáson múlik.

A bűvésztükk nem, de egyszerű változata tanórán is bemutatatható. Pohár szájára fektessünk kártyalapot és a lap közepére tegyünk acélgolyót. Pöcköljük meg vízszintes irányban a lap szélét. A kártya elrepül, a golyó pedig csörrenve behull a pohárba.

Asztal szélén túllógó lánc egyensúlya (C)

A feladat megoldása helyben végzett kísérletezést igényel.

a) Egyforma gémkapcsokból fűzz láncot! A gémkapocslánc több-kevesebb szemnyi részét lógasd le az asztal szélén, ügyelve arra, hogy lánc így nyugalomban legyen!

Értelmezd a lánc egyensúlyának feltételét!

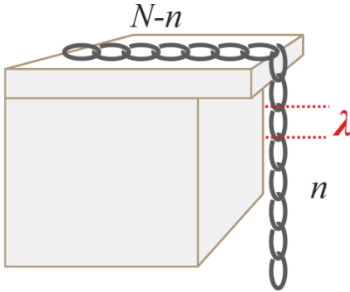
Becsüld meg a lánc és az asztallap közti tapadási súrlódási együttható számértékét, és add meg a becslés hibáját! (A lánc hosszát, illetve a lelógó rész arányát is változtathatod, ha célszerűnek látod.)

b) Ha a lánc asztalról lelógó hossza meghatározott kritikus értéket elér, a lánc "magától" megindul és lecsúszik az asztalról. Számítsd ki, mekkora sebességgel mozog az asztalról lecsúszó lánc abban a pillanatban, amikor az utolsó szem elhagyja az asztal szélét! (A kérdéses pillanatban a lánc függőleges helyzetű, és kizárólag függőlegesen mozog.)

Megoldás

a) Az N gémkapocs-egységből álló lánc utolsó egyensúlyi helyzetét az ábra mutatja. Az egyensúly feltétele az, hogy a lelógó n láncszem súlyát az $(N - n)$ darab láncszem súrlódása éppen kiegyensúlyozza.

Jelölje a lelógó láncszemek számát n , egy láncszem tömegét m , az asztal és a gémkapcsok közti súrlódást jellemző tényezőt μ !



Így a lánc egyensúlyát leíró egyenlet

$$n \cdot mg = (N - n) \cdot mg\mu$$

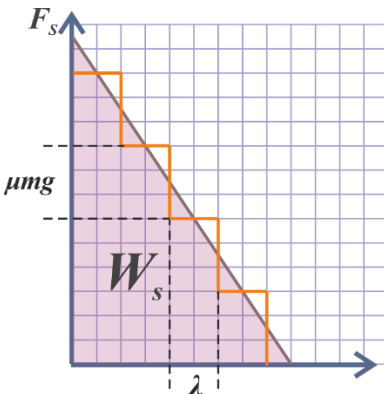
A μ súrlódási tényező értéke a láncszemek leszámllálása alapján meghatározható

$$\mu = \frac{n}{N - n}$$

A mérés hibáját megbecsülhetjük, ha a láncról 1-2 szemet levéve megismételjük a kísérletet.

b) A lánc sebességének meghatározására a munkatételt használjuk fel: A kinetikus energia megváltozása a testre ható erők munkájával egyenlő. A kezdetben nyugvó lánc kinetikus energiáját a lelógó láncszakaszra ható nehézségi erő és az asztalon csúszó láncszakaszra ható súrlódási erő együttes munkája adja. A két erő ellentétes irányú és mindkettő változik a mozgás során.

A feladatban vizsgált véghelyzetben az asztalról éppen lecsúszó lánc függőleges helyzetű, minden tagja azonos sebességgel mozog, tehát kinetikus energiája ($E_{kin} = \frac{1}{2} Nmv^2$), ami a két ellentétes irányú erő munkájának különbségével egyenlő



$$E_{kin} = W_G - W_S$$

A nehézségi erő W_G munkája egyszerűen meghatározható a lelógó rész tömegközéppontjára számított helyzeti energia megváltozásából. Legyen a potenciális energia 0 szintje az asztal magasságában. Ekkor a helyzeti energia változása:

$$W_G = \frac{n\lambda}{2} nmg - \frac{N\lambda}{2} Nmg$$

ahol λ egyetlen láncszem hossza.

Az egyenletesen csökkenő súrlódási erő munkája az erő-elmozdulás grafikonon alatti területként adódik (ábra).

$$W_s = \frac{(N - n)mg\mu(N - n)\lambda}{2}$$

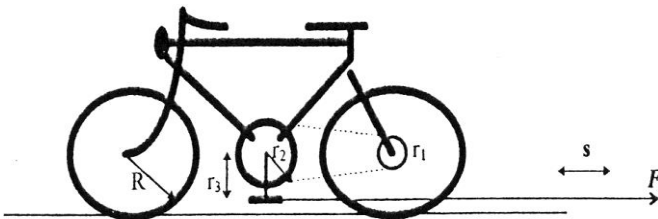
A számításokat elvégezve a lánc pillanatnyi sebességére a $v = \sqrt{\lambda g(N - n)}$ eredményt kapjuk.

Hogyan mozog a pedálnál visszahúzott kerékpár? (C)

Minden gyerek tudja, hogyan hajtjuk a pedállal a kerékpárt. Képzeld el, hogy a kerékpárt az ábrán bemutatott módon úgy állítjuk le, hogy a pedál-karok éppen függőlegesen állnak. Az alsó pedálra kötelet kötünk és egyre nagyobb vízszintes irányú F erővel húzzuk mindaddig, amíg a kerékpár elmozdul.

Előre vagy hátrafelé gurul a kerékpár? Válaszodat magyarázd meg!

Mekkora a kerékpár elmozdulása, ha a pedálra kötött kötelet s -nyit húztuk hátra?



Megoldás

Elvégezve a feladatban leírt kísérletet, tapasztaljuk, hogy a kerékpár a pedált húzó kötélt irányába, azaz hátrafelé kezd gurulni. (Megfigyelhető az is, hogy amíg a bicikli hátra gördül, a pedál a biciklihez képest előre felé fordul el.)

Kísérlet nélkül az első kérdés megválaszolása nehéz. A helyes okoskodásra a második kérdés vezet rá. Itt valamilyen feltevésből kell kiindulnunk. Tegyük fel, hogy a bicikli a húzóerő irányába, hátrafelé gurul el! Belátható, hogy ekkor a lánc kényszeratsatolása miatt a kerékpár alsó pedálkarja – a kötélt húzása ellenére is – előre mozdul el a biciklihez képest. A kerékpár földhöz viszonyított elmozdulása (S) tehát

annyival nagyobb, mint a hátrahúzott kötélvég földhöz viszonyított elmozdulása (s), amennyivel a pedál a biciklihez képest előre mozdult (x).

$$S = s + x$$

A pedál x elmozdulása a pedálkar hosszával (r_3) és elfordulási szögével (φ) fejezhető ki:

$$x = r_3 \cdot \varphi$$

Mivel a pedál r_2 sugarú fogaskerekét és a hátsó keréken lévő r_1 sugarú kis fogaskereket lánc köti össze, a pedál φ elfordulásakor a hátsó kis fogaskerék

$$\Phi = \frac{\varphi \cdot r_2}{r_1}$$

szögnyit fordul el. Φ -t a kerékpár elmozdulásával is kifejezhetjük, hiszen a kis fogaskerék közös tengelyen együtt forog a bicikli hátsó kerekével, azaz

$$\Phi = \frac{S}{R}$$

ahol R a bicikli hátsó kerekének sugara. A visszahelyettesítéseket elvégezve a kerékpár elmozdulása felírható a kerékpár jellemző adatainak és a kötélvég elmozdulásának felhasználásával:

$$S = \frac{s}{\left(1 - \frac{r_3 r_1}{r_2 R}\right)}$$

A kapott formula diszkutálása vezet el a feladat első kérdésének egyértelmű megválaszolásához. Ha a kerékpár a számításban feltételezett irányban, azaz hátrafelé mozdul el, S fenti kifejezéssel megadott értéke pozitív. Ha R, r_1, r_2, r_3 behelyettesítésével S negatív értékűnek adódna, ez azt jelentené, hogy a kerékpár a hátra húzás ellenére is előre gördül. A gyakorlatban alkalmazott kerékpár-áttételek esetén az $\frac{r_3 r_1}{r_2 R}$ tört értéke mindig kisebb, mint 1, tehát a pedálra kötött zsineggel hátrafelé húzott bicikli mindig hátrafelé gördül.

Végezzük el az igazoló kísérletet!

HŐTAN

A hőtan tanítása során számos demonstrációs kísérlet és egyszerű mérés ad alapot a tanításhoz. Ezek között azonban viszonylag kevés az olyan kísérlet, ami feladatmegoldáshoz kapcsolható. Ennek oka az, hogy a legegyszerűbb hőtan jelenségek (pl. hőtágulás, gáztörvények, halmazállapotváltozásokkal kapcsolatos kísérletek) kevésbé látványos, de időigényes kísérleteket igényelnek. Ezek jók laboratóriumi, vagy szakköri foglalkozásokra, de az órai feladatmegoldás időkereteibe nehezen illeszthetők be. A hőtani törvények alkalmazásán alapuló számítások és a kísérleti tapasztalatok összekapcsolására azonban e területen is érdemes törekednünk. A következőkben néhány erre alkalmas egyszerű feladatot mutatunk be.

Sörét fajhőjének becslése mechanikai munkavégzés alapján (B)

Kísérlet

80 cm magas papírhengerbe sörétet töltünk, a hengert lezárjuk, és hőmérővel megmérjük a sörét hőmérsékletét ($T_1 = \dots \text{ }^\circ\text{C}$). A kezdetben függőlegesen tartott zárt hengert ötvenszer egymás után, 180° -os fordulattal gyorsan átfordítjuk. A csőben eső sörét az ismételt ütközések során felmelegszik. A sörét hőmérsékletét újra megmérjük ($T_2 = \dots \text{ }^\circ\text{C}$).

A hiányzó adatokat a helyszínen elvégzett mérések alapján ird be!

Megoldás:

A helyszínen elvégzett kísérlet mért adatai: a sörét tömege: $m = 1,5 \text{ kg}$, kezdeti hőmérséklet: $T_1 = 18,2 \text{ }^\circ\text{C}$, vég hőmérséklet: $T_2 = 21,5 \text{ }^\circ\text{C}$.

A papírhenger 180° fokos átfordításakor a benne lévő sörét felemelésére fordított munka $W = mgl$, ahol l a papírhenger magassága. A sörétnek így átadott energia a visszaeső ólomgolyócskák rugalmatlan ütközésekor a sörét melegítésére fordítódik. Ha a henger és a benne lévő levegő melegedéséből, valamint a hővezetéséből

származó veszteségeket elhanyagoljuk, a papírhenger $n = 50$ -szeri átfordítása után az energiamérleget leíró egyenlet a következő:

$$nmgl = mc_s(T_2 - T_1)$$

Innen a sörét keresett fajhője

$$c_s = \frac{ngl}{(T_2 - T_1)}$$

A mért adatokkal adódó fajhőérték 120 Joule/kg °C, ami kicsit kevesebb, mint az ólom táblázatban megtalálható fajhője.

Megjegyzés:

- Ahogyan a közölt végformulából is látszik a feladat megoldásához nem szükséges ismernünk a sörét tömegét. Az adat közlését azért tartottuk indokoltnak, mert a 13-14 évesek gondolkodása még nagyon konkrét, és nemigen mernek nekifogni olyan feladatnak, amelynek kezdetben fontosnak tűnő adatai hiányoznak.

A teremben lévő levegő páratartalmának mennyiségi meghatározása (B)

A normál (atmoszférikus) nyomású levegő hőmérsékletétől függően több-kevesebb vízpárát tartalmaz. Egy adott hőmérsékleten a levegő térfogategységére eső maximális vízpára mennyiséget telítési értéknek nevezzük és 100%-os páratartalomról beszélünk. A táblázat a hőmérséklet függvényében mutatja az atmoszférikus levegő 1 m³ térfogatának telítési vízmennyiségét grammokban.

T (°C)	3	5	7	9	11	13	15	17	19
m(g)	6	6,8	7,8	8,8	10	11,4	12,9	14,5	16,3

T (°C)	21	23	25	27	29
m(g)	18,4	20,6	23,1	25,8	28,7

Ha adott hőmérsékleten a levegőben lévő vízpára mennyisége nem éri el a telítési értéket (ez a gyakorlatban általános eset), a páratartalmat a telítési értékre (100%) vonatkoztatva, mint relatív páratartalmat adjuk meg. Ha adott páratartalmú levegő hőmérséklete csökken a relatív páratartalom mindaddig növekszik, amíg eléri a 100 %-ot, azaz az adott hőmérsékletre jellemző telítési tömegértéket. Ha a

hőmérséklet tovább csökken, a levegőben lévő pára kicsapódik, apró cseppek formájában kiválik a tárgyak felületére. A vízpára kicsapódásának a hőmérsékletét *harmatpontnak* nevezzük.

