

Tételjegyzék

2013. Elektromágnesség, Fizika BSc. 1. évfolyam

1. Elektrosztatika, Az elektromos töltés fogalma, Térerősség, fluxus, potenciál
2. Az elektrosztatika két alaptörvénye, Dipólus
3. Elektrosztatikus tér fémekben
4. Elektrosztatikus tér szigetelők jelenlétében, Dielektrikumok polarizációja
5. Kapacitás, kondenzátorok, Energiasűrűség
6. Egyenáram. Ohm törvény. Ellenállás fizikai eredete fémekben
7. Elektrolízis, Vezetés folyadékokban, Faraday törvények, Termo-elektromos jelenségek
8. Elektromos áramkörök, Kirchhoff törvények
9. Félvezetők vezetése, A p-n átmenet, dióda
10. Bipoláris tranzisztor
11. Magnetosztatika, A mágneses indukcióvektor és fluxus fogalma
12. Gerjesztési és Biot-Savart törvény
13. Lorentz erő. Áram-áram kölcsönhatás, Töltés mozgása elektromos és mágneses térben
14. Az anyag mágneses tulajdonságai. Mágnesezettség. Mágneses térerősség bevezetése
15. Diamágnesesség. Paramágnesesség. Ferromágnesesség: doménszerkezet
16. Elektromágneses indukció. Mozgási és nyugalmi indukció, Lenz törvénye, Örvényáramok
17. Kölcsönös indukció, Önindukció, Tekercsek inductivitása, Mágneses energiasűrűség
18. Bekapcsolási jelenségek, RL és RC kör
19. Váltakozóáramú áramkörök, Komplex formalizmus, Soros RLC kör: feszültségrezonancia. Effektív értékek, hatásos teljesítmény
20. Transzformátor, Szabad rezgések
21. Maxwell egyenletek, Az eltolódási áram, Elektromágneses hullámok, Poynting vektor, Hertz-kísérletek
22. Dipólsugárzás, Rádióadás, -vétel

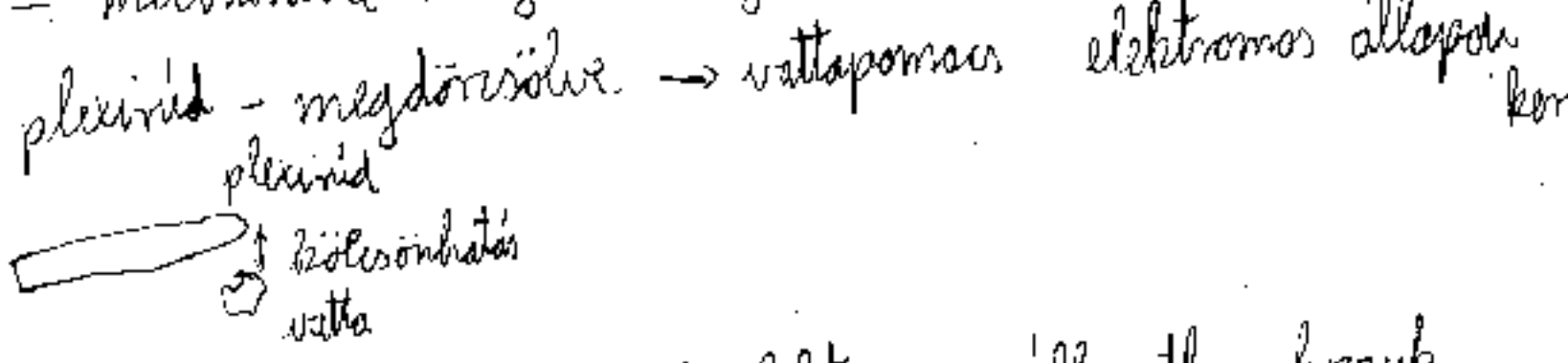
A bemutatott kísérletek a vizsga anyagát képezik

Elektrosztatika

dominancia

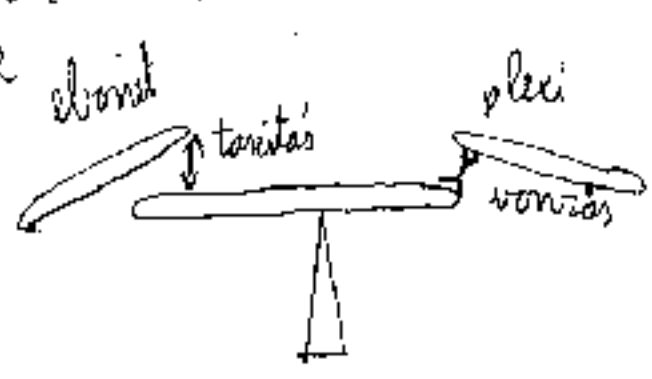
- ókori görögök is megfigyelték
- új fejezet - mechanika eddigi törvényeivel nem írható le

kísérlet



2 ebonit rúd → mindkettőt elektromos állapotba hozzuk

különböző elektromos állapotú testek vonzzák egymást



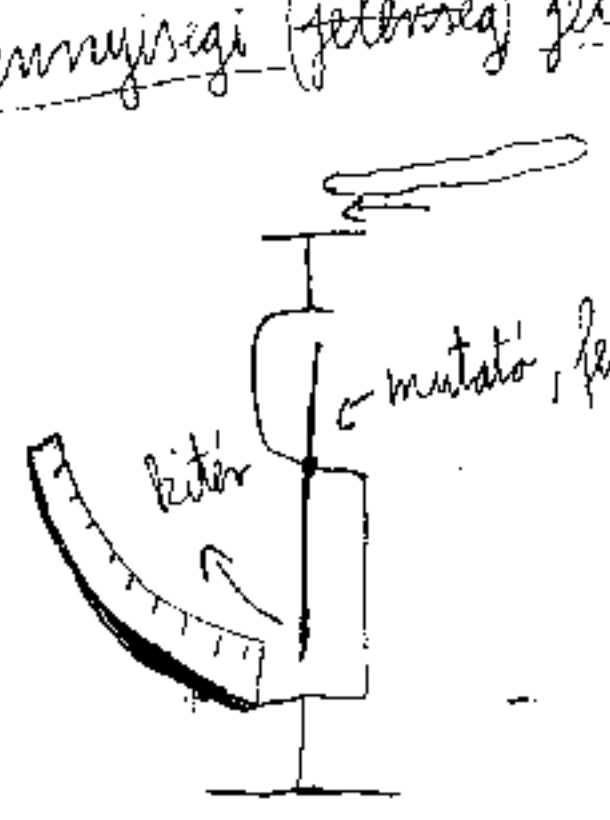
2 féle elektromos állapot
VA az elektromos állapotba kerülő testek tasztják egymást

dörselektromos jelenség

elektromos állapotba hozott plexivud

vésugás 2 elektromos állapot: \oplus , \ominus
minőségi tulajdonságok

Nemnyisági (jelenség) jellemzés:



mutató, fém → töltött állapotba kerül
nem érintjük: csak közelítjük, majd eltávolítjuk → kiter majd vissza
közvetlen → kiterre marad

elektroszkóp

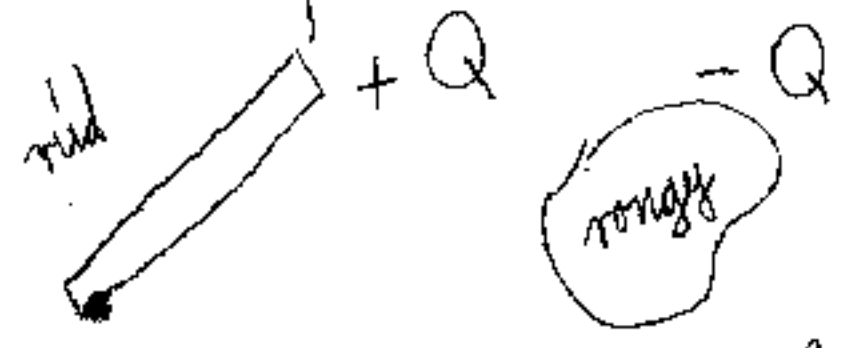
új mennyiséget vezetünk be: Q

csak a töltés abszolút értékét jelöli

kísérlet alapján - töltetlen test $Q=0$

dörselektromos jelenség hatására → rúd töltéssel fog rendelkezni

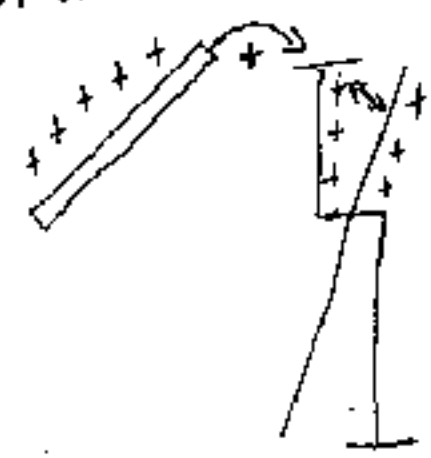
dörzsolás hatására az egyik töltéshordozó feljött át a rongyra



Ezért rendszerben a töltések összege állandó.

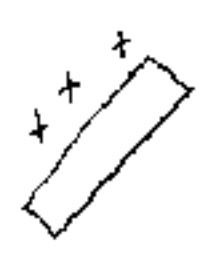
elvonit - szörme → VA csak ellenkező előjel

amikor az elvonit rúd hováért az elektroszkópba: töltések átvándoroltak az elektroszkópra



taszítás több töltés → nagyobb kitérés

amikor csak közelítünk az elvonit rúddal:



mégis kitérés elektromos megosztás (influenzia) nincs töltésvándorlás → mutató semleges

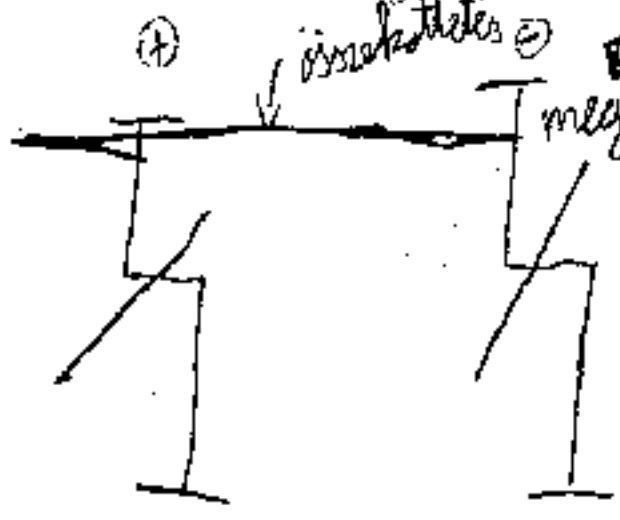


→ semleges, de vándorolnak benne a töltések

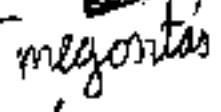


a töltések összege megmarad zérusnak

2 elektroszkóp - 1 fémrúddal összekötve



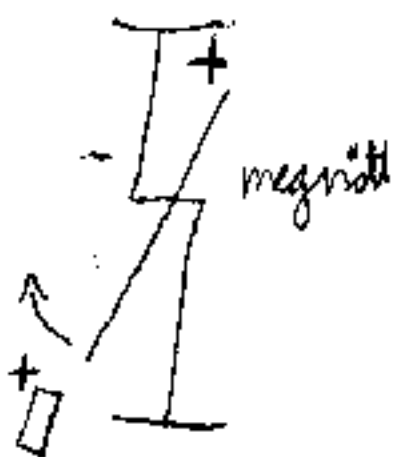
összekötés



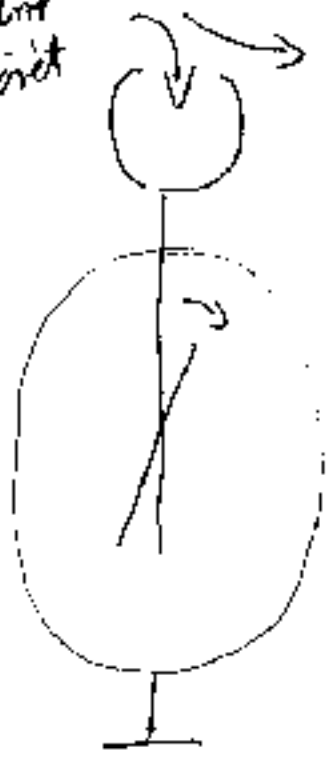
megosztás

közelítés - eltávolodás → mégis töltött állapotba maradt a mutató. ezután:

úgyra közelítve



lelőtt
sörét



kifűlyás → kénpar döröszölődik a söréttel → döröszelektromosság

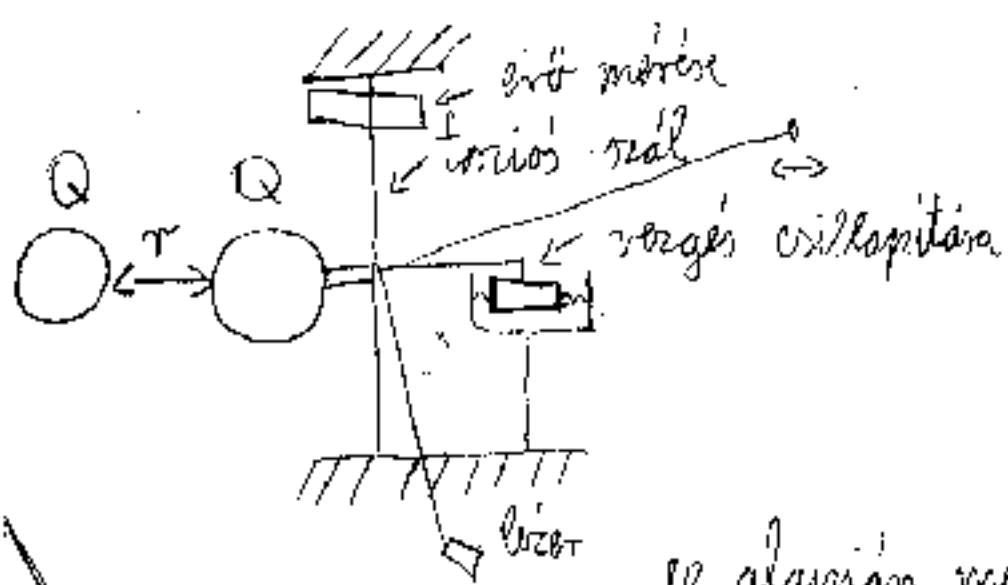
Fontos tudósok az elektromágnességben:

Benjamin Franklin 18. sz. Függetlenségi nyilatkozat

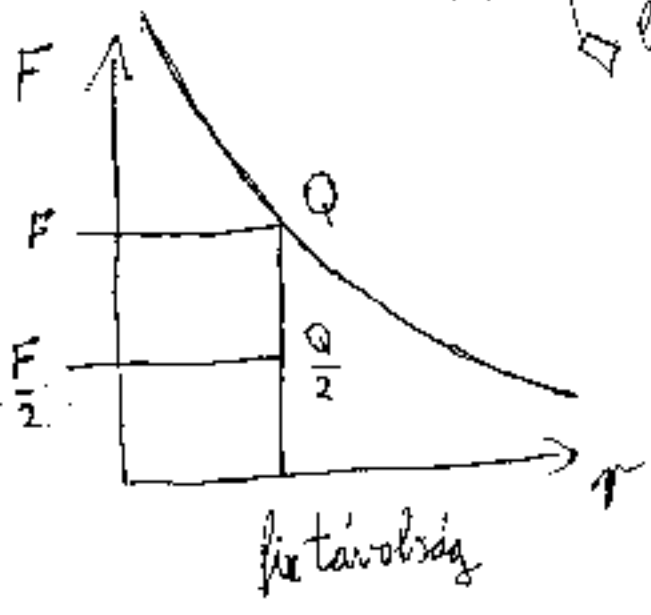
- ↳ ponttöltés fogalma → rúnus kiterjedése csak töltése
- ↳ kísérletek az különböző elektromos állapotokra

Charles-Augustin Coulomb 18. sz.

↳ ponttöltések közötti kölcsönhatás → Coulomb-kísérlet



+Q
egyik golyóra → összeérítési kicsi időre → mindkét golyón VA a töltés lesz



az alapján meghatározni az egységtöltést
az erő a töltéssel lineárisan arányos
kísérlet eredménye:

$$F \sim Q_1$$

$$F \sim Q_2$$

$$F \sim \frac{1}{r^2}$$

$$F \sim \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

$F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$ az alapján definiálni a töltés dimenzióját

$[Q] = ([F] \cdot [r^2])^{1/2}$ négyen így definiálták: $\left[g \frac{cm}{s^2} \cdot cm^2 \right]^{1/2} =$

$= g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot s^{-1}$
 $Q_1 = 1C \quad Q_2 = 1C$
 $r = 1m$

$F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ $[Q] = C$ - coulomb töltés egysége

$Q_1 = Q_2 \rightarrow Q = \sqrt{\frac{F \cdot r^2}{k}}$

1 coulomb annak az abszolút ponttöltésnek a nagysága, (ha vannak belőle) 2-öt és

elhelyezem őket 1m távolságra a köztük fellépő taszítóerő $9 \cdot 10^9 N$.

$[k] = \frac{Nm^2}{C^2}$ $k = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$; sokszor azt használom hogy:

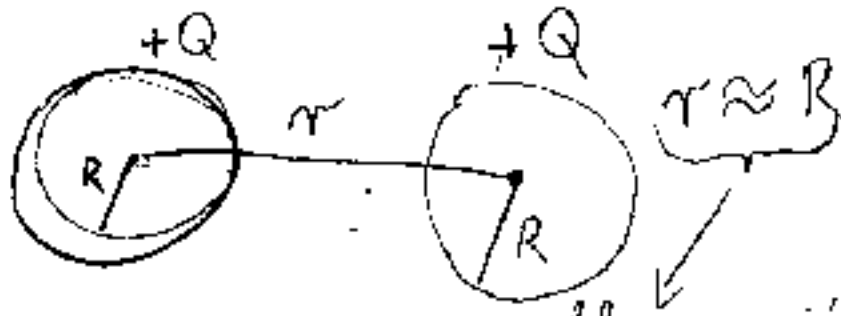
ϵ_0 : vákuum dielektromos állandója $k := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow \epsilon_0 = 8,87 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$

Töltött részecskék között centrális erő hat.

$$\underline{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{|\underline{r}|^2} \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$$

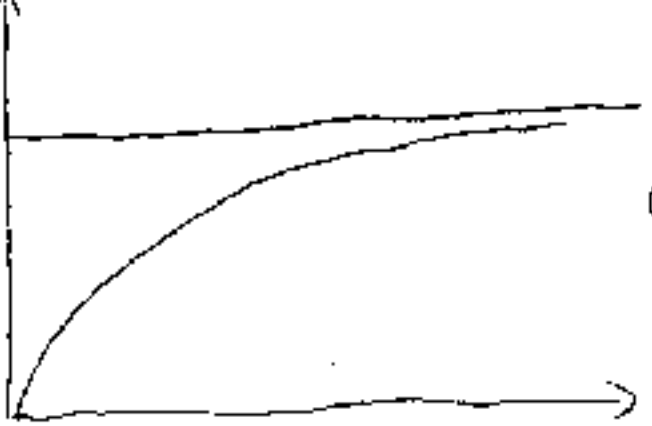
biztos 2 is nem 2,00001?

Ponttöltés - csak absztrakció - valóságban:
 r, Q - legyen rögzítve és vegyünk egyre kisebb sugarú gömböket



akkor nem jó a Coulomb-törv.

akkor: $F \uparrow$



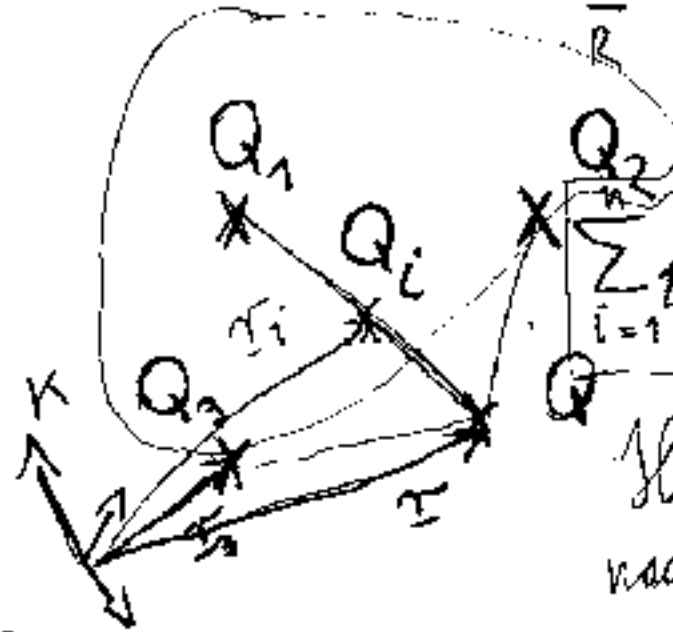
$F(R \rightarrow \infty)$

asimptotaként csak tart egy konkrét értékhez

Superpozíció:

~ elve érvényes

Q_1 és Q_2 közötti kölcsönhatást nem befolyásolja egy Q_3



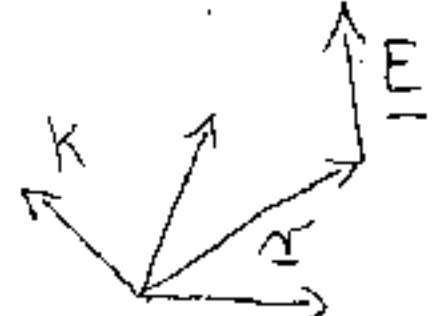
$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q Q_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^2} \cdot \frac{\underline{r} - \underline{r}_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|} = \underline{F}(\underline{r})$$

Ha \underline{r}_i ismeretlen \rightarrow F irányja, nagysága ismeretlen.

Elektromos térerősség:

$$\underline{E}(\underline{r}) := \frac{\underline{F}(\underline{r})}{Q} \quad W \rightarrow V/m$$

$$\underline{E}(\underline{r}) := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^2} \cdot \frac{\underline{r} - \underline{r}_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|}$$

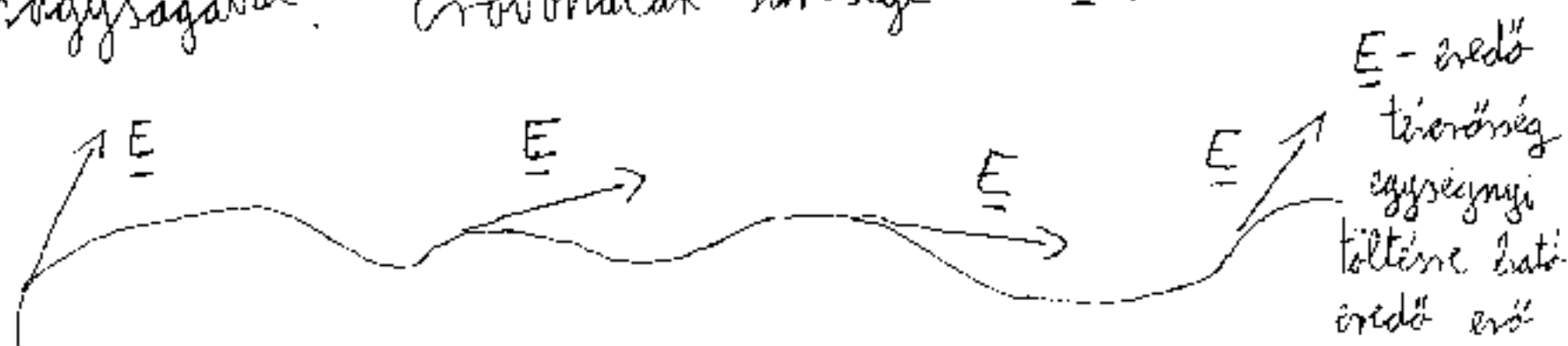


Egységnyi töltésre ható erő. Nem csak töltésekből származhat elektromos tér.

Erővonal: tetszőleges vektormezőhöz hozzátartozó

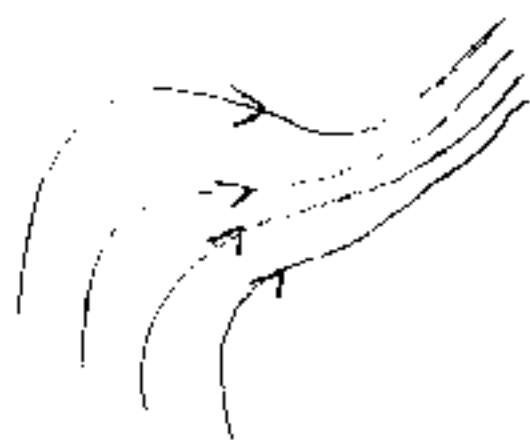
↳ a tér tetszőleges pontjában, a \vec{v} érintője adja meg az abban a pontban megadott vektort. Irányítást kell adni neki.

↳ Adott felületen húzott erővonalak száma, arányos a térerősség nagyságával. Erővonalak sűrűsége $\sim |\underline{E}(\underline{r})|$



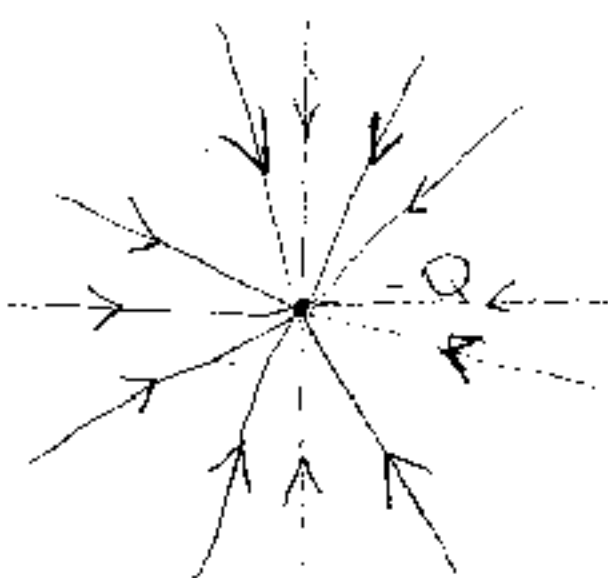
Hét erővonal \perp \underline{NEM} metszik egymást.

Pl.: 1 db pozitív töltés, próbatöltés $Q \equiv q > 0$

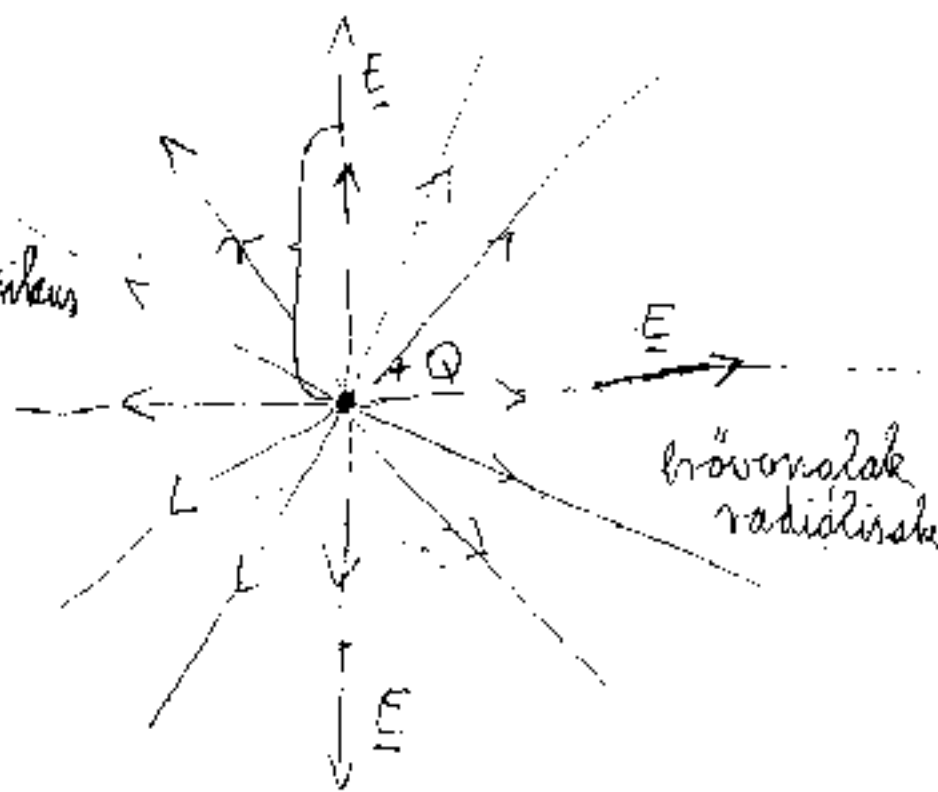


$$\underline{E} = \frac{\underline{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{|\underline{r}|^2} \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$$

1 db negatív töltés:



gömbszimmetrikus



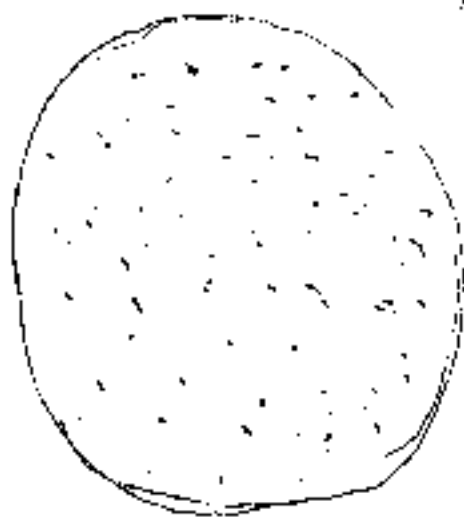
Több töltéssel már megbomlik a gömbszimmetria.

Az elektrosztatikus tér forrása a töltések.

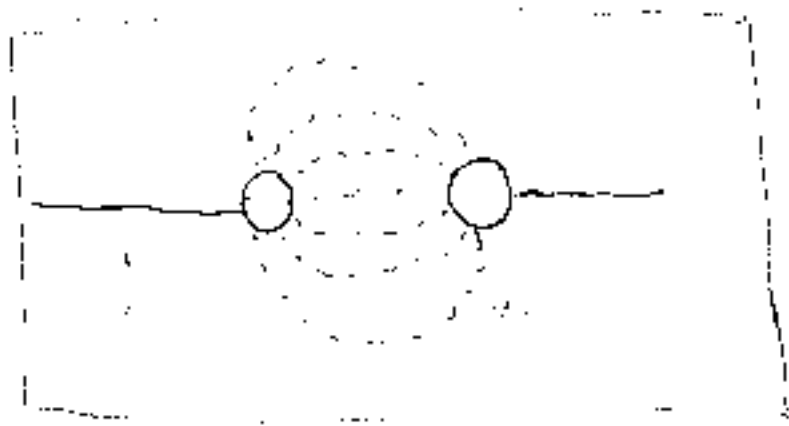
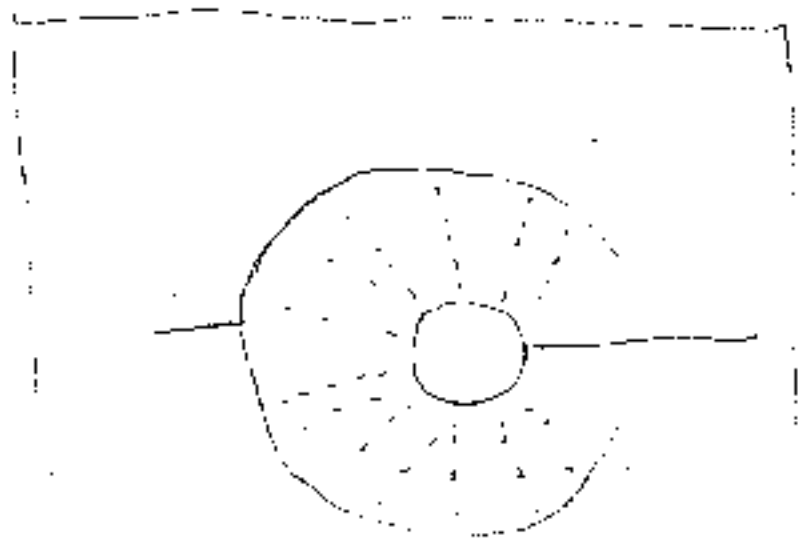
Az erővonalak a pozitív töltésből indulnak és a negatív töltésben végződnek.

Elektrosztatikus tér a töltés pontjában szinguláris. Nincs értelme.

Hisszlet: henger benne, miniszolaj és bizzadarabbik
 Ha elektromos teret kapcsolunk, a bizzadarabbik
 bikk kirajzoljak az elektromos teret.
 Uvegre parologtatott fém.
 Bizzadarabbik befordulnak az Elektromos
 tererossig iranyaba.



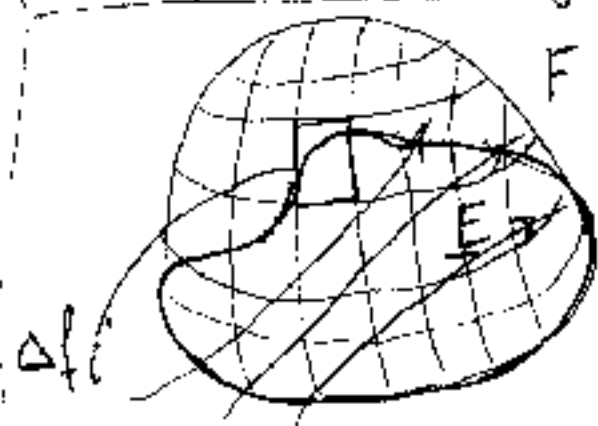
bipolus:



Sikbendevrató:

Def: Felületi integrál: (fluxus)

Figyervezetek Tekintsünk egy zárt G görbét. Illeszték
 ra egy F felületet.



Telostom a felületet Δf_i
 (területekre) felületekre.

G Belebelysem egy

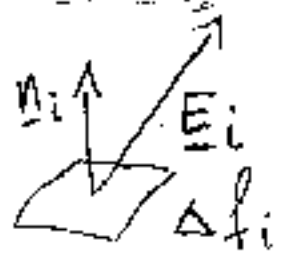
vektormerőre

Ekkor definiálhatom a vektormerő fluxusát. ($N \rightarrow \infty$)

Telostást finomítom. $\forall \Delta f_i \rightarrow 0$

akkor ha $\exists \lim \Phi_{E,N} = \Phi$

akkor ezt nevezem a vektormerő
 F felületre vett fluxusának.



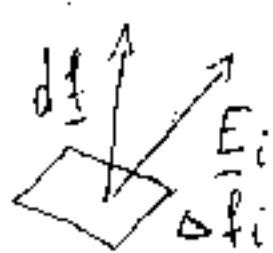
$$\Phi_{E,N} := \sum_{i=1}^N \underbrace{E_i \cdot n_i \cdot \Delta f_i}_{\Delta \Phi_i}$$

Jelölése: $\Phi = \int_F \underline{E} \cdot \underline{n} \, d f \rightarrow \Phi =: \int_F \underline{E} \, d \underline{f}$

hivatkozni

Def: Felületelem vektor: A felületelem normalisa szorosa a felület
 nagyságával. $d \underline{f} := \underline{n} \cdot d f$

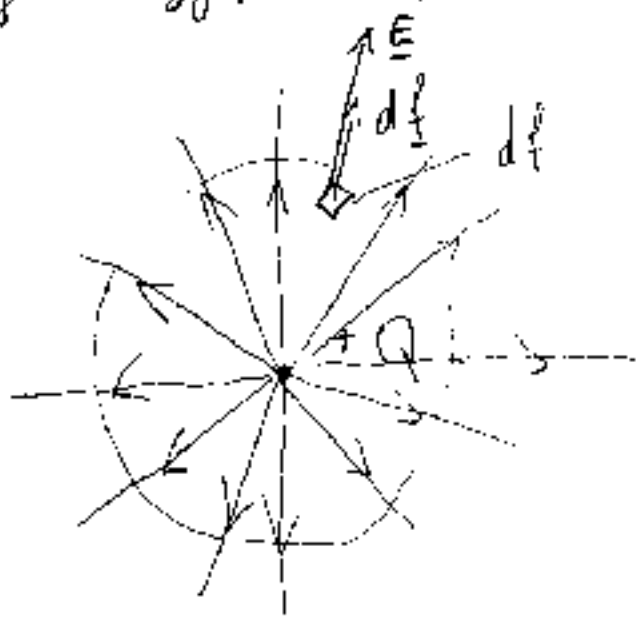
Szemléletes jelentése:



$E_i \cdot d \underline{f}$: skalárszorzás, csak E_i az Δf_i -re vett
 merőleges komponense számít.

Δf_i Fluxus: felületet dőfő erővonalak száma

Vegyünk egy pozitív ponttöltést. Illesztünk egy $+Q$ körponti R sugarú gömböt. $E \cdot d\vec{f}$ mivel $E \parallel n$ MOST



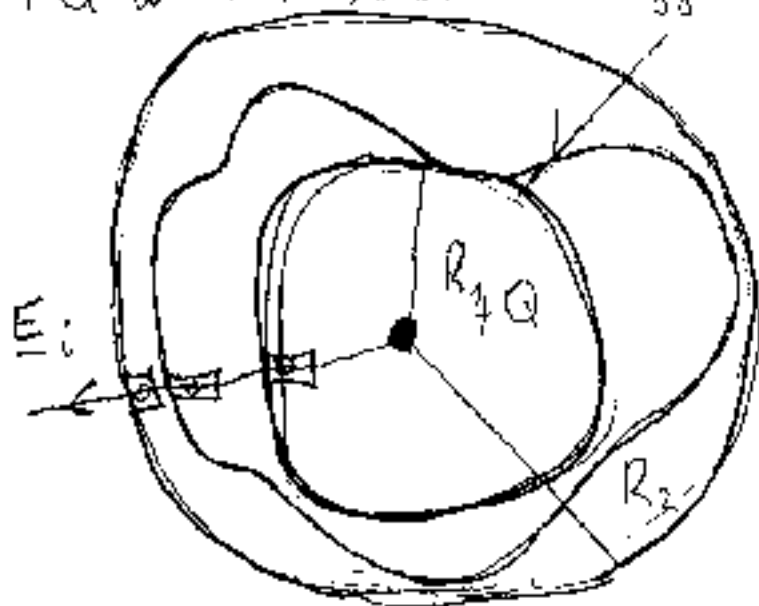
$$\Phi = \oint_F \vec{E} \cdot d\vec{f}$$

miel zárt felületre integrálunk (gömb)

$$\Phi = \oint \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} d\vec{f} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \oint d\vec{f} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Fluxus csak a töltés nagyságától függ.

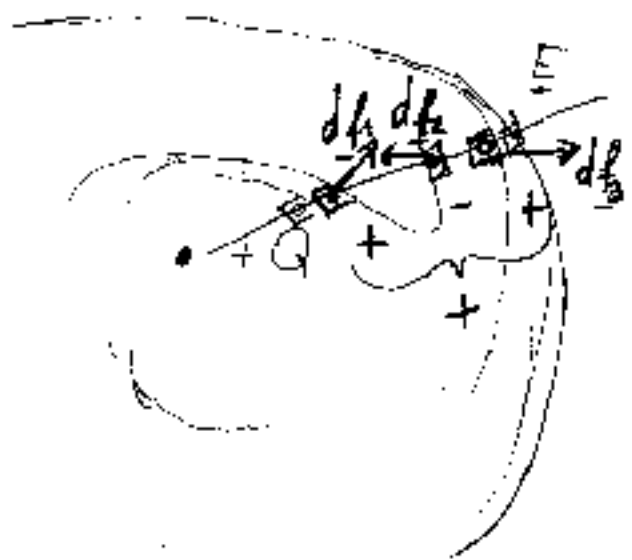
Vegyünk $+Q$ töltést. Illesztünk egy teljesen általános felületet.



$\Phi = ?$ Szerkesztünk egy $+Q$ körponti gömböt ami benne van a zárt felületben. Majd megesszük ami tartalmazza az F felületet

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \Phi_{R_1} = \Phi_{R_2} \Rightarrow \Phi = \oint_F \vec{E} \cdot d\vec{f} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Spec. eset.

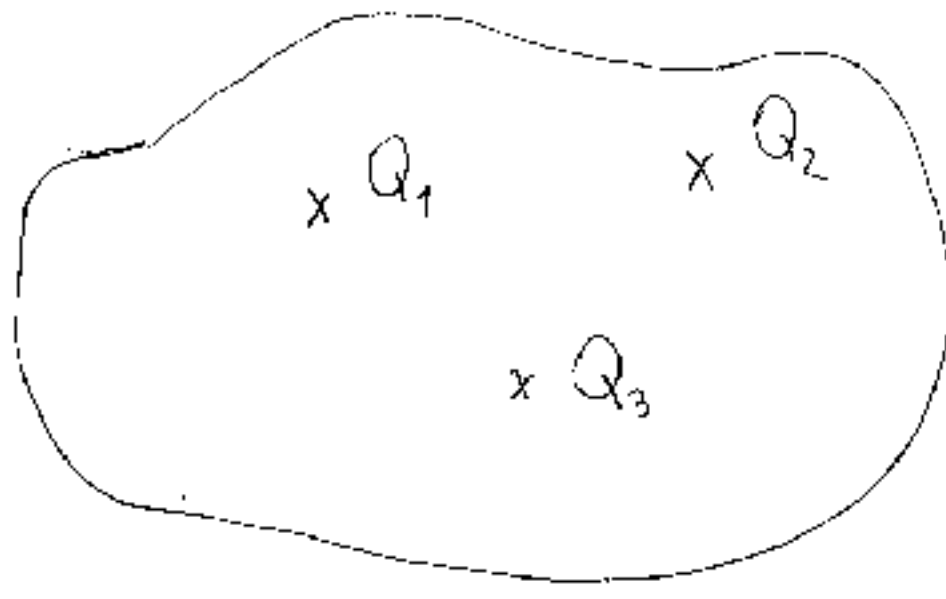


Zárt felület esetén, a felületen \vec{E} vektor akkor pozitív, ha kifelé mutat. Megegyezés szerint.

Vegyünk $+Q$ töltést is egy felületet: ekkor $\Phi = 0$

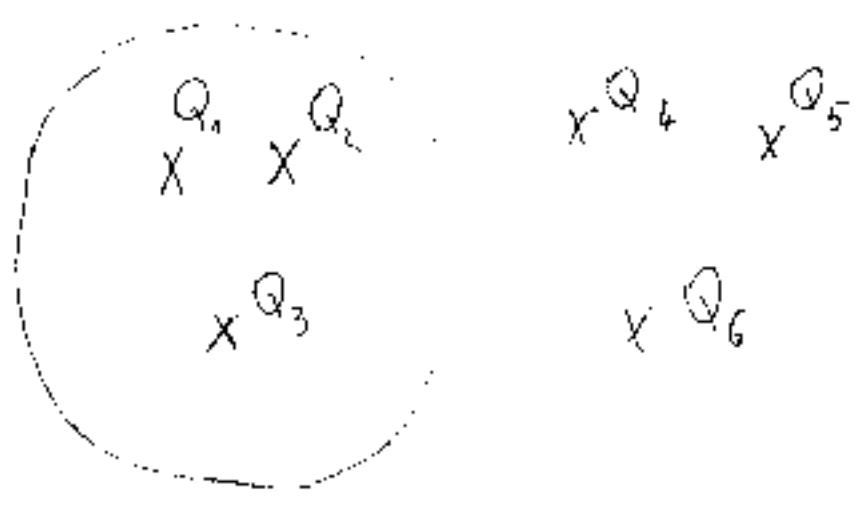


Több-töltés esetén:



$$\Phi = \oint_F \underline{E} \cdot d\underline{f} = \sum_i \underbrace{\oint E_i \cdot d\underline{f}}_{\frac{Q_i}{\epsilon_0}} = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0}$$

csak belső töltésekre



$$\Phi = \oint_F \underline{E} \cdot d\underline{f} = \frac{\sum_i Q_i^{(b)}}{\epsilon_0}$$

szimmetriánk alapján!!!

Elektrosztatika I. alaptörvénye.

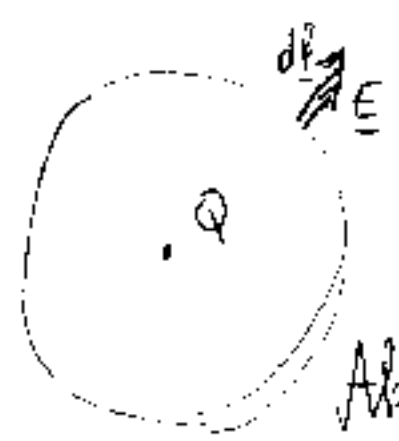
Gauss törvénye. Coulomb törvényből vezethető le.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Szemléletes jelentése: vektormező forrása, tetraéderes felületre → elektrosztatika tér források - a forrás a töltés.

Nemcsak forrásmentes vektormező is.

Coulomb törvényt le lehet vezetni a Gauss törvényből?



MOST: $\oint E \cdot d\underline{f} = E \underbrace{\oint dA}_{4\pi R^2} = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi R^2 \epsilon_0}$

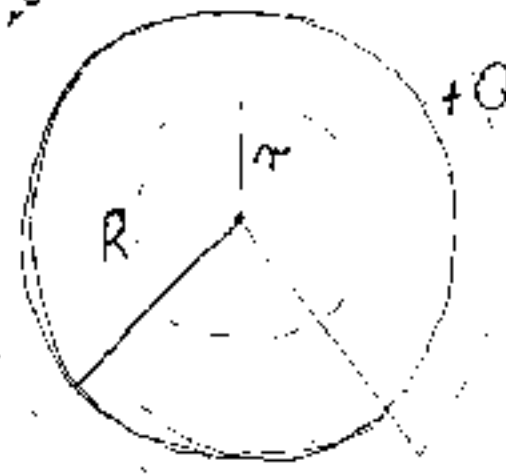
Ha a ponttöltés tere gömbszimmetrikus.

Akkor igaz ekvivalensen a két törvény ha

Továbbá: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2}$ ez pontosan R^2 nem $R^{2,00001}$

Gauss-törvény nem mindig alkalmazható.

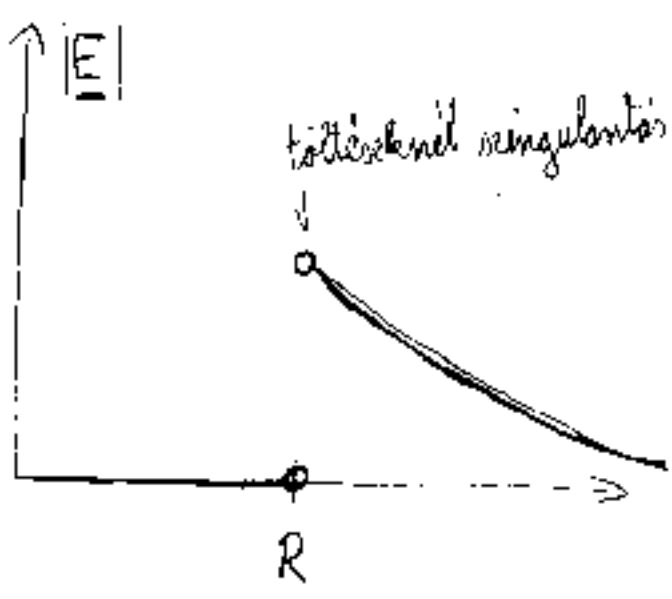
R sugarú gömbhöz. Q töltést tereltek rá.



Térerősséget vizsgálom a gömbhöz különböző távolságokban.

⊖ $\oint \underline{E} \cdot d\underline{f} = 0$ (Minden beírt töltés) $r < R$

⊕ $\oint \underline{E} \cdot d\underline{f} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ ha $r > R$ gömbön kívül kívül az ábrázolás ponttöltésként vagy gömbhöz képest nézve

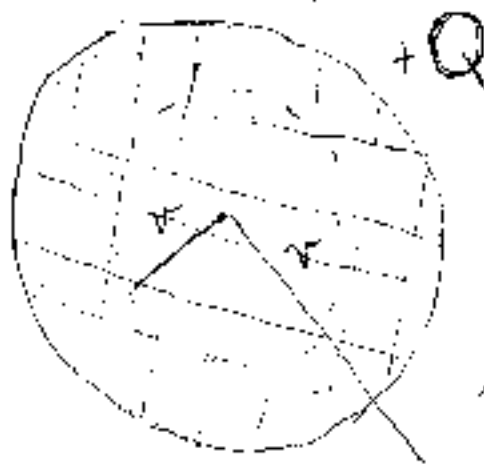


Zárt felületre felvitt töltések esetén, a zárt felületen belül adott területegység elektromos térerősség zérus.

$r > R$
 $E \oint d\underline{f} = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$
 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$

Pl.: tömör gömb, egyenletesen oszlanak el a +Q töltések most: $\rho = \text{áll.}$

$\rho := \frac{dQ}{dV}$ Térfogati töltéssűrűség



a, $r > R \rightarrow |\underline{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$

b, $r < R \rightarrow ?$

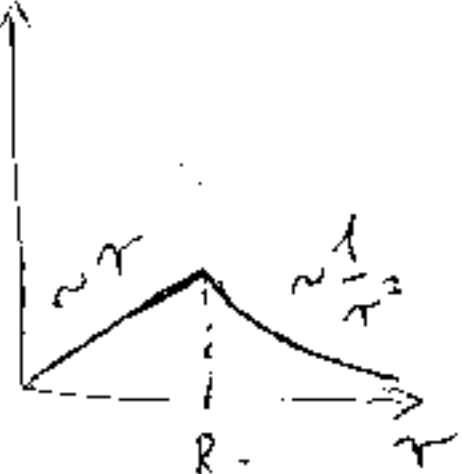
⊖ $\oint \underline{E} \cdot d\underline{f} = \frac{Q'}{\epsilon_0}$

$\frac{Q'}{Q} = \frac{\frac{4\pi}{3} r^3}{\frac{4\pi}{3} R^3} \leftarrow \rho = \text{const.}$

$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{r^3}{R^3} \cdot \frac{Q}{\epsilon_0}$ $Q' = \frac{r^3}{R^3} Q$

$|\underline{E}(r)| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot r \rightarrow r = R \rightarrow$ nincs szakadás

Gauss-törvény átírata: $\rho = \frac{dQ}{dV} = \text{re}$



$Q = \int \rho \cdot dV = \int dQ$

$$\oint_F \underline{E} d\underline{l} = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon_0} \leftarrow V(\text{z\u00e1rt}) \text{ t\u00e9rfogat amit } F \text{ z\u00e1rt fel\u00fclet hat\u00e1rol}$$

Munka, potenci\u00e1l, fesz\u00fclt\u00e9g



Q - t\u00f6lt\u00e9st behelyez\u00e9sem egy elektrosztatikus t\u00e9rbe
 \hookrightarrow er\u0151 hat $r_a \rightarrow$ defini\u00e1lhat\u00f3 munk\u00e1t

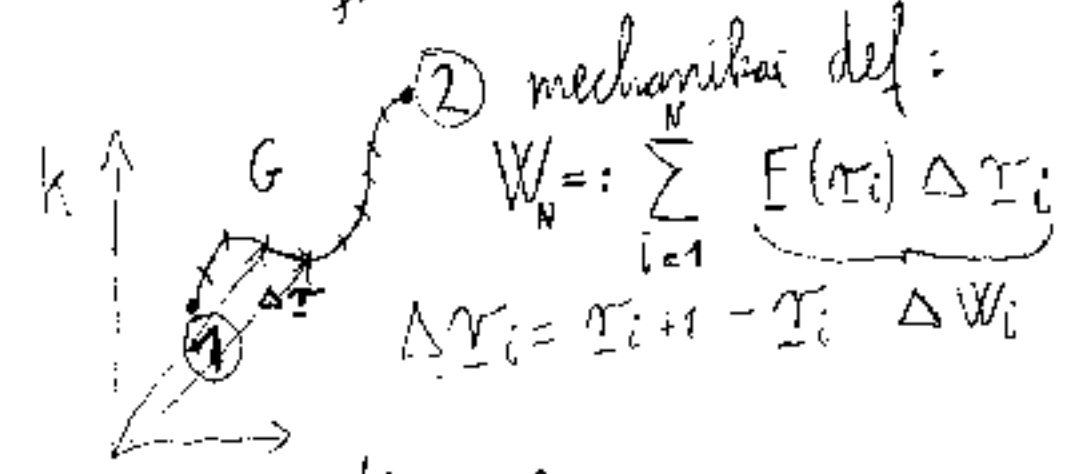
$$\underline{F} = Q \underline{E}$$

V_i -re $\Delta \underline{r}_i \rightarrow 0$

$\exists \lim W_N = W$

J\u00e9l: $W = \int_G \underline{F} d\underline{r}$

$$\int_1^2 \underline{F} d\underline{r} = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

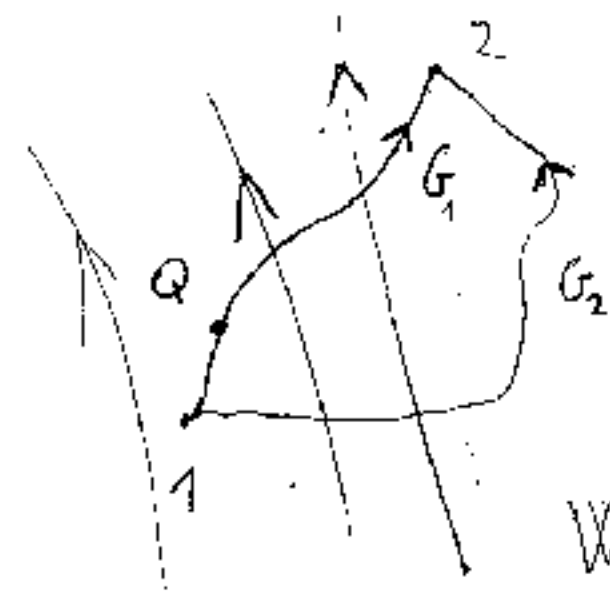


mechanikai def:
 $W_N = \sum_{i=1}^N \underline{F}(\underline{r}_i) \Delta \underline{r}_i$
 $\Delta \underline{r}_i = \underline{r}_{i+1} - \underline{r}_i$ ΔW_i

g\u00f6mb\u00e9l param\u00e9teriz\u00e1ci\u00f3:

$$W_N = \sum_{i=1}^N \underline{F}(\underline{r}_i) \underbrace{(\underline{r}_{i+1} - \underline{r}_i)}_{\frac{d\underline{r}_i}{dt} = \underline{v}_i = \underline{v}(\underline{r}_i)} \cdot (t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=1}^N P(t_i) \Delta t_i$$

Elektrosztatik\u00e1ban: $\underline{F} = Q \underline{E} \rightarrow W = Q \int_G \underline{E} d\underline{r}$



$$\oint_G \underline{E} d\underline{r} = \oint_{G_1} \underline{E} d\underline{r} + \oint_{G_2} \underline{E} d\underline{r}$$

\downarrow
k\u00edsz\u00e9l\u00e9sb\u0151l

$$W_{G_1}^{1 \rightarrow 2} = -W_{G_2}^{2 \rightarrow 1}$$

$$W_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 1} = W_{G_1}^{1 \rightarrow 2} + W_{G_2}^{2 \rightarrow 1} = 0$$

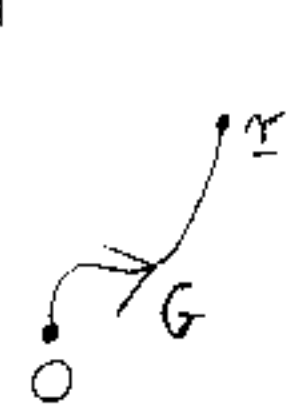
$\oint_G \underline{E} d\underline{r} = 0$ telj\u00e9s:

$$\oint_G \underline{E} d\underline{r} = 0$$

Az elektrosztatikus t\u00e9r irrot\u00e1ci\u00f3mentes

Az elektrosztatika II. alapt\u00f6r\u00e9nye
 Az elektrosztatikus t\u00e9r konzerv\u00e1t\u00edv v\u00e9rt\u00e9s

Def: Vágyjunk egy tetszőleges origót és egy \underline{r} helyvektorral jellemzett pontot. Helyezzük bele az elektrosztatikus térbe.



$$\Phi(\underline{r}) = - \int_0^{\underline{r}} \underline{E} d\underline{r}$$

potencial $\Phi(\underline{r})$: \underline{r} helyvektorú pont potenciálja

$$\Phi = -\frac{W}{Q}$$

$$[\Phi] = \frac{[F]}{[Q]} [r] = \frac{N}{C} \cdot m = 1V$$

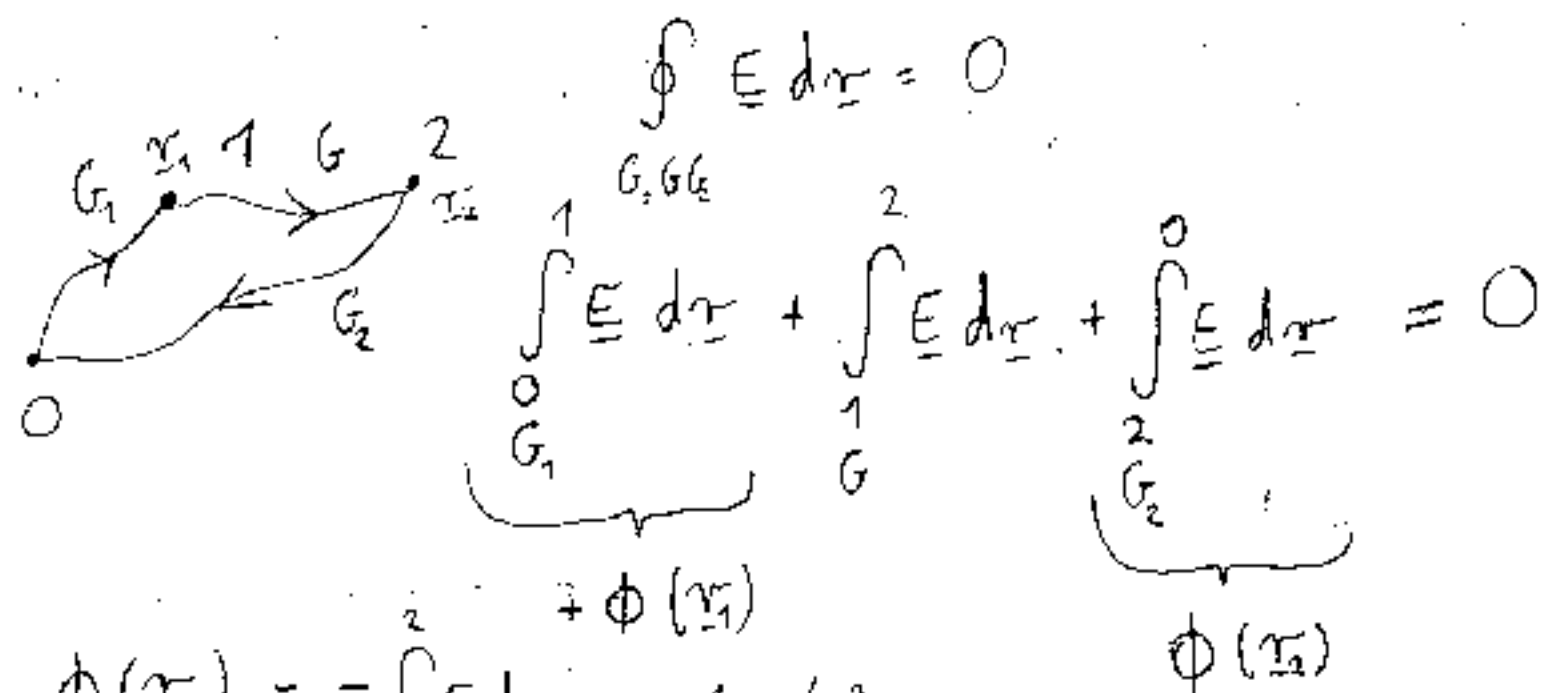
egységnyi töltésen végzett (-1) munka mikorben $\underline{0}$ pontból az \underline{r} pontba mozgatom

Alessandro Volta: (1745-1827)

definiálom kell az origót
hírcsomb kísérlet

koordináta-rendszer függő

$$\underline{E}(\underline{r}) \xrightarrow{\int} \Phi(\underline{r}) \xrightarrow{?} \underline{E}(\underline{r})$$

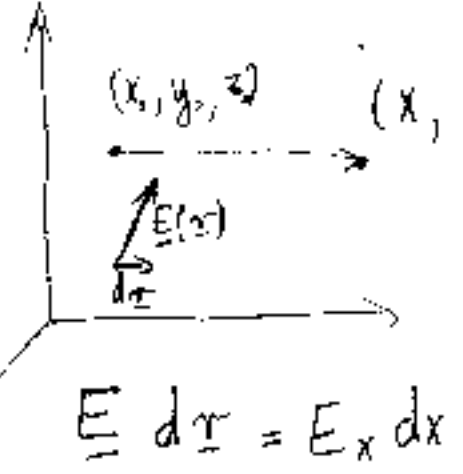


$$\Phi(\underline{r}_2) - \Phi(\underline{r}_1) = - \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{E} d\underline{r} \rightarrow \text{1-es és 2-es pont közötti potenciálkülönbség} \rightarrow \text{feszültség}$$

$$- \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{E} d\underline{r} =: \Phi_{12} = U_{12} = U \rightarrow \text{koordináta-rendszer független}$$

$$\int_a^b \left(\frac{df(x)}{dx} \right) dx = f(b) - f(a)$$

Newton-Leibniz tétel



$$U_{x, y_0, z_0} = \Phi(x, y_0, z_0) - \Phi(x_0, y_0, z_0)$$

$$= - \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y_0, z_0} \underline{E} d\underline{r} = - \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y_0, z_0} E_x dx =$$

$$E_x = - \frac{d\Phi}{dx}$$

precízem:

$$E_x = - \frac{\partial \Phi(\underline{r})}{\partial x} \quad E_z = - \frac{\partial \Phi(\underline{r})}{\partial z}$$

$$E_y = - \frac{\partial \Phi(\underline{r})}{\partial y} \quad E_z = - \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$\underline{E} = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi =: - \text{grad } \phi = - \nabla \phi$$

ϕ nem egyjelmű - konstans bázis lehet adni (origó megválasztása)

↑
kf. operátor
Nabla operátor

pl: $|\underline{r}|^2 = \phi(\underline{r})$ grad $|\underline{r}|^2$? $|\underline{r}|^2 = (x^2 + y^2 + z^2)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 2z$$

$$\text{grad } |\underline{r}|^2 = 2 \underline{r} = 2(x, y, z)$$

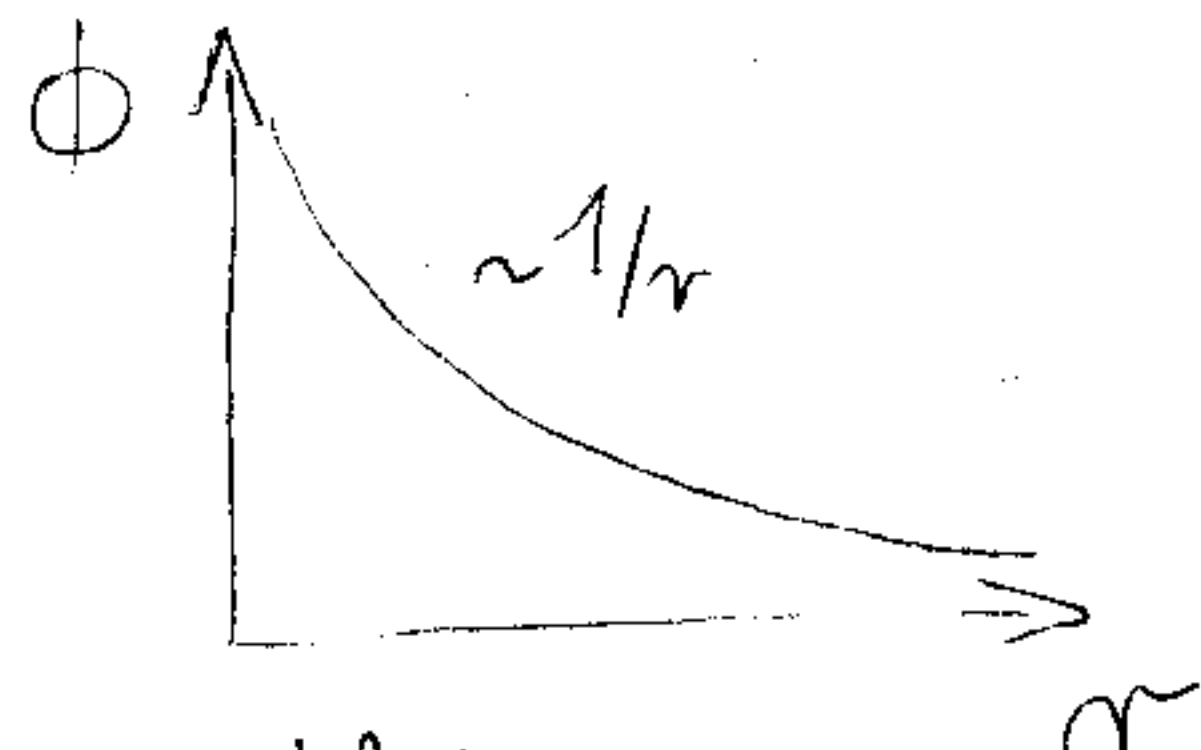
pl: $\frac{1}{|\underline{r}|} = \phi(\underline{r})$ grad ϕ ? $\frac{1}{|\underline{r}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot (-1) \cdot 2x = \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\text{grad } \phi = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot [x, y, z] = - \frac{1}{|\underline{r}|^3} \cdot \underline{r} = - \frac{1}{|\underline{r}|^2} \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q$$

$$- \text{grad } \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\underline{r}|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{|\underline{r}|^2} \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = \underline{E}(\underline{r})$$

$\phi(\underline{r}) = \phi_0$



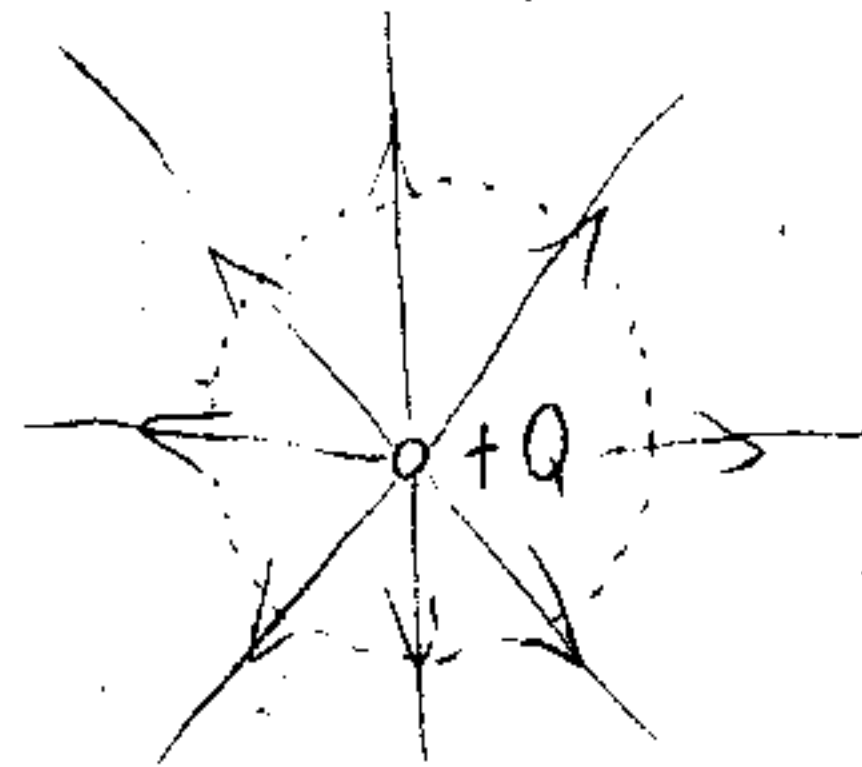
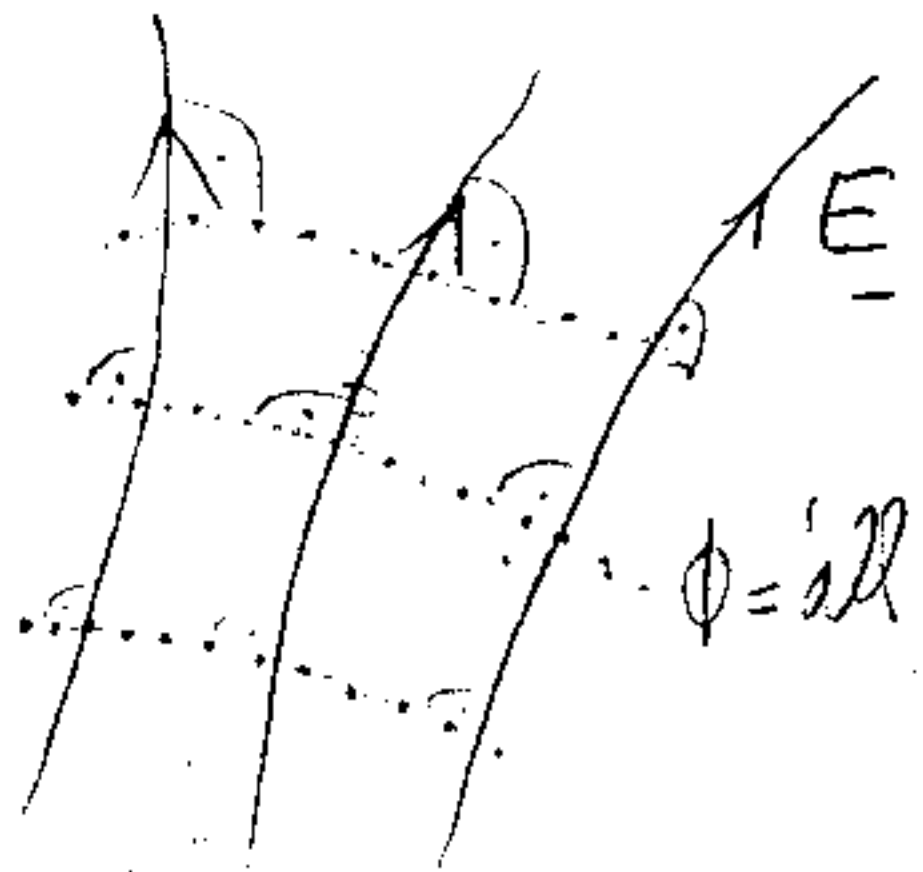
általában $\phi_0 = 0$ $\phi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ pontokat

Def: Ekvipotenciális felület: azokat a (felületeket) a térben ahol $\phi(\underline{r}) = \text{all}$ ekvipotenciális felületnek nevezzem

$$\phi(\underline{r}) = \text{all} \Rightarrow W = - \int_1^2 \underline{E} \cdot d\underline{r} = 0 \quad d\underline{r} \parallel \text{az ekvipotenciális felülettel}$$

$$\underline{E} \perp d\underline{r}$$

pl:



több ponttöltés esetén

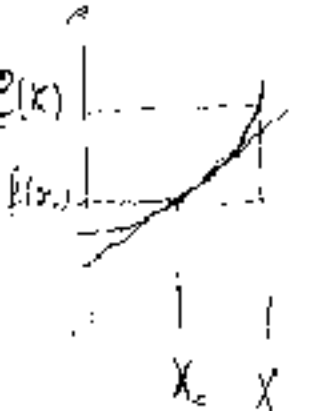
$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|}$$

$$\Phi(\underline{r} + d\underline{r}) - \Phi(\underline{r}) = - \int_{\underline{r}}^{\underline{r} + d\underline{r}} \underline{E} \cdot d\underline{r} \approx - \underline{E} \cdot \int_{\underline{r}}^{\underline{r} + d\underline{r}} d\underline{r} = - \underline{E} \cdot d\underline{r}$$

$d\underline{r}$ olyan kicsi, hogy $\underline{E} \approx \text{állandó}$

$$\Phi(\underline{r} + d\underline{r}) = \Phi(\underline{r}) + \text{grad } \Phi(\underline{r}) \cdot \Delta \underline{r}$$

Taylor-sorfejtés



$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

Elhanyagoljuk a magasabb rendű tagokat

Kisvonal összegeklő: $\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^2} \cdot \frac{\underline{r} - \underline{r}_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|}$

$$\oint_C \underline{E} \cdot d\underline{r} = \int_V \rho \, dV$$

$$\oint_C \underline{E} \cdot d\underline{r} = 0 \iff \text{konervatív potenciálos vektormező}$$

$$\Phi(\underline{r}) = - \int_0^{\underline{r}} \underline{E} \cdot d\underline{r} \quad \underline{E} = - \text{grad } \Phi \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Ha a vektormező konervatív vagy irrotációmentes akkor mindig állítható egy skálármező gradienseként \rightarrow vektormező potenciálos

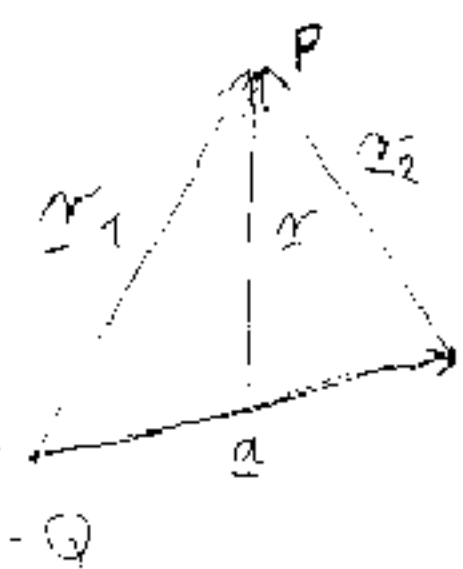
$$E_{\text{pot}}(\underline{r}) = Q \Phi(\underline{r}) \quad \text{Potenciális energia}$$

Az az energia, mely akkor szükséges, hogy a végtelenből az \underline{r} helyre (mozgassunk) mozgassunk egy töltést.

