A relativitás elmélet alapjai

A TételWiki wikiből

Tartalomjegyzék

Vonatkoztatási rendszer

Amikor egy test pozícióját, vagy pályáját akarjuk megadni, valamihez azt viszonyítanunk kell. Viszonyítási alapként felveszünk egy koordinátarendszert (origó, és bázisvektorok, illetve a rendszer időfejlődése, pl.: mozgása, forgása) és ebben tárgyaljuk a mozgásokat. Vannak kitüntetett vonatkoztatási rendszerek, ezeket Newton első törvényével tüntetjük ki: ahol a tehetetlenségi axióma teljesül, azok inerciarendszerek. Különböző mozgású koordinátarendszerekben fellépnek egyéb nemfizikai erők is, az inerciarendszerekben definícióból kifolyólag ilyenek nincsenek. A többi Newton-törvény is inerciarendszerekre érvényes.

Galilei-transzformáció

Newton második axiómája a mozgásokra vonatkozik, azonban az itt tárgyalt differenciálegyenletben van egy szabad konstans, amely a deriválások miatt kiesik, ezért erre invariáns a második axióma. Ez az invariancia a Galilei-transzformációban foglalható össze:

$$r' = r + vt$$

$$t' = t$$

Szavakban elmondva az egymáshoz képest egyenes vonalú egyeneltes mozgást végző koordinátarendszerekben a mechanikai jelenségek azonosan mennek végbe. Az egyes rendszerek között a Galilei-transzformációval térhetünk át.

A Lorentz-transzformáció

Amikor a XIX.-XX. század fordulóján a megpróbálták egységes képbe összehozni a mechanikát és az elektrodinamikát, egyre problémásabb lett az a felismerés, hogy a hullámegyenlet nem invariáns a Galilei-transzformációra. Úgy tűnt, mintha az elektrodinamikában lenne kitüntetett koordinátarendszer, szemben a mechanikával. A korabeliek három feloldását képzelték el a problémának, csökkenő valószínűség szerint:

- A Maxwell féle elmélet hibás, a valódi elmélet Galilei-invariáns.
- A mechanika Galilei-invariáns, az elektrodinamikában van kitüntetett koordinátarendszer, amelyben a fény terjedését lehetővé tevő éter nyugszik.
- Létezik egy mind a mechanikára, mind az elektrodinamikára érvényes relativitási elv, ami nem a Galilei-féle, és ez egyben azt is jelenti, hogy a mechanika törvényeit kell megváltoztatni.

A Maxwell-féle leírást rengeteg kísérlet támasztotta alá, és minden jóslatát sikerült ellenőrizni. A második lehetőséget nem sikerült alátámasztani kísérletekkel, azonban egyre irreálisabb megszorításokat lehett rá adni, amik végső soron tarthatatlanná tették az elméletet. Az új relativitási elmélet kidolgozását Einstein végezte el, két posztulátumra építve:

- A természet törvényei, és a kísérleti eredmények azonosak az egymástól csak egyenes vonalú egyeneltes mozgásban különböző inerciarendszerekben.
- A fénysebessége véges, és forrásának mozgásától független.

Ha feltesszük, hogy a tér izotrop, továbbá az új transzformáció is csoportot alkot a Galileihez hasonlóan, és megengedjük, hogy az idő is transzformálódjon az áttéréskor (és nem szeretnénk véges sebességekből kiindulva végtelen sebességeket kapni a transzformációk és sebességösszeadások során), akkor a 2. posztulátumból és az izortópiából következik az ívelemnégyzet állandósága ($ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$), a többi feltételből pedig levezethető a Lorentz-transzformációk alakja (1+1 dimenzióban):

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

ahol $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ a Lorentz-faktor.

A c konstans értékét a kísérletek adják meg, itt csak az derül ki, hogy határsebesség, mégpedig felső, az kísérleti tény, hogy ez egyezik a fénysebességgel.

A Michelson-Morley kísérlet

A relativitás elmélet kialakulása felé az egyik nagy lökést ez a kísérlet szolgáltatta azzal, hogy nem mutatta ki az éter hatását. Az elméletileg feltételezett éter a fény terjedésének közege lett volna. Ha ez igaz lenne, akkor a közeghez képest relatív mozgást végző megfigyelő másnak méri a fénysebességet. A kísérletet ezért félév különbséggel megismételték, ekkor ugyanis a Föld éppen ellenkező irányban halad a feltételezett éterben, akármilyen mozgást is végez az. A kísérleti elrendezés egy fényforrásból állt, annak a fényét egy féligáteresztő tükörrel kettéosztották, majd az azonos utakon visszaverődő fénysugarakkal interferenciát hoztak létre. Ez az elrendezés ha az azonos utakon más a fénysebesség eltérést tesz láthatóvá az interferencia segítségével. Az elméletileg megjósolt eltérések a vizsgálati időpontokban nem jelentkeztek, ezért erőteljesen kétségessé vált az éter elmélet tarthatósága.