Egyszerű kísérlettel megbecsülhető a tanterem levegőjének páratartalma: Egy fényes, ónozott falú konzervdobozt töltünk félig szobahőmérsékletű vízzel! Mérjük meg a víz és a szoba levegőjének hőmérsékletét és jegyezzük fel! Ezután adagoljunk fokozatosan, kis adagokban egyre több darált jeget a vízhez, ami így egyre jobban lehül. Kis várakozás és keverés után mérjük meg a víz hőmérsékletét és folytassuk a hűtést mindaddig, míg a konzervdoboz fényesen tükröző felülete elkezd bepárasodni (homályosodni)! Ez azt jelzi, hogy a doboz hideg fala körül a levegő hőmérséklete elérte a harmatpontot. A doboz közvetlen környezetében a levegő páratartalma a hűlés miatt túltelítetté vált, és ezért a doboz hideg falára a vízpára finom cseppekben kicsapódott. Jegyezzük fel a homályosodás megjelenésekor a víz hőmérsékletét!

A helyszínen végzett mérések adatait felhasználva határozd meg, hogy hány liter elpárolgott vizet tartalmaz a terem levegője!

A tanterem adatai: hossz: $a = 9$ m, szélesség: $b = 6$ m, magasság: $c = 3,4$ m. A terem hőmérséklete: 23 °C.

A kísérlet során a fényes konzervdoboz oldala bepárasodott, ha a benne lévő víz a bedobált jégdarabok hatására 16 °C-ra lehült.

A leírt mérést elvégezve becsüljük meg a teremben lévő vízpára mennyiségét, illetve a terem levegőjének relatív páratartalmát!

Megoldás

A konzervdoboz fényes oldalfalán akkor csapódik le a pára, ha a fal hőmérsékletén a terem páratartalma meghaladja a telítési értéket. Elvégzett kísérletünk során a párakicsapódás hőmérséklete 16 °C volt. Az ehhez tartozó telítési páratartalom 1 m³ levegőben – a táblázatból extrapolálva $13,7$ g/m³. A terem hosszadataiból kiszámítva a terem térfogatát ($V = 183$ m³) kapjuk a teremben lévő vízpára össztömegét (M).

$$M = mV = 13,7 \cdot 183 = 2507g$$

ami, a víz sűrűségét figyelembe véve, mintegy 2,5 liter elpárolgott víznek felel meg.

A terem levegőjének relatív páratartalmát a mért harmatponthoz tartozó, táblázatból leolvasott vízmennyiség és a 23 °C szobahőmérséklethez tartozó telítési vízmennyiség aránya adja meg.

$$\text{Relatív páratartalom} \frac{13,7}{20,6} = 0,66 = 66\%$$

Elektromos vízmelegítő teljesítményének kalorikus meghatározása (B)

Elektromos melegítő készülékek teljesítményét becsülhetjük az általuk (adott idő alatt) fejlesztett hőmennyiség számértékéből.

Feladat:

Vízmelegítő készülék V térfogatú, szobahőmérsékletű vizet t idő alatt forral fel. Becsüljük meg a vízforraló teljesítményét, és a vízmelegítés költségét!

Megoldás

A víz kezdeti hőmérséklete T_o , forraláskor $T = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$. A P teljesítményű forraló által t idő alatt leadott hőmennyiség $Q = Pt$. Ha a melegítés során fellépő egyéb veszteségektől eltekintünk és feltételezzük, hogy a hő teljes egészében az $M = V\rho$ tömegű, $c = 4,2\text{ kJ/kg }^{\circ}\text{C}$ fajhőjű víz melegítésére fordítódik, akkor fennáll az alábbi egyenlet:

$$Pt = mc(T - T_o)$$

A fenti egyenletből a teljesítmény becsült értéke:

$$P = \frac{mc(T - T_o)}{t}$$

A forralás költsége ($P \cdot t \cdot C$), ahol C jelenti az 1kWh energiáért fizetendő összeget.

Kísérlet:

Az ábrán látható SOLAC vízforraló maximálisan 1 liter víz forralására lett méretezve. A csapból kiengedett „állott-víz” hőmérséklete jó közelítéssel megegyezett a szoba levegőjének hőmérsékletével, $t_0 = 20^{\circ}\text{C}$ -kal. Bekapcsolás után kb. 6 perc elteltével kezdett intenzív forrásba a víz. A forraló teljesítménye ezek alapján:

$$P = \frac{mc(T - T_o)}{t} = \frac{1\text{ kg} \cdot 4,2\text{ kJ/kg }^{\circ}\text{C} \cdot 80\text{ }^{\circ}\text{C}}{360\text{ s}} = 933\text{ W}$$

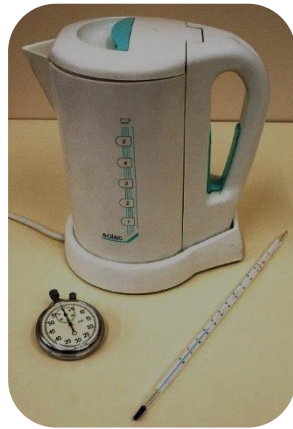
A készülék alján található felirat szerint a teljesítményfelvétel: 1000watt. $C \sim 30 Ft$ -al számolva 1 liter víz felforralásának költsége:

$$P \cdot t \cdot C \approx 3 Ft$$

A becsült értéknek a névlegestől való, kevesebb mint 10%-os eltérése alapvetően azzal magyarázható, hogy a melegítés során leadott hő egy jelentős része a forraló falán keresztül a környezetbe jut és így nem a víz melegítésére fordítódik.

Megmértük a forraló által felvett áram erősségét, és a forralón eső feszültséget:

$$I = 4,24 A, \quad U = 230V$$



Egy érdekes tojásfőző készülék működése

A gépesített modern konyhákban gyakran használják a fotón látható tojásfőző berendezést. A tojások perforált tálcán helyezhetők el. A tálcá alatt szigetelt peremű elektromos főzőlap található, amire a tojások mennyiségétől függően több-kevesebb vizet kell önteni (a tojások nem érnek bele a vízbe). A főzőlapot és a fölötte lévő tojásokat kis lyukkal ellátott plexibúra borítja.

A főzőlap a vizet elforralja, a tojások a gőzben főnek meg. A hőmérséklet-érzékelő csöngetéssel jelzi, ha az összes víz elforrt. A tojásfőzőbe töltendő víz mennyisége a tojások számától és főzés fokától (lágy, félkemény, kemény) függ. A víz adagolására speciális mérőedény szolgál, amelyet a főzendő tojások számának megfelelően kell feltölteni. A lágy-tojás főzéséhez szükséges víz mennyiségét a tojások számának függvényében a táblázat tartalmazza. A kísérleti tapasztalatok szerint a főzési idő a tojások számától függetlenül 8,5 perc.



tojás (db)	1	2	3	4	5	6
$m_{\text{viz}} \text{ (g)}$	40,7	38,0	34,6	32,0	28,2	25,1

Mivel magyarázod, hogy a főzéshez szükséges víz mennyisége a tojások számának növekedésével arányosan csökken?

Becsüld meg, mennyi energia szükséges egy tojás „lággyá” főzéséhez!

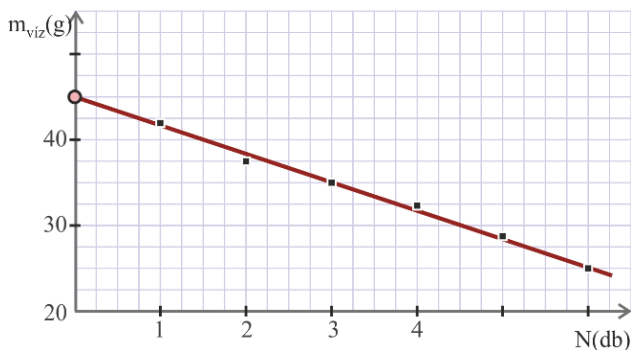
Mekkora a tojásfőző készülék hatásfoka?

A készülék áramfelvétele a hálózathoz 1,8A, a víz fajhője $4,18\text{kJ/kg}$, a víz forráshője $2,25 \cdot 10^3\text{kJ/kg}$.

Megoldás

Az első pillanatban meglepő megfigyelésnek, ami szerint a tojásfőző készülék a nagyobb és a kisebb számú tojást is azonos idő alatt főzi meg, továbbá, hogy a több tojás főzéséhez kevesebb, a kevesebb tojás főzéséhez több vízre van szükség, a következő a magyarázata.

A főzés során a tojás anyagában irreverzibilis kémiai változások zajlanak. Ehhez tojásonként kb. ugyanannyi energia befektetésére van szükség. A kémiai reakció sebességét a hőmérséklet ($100\text{ }^\circ\text{C}$ gőz) határozza meg. Akárhány tojást főzünk is, mindegyik tojás ugyanabban a gőzben fő, a kémiai változáshoz tehát mindig ugyanannyi időre van szükség. Ha a tojások száma nagy, a főzőlap energiájából több fordítódik a tojások főzésére, és az edényben lévő víz lassabban forr el. (A főzőlap ugyan elforrálja a vizet, de annak jelentős része a tojásokon kondenzálódva visszacsöpög az edénybe.) Ha a tojások száma kevés, az elforrat víz jelentős része távozik a rendszerből, ezért több vízre van szükség, hogy a főzéshez szükséges ideig a gőz kitartszon.



A második kérdés megválaszolását a feladatban közölt mérési adatokat grafikus ábrázolásával élszerű kezdeni.

A grafikon a lággy-tojás főzéséhez szükséges víz mennyiségét a tojások számának függvényében mutatja. A szükséges víz mennyisége a tojások számával lineárisan csökken. A grafikon alapján megbecsülhető egy tojás „lággyá” főzéséhez szükséges

energia. A grafikon szerint egy tojás 3,2 g vízmennyiséggel helyettesíthető, tehát a tojás megfőzéséhez annyi energia szükséges, mint amivel a 3,2 g szobahőmérsékletű vizet 100°C -ra melegítjük, majd elforraljuk. Azaz:

$$Q_{\text{lágytojás}} = 3,2c_v\Delta T + 3,2L_v$$

A megadott kalorikus adatok felhasználásával:

$$Q_{\text{lágytojás}} \approx 8,27\text{kJ}$$

A tojásfőző hatásfokának (η) meghatározásához a főzőlap által a tojások főzésére fordított hőenergia (Q) és a befektetett elektromos energia (W) arányát kell meghatározni.

$$\eta = \frac{Q}{W}$$

Az elektromos energia a hálózati feszültség ($U = 220\text{V}$), a közölt áramfelvétel ($I = 1,8\text{A}$) és az ismert főzési idő ($\Delta t = 510\text{s}$) segítségével adódik,

$$W = UI\Delta t \approx 202\text{kJ}$$

A tojásfőző hasznos teljesítménye egyszerűen megbecsülhető, ha a fenti grafikon alapján meghatározzuk azt az M_o vízmennyiséget, amit a berendezés tojások nélkül 8,5 perc alatt elforralna ($M_o=44\text{ g}$).

A főző hasznosított energiája tehát az M_o mennyiségű víz felmelegítéséhez és elforralásához szükséges energia.

$$Q = M_o c_v \Delta T + M_o L_v \approx 114\text{kJ}$$

A főző hatásfoka:

$$\eta = \frac{Q}{W} = \frac{114}{202} = 0,56$$

ELEKTROMOSSÁGTAN

Az elektromosságtan válogatott feladatanyaga – néhány összetettebb példától eltekintve – egyszerű, gyakorlati vonatkozású feladatokat tartalmaz. Az egyszerű kapcsolásokra vonatkozó kérdések megválaszolása látszólag alig kíván többet, mit a hagyományos nyolcadikos tananyag ismerete. Megoldásuk a diákok többsége számára mégsem egyszerű. A megtanult alaptörvények lényegi megértését és aktualizált alkalmazását kívánja meg. Itt is kiemelt hangsúlyt kap a feladat megoldását követő kísérleti ellenőrzés. A kapcsolások összeállításával és az elvégzett egyszerű mérésekkel a kisdíákok kísérletezési hajlamát használhatjuk ki a fizika megszerettetésére, illetve a számításokkal szembeni ellenszenvük csökkentésére. Középszintű szinten felhívjuk a figyelmet az indukált feszültség mérésére vonatkozó feladatra. Már alaptantervű osztályokban érdemes a tanórai munkába beiktatni, mert alapvető jelentőségű a potenciál fogalom megértésével kapcsolatban. Hasonlóan a figyelem felkeltése a cél a videón bemutatott elektrolitikus vízbontási kísérletre, aminek alapján megbecsülhető az elektron töltésének nagysága. A kísérlet egyúttal jó alkalom a fizikai és a kémia ismereteinek összekapcsolására is.

Autó ködlámpájának kapcsolása (A)

Ha lakott területen kívül sötétben autózunk és nincs szembeforgalom, a vezető bekapcsolja a fényszórókat, hogy jól lásson előre. Ködben vagy hóesésben a közvetlenül előttünk lévő útszakaszt megvilágító ködfényszórót is érdemes bekapcsolni. A ködfényszóró külön kapcsolóval működtethető, de csak akkor világít, ha a normál fényszóró is be van kapcsolva.



Készítsd el a kapcsolás rajzát, ami a normál fényszórókat és a ködfényszóró lámpáit működtető, de egymástól nem független elektromos áramkört ábrázolja! (A rajzon ábrázold az akkumulátor, a két kapcsoló, és a lámpák kapcsolását!)

Vajon hogyan változik az akkumulátor által leadott elektromos teljesítmény, ha először csak a normál fényszóróval világítunk, majd bekapcsoljuk a ködfényszórót is? Válaszodat röviden magyarázd meg!