Dipólus

két töltésből álló rendszer
közös középpont

$$|\underline{r}_1| = r_1, \quad |\underline{r}_2| = r_2$$



$a, |\underline{r}| \gg |a|$
 $\vec{E}(P) = ?$

$+Q$
 $-Q$
 $\Phi(\infty) = 0$

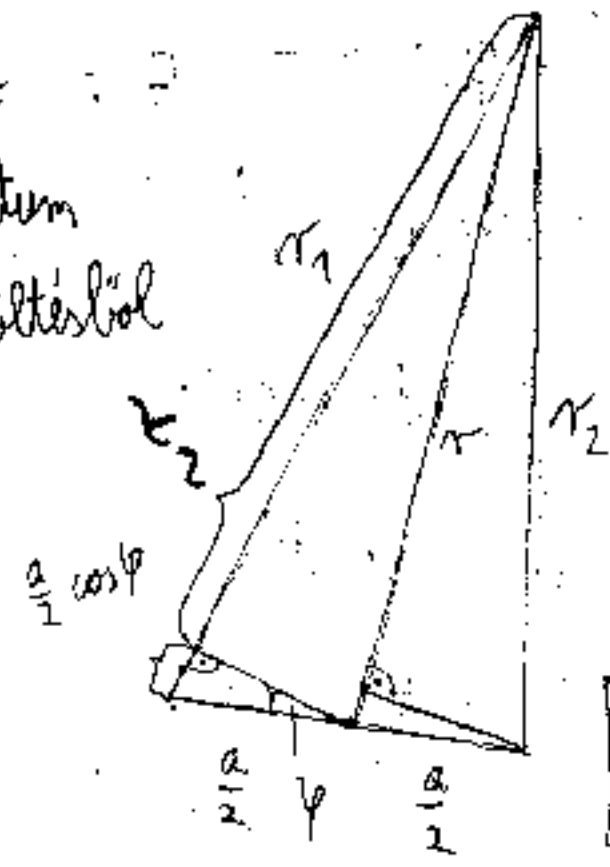
meképpen a megfelelő rendű közelítés?

$$\Phi_p(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{|\underline{r}_2|} - \frac{Q}{|\underline{r}_1|} \right)$$

$\underline{p} = Q \cdot \underline{a}$

dipolmomentum

\underline{a} : negativ töltesből
a pozitív töltesbe



$r_1 \approx r + \frac{a}{2} \cos \varphi$

$r_2 \approx r - \frac{a}{2} \cos \varphi$

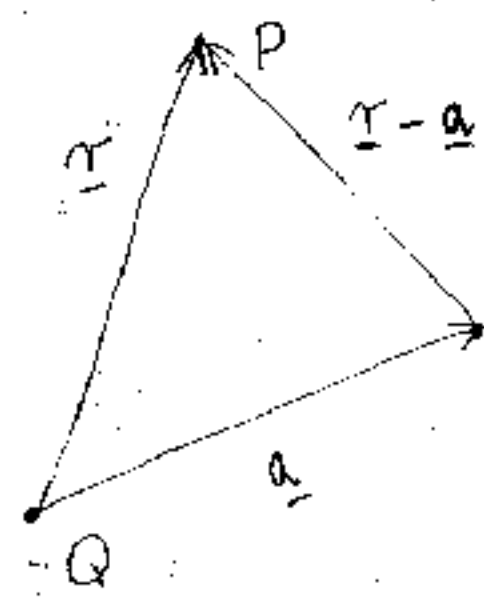
$\Phi_p(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_2 r_1} \approx$

$\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a \cos \varphi}{r^2}$

$\Phi_p(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot (a \cos \varphi \cdot r)}{r^3} =$

$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{|\underline{r}|^3}$

$\Phi(r + \Delta r) = \Phi(r) + (\text{grad } \Phi) \cdot \Delta r + \mathcal{O}(\Delta r^2)$



$\Phi_p(r) = \Phi_p(r - \underline{a}) - \Phi_p(r) \approx (\text{grad } \Phi)(-\underline{a})$

$\Delta r \approx -\underline{a}$

$+Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{|\underline{r}|^2} \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} \cdot \underline{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{|\underline{r}|^3}$

$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{|\underline{r}|^3}$

$\underline{E} = -\text{grad } \Phi$

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{|\underline{r}|^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{p_x (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - (p_x x + p_y y + p_z z) \cdot \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$

$\frac{\frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{p_x |\underline{r}|^3 - 3(p \cdot \underline{r}) |\underline{r}| x}{|\underline{r}|^6} = \frac{p_x}{|\underline{r}|^3} - \frac{3(p \cdot \underline{r}) x}{|\underline{r}|^5} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)$

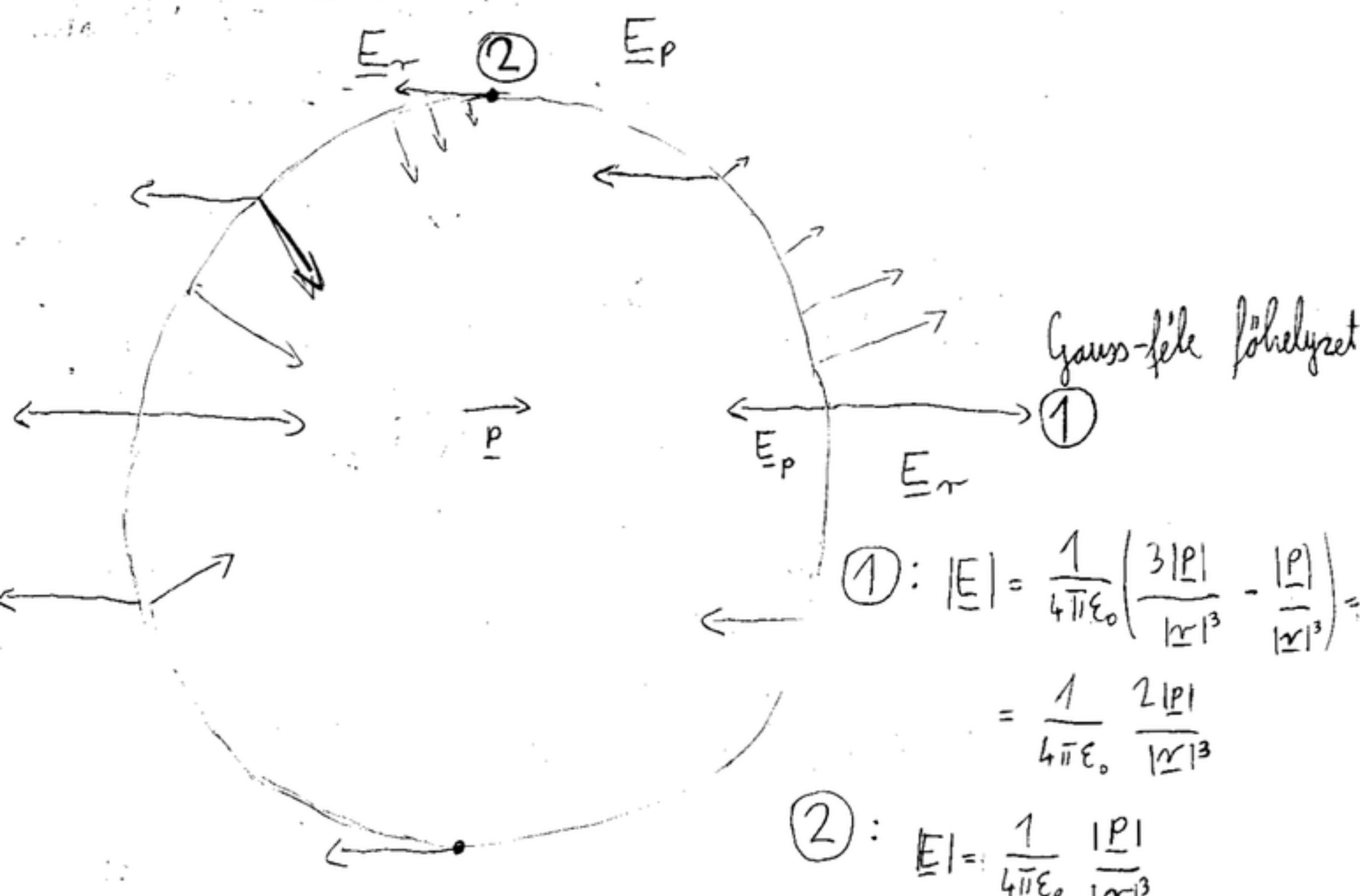
$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{|\underline{r}|^3} \right) = \frac{p_y}{|\underline{r}|^3} - \frac{3(p \cdot \underline{r}) y}{|\underline{r}|^5}$

$\underline{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\underline{p}}{|\underline{r}|^3} - \frac{3(p \cdot \underline{r}) \underline{r}}{|\underline{r}|^5} \right) =$

$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{|\underline{r}|^3} \right) = \frac{p_z}{|\underline{r}|^3} - \frac{3(p \cdot \underline{r}) z}{|\underline{r}|^5}$

$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(p \cdot \underline{r}) \underline{r}}{|\underline{r}|^5} - \frac{\underline{p}}{|\underline{r}|^3} \right) \sim \frac{1}{|\underline{r}|^3}$
using le

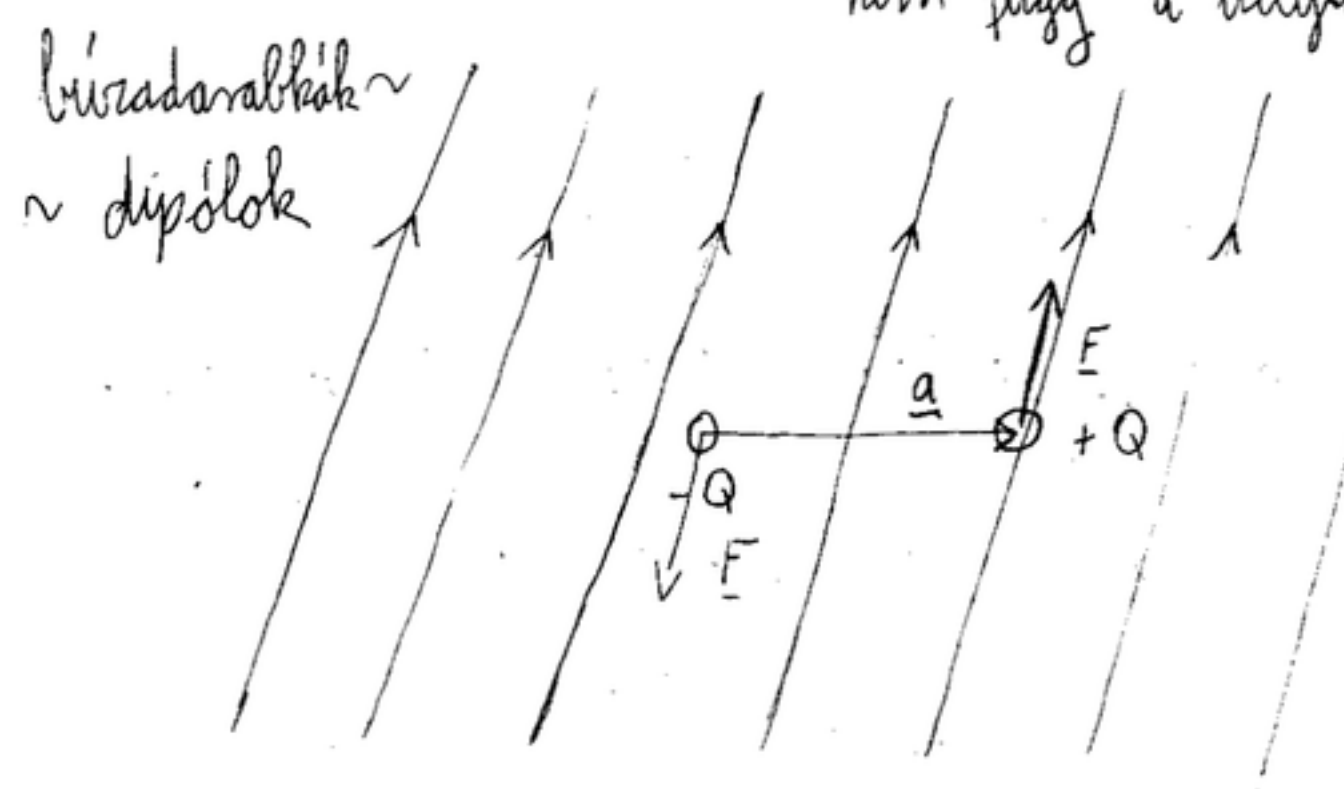
$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\underline{p} \cdot \underline{r})\underline{r}}{|\underline{r}|^5} - \frac{\underline{p}}{|\underline{r}|^3} \right)$$



①: $|\underline{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3|\underline{p}|}{|\underline{r}|^3} - \frac{|\underline{p}|}{|\underline{r}|^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2|\underline{p}|}{|\underline{r}|^3}$

②: $|\underline{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\underline{p}|}{|\underline{r}|^3}$

Helyezzük a dipólt egy homogén elektromos térbe.
 ↳ vektormező vektorainak iránya és nagysága nem függ a helytől



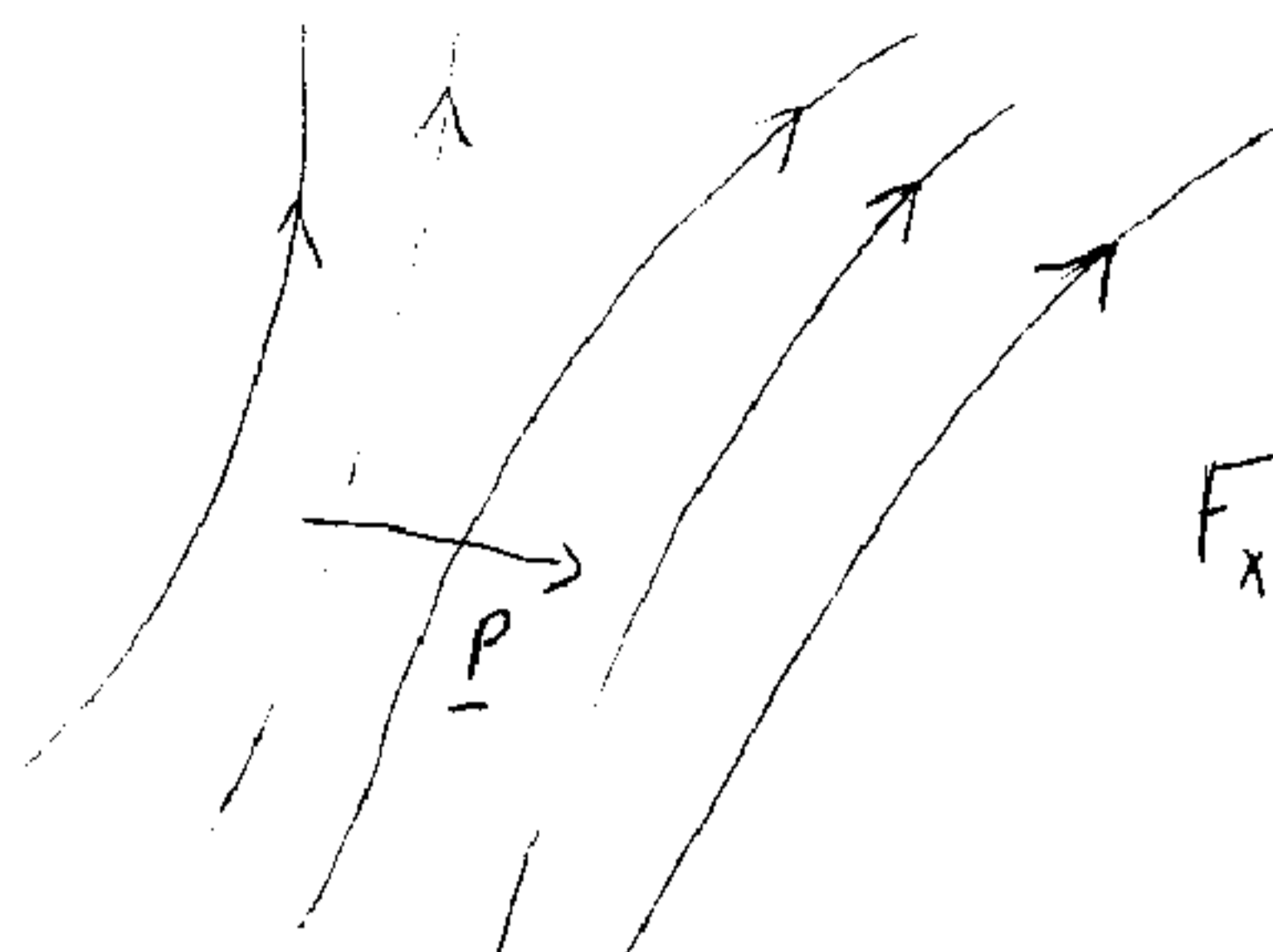
$$\underline{M} = (\underline{r} + \underline{a}) \times \underline{F}(\underline{r} + \underline{a}) - \underline{r} \times \underline{F}(\underline{r}) = \underline{r} \times \underline{F}(\underline{r} + \underline{a}) + \underline{a} \times \underline{F}(\underline{r} + \underline{a}) - \underline{r} \times \underline{F}(\underline{r})$$

$$= \underline{r} \times Q\underline{E}(\underline{r} + \underline{a}) + \underline{a} \times Q\underline{E}(\underline{r} + \underline{a}) - \underline{r} \times Q\underline{E}(\underline{r}) = \underline{a} \times Q\underline{E} = \underline{p} \times \underline{E}$$

dipól a homogén térben a súlypontja körül forog

$\begin{matrix} \xrightarrow{+\delta} \\ \uparrow \\ \xrightarrow{-\delta} \end{matrix} M_{max}$
 $\xrightarrow{\quad} M=0$
stabil helyzet

helyezzük a dipólt egy nem homogén elektromos mezőbe



$$\underline{F} = Q \underline{E}(\underline{r} + \underline{a}) - Q \underline{E}(\underline{r}) = Q (\underline{E}(\underline{r} + \underline{a}) - \underline{E}(\underline{r}))$$

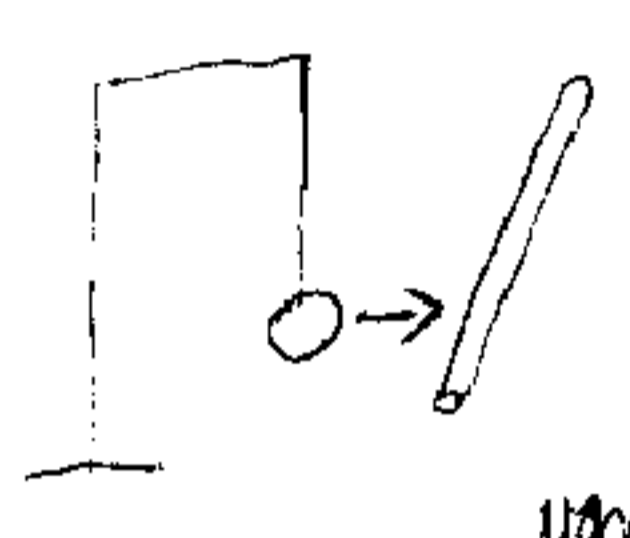
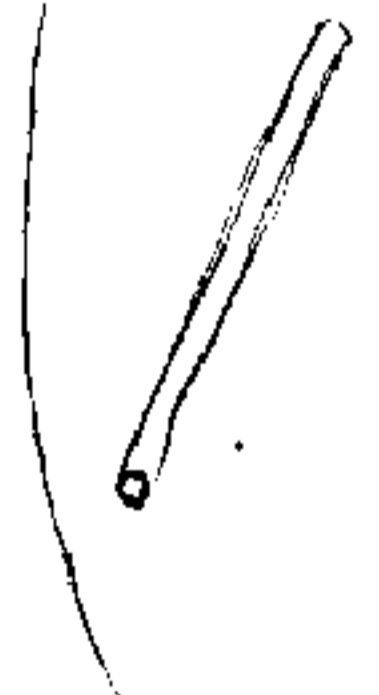
$$F_x = Q (E_x(\underline{r} + \underline{a}) - E_x(\underline{r})) =$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} a_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} a_y + \frac{\partial E_x}{\partial z} a_z$$

Erő a térerősség ^{növekedés} megváltozásának irányába hat. Vérsugár. Gyógyó.

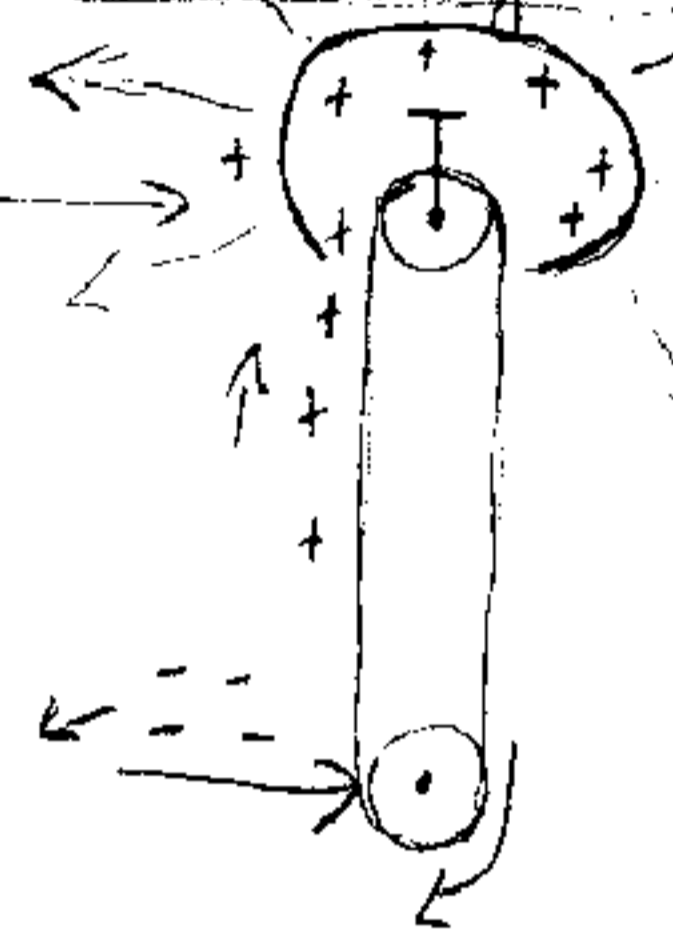
$$= \frac{\partial E_x}{\partial x} P_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} P_y + \frac{\partial E_x}{\partial z} P_z = F_x$$

kis dipólusok



$$Q \int \underline{E} d\underline{r}$$

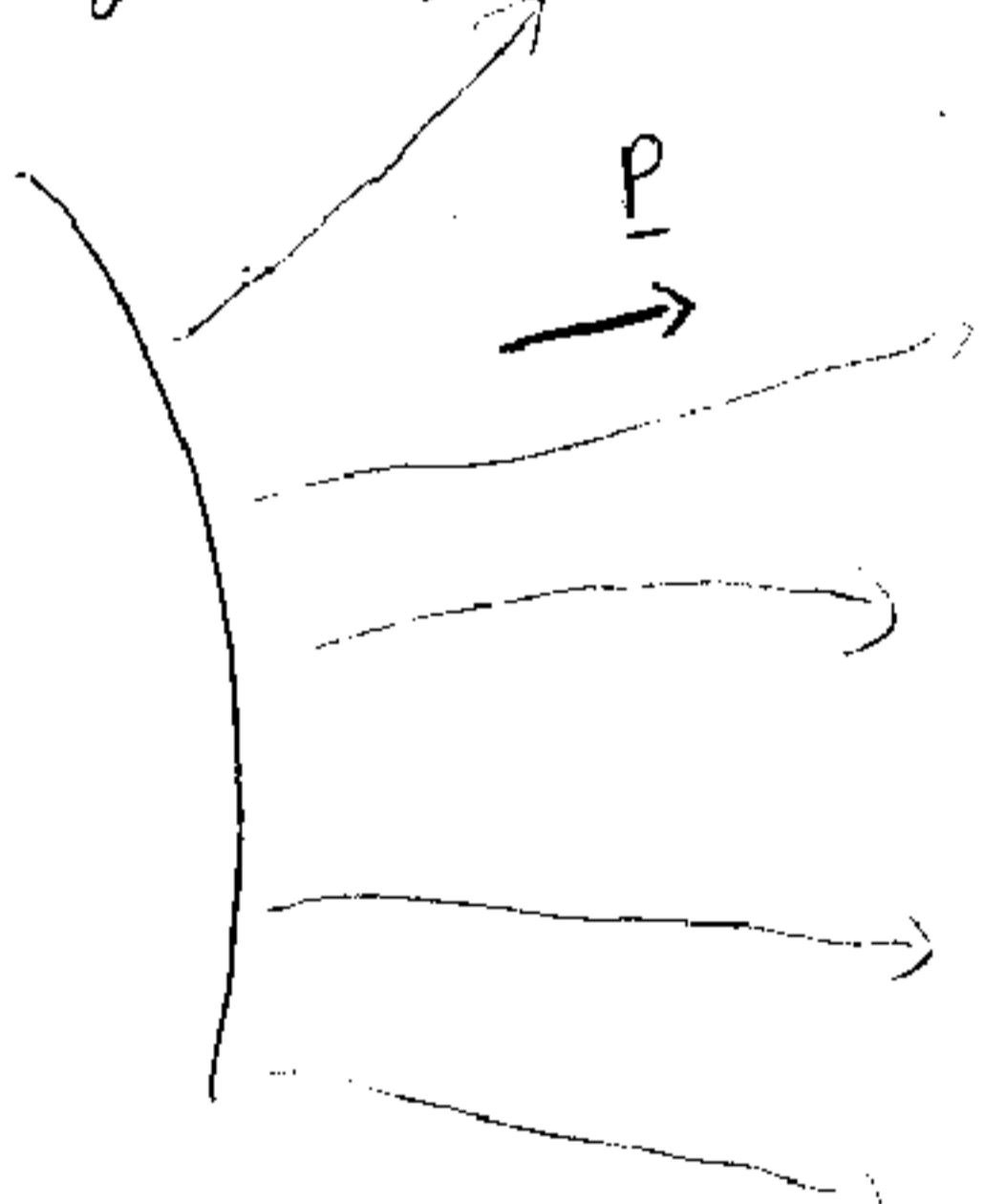
van der Graaf generátor



bármilyen mértékben fel lehet tölteni - elvileg egyre nagyobb potenciál feltehető

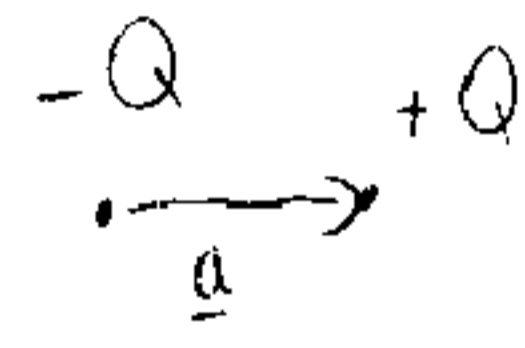
van der Graaf generátor és vattapomacs

~ 10 000 V -ra lehet feltölteni



+ rekombinálódnak → vattapomacs pozitívra válik → taszítás

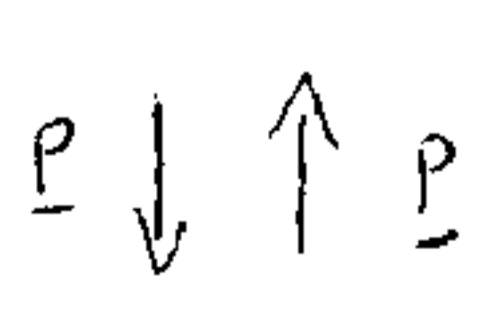
dipólus létrejöttéhez munkát kell végezni



$$E_{pot} = Q(\phi(\underline{r} + \underline{a})) - Q(\phi(\underline{r})) = Q(\phi(\underline{r} + \underline{a}) - \phi(\underline{r})) = -Q \underline{a} \underline{E} =$$

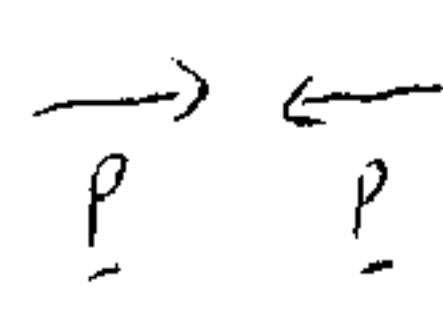
2 dipólmomentum → 2 dipólus → quadropólus

$$\text{grad } \phi \underline{a} = -\underline{E}$$



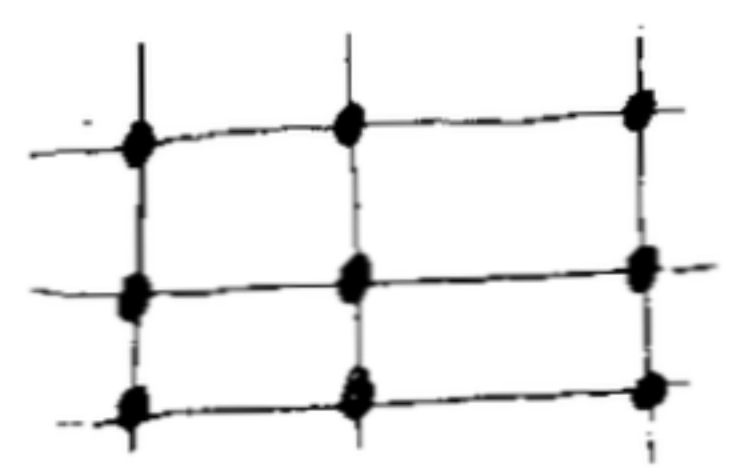
$$E \sim \frac{1}{r^4}$$

többféle helyzetben állhatnak:



Két alapegyenlet: $\oint \underline{E} \cdot d\underline{l} = \frac{\int \rho \, dV}{\epsilon_0}$ $\oint \underline{E} \cdot d\underline{r} = 0$

szilárd anyag - rácsszerkezet, fémek esetén - fémrács
 vezetési e^- -ok gyengén kötve az at.-maghoz \rightarrow mindegyik e^- egyforma valószínűséggel tartózik az atomtörzsekhez \rightarrow delokalizált e^- felhő, könnyen elmordulnak \rightarrow vezetők



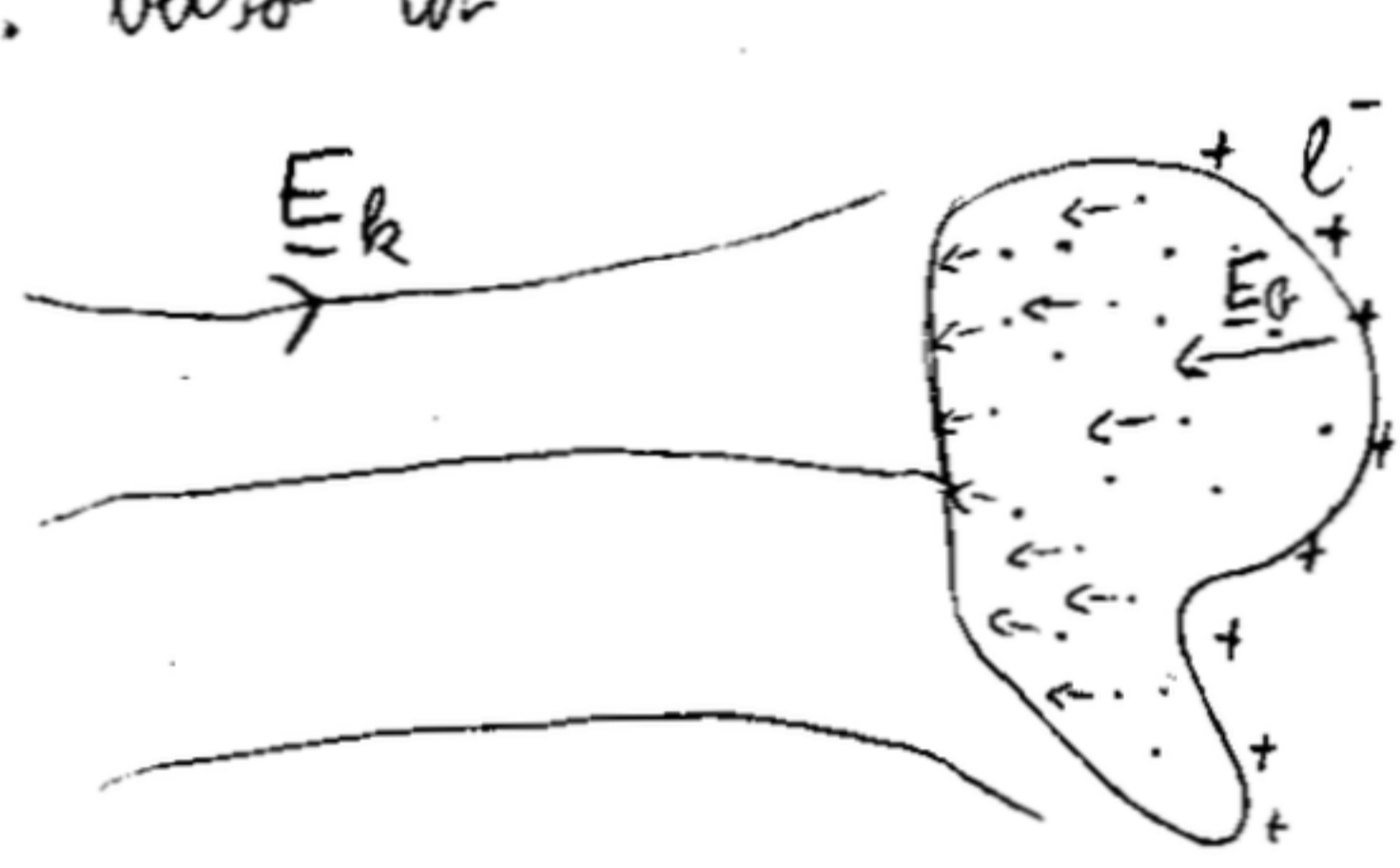
szigetelők: nincsnek delokalizált elektronok

egységnyi töltés: $e^- = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ $p^+ = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Fémek elektrosztatikus térében

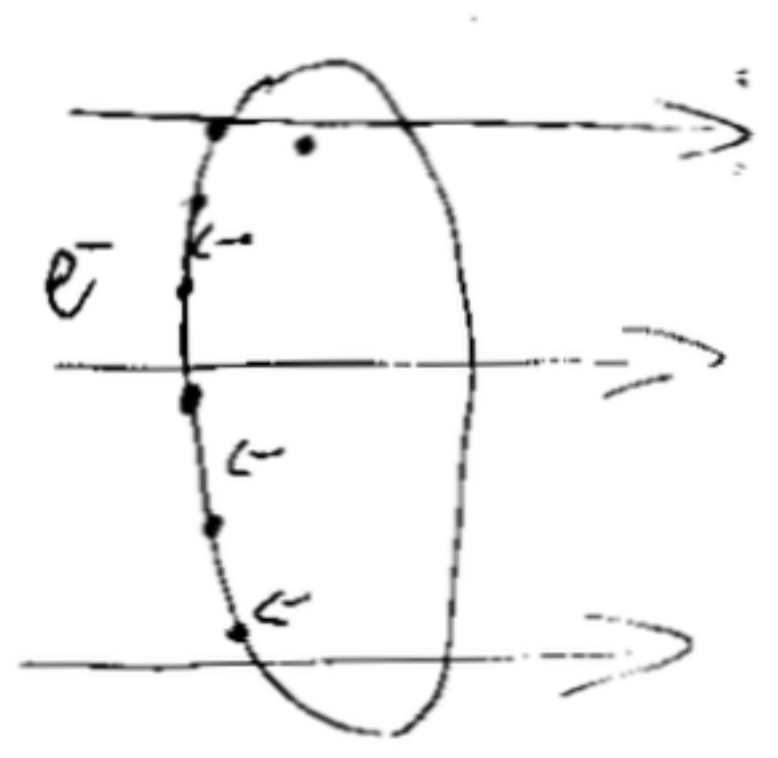
\underline{E}_k : külső elektrosztatikus tér
 \underline{E}_b : belső tér

$\sum Q = 0 \leftarrow$ fém semleges



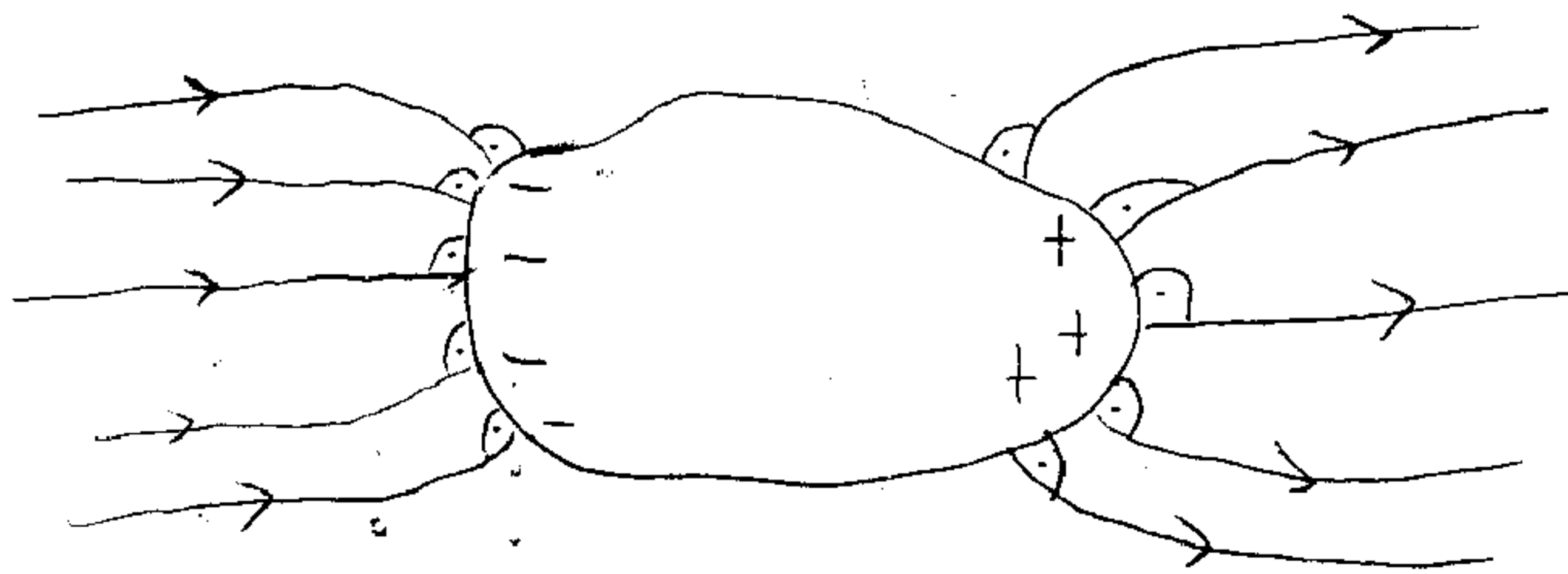
$\underline{E}_k(\underline{r}) + \underline{E}_b(\underline{r}) = 0$
 e^- hiány lesz
 e^- -ok \rightarrow elmozdának mozogni
 10^{-9} s alatt épül ki a belső tér

fém felületén a külső elektromos tér módosul



E_n - nem lehet $\rightarrow e^-$ -ok mozognának
 fémek esetén elektrosztatikában

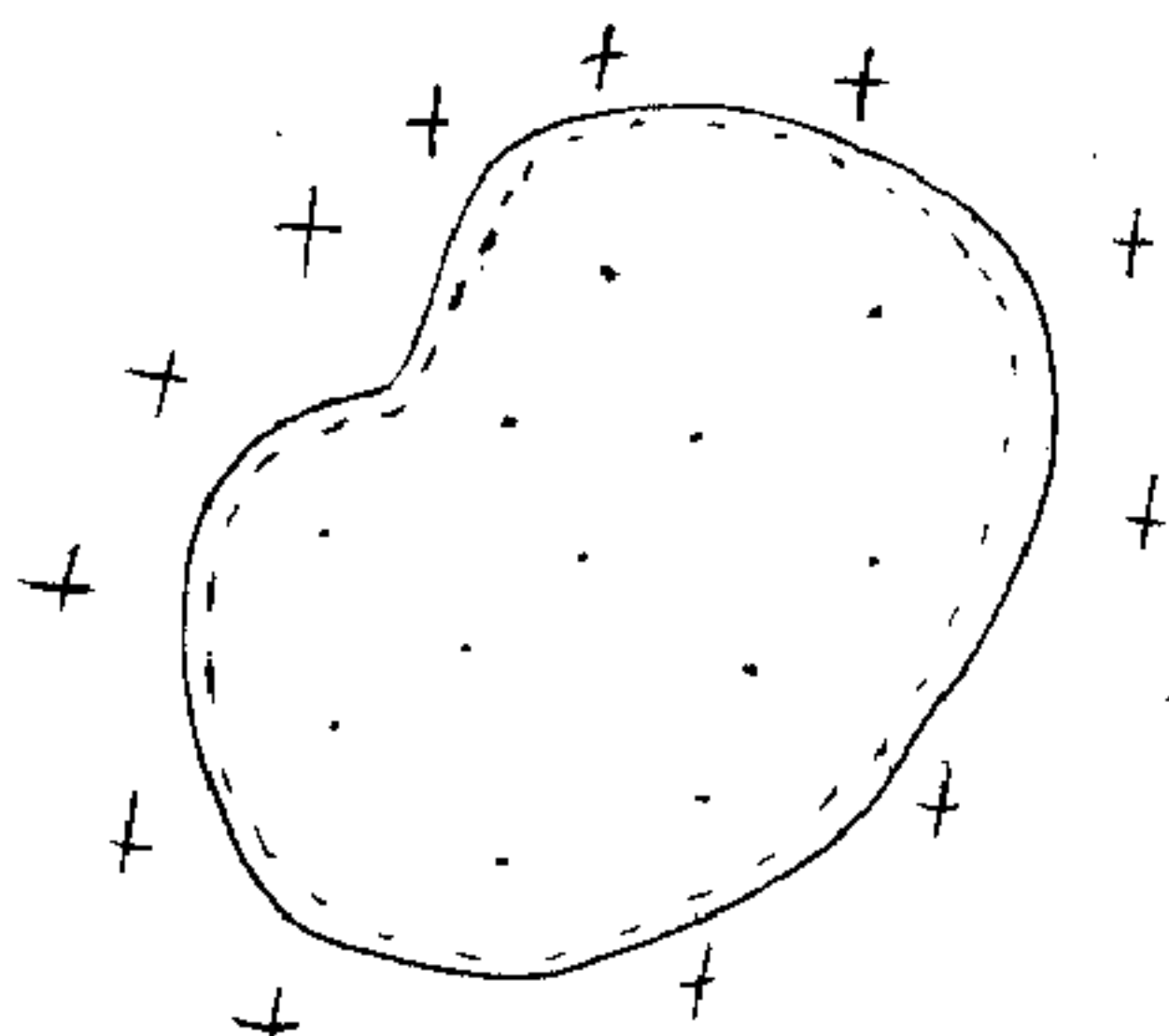
e^- -ok úgy módosítják a külső elektromos teret, hogy annak erővonalai merőlegesen illeszkednek a fém felületére



fém belsejében nincs
elektromos térerősség

$\Sigma Q \neq 0$ töltést juttatok a fémre $\rightarrow \underline{E}_e \rightarrow$ töltésáthendeződés \rightarrow

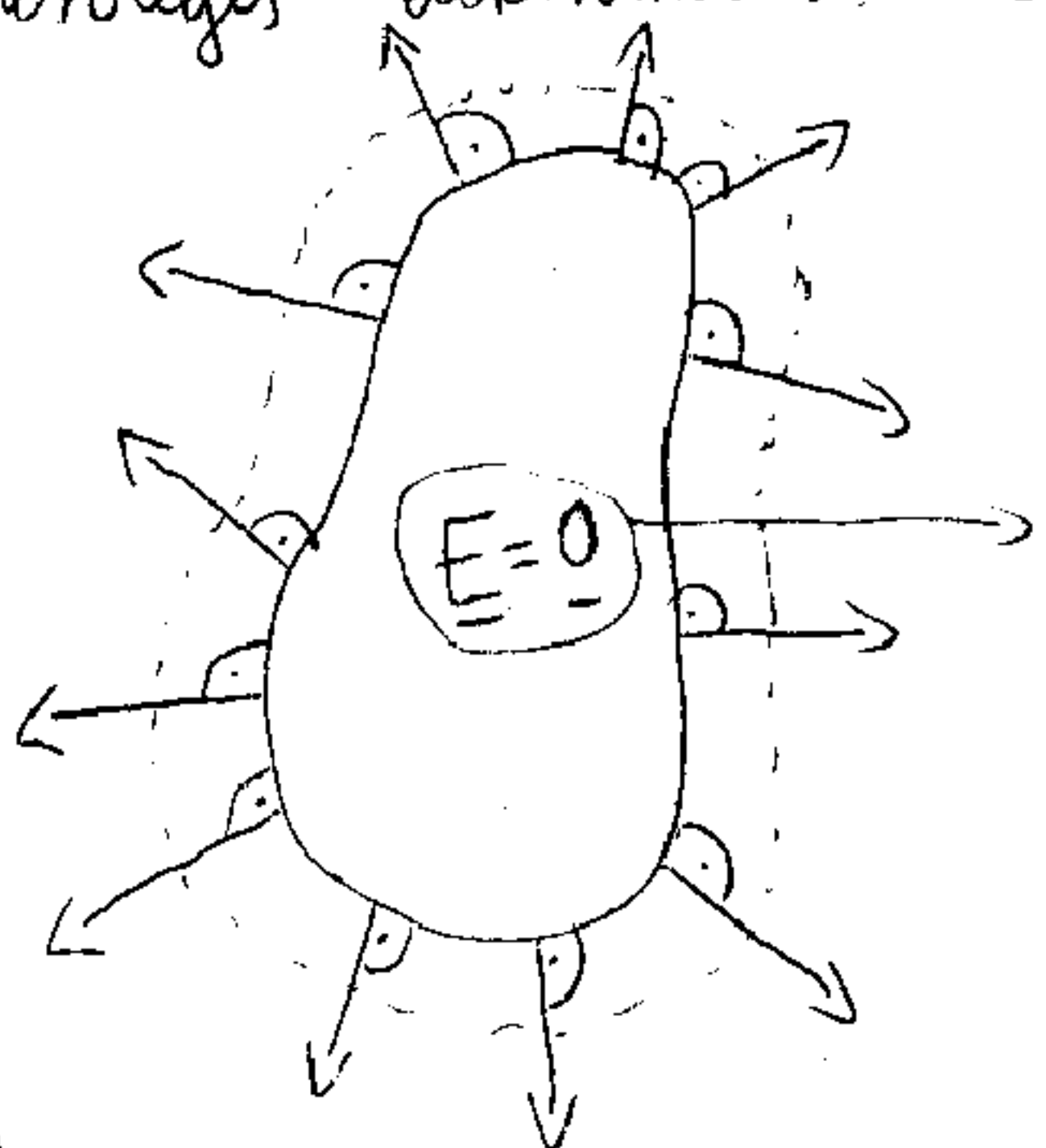
$\rightarrow \underline{E}_e = 0$ ($\sim 10^{-9} \text{ s}$)



$$\oint \underline{E} d\underline{l} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$$

$Q \Rightarrow Q_{\text{belső}} = 0$

rávitt töltés a fém felületén helyezkedik el \rightarrow úgy helyezkednek el, hogy felületre merőleges elektromos teret alkossanak



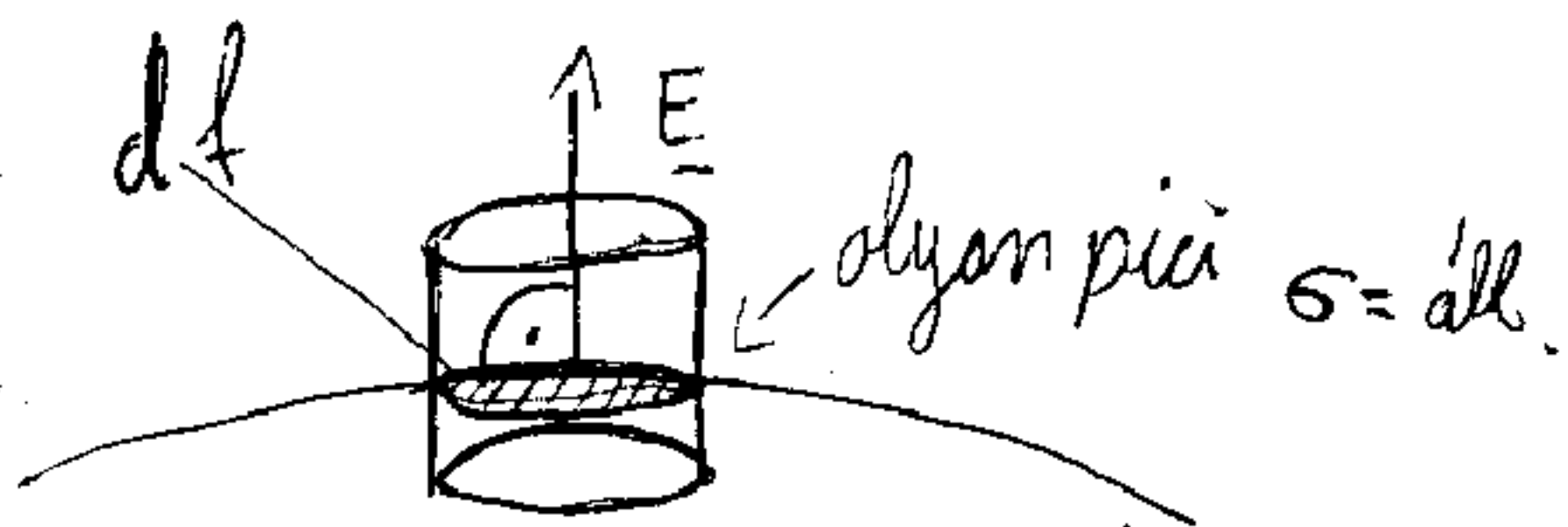
fém felülete: ekvipotenciális felület

$\underline{E} = -\text{grad } \phi \rightarrow \phi = \text{'állandó'}$

egész fémtest állandó potenciálon van

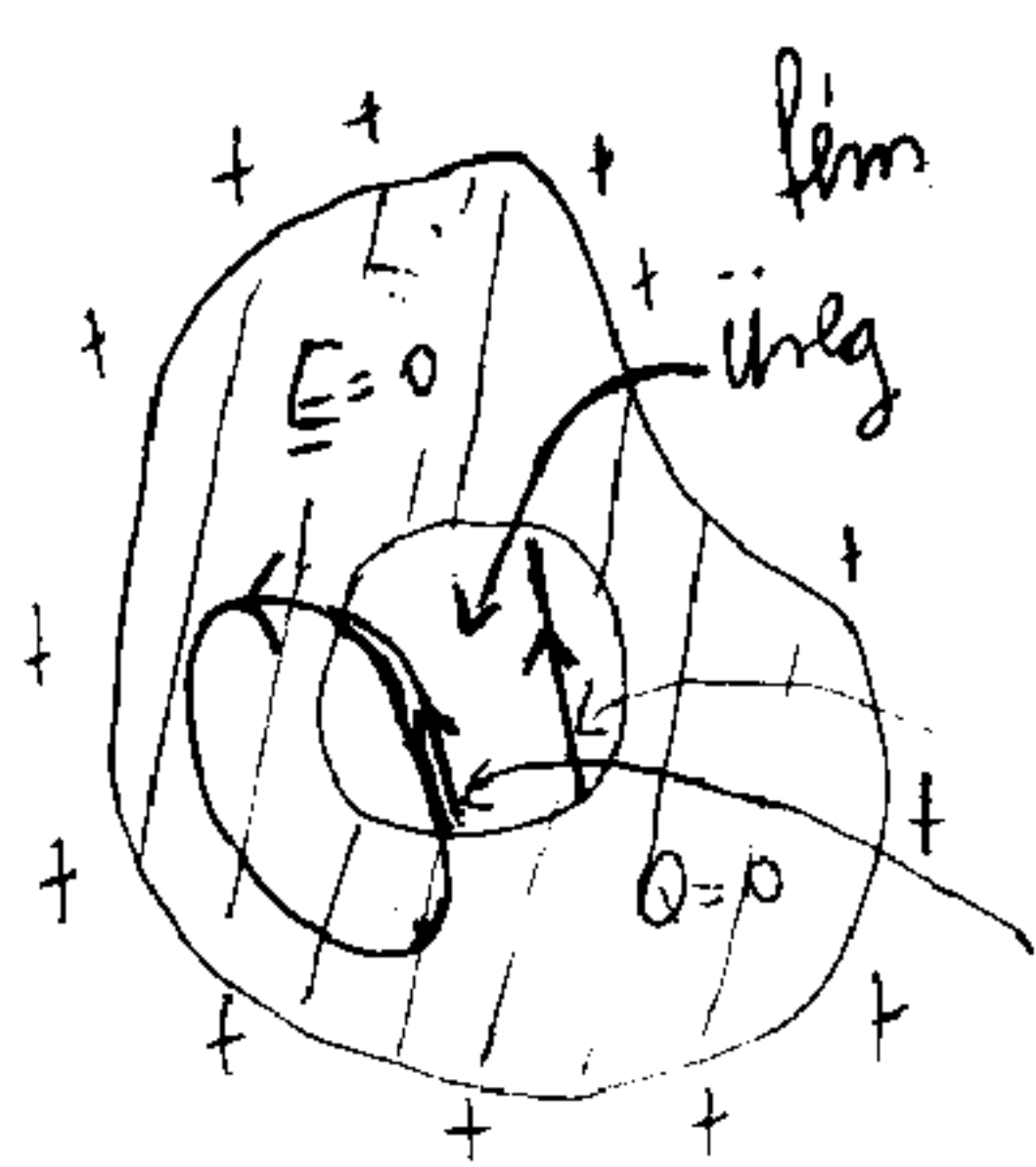
$\sigma = \frac{dQ}{dA}$
(sigma)

felületi töltéssűrűség



ment $\underline{E} = 0$
 $\oint \underline{E} d\underline{l} = \frac{1}{\epsilon_0} \Sigma Q = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma dA$

$\int_{\text{alap}} \underline{E} d\underline{l} + \int_{\text{fedő}} \underline{E} d\underline{l} + \int_{\text{palszt}} \underline{E} d\underline{l} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma dA \rightarrow E dA = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma dA$
 \downarrow
 $\underline{E} \parallel d\underline{l}$
 \circ Ment $\underline{E} \perp d\underline{l}$
 $\sigma = \epsilon_0 E$