A Lorentz transzformációk következményei

A Lorentz-transzformációk képleteiből több a klasszikus gondolkodással szembenálló jelenség vezethető le. Ezeken felül hasznos, a különböző rendszerek közötti összefüggések is levezethetőek.

Az inerciarendszerek relatív sebessége

Ahogy korábban láttuk, a Lorentz-transzformációk is csoportot alkotnak. Belátható, hogy a transzformáció csak a sebességtől függ, ezért egyparaméteres a csoport, ekkor van úgynevezett kanonikus paramétere. Ez azt jelenti, hogy ha egymásután csoportelemeket hattatunk, akkot az eredő transzformáció előállítható az egyes elemek paramétereinek összegeként (analógiaként gondoljunk 2D-s forgatásokra: az eredő forgatási mátrix előállítható a részforgatások szögeinek összegeként). A Lorentz-transzformációk ezen paraméterét *rapiditásnak* nevezzük, ez tehát összeadódik. Definíciója: $\chi = \mathrm{arcth}\frac{v}{c}$

Levezethető a transzformációs szabályokból, hogy bármely két inerciarendszer (amelyek között a χ paraméterű Lorentz-transzformáció visz át) relatív sebessége:

$$V = c \cdot \mathrm{th}\chi$$

amiből az is következik, hogy ez a sebesség nem lehet c-nél nagyobb. **VIGYÁZAT** Ez az egész csak 1 idő és 1 tér dimenzióban igaz, amikoris a tér-tengely egyirányú a sebességgel. Az általános eset bonyolult, azt érdemes megjegyezni, hogy két egymás utáni, de különböző irányú rendszerbe való áttranszformáció (boost) eredője egy megfelelő irányú boost és egy *forgatás*. Ennek ellenére a rapiditás paraméter az egyirányú boostok kezelésére igen alkalmas, például egy kísérletben a nyaláb és a labor rendszer közötti transzformációkra, amikor a lényeges mozgások egy irányba esnek.

Sebességek összeadása

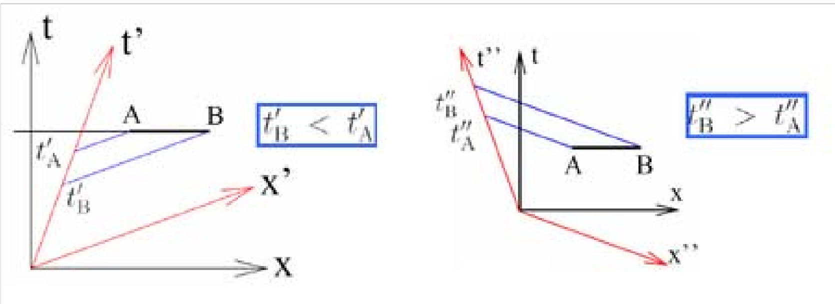
Az előző formulából a tangens-hiperbolikusz szögösszeadási formuláját felhanszálva:

$$V_3 = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}}$$

Ennek kis sebességű (v << c) határesete visszaadja a klasszikus $V_3 = V_1 + V_2$ formulát.

Paradoxonok

A paradoxonok az egyidejűség relativitására vezethetőek vissza: ha egy koordinátarendszerben adott egy két esemény, akkor létezik olyan koordinátarendszer is, amelyekben ezek egyidejűek, illetve olyanok is, ahol az egyik, és olyanok is, ahol a másik történik hamarabb.



Az egyidejűség relatív, függ attól, hogy a koordinátarendszerek mekkora sebességgel mozognak egymáshoz képest!

A legfontosabb paradoxonok a következőek:

- Az álló megfigyelő a mozgó tárgyakat rövidebbnek látja: Lorentz-kontrakció
- Az álló megfigyelő a hozzáképest mozgó rendszerekben eltelő időt hosszabbnak látja: idődilatáció.
- Ikerparadoxon: két iker közül az egyik a Földön marad, a másik egy gyorsuló űrhajóban elmegy, majd visszajön a Földre. Ez utóbbi személy fiatalabbként ér vissza. A gyorsuló rendszerekben inerciarendszerváltás történik, ezekben a pillanatokban változik az egyidejűség is.

Relativisztikus fizika

A relativitáselméletben csak olyan mennyiségeket engedünk meg, amelyek invariánsak a Lorentz-transzformációra. Ez azt jelenti, hogy a klasszikusan ismert mennyiségeket valahogy át kell alakítani, hogy ne a Galilei-transzformációra legyenek invariánsak, hanem a Lorentzre. Az általános an levezethető 3+1 dimenziós Lorentz-transzformáció az ívelemnégyzetet változatlanul hagyja:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Ez úgy interpretálható, hogy a relativitáselméletben a tér és az idő együtt alkot egy kovariáns mennyiséget. Hasonlót láthattunk a klasszikus geometriában, az ottani transzformációk a térbeli távolságnégyzetet (skalárisszorzatot) tartották változatlanul, ezzel definiáltuk a vektorokat. Ezzel az analógiával élve vezetjük be itt is a vektorokat, melyeket megkülönböztetésképpen négyesvektornak nevezünk, a négyesvektorok skalárisszorzatát a Lorentz-transzformáció változatlanul hagyja. A klasszikus mennyiségekből tehát négyesvektorokat kell létrehoznunk. Például:

$$k = \left(\frac{\omega}{c}, k_1, k_2, k_3\right)$$
$$p = \left(\frac{E}{c}, p_1, p_2, p_3\right)$$