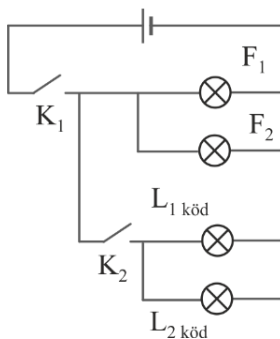
(Közelítésként tételezd fel, hogy az akkumulátor feszültsége állandó (12 V), valamint minden fényszóró-lámpa azonos teljesítményű, és üzemi feszültségük egyformán 12 V.)

Megoldás

A kapcsolásban minden lámpa párhuzamosan csatlakozik az akkumulátorra.

A párhuzamos kapcsolás miatt a ködfényszórók bekapcsolásakor az telep árama kétszeresére nő.

A telep leadott teljesítménye $P = UI$, változatlan feszültség és kétszeres áram esetén a teljesítmény megduplázódik a ködfényszóró bekapcsolásával.



Egyszerű elektromos kapcsolás értelmezése (B)

Tegyük fel, hogy két szabályos izzólámpát - A(230V, 100W) és B(230V, 25 W) - sorba kötve a hálózatra kapcsolunk

Készíts kapcsolási rajzot! Mennyire világítanak a lámpák?

Megfelelő választ húzd alá:

A lámpa	B lámpa
jól világít	a jól világít
gyengén világít	gyengén világít
nem világít	nem világít
felvillan és kiég	felvillan és kiég

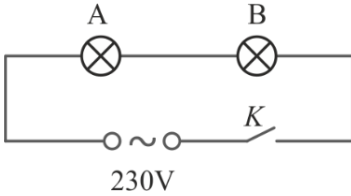
Válaszodat számítással indokold!

Mi történne, ha először az A, majd a B lámpa csatlakozási pontjait rövidre zárnánk?

Megoldás

Az A lámpa épp csak izzik, a B lámpa világít.

A lámpák üzemi ellenállása:



$$R_A = \frac{U^2}{P_A} \approx \frac{230^2}{100} \approx 529 \Omega$$

$$R_B = \frac{U^2}{P_B} \approx \frac{230^2}{25} \approx 2,12 \text{ k}\Omega$$

$$\text{A kör árama } I = \frac{U}{R_A + R_B} \approx \frac{230}{2650} \approx 0,087 \text{ A}$$

A lámpák aktuális teljesítménye:

$$P_A \approx I^2 \cdot R_A \approx 3,2 \text{ W}$$

$$P_B \approx I^2 \cdot R_B \approx 12,7 \text{ W}$$

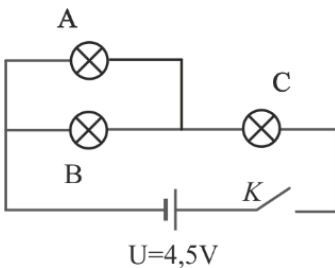
A számításokból adódik, hogy mindkét lámpa névleges teljesítményének csak tört részével világít: az A lámpa legfeljebb izzik, a B lámpa gyengén világít.

Ha bármelyik lámpa bekötési pontjait rövidre zárjuk (elhanyagolható ellenállású vezetékkel összekötjük) a másik lámpa fényereje megnő és „üzemi fényvel” világít.

Megjegyzés:

- A feladat megoldása tanári kísérlettel igazolható!

Izzólámpák kapcsolása (A-B)



Az alábbi kapcsolás három egyforma, 4,5 V feszültségre méretezett izzólámpát tartalmaz. A telep feszültsége is 4,5 V.

A betűkkel jelzett izzók közül melyik világít erősebben, melyik gyengébben? Mi történik, ha a B jelű izzót valaki kicsavarja?

Megoldás

A feladatban szereplő lámpák 4,5 V feszültség esetén működnek üzemszerűen. A megadott kapcsolásban egyik lámpára sem jut ekkora feszültség, így egyik lámpa sem világít teljes fényel. Az áramkör két sorba kötött részre bontható. Az egyik részt az egymással párhuzamosan kapcsolt A és B lámpa alkotja, amihez sorosan kapcsolódik a C lámpa. A telep feszültsége az ellenállások arányában oszlik meg a két rész közt. A két egyforma ellenállású A és B lámpa eredő ellenállása csak feleakkora, mint a magában álló C lámpának. Így a C lámpára kétszeres feszültség jut, mint a másik kettőre. A C lámpa tehát gyengült, de mégis erősebb fényel világít, mint a másik kettő.

Ha a B lámpát kicsavarjuk, a telepre két egyforma, sorosan kapcsolt lámpa csatlakozik. Mivel a két lámpa ellenállása azonos, a telep feszültségének fele jut mindegyikre. A két lámpa tehát egyformán világít, de az „névleges” fényerejéhez képest még mindig csak kisebb intenzitással.

Természetesen a feladat rutin számolással is megoldható. Kisdíjakok számára ennek nehézségét az adja, hogy a lámpák ellenállásának értékét nem ismerjük, így a számításokat R paraméterrel kell elvégezni.

A három lámpából és a telepből álló áramkör esetén az áramkör redő ellenállása $R_e = \frac{R}{2} + R = 1,5R \Omega$, a telep árama (ami a C lámpán is átfolyik):

$$I_c = \frac{4,5}{1,5R} = \frac{3}{R} A$$

A párhuzamosan kapcsolt A és B lámpákon átfolyó áram:

$$I_A = I_B = \frac{I_c}{2} = \frac{1,5}{R} A$$

A lámpák fényereje a lámpára jutó elektromos teljesítménytől függ. Az elektromos teljesítményt az ellenállás és az áramerősség négyzetének szorzata adja $P = R \cdot I^2$

Eszerint az A és B lámpa teljesítménye:

$$P_A = P_B = R \cdot \left(\frac{1,5}{R}\right)^2 = \frac{2,25}{R} W$$

a C lámpa teljesítménye:

$$P_C = R \cdot \left(\frac{3}{R}\right)^2 = \frac{9}{R} W$$

Az előírt használat esetén (az R ellenállású lámpára 4,5 V feszültség esik) a lámpa elektromos teljesítménye:

$$P = R \cdot \left(\frac{4,5}{R}\right)^2 = \frac{4,5}{R} W$$

A lámpa fényteljesítménye arányosnak tekinthető az elektromos teljesítménnyel. A számított teljesítményadatok összehasonlítása tájékoztat a fényteljesítmények arányáról is.

Megjegyzés:

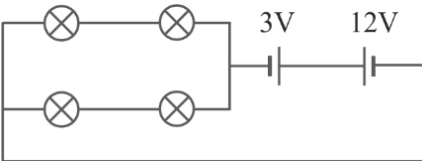
- Az izzólámpa ellenállását számításainkban állandónak értéknek tekintettük, a valóságban azonban az ellenállás az izzószál hőmérsékletével (az áram erősségével) változik. Ez a kvalitatív szintű válaszokat nem módosítja, de az egyszerű számításokban több-kevesebb hibával jár.

Tervezzük meg a kapcsolást! (A–B)

Rendelkezésünkre áll 4 db 4,5 V-os izzólámpa, valamint egy 12 V-os és egy 3 V-os feszültségű akkumulátor.

Készítsünk olyan kapcsolást, amellyel az adott eszközök felhasználásával maximális fényerőt nyerhetünk, és az izzólámpák nem mennek tönkre!

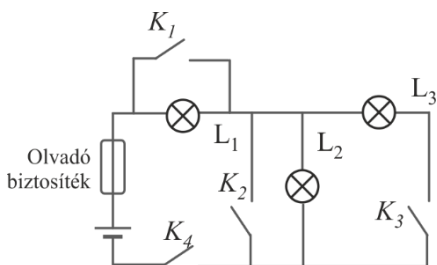
Megoldás



A megoldáshoz szükséges ötlet a következő: A két telepet szembe kell kapcsolni egymással. Ekkor a feszültség $12 - 3 = 9V$, a két sorba kötött lámpa számára éppen alkalmas feszültség. A kapcsolási rajzot az ábra mutatja.

Többféleképpen változtatható kapcsolás vizsgálata (A-B)

A rajzon ábrázolt kapcsolás telepet, közvetlenül a telep után bekötött olvadó biztosítékot, három lámpát, négy kapcsolót tartalmaz. A kapcsolási rajzot tanulmányozva adj választ a kérdésekre!



a) Melyik lámpa világít, ha a kapcsolási rajz szerint mindegyik kapcsoló nyitva van?

b) Mely kapcsolókat zárnád, hogy mindegyik lámpa égjen?

(A táblázatba mindegyik kapcsoló jele alá írd be, hogy nyitott vagy zárt!)

K ₁	K ₂	K ₃	K ₄

c) Milyen kapcsolóállás esetén éghet ki az áramkörbe kötött biztosíték?

Megoldás

a) Egyik lámpa sem világít.

b)

K ₁	K ₂	K ₃	K ₄
nyitott	nyitott	zárt	zárt

c) Rövidzár: ha K₁, K₂, K₄ kapcsolók zárva vannak.

Megjegyzés:

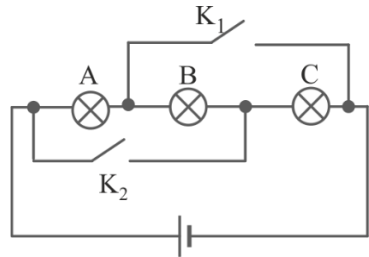
- A válaszokat ellenőrizzük a kapcsolás összeállításával és a kérdéseknek megfelelő kipróbálásával, illetve szimulációval

(Phet: https://phet.colorado.edu/sims/html/circuit-construction-kit-dc-virtual-lab/latest/circuit-construction-kit-dc-virtual-lab_hu.html).

Izzólámpák kapcsolásának értelmezése (B)

Három teljesen egyforma, a telep feszültségével megegyező névleges feszültségű izzólámpa (A, B, C), két kapcsoló (K_1 , K_2) és egyenfeszültségű telep felhasználásával a mellékelt rajzon látható kapcsolást állítottuk össze.

Vizsgáld meg, hogy mely lámpák, és milyen fényerővel világítanak a két kapcsoló különböző állásaiban!



Megoldás

1. Elsőként vizsgáljuk az ábrán látható esetet, ahol mindkét kapcsoló nyitott!

Ekkor a három izzó egyszerű soros kapcsolással csatlakozik a telepre. A három lámpán ugyanaz az áram folyik, mindegyik lámpára a telep feszültségének harmada. A három izzólámpa egyformán világít.

2. Tekintsük azt a helyzetet, amikor mindkét kapcsoló zárt!

Ebben az esetben a kapcsolókat tartalmazó vezető szakaszokkal a telep sarkait rövidre zártuk, egyik lámpa sem világít.

3. Legyen az K_1 kapcsoló zárt, az K_2 nyitott állásban!

Az K_1 kapcsoló zárása rövidzárat képez az A és B lámpák szélső pontjai közt, így azokon nem folyik áram, a lámpák nem világítanak. A C lámpa erősen világít (a telep által leadott teljesítmény erre az egy lámpára jut).

4. Legyen K_1 kapcsoló nyitott, az K_2 zárt állásban!

Az K_2 kapcsoló a B és C lámpák külső pontjait zárja rövidre, így a lámpákon nem folyik áram, azok nem világítanak. Most az A lámpa világít erősen, mert a telep által leadott teljesítmény erre az egy lámpára jut.

Megjegyzés:

- A válaszokat ellenőrizzük a kapcsolás összeállításával és a kérdéseknek megfelelő kipróbálásával, illetve szimulációval

(Phet: https://phet.colorado.edu/sims/html/circuit-construction-kit-dc-virtual-lab/latest/circuit-construction-kit-dc-virtual-lab_hu.html).

Áramkör két teleppel (B-C)

Két-két egyforma ellenállásból és két egyforma telepből az ábrán látható áramkört állítjuk össze. ($R = 20\Omega$, $r = 10\Omega$, $U = 10V$)

Mekkora áram folyik a r ellenállásokon?

Megoldás

Az első pillanatban bonyolultnak tűnő kapcsolás igen leegyszerűsödik, ha észrevesszük, hogy az A és B pont ekvipotenciális, éppúgy, mint C és D pont. Ez azt jelenti, hogy az A és B pontok közötti, valamint a C és D pontok közötti $R = 20\Omega$ -os ellenállásokon keresztül nem folyik áram. Ha az R ellenállásokat és a rajzon szaggatott vonallal húzott vezetőket figyelmen kívül hagyjuk, a megmaradt áramkörre egyszerűen felírható Ohm törvénye:

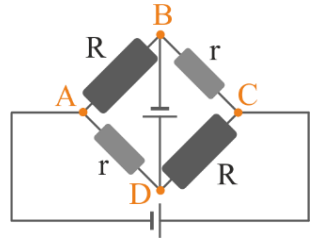
$$2r \cdot I = 2U$$

ahonnan, az ismert adatok behelyettesítésével kapjuk az r ellenálláson átfolyó áram értékét:

$$I = \frac{U}{r} = \frac{10V}{10\Omega} = 1A$$

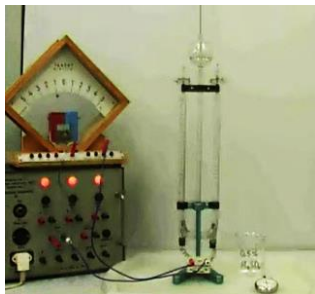
Megjegyzés:

- A feladathoz kapcsolódva további kérdések is feltehetőek:
 - Mekkora az áramerőssége, ha az egyik telep polaritását megcseréljük?
 - Bizonyítsuk be, hogy a kétféle polaritás esetén mért áramerősség harmonikus középértéke megegyezik azzal az árammal, amit akkor mérünk, ha az egyik telepet kivesszük a kapcsolásból!
 - Hogyan kellene módosítani az áramkört, hogy az áramerősség a kétféle telep-polaritásnál mért áramok számtani közepe legyen?