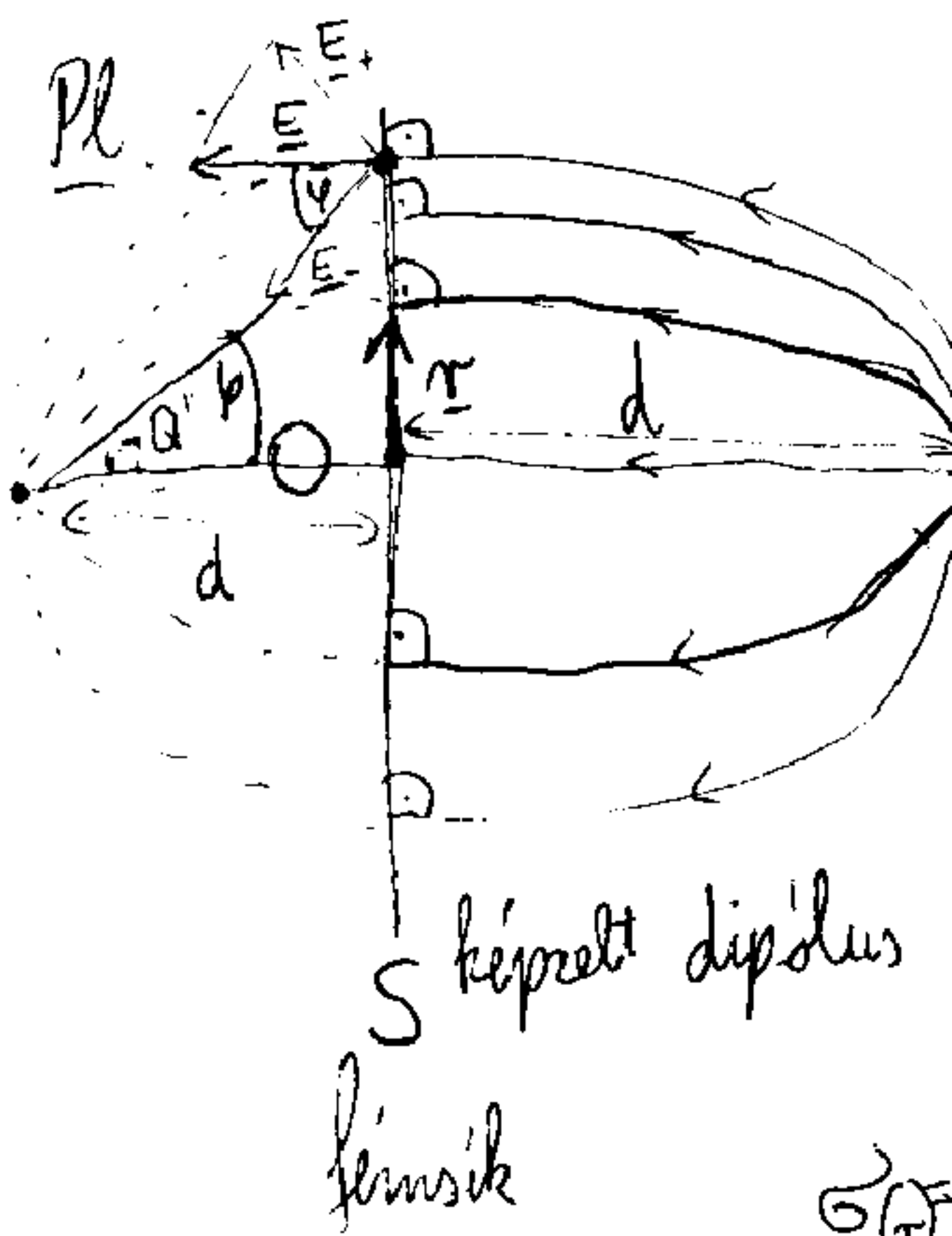
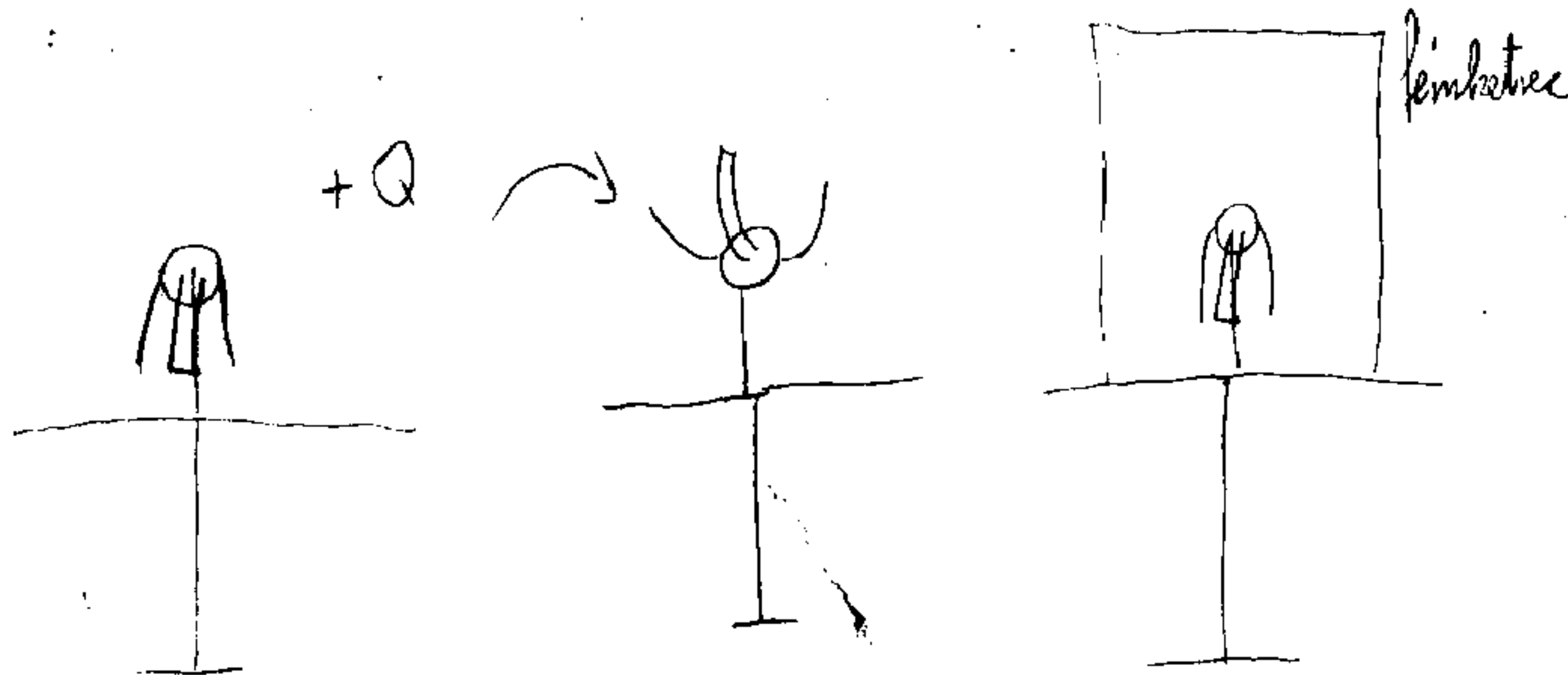
$$0 = \oint \underline{E} \cdot d\underline{r} = \underbrace{\int \underline{E} \cdot d\underline{r}}_{\text{anyag}} + \underbrace{\int \underline{E} \cdot d\underline{r}}_{\text{üreg}}$$

T.f.h.: $\underline{E} \neq \emptyset$ az üregben

$$\int \underline{E} \cdot d\underline{r} > 0$$

$\Rightarrow \underline{E}_{\text{üreg}} = 0$
ármijekolás

Trükklet:



$$\sigma(r) \quad |E^-| = |E^+| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d^2+r^2}$$

$$|E| = |E^-| \cos \varphi \cdot 2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d^2+r^2} \cdot 2 \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2+r^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Qd}{(d^2+r^2)^{3/2}}$$

"-Q"
tűkörtöltés

$$\sigma(r) \epsilon_0 E = - \epsilon_0 \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Qd}{(d^2+r^2)^{3/2}}$$

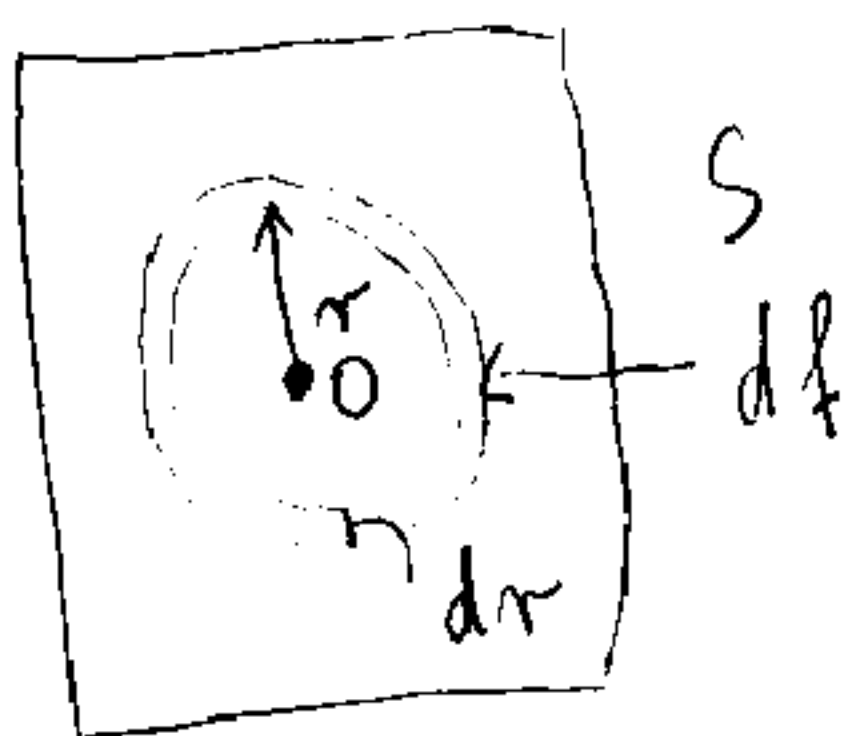
$$\int_S \sigma(r) d\ell = -Q$$

bizonyít

$$\int_S \sigma(r) d\ell =$$

$$T = \pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 2rdr + dr^2 - r^2) \approx$$

$$\approx 2\pi r dr$$



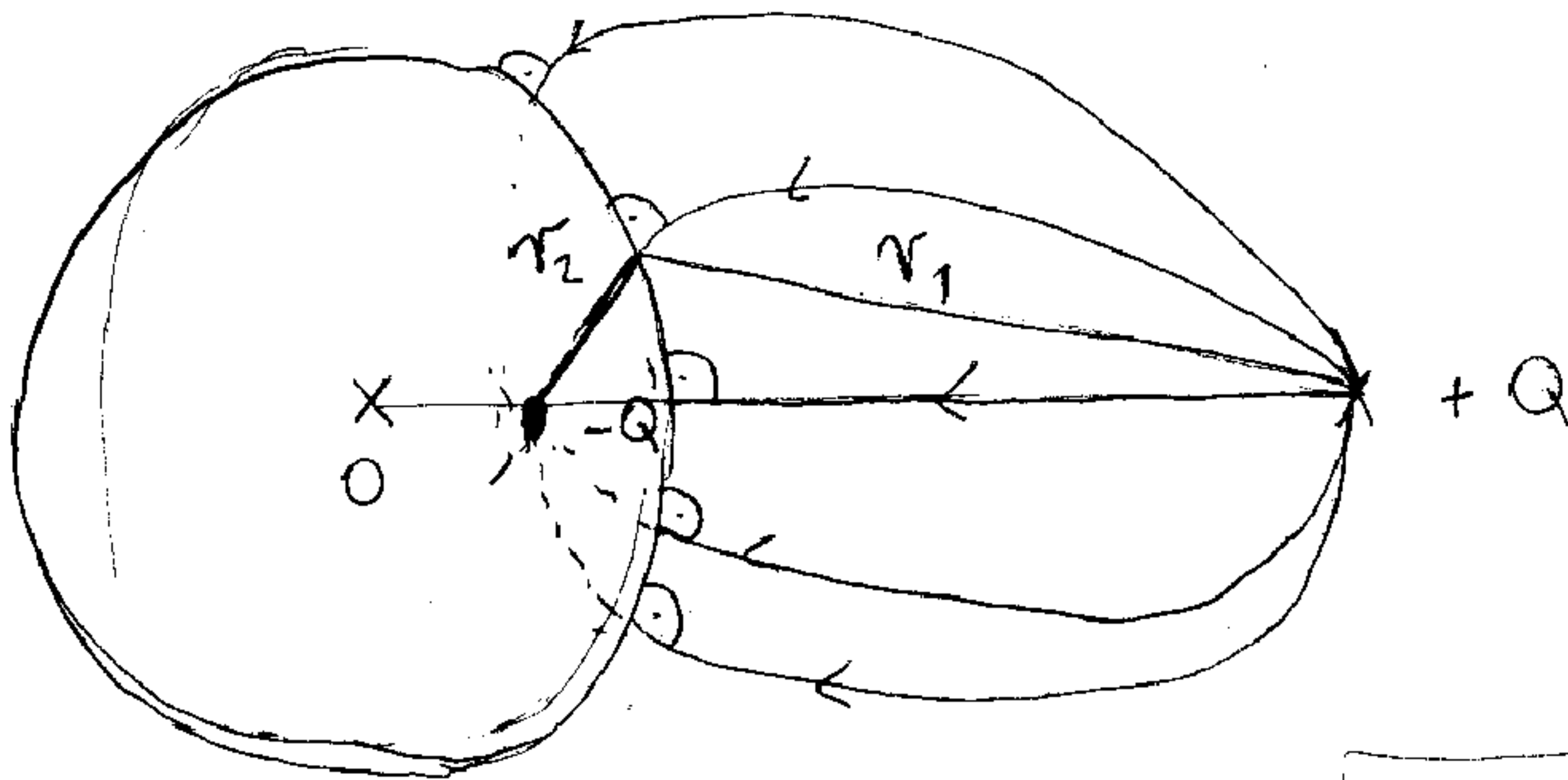
$$\int_S \sigma(r) df = \frac{1}{2\pi} Q d \int_0^\infty \frac{2\pi r dr}{(d^2 + r^2)^{3/2}} = -Q d \int_0^\infty \frac{r}{(d^2 + r^2)^{3/2}} dr \quad \text{⊖}$$

próba: $\left(\frac{1}{(d^2 + r^2)^{1/2}} \right)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2r}{(d^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{-r}{(d^2 + r^2)^{3/2}}$

$$\text{⊖} \quad Q d \frac{1}{(d^2 + r^2)^{1/2}} \Big|_0^\infty = Q d \left(\frac{1}{\underbrace{\infty}_0} - \frac{1}{d} \right) = -Q$$

S sik ponttöltéssel helyettesíthető - töltőtöltés

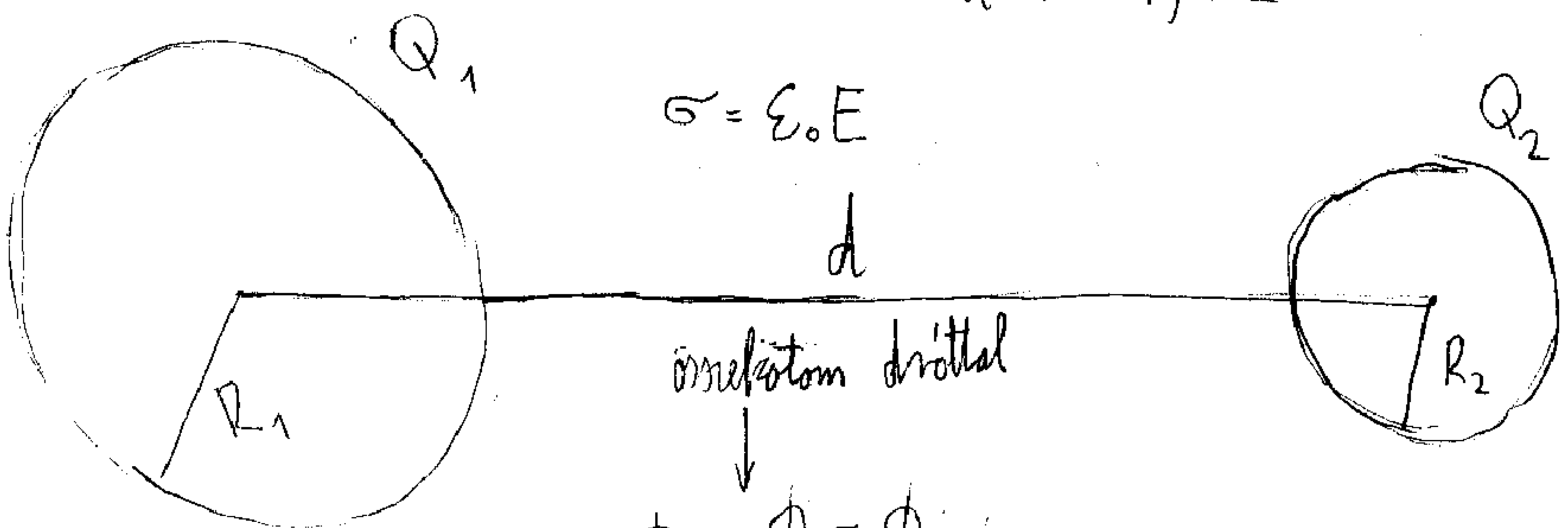
Pl.:



$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q'}{r_2} \right) = 0 \implies \boxed{\frac{Q'}{Q} = \frac{r_2}{r_1}} \quad \text{Appollóniusz gömb}$$

Csúshatás

$$d \gg R_1, R_2$$



$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{R_1}$$

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{R_2}$$

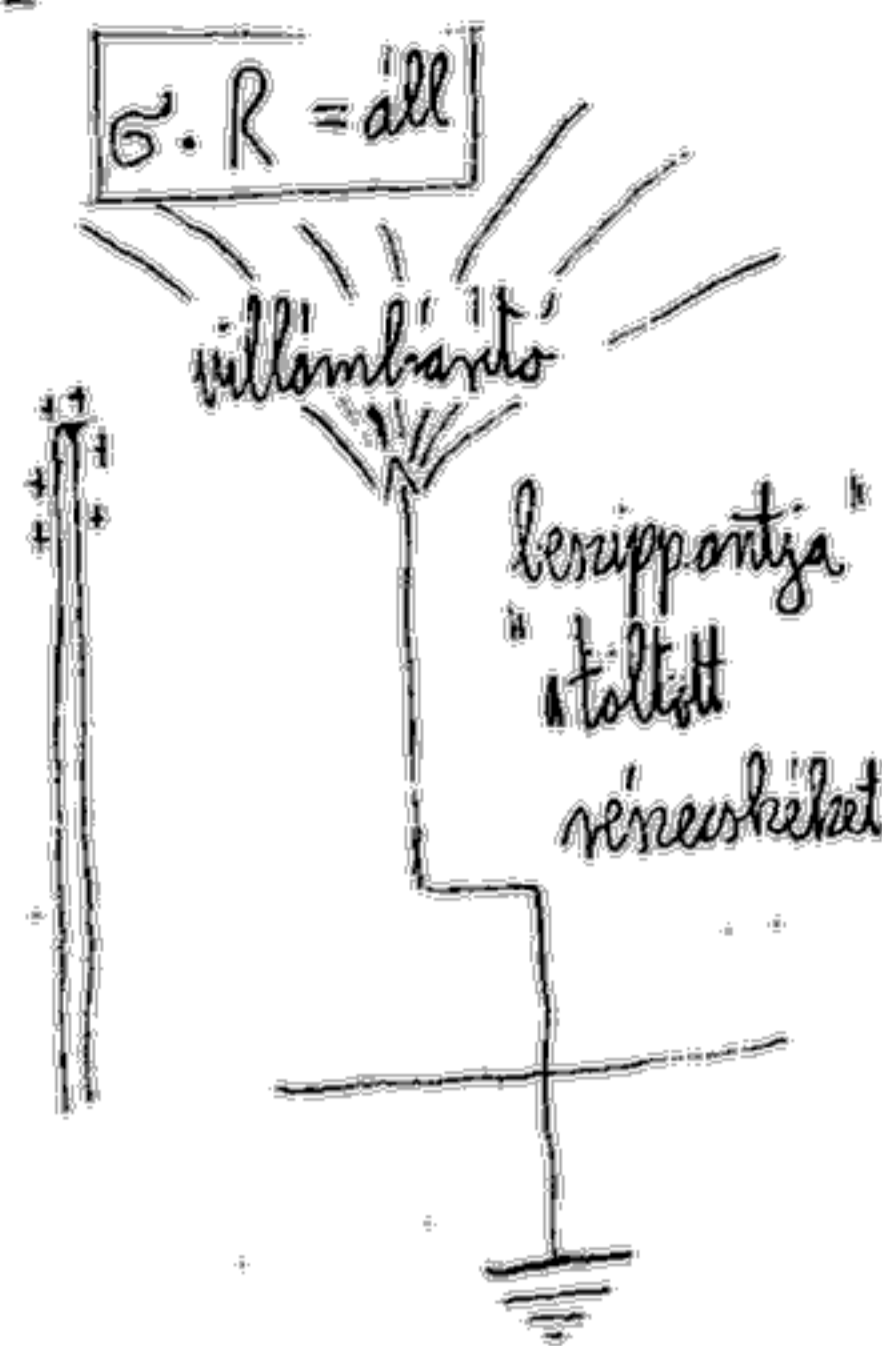
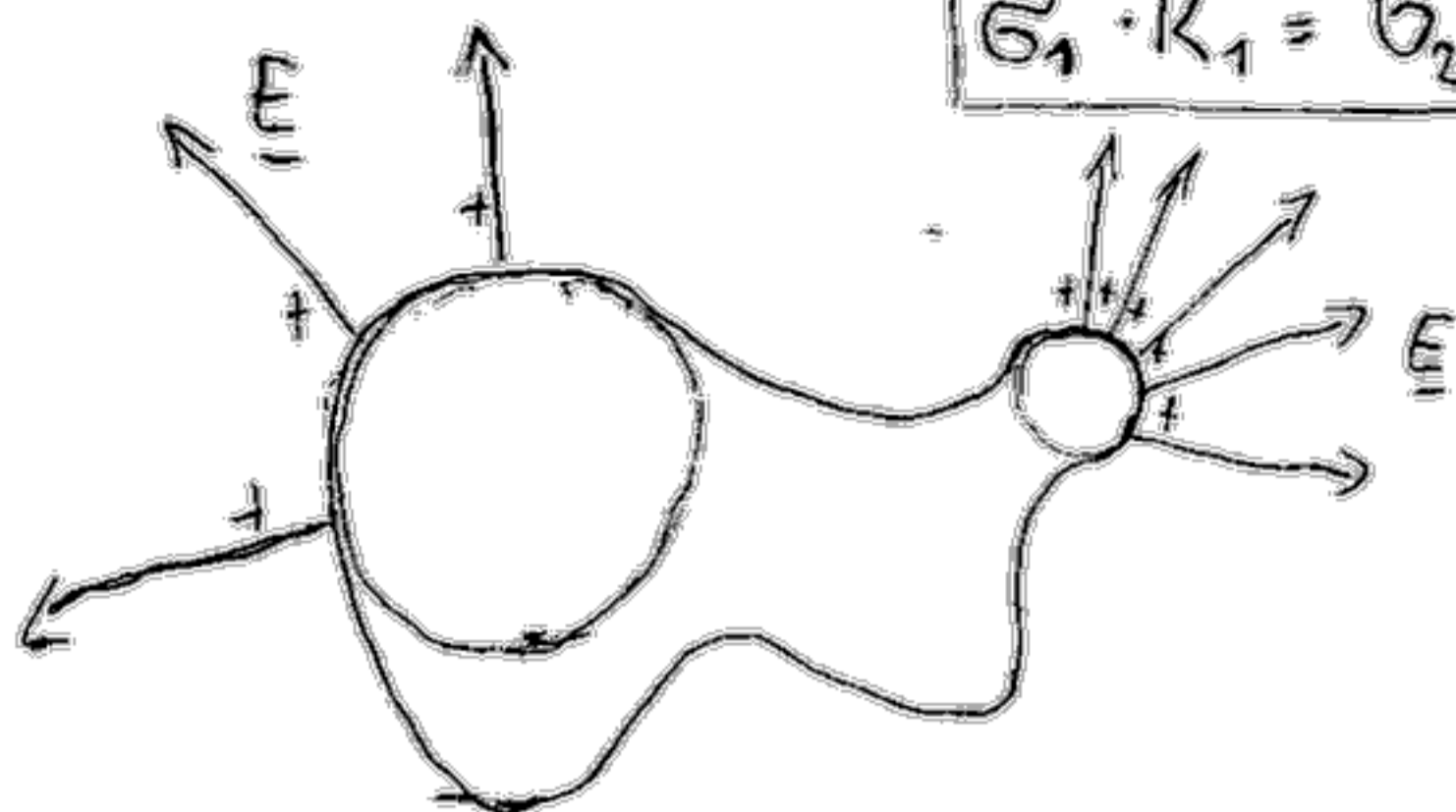
$$Q_1 = \sigma_1 \cdot 4\pi R_1^2$$

$$Q_2 = \sigma_2 \cdot 4\pi R_2^2$$

$$\frac{\sigma_1 \cdot 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{\sigma_2 \cdot 4\pi R_2^2}{R_2}$$

$$\sigma_1 \cdot R_1 = \sigma_2 R_2 = \text{áll}$$

$$\sigma \cdot R = \text{áll}$$

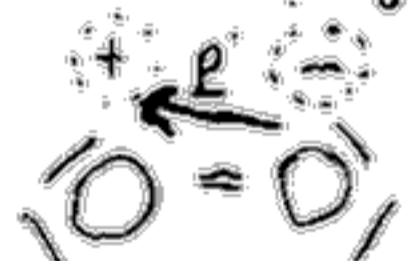


Ábrák:

töltés vonulása



polarizálódnak a levegő molekulái

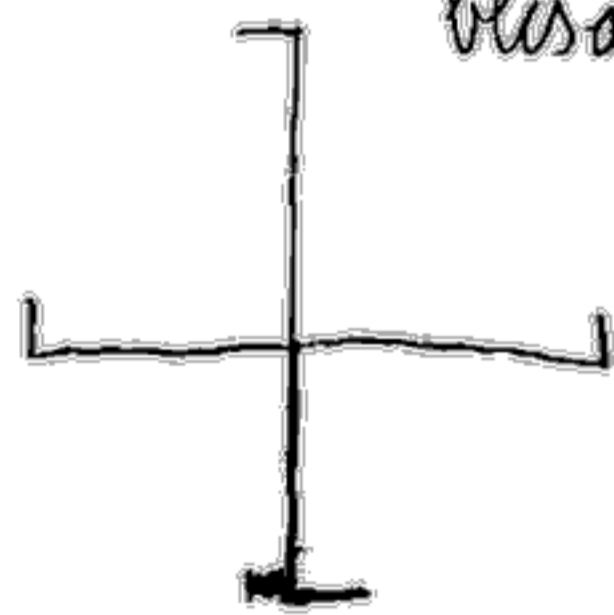


$$F \sim \frac{\partial E}{\partial x}$$

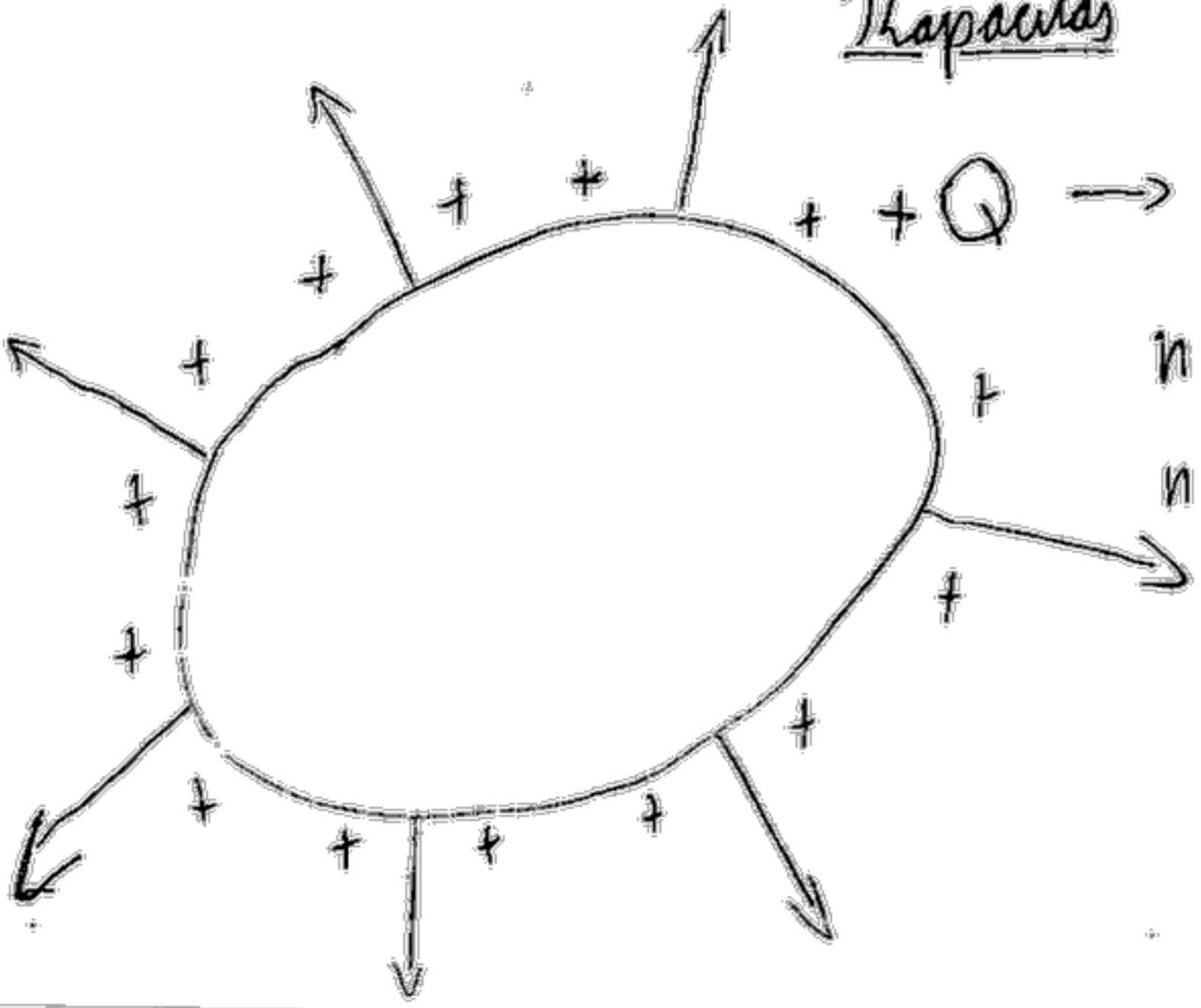
„beszívja” a molekulákat - hová? → rekombináció
ellőki → „szél”

Segner - kerék

beszálló részecskéket → impulzusátadás



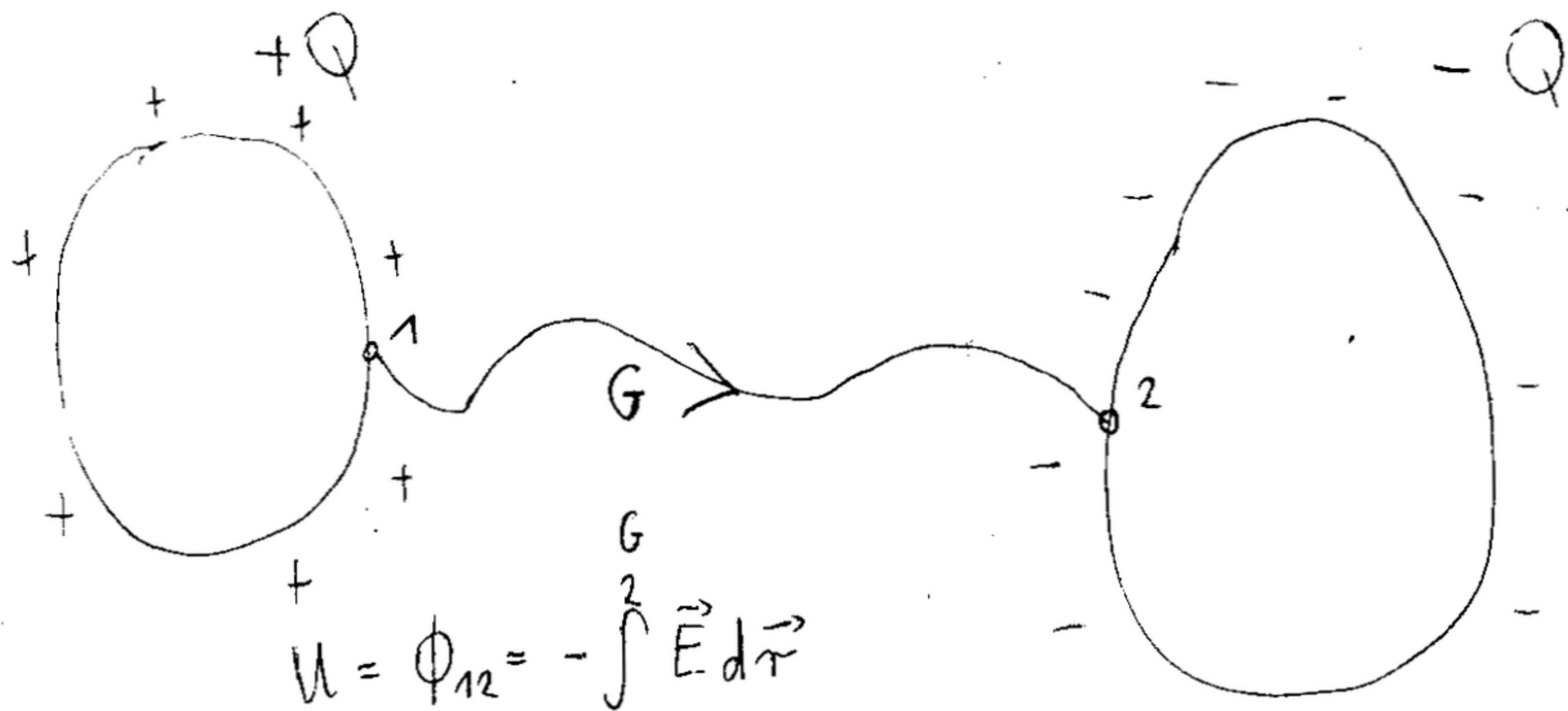
Kapacitás



$$+ Q \rightarrow \sigma \rightarrow E \rightarrow \phi$$

$$nQ \rightarrow n\sigma \rightarrow nE \rightarrow n\phi$$

n-szer annyi töltés



Mekkora a potenciálkülönbség?

Mindkettő ekvipotenciális \rightarrow mindegy hogy jelölöm ki 1-es és 2-es pontot. Gőzét is tetszőlegesen választhatom.

$Q \sim E$ geometriai tényező - arányossági tényező

$$f(\vec{r}) Q = \vec{E} \rightarrow - \int_1^2 \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - Q \underbrace{\int_1^2 f(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}_{\frac{1}{C}}$$

$C = \frac{|Q|}{U}$ kapacitás capacity "tárolóképeség"

Hét fémtestre felviszük töltést és megvizsgálom mekkora a feszültség a kettő között. A kettő hányadosa a kapacitás.

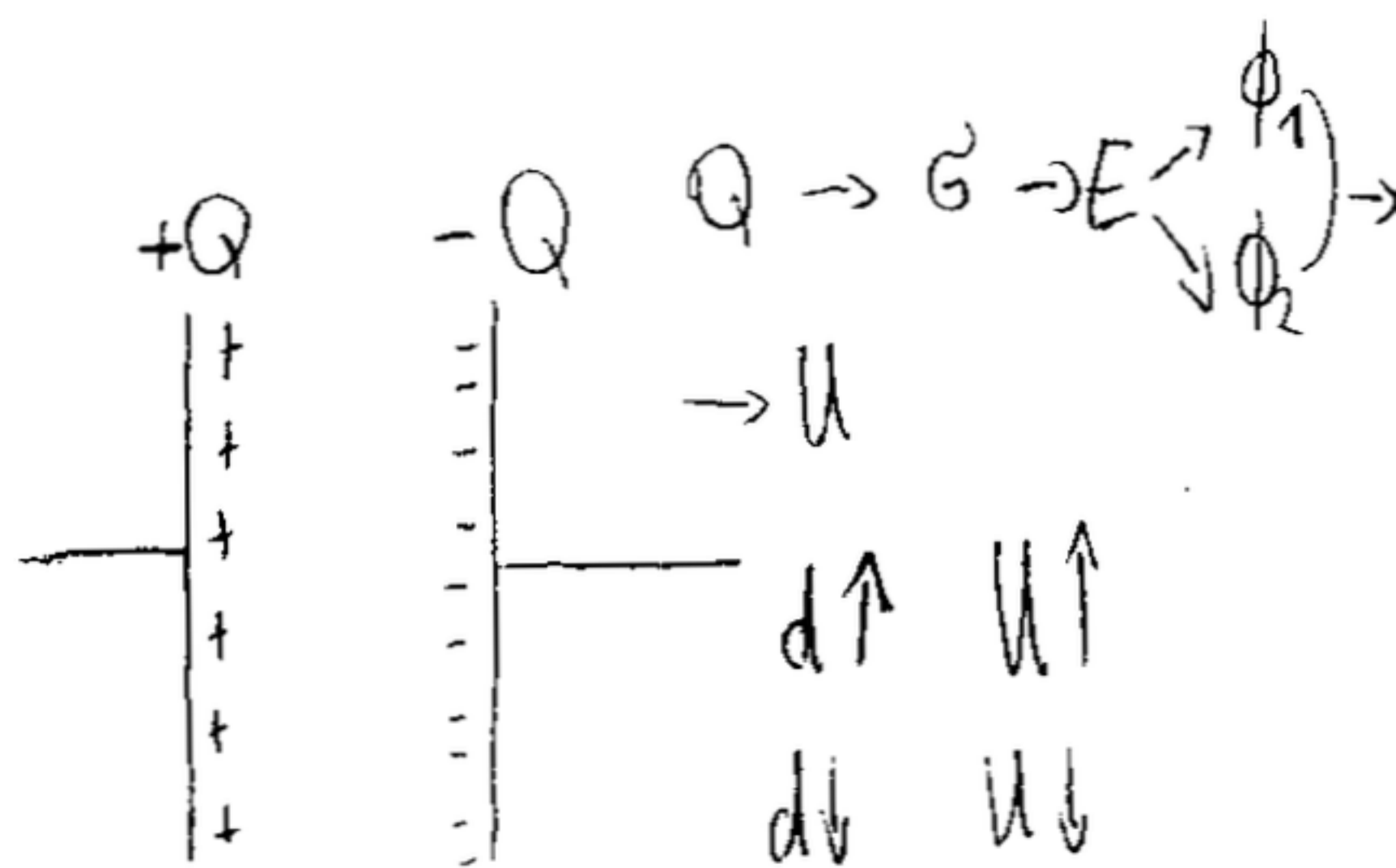
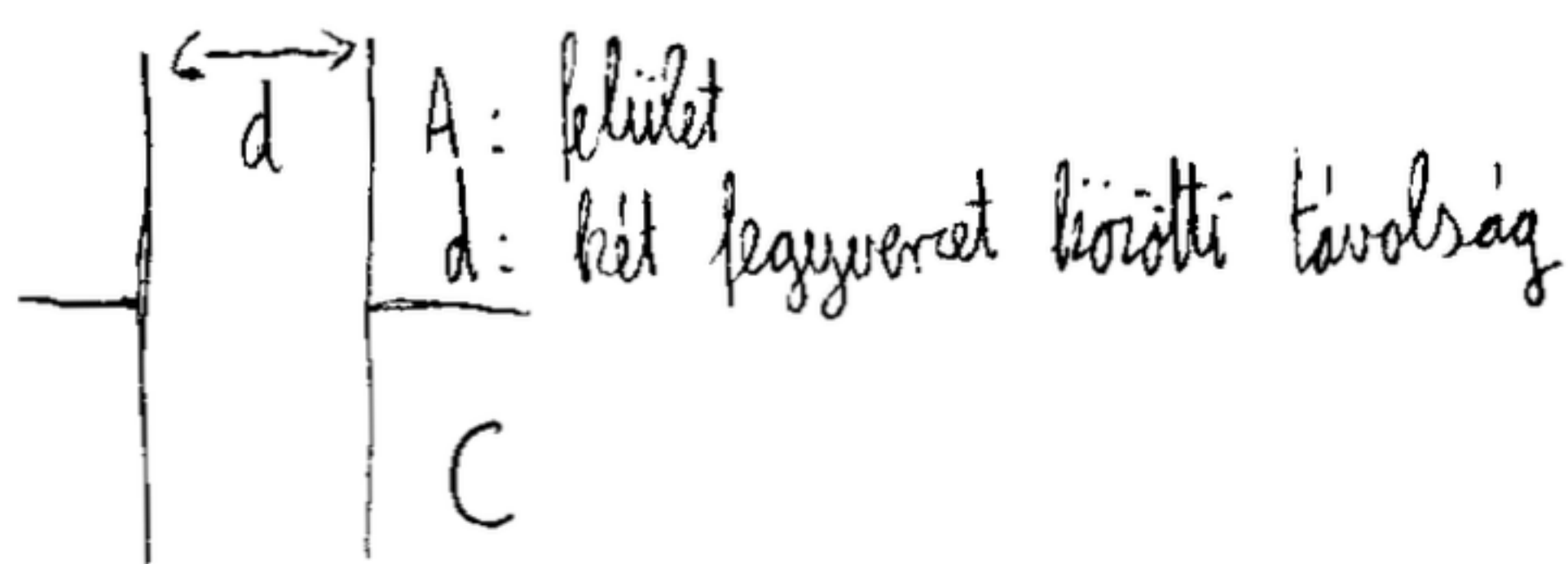
Kondenzátor - két fémtest a kondenzátor fegyveretei.

$[C] = \frac{C}{V} = F$ Faraday-ról elnevezve

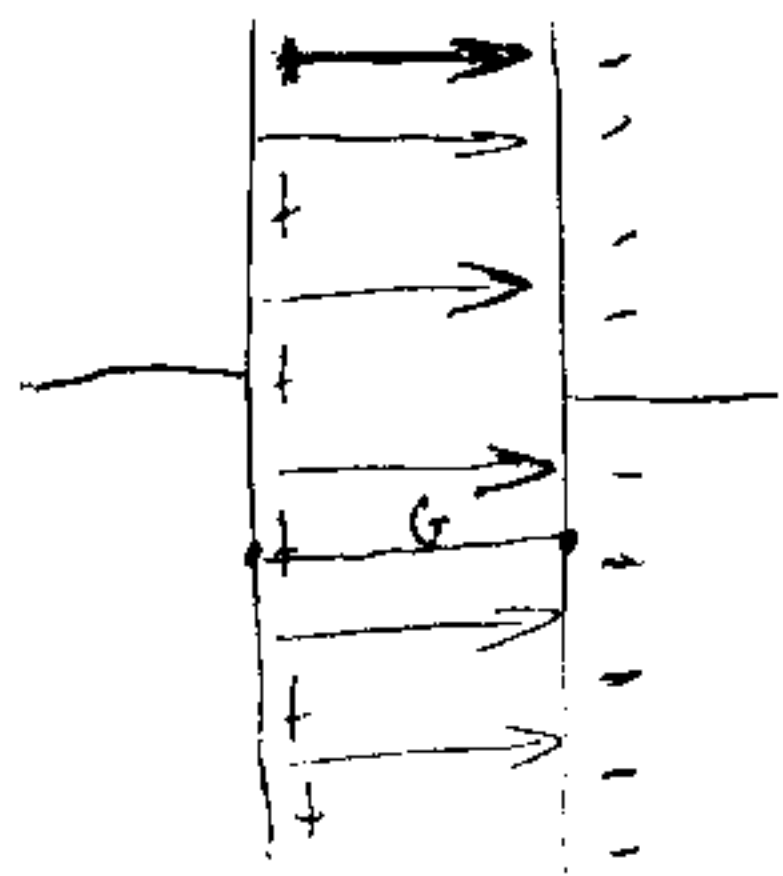
Michael Faraday (1791-1867)

kísérleti összerakás \rightarrow Maxwell

Síkkondenzátor



Síkkondenzátor prototípusa a homogén elektromos térnek



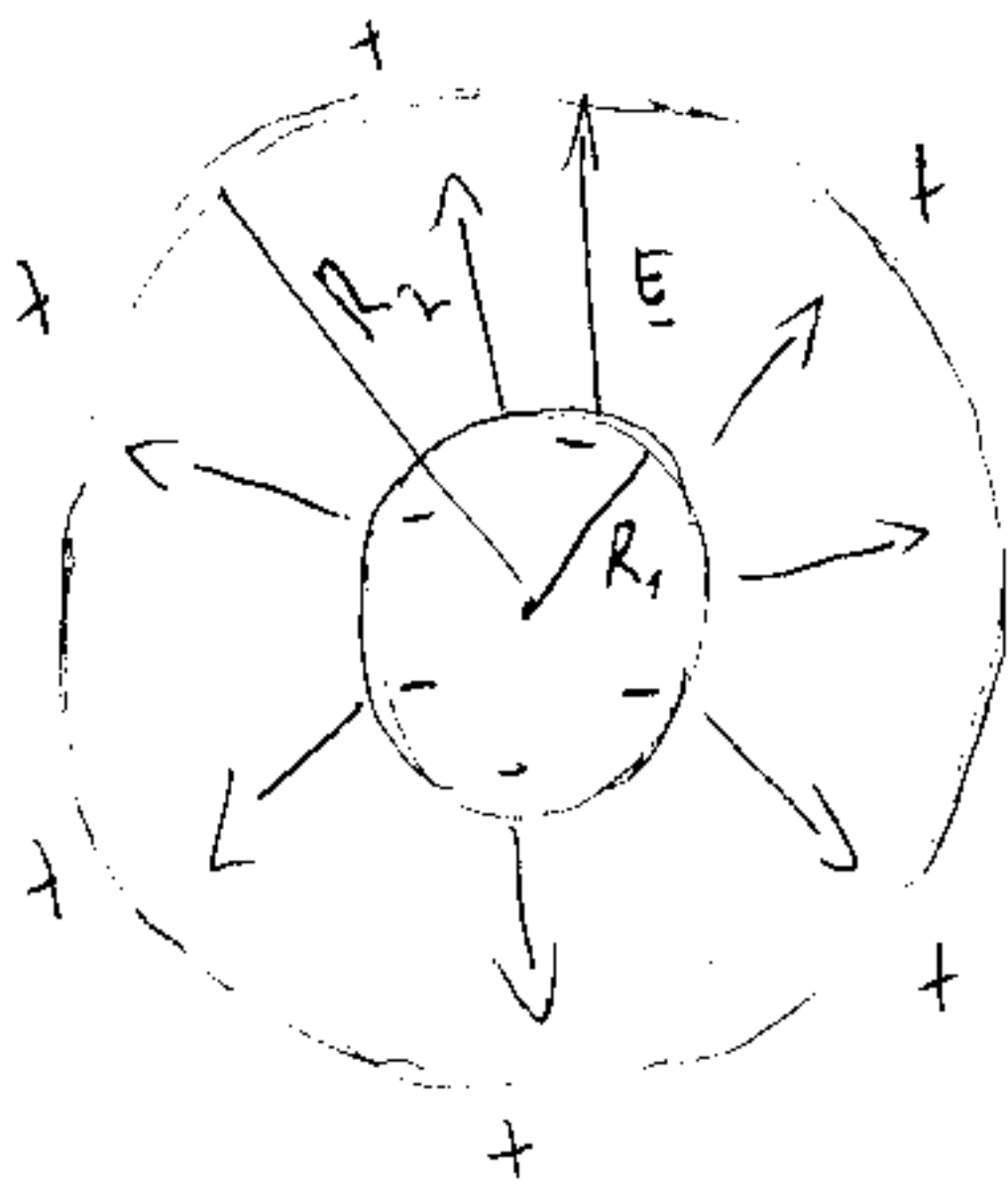
$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} \\ Q &= \int \sigma \, d\vec{f} = \sigma A \end{aligned} \right\} E = \frac{Q}{A \epsilon_0}$$

$$U = \int_1^2 \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{l} = E d$$

$$U = \frac{Q}{C}$$

$$U = E d = \frac{Q d}{A \epsilon_0} = \frac{1}{C} Q \rightarrow C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Hét legyeveset \rightarrow két koncentrikus kör



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \, d\vec{r} = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \, dr =$$

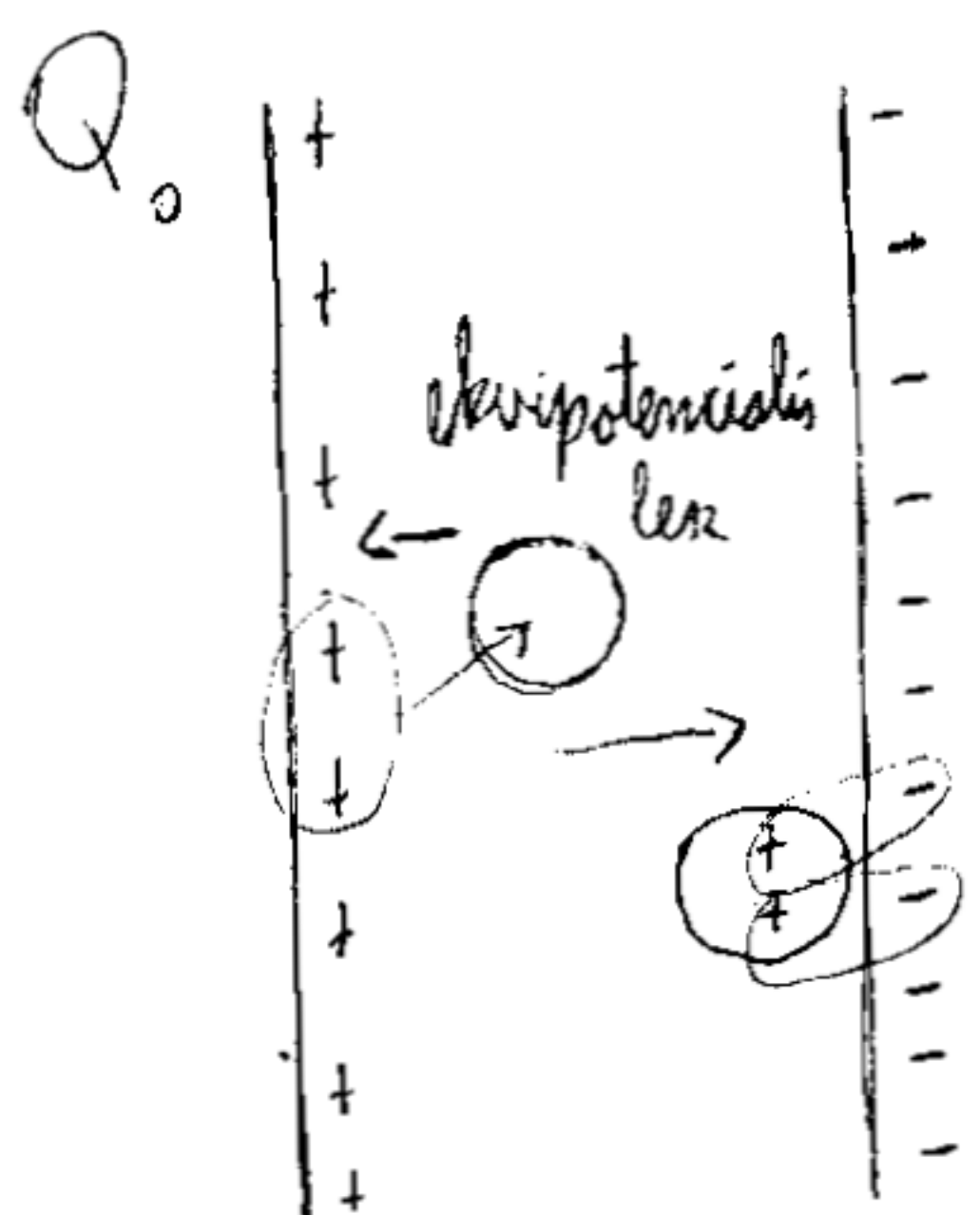
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{r} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$R_2 \rightarrow \infty \quad \frac{1}{C_{R_1}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1} \rightarrow C(R) = 4\pi\epsilon_0 R$$

magányos gömb kapacitása \rightarrow ha a másik legyeveset a végtelenben van

Kondenzátor energiája



labda kisíti a kondenzátort \rightarrow mekkora a munka?

$$Q_0 - dQ$$

$$dW = U dQ$$

$$dW = \frac{Q}{C} dQ$$

ennyi munkát kell befektetni ahhoz, hogy kondenzátoron $+Q - -Q$ töltés legyen.

$$U = W = \int dW = \frac{1}{C} \int_0^{Q_0} Q dQ = \frac{Q_0^2}{2C}$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U$$

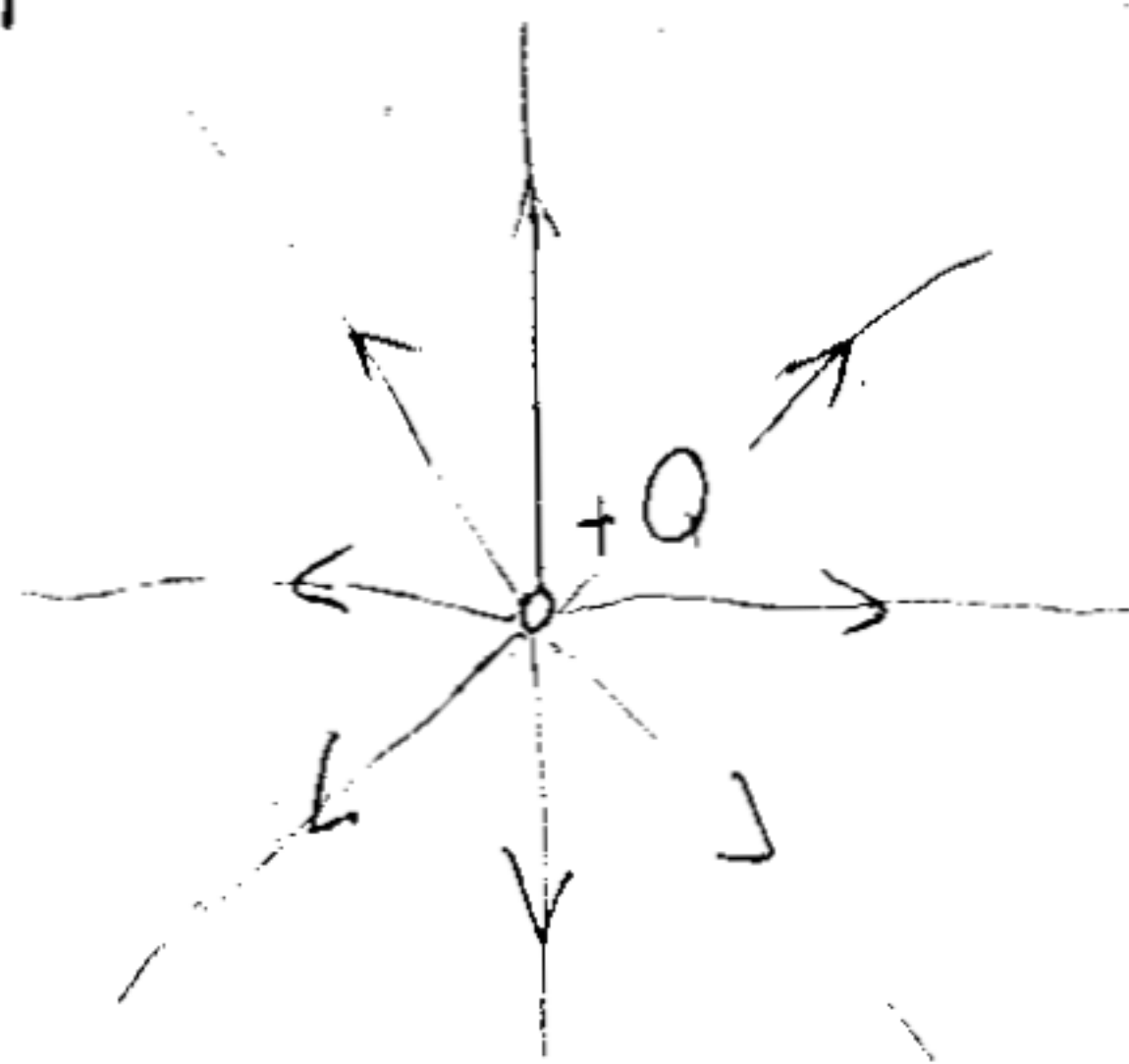
Ennyi munkát tárol a kondenzátor.

$$U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} U^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} \int_{\text{bizott térfogat, ahol van térerősség}} E^2 dV$$

$$u := \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \text{energiasűrűség - nem csak kondenzátorra alkalmazható!}$$

$$U = \int u dV = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(r) dV$$

Pl: ponttöltés energiája



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

világesszöglet

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \right)^2 dV =$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \frac{1 \cdot Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2} \int \frac{1}{r^4} dV \quad \text{⊖}$$

infinitesimalis egység: gömbhéj

$$dV = V_{r+dr} - V_r = \frac{4\pi}{3} [(r+dr)^3 - r^3] =$$

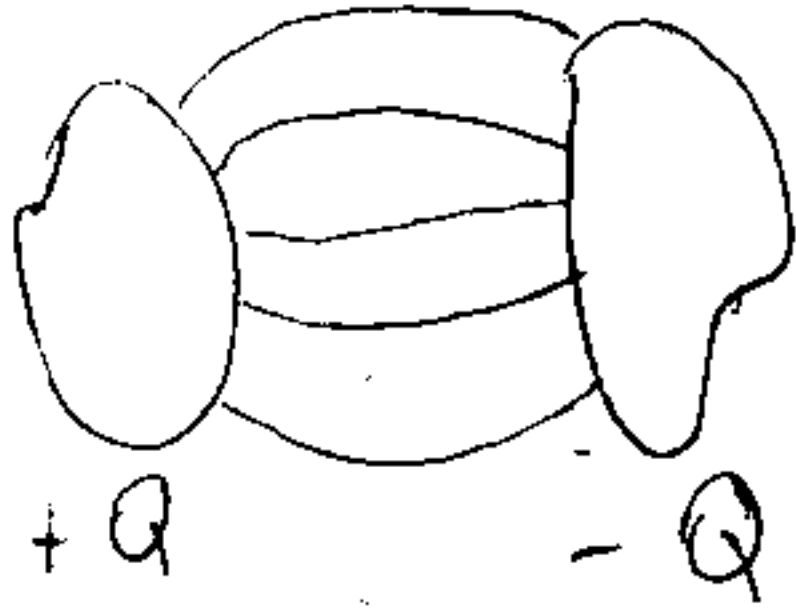
$$= \frac{4\pi}{3} [r^3 + 3r^2 dr + 3r dr^2 + dr^3 - r^3] = 4\pi r^2 dr$$

$$\text{⊖} \quad \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2} \int_0^\infty \frac{1}{r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \int_0^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_0^\infty =$$

$$\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\infty} - \underbrace{\left(-\frac{1}{0}\right)}_{+\infty} \right) = +\infty \quad \text{Nem lehet} \rightarrow \text{nincs ponttöltés}$$

R_e : klasszikus elektron sugár $\rightarrow \int_{R_e}^{\infty} \rightarrow U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R_e}$

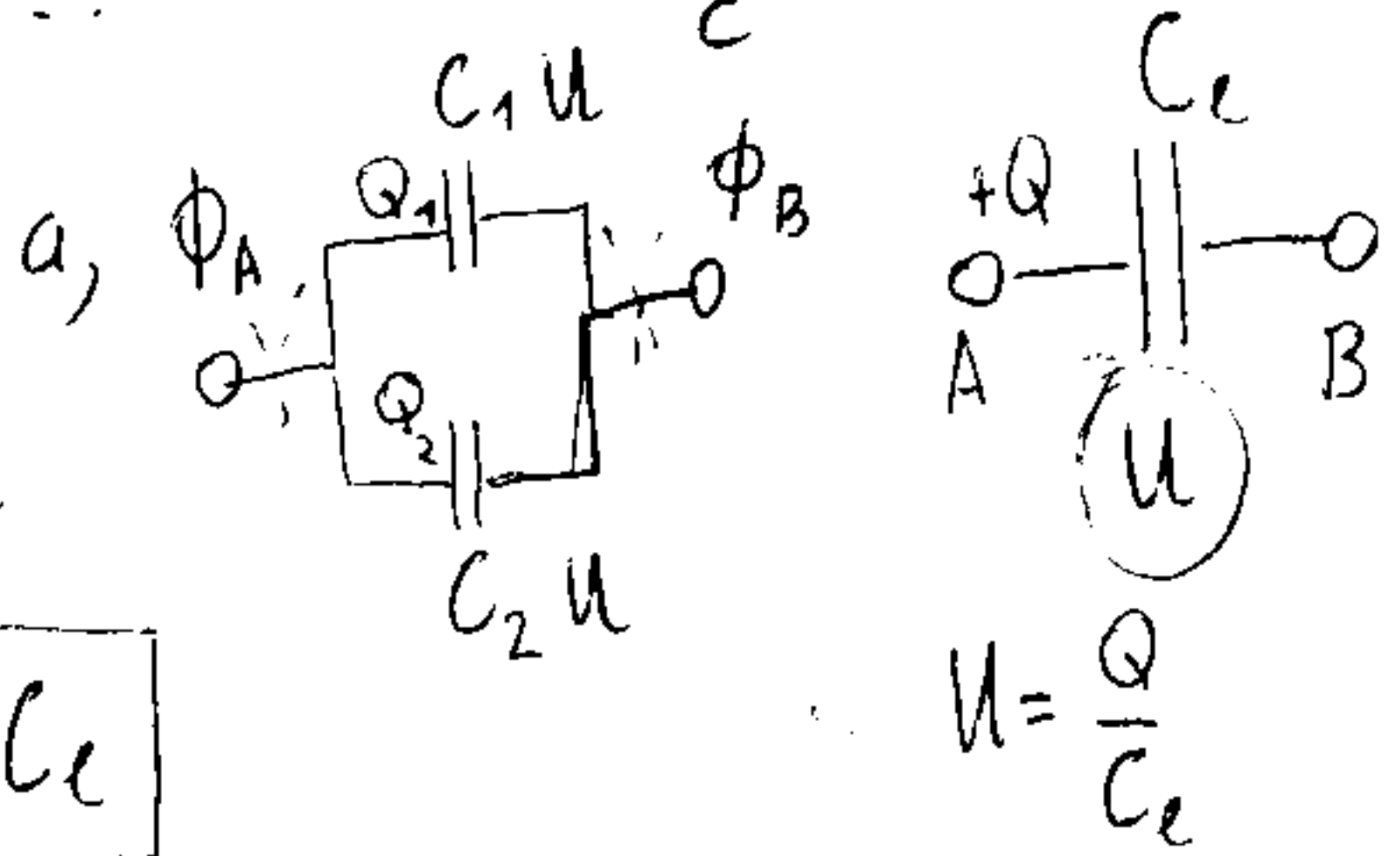
Emlékérték:



$$\Phi_{12} = U = Q \int_1^2 f(r) dr \equiv \frac{1}{C}$$



kondenzátor áramköri rajza



$$Q_1 + Q_2 = Q \rightarrow C_1 U + C_2 U = C_e U$$

$$U = \frac{Q_1}{C_1}$$

$$U = \frac{Q_2}{C_2}$$

$$C_1 + C_2 = C_e$$

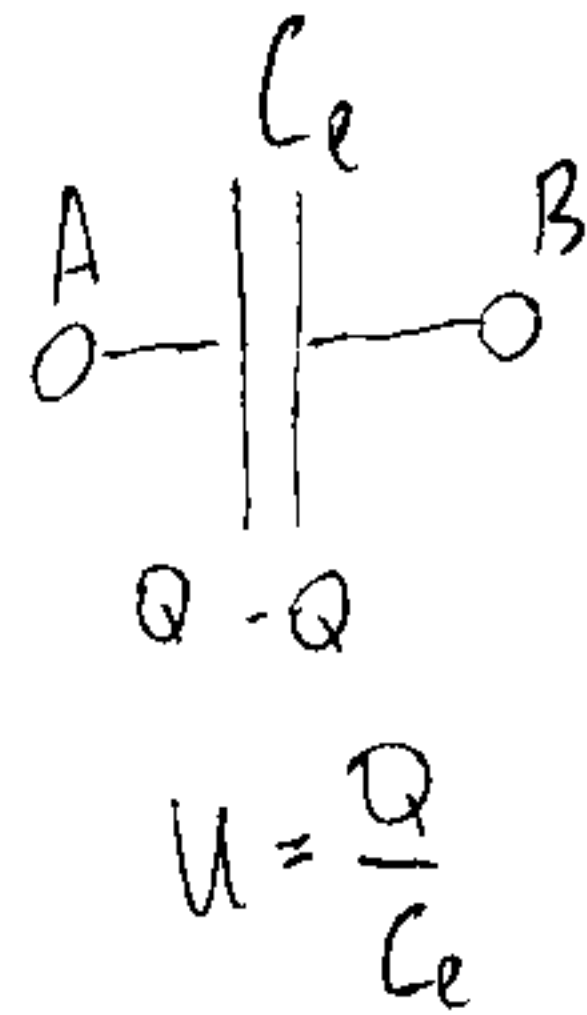
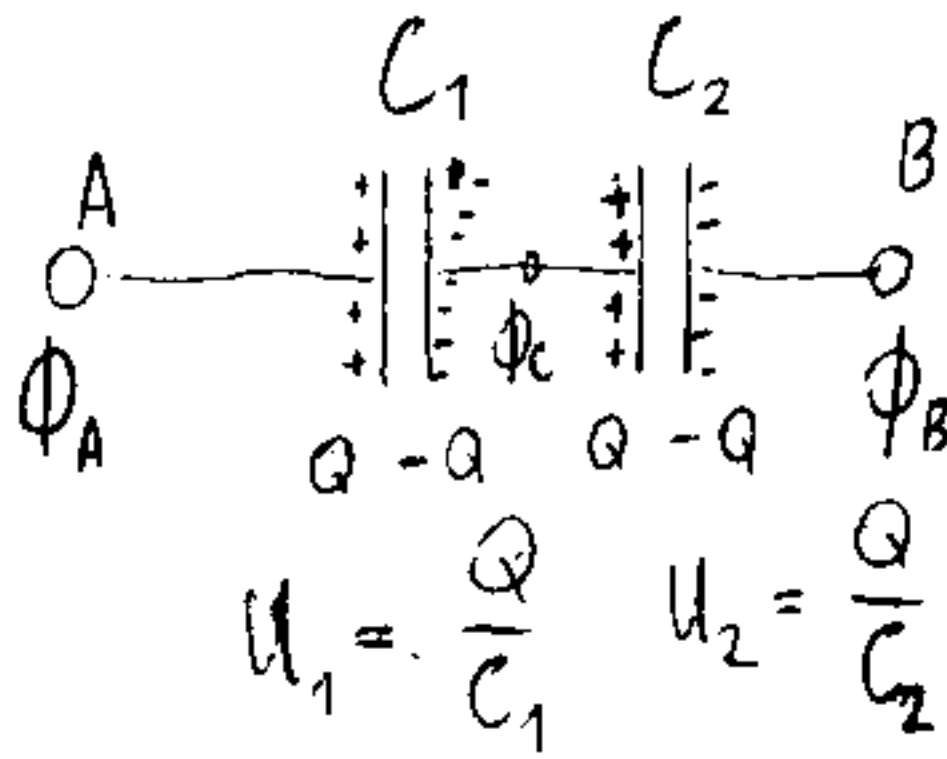
$$U = \frac{Q}{C_e}$$