Ez utóbbi különösen jelentős, hiszen ennek a hossznégyzete a részecske nyugalmitömegével áll kapcsolatban:

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - |p|^2 = m^2c^2$$

Ebből az is következik, hogy ez minden rendszerben ugyanaz. Belátható, hogy az itt definiált négyesimpulzussal egybefoglalható az energia és az impulzusmegmaradás, mert a négyesimpulzus maga a megmaradó mennyiség a relativitáselméletben. Ezt átrendezve az E-p összeüfggést kaphatjuk meg, ami diszperziós relációként is felfogható:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

Ez pedig álló részecskére a híres:

$$E = mc^2$$

képletet adja. Nemrelativisztikus esetekben továbbra is visszakapjuk a klasszikus képleteket. A relativisztikus dinamika alaptörvényeként a Newton-törvény relativisztikus megfogalmazását vehetjük. A klasszikus $F = ma$-val egyenértékű kis sebességekre az

$$F = \frac{d}{d\tau}p,$$

ez utóbbi azonban relativisztikusan is igaz, itt τ a részecske nyugalmi rendszerében mért idő (sajátidő), ami kis sebességekre a mindenkori idővel helyettesíthető. Fontos, hogy az időderiválás alól a tömeg nem emelhető ki, hiszen ez is függ a sebességtől, tehát sebességváltozáskor ez is változik.

A fenti energia kifejezésnek van még egy fontos következménye. Ha egy rendszer két állapota közötti átmenet energia kisugárzással, vagy elnyeléssel jár, akkor az a rendszer tömegét is megváltoztatja. Ennek legékesebb példája a periódusos rendszerben megfigyelhető moláristömegek értéke. A periódusosrendszerben szereplő magok mélyebb energiaszinten vannak, mint az alkotóik külön-külön összeadva, ezért a két állapot közötti különbség valamikor felszabadult, és ekkor tömeget is elvitt, tehát a periódusos rendszerbeli tömegek mindig kisebbek, mintha a protonok, és neutronok szabad tömegét adnánk össze. Ezt az effektust nevezik tömegdefektusnak.

Az elektrodinamika relativisztikus formája (*)

Az elektrodinamika már eleve egy relativisztikus diszciplína, így a Maxwell-egyenletek relativisztikus általánosára nincs szükség. Ez úgy fejezhető ki, hogy a Maxwell-egyenletek átírhatók szembeötlően kovariáns egyenletekké.

$$div\vec{B} = 0$$

Következésképpen B felírható mint egy vektorpotenciál rotációja:

$$\vec{B} = rot\vec{A}$$

Ha ezt behelyettesítjük az elektromos tér rotációját leíró egyenletbe, akkor akövetkezőt kapjuk:

$$rot\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

így a zárójelben lévő kifejezés felírható, mint egy skalártér gradiense:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -grad\phi$$

Ez a φ skalár- és $\vec{A}$ vektorpotenciálok szokásos definíciója. Könnyen belátható, hogy a potenciálok egyértelműen meghatározzák a térerősségeket, de ez fordítva nincs így. A potenciálok rögzítéséhez mértéket szokás előírni. Ezt a feltételt pedig érdemes úgy megadni, hogy maga is szembeötlően kovariáns legyen. Olyan megszorítást érdemes megtenni, hogy a skalár- és vektorpotenciálokból egy $(\phi, \vec{A})$ négyesvektort lehessen csinálni.

Belátható, hogy a $j_\mu = (\rho, \vec{j})$ áramsűrűség egy négyesvektor. Ekkor az elektrodinamika kontinuitási egyenlete:

$$\partial^\mu j_\mu = 0$$

Most emlékezzünk vissza **Lorenz-mérték** definíciójára:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \vec{A} = 0$$

és arra, hogy ezen mértékben a négyespotenciálokra a következő hullámegyenletek adódtak:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0}$$

Namost, mivel a jobboldal négyesvektor, és a d'Alembert operátor a koordinátarendszer megváltozásával nem változik, ezért az $A_\mu = (\phi, \vec{A})$ is négyesvektor. Négyesvektor jelölésben a hullámegyenlet:

$$\partial_\nu \partial^\nu A_\mu = \frac{j_\mu}{\epsilon_0}$$

A lap eredeti címe: „http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php/A_relativit%C3%A1s_elm%C3%A9let_alapjai”

- A lap utolsó módosítása: 2009. szeptember 12., 17:54