Az elemi töltés becslése elektrolitikus vízbontás alapján (B-C)

A helyszínen bemutatott videofilm vízbontási kísérletet mutat. A filmen a Hoffman-féle vízbontó készülékben szobahőmérsékleten vizet elektrolizálunk. Az elektrolízis során a negatív elektródán (katódon) hidrogén fejlődik, a pozitív elektródán (anódon) pedig oxigén. A kísérlet során mérjük az áram erősségét, az elektrolízis időtartamát és a kivált hidrogén-gáz térfogatát.



A mérési adatokat felhasználva határozd meg az elemi töltés nagyságát!

Mekkora a mérési eredmény hibája?

Az elektron töltésének irodalmi értéke $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

A feladathoz kapcsolódó mérőkísérletet bemutató videó meglekinthető:

Film: <http://fiztan.phd.elte.hu/letolt/vizbontas.wmv>

Megoldás

A bemutatott videó kísérő szövege magyarázza a kísérlet lépéseit. A mérőkísérlet során mérjük az elektrolizáló áram értékét és a kivált gázmennyiségek térfogatát az elektrolizálás időtartamának függvényében. Megfigyelhető, hogy a kiváló gázok mennyisége az eltelt idővel arányosan nő, a kivált hidrogén térfogata kétszerese az oxigéngázénak. A vízbontás során mért adatokból nagyságrendi pontossággal meghatározható az elektron töltése (elemi töltés).

A számításhoz a legnagyobb kivált hidrogén-térfogatra, az áram értékére és az elektrolízis időtartamára van szükségünk. Az elektrolízis időtartama $\Delta t = 9 \text{ perc } 30 \text{ mp} = 570 \text{ másodperc}$, az elektrolizáló áram értéke $I = 0,12 \text{ A}$, a katódon kivált hidrogén térfogata $V_{\text{H}_2} \approx 6 \text{ ml}$. ($T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$)

A 6 ml hidrogén elektrolitikus leválasztásához $Q = I \cdot t = 0,12 \cdot 570 = 68,4 \text{ C}$ töltésre volt szükség. Mivel egy H-atom elektrolitikus leválasztásához egy elektronra van szükség, az elektron töltése q_e egyenlő a felhasznált össztöltés Q értékének és a $V = 6 \text{ ml}$ gázmennyiségben lévő hidrogén-atomok N számának hányadosával

$$q_e = \frac{Q}{2N}$$

ahol N a hidrogéngáz kétatomos molekuláinak száma, az gázok állapotegyenletének felhasználásával ($pV = NkT$) számítható ki.

Ha megelégszünk az elemi töltés nagyságrendi becslésével a csőben lévő hidrogén gázt szobahőmérsékletűnek ($20\text{ °C} = 293\text{ K}$) és atmoszférikus nyomásúnak ($p = 10^5\text{ Pa}$) tekinthetjük, a k Boltzmann-állandó értéke $1,381 \cdot 10^{-23}\text{ J/K}$.

Ezen adatokkal számolva az elektron töltése

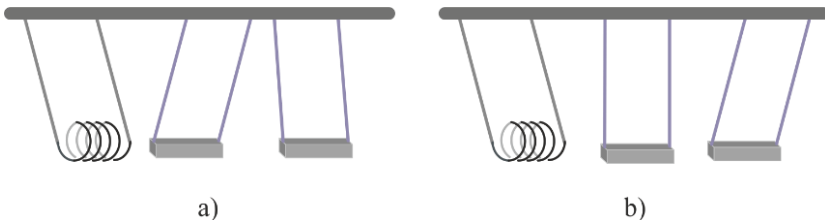
$$q_e \approx 2,3 \cdot 10^{-19}\text{ C}$$

ami nagyságrendileg egyezik az irodalmi ($q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$) értékkel. (Pontosabb értéket, de az irodalmi adatnál még mindig nagyobb eredményt kapunk, ha figyelembe vesszük, hogy a csőbe zárt hidrogén nyomása a külső légnyomásnál a középső nívóedény folyadékszintjének és a gáz alatti folyadékszint különbségének megfelelő hidrosztatikai nyomással nagyobb.)

A mérés hibája (az irodalmi érték és a mért adat különbsége) $\Delta = 0,7 \cdot 10^{-19}\text{ C}$, relatív hibája: $\frac{\Delta}{q_e} \approx 0,43\%$.

Egyszerű kísérlet a mágneses kölcsönhatás értelmezésére (B)

A rajzolt ábrák két egyszerű kísérletet mutatnak. Mindkét rajzon egy felfüggesztett tekercs és két hasonlóan felfüggesztett fémrúd látható. A tekercsen esetleg áram folyik át, az ehhez szükséges telep és kapcsoló azonban az ábrán nem látható. A rudakról kiindulásként csak annyit tudunk, hogy bármelyikük egyaránt lehet lágvas vagy mágnes is.



Találd ki, hogy melyik rúd lehet lágvas és melyik mágnes, ha a kísérlet során a tekercs és a vasrudak az első rajzon látható módon álltak be! Folyik-e a tekercsben áram?

Elképzelhető-e, hogy az áram megfelelő változtatásával a második rajzon látható helyzet álljon elő?

Megoldás

A tekercsben mindkét esetben folyik áram, hiszen csak az árammal átjárt tekercsre hat a mágnes, erőhatás híján a felfüggesztő fonalak függőlegesek lennének.

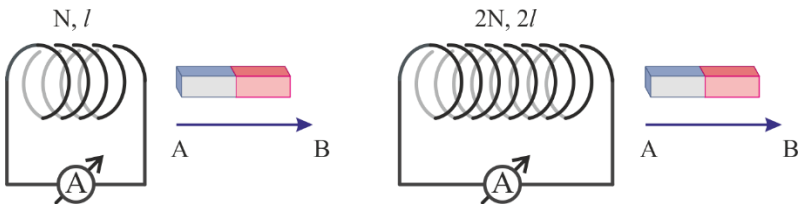
Az első esetben a tekercs vonzza a középső rudat, ami egyaránt lehet lágyvas vagy megfelelő polaritású mágnes. A szélső rudat a középső rúd taszítja, ebből arra kell következtetnünk, hogy a szélső rúd mágnes.

A második rajzon a középső rudat a tekercs és a szélső rúd egyenlő erővel vonzza, ezért az helyben maradt, míg a két szélső egyaránt feléje mozdult el. A rajzon bemutatott helyzet a tekercs áramának megfelelő változtatásával kétféleképpen is előállítható:

- A tekercs áramát, az előbbi áramirány változatlanul hagyásával, annyira megnöveljük, hogy az, a középső rudat akkor is átmágnesezze, ha az permanens mágnes, így a középső rudat a tekercs és a mágnes egyaránt vonzza.
- A tekercsben folyó áram irányát megfordítjuk és intenzitását megfelelően beszügyeljük. Ekkor a tekercs a túlszálen levő rudat vonzza. Ha a középső rúd lágyvas, akkor azt a tekercs és a másik rúd egyaránt vonzza. (Ha a középső rúd mágnes lenne, akkor mind a tekercs, mind a szélső rúd taszítaná.)

Elektromágneses indukció (B-C)

Az alábbi rajz egy kísérlet két változatát mutatja.



Az első esetben N menetszámú és l hosszúságú légmagos tekercsre elhanyagolható belső ellenállású árammérőt kötöttünk, majd a tekercs előtt álló mágnest elrántottuk, a műszer kitért. A második kapcsolás hasonló kísérletet mutat, de most az előbbi tekercs menetszámát és hosszát megdupláztuk, a műszer, a mágnes, illetve az utóbbi mozgása változatlan.

Az első vagy a második kísérlet során tér ki jobban a mérőműszer?

Megoldás

Az áram erőssége a tekercsben indukálódó feszültség és a tekercs ellenállásának értékétől függ

$$I = \frac{U_{\text{indukált}}}{R}$$

A vizsgált két esetben az indukált feszültség nagyságának és az ellenállás értékének változását kell megvizsgálni. Magától értetődően a tekercs ellenállása a menetszám megkétszerezése miatt a második esetben megduplázódik. Az indukált feszültség meghatározása azonban nehezebb. Az indukált feszültséget a feltekert dróthurkokban bekövetkező fluxusváltozás összege szabja meg:

$$U_{\text{indukált}} = - \sum_N \frac{\Delta B_n A}{\Delta t}$$

ahol $\frac{\Delta B_n}{\Delta t}$ jelenti a tekercs n -dik menete által alkotott hurokban a mágneses térnek, a mágnesrúd elmozdítása miatt Δt idő alatt bekövetkező változását és A a tekercs keresztmetszetének területét. A viszonylag hosszú tekercsben a rövid mágnesrúd tere erősen inhomogén. A mágneshez közelebb eső menetekben nagyobb, a távolabbiakban kisebb. A menetszám és hosszúság megkétszerezése, a mágneses tér rohamos gyengülése miatt a második tekercsben indukálódott feszültség csak kissé nagyobb, mint az eredeti tekercsben. Mivel a menetek számának növekedésével a kör ellenállása jobban változik, mint az áramot hajtó feszültség, az árammérő a megnövelt tekercs esetén kisebb áramot mutat.

Kísérleti igazolás

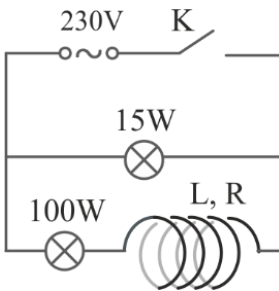
A feladat fenti gondolatmenet szerinti megoldása kísérletileg is egyszerűen igazolható. A kísérlethez a közismert szétszedhető iskolai transzformátorkészlet két egyforma, 600 menetes tekercsét ajánljuk. Először csak az egyik tekercset csatlakoztassuk az érzékeny árammérőre, és a tekercs elé helyezett iskolai rúd-mágnes gyors mozdulattal távolítsuk el. Ezután az első tekercsel kössük sorba a másodikat, és illesszük őket egymáshoz úgy, mintha egyetlen, kétszeres hosszúságú tekercset alkotnának. Kössük be a mérőműszert, és húzzuk el a meghosszabbított tekercs elől a mágneset! Ügyeljünk arra, hogy a mozgás sebessége a korábbihoz hasonló legyen! A megismételt kísérletben a műszer kevesebbet mutat, mint korábban.

Érdeemes elvégezni a kísérletet úgy is, hogy a tekercsbe vasmagot tolunk. A vasmagos tekercsek esetén az áramerősség változása lényegesen kisebb, mint légmagos tekercseknél. A magyarázat a vasmagnak abból a tulajdonságából adódik,

hogy magába sűríti és vezeti a mágneses teret. A meghosszabbított vasmagos tekercsben a tekercs minden helyén azonos a mágneses tér, így a távolabbi hurkok is akkora járulékot adnak az indukált feszültséghez, mint a közeleiek.

A feladat tipikusan két ellentétesen működő hatás egymáshoz képest vett nagyságrendjének becslésére irányul, így erősen függ a kísérleti körülményektől. Ha például a második tekercset nem meghosszabbítjuk, hanem a többlet meneteket azonos tekercselési iránnyal szorosan az elsőre tekerjük, akkor akár azonos eredményt is kaphatunk.

Önindukciós tekercs hatása (B)



Két különböző izzólámpa (230V, 15W és 230V, 100W), valamint egy nagy induktivitású és kis ohmos ellenállású tekercs és egy kapcsoló felhasználásával összeállítottuk az ábrán látható kapcsolást. Az áramkört 230V egyenfeszültségű tápegységre kapcsoljuk. A kapcsoló zárt állása esetén mindkét lámpa szabályosan világít. A kapcsoló nyitása után az egyik lámpa néhány pillanatig fényesebben ég, mint előzőleg.

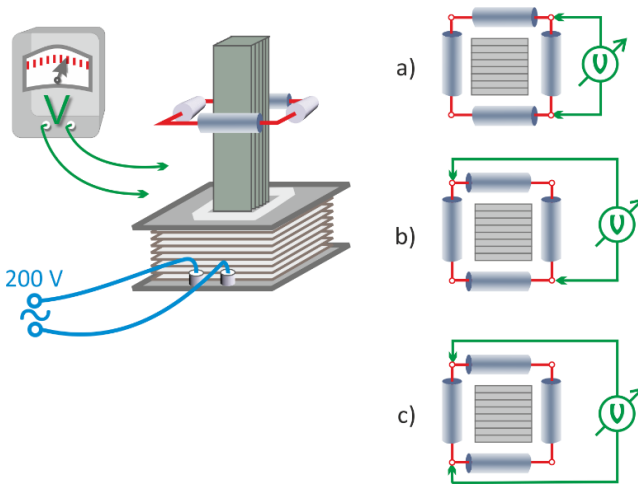
Melyik ez a lámpa, és mi a magyarázata a leírt jelenségnek?

Megoldás

Mivel a tekercs ohmos ellenállása elhanyagolható, a kapcsoló zárt állásánál mindkét izzóra üzemi feszültség esik, és ezért azok a névleges teljesítményüknek megfelelően világítanak. A kapcsolás tekercset tartalmazó ágában az áramerősség nagyobb, mint a 15 wattos izzó ágában. A kikapcsoláskor a tekercsben önindukciós feszültség indukálódik, amely fenn akarja tartani a tekercs korábbi áramát. Az önindukciós feszültség által gerjesztett áram a 15W-os lámpán folyik át, amely a rövid, megnövekedett áramlökés miatt erősebben világít, mint korábban.