Párhuzamos kapcsolás esetén

$$C_e = \sum_i C_i$$

Péssűs kondenzátor $\rightarrow \Delta A \rightarrow \Delta C$

Soros kapcsolás esetén



$$U_1 + U_2 = U$$

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} \quad U_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$\int_{C_1} E dr - \int_{C_2} E dr$$

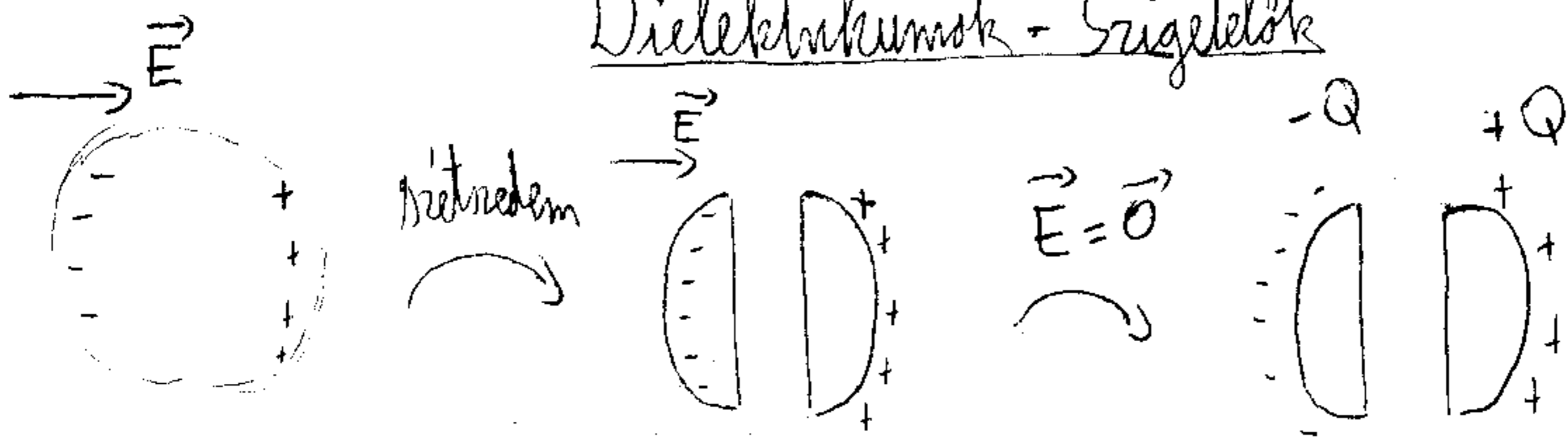
$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_e}$$

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_e}$$

$$\frac{1}{C_e} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

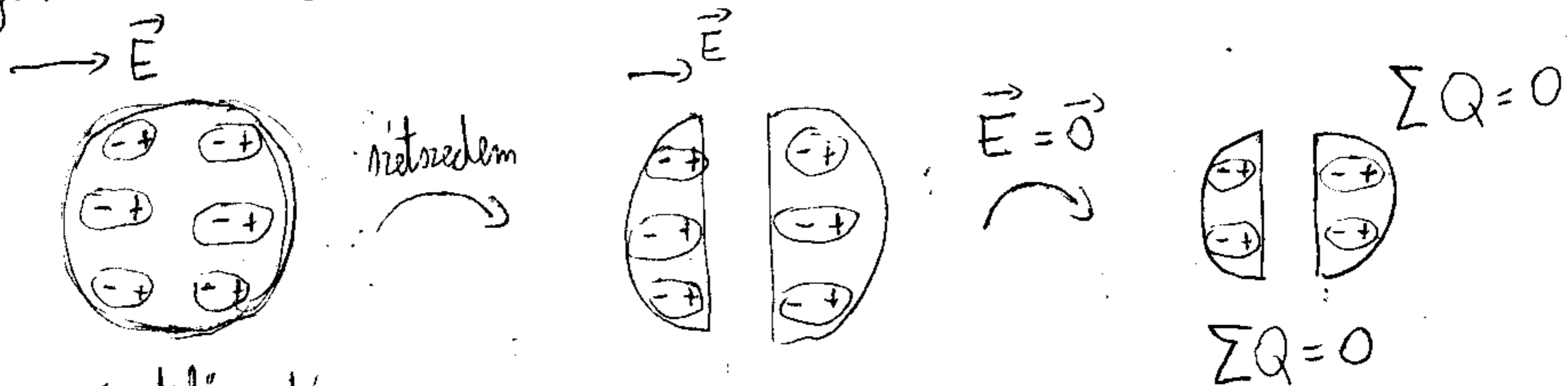


Dielektrikumok - Szigetelők



ism. esetén

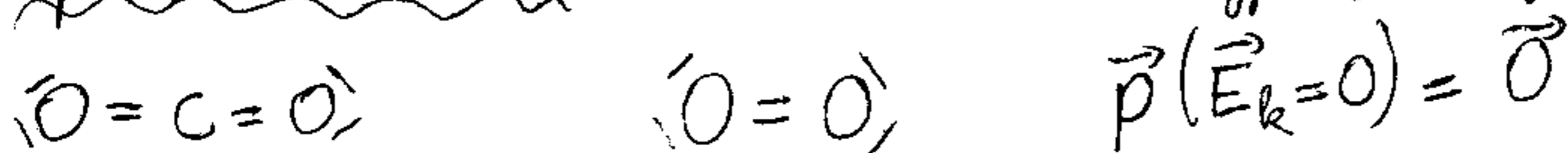
szigetelőben nincsenek szabad töltések



szigetelő esetén

$\vec{E}_k \rightarrow \vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_k$; inhomog. tér esetén: $(F_a \approx p \frac{\partial E}{\partial r})$ dipolus esetén

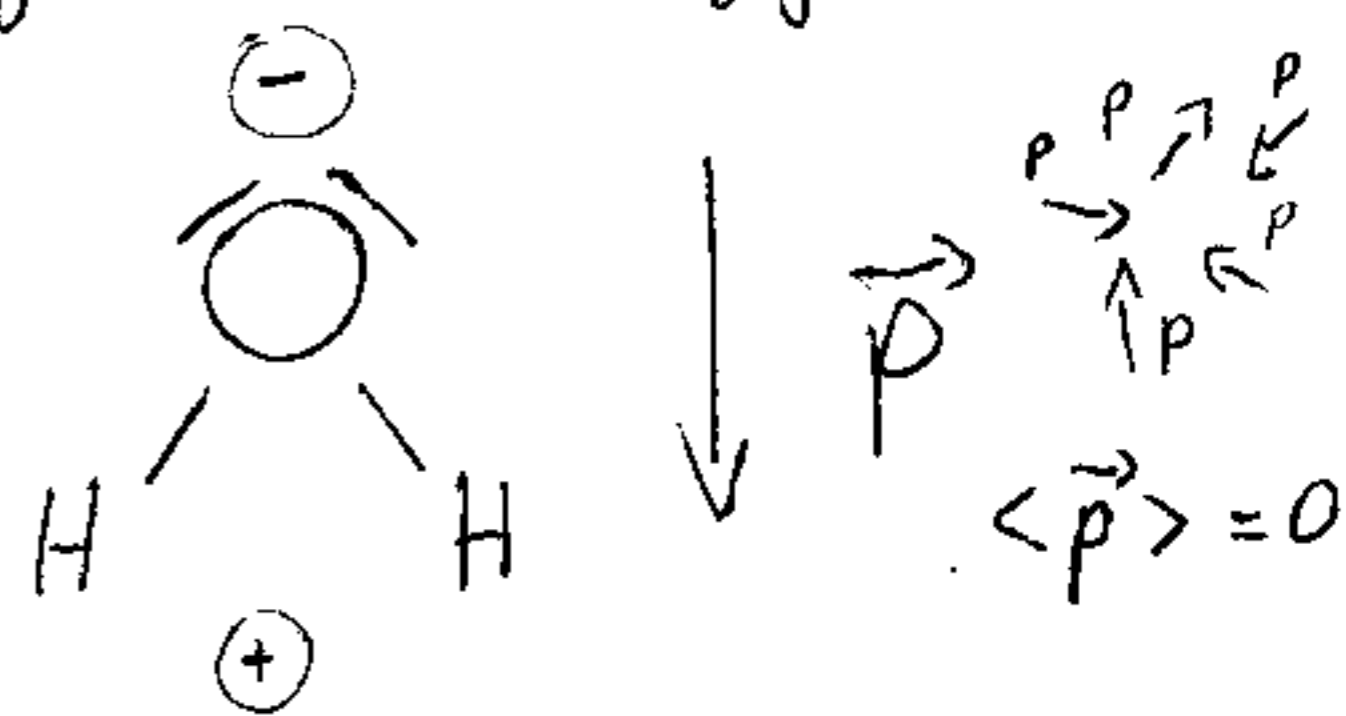
apoláros molekula: \oplus és \ominus töltés súlypontja egybeesik.



$|N \equiv N|$

poláros molekula: \oplus és \ominus töltés súlypontja nem esik egybe

$\vec{p}(\vec{E}_k=0) \neq 0$

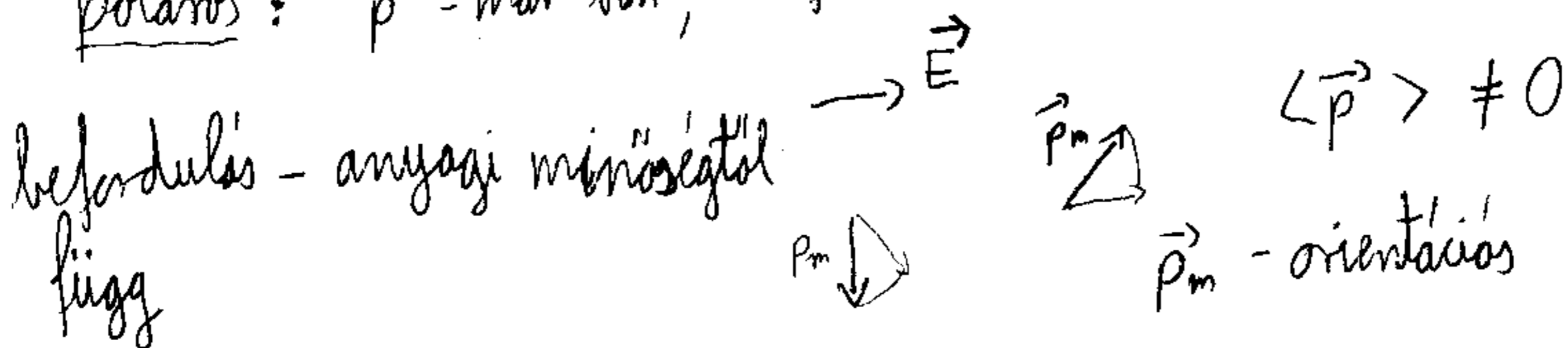


rácsban kötött molekulák

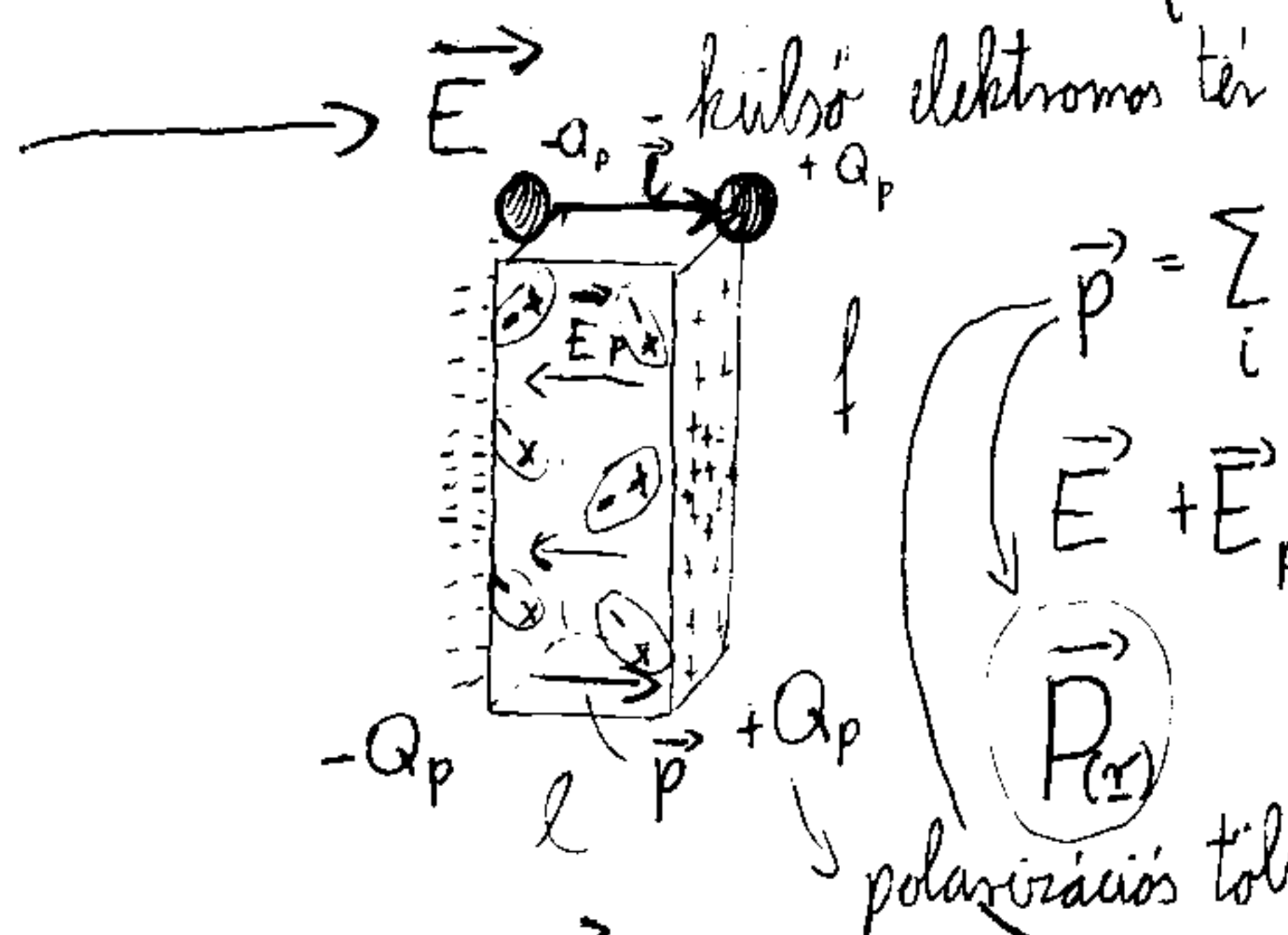
behelyezünk a molekulát egy elektromos térbe:

apoláros: \vec{p} - indukált dipólmomentum - tér hova létre; kismértékben áll be a tér irányába

poláros: \vec{p} - már van, befordul a tér irányába kismértékben



\vec{P} : polarizációs vektor $:= \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{P}_i$ $[\vec{P}] = \frac{Q}{m^2}$



$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i$

\vec{E}_p : polarizációs térerősség
dipolusok közötti létre

$\vec{E} + \vec{E}_p \neq 0$

helyettesítem az anyagdarabot
egy dipóllal

polarizációs töltés

$\vec{P}_d = Q_p \cdot \vec{l}$

$\vec{P} \cdot \vec{l} \cdot f = Q_p \cdot \vec{l}$

$\vec{P} (\vec{l} \cdot \vec{f}) = Q_p \cdot \vec{l}$

$\vec{P} \vec{f} = Q_p \quad | : |\vec{f}|$

$\vec{P} = \vec{P}_d$

$\vec{P} \Delta V = \vec{P}_d$

$\vec{P} \cdot \vec{n} = \frac{Q_p}{|\vec{f}|} = \sigma_p \rightarrow \boxed{P_n = \sigma_p}$



polarizációs vektor felületelem ~~normálisára~~
normalisára vett vetülete

lombok esetén: $\sigma = \epsilon_0 |\vec{E}(\vec{r})|$ $E_p = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} = \frac{P_n}{\epsilon_0}$

$\vec{E}_p = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}$

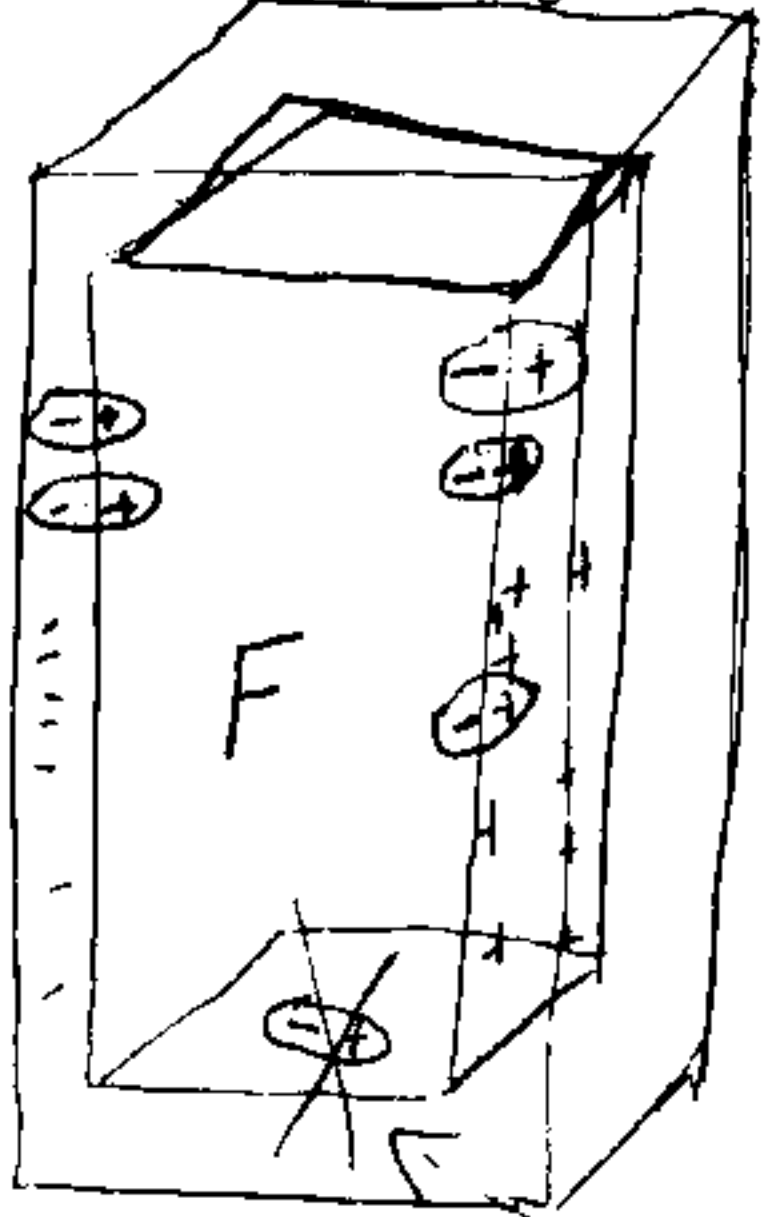
hét indukált mennyiség

ΔV térfogatra $\left\{ \begin{array}{l} \text{szabad töltések - mi visszük bele} \\ \text{polarizációs töltés} \end{array} \right.$

$\oint_F \vec{E} d\vec{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i$

$Q = Q_{szabad} + Q_p$

$\oint_F \vec{E} d\vec{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_{i,szab} + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_{i,p}$



$\sum_i Q_{i,p} = \int \sigma_p \cdot d\vec{f} = \int P_n \cdot d\vec{f} = \int \vec{P} \cdot d\vec{f}$

felületen lévő polarizációs töltések } felületen belül $-\sum_i Q_{i,p} = -\int \vec{P} d\vec{f}$

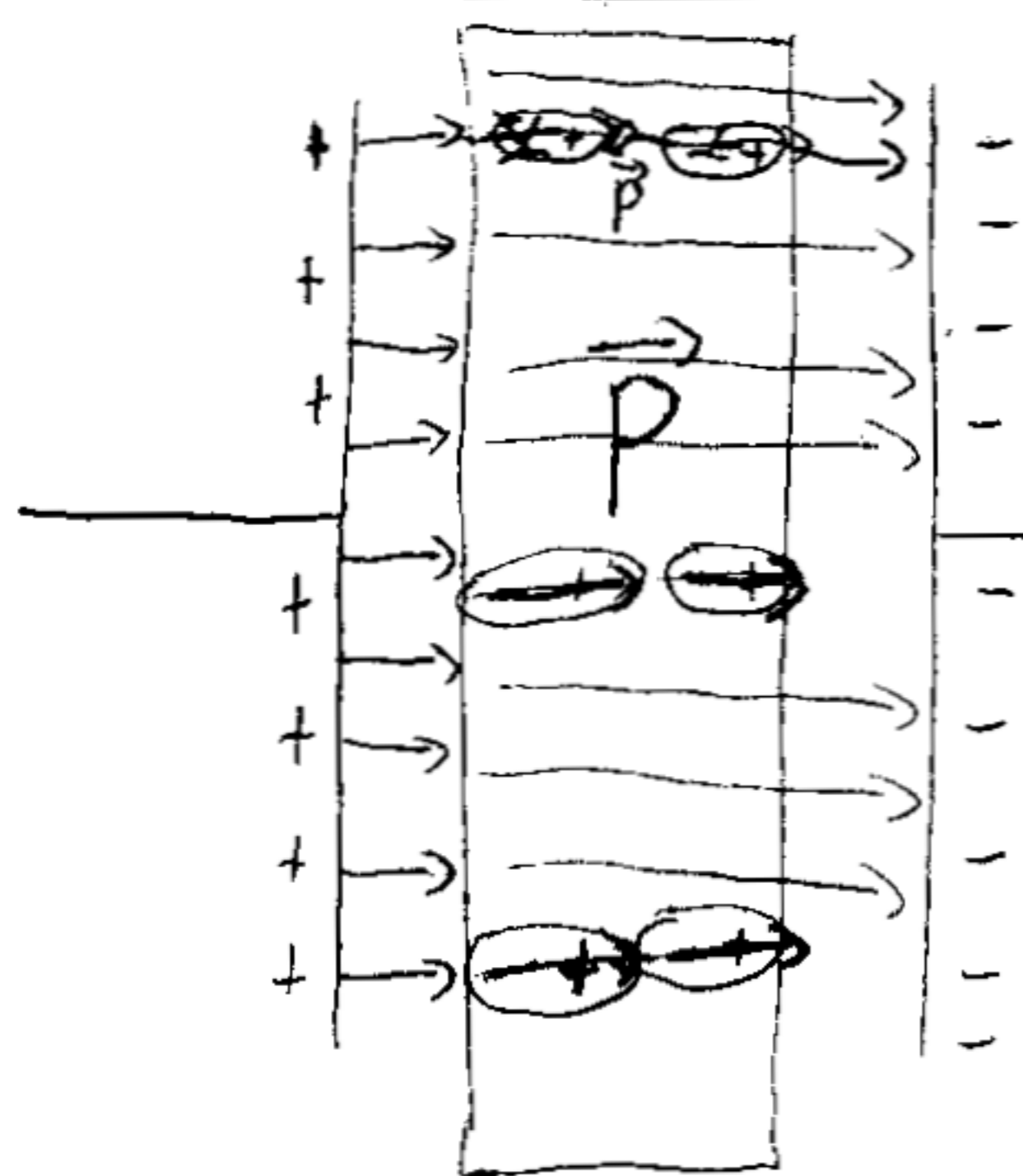
$\Rightarrow \oint_F \vec{E} d\vec{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_{i,szab} - \frac{1}{\epsilon_0} \oint \vec{P} d\vec{f}$
+4 lapra vett járuléka
felületet bezártam ≈ 0

$$\oint_F (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{f} = \sum_i Q_{i, \text{szab}} \quad [\vec{D}] = \frac{C}{m^2} = [\vec{P}]$$

\vec{D} : elektromos eltolás vektor

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{f} = \int_V \rho_{sz} dV$$

Gauss-törvény dielektrikumokra



bizonyos erővonalak dipólokban végződnek és bizonyos erővonalak dipólokból indulnak

$$E_{\text{dielek}} < E$$

anyagban térerősség kisebb

$$\vec{P}_{\text{vakuum}} = \vec{0}$$

dielektrikum

$$\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

dielektrikumokban is igaz

$$|\vec{E}| \xrightarrow{?} |\vec{P}|$$

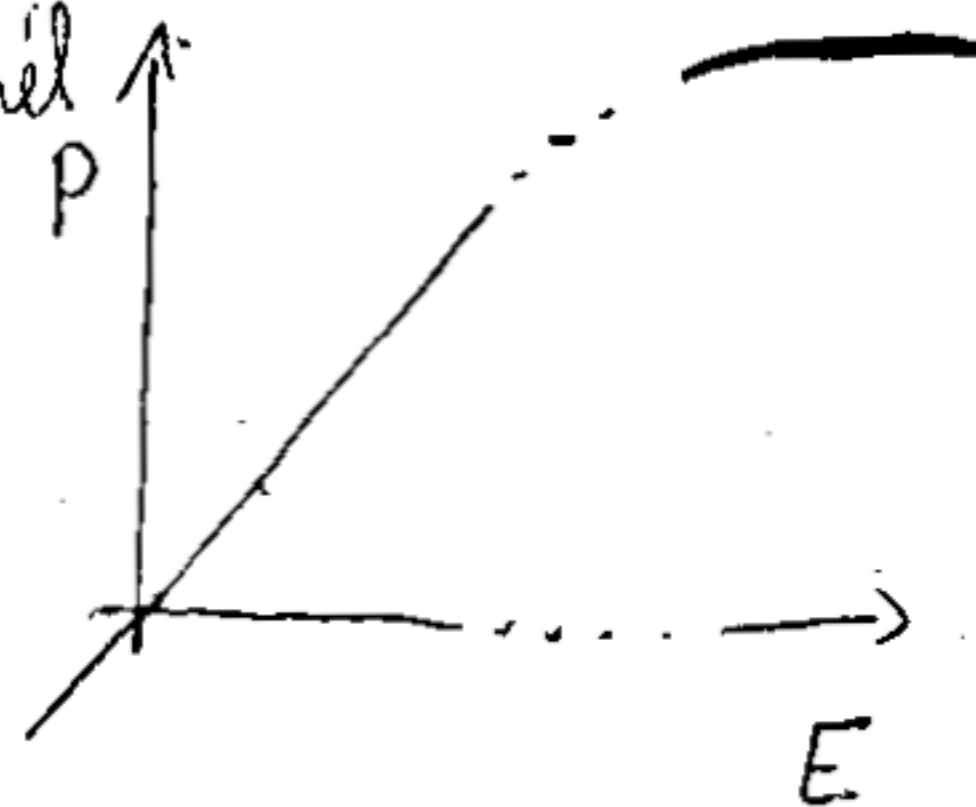
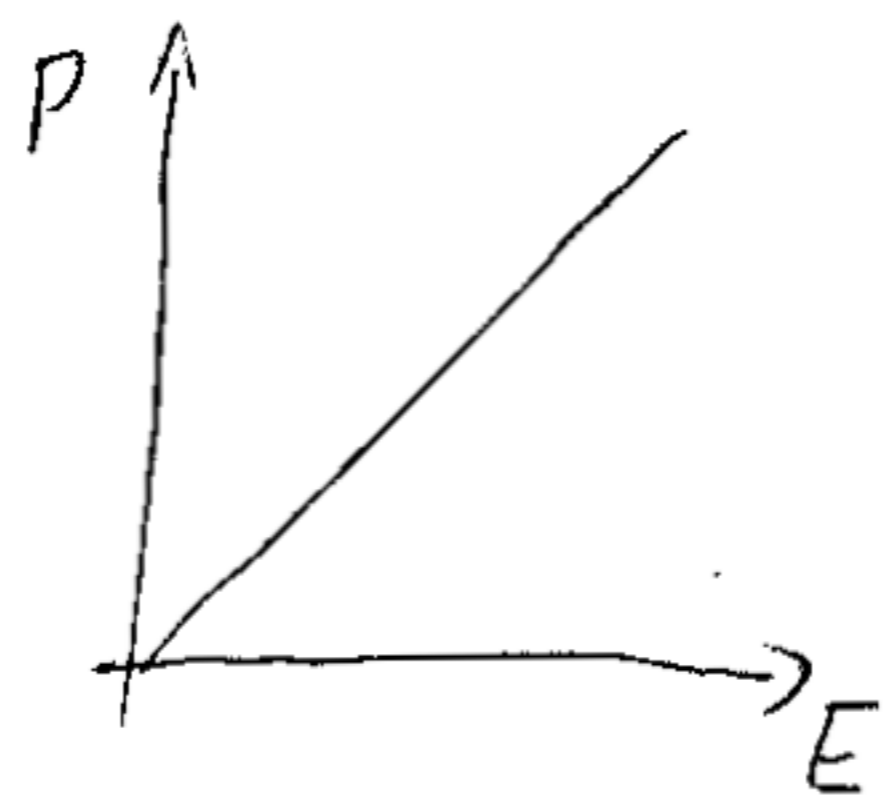
csak mérni lehet

$$\vec{P} \sim \vec{E}$$

anyagok többségénél

nagy tereknél

$$\vec{P} \sim \epsilon_0 \vec{E}$$



$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

χ : elektromos susceptibilitás kísérleti eredmény

$$\vec{E}_p = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} = -\frac{1}{\epsilon_0} \epsilon_0 \chi \vec{E} \rightarrow \vec{E}_p = -\chi \vec{E}$$

dielektrikum

χ

levegő

~~1,00054~~

$5,4 \cdot 10^{-4}$

$\epsilon = 1,00054$

papír

3-5

vakuum

$\epsilon = 1$

$\chi = 0$

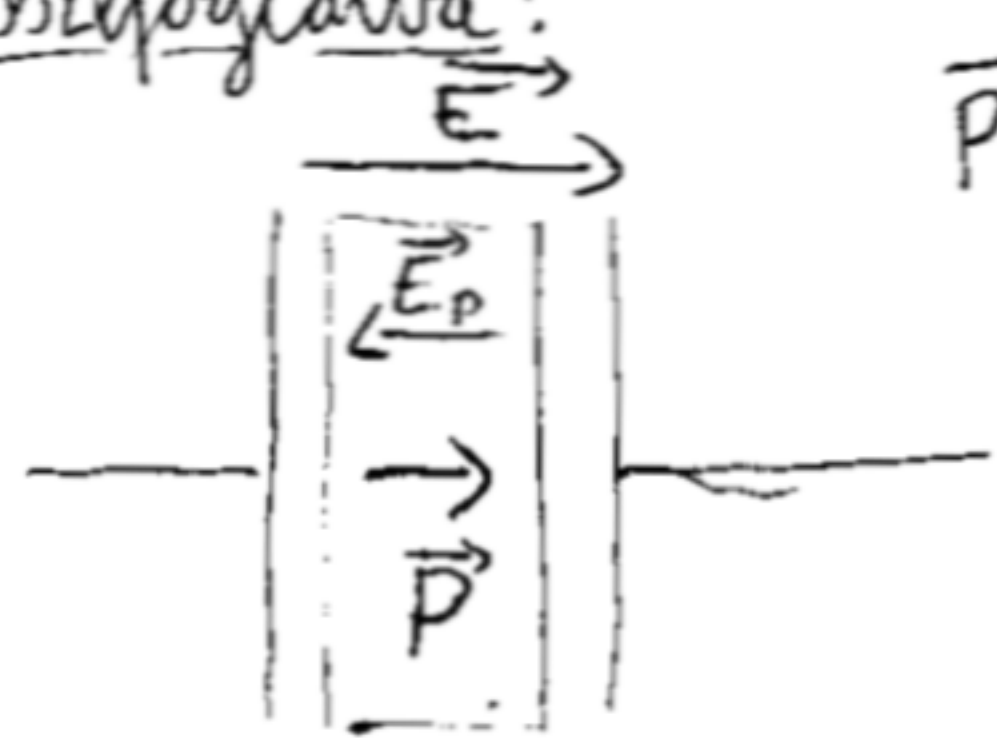
víz

80

BaTiO₃

1000

Összefoglalva:



$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{P}_i \quad \vec{E}_p = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}$$

$$\sigma_p = P_n \quad \oint_F \vec{D} \cdot d\vec{l} = \sum_i Q_i \text{ szabad} = \int_V \rho_{sz} dV$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{E}_p = -\chi \vec{E}$$

$$\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}$$

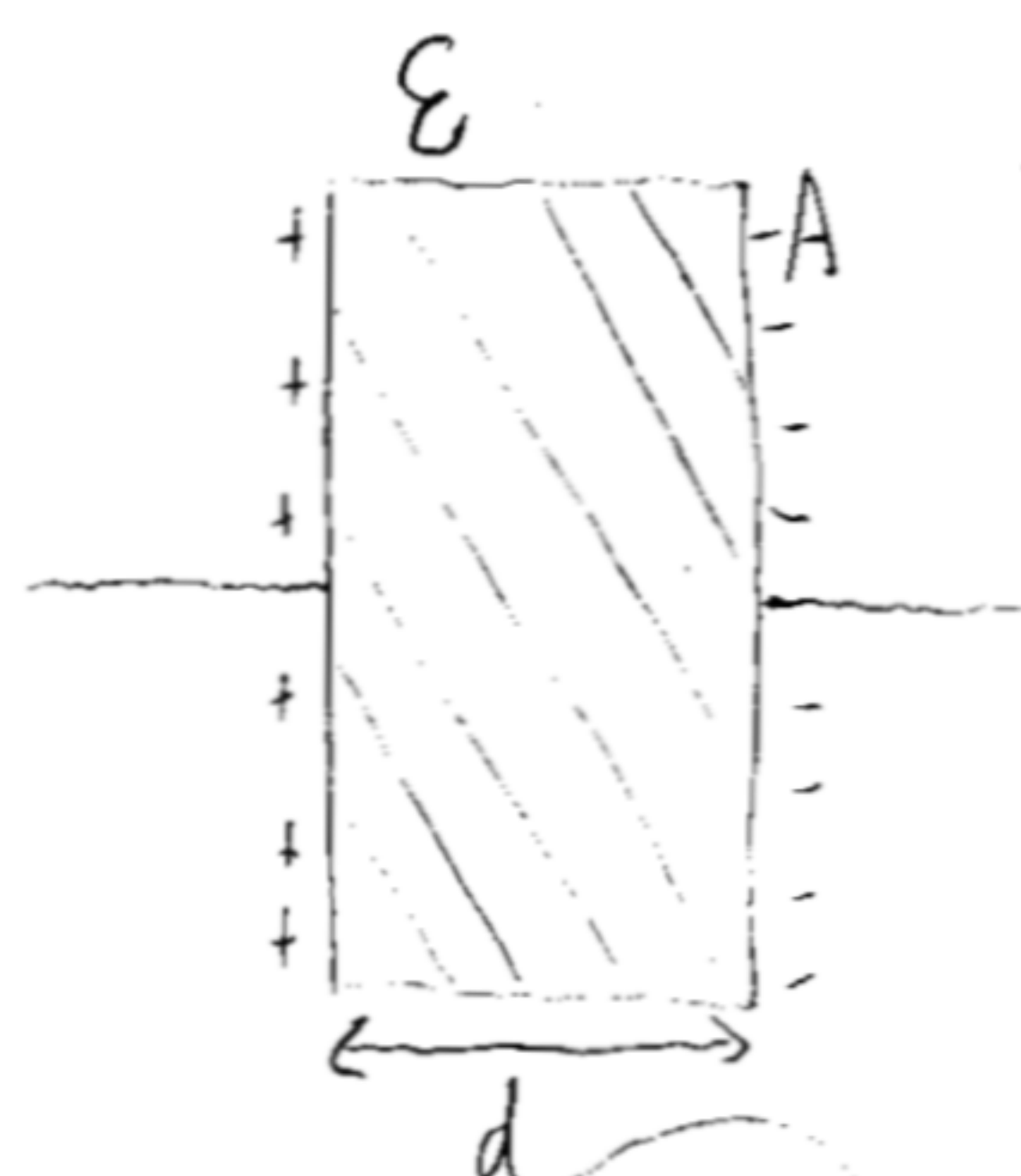
ϵ : anyag relatív permessibilitása

Anizotrop anyagok esetén: $\vec{E} \parallel \vec{P}$ ekkor $P_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j$
 $1 + \chi_{ij} = \epsilon_{ij}$

Inhomogén anyagok esetén: $\epsilon(\vec{r}) \rightarrow \oint_F \vec{D} \cdot d\vec{l} = \int_V \rho_{sz} dV$

$$\epsilon_0 \oint_F \epsilon(\vec{r}) \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_V \rho_{sz} dV$$

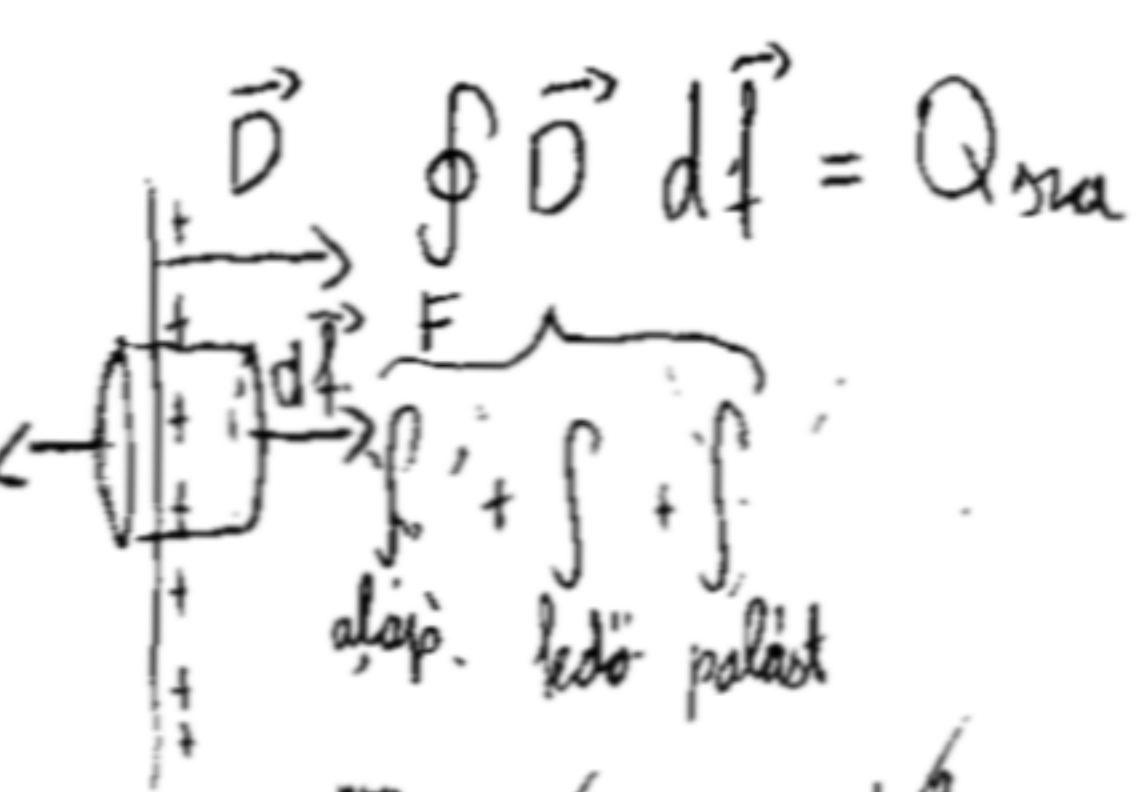
Pé:



$$C = \frac{Q}{U} \quad \sigma_{sz} = \frac{Q}{A}$$

$$U = \left| \int_0^d \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \right| = E d$$

$$C = \frac{\sigma_{sz} A}{E d} = \frac{\sigma_{sz} A}{\frac{D}{\epsilon_0 \epsilon} d} =$$



$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{l} = \sigma_{sz} d$$

$$|\vec{D}| = \sigma_{sz}$$

$$= \frac{\frac{D}{\epsilon_0 \epsilon} A}{\frac{D}{\epsilon_0 \epsilon} d} = \epsilon_0 \epsilon \frac{A}{d} \rightarrow C_0$$

C_0 : vákuum/levegő síkkond. kap.

$$C_0 = \frac{Q}{U_0}$$

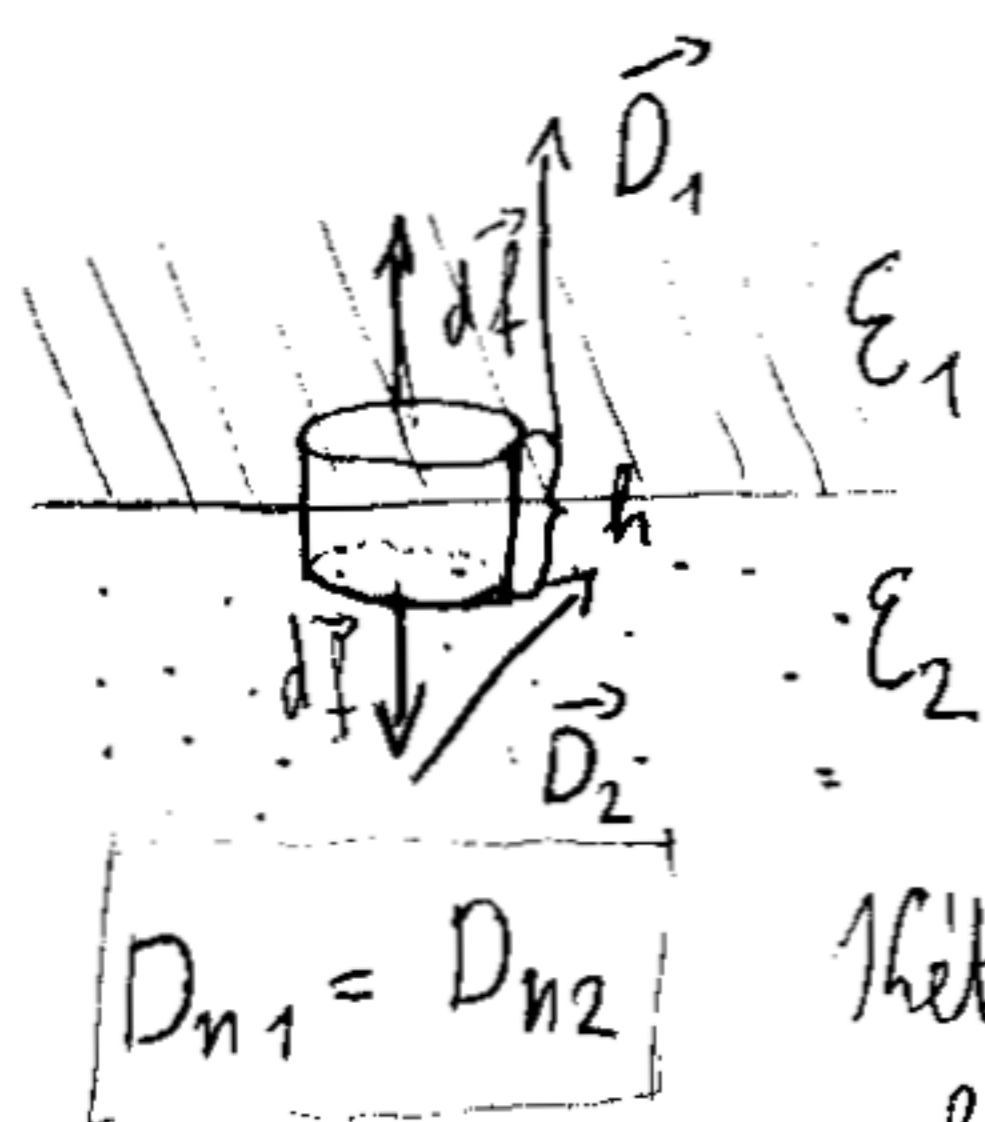
$$Q = C_0 U_0$$

üveglap betolva $\rightarrow C_0 \epsilon = \frac{Q}{U} \rightarrow Q = C_0 \epsilon U$

$$Q = Q \rightarrow C_0 U_0 = C_0 \epsilon U \rightarrow \left[\epsilon = \frac{U_0}{U} \right] > 1$$

Határfeltételek

a,



$$Q_{sz} = \emptyset$$

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_{\text{alag}} \vec{D} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{palást}} \vec{D} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{felső}} \vec{D} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$h \approx 0$$

Itét közeget határon szabad töltés mentes esetben.

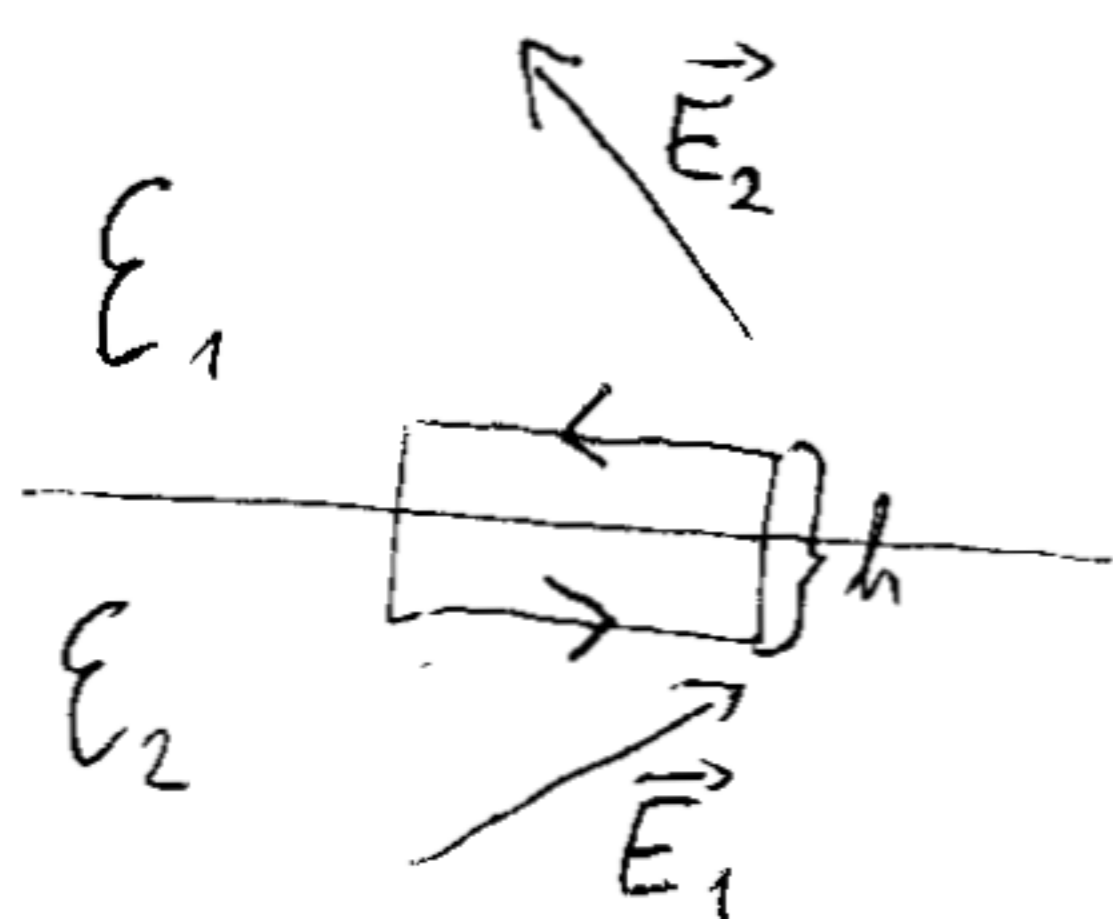
$$\epsilon_0 \epsilon_1 E_{n1} = D_{n1}$$

$$\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$$

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{E_{n2}}{E_{n1}}$$

$$\epsilon_0 \epsilon_1 E_{n2} = D_{n2}$$

b,



$$h \approx 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

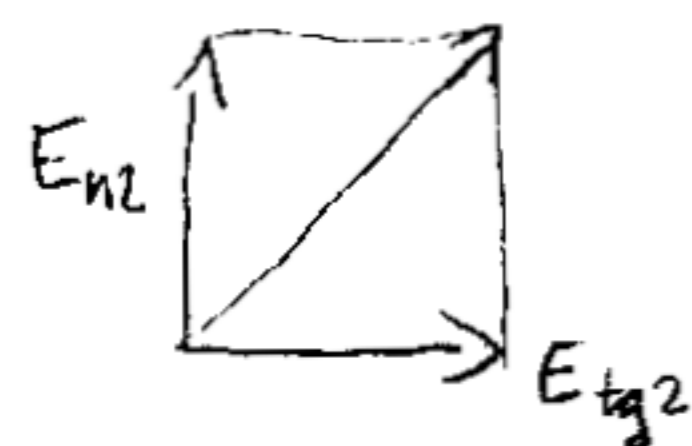
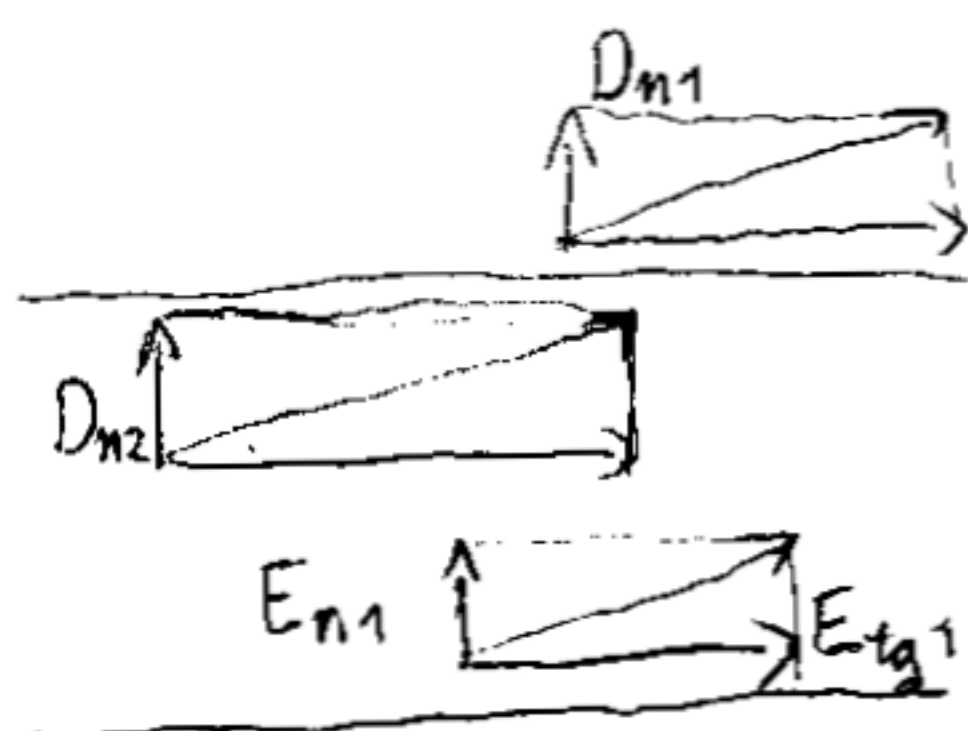
$$D_{tg1} = \epsilon_0 \epsilon_1 E_{tg1}$$

$$E_{tg1} \cdot dA = E_{tg2} \cdot dA$$

$$D_{tg2} = \epsilon_0 \epsilon_1 E_{tg2}$$

$$E_{tg1} = E_{tg2}$$

$$\frac{D_{tg1}}{\epsilon_1} = \frac{D_{tg2}}{\epsilon_2}$$



Energiasűrűség

$$U = \frac{1}{2} CV$$

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \text{vákuum}$$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E \frac{A}{d} V^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon \frac{A}{d} E^2 dA$$

lemezec által határolt térfogat

anyag

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E \cdot E = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \epsilon E) E = \frac{1}{2} D E = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

$$U = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot \vec{E} = \underbrace{\left[\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{P} \right]}_{\text{vakuumbeli energia}} \left[\frac{J}{m^3} \right]$$

vakuumbeli energia

Pl:

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$\vec{D} = \vec{D}_1 = \vec{D}_2 \quad D_n = \sigma$$

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

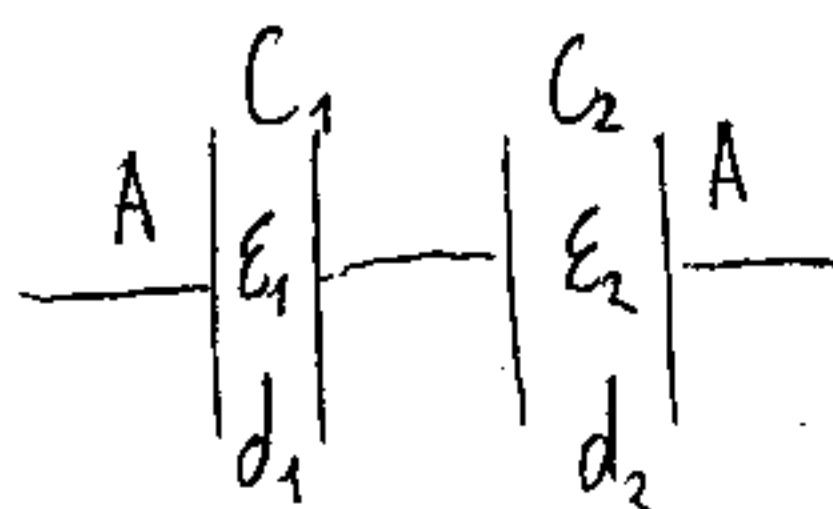
$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 =$$

$$= \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_1} d_1 + \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_2} d_2 =$$

$$D = \epsilon_0 \epsilon E$$

$$= \sigma \left(\frac{d_1}{\epsilon_0 \epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_0 \epsilon_2} \right) = \frac{Q}{A} \left(\frac{d_1}{\epsilon_0 \epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_0 \epsilon_2} \right)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{d_1}{A \epsilon_0 \epsilon_1} + \frac{d_2}{A \epsilon_0 \epsilon_2} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$



U

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2$$

$$D = \sigma \quad E_1 = E_2 = E$$

$$D_1 \neq D_2$$

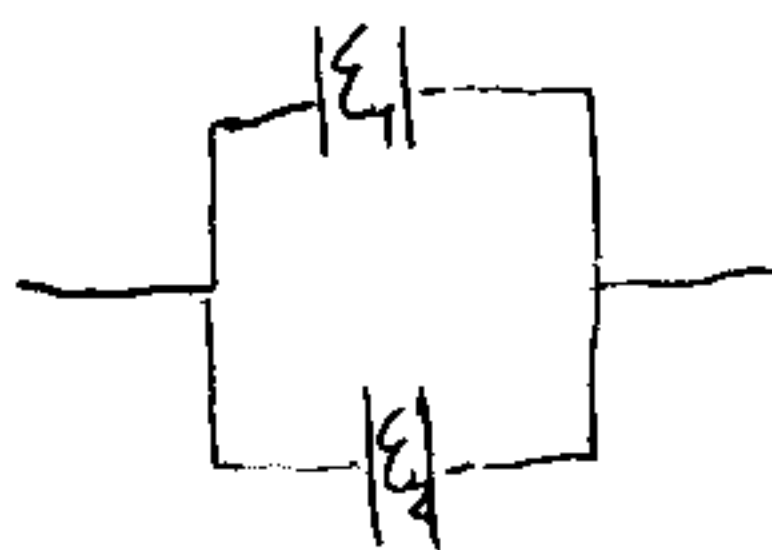
$$U = Ed$$

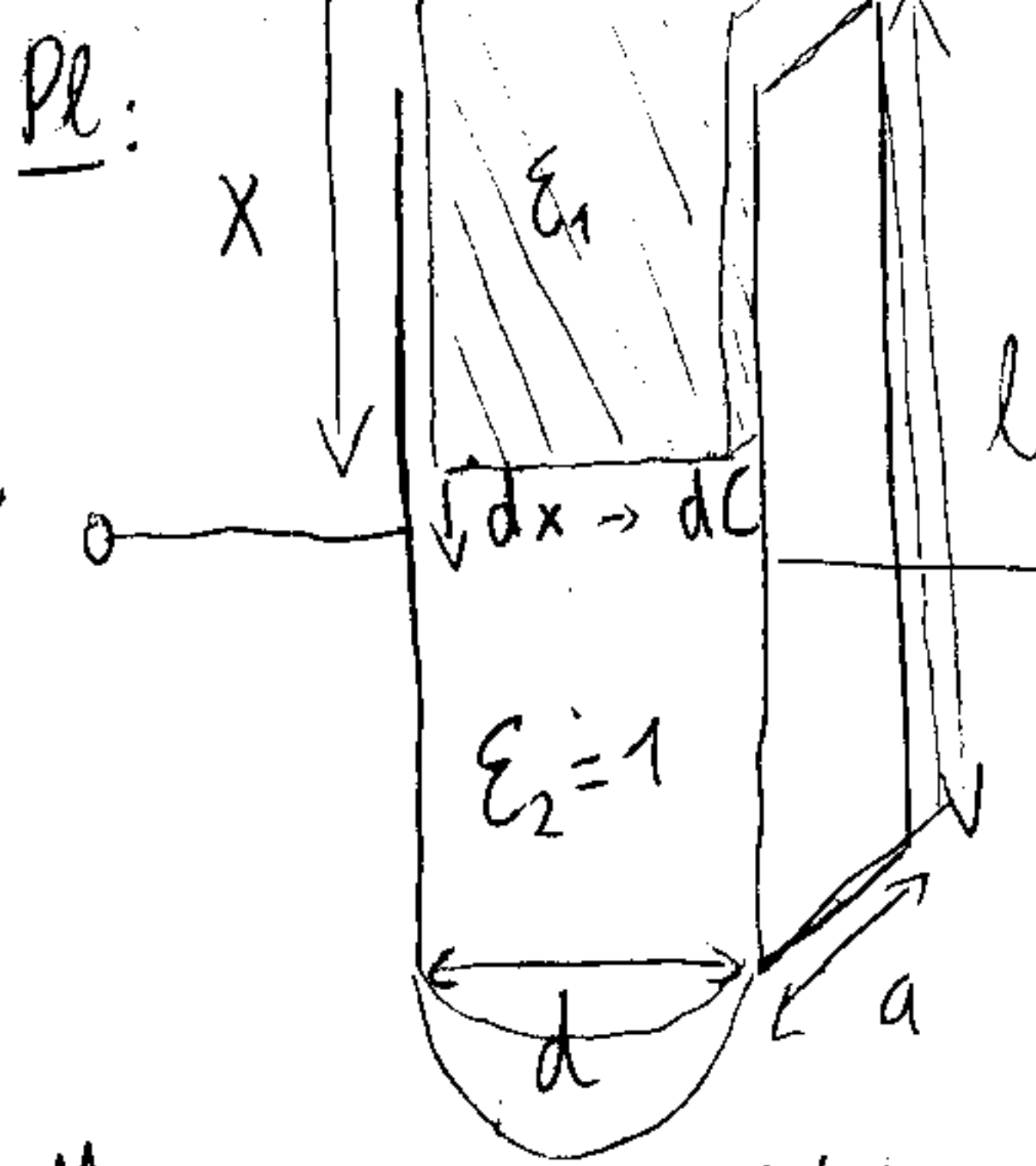
$$D_1 = \epsilon_0 \epsilon_1 E$$

$$D_2 = \epsilon_0 \epsilon_2 E$$

$$Q = \underbrace{(\epsilon_0 \epsilon_1 E)}_{D_1} A_1 + \underbrace{(\epsilon_0 \epsilon_2 E)}_{D_2} A_2 = \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon_1 A_1}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_2 A_2}{d} \right) U$$

$$C = \underbrace{\frac{\epsilon_0 \epsilon_1 A_1}{d}}_{C_1} + \underbrace{\frac{\epsilon_0 \epsilon_2 A_2}{d}}_{C_2}$$





All: A dielektrikusra erő hat

$$F = \frac{\partial W}{\partial x} \quad W = U = \frac{1}{2} C U^2$$

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 \epsilon (x \cdot a)}{d} + \frac{\epsilon_0 (l-x) a}{d}$$

$$F = \frac{1}{2} U^2 \cdot \frac{\partial C(x)}{\partial x} = \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon a}{d} + \frac{\epsilon_0 (-1) a}{d} \right) = \frac{1}{2} \frac{U^2 \epsilon_0 a}{d} \cdot (\epsilon - 1)$$

Miért hat erő? Nem ideális a kondenzátor. $E \rightarrow x$ $\cdot (\epsilon - 1) x$

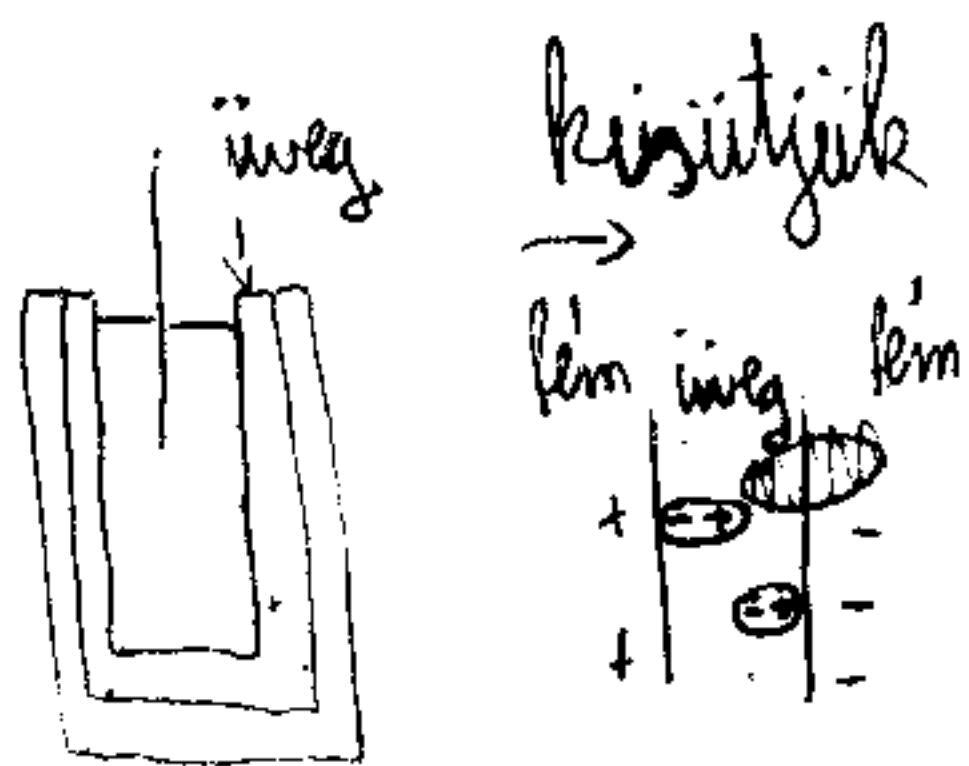
Ferroelektromos anyagok: rendelkeznek spontán eredő dipólusmomentummal
 $\vec{P} \neq \vec{0} \leftarrow$ külső elektromos tér nélkül is