Az indukált feszültség mérése zárt ellenálláshurok pontjai közt (C)

Vasmagos tekercs köré vízszintes síkú, négyzet alakú vezető hurkot teszünk. A hurok minden éle $10\text{ k}\Omega$ ellenállású. A tekercs 300 menetes és 200 V -os, 50 Hz -es váltófeszültségre van kötve. Mit mutat a $30\text{ k}\Omega$ ellenállású voltmérő, ha az ábrákon látható módon megmérjük vele a négyzetes vezetőhurok csúcsai közötti feszültséget?

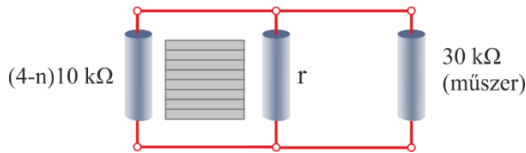


Megoldás

A tekercs és az annak vasmagját körülfogó ellenállásokból álló hurok transzformátornak tekinthető. Ha a 300 menetes tekercs „primer” feszültsége 200 V , az ellenálláshurok alkotta egymenes „szekunder” tekercs feszültsége

$$U_{sz} = \frac{1}{300} \cdot 200 = \frac{2}{3}\text{ V}$$

Ennek több-kevesebb részét mutatja a mérőműszer. Nehezíti a helyzetet, hogy a feszültségmérő belső ellenállása nem végtelen (ideális műszer), hanem a hurokban lévő ellenállásokkal összemérhető, $30\text{ k}\Omega$. A feladat ábráján megjelölt három kapcsolatban a műszerrel különböző nagyságú ellenállások vannak párhuzamosan kötve. Ebből kiindulva a három esetet egyetlen helyettesítő kapcsolás segítségével általánosan tárgyalhatjuk. A helyettesítő kapcsolást a mellékelt ábra mutatja.



A műszer belső ellenállásával párhuzamosan kötött r ellenállás értéke attól függően változik, hogy a műszert az ellenállás-négyzet mely csúcsaira kötöttük. Az r ellenállás lehetséges értékei: $r = n10 \text{ k}\Omega$, ahol $n = 1, 2, 3$

A két párhuzamosan kötött ellenállás eredője a szokásos módon számítva

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{30} + \frac{1}{10n}, \text{ ahonnan}$$

$$R_e = \frac{30n}{n+3} \text{ k}\Omega$$

Az indukált szekunder feszültség az ellenállások arányában oszlik meg a most kiszámított eredő ellenálláson és az ellenállás-négyzet fennmaradó $(4-n)10 \text{ k}\Omega$ ellenállásán. A műszer az R_e ellenállásra jutó U_n feszültséget mutatja.

$$U_n = \frac{R_e \cdot U_{sz}}{10(4-n) + R_e}$$

A feladatban megjelölt esetekben, $n = 1, 2, 3$ esetén a mért feszültségek rendre a következők:

$$\text{a) } U_1 = \frac{2}{15} \text{ V}, \quad \text{b) } U_2 = \frac{1}{4} \text{ V}, \quad \text{c) } U_3 = \frac{2}{5} \text{ V}$$

Megjegyzés:

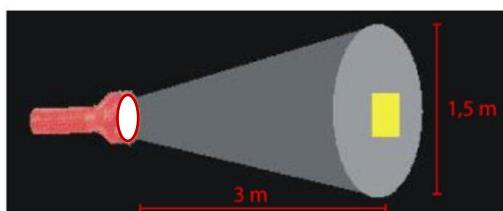
- A kísérlet a sztatikus és az indukált elektromos mező lényegi különbségére hívja fel a figyelmet. A töltések keltette elektromos tér konzervatív, amíg a mágneses indukciófluxus változása következtében nem konzervatív, örvényes elektromos mező.
- Érdeklődő, és nagyobb fizika óraszámú osztályokban azonban érdemes a kérdést a Maxwell-egyenlet körszummás (integrál) alakjára alapozva megtárgyalni.

OPTIKAI FELADATOK

A fénytán feladatok döntően a geometriai optikára korlátozódnak. Egy két kivételtől eltekintve egyszerű geometriát (hasonlóság, tükrözés), illetve a geometriai optikai szerkesztéseket felhasználva oldhatók meg. Elsősorban általános iskolásoknak szólnak, de alkalmasak az érettségire készülők számára is a korábban tanult alapismeretek felfrissítésére is. A tükrökkel, lencsékkel való játék és a megfigyelt optikai jelenségek geometriai értelmezése nagyszerű lehetőség a fizikai gondolkodás fejlesztésére.

Fényfolt a falon (B)

Laci erős fényű elemlámpával 3 m távolságra áll a sötétre festett faltól, amire valaki rajzszöggel fehér papírlapot erősített. Laci lámpájának fényét a papírlapra irányítja. A lámpa 1,5 m átmérőjű kör alakú területet világít meg a falon, közepén a fehéren világító papírlappal.

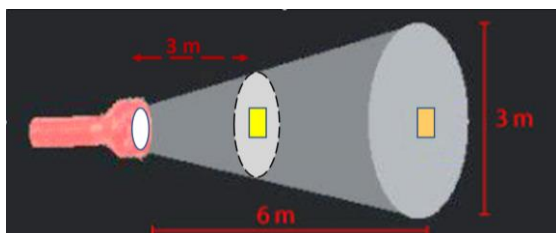


Mekkora lesz a fényfolt átmérője a falon, ha Laci az előbbiekhöz képest kétszeres távolságból, azaz 6 m távolságból világít?

Vajon hogyan változik az első esethez viszonyítva a fehér lap megvilágításának az erőssége?

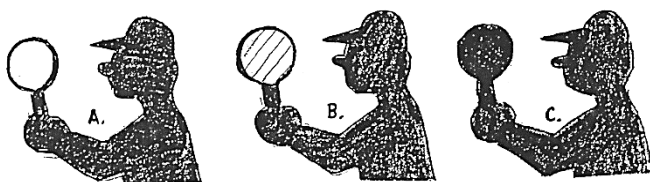
Készíts a megadott rajzhoz hasonló illusztrációt a messzebről történő megvilágítás esetére! A rajzra írd be a megváltozott távolságadatokat! A papírlap megvilágításának erősségére adott válaszodat szövegben indokold meg!

Megoldás



A lámpa fénye egyenletesen oszlik meg a négyszeres nagytítású megvilágított területen. A papírlap mérete nem változott, tehát a papír megvilágításának erőssége negyedére csökkent.

Gyűjtőlencse árnyéka a falon (A)



Egy gyerek áll a napsütötte házfal előtt kb. 1 m távolságban és árnyékot vet a falra. A gyerek kezében egyszerű nagyító van (amilyet a bélyeggyűjtők szoktak használni). A nagyító ugyancsak árnyékot vet a falra. Vajon milyen lesz a lencse árnyéka? Melyik rajz a helyes? Miért?

Megoldás



A nagyító árnyéka a falon sötét lesz, mert a rövid fókusz távolságú lencse a ráeső párhuzamos sugarakat a fal nagy területére szórja szét. (A fal és a lencse távolsága ugyanis jóval nagyobb, mint a nagyító néhány cm-nyi fókusz távolsága.) Így a lencse mögött kevesebb fény éri a falat, mint a környező részeket, ahogy azt a fotó is igazolja.

Szemüveg dioptriájának meghatározása (B)

A napsugarakat a szemüveglencsével ernyőre fókuszáltuk. A fotó alapján állapítsd meg hány dioptriás a szemüveg!

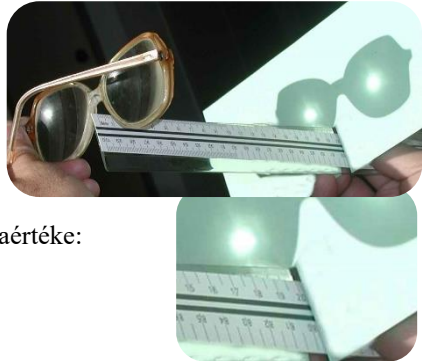
Megoldás

A lencsék a Nap párhuzamos sugarait a szemüvegtől 20 cm távolságban lévő ernyőre gyűjtik össze, a lencsék fókusz távolsága tehát 20 cm.

A lencse dioptriaértékét a méterben kifejezett fókusz távolság reciproka adja.

Így a fotón látható szemüveglencsék dioptriaértéke:

$$D = \frac{1}{0,2} \approx 5 \frac{1}{m}$$

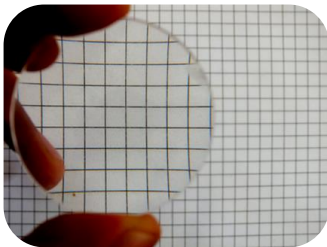


Megjegyzés:

- Napfény híján is egyszerűen megbecsülhető a gyűjtőlencsék fókusz távolsága. Elég, ha egy távoli lámpa, fénycső vagy a világos ablak képét felfogjuk a lencse mögé helyezett papírlapon. Mivel a tárgy-távolság jóval nagyobb a fókusz távolságnál, a kép gyakorlatilag fókusz síkban keletkezik. A lencse-ernyő távolság tehát a jól közelíti a fókusz távolság értékét.



Egyszerű nagyító (lupe) vizsgálata fotó alapján (C)



A mellékelt képen a füzetlap fölé tartott lencse nagyítva mutatja a négyzethálót.

A fotó alapján határozd meg a nagyítást!

Határozd meg, a fókusztávolsághoz viszonyítva, milyen messze tartjuk a lencsét a füzetlaptól!

A kiadott négyzethálós papíron készíts méretarányos szerkesztést a lencse képalkotásáról!

Megoldás

A lencse nagyítása megadható, ha a négyzetek fotón látható méretét összehasonlítjuk. Ennek legegyszerűbb módja, hogy a fotón olyan osztásvonalakat keresünk, amelyek a papíron és a lencse képén folytonosak, majd leszámoljuk a vonalak távolságát megadó négyzetoldalakat számát a két területen (első ábra).

Mivel a pirossal jelölt osztásvonalak távolsága a tárgyként szereplő füzetlapon 5 négyzetoldal, a lencsével előállított képen pedig csak 3, tehát a lencse nagyítása:

$$N = 5/3 \approx 1,66$$

A feladat második kérdése a lencse és a füzetlap távolsága (tárgytávolság értéke) a lencse fókusztávolságához viszonyítva.

A lencsék képalkotása esetén a kép (K) és a tárgy (T) nagyságának arányát kifejező nagyítás (N), a képtávolság (k) és a tárgytávolság arányával is megadható

$$N = \frac{K}{T} = \frac{k}{t} = \frac{5}{3}$$

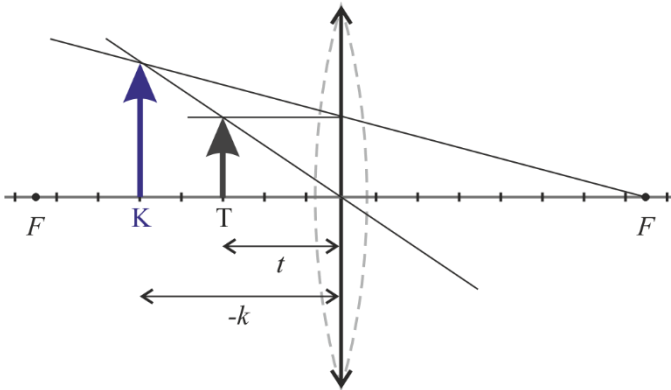
A tárgytávolság fókusztávolsággal kifejezett értéke megkapható, ha a $\frac{k}{t} = \frac{5}{3}$ arányt felhasználva kifejezzük a k képtávolság értékét t -vel és így írjuk be a leképezési törvény formulájába, figyelembe véve, hogy esetünkben látszólagos képről, azaz negatív képtávolságról van.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} - \frac{1}{k} = \frac{1}{t} - \frac{3}{5t}$$

ahonnan

$$t = \frac{2}{5}f$$

A feladat harmadik része a lencse képképzését bemutató, négyzethálós lapon szerkesztett méretarányos rajzot kéri. A megoldás az ábrán látható.



$$\frac{K}{T} = \frac{k}{t} = \frac{5}{3}$$

$$f = \frac{5}{2}t$$

Megjegyzés:

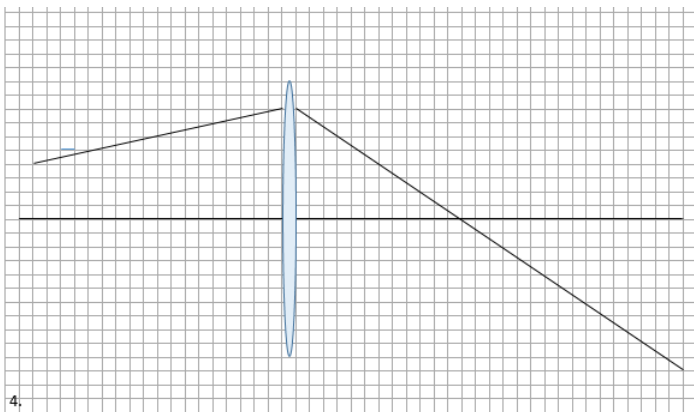
- A megoldáskor a lencsetörvényt ismertnek tételeztük fel. A szerkesztésekben a lencsét a fősíkjával helyettesítettük. Komoly nehézséget jelenthet az is, hogy a nagyító virtuális képet alkot. Mindez azt jelenti, hogy a feladat alaptantervű osztályokban nehéznek számít.

Gyűjtőlencse sugármeneteinek szerkesztése (A)

Az alábbi rajz gyűjtőlencsén áthaladó fénysugarat mutat.

Egészítsd ki a rajzot a képszerkesztésnél használt nevezetes sugarak alkalmas kiválasztásával és berajzolásával, és határozd meg szerkesztéssel a lencse

fókuszpontját! Olvasd le a rajzról a fókusz távolság (f) négyzetháló-egységeiben mért értékét!



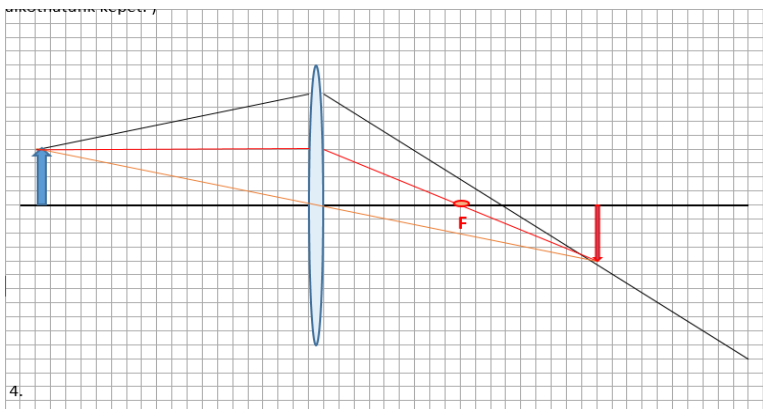
(A szerkesztés során képeld azt, hogy a berajzolt sugármenet az optikai tengelyre merőlegesen álló tárgy felső pontjából indul ki.)

Megoldás

A kért szerkesztést az ábra mutatja. A szerkesztés menete a következő:

- Megrajzoljuk a kapott rajzon előre behúzott sugármenetének kezdőpontjához illesztve az optikai tengelyen merőlegesen álló tárgyat.
- Meghúzzuk a tárgy felső pontjából a lencse középpontján irányváltás nélkül áthaladó nevezetes fénysugarat, aminek az előre megrajzolt sugárral adódó metszéspontja a lencse által a tárgyról alkotott kép nagyságát, illetve a lencsétől mért tárgy távolságát határozza meg
- Megrajzoljuk a tárgy felső pontjáról kiinduló, az optikai tengellyel párhuzamos fénysugarat, ami a lencsén áthaladva úgy törik meg, hogy a lencse optikai tengelyét a fókuszpontban metszi. A szerkesztett ábráról négyzetháló-egységeiben leolvasható a lencsét jellemző fókusz távolság értéke:

$$f = 9 \text{ négyzetháló-egység}$$



Pénzérmék takarásban (C)

Egyszerű optikai kísérlet a következő: gyűjtőlencse után nagyobb, majd kisebb méretű pénzérmét helyezünk el egymás mögött néhány cm távolságban. A nagyobb méretű érme a lencséhez közelebb, a kisebb távolabb van. A lencsén átnézve, a nagyobb érme nagyított képét látjuk, a kisebb érme takarásban van (1. fotó).

Ha a lencse és az elől álló 5 Ft-os érme helyét változatlanul hagyva a másodiknak álló kisebb 1 Ft-os érmét hátrafelé mozgatva távolítjuk a lencsétől és az első érmétől, a lencsén keresztül megfigyelhető, hogy az eddig takart kisebb érme felnagyítva láthatóvá válik az első pénzérme mögött (2. fotó)



1. fotó: A lencsét az elől lévő érmétől a megfigyelő felé elmozdítva az elől lévő 5 Ft-os mögött láthatóvá válik az eddig takarásban lévő 1 Ft-os érme.



2. fotó: A nagyobb méretű 5 Ft-os pénzérme a lencsén keresztül nézve. (A forgalomból már kivont kicsi 1 Ft-os érmét az első érme takarja.)

A közölt fotók alapján jellemezd a lencse tárgyáról alkotott képét!

Készíts magyarázó rajzot az első képhez, ami bemutatja és a két tárgyról a lencsére érkező fénysugarakkal magyarázza, hogy a hátrébb álló 1 Ft-os érme nem látható a képen.

Készíts magyarázó ábrát a lencse 2. fotón bemutatott képalkotásáról!

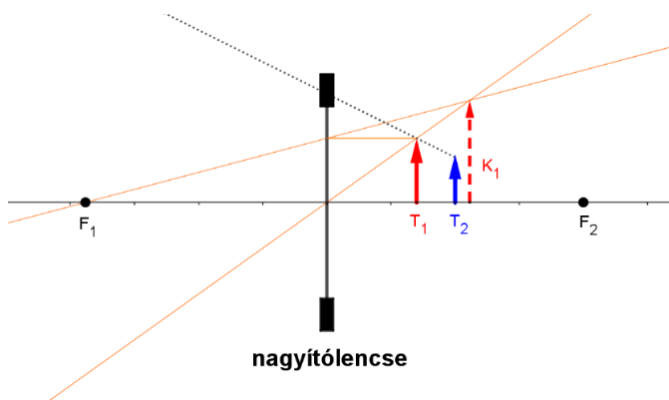
Adj összefüggést, illetve készíts rajzot arra vonatkozóan, hogy a D átmérőjű gyűjtőlencsétől t_1 távolságban elhelyezkedő T_1 méretű tárgytól milyen távol helyezhető el a nála kisebb T_2 méretű tárgy úgy, hogy az utóbbi képe a második fotóhoz hasonlóan látható legyen!

Megoldás

A fotók mindkét érméről egyenes állású nagyított képet adnak, ami azt jelenti, hogy az egymás mögött elhelyezett pénzérmék mindegyike a lencse fókusz távolságán belül helyezkedik el, és ez igaz az első esetben (amikor a hátsó érme takarásban van), és a második esetben is amikor a második érme a lencsétől távolítva előtűnik annak egyenes állású nagyított képe.

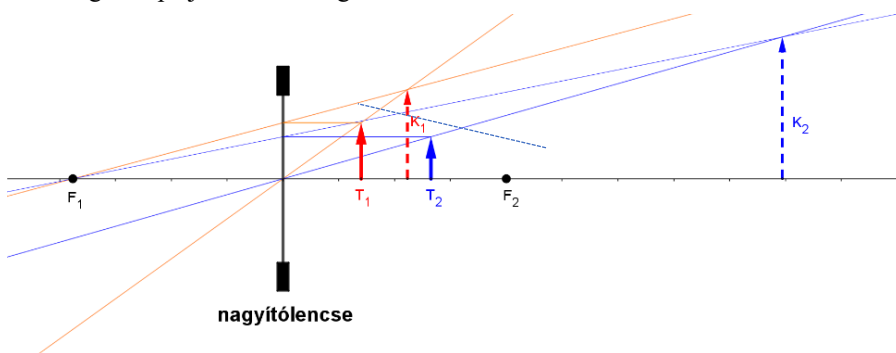
A lencse első fotón bemutatott képalkotását az alábbi egyszerűsített szerkesztési rajz értelmezi. Egyszerűsítésként a leképezési rajz elkészítésénél a lencséhez közelebb álló 5 Ft-os érmét az optikai tengelyre állított piros nyíl, a távolabbi, régi 1 Ft-os érmét a kisebb kék nyíl jelképezi. A szerkesztéshez a nyilak csúcsából kiinduló, a tananyagban is szereplő nevezetes sugármeneteket használtuk (referenciapontként berajzoltuk a lencse mindkét fókuszpontját). A fényképezőgép a T_1 tárgyról kiinduló és a lencsén áthaladó fénysugarakat érzékelve a tárgy helyett annak K_1 képét rögzíti. Az egyenes állású nagyított látszólagos képet a szaggatott vonallal rajzolt nyíl mutatja.

A kis méretű 1 Ft-os érme a fotón azért nem látszik, mert a T_2 tárgyról induló fénysugarak T_1 takaró hatása miatt nem érik el a lencsét. A szerkesztett ábrán pontozott kék vonallal berajzoltuk azt a lencse középpontjához legközelebbi fénysugarat, amely a T_2 nyíl hegyéből indul és a piros nyíl hegyét súrolva már eléri a lencse síkját. Az ábra jól mutatja, hogy ez a fénysugár már a lencse foglatába ütközik, és ezért jut át a lencsén. A berajzolt sugárnál laposabban induló sugarakat a T_1 tárgy nem engedi eljutni a lencséhez.



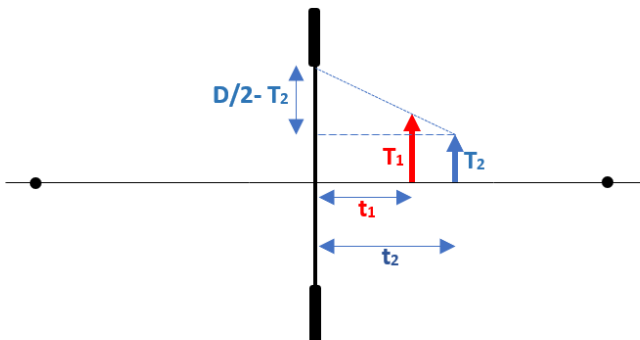
A második fényképhez fűzött leírás arról tájékoztat, hogy csak annyi változtatás történt, hogy a kisebb méretű érmét (T_2) lassan távolítottuk a T_1 tárgytól és a lencsétől. Az ábrán látható új helyzetben a T_2 és T_1 nyilak hegyét összekötő pontozott vonal már eléri a lencsét, így a foton megjelenik a K_2 kép is. (A K_2 kép szerkesztéséhez továbbra is a nevezetes sugarakat használhatjuk függetlenül attól, hogy valóban részt vesznek-e a képalkotásban)

A szerkesztett képek jó egyezést mutatnak a második fotóval. A T_2 tárgy közelebb kerülve a lencse fókuszához, kikerül T_1 takarásból, miközben a lencse által alkotott látszólagos képe jelentősen megnövekszik.



Az egymás mögött elhelyezett két érme nagyított látszólagos képének együttes megjelenéséhez az szükséges, hogy a második tárgyról induló fénysugarak egy része átjusson a lencsén. Ennek matematikai megfogalmazása a mellékelt magyarázó rajz jelöléseivel felírt egyenlőtlenség:

$$\frac{D - T_2}{t_2} \geq \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1}$$



Távolságbecslés fotó alapján (A)



A fotóállványról készített képen hegyi tavacska tükrözi vissza a Tátra egyik hegycsúcsát. A tengerszem átmérője 40 m, a csúcs magassága 2000 m. (A tükröződő csúcs a tó közepére esik.)

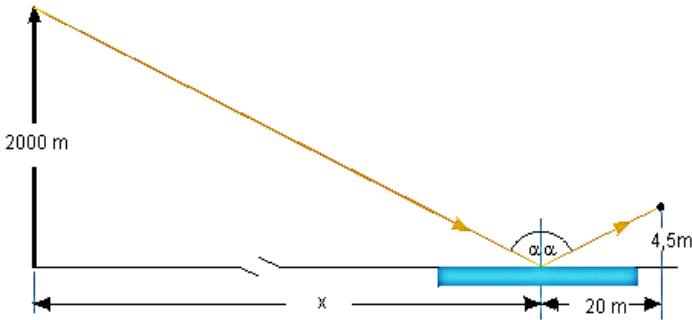
Milyen távol van a hegycsúcs a tó partján álló fotóástól, ha a fotóállvány, amiről a felvétel készült 4,5 m magasan volt a vízszint felett? (A megoldáshoz készíts vázlatrajzot is!)

Magyarázd meg, miért látod a képen a hegyet világosabbnak, mint a vízben látszó tükörképét!

Megoldás

Az ismert magasságú, de ismeretlen távolságban lévő hegycsúcs visszatükröződését a közeli tengerszemben az alábbi ábra alapján értelmezhetjük.

Mivel a tükrös visszaverődés esetén a beesési és a visszaverődési szög egyenlő a két derékszögű háromszög hasonló, azaz megfelelő oldalaik aránya azonos.



Ezt az ismeretlen x távolság és a többi ismert adat felhasználásával felírható egyenlet:

$$\frac{x}{2000\text{m}} = \frac{20\text{m}}{4,5\text{m}}$$

Az egyenletet x -re rendezve megkapjuk a távoli hegycsúcs keresett távolságát

$$x = 2000 \cdot \frac{20}{4,5} \approx 9\text{km}$$

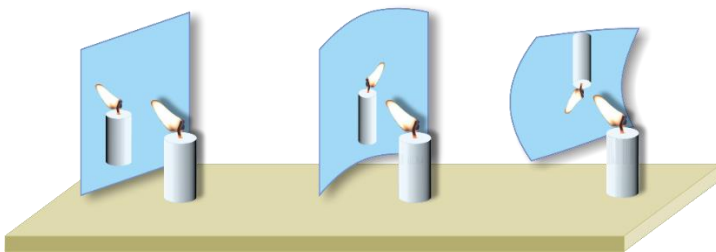
A hegycsúcstól a víztükörrre eső sugarak csak egy része vverődik vissza a víz felszínéről, jelentős része behatol a vízbe és lenyeődik. A vízbe behatolt fény hiánya miatt a tükörkép fényszegényebbnek, azaz sötétebbnek érzékeljük.