Piezoelektromos anyagok: nyomás vagy nyújtás hatására feszültség ébred az anyagban. $\vec{F} \rightarrow \vec{P} \rightarrow \epsilon_p \rightarrow U$

Inverz piezoelektromos: $U \rightarrow \vec{F}$

Elektrét: dielektrikum-megtartja a polarizációját

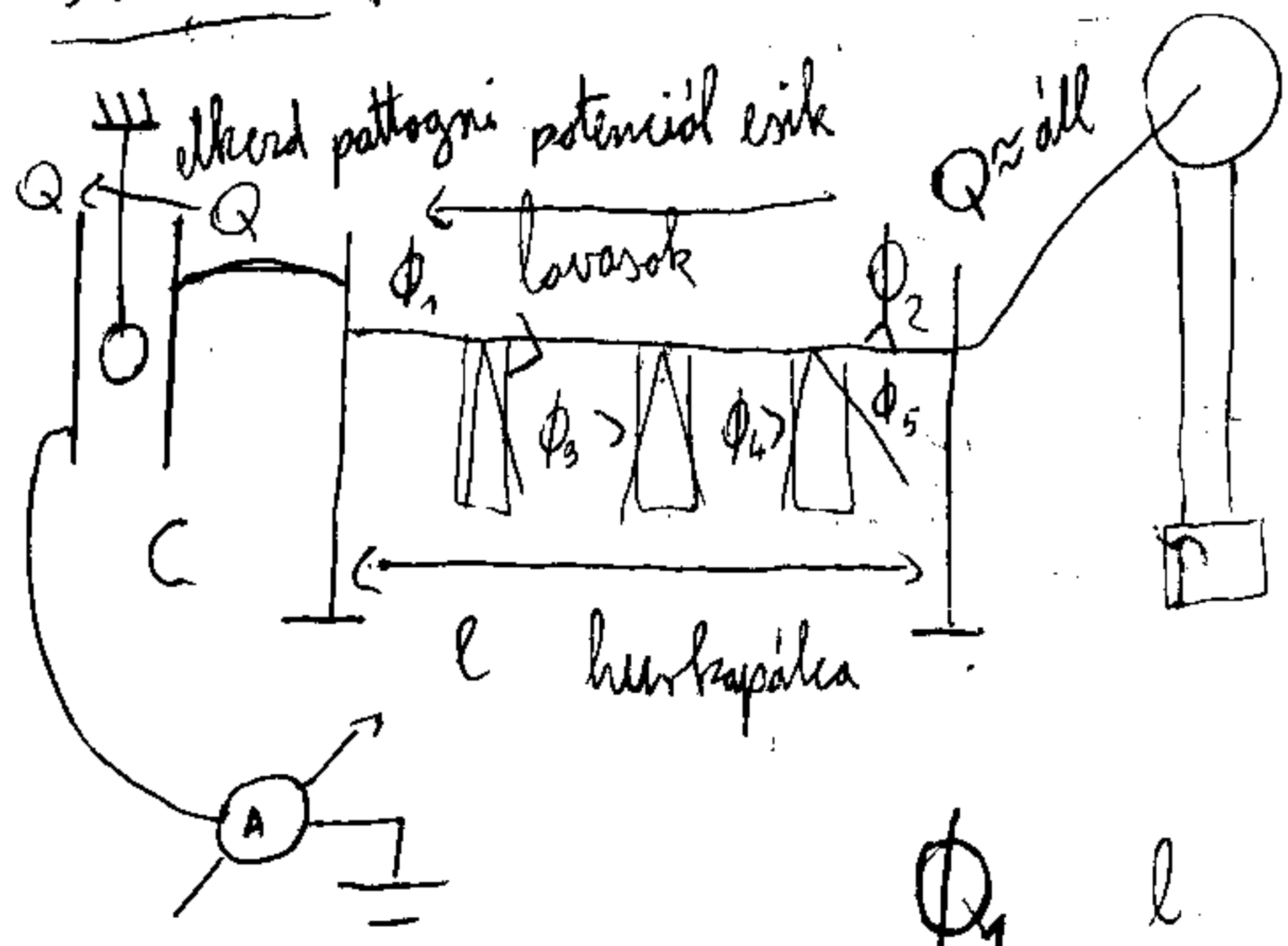
Hisérlét:



összerakjuk újra kívül \rightarrow üveg megtartotta a polarizációt

Elektromos áram

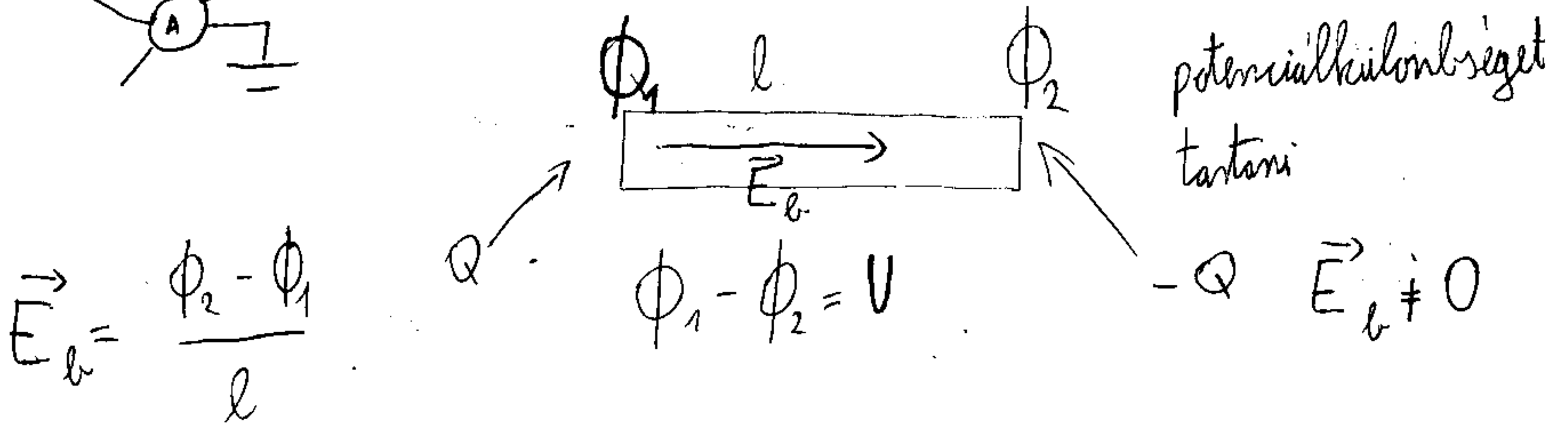
Előírlet:



van de Graaf generátor

lapda pátroz → folyamatosan szállítja a töltést, nincs állandó töltés

töltések állandóan egy irányba áramlanak



$$\vec{E}_e = \frac{\phi_2 - \phi_1}{l}$$

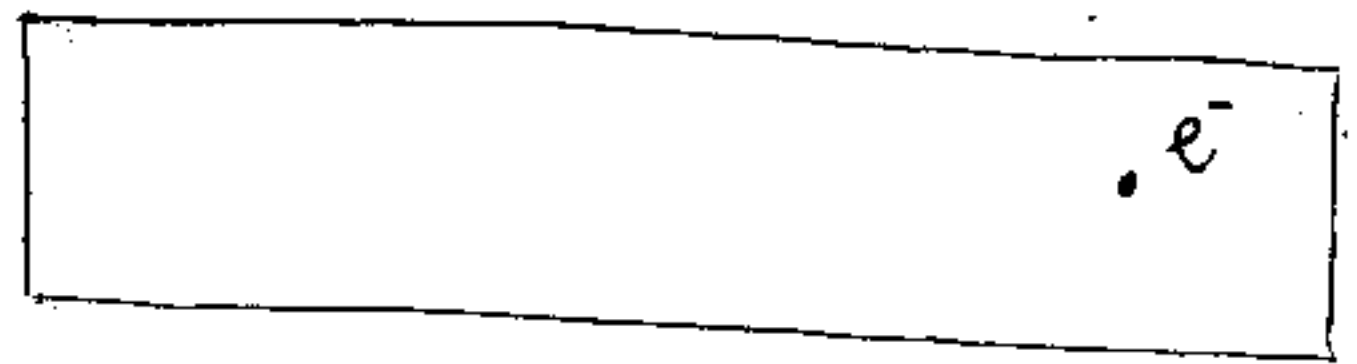
$$\phi_1 - \phi_2 = U$$

potenciálkülönbséget tartani

energiát lehetek le egy \vec{E}_e (belső tér) fenntartására folyamatos töltéssel

minden olyan rendszerben amiben szabad töltések mozognak vezetőnek hívjuk
Témék vezetése

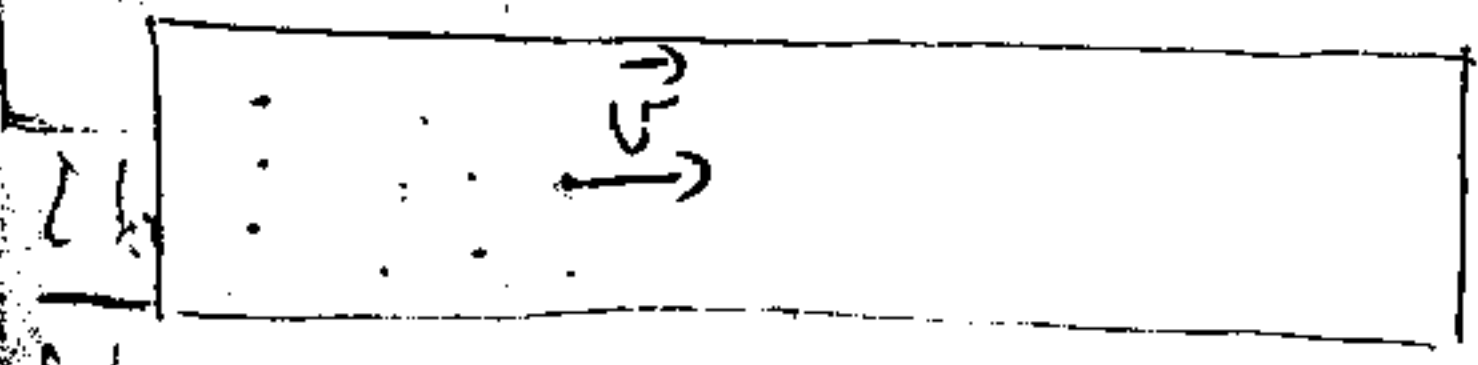
$$U = 0$$



\vec{u} : elektron sebessége $\langle \vec{u} \rangle = 0$

~~KITÁ~~ $|\vec{u}| \approx 10^5 \frac{m}{s}$ erősen hőmérsékletfüggő, hőmozgás

$$U \neq 0$$



e^- -ok → Coulomb-erő - kollektív sebesség

$$\langle \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{w} \rangle \neq 0 \quad |\vec{w}| \approx 10^{-2} \frac{m}{s}$$

rendezett mozgás 33-



elektromos áram: vezető
 keresztmetszetén egységnyi idő alatt áthaladó töltés mennyisége
 skálár
 bár iránya: pozitív töltések mozgásának iránya

Def: $[I] = \frac{C}{s} = A$; $I =: \frac{dQ}{dt}$

André-Marie Ampère (1775-1836)

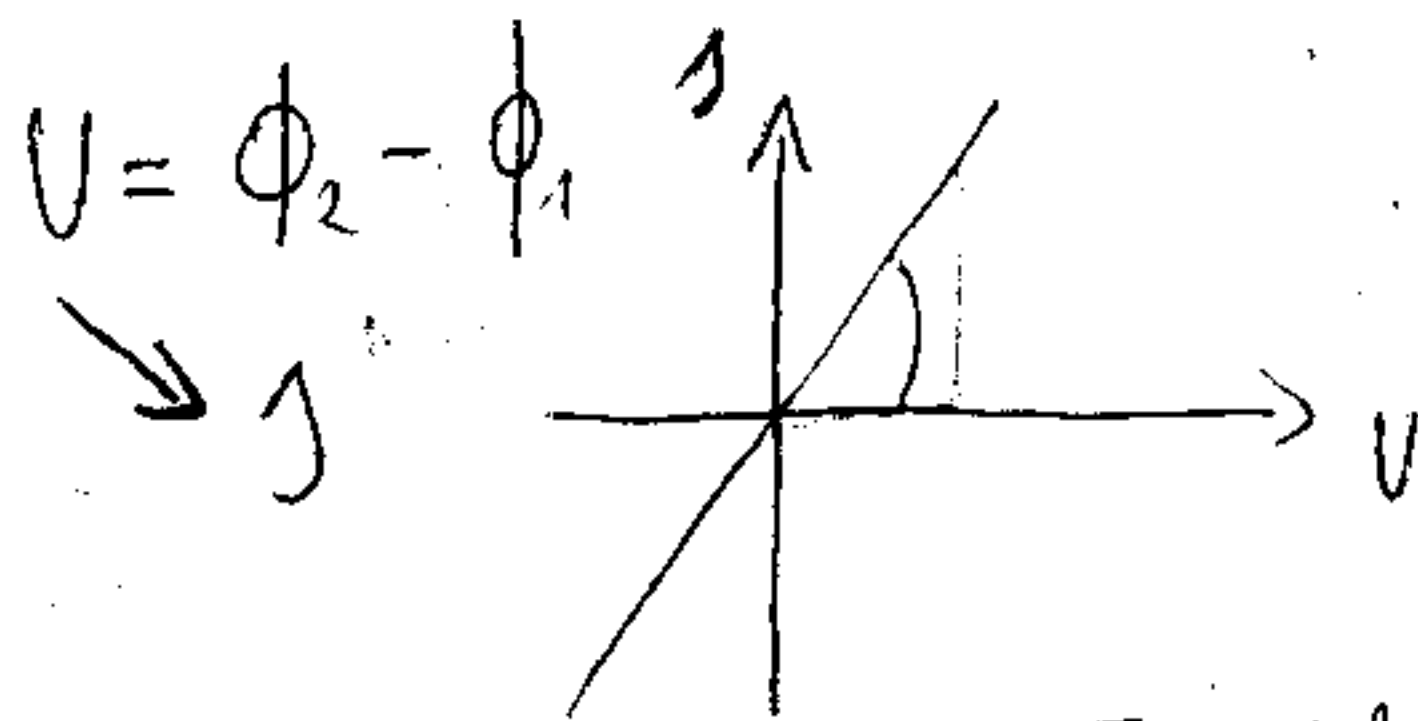
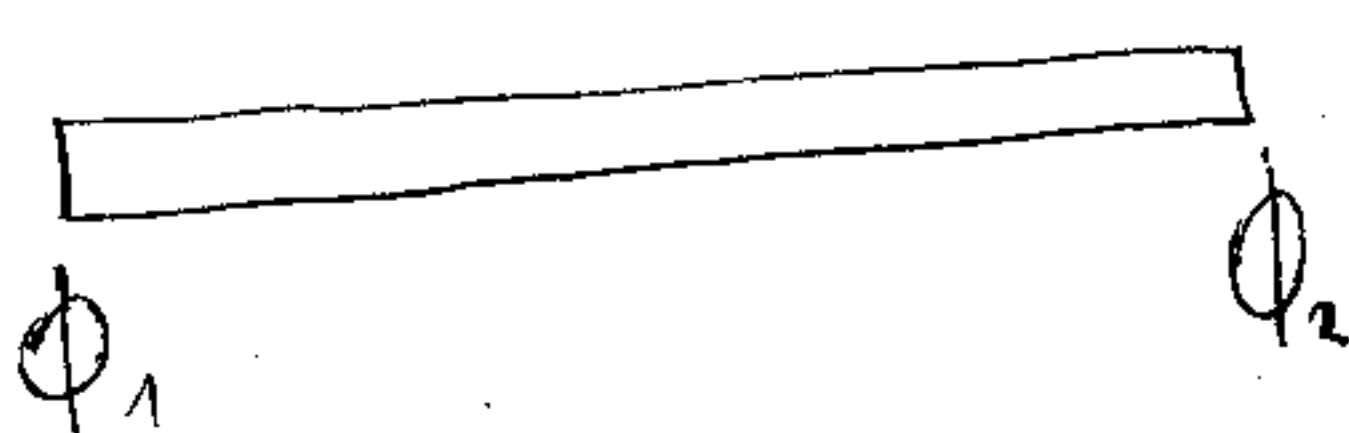
1s alatt 1 Q → 1A

MKSA → méter, kg, sec, Amper

I = áll: stacionárius eset

$Q(t) = \int_0^t I(t) dt$

Trükklet:



Georg Simon Ohm (1789-1854)

$R =: \frac{U}{I}$ Ohm-törvény

$[R] = \frac{V}{A} = \Omega$

tapasztalat: $R \sim l$: drót hossza
 $R \sim \frac{1}{A}$: drót keresztmetszete

$R = \rho \frac{l}{A}$ ρ : fajlagos ellenállás

$\rho = \frac{A \cdot R}{l}$ anyagi minőség

Ag: $\rho [\Omega m]$
 10^{-8}

Fe: 10^{-7}

Szén: 10^{-5} vezető

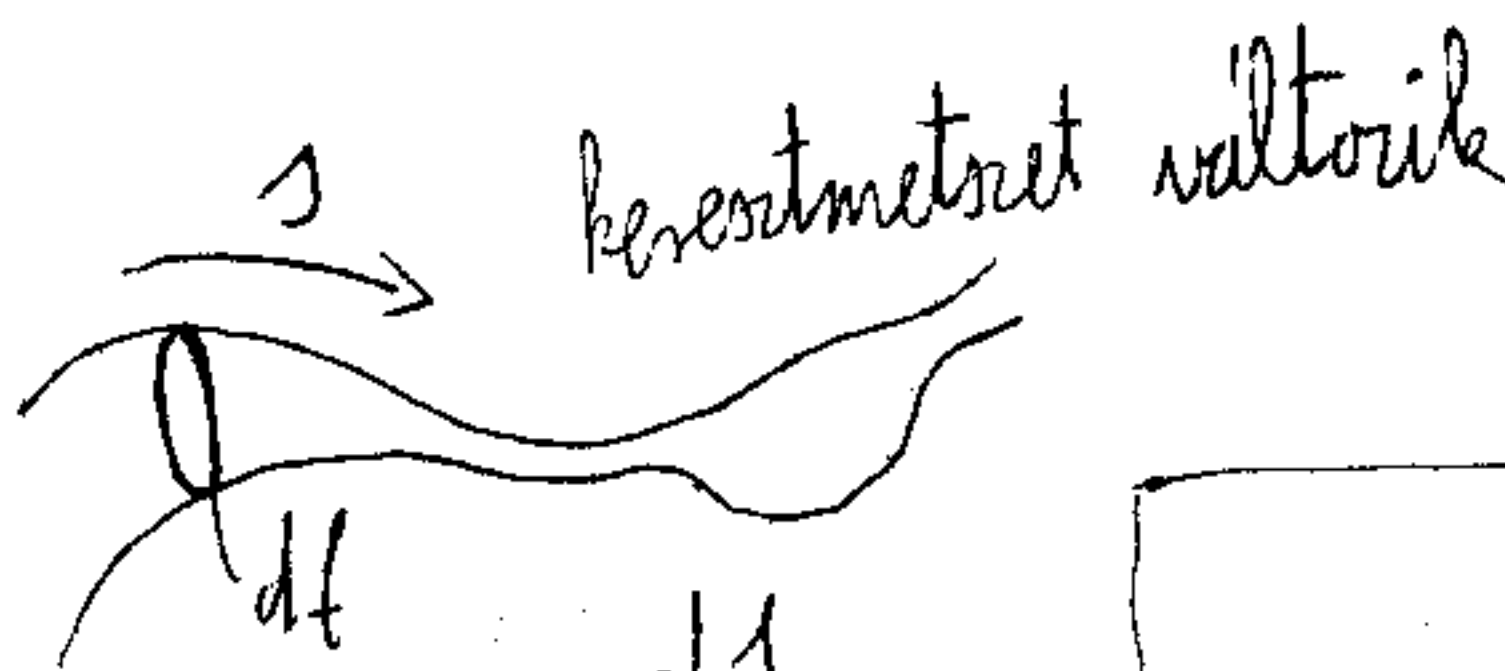
üveg: 10^{12} szigetelő

elónit: 10^{15}

$[\rho] = \Omega m$

$[\rho]^* = \frac{\Omega mm^2}{m}$

nagy skála



Def: áramsűrűség
 egységnyi keresztmetszetén
 egységnyi idő alatt áthaladó
 töltés

$j =: \frac{dI}{dl}$

$I = \int_0^F \vec{j} \cdot d\vec{l}$
 áramsűrűség vektor

irányja az áram iránya, nagysága: $|\vec{j}| = \frac{dI}{dl}$

"lokálisabb" mennyiség

$[j] = \frac{A}{m^2}$

Def: $\sigma: \frac{1}{\rho}$ fajlagos vezetőképesség

belső tér belüli az áramot

$$V = R I = \rho \frac{L}{A} I$$

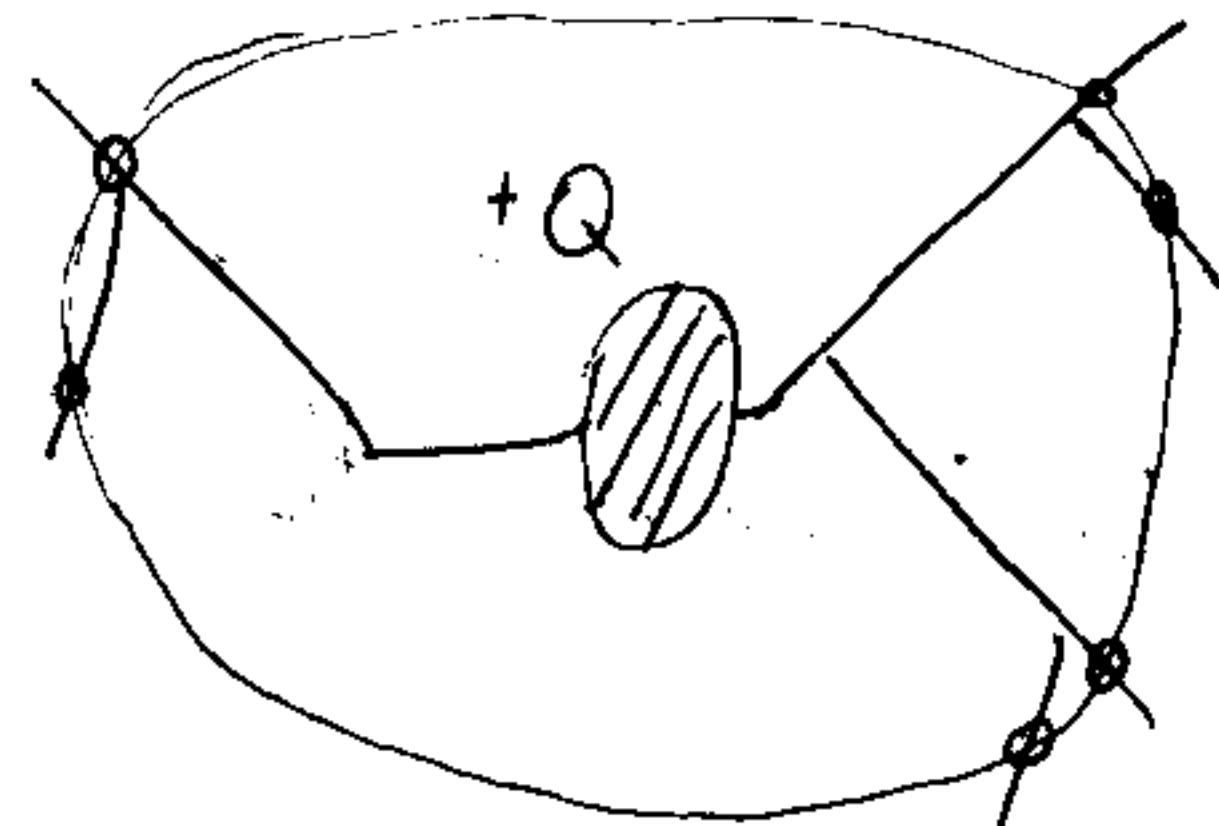
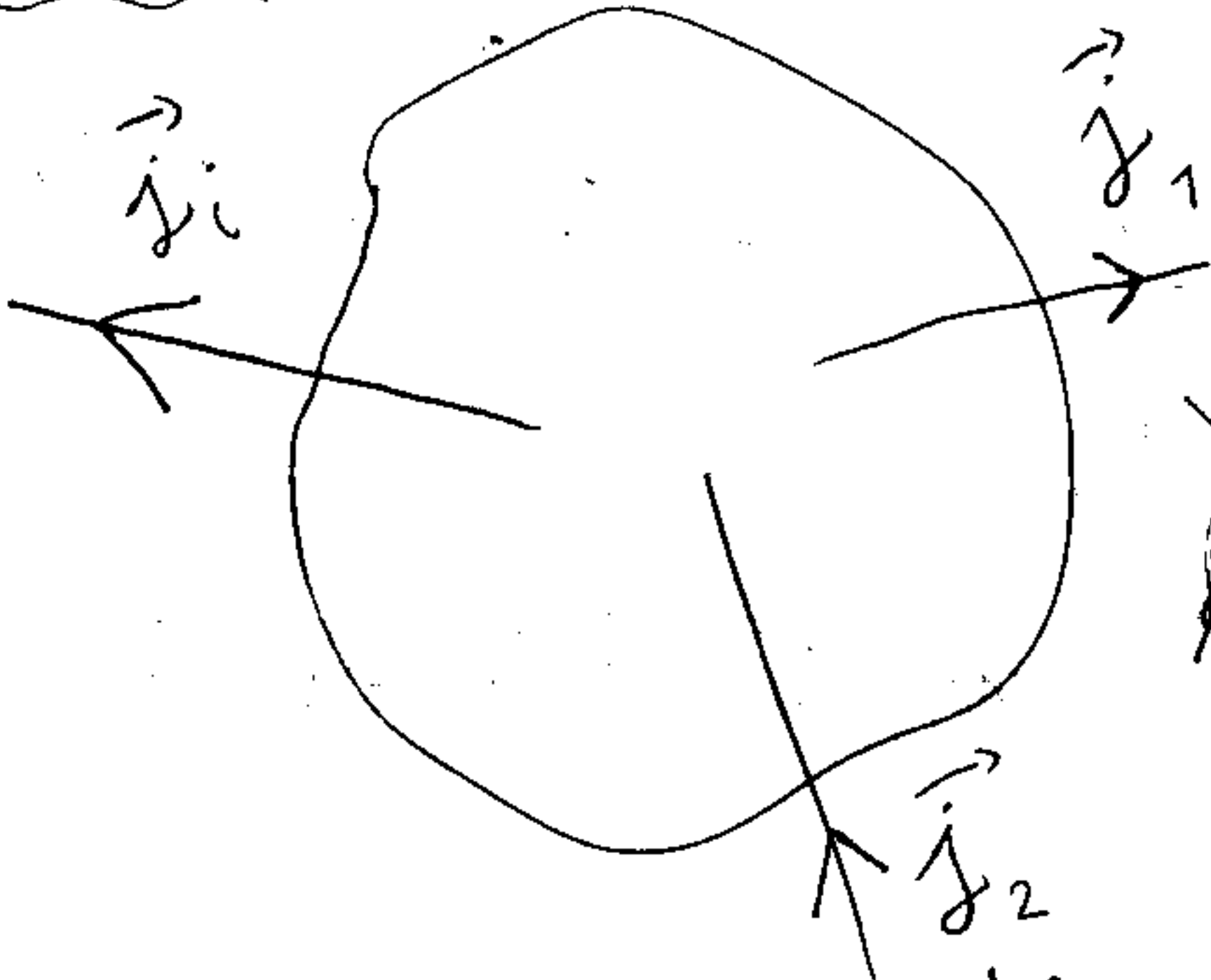
$$\frac{V}{L} = \rho \frac{I}{A} \rightarrow \vec{E} = \rho \vec{j}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Differenciális Ohm törvény

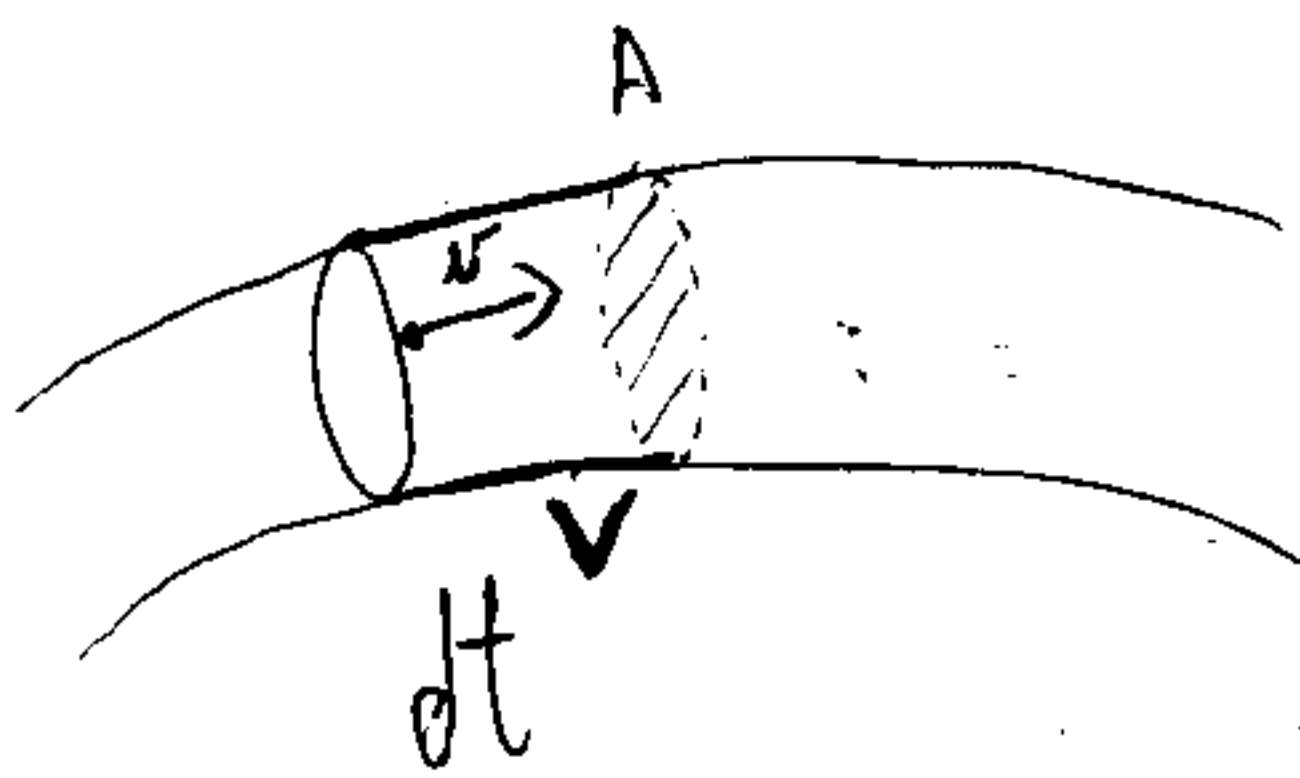
$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{l} + \frac{dQ}{dt} = 0$$

Zárt rendszer:



kontinuitási egyenlet

stationárius eset $\vec{j} = \text{áll}$ $\frac{dQ}{dt} = 0 \rightarrow \oint \vec{j} \cdot d\vec{l} = \text{áll}$



n : hány db olyan részecske van ami vezet egységnyi térfogatban

$$[n] = \frac{1}{m^3}$$

n : vezetőképességi részecskesűrűség

$$dN = n V = n A v dt$$

$$dQ = q dN = q n A v dt \quad /: A dt$$

vezető A keresztmetszetén dt idő alatt áthaladó részecskesűrűség

$$\vec{j} = q n \vec{v}$$

$$q n \vec{v} = \sigma \vec{E} \quad /: \sigma, \cdot q$$

$$\vec{F} = \frac{q^2 n}{\sigma} \vec{v}$$

$$\frac{q^2 n}{\sigma} \vec{v} = q \vec{E}$$

\sim Stokes-tör

\sim Suhl-tör

Vezetés Drude modellje:

Paul Karl Ludwig Drude (1863-1906)

1897: Thomson - e^- felfedezése

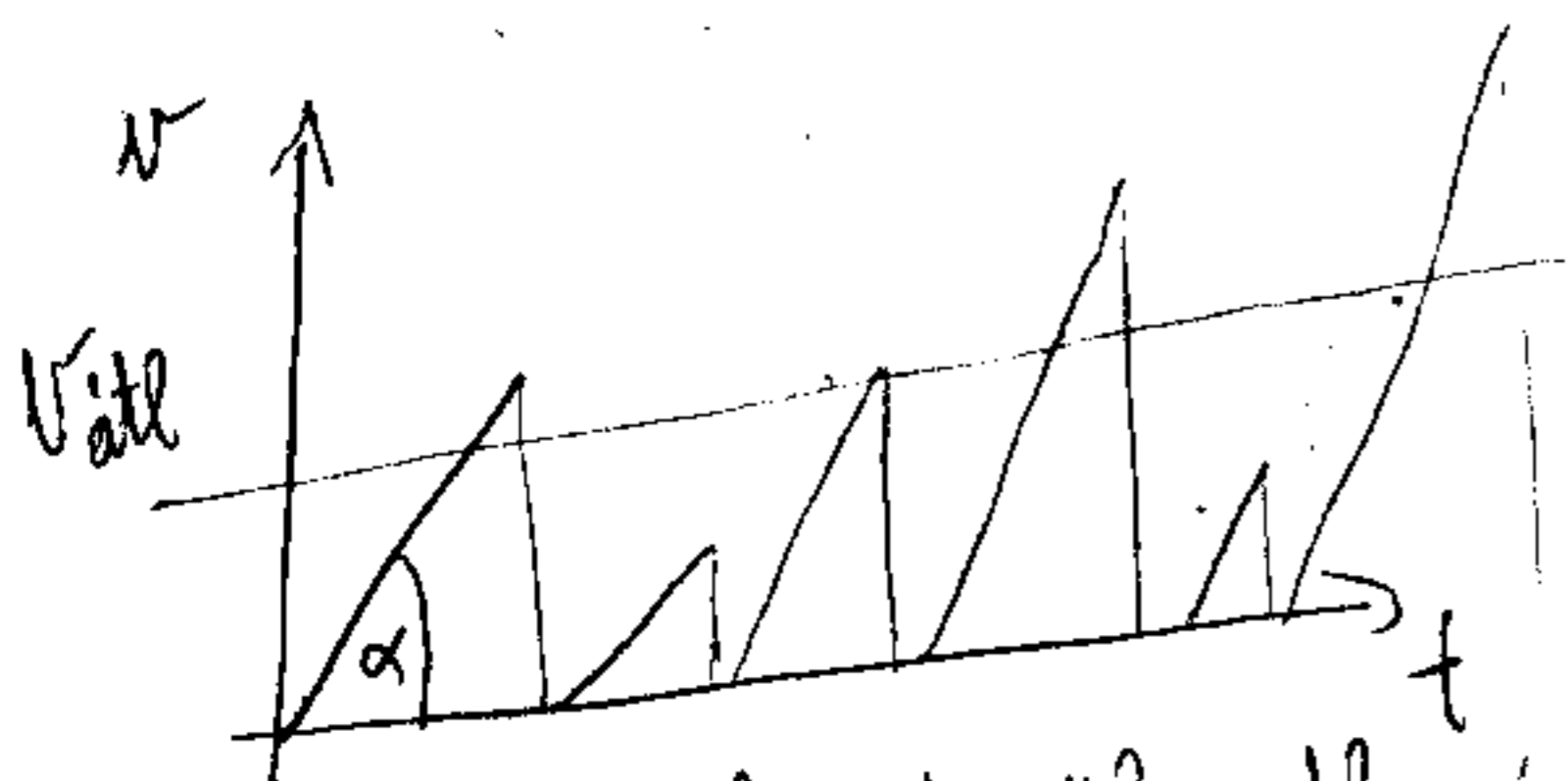
1901: Riecke - fémekben e^- -ok vezetnek

• $q \quad m \vec{a} = q \vec{E}$

$\vec{E} \rightarrow \vec{a} = \frac{q \vec{E}}{m} = \text{áll}$

$\vec{v} = \vec{a} t \rightarrow \boxed{j = q n \vec{a} t}$

de egy fémben van a részecske nem a szabad térben
 $e^- \rightarrow$ atomtöréseken ütköznek nagy tömegkülönbség \rightarrow tökéletesen rugalmas



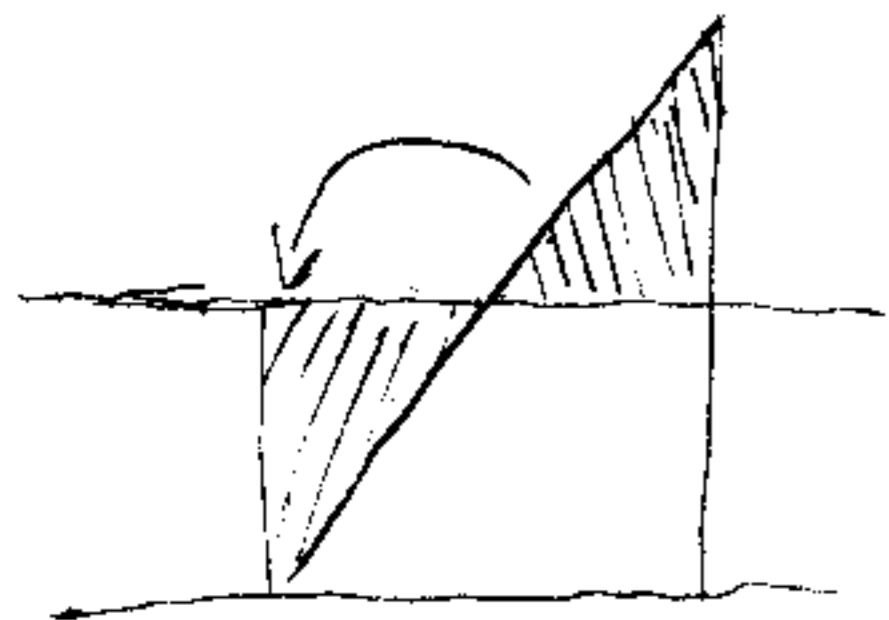
τ : ütközési idő

τ ütközésről ütközésre változik

$0_s \rightarrow \tau_s \quad 0_s - \tau_s$ nincs ütközés
 τ_s ütközés

$\langle \tau \rangle$ várható érték

$N_{\max} = a \langle \tau \rangle = \frac{qE}{m} \langle \tau \rangle$



$\vec{v}_{\text{atl}} = \frac{1}{2} a \langle \tau \rangle = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \langle \tau \rangle$

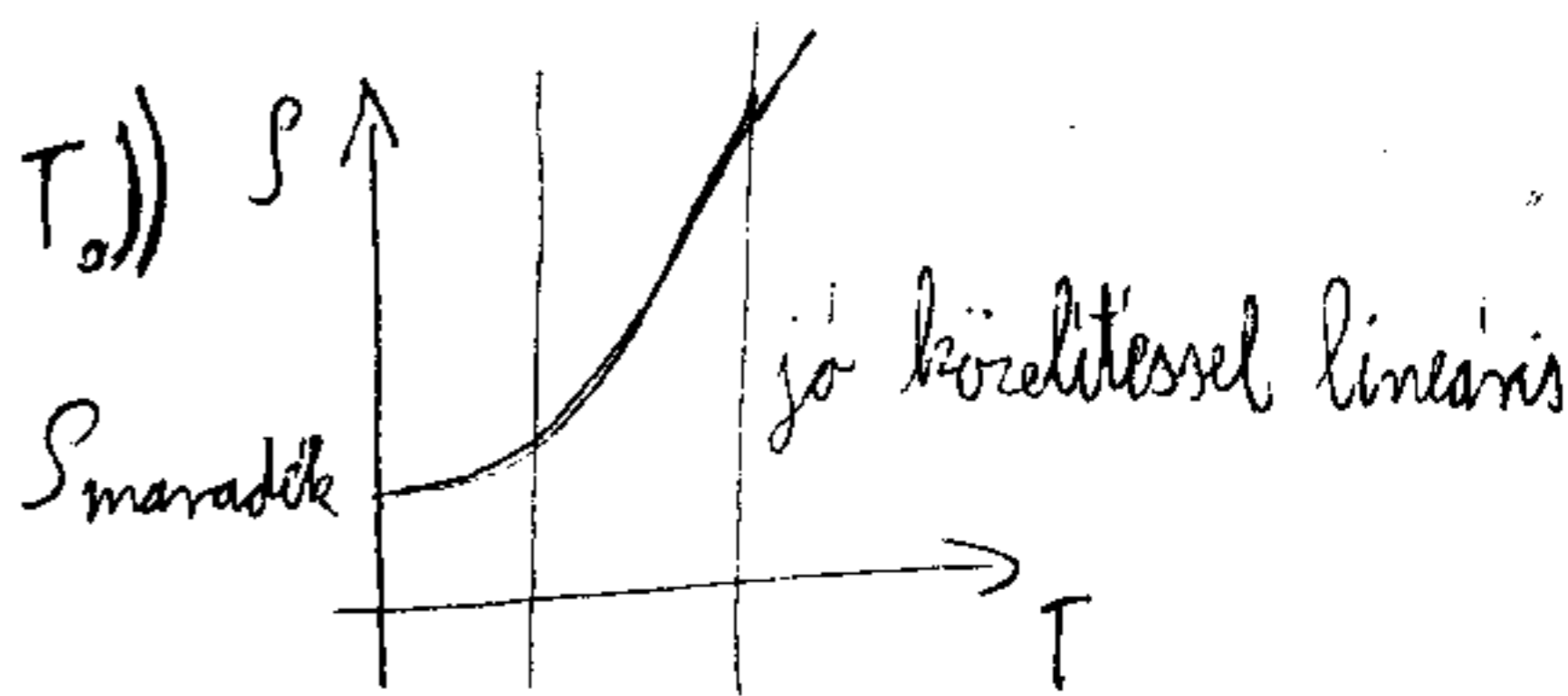
$\sigma \vec{E} = q n \vec{v} \rightarrow \sigma \vec{E} = \frac{1}{2} \frac{q^2 n}{m} \langle \tau \rangle \cdot q n$

ellenállás \rightarrow hőmérséklet-függés $R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A}$

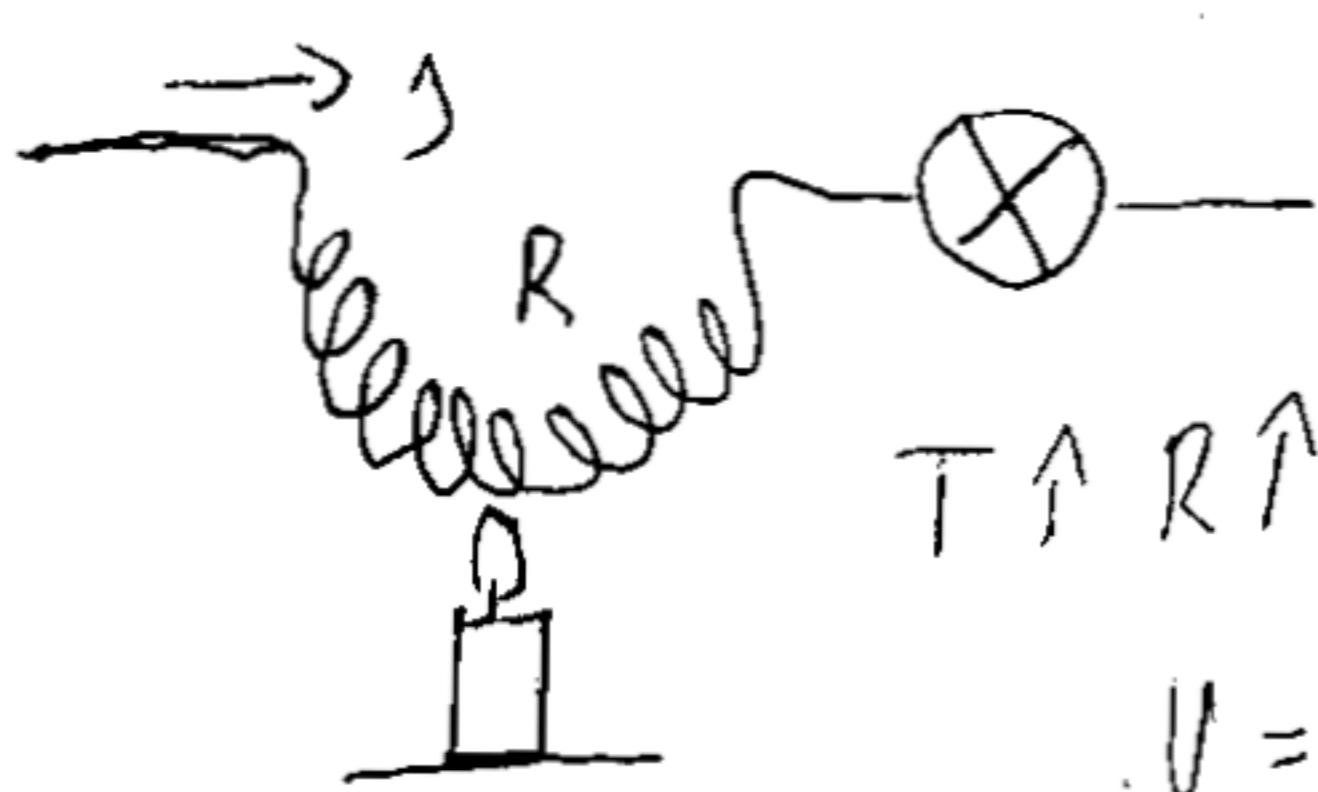
$\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2 n}{m} \right) \langle \tau \rangle$
 mikroszenkerzeti adatok

Drude modell nem veszi figyelembe

hővezet: $P(T) = P_0 (1 + \alpha(T - T_0))$



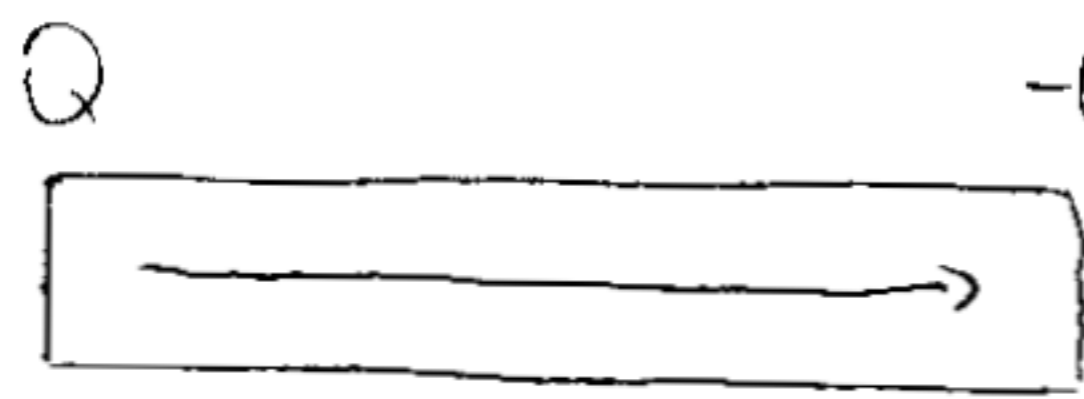
dönt - ellenállás hőmérsékletfüggése
 szélblampárisó (36)



$T \uparrow R \uparrow I \downarrow$ fényerősség \downarrow

$U = RI$
 áll. nö. csök.

Ismeretlen:



$I = \frac{dQ}{dt}$ $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{l}$
 $j = \frac{dI}{dl}$

$j = \sigma E$

$\phi \rightarrow \vec{E}_0$

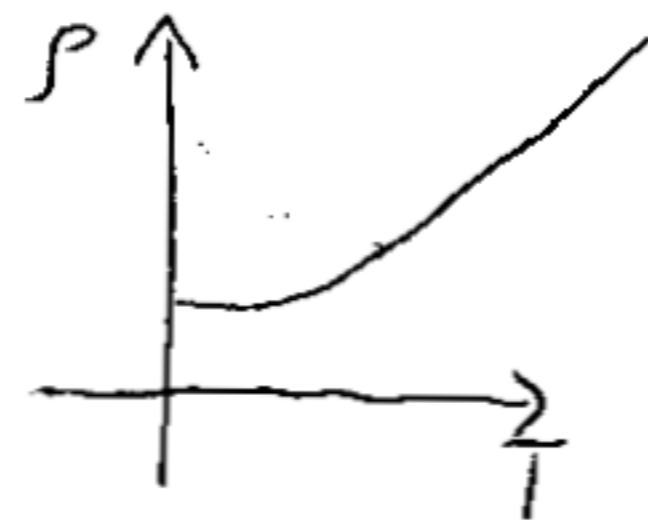
$R = \frac{U}{I}$

$R = \rho \frac{l}{A}$ $\sigma = \frac{1}{\rho}$

$\vec{j} = q n \vec{v}$

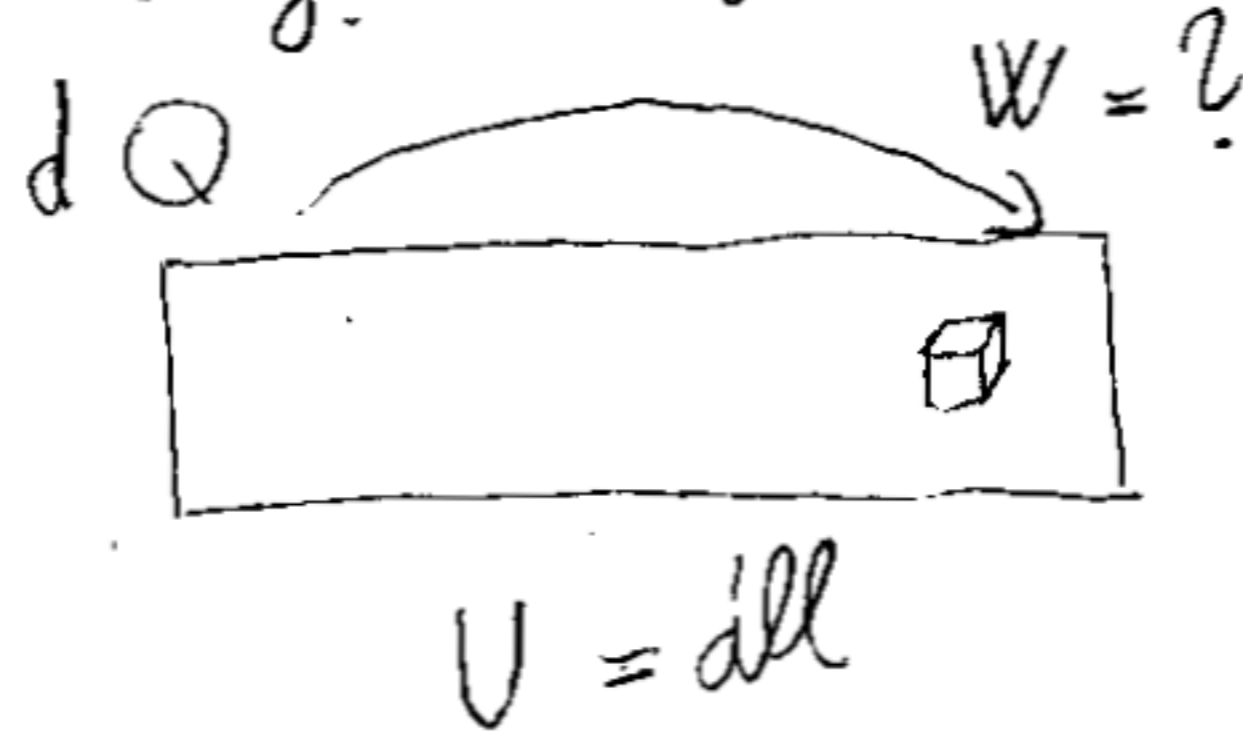
Drude: $\sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{n q^2}{m} \langle \tau \rangle$ j közelítés szobahőmérsékleten
 m_{eff} - redukált tömeg fizikában

$\rho(T) = \rho_0 (1 + \alpha(T - T_0))$



ellenálló hőfoktényezője

Teljesítményviszonyok



$dW = dQ \cdot U$
 $P = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt} U = I U = I^2 R = \frac{U^2}{R}$

teljesítménysűrűség:

$p = \frac{P}{V}$ $[p] = \frac{W}{m^3} = \frac{j}{sm^3}$

$p = \frac{P}{V} = \frac{U I}{V} = \frac{U I}{l A} = E \cdot j \rightarrow \begin{cases} p = \vec{E} \cdot \vec{j} \\ p = \rho \vec{j}^2 \end{cases}$

lokális összefüggés

Kísérlet:

$$P_{Fe} > P_{Cu}$$

$$P = P j^2$$

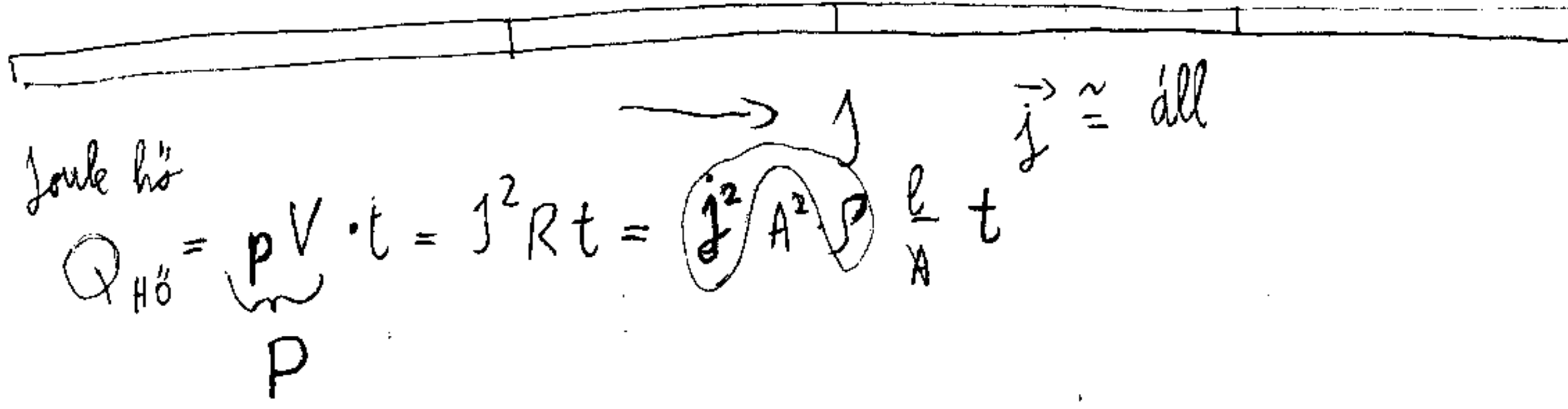
$$P_{Fe} > P_{Cu}$$

Fe víz

Cu

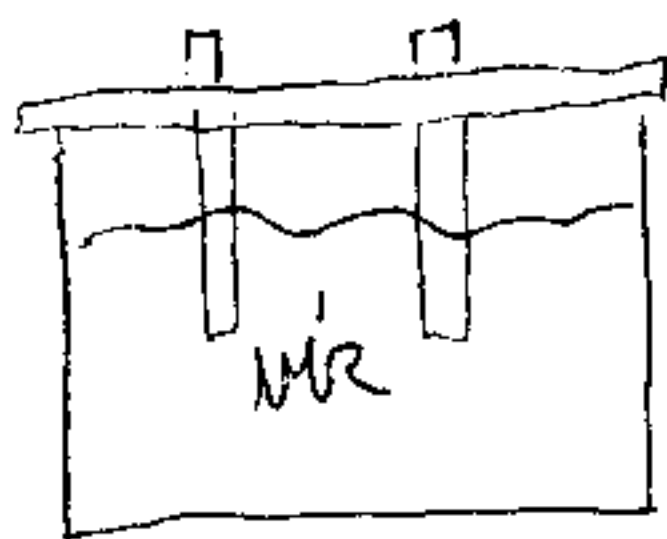
Fe víz

Cu

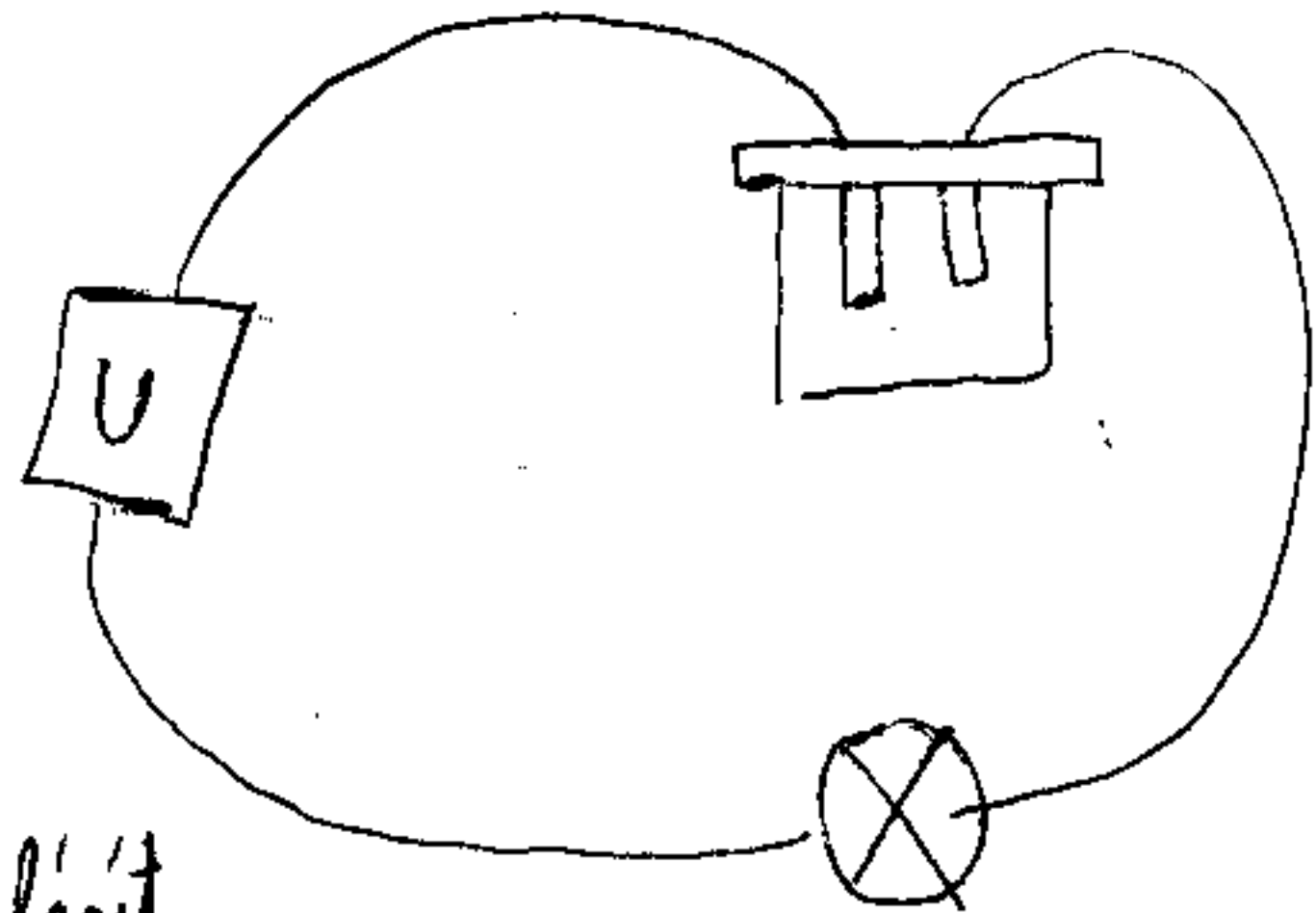


Nezetés folyadékokban

Elektrolízis

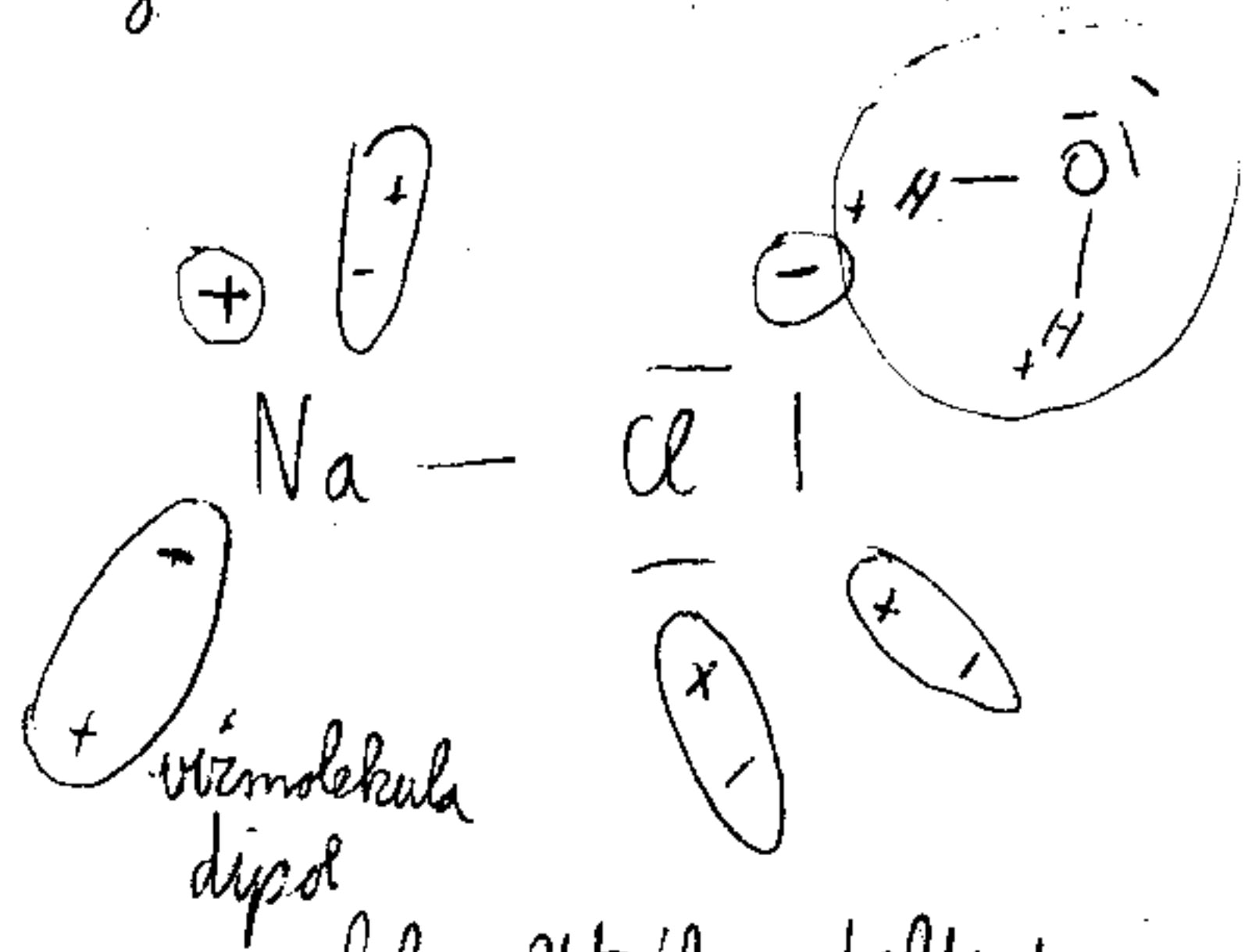
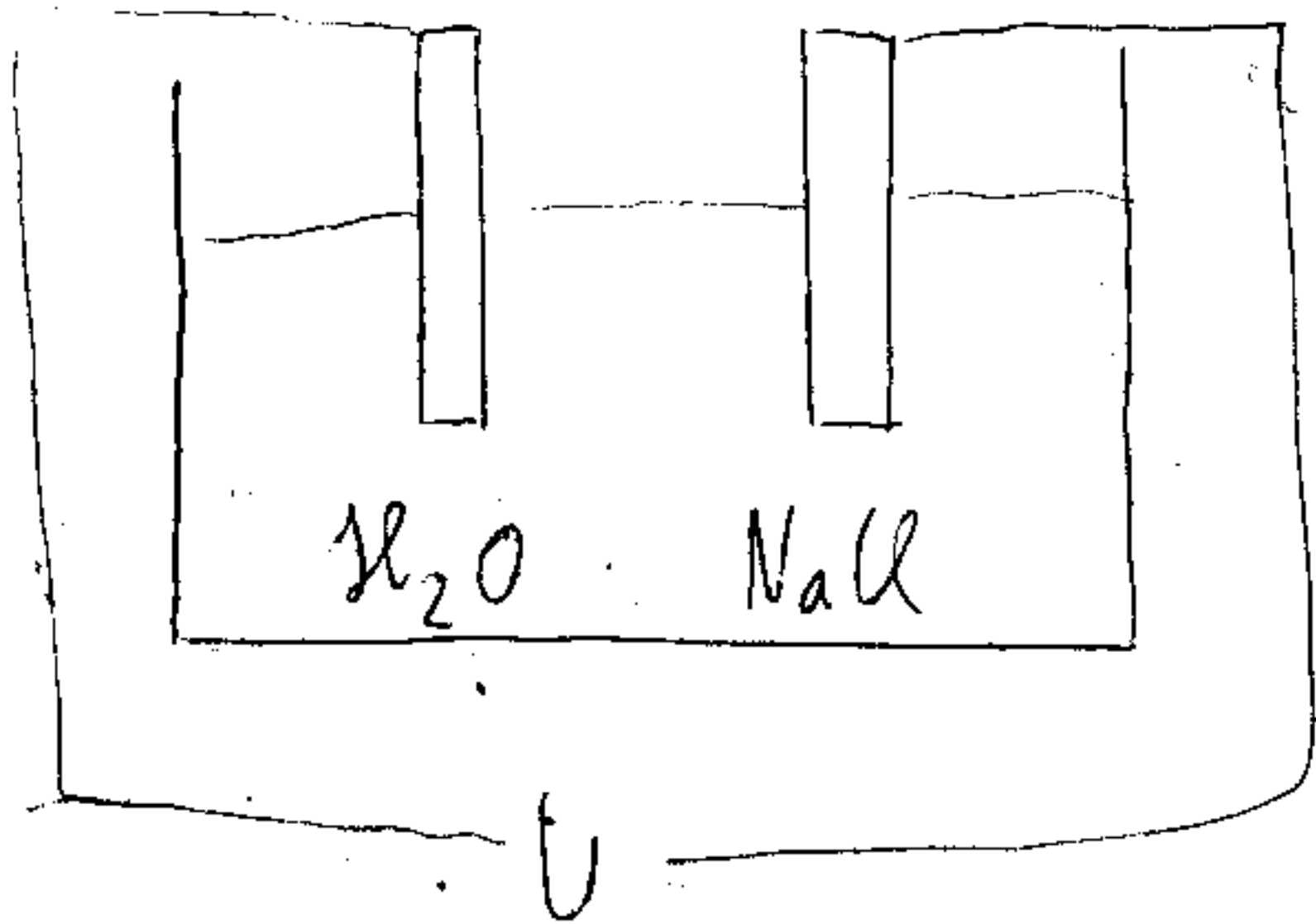