Görbült tükör képe (A-B)

Fényes (pl. krómozott) fémlemez, vagy a dekorációs boltokban hajlékony táblában árult plexi-tükör a megszokott módon tükröz, ha felülete sík. Megfigyelhető, hogy a tükörkép nem változik, ha a lemezt 90° -kal elfordítjuk.

Hajlítsuk meg homorúra a felületet és figyeljük meg a tükörképet! Ha ezt a „görbe tükört” 90° -kal elforgatjuk, a tükörkép 180° -ot fordul el.

Magyarázd meg a jelenséget!



Megoldás

A meghajlított fényes lemez egyszerre mutatja a síktükör és a homorú tükör sajátosságait. Tekintsünk kiindulásként a sík lemezt, amely az térbeli koordináta-rendszer xz síkjában áll, és előtte az y tengelyen áll egy gyertya! A fényes lemez síktükörként viselkedik. A tükörben a gyertya egyenesállású látszólagos képét látjuk a tükör síkja mögött.

Az z tengellyel párhuzamos alkotójú hengerfelületté görbítve a lemezt a tükör függőleges irányban síktükörként, vízszintesen homorú tükörként viselkedik. Ez az oka annak, hogy a függőlegesen álló gyertya tükörképe függőlegesen marad, miközben a balra hajló láng képe a tükörben ellentétesen dől meg. A láng képe fordított állású valódi kép. A hengertükört elforgatva a tengelyek szerepet cserélnek. Most a gyertyáról ad a homorú tükör fordított állású valódi képet, míg az elhajló láng irányában a tükör nem görbült, ezért egyenes állású látszólagos képet ad.

Szappanhártyákon kialakuló tükörképek értelmezése (B)

A bemutatott három fotó közül az első egy teásdoboz szájára feszülő sík szappanhártyát mutat, amin látszik a doboz előtt álló, égő gyertya tükörképe.

A második fotó azután készült, hogy előzetesen szappanoldatba merített szívószállal átszúrtuk a hártyát és kiszívtunk a dobozból egy kevés levegőt.

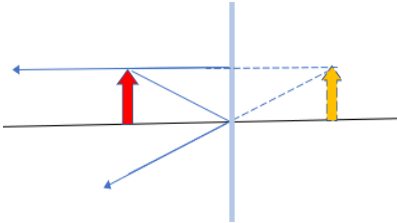
A harmadik fotó készítése előtt a szívószállal levegőt fújtunk a hártyán keresztül a dobozba. (Nemcsak az előzőleg kiszívott levegőt pótoltuk, hanem annál többet fújtunk be.)

Magyarázzátok meg a gyertyáról kialakult képeket a hártyák alakjával! Mutassátok be a képszerkesztéseknél használt fényugarakkal a képek keletkezését!



Megoldás

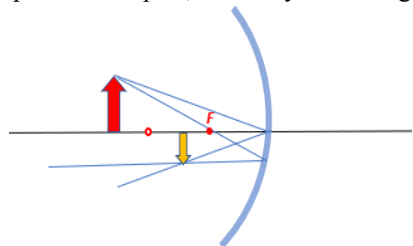
A szappanhártyára eső fénysugarak nagyobb része áthalad a hártján, de egy része visszaverődik. Ha a szappanhártya belül matt feketére festett teásdoboz nyílásának peremén feszül, megfigyelhető a hártjáról visszaverődő sugarak által a doboz előtt álló gyertyáról alkotott kép. Sík hártjáról visszaverődő fénysugarak a közismert siktükörhöz hasonló tükörképet adnak az hártya előtt álló gyertyáról.



Az bal oldali fényképen látható kép egyenesállású távolság és szögtartó látszólagos kép. A kép létrejött a nevezetes sugármenetekkel szerkesztett rajz mutatja. A rajzon a szerkesztés egyszerűsítésére a leképezés tárgyát jelentő gyertyát a hártya közepén átmenő optikai tengely

magasságába helyeztük. Ez sem a kép jellegén, sem a képtávolságon nem változtat.

A középső fényképen a gyertya kicsinyített, fordított állású képét látjuk. A képet a gyertyáról induló fénysugarak a humorú hártjáról visszaverődve hozták létre. A humorú szappanhártya humorú gömbtükörként viselkedik. Fordított állású kicsinyített képet a gömbtükör a tükörtől távoli (a kétszeres fókusz távolságnál messzebb lévő) tárgyról ad. Az ilyen kép *valódi kép*, (azaz ernyőn elvileg felfogható), távolsága a tükör görbületi sugara és a fókusz távolság közé esik. A foton látható kép keletkezését az ábra magyarázza.

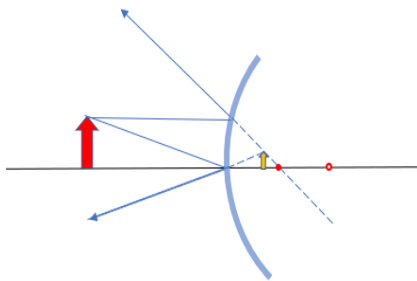


A jobb oldali fényképen a gyertya egyenes állású kicsinyített képét látjuk. A teásdoboz peremén lévő hártya kifelé domborodik,

azaz homorú gömbtükröként viselkedik. A homorú gömbtükör egyenes állású, kicsinyített és látszólagos képet hoz létre az előtte álló tárgyakról. A képszerkesztést az ábra mutatja.

Megjegyzés:

- A feladat a gömbtükörök tanítása után alkalmas tudásellenőrző feladat. A feladat alapját adó jelenséget a fotókon túl érdemes élő kísérlettel is megismételni. Az eszközök elkészítése és a kísérlet bemutatása a diákok feladata lehet. Az élő kísérlet előnye, hogy nem csupán egyetlen esetben látjuk a görbült hártayák képalkotását, de megfigyelhetjük a képalkotást különböző tárgy távolságok, illetve hártayagörbületek esetén is. Különösen tanulságos a homorú hártayával alkotott kép vizsgálata, ahol a fókusz távolságon belüli gyertyáról egyenes állású nagyított képet láthatunk.



Folyadék törésmutatójának meghatározása óraüveggel (B)

Az iskolai fizika- és kémiaszertár sok célra alkalmas eszköze az óraüveg. Az óraüveg gömbsüveg alakú edény, ami akár optikai kísérletre is felhasználható. Egyszerűen elvégezhető kísérlet a következő: helyezzük az óraüveget a napos ablakpárkányra, majd egy pausz-papír lapot ernyőként használva, keressük meg a Nap képét az edény fölött! Napos idő hiányában a mennyezeti izzólámpával is elvégezhető a kísérlet. Az óraüveg homorú belső gömbfelülete homorú tükörként viselkedve visszaveri a ráeső



fény egy részét. Töltsünk az óraüvegbe kb. félmagasságig tiszta vizet, és ismételjük meg a kísérletet! Az óraüvegbe folyadékot öntve a Nap (vagy az izzólámpa) pausz-ernyőn felfogható képe máshová kerül.

A két képtávolságot megmérve becsüld meg a folyadék törésmutatóját!

Megoldás

a) Az üres óraüveg homorú tükörként viselkedik, a Nap, illetve a mennyezeten lévő izzólámpa nagy távolság miatt gyakorlatilag párhuzamosnak tekinthető sugarait a fókuszpontba gyűjti össze. A pausz-ernyőn felfogott első képnek az asztallaptól mért távolsága a gömbtükör fókusztávolságát, ennek duplája a tükör görbületi sugarát adja meg ($k_1 = f_t = R_t/2$).

Az óraüveget vízzel feltöltve, a kép-távolság megrövidül. A jelenség oka az, hogy most a fénysugarak az óraüvegbe öntött "víz-lencsén" is kétszer keresztülhaladnak. így az egy tükörből és két lencséből álló összetett optikai rendszer eredő dioptriáját a három elem dioptriájának összege adja:

$$D = D_t + D_l + D_l$$

azaz

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_t} + \frac{2}{f_l}$$

Az erdő fókusztávolság megegyezik a másodsorra mért kisebb képtávolsággal ($f = k_2$), a tükör fókusztávolsága megegyezik az első mért képtávolsággal. A „víz-lencse” fókusztávolságának reciproka a lencse görbületi sugara (megegyezik az óraüveg görbületi sugarával, azaz az első képtávolság kétszeresével) és a törésmutató segítségével számítható ki.

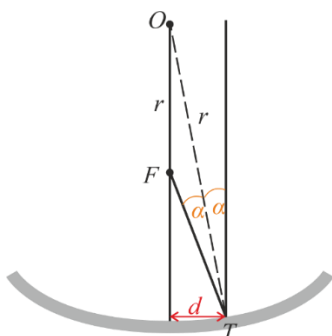
$$\frac{1}{f_l} = (n - 1) \frac{1}{R}$$

A felírt összefüggések alapján, a mért, illetve számított értékeket behelyettesítve a törésmutató értéke

$$n = \frac{k_1}{k_2}$$

A feladat a lencse fókusztávolságára és az összetett leképező rendszerek fókusztávolságára vonatkozó formulák ismerete nélkül, pusztán a törési törvény és a fókuszs fogalma alapján is megoldható.

Ha a homorú tükörrre párhuzamos fénynyaláb esik, akkor a gömb geometriai középpontján átmenő, és az ettől kis d távolságban haladó, majd a tükörről visszaverődő fénysugarak metszéspontja az ábra szerint, a tükörtől $r/2$ távolságban lévő F pontba esik. (Az OFT háromszög egyenlő szárú, az α szög nagyon kicsi és így a háromszög szára közelítőleg az alap felével egyenlő.)



Vizsgáljuk most ugyanezen sugarak menetét akkor, ha a gömbtükröbe folyadékot is öntöttünk! Ekkor az ábrán jelölt (2) fénysugár, a víz felületén megtörik. E sugár a vízből közelítve 2α szög alatt esik a felszínre. Így a törési törvény szerint, és a kis szögekre vonatkozó közelítések felhasználásával

$$\frac{1}{n} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \beta} \approx \frac{\text{tg } 2\alpha}{\text{tg } \beta}$$

azaz

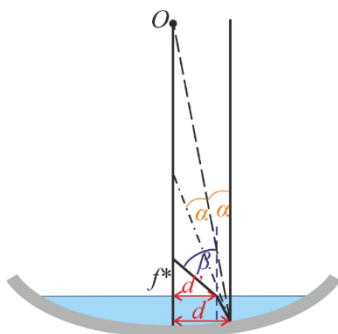
$$\frac{1}{n} = \frac{f_t}{f^*}$$

ahol $f_t = \frac{R}{2}$ és f^* , a mérhető két fókusztávolság.

A keresett törésmutató értéke így:

$$n = \frac{f_t}{f^*} = \frac{k_1}{k_2}$$

A víz törésmutatója $n_v \approx 1,33$ a glicerin törésmutatója $n_g \approx 1,47$.



Megjegyzés:

- A kísérlethez folyadékként víz helyett tiszta glicerin is használható.

„Megtört” kanál egy pohár vízben (A)



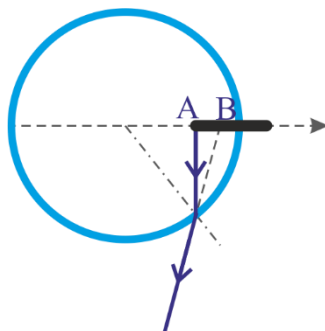
Hengeres üvegpohárba töltünk vizet és helyezünk bele egy kiskanalat! Ránézve a pohárra – a nézőponttól függő érdekes fénytörési jelenségeket figyelhetünk meg. A fényképfelvétel az oldalnézeti képet mutatja.

Magyarázd meg (felülnézeti rajzon, a sugármenetek feltüntetésével) a fotón látható érdekes törési jelenséget!

Megoldás

Tekintsük a kanál éppen vízbe merült A pontjáról vízszintes irányban jövő fénysugarakat! Válasszuk ki a rajzon bemutatott két sugármenetet!

A fotó síkjára merőlegesen induló fénysugár a pohár hengeres falánál megtörik. A megtört sugár hozzávetőleges irányát berajzolhatjuk, ha a beesési pontba meghúzzuk a beesési merőlegest, azaz a henger sugarát. A sűrűbb közegből (víz) a ritkább közegbe (levegő) átlépő fény a beesési merőlegestől törik.



Második fénysugárként válasszuk a kanálról a fotó síkjában haladó fénysugarat! Mivel a sugár haladási iránya a beesési merőleges mentén halad a fény nem változtat irányt a határfelületen. A kanál A pontjának képét a fénytörés miatt a rajzon B -vel jelölt helyzetben látjuk.

„Háttérfordító” borospohár (B)

A mellékelt fotón látható vízzel telt pohár mögött a háttér bal fele fehér, jobb fele kék. A poháron keresztül nézve – amint a fotó is mutatja – a háttér fordítottnak látszik.

Készíts felülnézeti rajzot, és magyarázd el a sugármenetek segítségével a jelenséget!

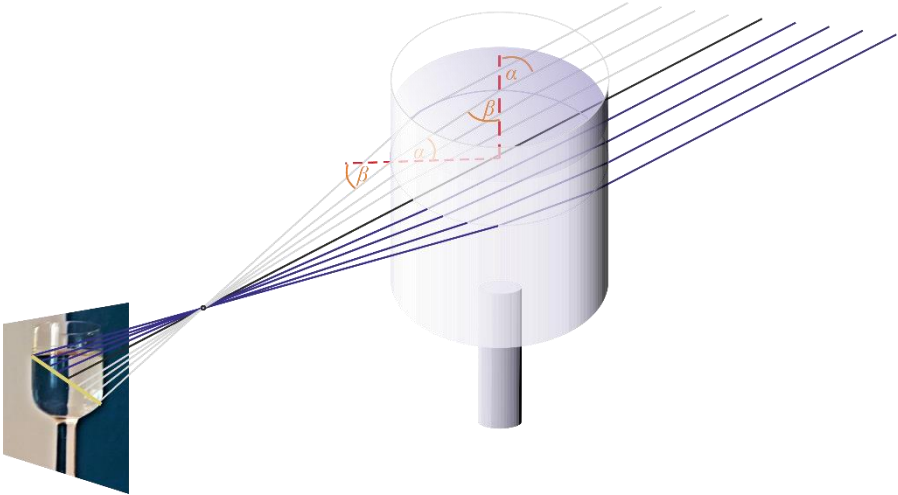


Megoldás

A jelenség a háttérről a szemünkbe, illetve a fényképezőgép lencséjére érkező fénysugarak törésével magyarázható. A felülnézeti rajz a két eltérő színű háttérrel az előtte álló vízzel telt henger alakú pohárral és az azon áthaladó sugarakat mutatja.

Képzeld el, hogy a két színű háttér síkjára merőlegesen, a pohár középvonalából, de távolabbról nézünk a pohárra. Tekintsük a háttérről merőlegesen felénk induló fénysugarakat! A pohár „takarásában lévő” területről induló párhuzamos fénysugarakat a vízzel teli üvegpohár hengerlencseként megtöri, az eredetileg

párhuzamos sugarak kétszeres törés után a pohár felénk eső oldalán függőleges „fókuszvonal”-ban találkozáva keresztezik egymást. A foton látható kép szimmetriája a távolságviszonyoktól és a megfigyelés irányától függ.



Megjegyzés:

- A foton bemutatását és a jelenség értelmezését érdemes a hengerlencsére vonatkozó további egyszerű kísérletekkel is összekötni.

Törésmutató meghatározása felületi víz hullámok esetén (B, C)

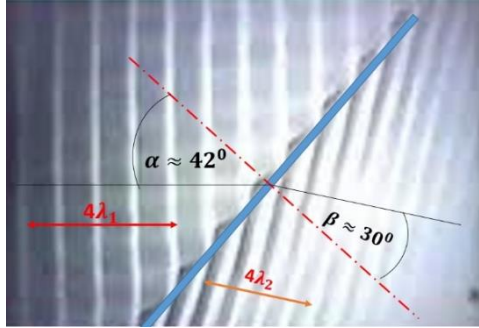


A mellékelt fotó hullámkádban terjedő kapilláris hullámokról készült. Az állandó rezgési frekvenciával keltett egyenes hullámok terjedési iránya megváltozik, amikor azok a ferde egyenessel határolt sekélyebb tartományba lépnek át. (A jelenséget a Huygens-elv értelmezi.)

A foton végzett szerkesztés és mérések alapján határozza meg törésmutató értékét, mint a hullámkád két eltérő mélységű tartományában a terjedési sebességek arányát, majd mutassa be, hogy ez jól egyezik az optikában tanult Snellius-Descartes-törvény alapján számítható törésmutatóval!

Megoldás

A felületi víz hullámok terjedési sebessége vízréteg mélységétől függ. Ha a vízréteg magassága hirtelen megváltozik, a hullámok sebessége is módosul. A hullámok terjedési sebességének arányát törésmutatónak nevezzük. A mellékelt hullámkadás felvétel alapján két lehetőség is van a törésmutató meghatározására. A megoldáshoz mindkét módszer esetén szükséges a fotón végzett szerkesztés, illetve hosszúság és szögmérés. Ezeket az ábra mutatja. A kétféle módszerrel meghatározott törésmutató értékektől elvárható a hibán belüli egyezés.



I. módszer

A hullámok terjedési sebességét a hullámhossz és frekvencia szorzata adja ($c = \lambda \cdot f$). Mivel a frekvenciát a hullámkeltő határozza meg, ez állandó marad a különböző mélységű vízrétegek esetén. A terjedési sebesség megváltozását így a hullámhossz változása okozza. A víz hullámzó felülete a fotón periodikusan ismétlődő sötétebb és világosabb sávok eredményez. A fotón jól látható a és vonalzóval lemérhető a sávok periódustávolsága, illetve annak változása az eltérő mélységű két vízterületen.

A törésmutató, azaz a hullám két különböző sebességének aránya megegyezik a különböző hullámhossza lemért arányával. (A fotón a mérés hibájának csökkentésére 4 hullámhossznyi távolságot mértünk le mindkét térfélen.)

$$n = \frac{v_1}{v_2} = \frac{4\lambda_1}{4\lambda_2} = \frac{4}{2,9} \approx 1,38$$

II. módszer

A hullám terjedési sebességének változása sokszor nemcsak a hullámhossz megváltozását, hanem a hullám terjedési irányának megváltozását is jelenti. Ez utóbbi jól megfigyelhető, ha a hullám terjedési iránya (merőleges a hullámfrontra) és a határfelület normálisa hegyes szöget zár be. A fotó is ilyen esetet mutat. Tegyük fel, hogy a fotón látható hullámok ferde irányban, balról jobbra haladnak. A bal oldali hullámok beesési irányát (α beesési szögét) a határvonal vonalára állított merőlegeshez viszonyítva szögmérővel mérjük. A határfelület jobb oldalán a hullám megváltozott terjedési irány szögét (β törési szög) a határon keresztül meghúzott merőlegestől mérjük a szögmérővel. A két szög szinuszának aránya a törésmutató

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \frac{0,67}{0,5} = 1,34$$

A fenti eredmények a foton végzett mérések felhasználásával adódtak.

Budapest földrajzi szélességének meghatározása bot árnyéka alapján (B)



A Nap nagyon távol van a Földtől, így sugarai párhuzamosan, azonos irányú beeséssel érik a Földet. Bár a napsugarak iránya azonos, a Föld gömbalakja miatt a különböző földrajzi helyeken a beesési szög eltérő. A napsugarak beesési szöge jól meghatározható, ha ismert hosszúságú függőleges rúd árnyékát mérjük a vízszintes talajon. Tavaszi napéjegyenlőség idején (március 21.) a déli nap sugarai merőleges irányból esnek a Föld egyenlítőjére. Ilyenkor az egyenlítőn álló függőleges pálca nem vet árnyékot. Az egyenlítőtől északra vagy délre azonban az árnyék annál hosszabb, minél távolabb vagyunk az egyenlítőtől. Az árnyék

hosszából ilyenkor egyszerűen meghatározható az adott hely földrajzi szélessége.

(Az ábra a tavaszi napéjegyenlőség idején végzett modellkísérletet mutatja. Az iskolai földgömb tengelyét a Föld forgástengelyének irányába állítottuk és a gömböt kitettük a napra. Budapest helyére és az ott átmenő hosszúsági kör vonalán az egyenlítőre egy-egy merőleges helyzetű gombostűt szúrtunk be. A délben készült foton jól látszik, hogy az egyenlítőn a gombostű fejének árnyéka a besúrási pontra vetül, Budapesten azonban van árnyéka a szárának is.)

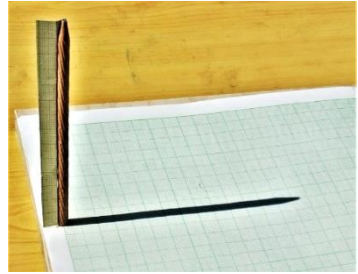
Budapesten március 21-én mérésre alkalmas kísérletet is végeztünk. Függőleges fa rudat vízszintes rajztáblára helyezve tettünk ki a napra. A fotó délben készült a rúdról és árnyékáról. A rúd és az árnyék hossza a milliméter-papíron leolvasható.

Készíts értelmező vázlatrajzot a nap beesési szögének és a földrajzi szélesség kapcsolatának bemutatására! (A földrajzi szélesség fogalmának emlékeztetőjét lásd a feladat végén!)

A fotó alapján szerkeszd meg a rúd, az árnyéka és a beeső napsugarak, által meghatározott háromszöget külön lapon, majd szögméréssel határozd meg Budapest helyzetének földrajzi szélességét!

Emlékeztető a földrajzi szélességről

A földgömbön a földrajzi fokhálózat alapján tudjuk azonosítani az egyes helyeket. A fokhálózatot szélességi és hosszúsági körök alkotják. A szélességi körök az egyenlítő síkjával párhuzamos helyzetűek. A földrajzi szélességet az egyenlítőtől északi, illetve déli sarkpontig mérjük. Az egyenlítő jelenti a földrajzi szélesség 0° értékét. Innen észak felé beszélünk északi szélességről, (az É-sarkpont északi szélessége 90°) dél felé hasonlóan járunk el.



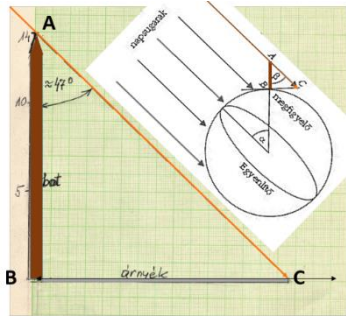
A föld felszínén adott hely földrajzi szélességen azt a szöveget értjük, ami az a Föld középpontjából az adott földrajzi helyi húzott sugár az Egyenlítő síkjával bezár.

Megoldás

A feladat megoldását a mellékelt rajz foglalja össze.

A milliméterpapíron berajzoltuk a függőlegesen álló bot déli árnyékát, majd irányhelyesen illesztettük hozzá a napéjgyenlőség idején fellépő déli árnyék és a földrajzi szélesség kapcsolatát bemutató magyarázó rajzot.

A mérési eredmény alapján Budapest földrajzi szélessége jó közelítéssel 47° -nak adódik.

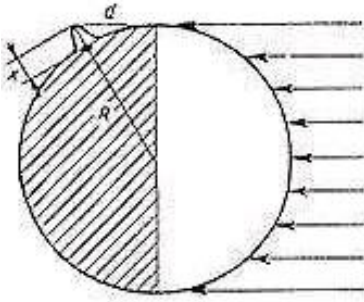


Megjegyzés:

- A kísérlet értelmezéséhez a tanulók földrajzi ismereteit kell felidézni. A tantárgyak közötti tudás transzfer csak akkor működik jól, ha tanárként ismerjük és használni tudjuk a földrajzban használatos terminológiát.

Milyen magasak a Hold hegyei? Galilei-módszer

Galileit különösen érdekelte a Hold. Távcsőven keresztül megfigyelte, majd rajzokon rögzítette a Hold felszínének alakzatait. A mellékelt két ábra Galilei egykori rajzát és egy korszerű fényképfelvételt mutat a fél Holdról. Galilei meggyőződéssel vallotta, hogy a Hold gömb alakú. A megfigyelt rajzolatból arra is következtetett, hogy a Hold felszíne nem sima, vannak rajta hegyes és sík területek.



Félhold esetén megfigyelte, hogy a megvilágított és az árnyékos térfél határvonala csipkézett. (Sima gömbfelület esetén az árnyékhatár egyenes lenne). Az árnyéktérbe benyúló világos foltokról feltételezte, hogy azok hegyek, amelyek tetejét még megsüti a Nap, ahogy ezt az oldalnézeti rajz szemlélteti. Megfigyelései alapján Galilei számításokat is végzett és megbecsülte e hegyek hold-átmérőhöz viszonyított magasságát.

A félhold mellékelt fotóján piros körrel jelöltük be azt a két magas holdi hegycsúcsot a fényes és az árnyékos térfél határán, amelyek magasságát könnyen megbecsülheted. Végezd el a szükséges méréseket a mellékelt fényképfelvételen és Galilei számításait megismételve adj becslést a Hold hegyeinek magasságára.

A Hold sugara: $R = 1738,5 \text{ km}$



Megoldás

A félholdat mutató fotón húzzuk be a megvilágított félgömb és az árnyékban lévő félgömb idealizált határvonalát (ez lenne a határvonal ideálisan sima gömbfelszín esetén)!

Válasszunk ki a határvonalhoz közeli, de mára a Hold árnyékos térfelére eső fénylő pontot (megvilágított hegycsúcsot), és mérjük meg ennek távolságát a határvonaltól ($d = \dots$). A kinagyított fotón a hegycsúcs mm egységekben mért távolságát a Hold ugyancsak mm skálán mérhető átmérőjével arányítva, a Hold km-egységekben

kifejezett átmérőjét ismerve, a d távolság km-ben is megadható. Galilei ábráján berajzolt háromszögre a ábra jelöléseit felhasználva kapjuk:

$$(R + x)^2 = R^2 + d^2$$

Figyelembe véve, hogy a feladat megoldása során nem a végeredmény pontossága az elsődleges cél, hanem Galilei gondolatmenetének megismerése és a hegyek magasságának nagyságrendi becslése, felhasználhatjuk, hogy $R \gg x$, azaz

$$(R + x)^2 \approx R^2 + 2Rx$$

A hegy x magassága közelítőleg:

$$x \approx \frac{d^2}{2R} \approx 1 - 2 \text{ km}$$



Hasonló mérések alapján Galilei a Hold hegyeit a földi hegyek magasságához hasonlóknak feltételezte.

Megjegyzés:

- Mai ismereteink szerint a Hold legmagasabb hegyeinek magassága megközelíti az 5000 m-t, Galilei fenti módszerrel tett becslése, ami szerint a Hold hegyeinek magassága hasonlatos a földi hegységek magasságához, ma is helytálló.