grafitrudak



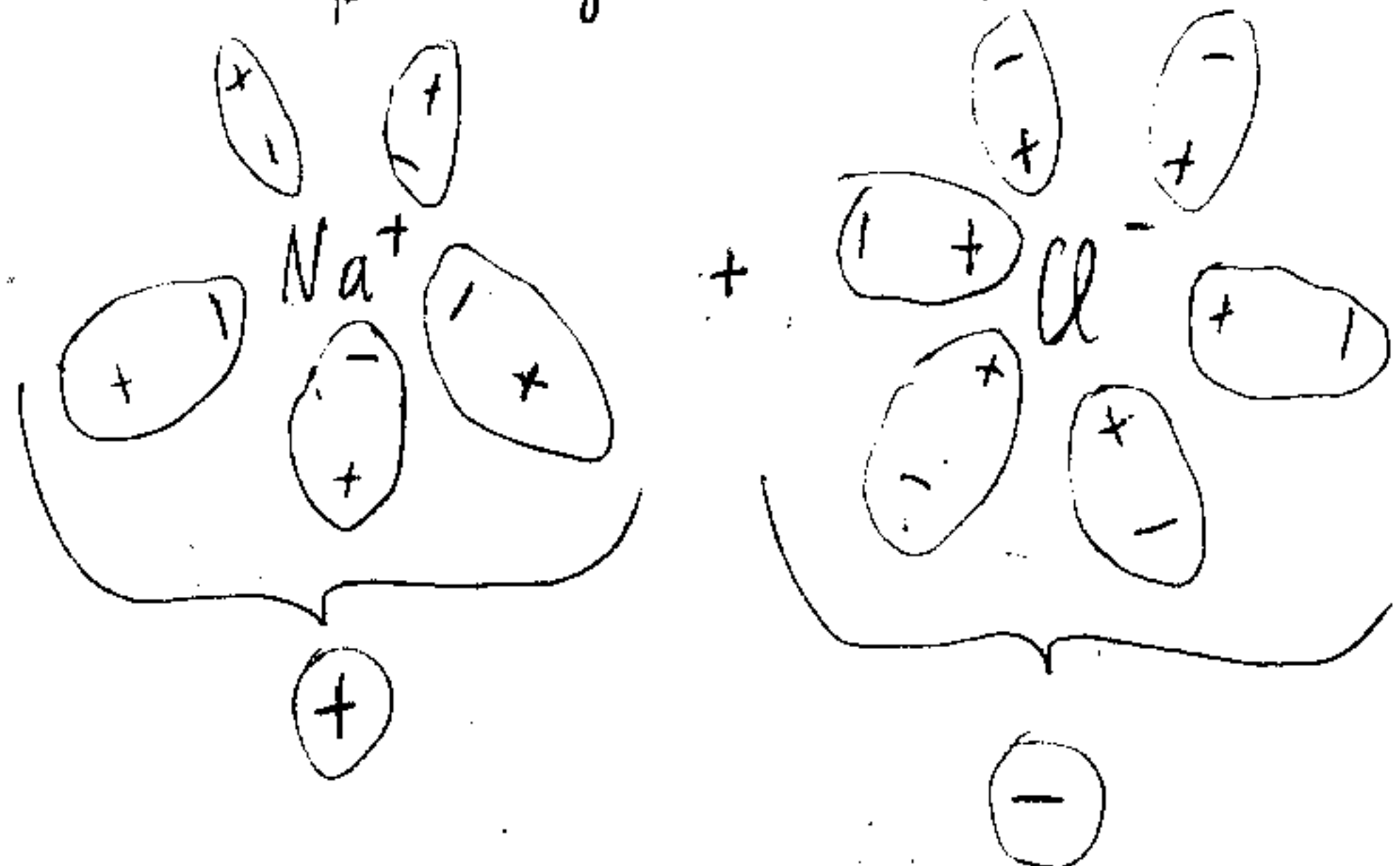
Semmi →
→ + só → világít

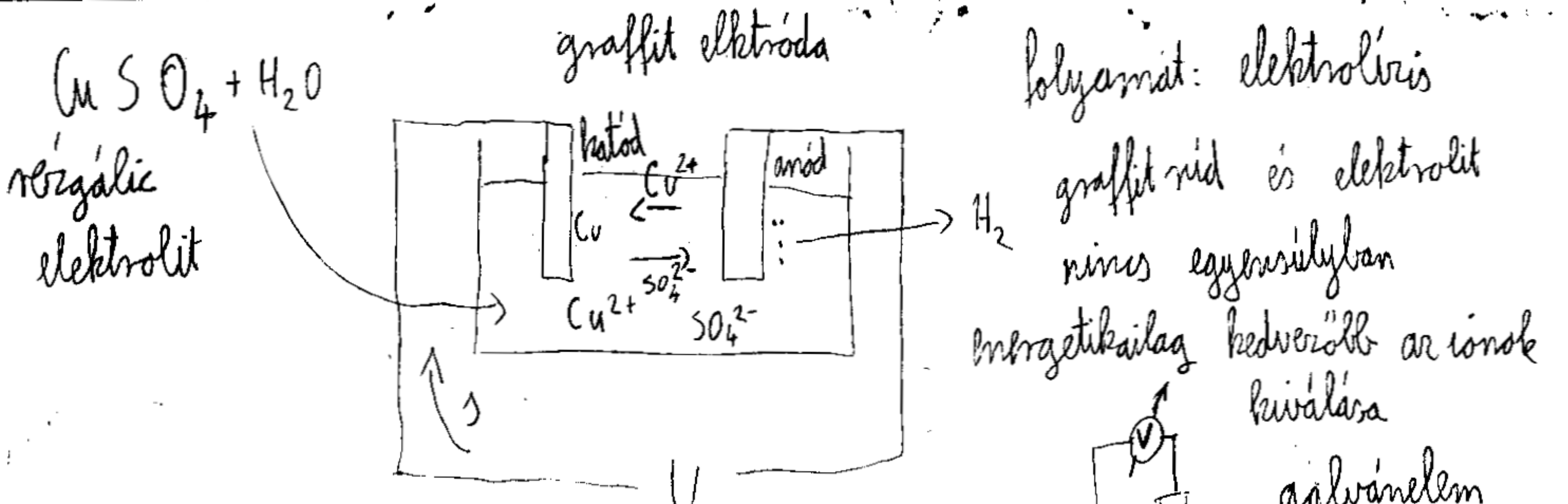
sós víz vezet



felszakítják a töltést

töltésbandozók
keletkeznek →

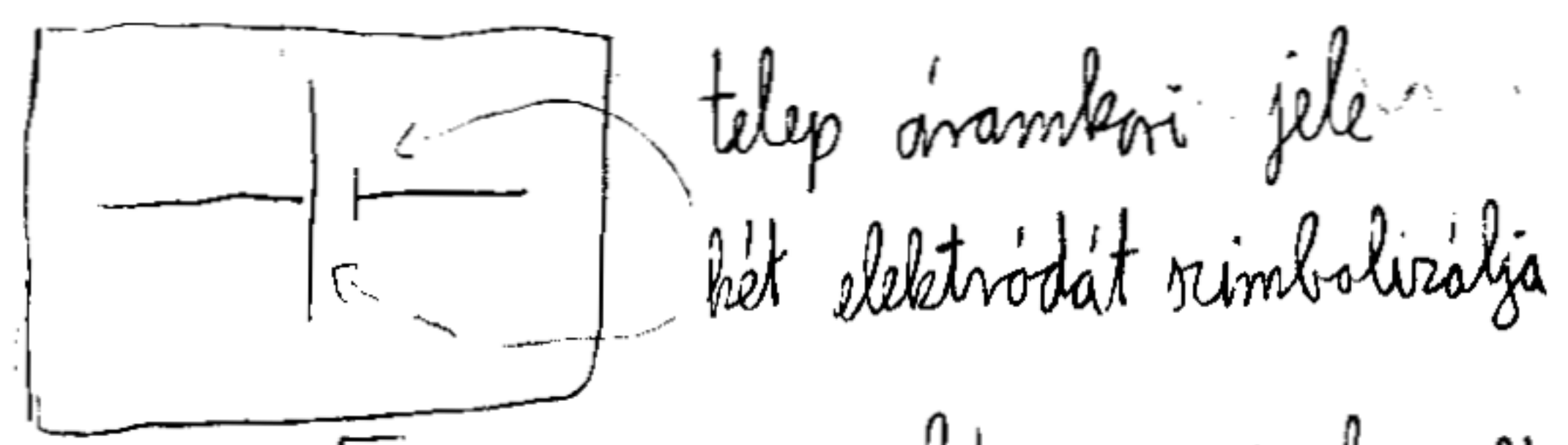
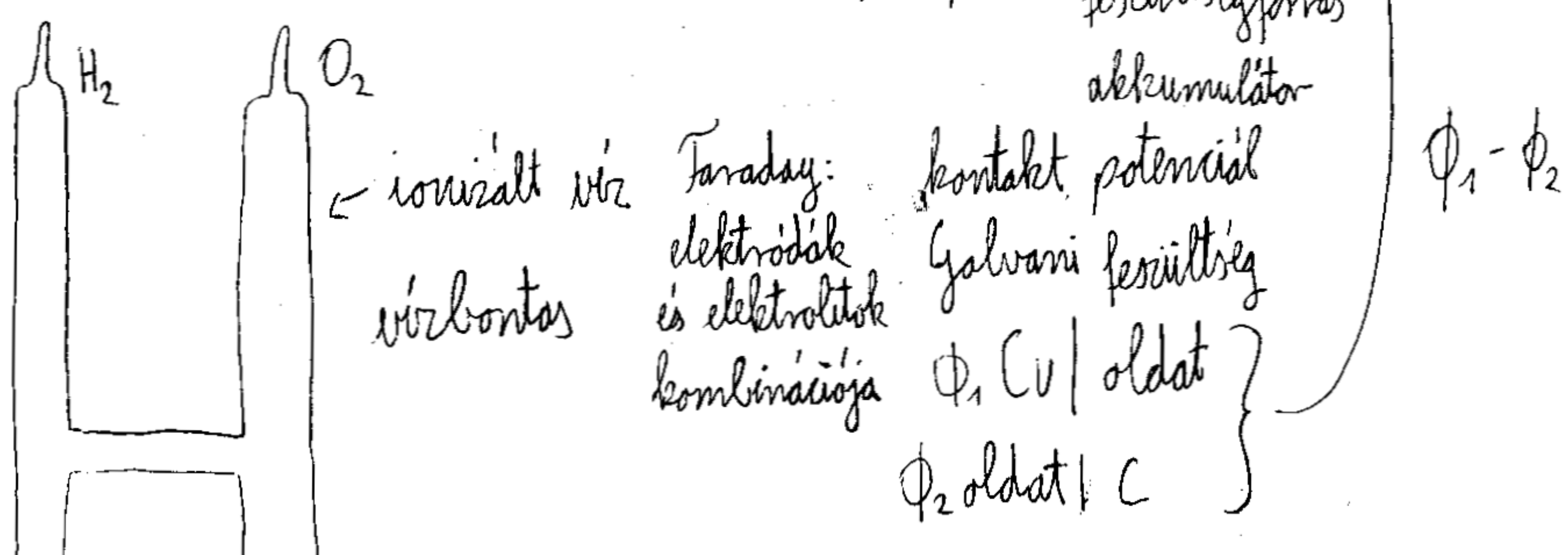




egyik elektrodán kiválik a réz → ezután →
ez az elektroda: katód
másik: anód

galvánelem

$\sim 1,1V$ feszültségforrás
akkumulátor



\mathcal{E} : elektromotoros erő $[\mathcal{E}] = V$ kémia → feszültség

$\vec{j} = \sigma \vec{E} \leftarrow \frac{\sum}{d} \equiv \vec{E}$ van térerősség, vannak szabad töltéshordozók →
→ van áram, de: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ mégis

$\vec{j} = \sigma (\vec{E} - \vec{E}_i)$
↑ idegen térerősség ← kémiai folyamatból, nem töltésekből

Tehát térerősség van, áramsűrűség nincs. \vec{E}_i - kémiai potenciál gradiense

elektrolit vezetés: másodlagos vezetés - anyag általában a vezetés során

$$\vec{j} = n^+ q^+ \vec{v}^+ + n^- q^- \vec{v}^- \quad n^+ q^+ = n^- q^-$$

$$\vec{v}^+ \neq \vec{v}^-$$

Ohm-törvény \sim jó.

$$\vec{E} \sim \vec{v}$$

$$\vec{v} = \mu \vec{E} \text{ mozgékonyság}$$

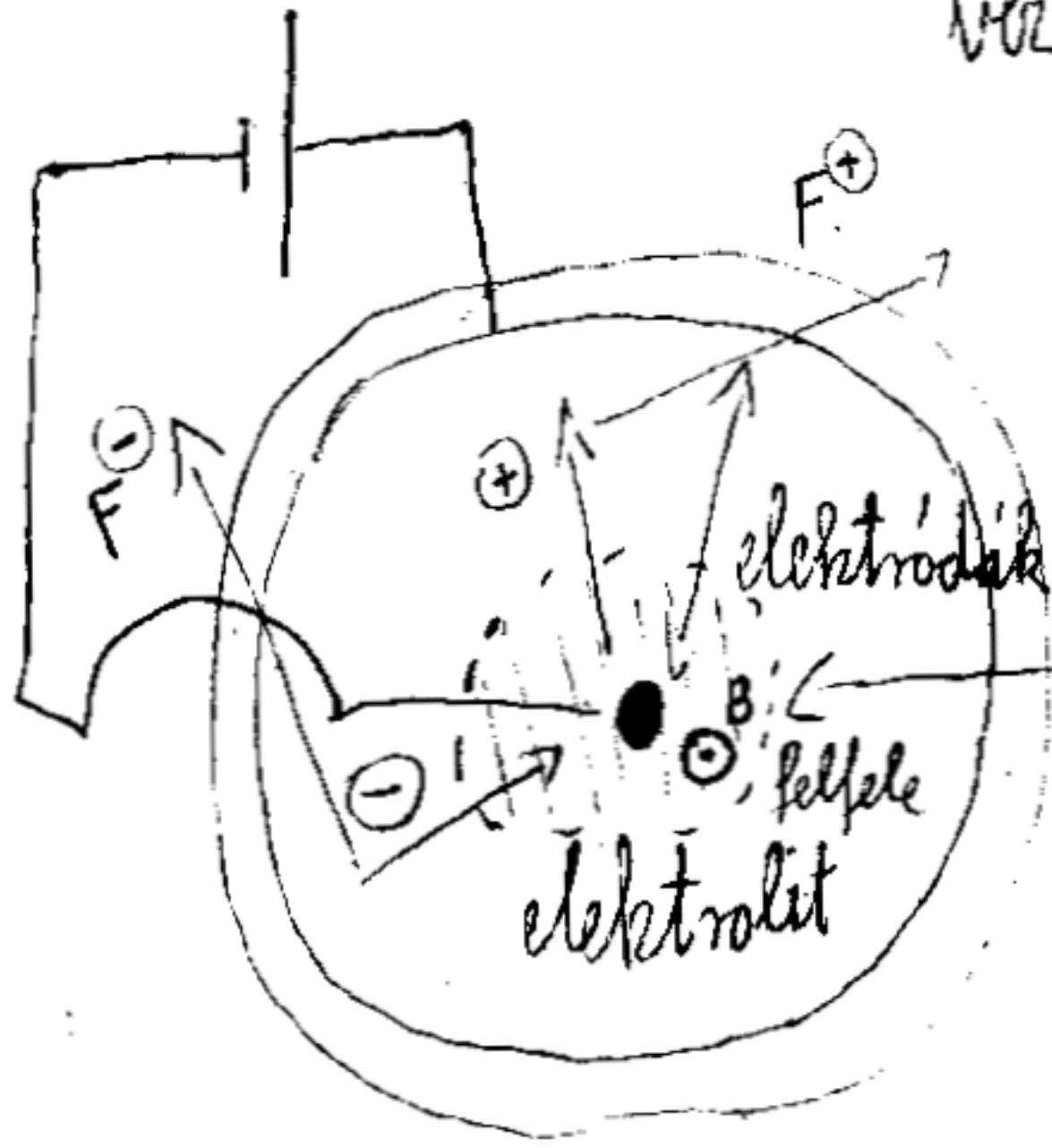
\hookrightarrow mobilitás: adott feszültség hatására milyen gyorsak lesznek a töltéshordozók

$$\vec{j} = n^+ q^+ \mu^+ \vec{E} + n^- q^- \mu^- \vec{E}$$

$$\sigma = n^+ q^+ \mu^+ + n^- q^- \mu^-$$

fajlagos vezetőképesség - elektrolitna

Hísérlet



kis hungaroceldarabot mozgatja

tálka alá mágnes ($F_L = q (\vec{v} \times \vec{B})$)

Faraday-törvénye: Elektrolízis Faraday-törvényei:

1., $m \sim Q$: elektrodákon átfolyó töltésmennyiség $\sim 1t$
 \hookrightarrow levált anyag

$$m = k Q \quad k: \text{elektrokémiai egyenérték}$$

2., $m \sim M$: móltömeg
 Z : vegyjérték ("töltésszám")

aluminium	3
réz	2
kálium	1

kombo: $k \sim \frac{M}{ZQ} = \frac{M}{ZF} \rightarrow \boxed{F = \frac{M}{Zk}}$

F: Faraday-állandó

m_0 : 1 levált ion tömege

$$m = m_0 \cdot N$$

\hookrightarrow levált ionok száma

$$k = \frac{M}{ZF} \quad k = \frac{m}{Q}$$

$$\frac{m}{Q} = \frac{M}{ZF}$$

$$\frac{m_0 N}{Q} = \frac{m_0 N_A}{ZF}$$

$$\frac{Q}{N} = \frac{Z \cdot F}{N_A}$$

1 db ion töltése

$$\frac{Q}{N} = Z \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

\hookrightarrow egész szám

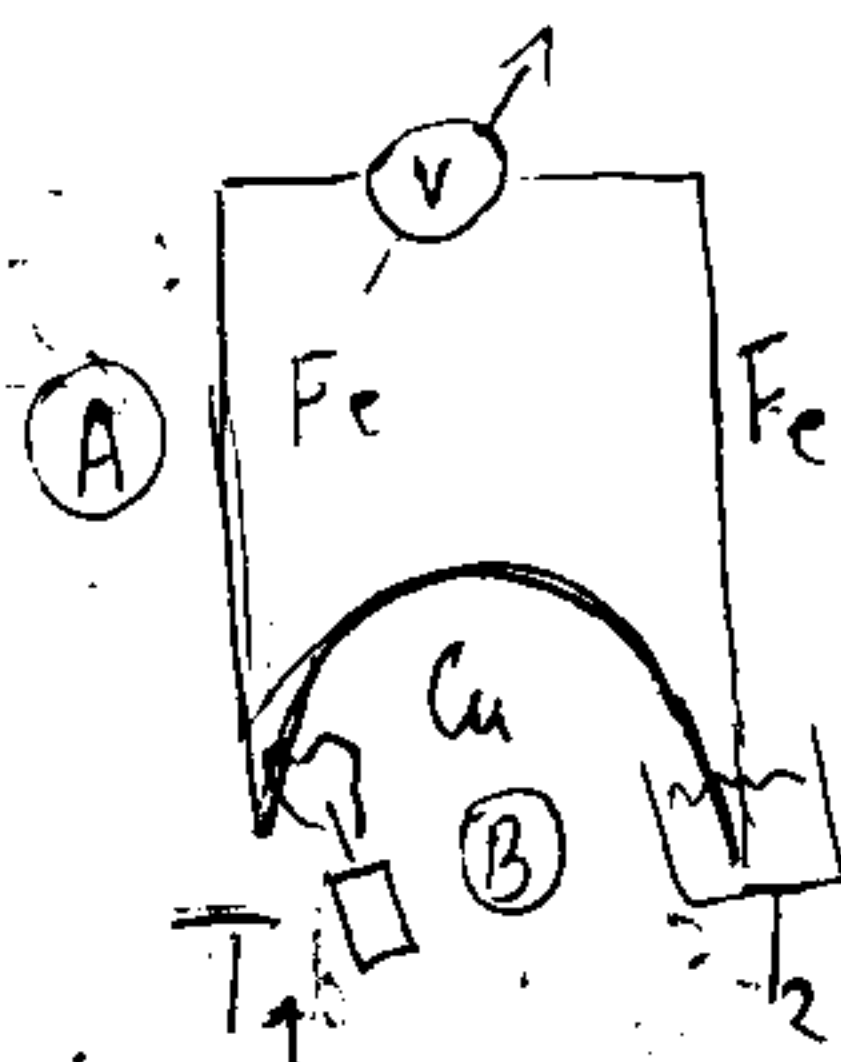
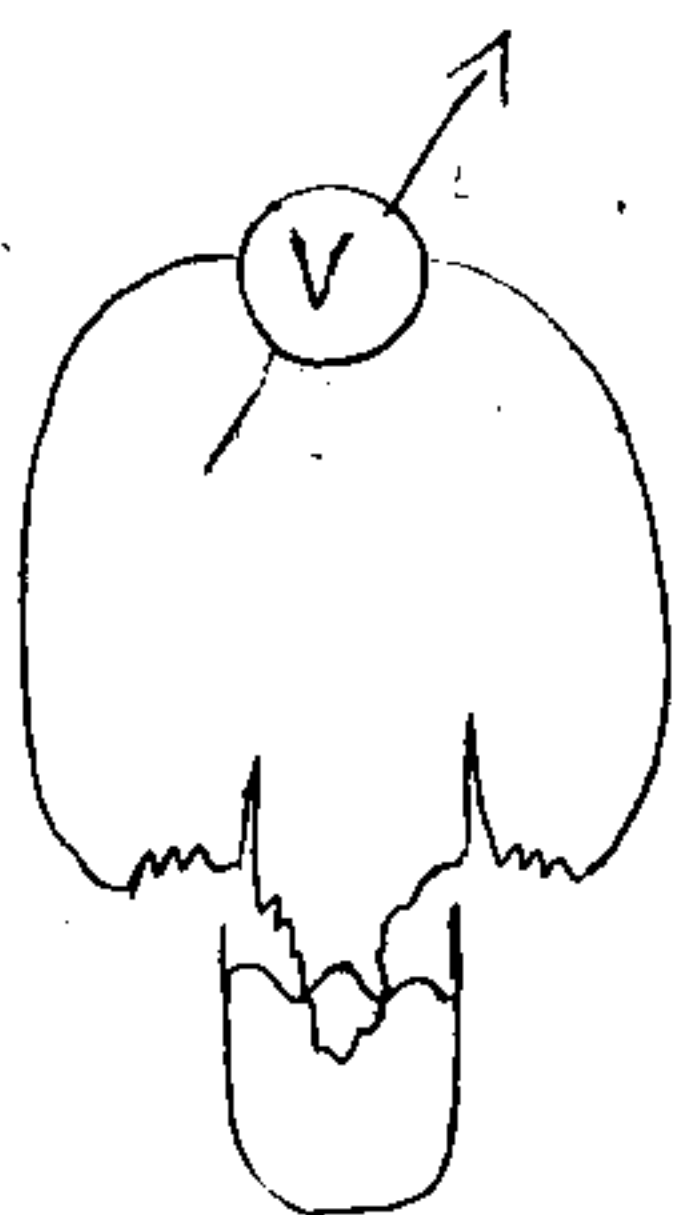
$$F = 96500 \frac{C}{mol} \text{ bármely}$$

kémiai folyamatok az elektrodákon

$$40. M = m_0 \cdot N_A$$

Termoelektromos jelenségek

Théoréma:



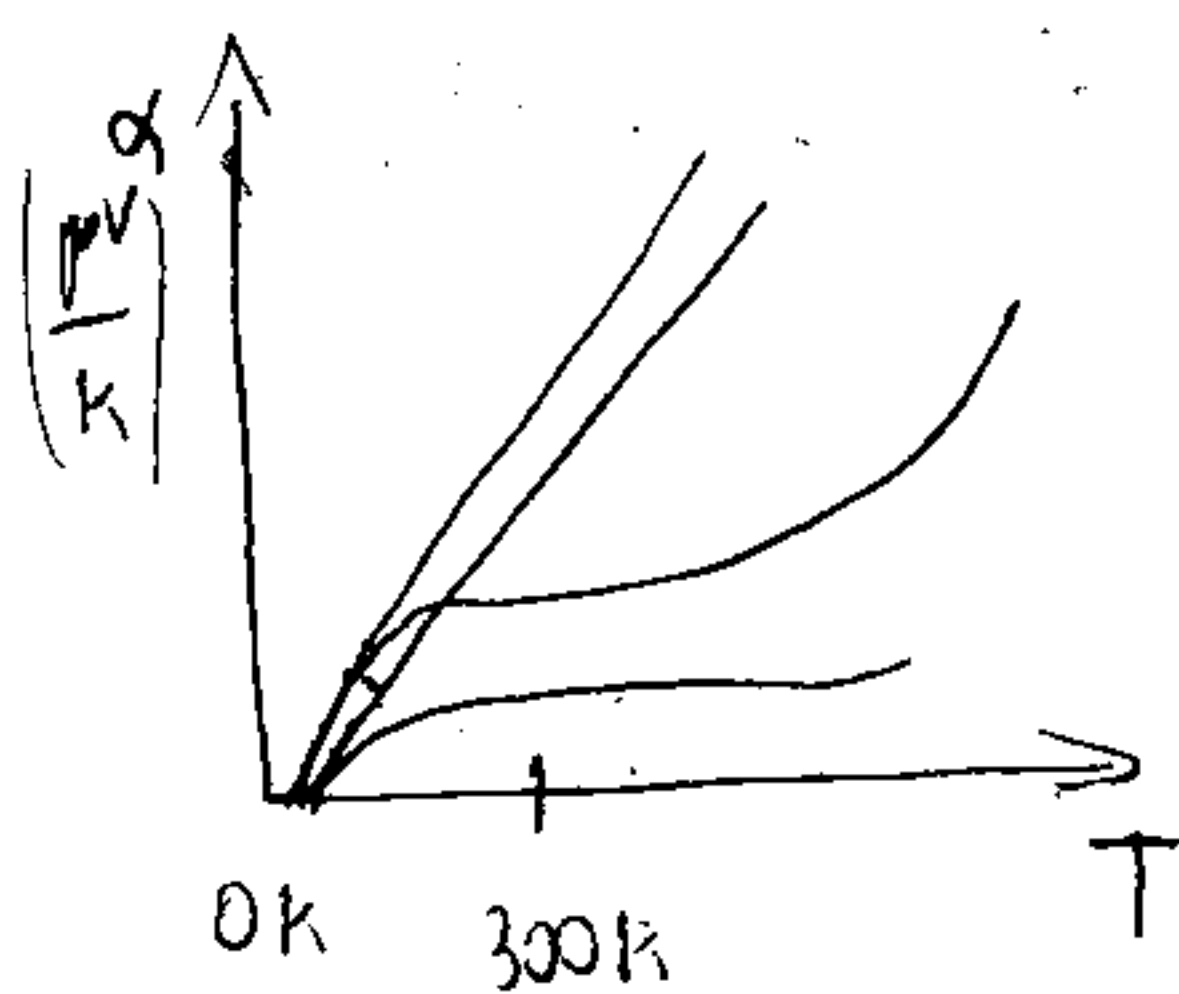
$$\Delta T = T_1 - T_2 = 0$$

$$\Delta U = 0$$

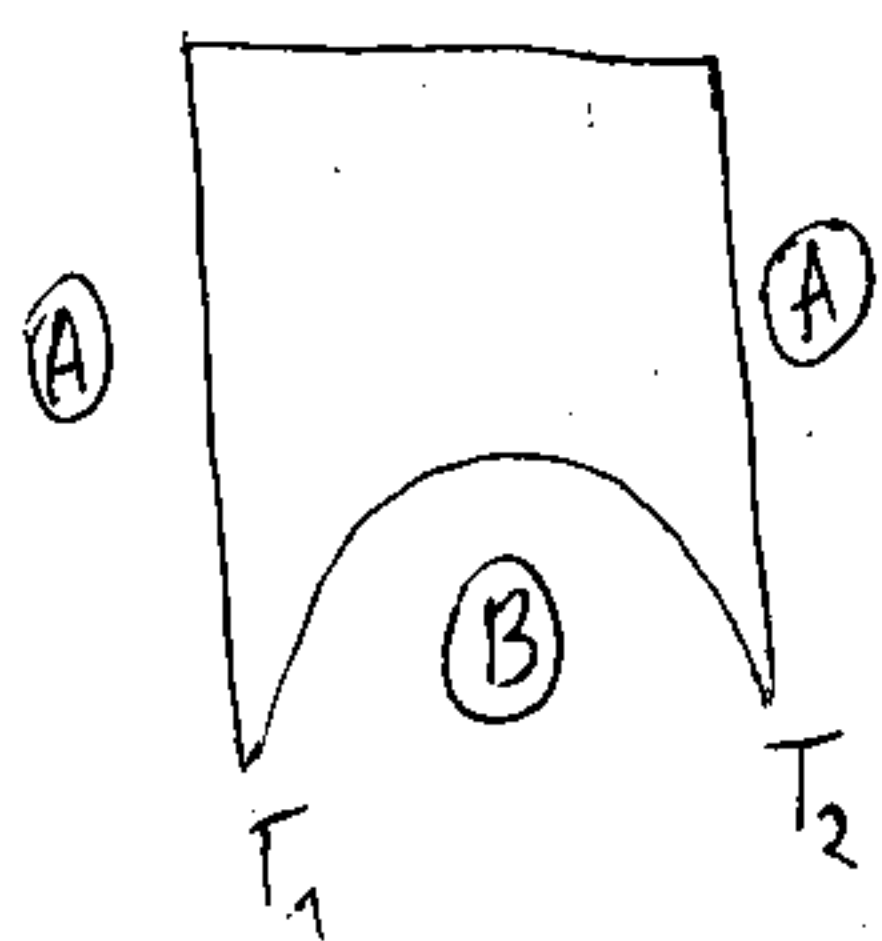
\textcircled{V} kitér melegítés hatására $T_1 \uparrow$ T_2 -áll $\Delta T \neq 0$
 \hookrightarrow termofeszültség $\Delta U_T (\Delta T)$ $\Delta U \neq 0$

$$U_T = \alpha_{AB} (T_1 - T_2) + \beta_{AB} (T_1 - T_2)^2 + \dots$$

$$U_T \approx \alpha_{AB} (T_1 - T_2) \quad \alpha \approx 10-50 \frac{\mu V}{K}$$



széles tartományban működik \rightarrow hőmérsékletmérés \rightarrow
 \rightarrow termoelem - termopár pl.: K-típusú: $Ni_{90}Cu_{10}$
 $-200^\circ C - 1250^\circ C$ - $Ni_{90}Mn_{10}Al_2Si_1$
 meddig monoton?



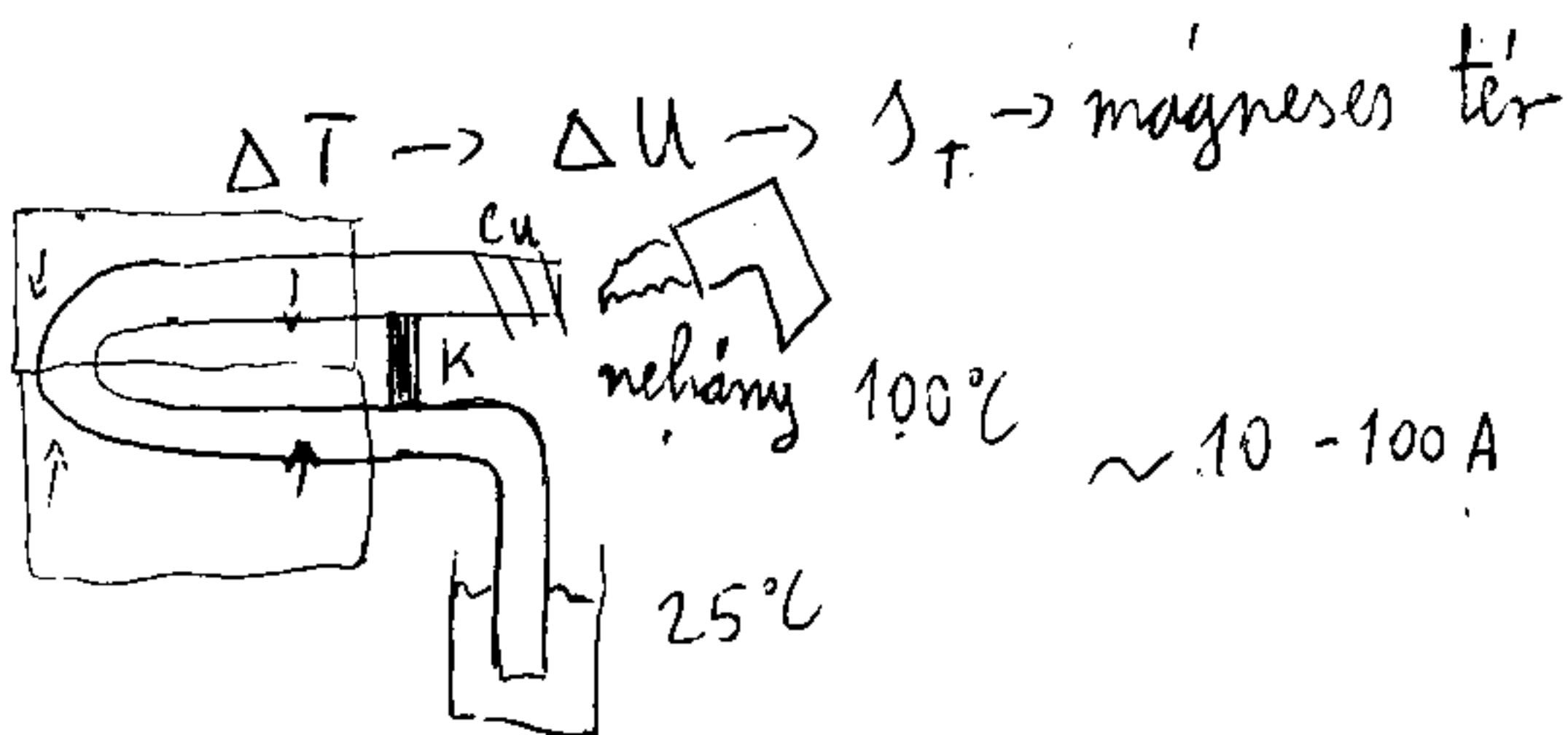
$\rightarrow \Delta T \rightarrow \Delta U \rightarrow I_T$ Seebeck-effektus

$$I_T (U_T, R, \dots)$$

termoáram

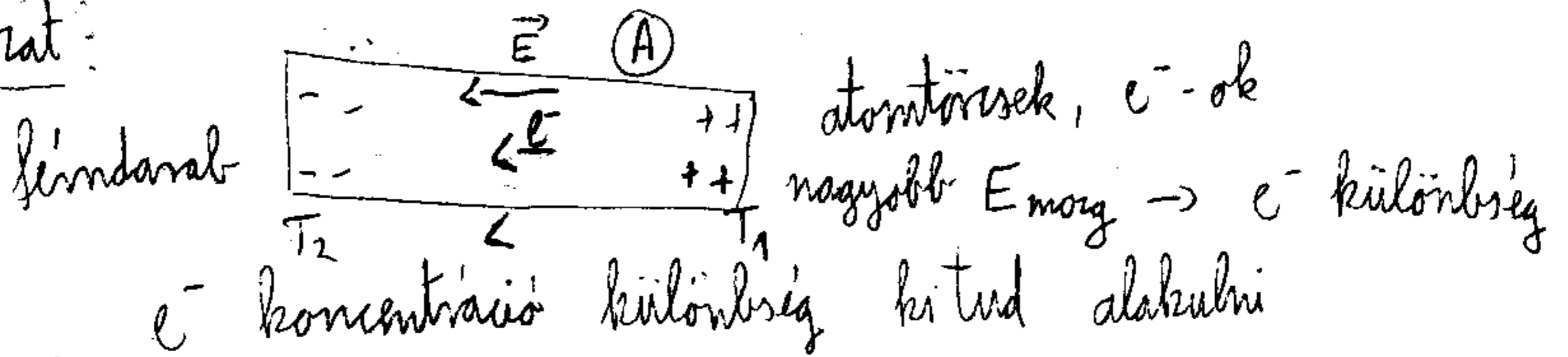
Théoréma: nagy I_T -re

2 lémpozíció



Mágneses kapaszitorok - termo (elektromos) kapaszitorok adott hőmérséklet →
 mágneses → kapaszitor

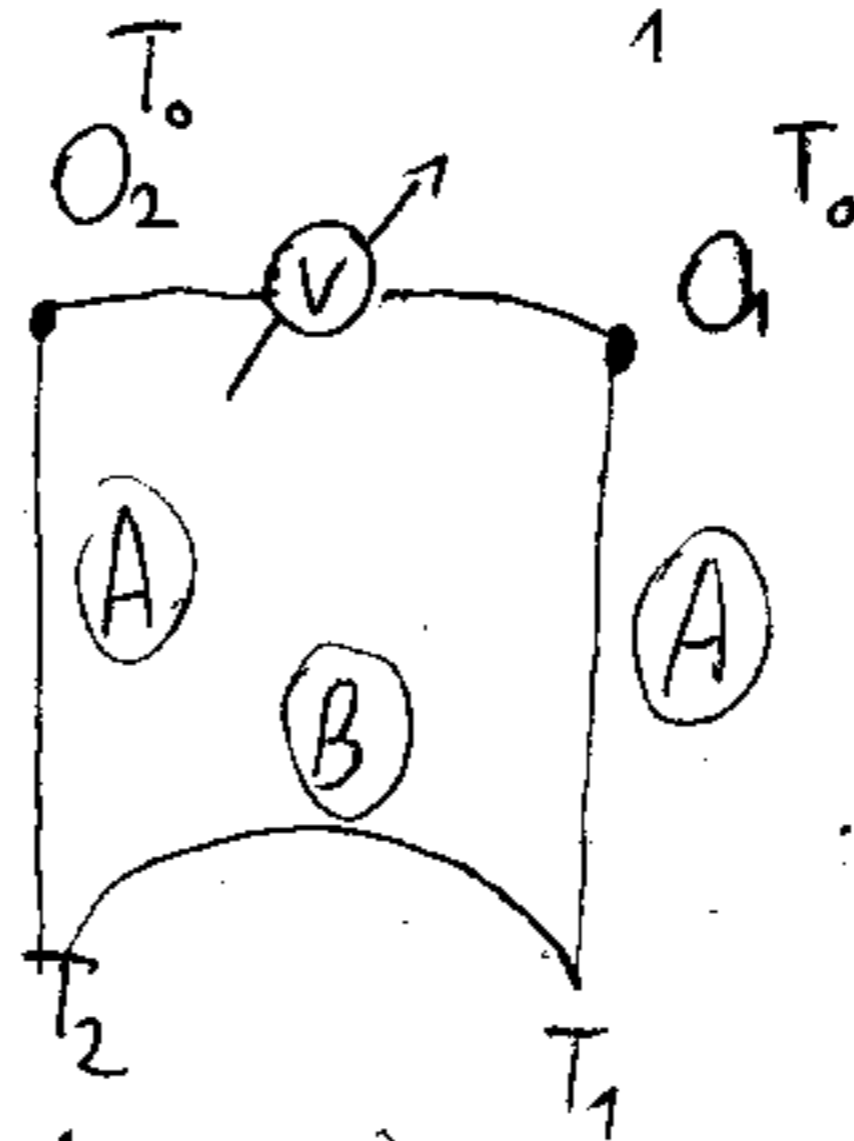
Magyarozat:



$\vec{E}_T = -S_A \text{ grad } T$
 ↑
 anyagi tulajdonság

$U_T = -\int_1^2 \vec{E}_T \cdot d\vec{r}$
 (T₁ - T₀)

alabmarozuk erre az esetre



$U_T = + \int_{T_2}^{T_1} S_A \text{ grad } T \cdot d\vec{r} +$
 $+ \left(+ \int_{T_2}^{T_1} S_B \text{ grad } T \cdot d\vec{r} \right) -$
 $+ \int_{T_2}^{T_0} S_A \text{ grad } T \cdot d\vec{r} =$

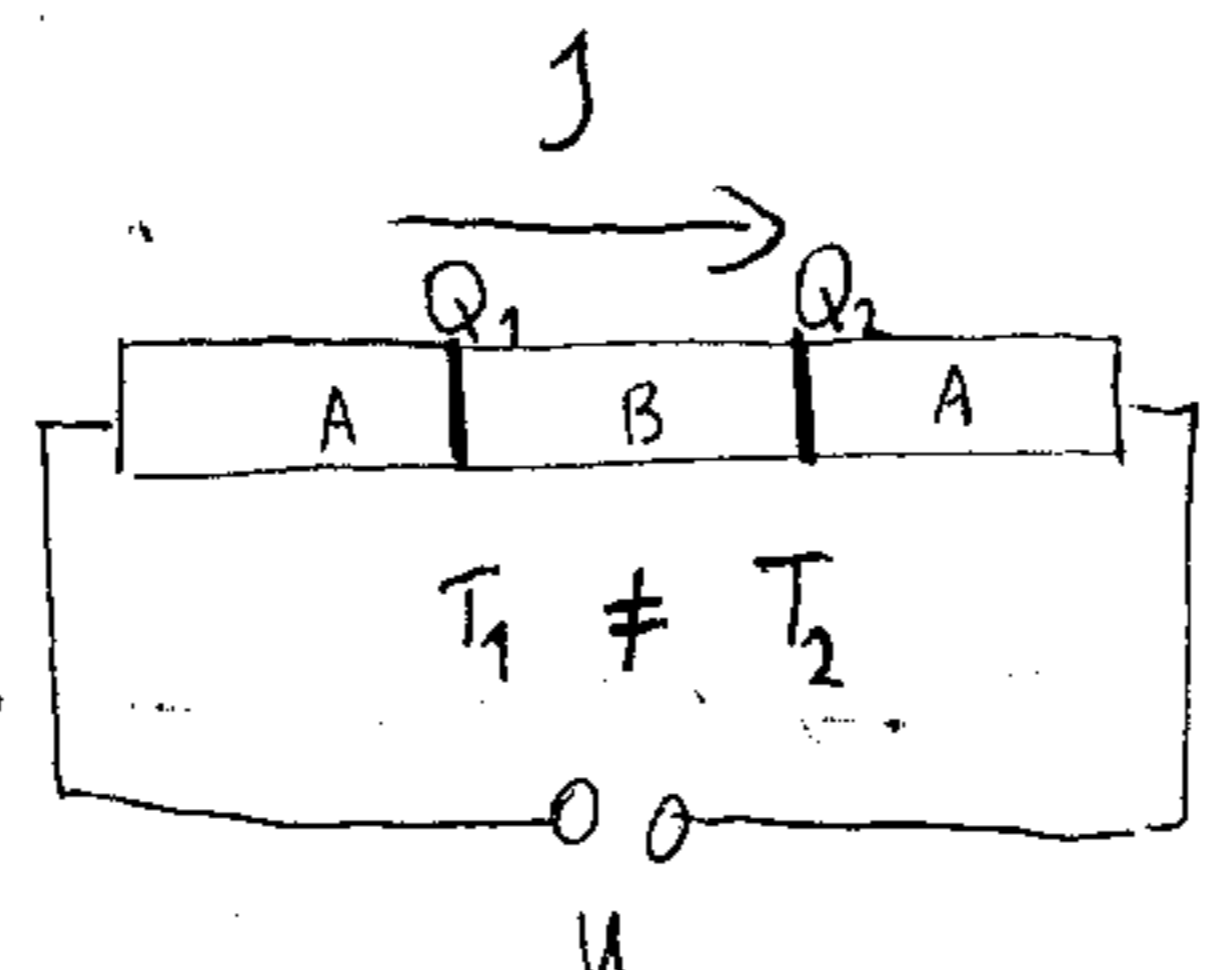
$= + S_A (T_1 - T_0) + S_B (T_2 - T_1) + S_A (T_0 - T_2) =$

$= + S_A T_1 - S_A T_0 + S_B T_2 - S_B T_1 + S_A T_0 - S_A T_2 = S_A (T_1 - T_2) - S_B (T_1 - T_2)$

$U_T = (T_1 - T_2) \underbrace{(S_A - S_B)}_{\alpha_{AB}} = \alpha_{AB} (T_1 - T_2)$

Peltier effektus:

$\left[\frac{V}{C} \right] = \frac{J}{C} = \frac{W/s}{C} = V$



$Q_1 = - Q_2 = Q_{\text{Peltier}}$
 ↓ hő

$Q_{\text{Peltier}} = \Pi_{AB} \cdot q$

\$q\$ - átvitt töltés

$q = J \cdot \Delta t$

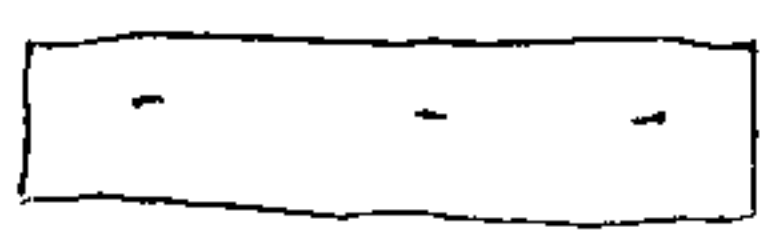
Joule hő: $Q_{\text{Joule}} = \Delta t \cdot U \cdot J \sim J^2 \sim q^2$

Peltier hő: $Q_{\text{Peltier}} \sim q \sim J \leftarrow$ Peltier-hűtés

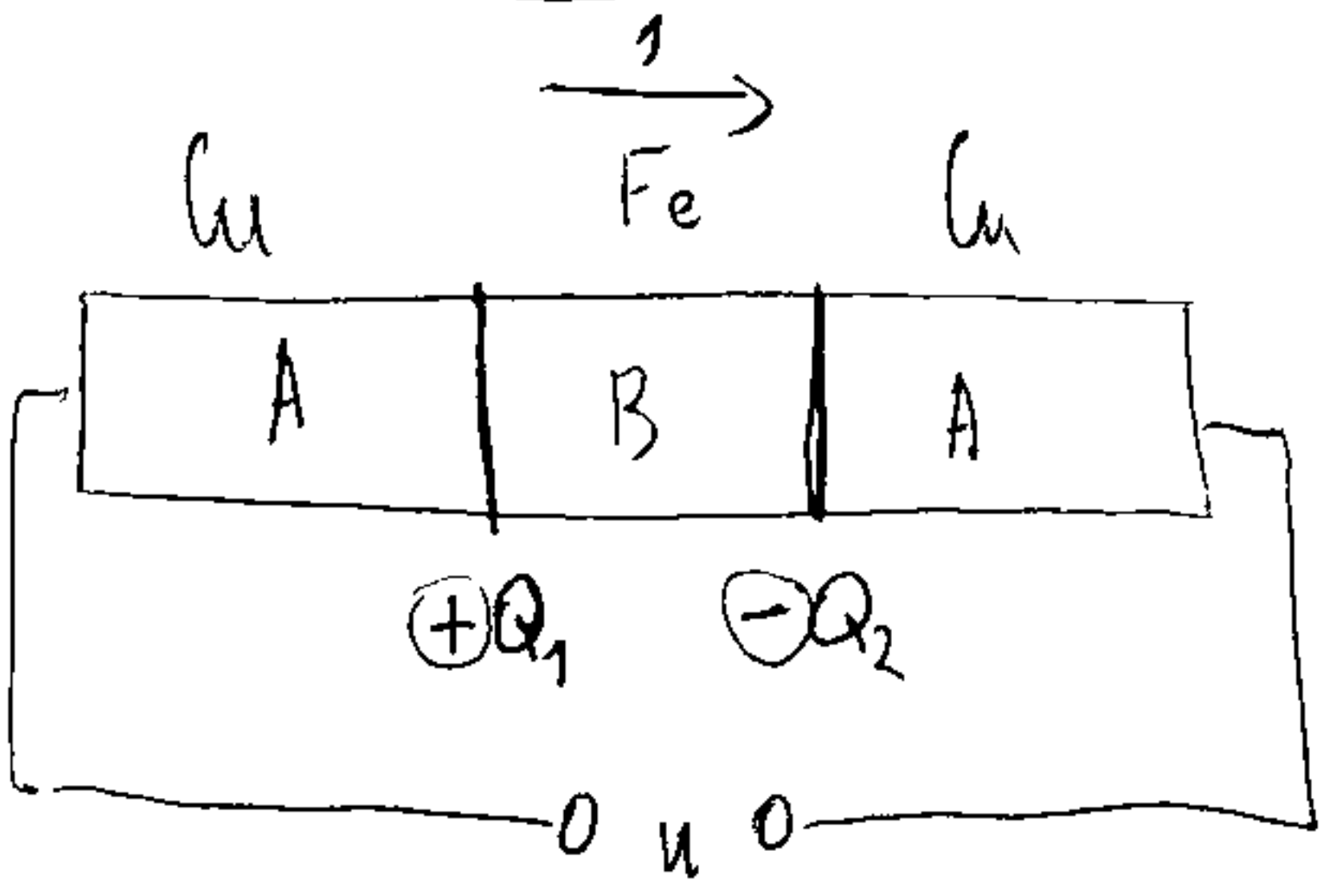
\$J\$ - t megfordítva $\to T_1 \leftrightarrow T_2$ felcserelődik $\to \Pi_{AB} = -\Pi_{BA}$

$\alpha_{AB} \cdot T = \Pi_{AB}$

fém



kilépési munka $\approx 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$



kilépési munka más, különböző fémeknél

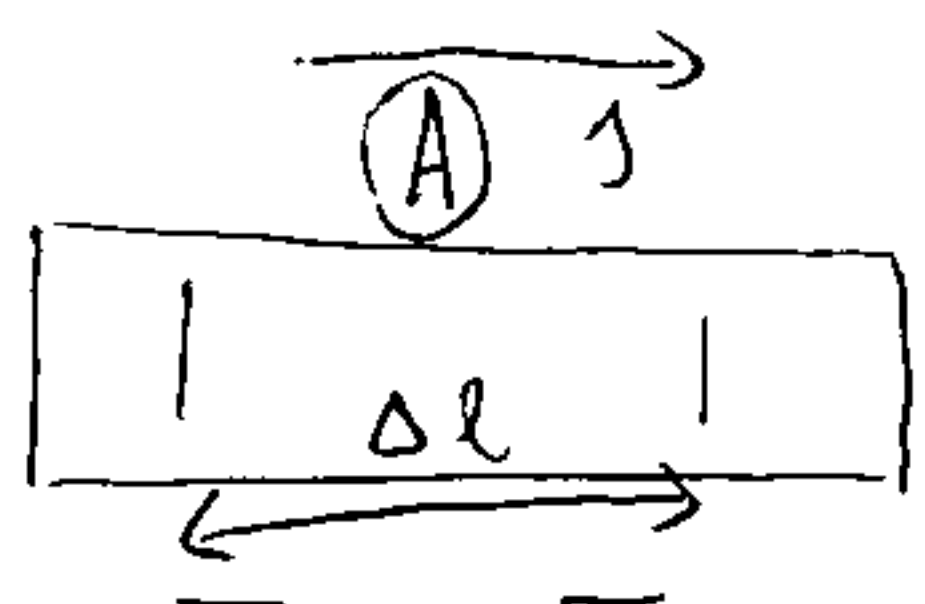
$$W_{Cu} > W_{Fe}$$

$$W_{Cu} - W_{Fe} = Q_1 > 0$$

$$W_{Fe} - W_{Cu} = Q_2 < 0$$

$I \rightarrow Q_{Peltier} \rightarrow \Delta T \rightarrow U_T \rightarrow I_T$ I_T (fordított) az I -vel ellentétes

Thomson-effektus:



$T_1 \neq T_2 \Rightarrow \text{grad } T$

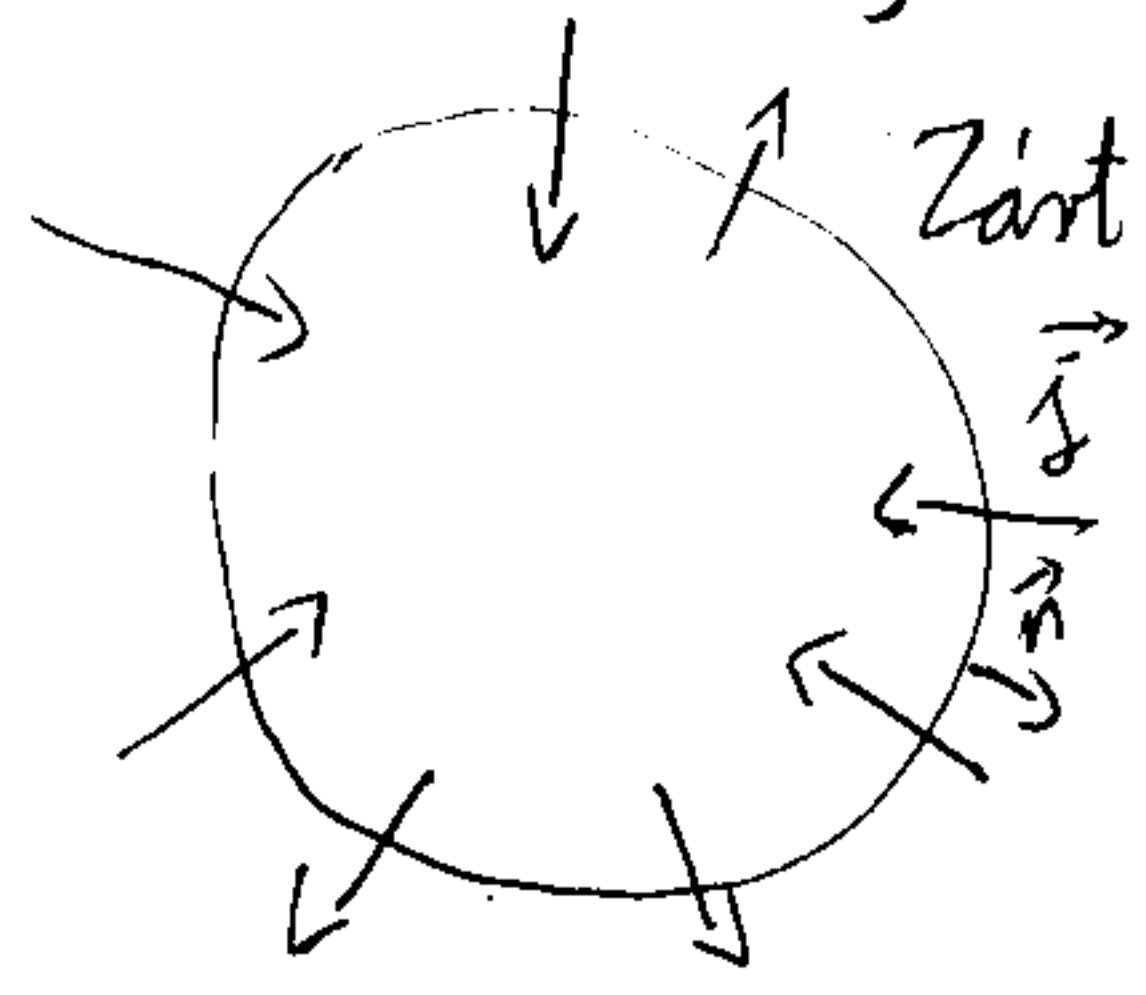
$$Q_{\text{Thomson}} = \tau_A \cdot I \cdot \text{grad } T \cdot \Delta l$$

Shirchhoff-törvények

Elektromos áramkörök:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad |\vec{j}| = \frac{dI}{d\vec{l}} \quad \rho = \frac{e}{A} = R \quad \sigma = \frac{1}{\rho}$$

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{l} = I \quad R = \frac{U}{I} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho}$$



Zárt felület - G

$$\oint_G \vec{j} \cdot d\vec{l} + \frac{dQ}{dt} = 0$$

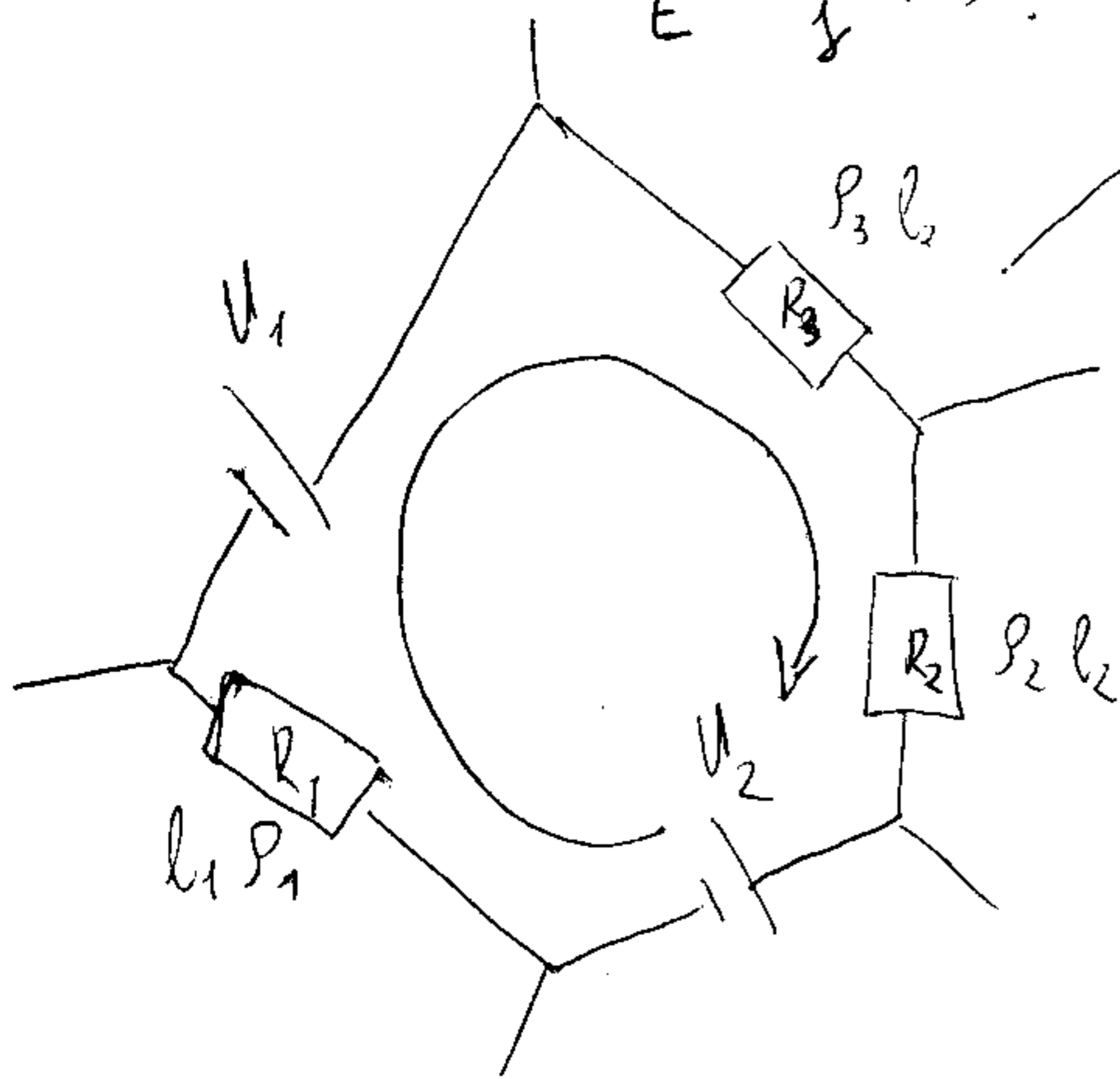
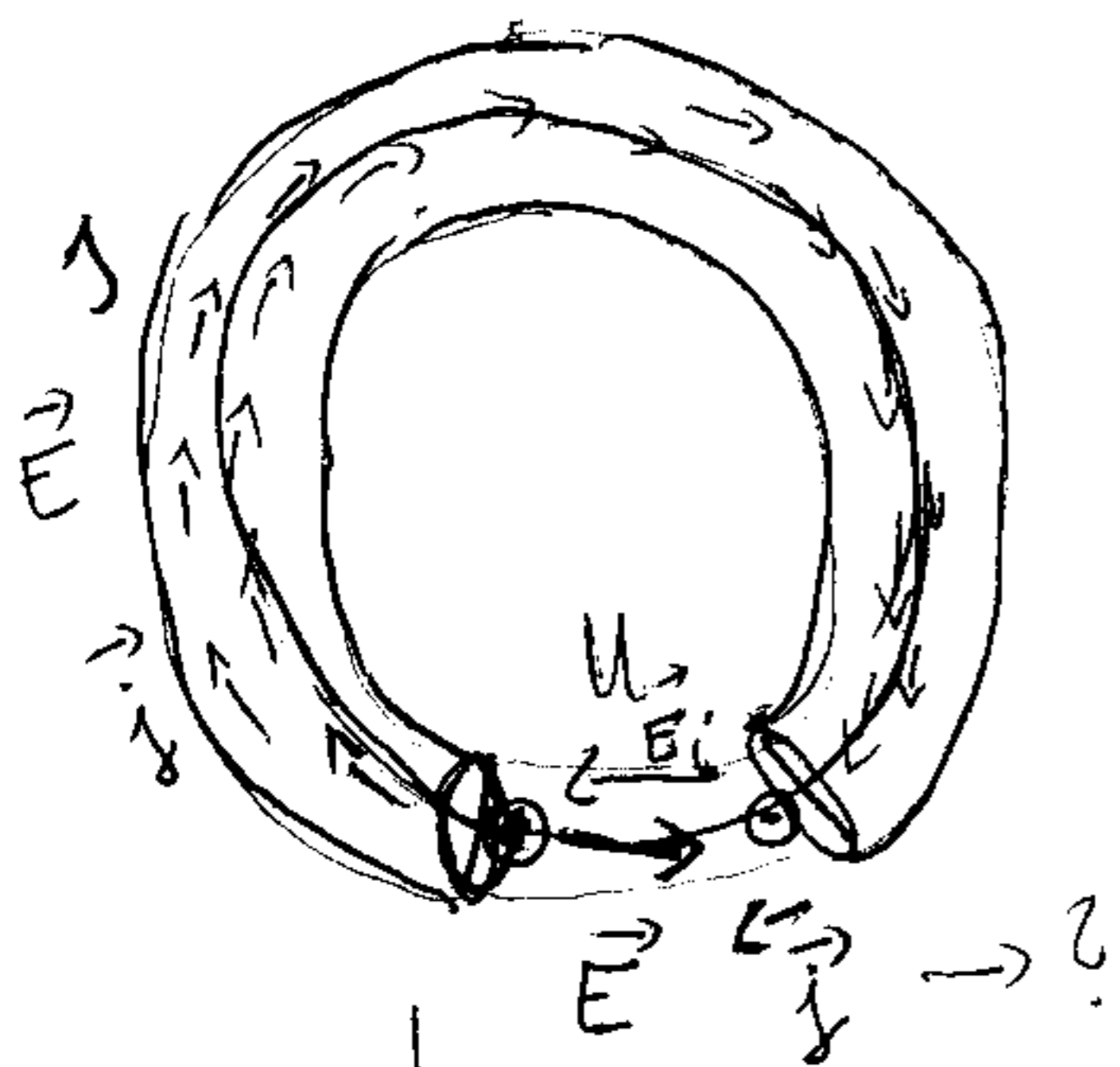
amennyi áram kimegy $\sim -dQ$ felületben be-
felületelem normálisa kifelé
be-
maradt

stationárius áramnál: $\frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow \oint_G \vec{j} \cdot d\vec{f} = 0$

áramvonalak zárt görbék

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} - \vec{E}_i) = \frac{1}{\rho}(\vec{E} - \vec{E}_i)$$

$$\vec{E} = \rho \vec{j} + \vec{E}_i$$



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint \rho \vec{j} \cdot d\vec{r} + \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r}$$

\parallel \parallel \parallel
 0 (A) (B)

$$(A) = \rho_1 j_1 l_1 + \rho_2 j_2 l_2 + \dots =$$

$$= \underbrace{\rho_1 \frac{l_1}{A_1}}_{R_1} \underbrace{j_1 A_1}_{I_1} + \underbrace{\rho_2 \frac{l_2}{A_2}}_{R_2} \underbrace{j_2 A_2}_{I_2} + \dots =$$

$$= \sum_i I_i R_i$$

$$(B) = \int \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = -\mathcal{E}_i : \text{elektromotors erő} [V]$$

$$0 = \sum_i I_i R_i + \sum_j -\mathcal{E}_j = \sum_i I_i R_i - \sum_j \mathcal{E}_j \rightarrow \boxed{\sum_j \mathcal{E}_j = \sum_i I_i R_i}$$

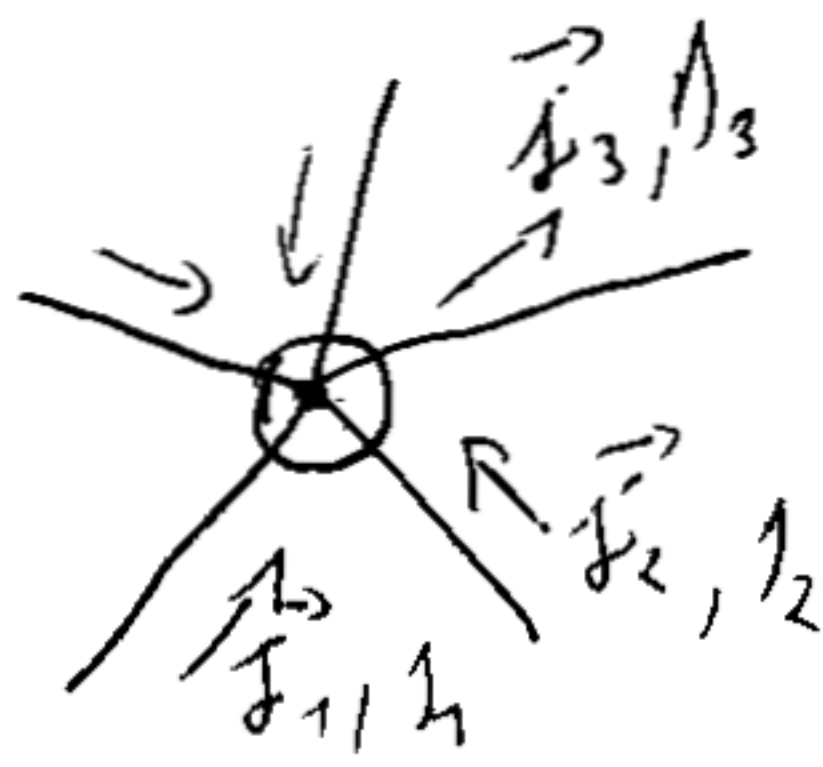
Gustav R. Kirchhoff

1824-1887

Kirchhoff I. törvénye

Kurok-törvény
bármely kurokra

$$\oint \vec{j} d\vec{l} = 0$$



$$\sum_i j_i = 0$$

Kirchhoff II. törvénye
Csomóponti-törvény

Összefoglalva:

stacionárius eset

$$\oint \vec{j} d\vec{l} = 0$$

$$\oint \vec{E} d\vec{r} = 0$$

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} - \vec{E}_i)$$

↑
kémiai potenciál
gradiense

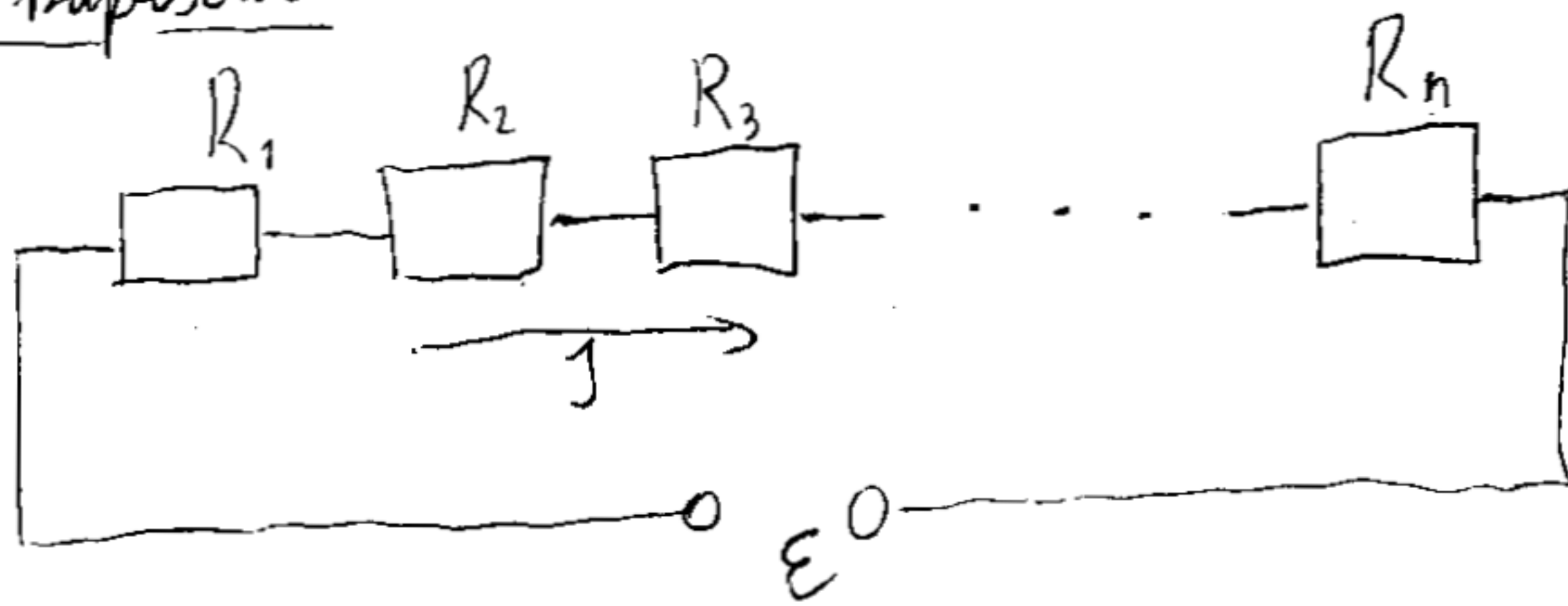
$$\sum_i R_i j_i = \sum_i \mathcal{E}_i$$

lineáris hálózat $\rightarrow U = Rj$
erre alkalmazható

$$\sum_i j_i = 0$$

PL:

Soros kapcsolás:



$$R_e = \sum_i R_i$$

$$R_e = \frac{\mathcal{E}}{j} = \sum_i R_i$$

$$\mathcal{E} = \sum_i R_i j_i = j \sum_i R_i$$

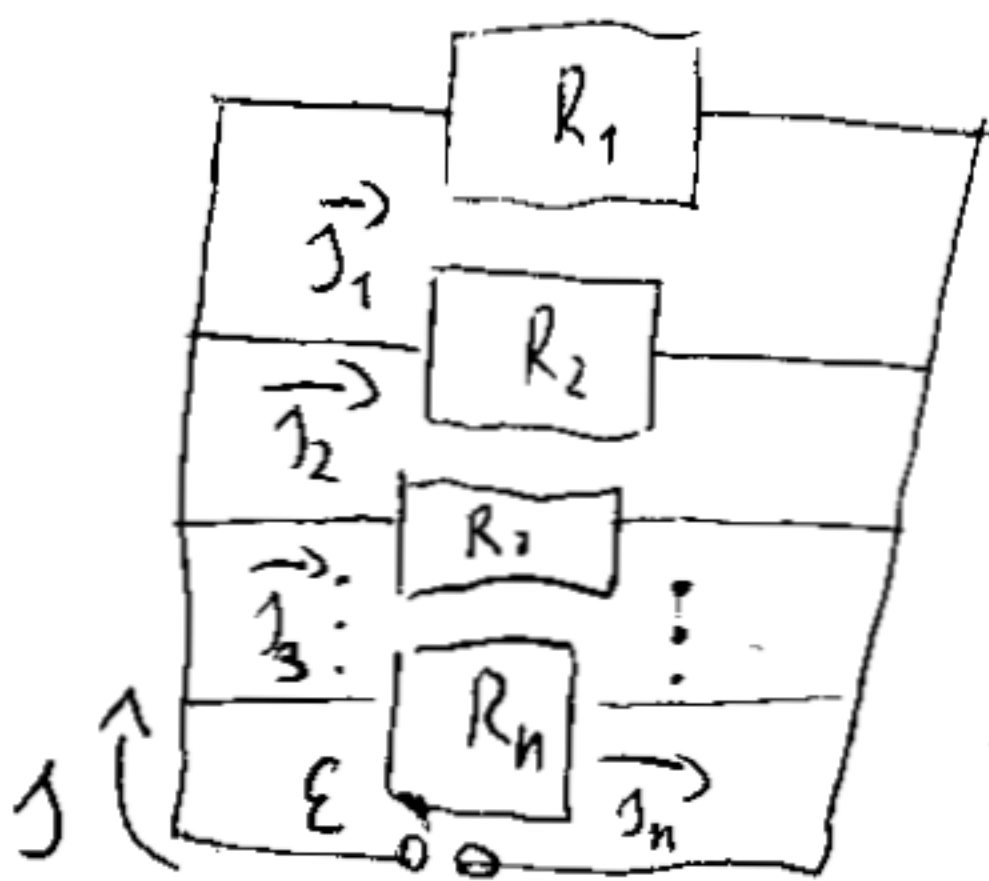
Párhuzamos kapcsolás:

$$j - \sum_i j_i = 0$$

$$j = \sum_i j_i$$

$$U_i = \mathcal{E}$$

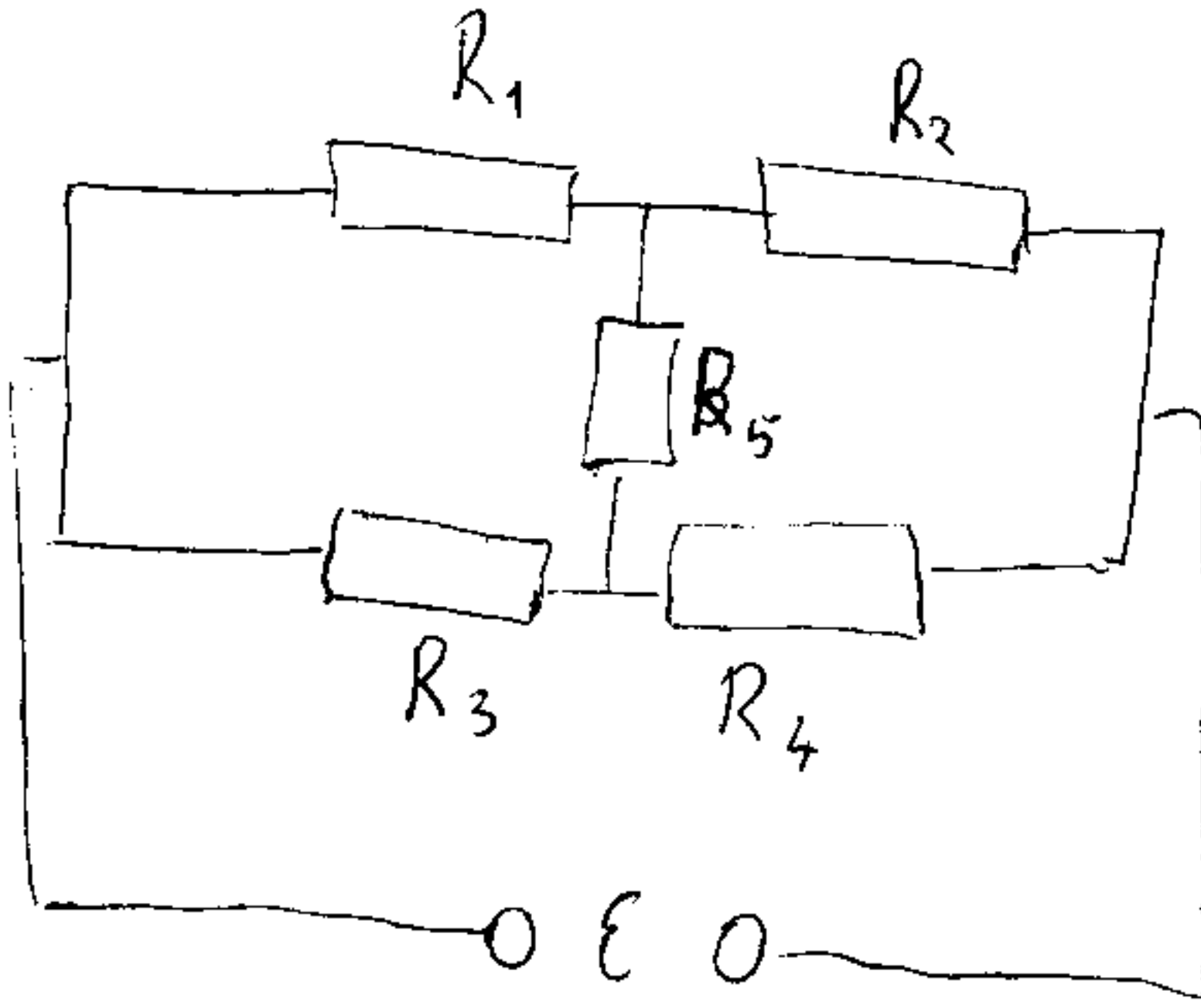
$$\mathcal{E} = j_i R_i$$



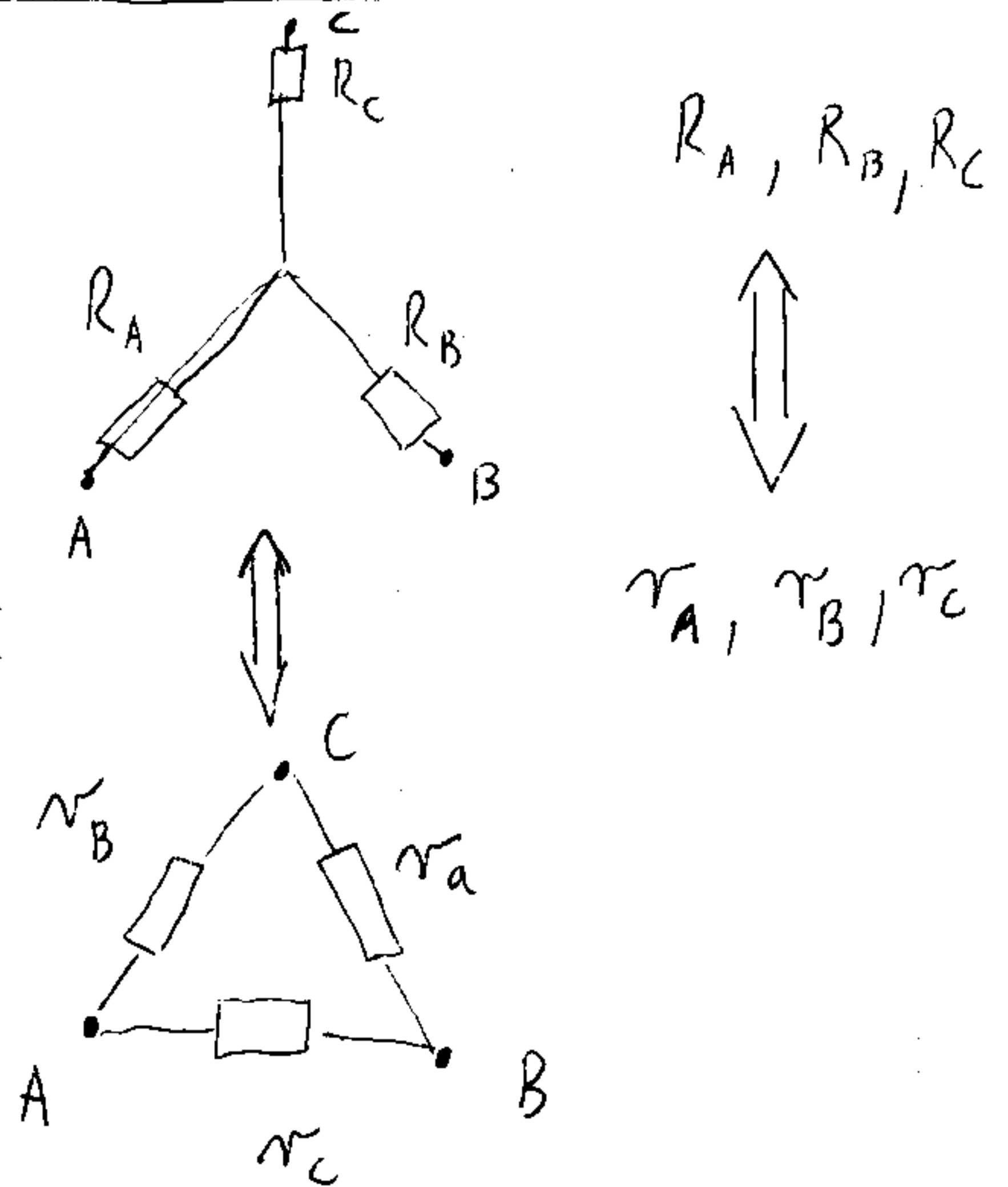
$$R_e = \frac{\mathcal{E}}{j} = \frac{\mathcal{E}}{\sum_i j_i} = \frac{\mathcal{E}}{\sum_i \frac{\mathcal{E}}{R_i}} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E} \sum_i \frac{1}{R_i}} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{R_i}}$$

$$\frac{1}{R_e} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad \left(R_e = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{2 ellenállásra párhuzamos kapcsolásnál} \right)$$

Egyéb kapcsolás:



Y-Δ átalakítás:



$$1) R_A + R_B = \frac{r_C (r_A + r_B)}{r_C + r_A + r_B}$$

$$2) R_B + R_C = \frac{r_A (r_B + r_C)}{r_A + r_B + r_C}$$

$$3) R_C + R_A = \frac{r_B (r_C + r_A)}{r_B + r_C + r_A}$$

$$(1) - (2) + (3)$$

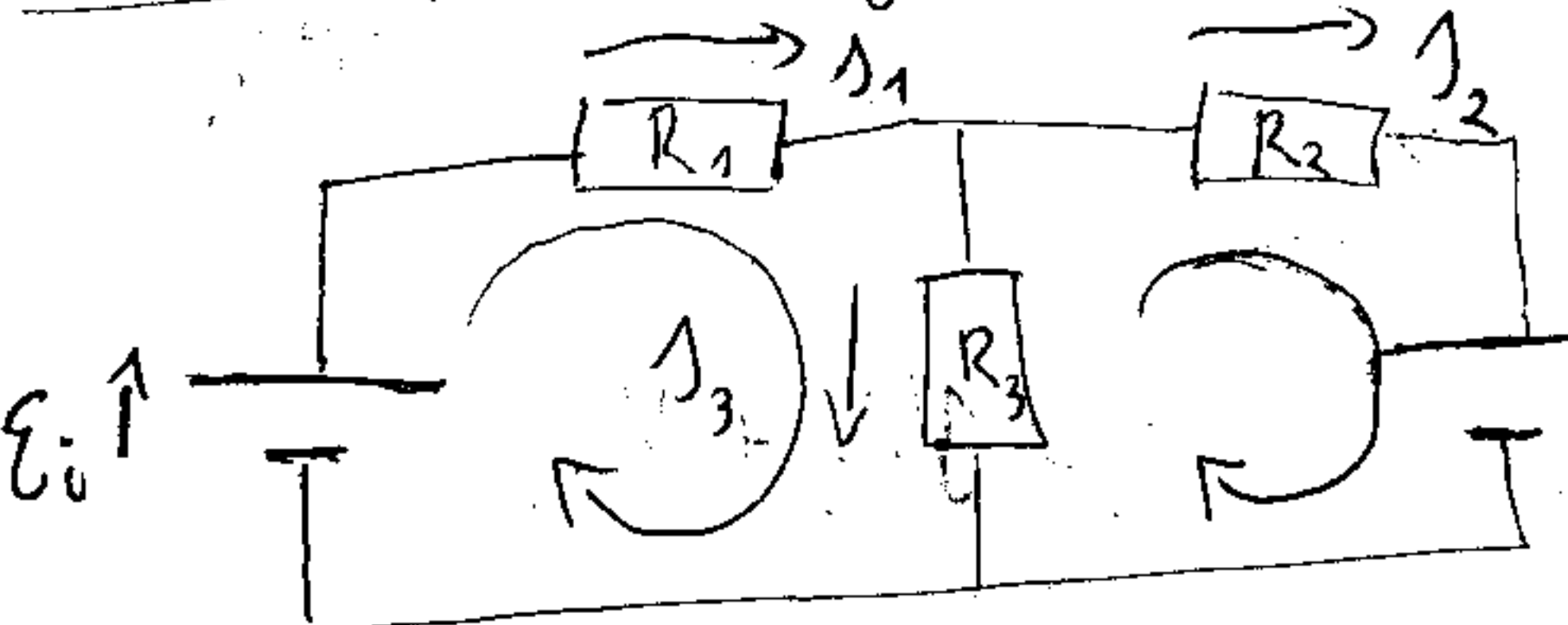
$$\begin{aligned} R_A + R_B - R_B - R_C + R_C + R_A &= \\ &= \frac{r_C r_A + r_C r_B - r_A r_B - r_A r_C + r_B r_C + r_B r_A}{r_A + r_B + r_C} = \\ &= \frac{2 r_B r_C}{r_A + r_B + r_C} = 2 R_A \end{aligned}$$

$$R_A = \frac{r_B r_C}{r_A + r_B + r_C}$$

$$R_B = \frac{r_C r_A}{r_A + r_B + r_C}$$

$$R_C = \frac{r_A r_B}{r_A + r_B + r_C}$$

Kirchhoff-törvények általában:

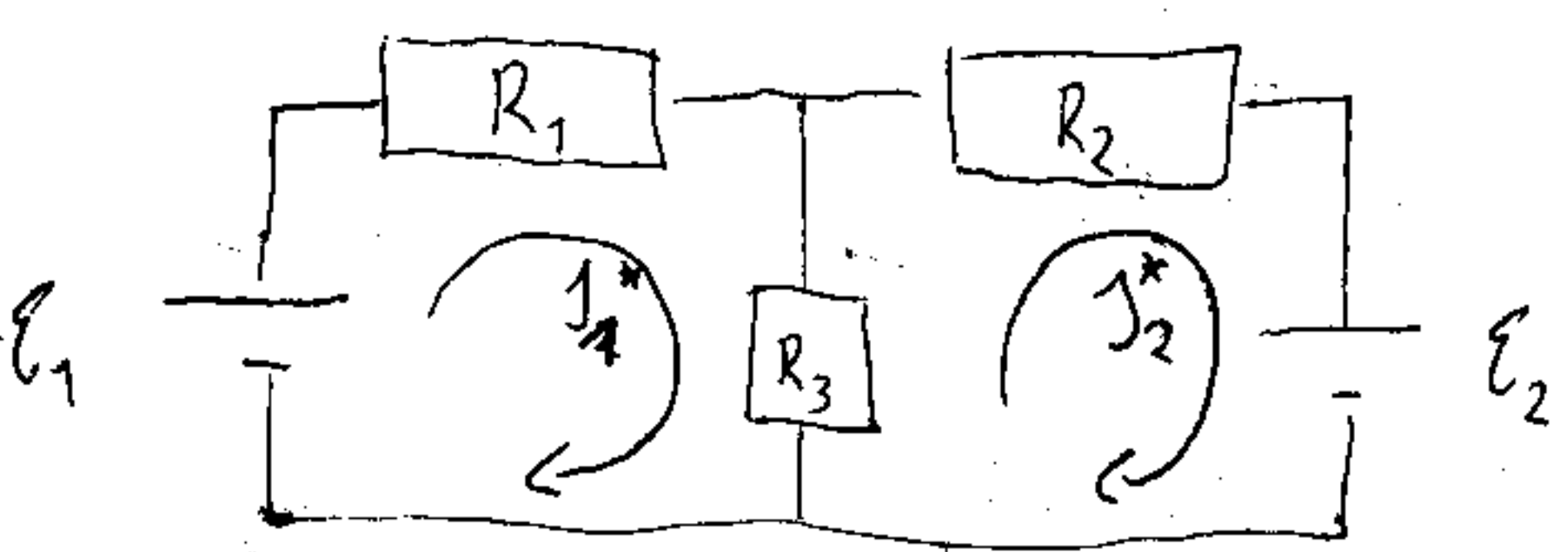


$$\sum I_i = 0 \Rightarrow I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 R_1 + I_3 R_3 &= \varepsilon_1 \\ -I_3 R_3 + I_2 R_2 &= -\varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\underline{A} \cdot \underline{I} = \underline{b} \Rightarrow \underline{I} = ?$ lineáris egyenletrendszer $\Rightarrow I_i$, ha R_i, ε_i ismert

Más módszer:



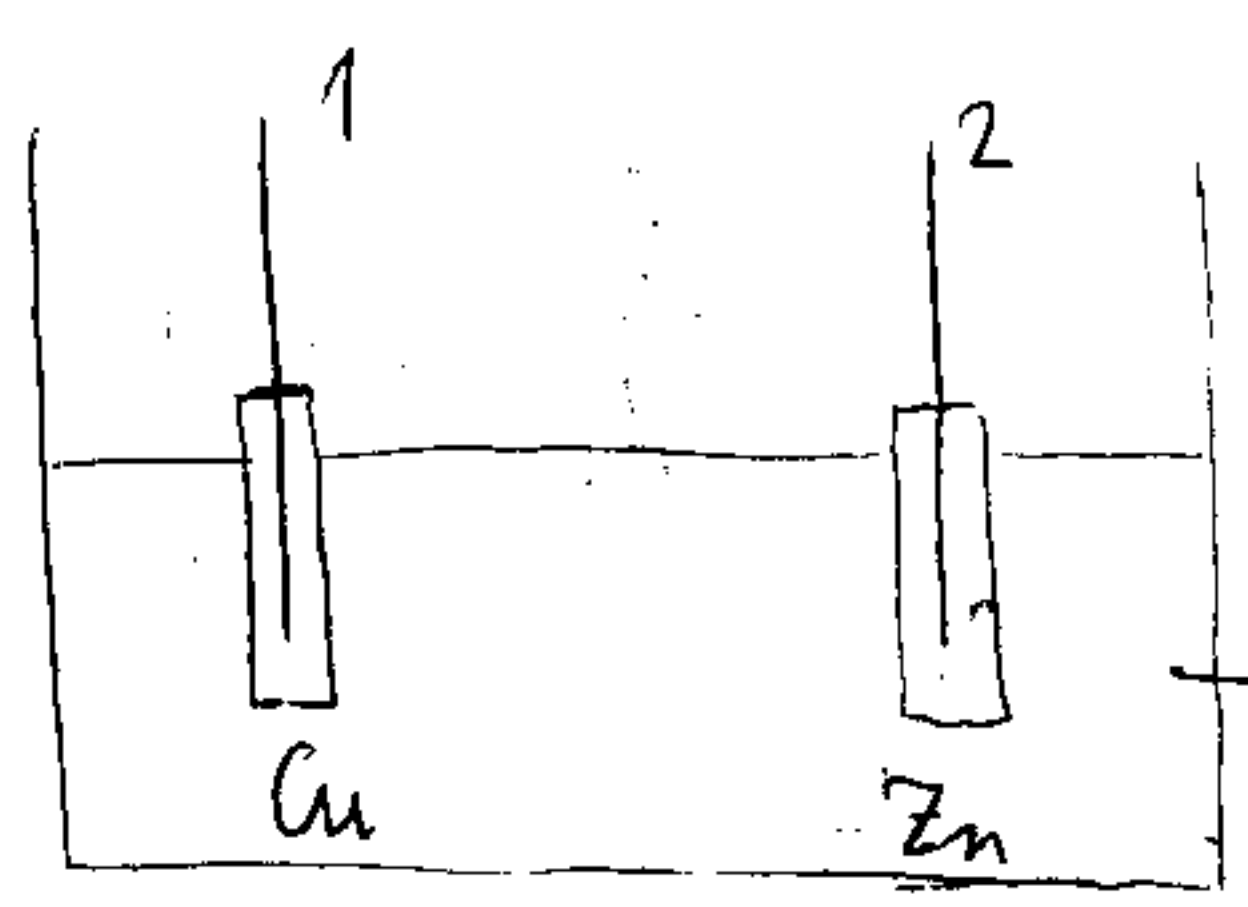
$$I_3 = I_1^* - I_2^*$$

$$I_1 = I_1^*$$

$$I_2 = I_2^*$$

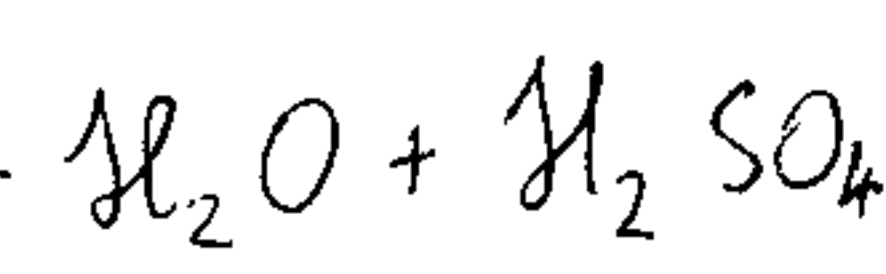
$$\Leftrightarrow I_1 - I_2 - I_3 = 0 = I_1^* - I_2^* - I_1^* + I_2^*$$

Nalódi telep:



$U = 1,5 V$

$\vec{j} = \sigma(\vec{E} - \vec{E}_i)$



$U = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} =$

$= \int_1^2 \frac{j}{\sigma} d\vec{r} - \int_1^2 \vec{E}_i \cdot d\vec{r} =$

$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} + \vec{E}_i$

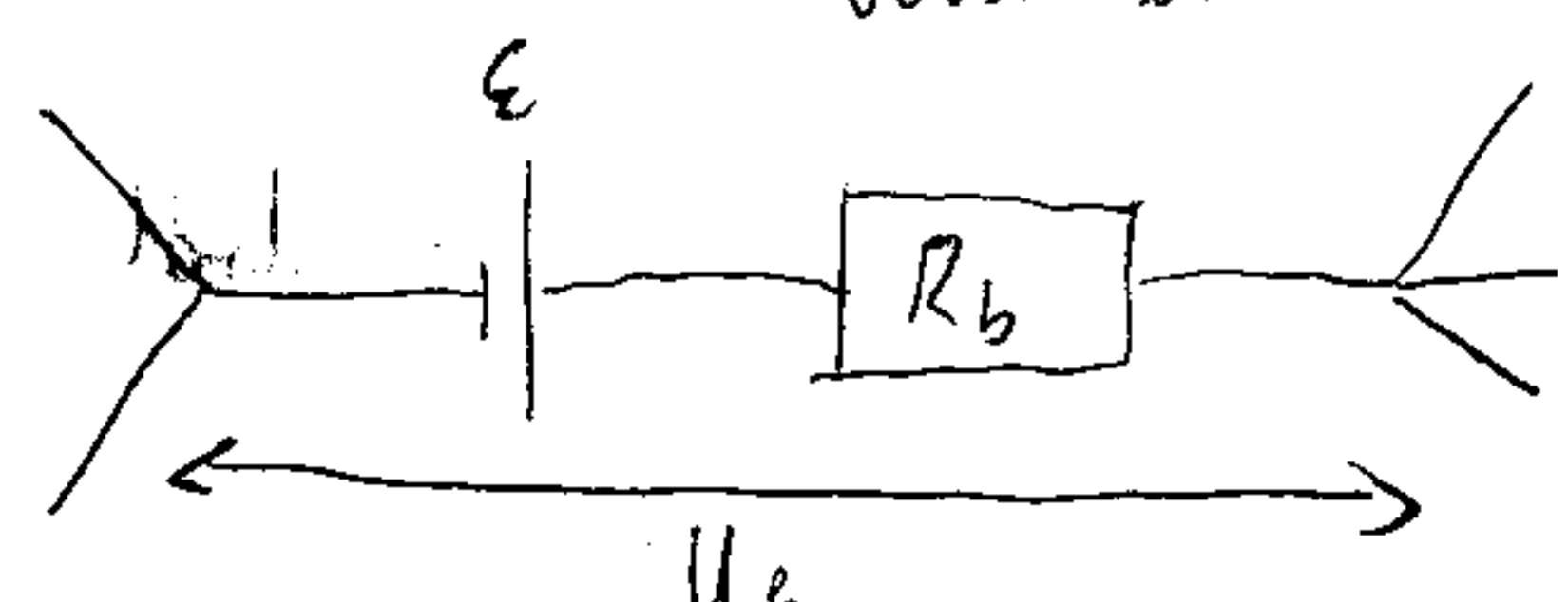
$= -\int_1^2 \sigma \vec{j} \cdot d\vec{r} - \int_1^2 \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = -j R_b + \varepsilon = U_k$

← kapcsolási állás

$\vec{j} \cdot A = I$

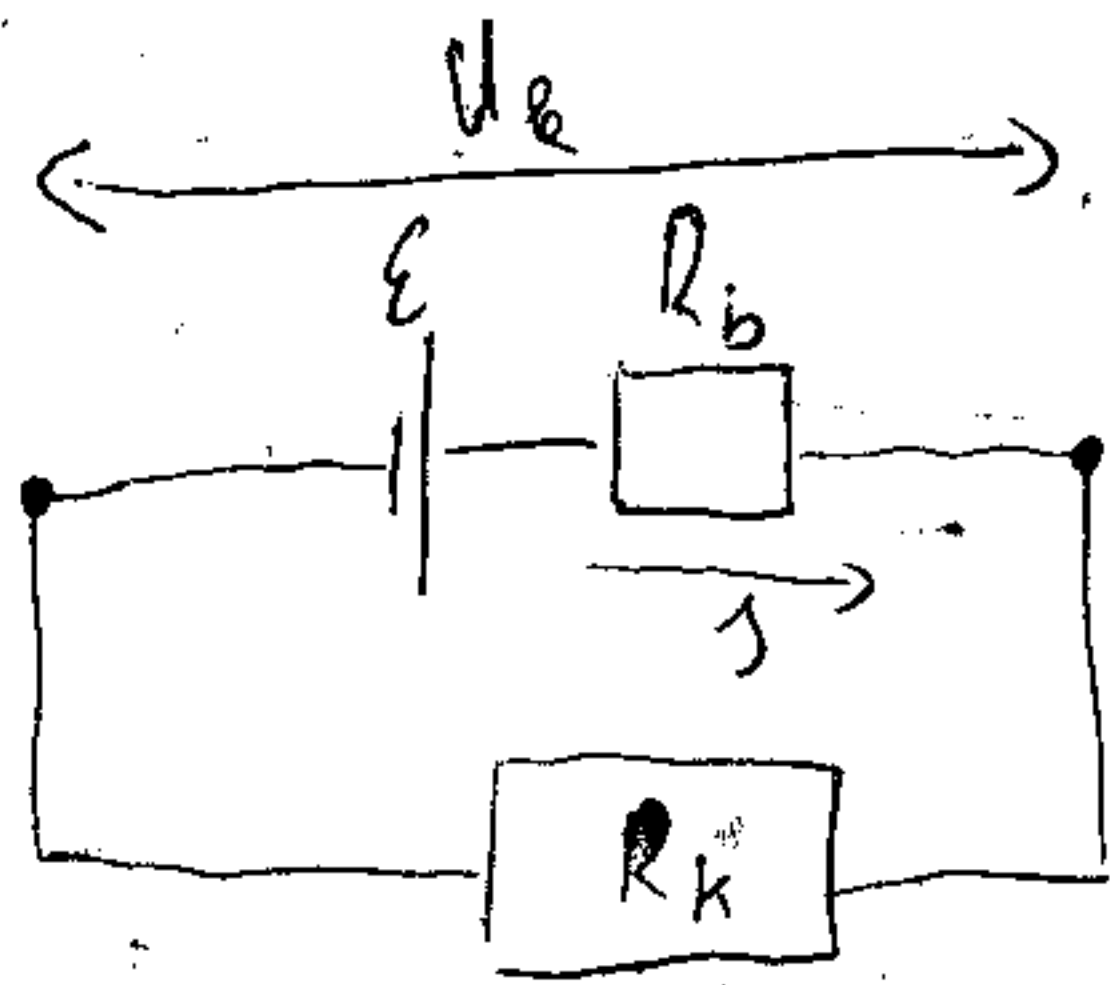
belső ellenállás

$\frac{P}{A} = R_b$



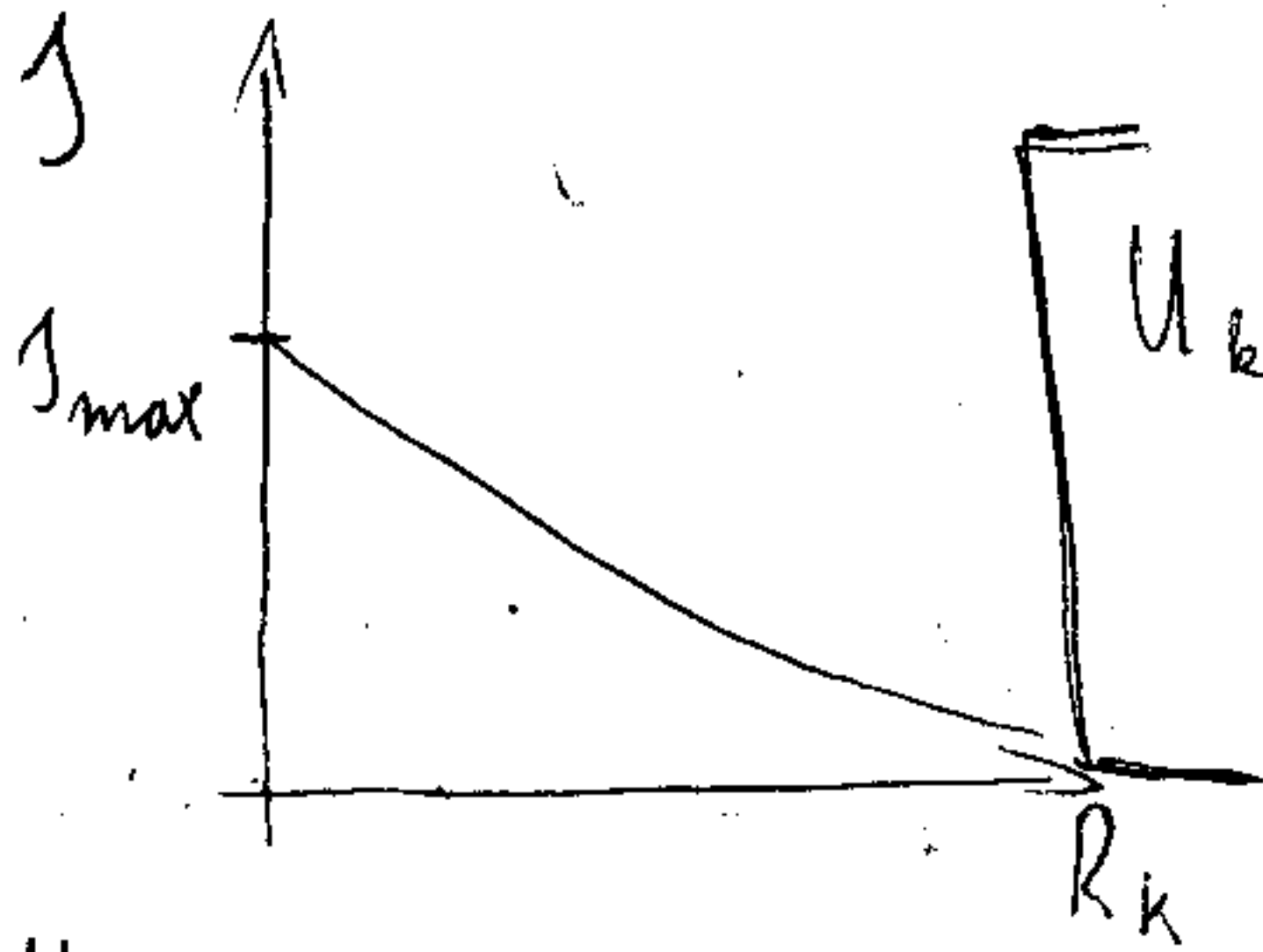
üresjárás: $I = 0$ telepen áthaladó áram ekkor $U_k = \mathcal{E}$
 üresjárásai feszültség

terhelt telep:

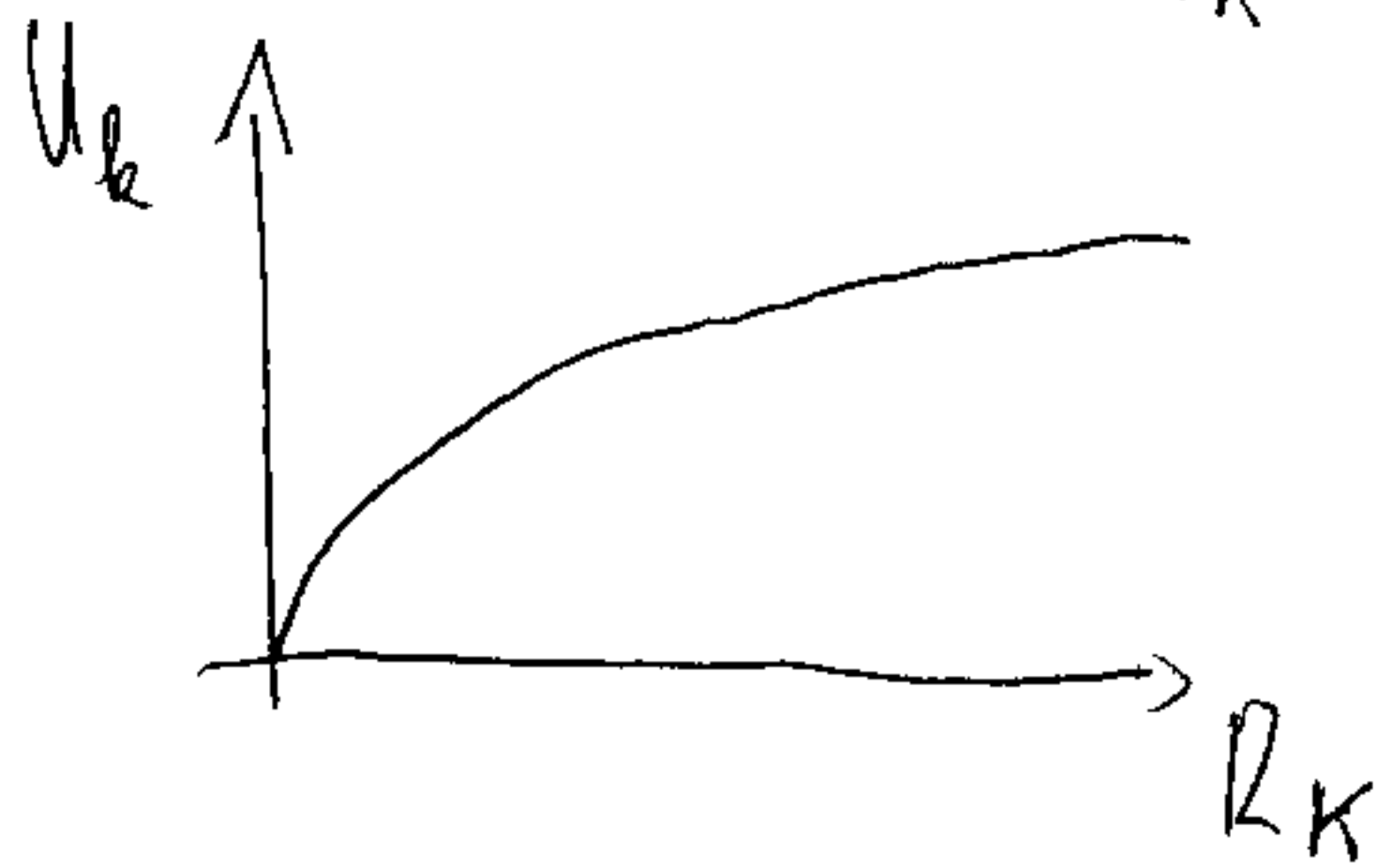


$$\mathcal{E} = I(R_b + R_k)$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_b + R_k}$$



$$U_k = IR_k = \mathcal{E} - IR_b = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{R_b + R_k} \cdot R_b = \frac{\mathcal{E} R_k}{R_b + R_k} = \mathcal{E} \left(1 - \frac{R_b}{R_b + R_k} \right)$$



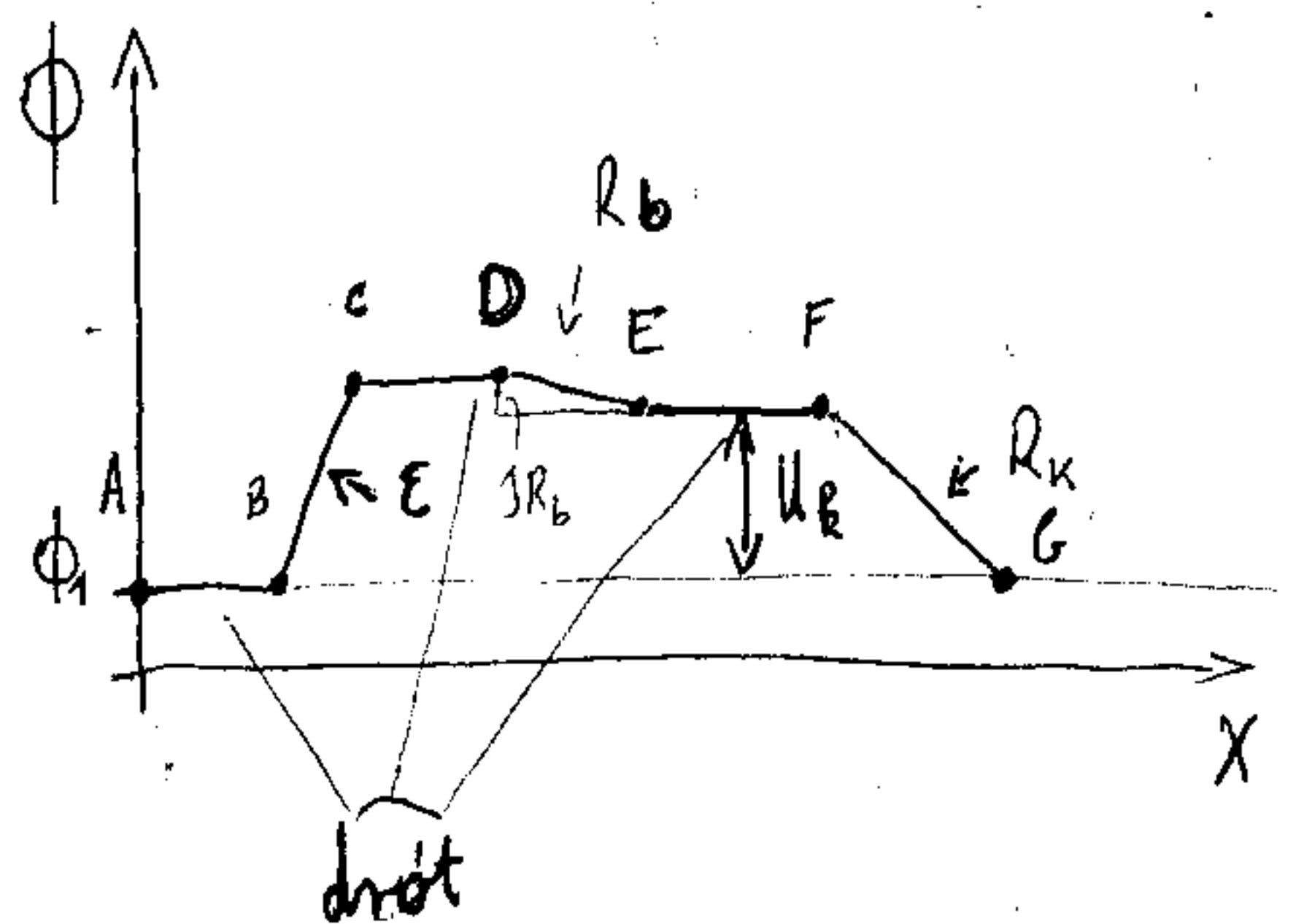
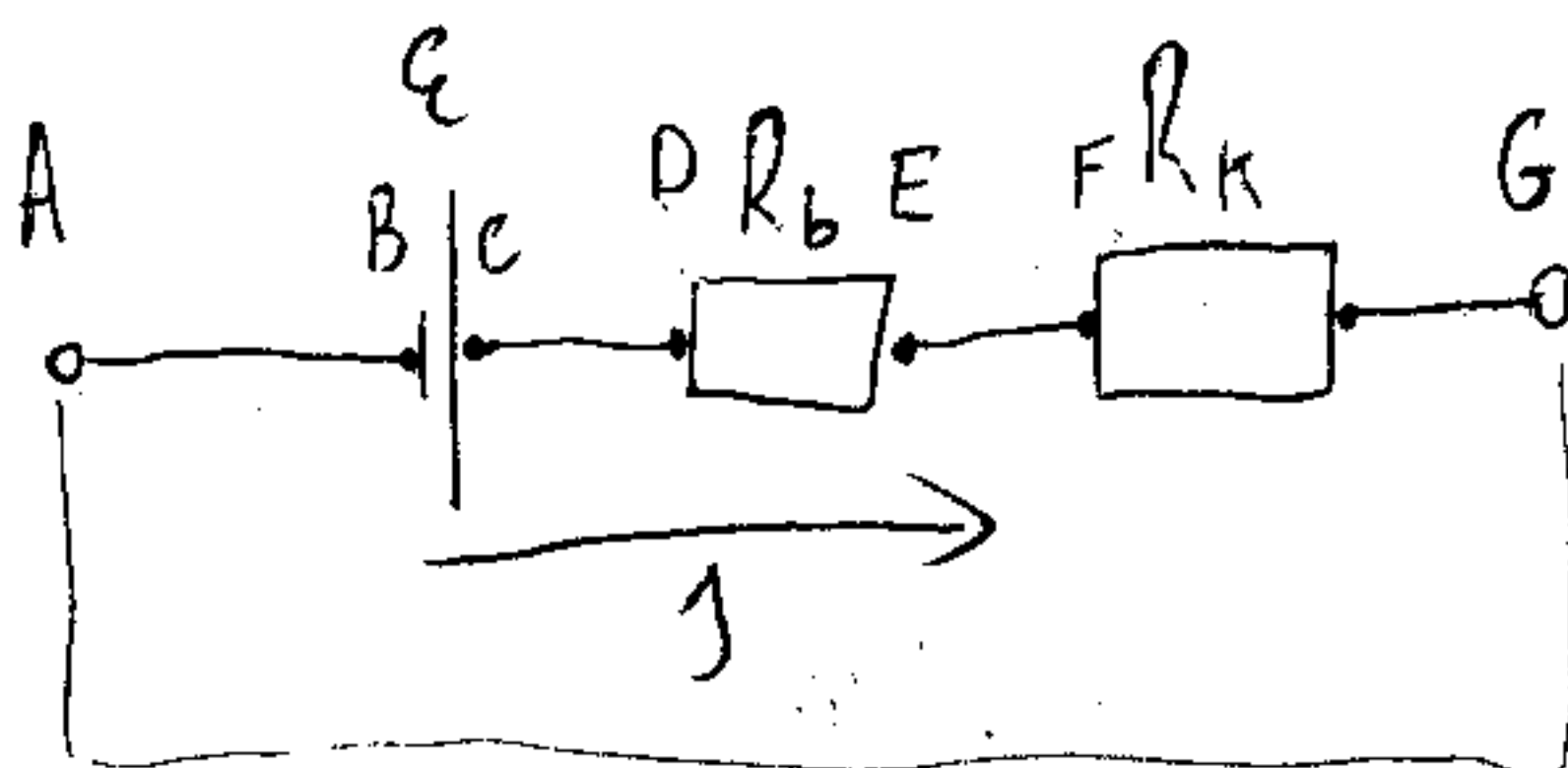
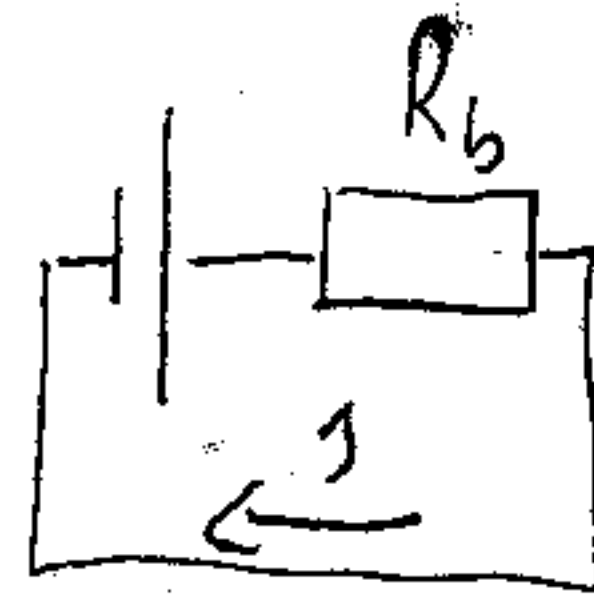
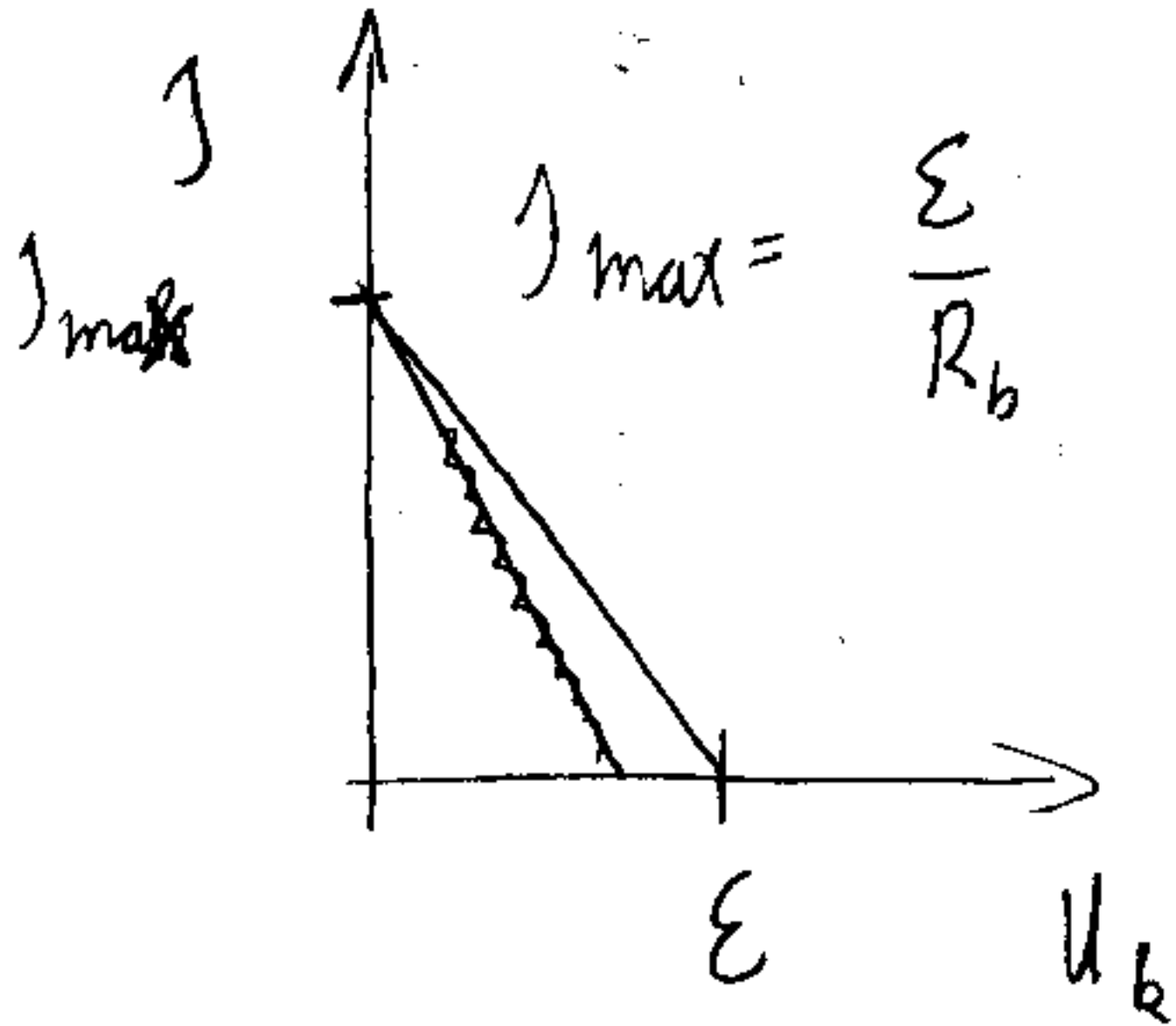
$$U_k = \mathcal{E} - IR_b$$

$$U_k + IR_b = \mathcal{E}$$

$$IR_b = \mathcal{E} - U_k$$

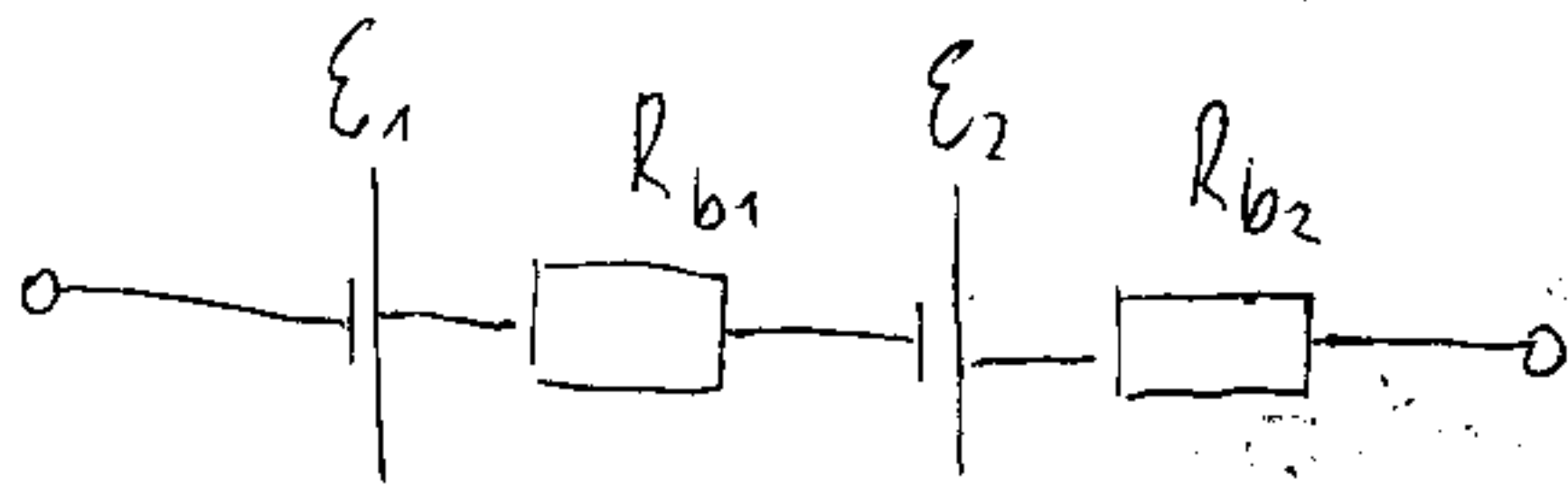
$$I = \frac{\mathcal{E} - U_k}{R_b}$$

rövidzár: $I = \frac{\mathcal{E}}{R_b}$ rövidzárási áram



Telepek kapcsolása:

Soros:



$$U_k = E_1 + E_2 - I R_{b1} - I R_{b2}$$

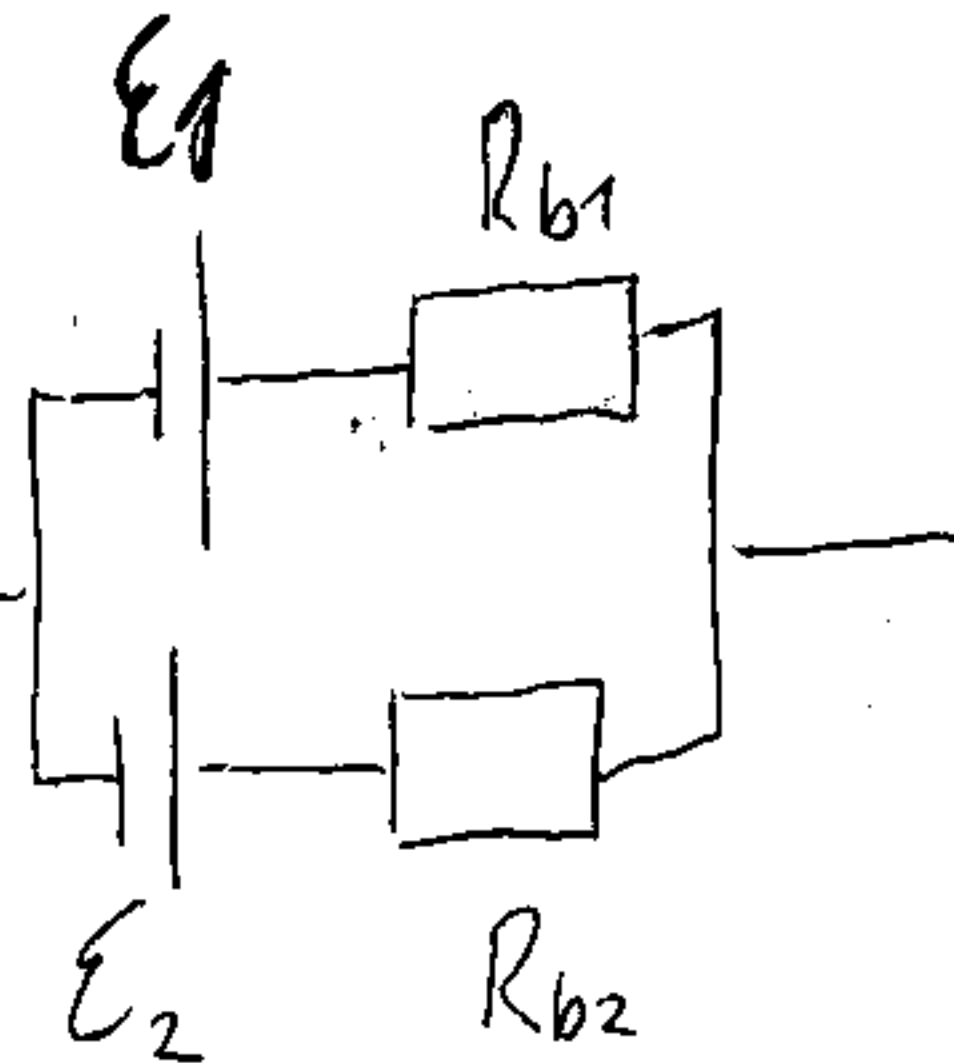
$$E = \sum_i E_i, \quad R_{be} = \sum_i R_{bi}$$

$$U_k = \sum_i E_i - I \sum_i R_{bi}$$

$$I_{\text{rövidcár}} = \frac{\sum_i E_i}{\sum_i R_{bi}}$$

Párhuzamos:

$$\frac{1}{R_b} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$



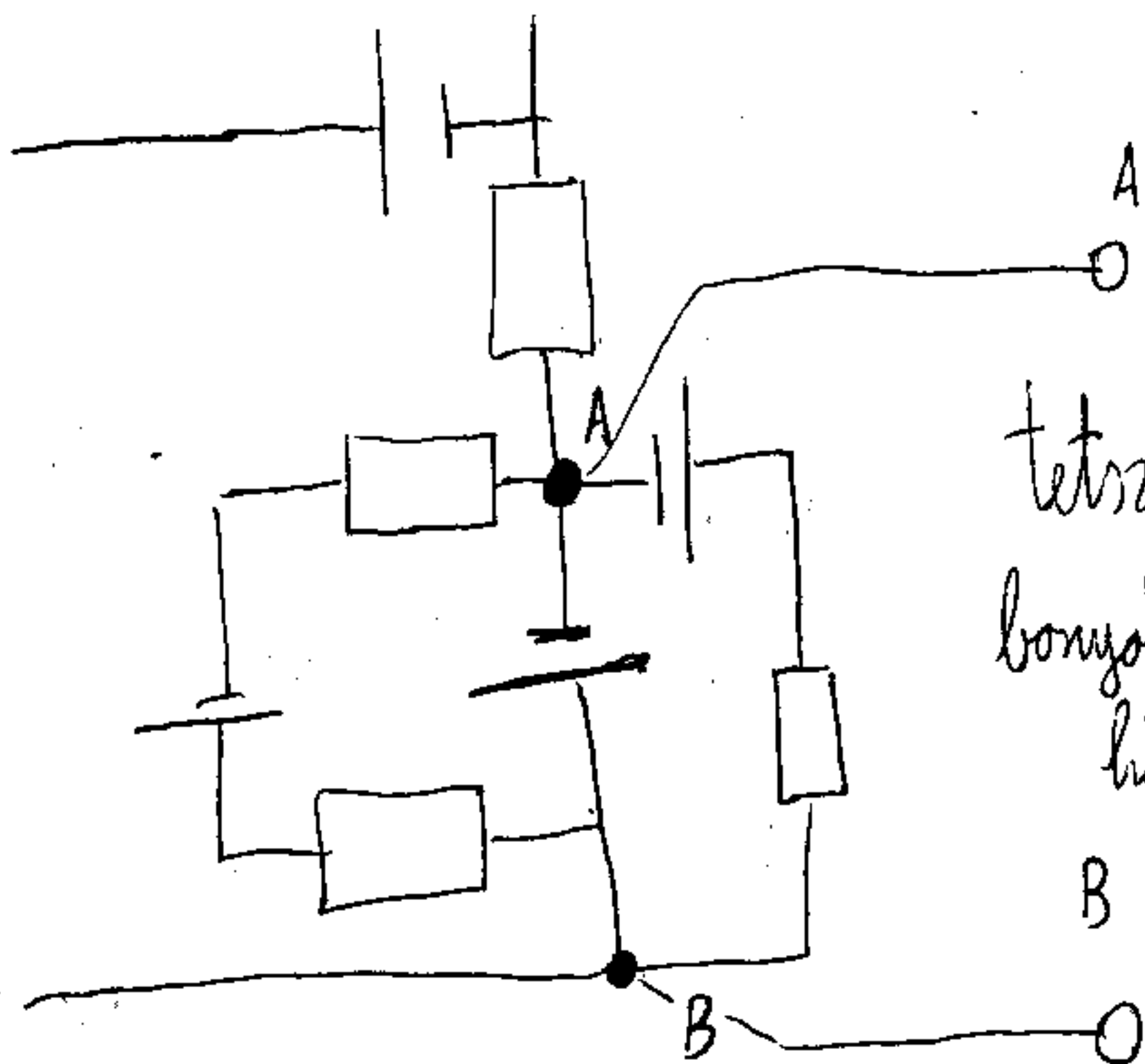
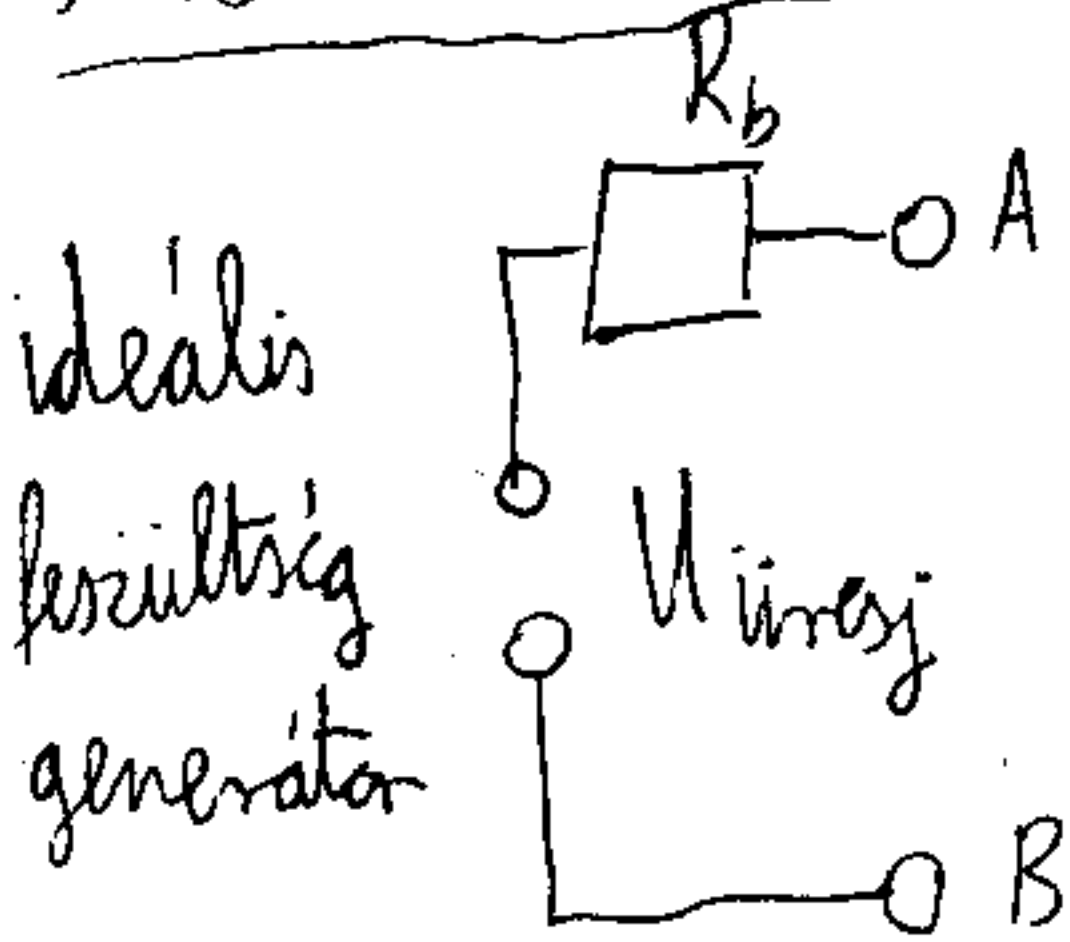
$E_1 \neq E_2 \rightarrow$ belső áram
szakadás esetén is

$$E = E_1 = E_2 = \dots = E_n$$

belső ellenállása csökken a telepeknek

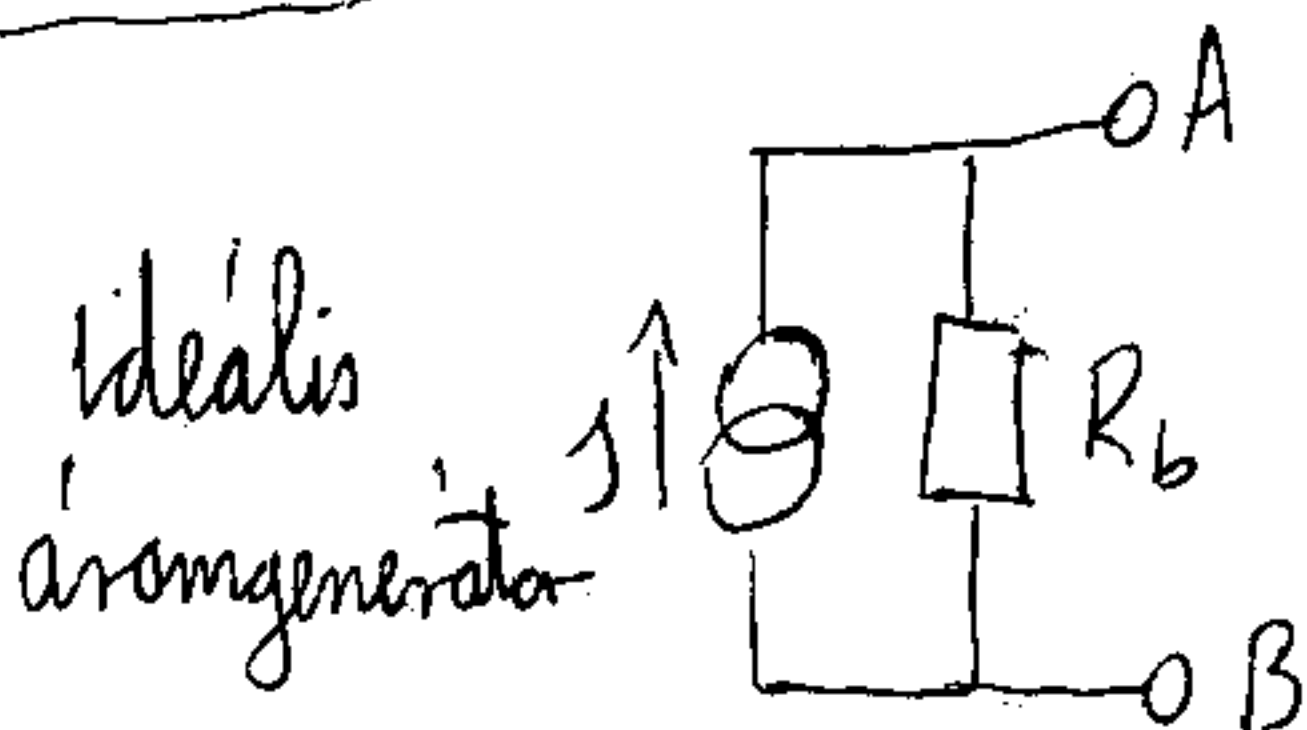
Lineáris hálózatok tételai:

Thevenin-tétel:



tetszőleges
bonyolult lineáris
hálóra

Norton-tétel:

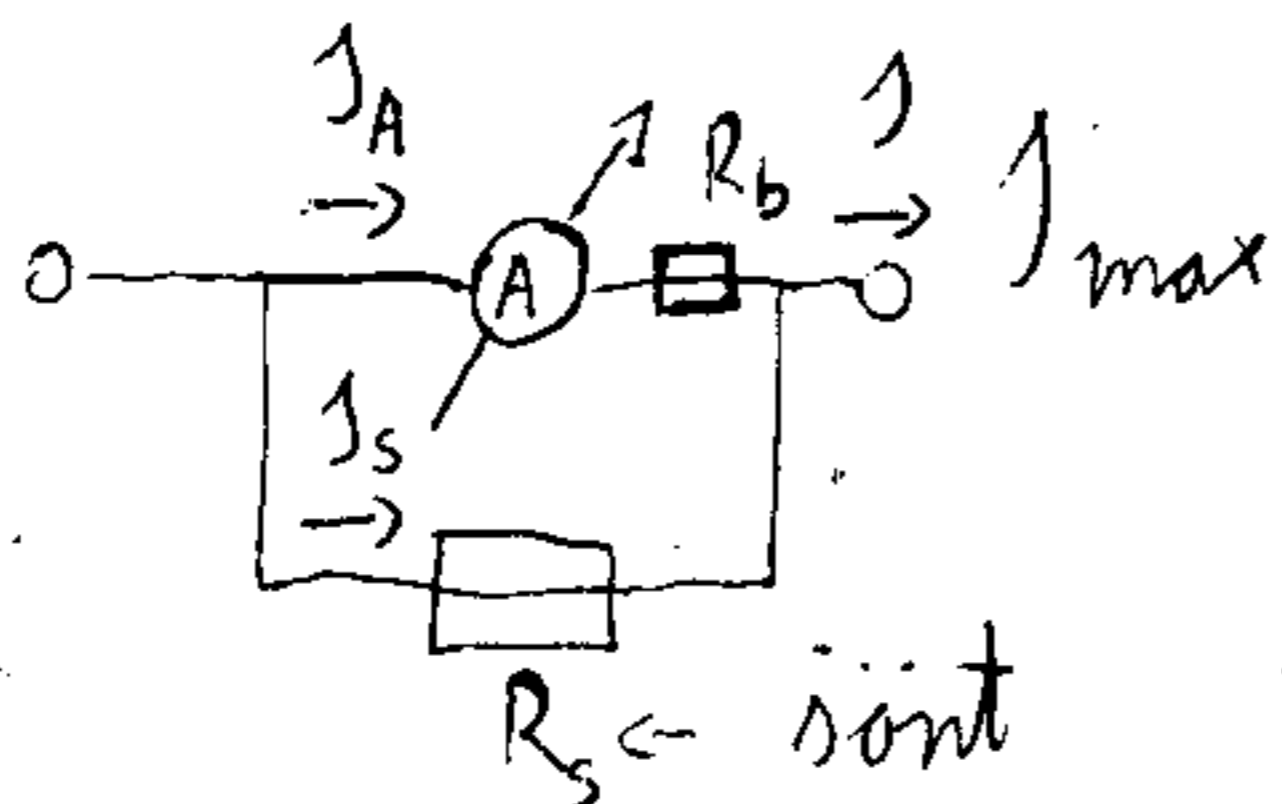


CSAK LINEÁRIS

HÁLÓZATOKRA

Teszülttség és árammérők:

Árammérő



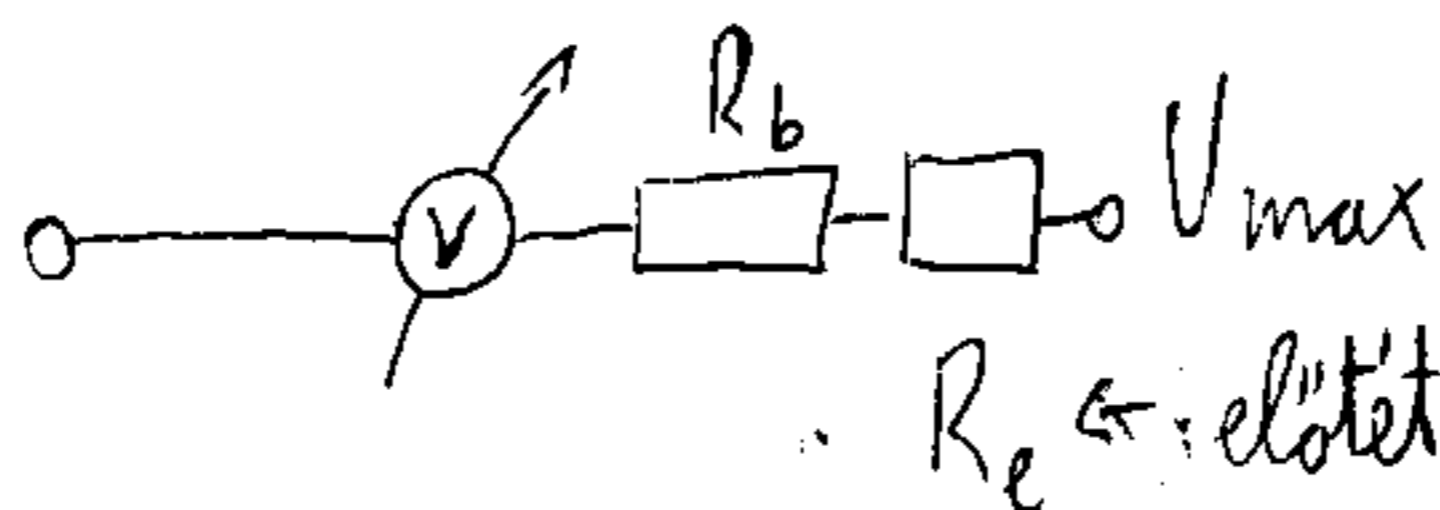
de mi $n \cdot I_{max}$ -ot szeretnénk mérni

$$I = I_A + I_s$$

$$R_s = \frac{R_b}{n-1}$$

$$R_s, R_b \ll R_{k\ddot{u}l\ddot{o}s\ddot{o}}$$

Teszültsgmérő



$n \cdot U_{max}$ -ot szeretnénk mérni

$R_e \ll R_b$ előtét

$$R_e = (n-1) R_b$$

$$R_e, R_b \gg R_{k\ddot{u}l\ddot{o}s\ddot{o}}$$

Télvezetők

Bevetők: anyagok fajlagos vezetőképessége / ellenállása

szilícium ellenállását megmérték - New York, Párizs \rightarrow 8 nagyságrend \rightarrow ??? különbség \rightarrow

Szilícium - Si: II. főcsoport belüli elemek

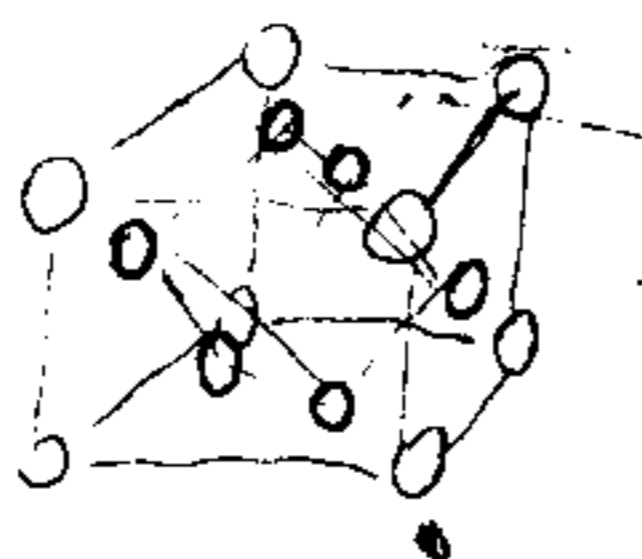
C
Si
Ge

Si: 4 db vegyérték e^-

\hookrightarrow kristályszerkezet, translációs szimmetria

tetraédres elrendezés

face-centered-cubic \approx lapán-centráltság - köbös szerkezet



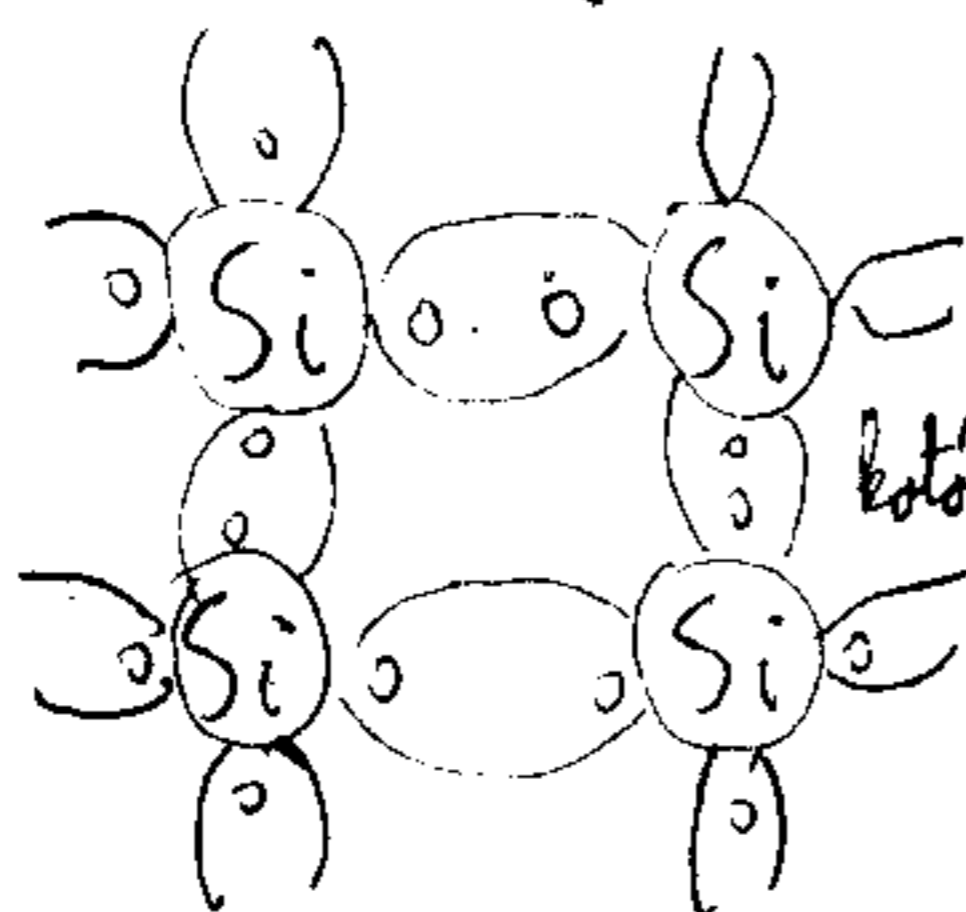
Ni, Cu

2 db fcc egymásba ágyazva

minden egyes atom egy tetraéder egy csúcsában van

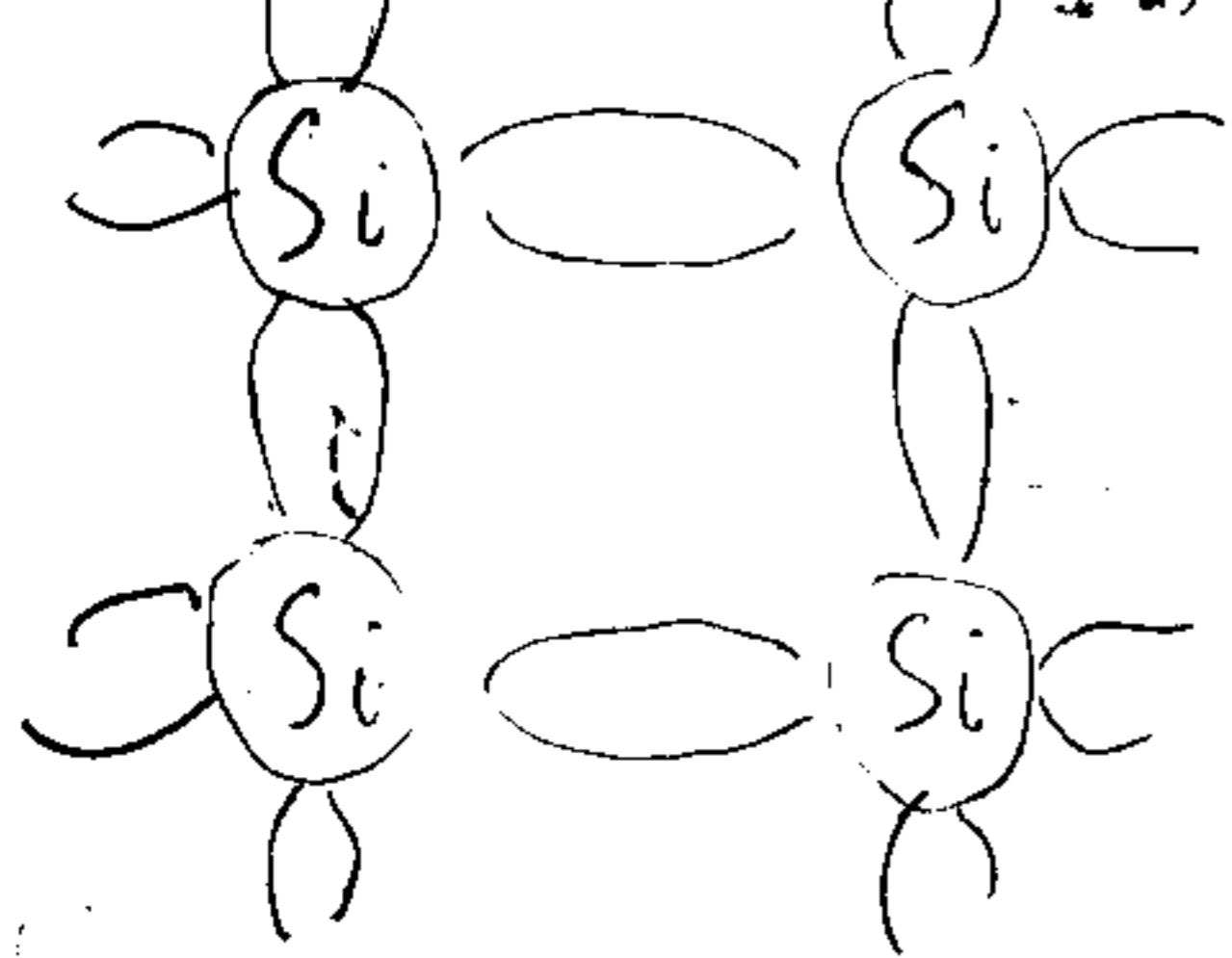
testálló mintén eltolva

szilícium:



kötő e^- -pár

az így szigetelő



termikusan aktivált polimeret \rightarrow kötés felszakad
 ΔE : aktivációs energia - kötés felszakításához szükséges energia

$$e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$$

$$n(T) = n_0 e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$$

Si: $\Delta E \sim 1 \text{ eV}$

Boltzmann-faktor

szobahőmérsékleten: $T = 300 \text{ K} \rightarrow kT = 25 \text{ meV}$

$$e^{-\frac{1 \text{ eV}}{25 \text{ meV}}} = e^{-40} = 10^{-18} \quad 1 \text{ mol Si}$$

$$n(T) = 6 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-18} \approx 10^5 \rightarrow 100\,000 \text{ kötés szakadt fel} \rightarrow 200\,000 \text{ szabad } e^-$$

gyémánt esetén: $\Delta E \sim 4 \text{ eV}$

$$(e^{-40})^4 \approx 10^{-16} \quad n(T) = 6 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-70} \approx 10^{-47}$$

$$m_{\text{Föld}} \approx 10^{24} \text{ kg} \approx 10^{29} \text{ mol} \Rightarrow$$

$$\text{Föld méretű gyémánt: } n(T) = 6 \cdot 10^{23} \cdot 10^{27} (\cdot 10^2) \cdot 10^{-70} \approx 10^{-18}$$

Felvezető vezetési mechanizmusa:

ismétlés fémekre: $\vec{j} = nq\vec{v}$ $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ $\mu = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{E}|}$

$$\sigma E = nq\mu E$$

$$\sigma = nq\mu \quad \text{fém vezetőképessége} \rightarrow \sigma(T) = nq\mu(T)$$

áll - fémek esetén $T \uparrow$ $\mu \uparrow$ $\sigma \uparrow$ \uparrow fémeknél $T \uparrow$ $\mu \downarrow$ $\sigma \downarrow$

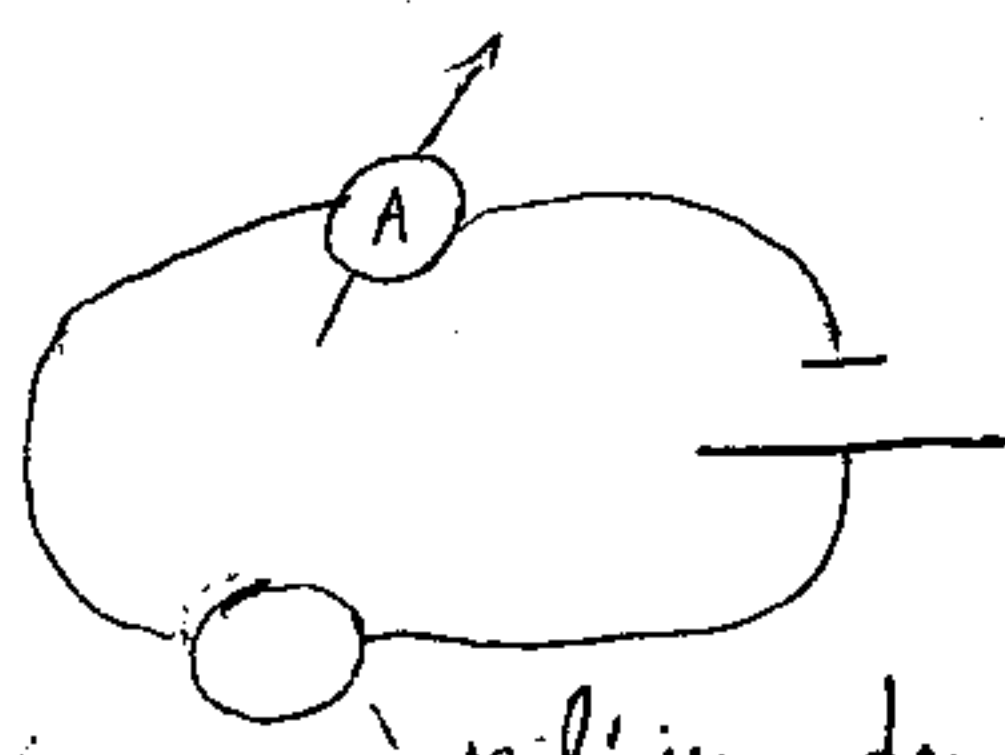
félvezetőknél: $\sigma(T) = \underbrace{(nq)}_{\text{domináns tag}}(T) \cdot \mu(T)$

domináns tag

$T \uparrow \mu \downarrow$ elhanyagolható (nq) -hoz képest

$T \uparrow \sigma \uparrow$ \uparrow fémeknél \downarrow

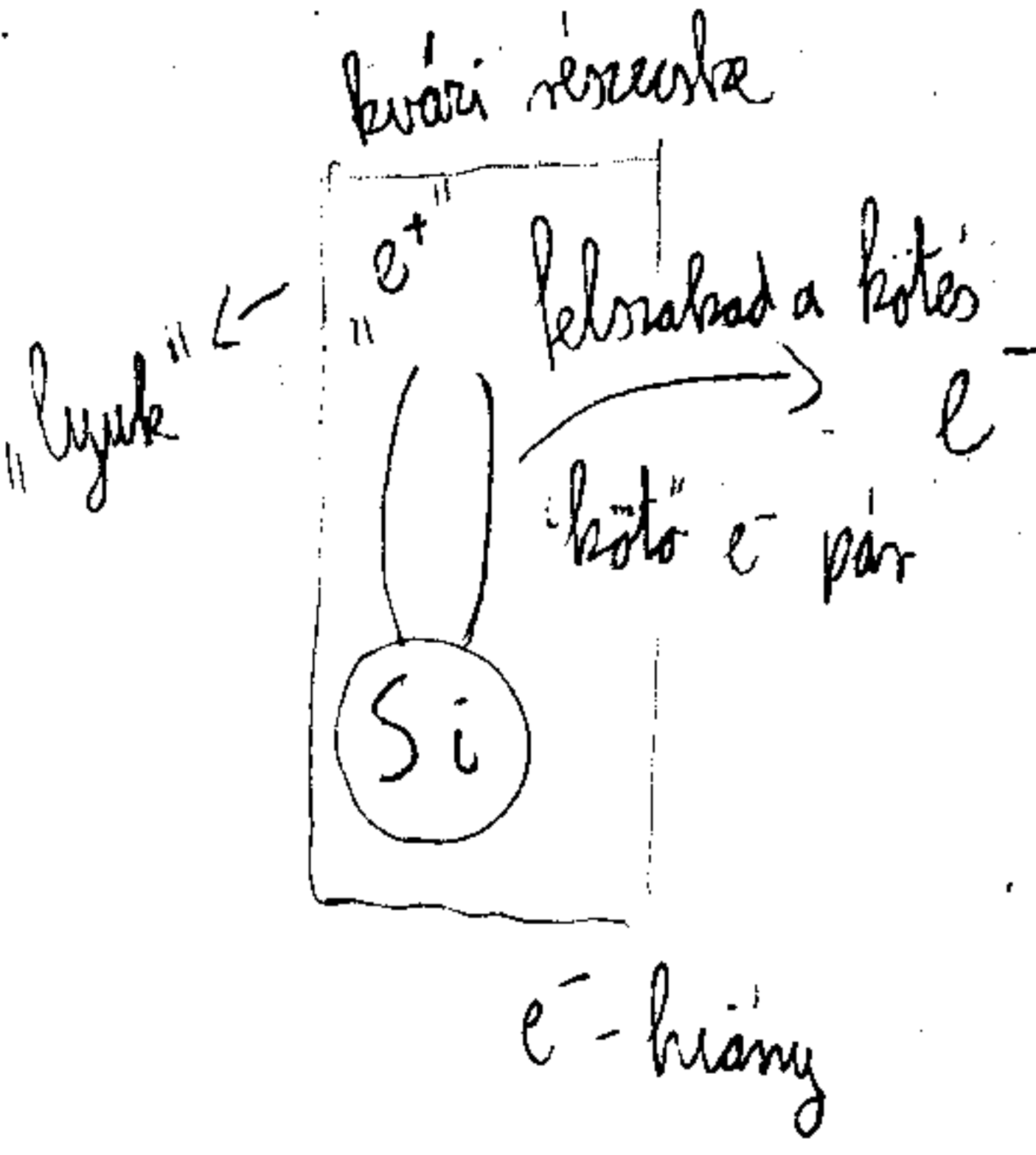
Árámérték: $0,2 \text{ mA}$



$T \uparrow \uparrow$
 $R \downarrow$

szilícium darabka

reverzibilis folyamat



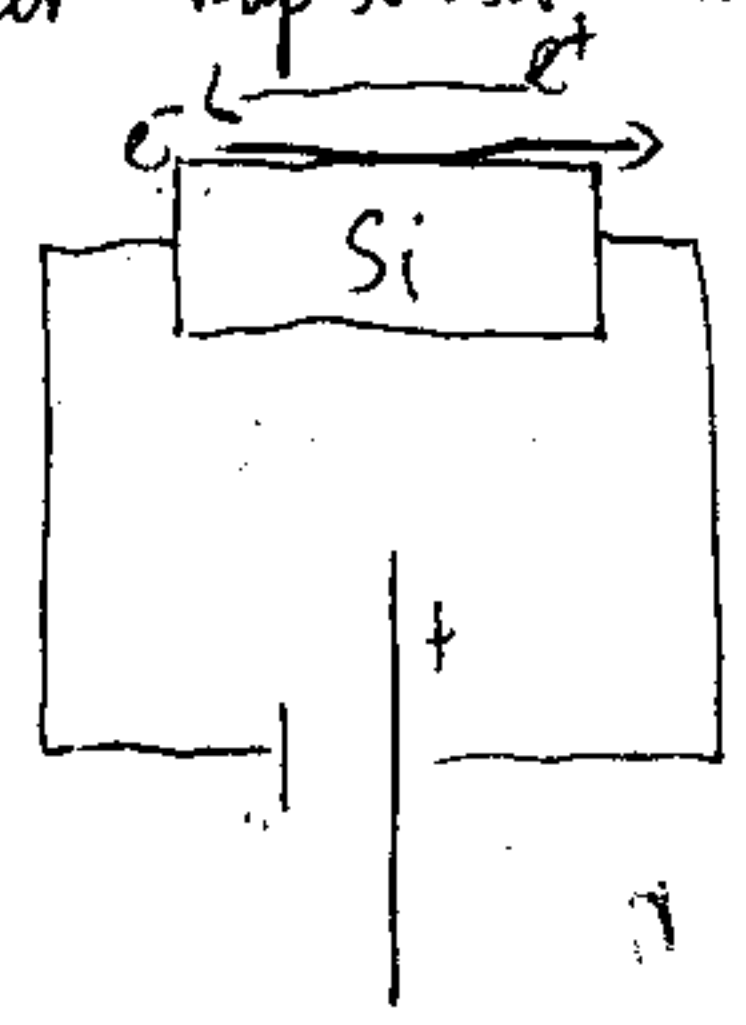
Si-kristály

lyukak és szabad e^- száma megegyezik

$$n_{e^-}(T) = n_{e^+}(T)$$

$$-e^- = e^+ \text{ v. } |e^-| = |e^+|$$

Si lapka $\rightarrow \vec{E}$ tér kapcsolása - áram



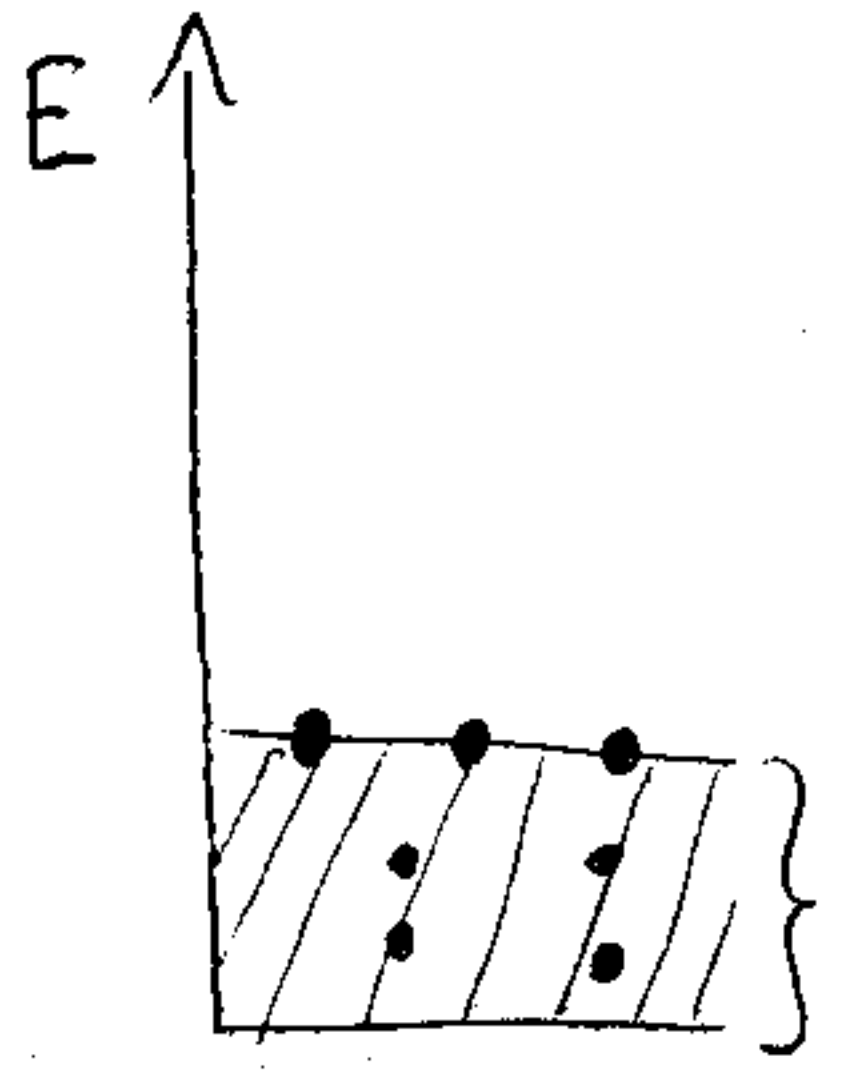
$$n_{e^-}(T) \cdot e^- = n_{e^+}(T) \cdot e^+$$

$$\sigma = n^+ e^+ \mu^+ + n^- e^- \mu^- > 0$$

$$\mu_{e^+} \neq \mu_{e^-}$$

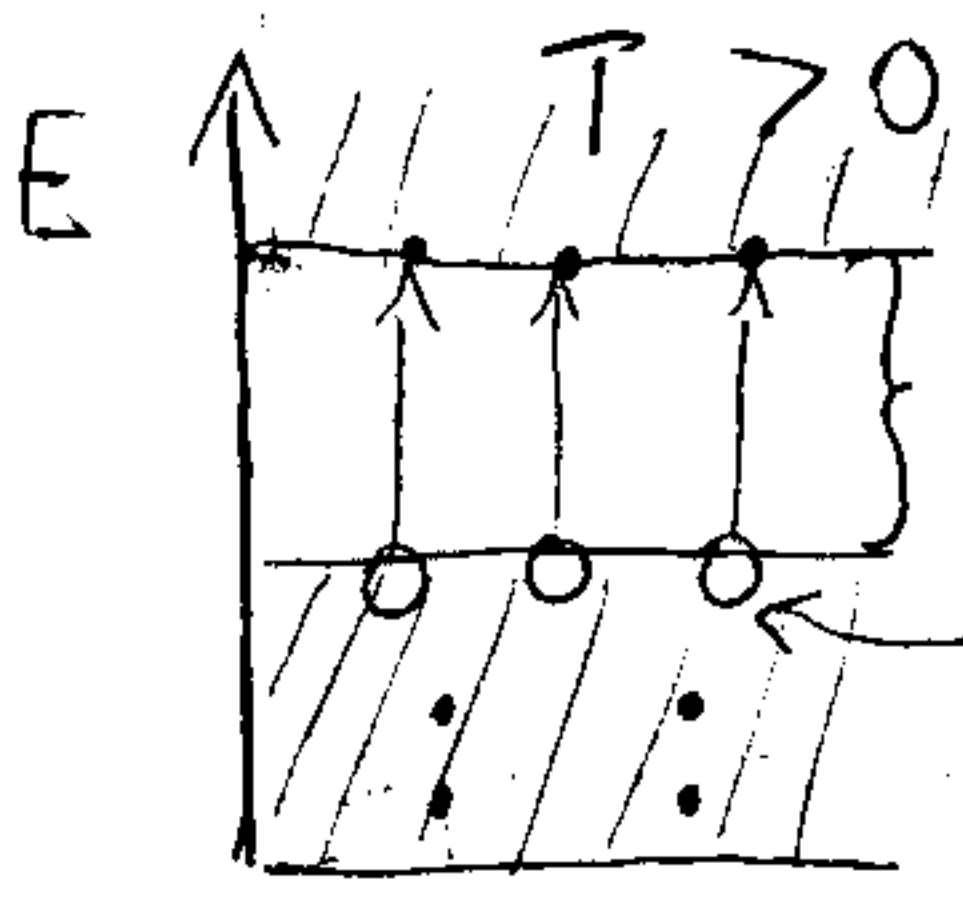
$$m_{eff}^{e^+} \neq m_{eff}^{e^-}$$

Sávmodell:



$T=0$

vezérsáv - kötött e^- -ok összes hely be van töltve $T=0\text{K}$ -en



vezérsáv
 $\Delta E \sim 1\text{eV}$ töltött sáv
 e^- helyek / lyukak

töltött sáv mérete \ll "szigetelő" vezető

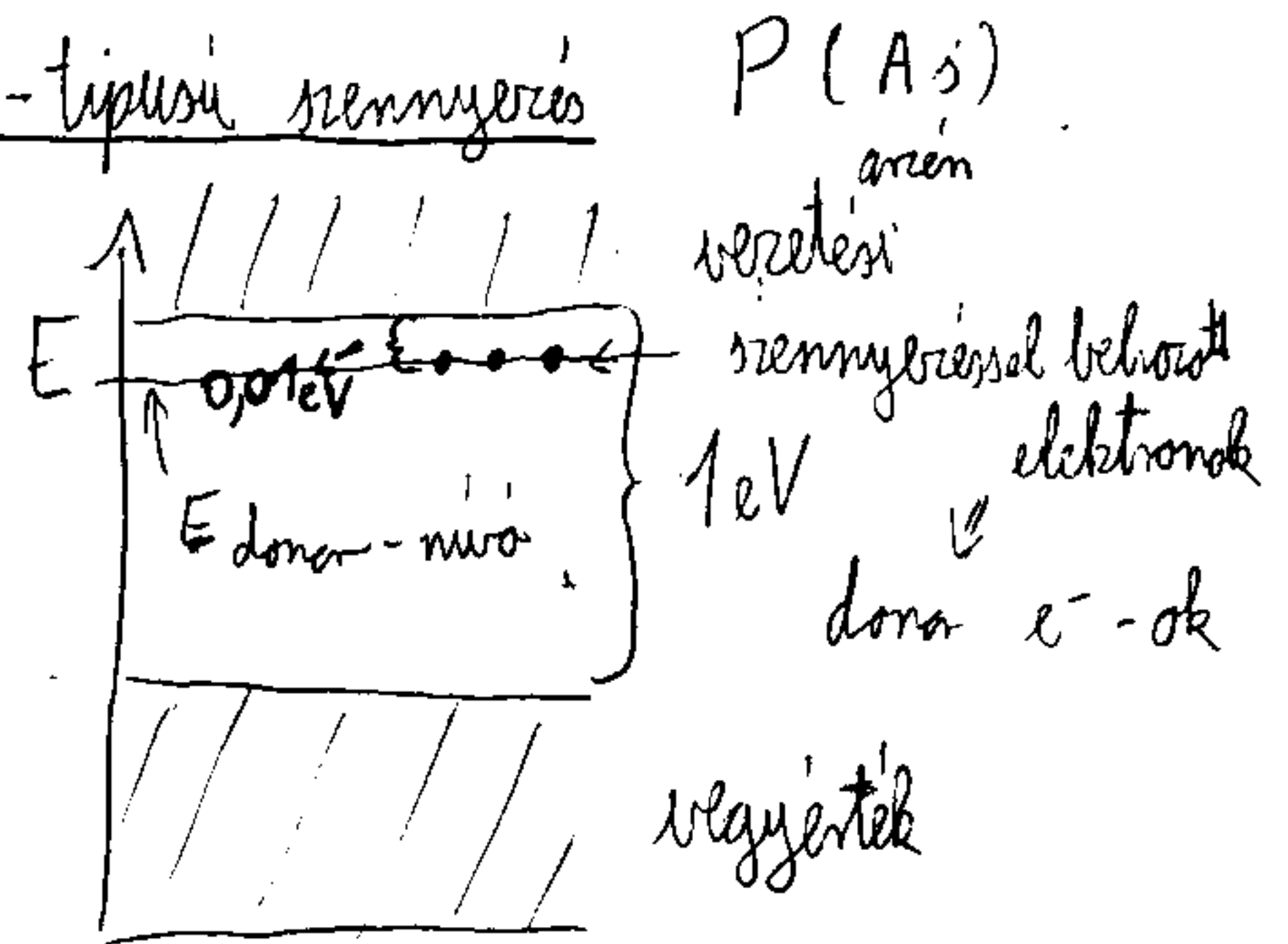
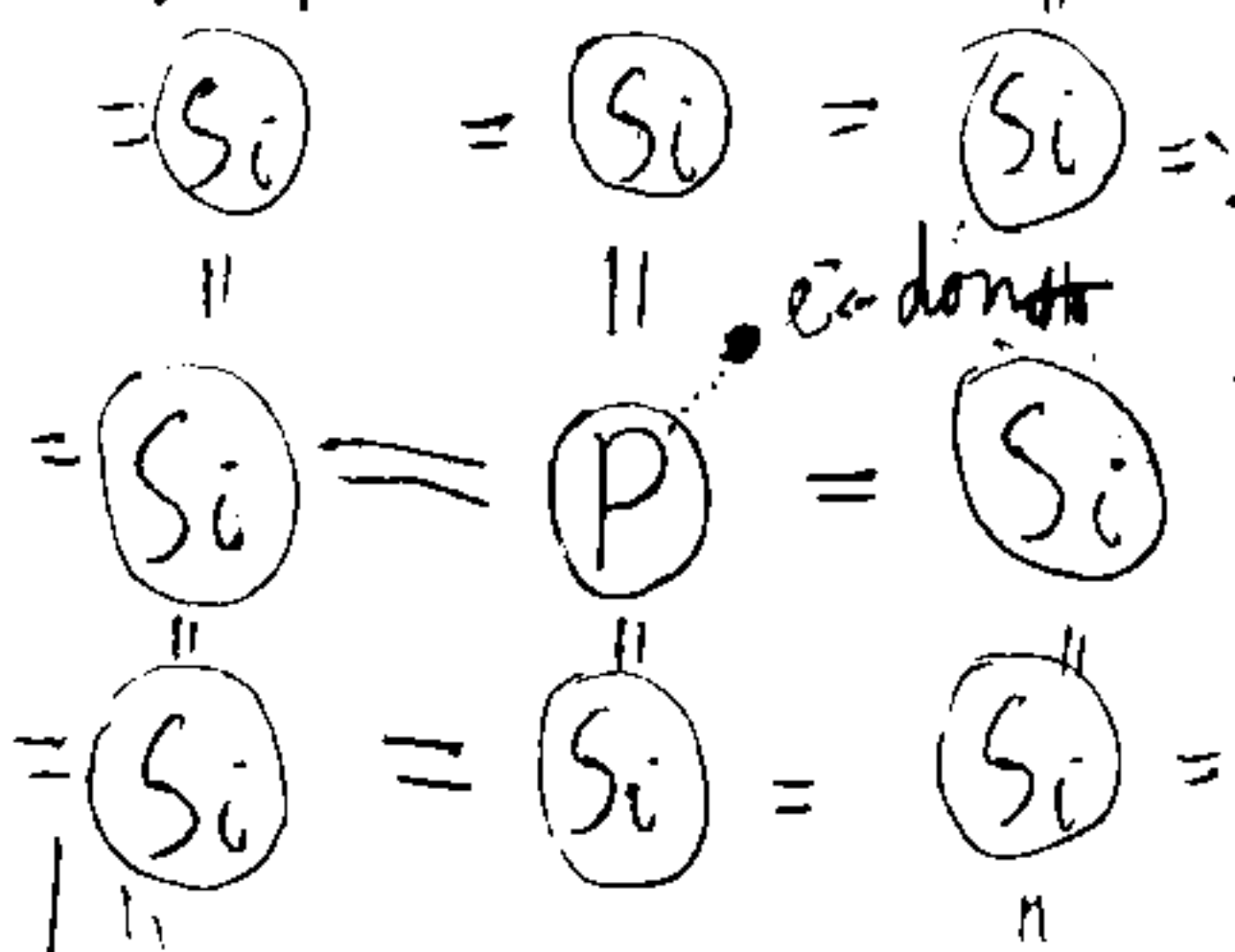
intrinszik / saját vezetés

extrinszik / külső vezetés is lehet

Szennyezett félvezetők: extrinsik vezetés

Si kristályban nem csak hő hatására jöhetnek létre vezető töltések

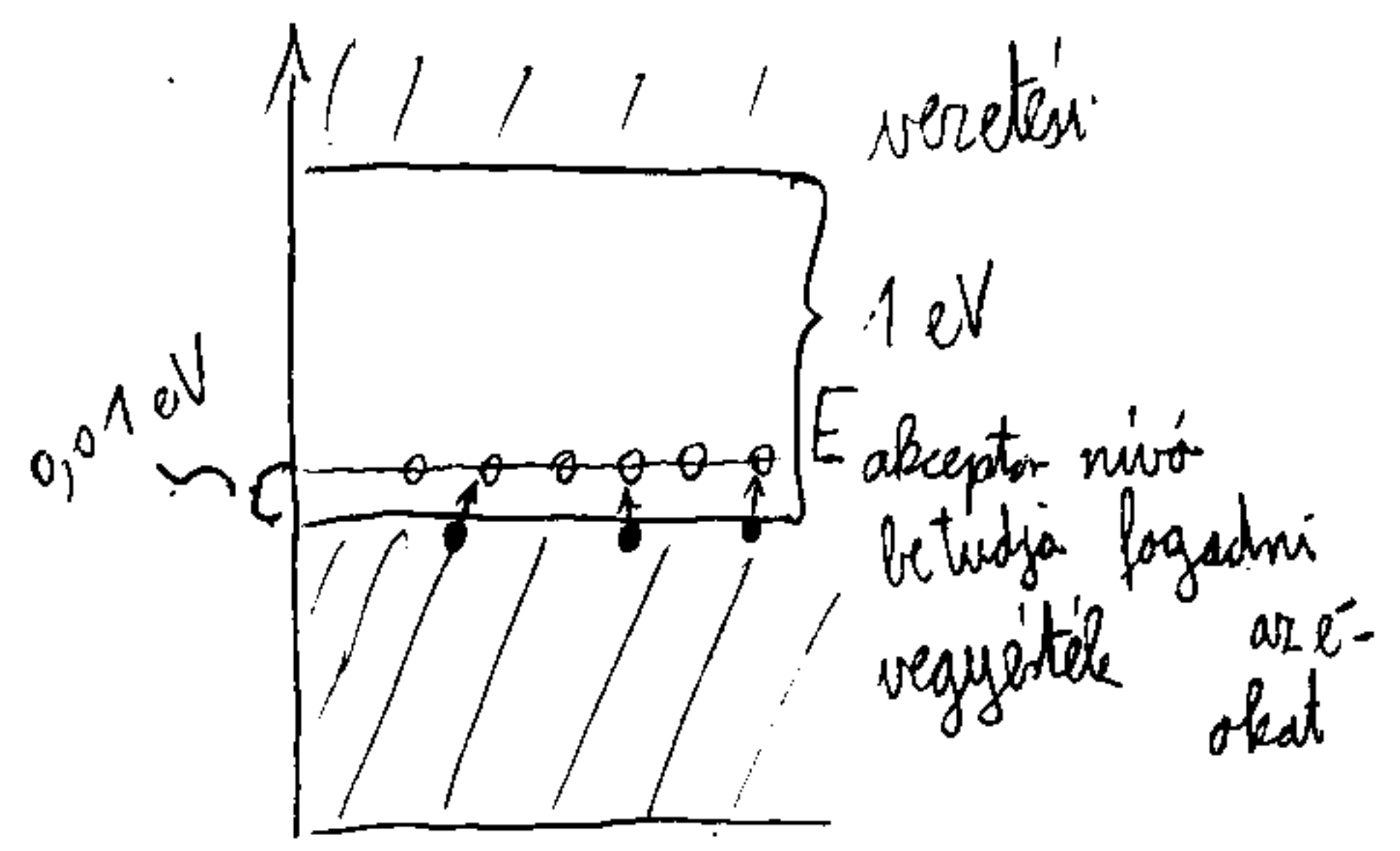
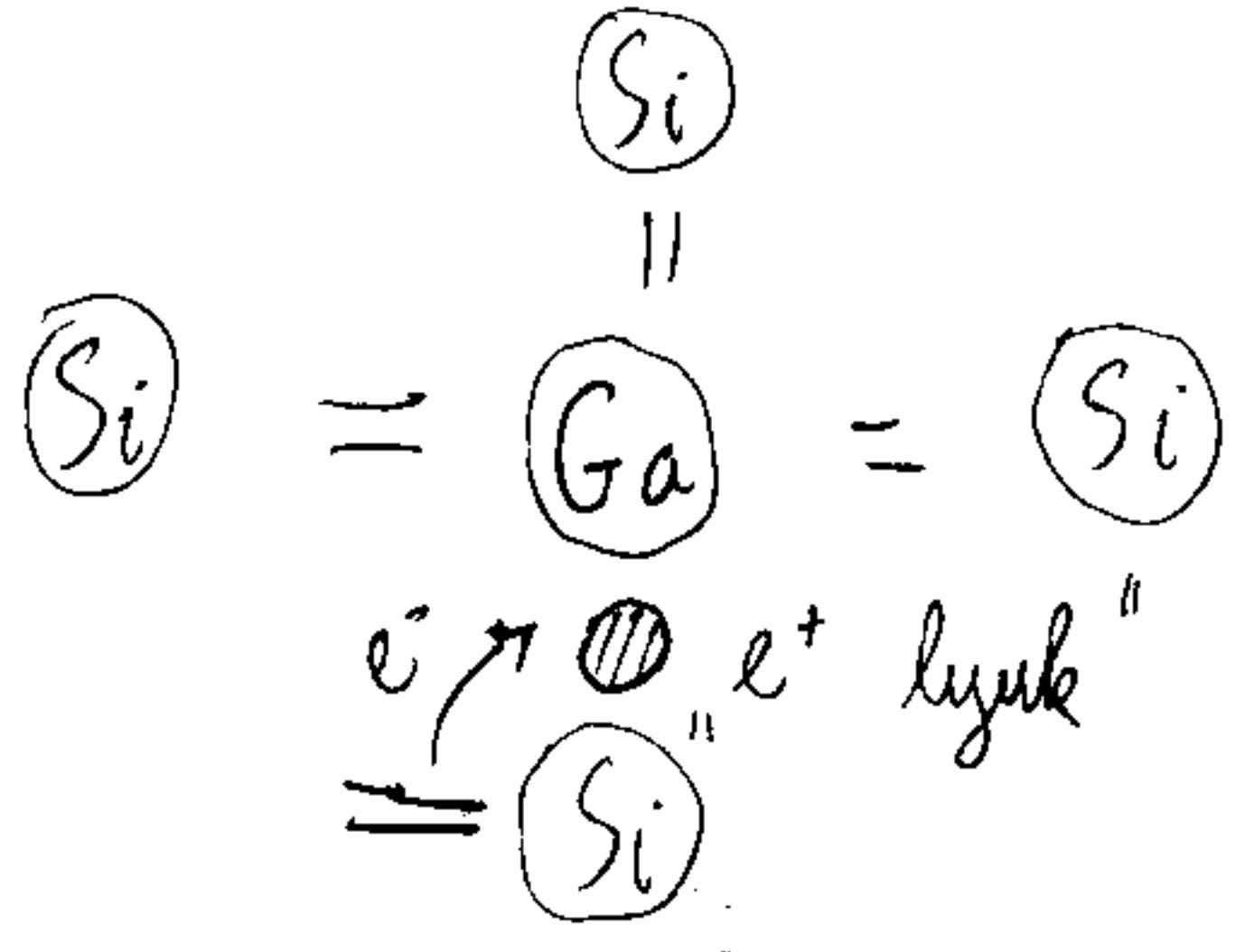
Si - ot foszforral szennyezik - n-típusú szennyezés



donor e^- -ok többségi töltéshordozók
 kisebbségi töltéshordozók

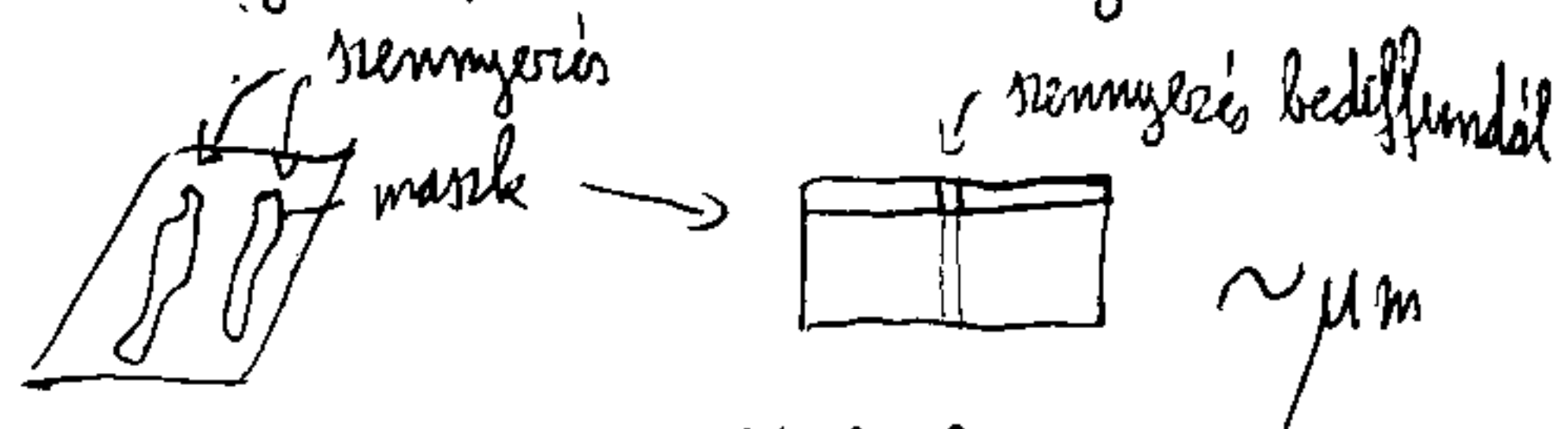
könnyebb vezetőképessé tenni a szennyező e^- -okat

p-típusú szennyezés: Si - ot Ga - al szennyezem gallium



Si - nagyon érzékeny a szennyezésre \rightarrow New York, Párizs különbség

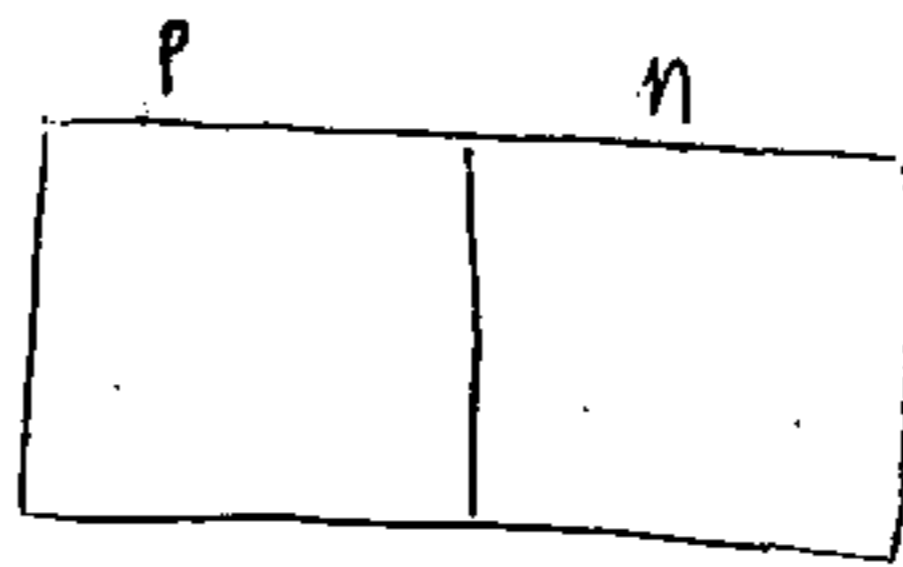
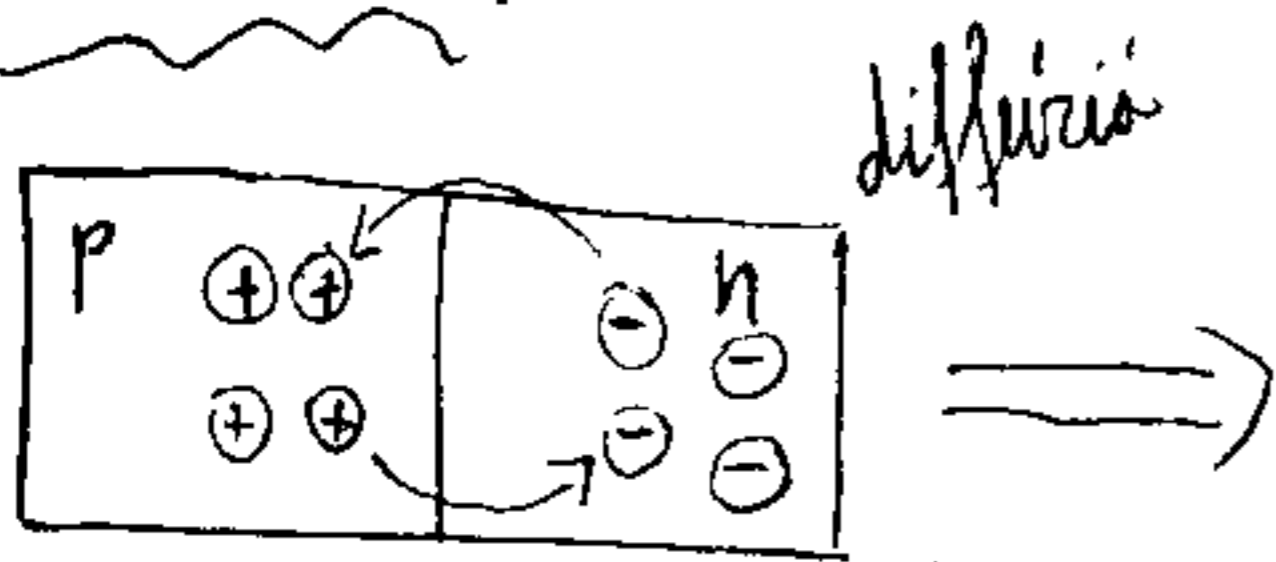
Megvalósítása: '80-as litográfia
 ma - ionimplantáció



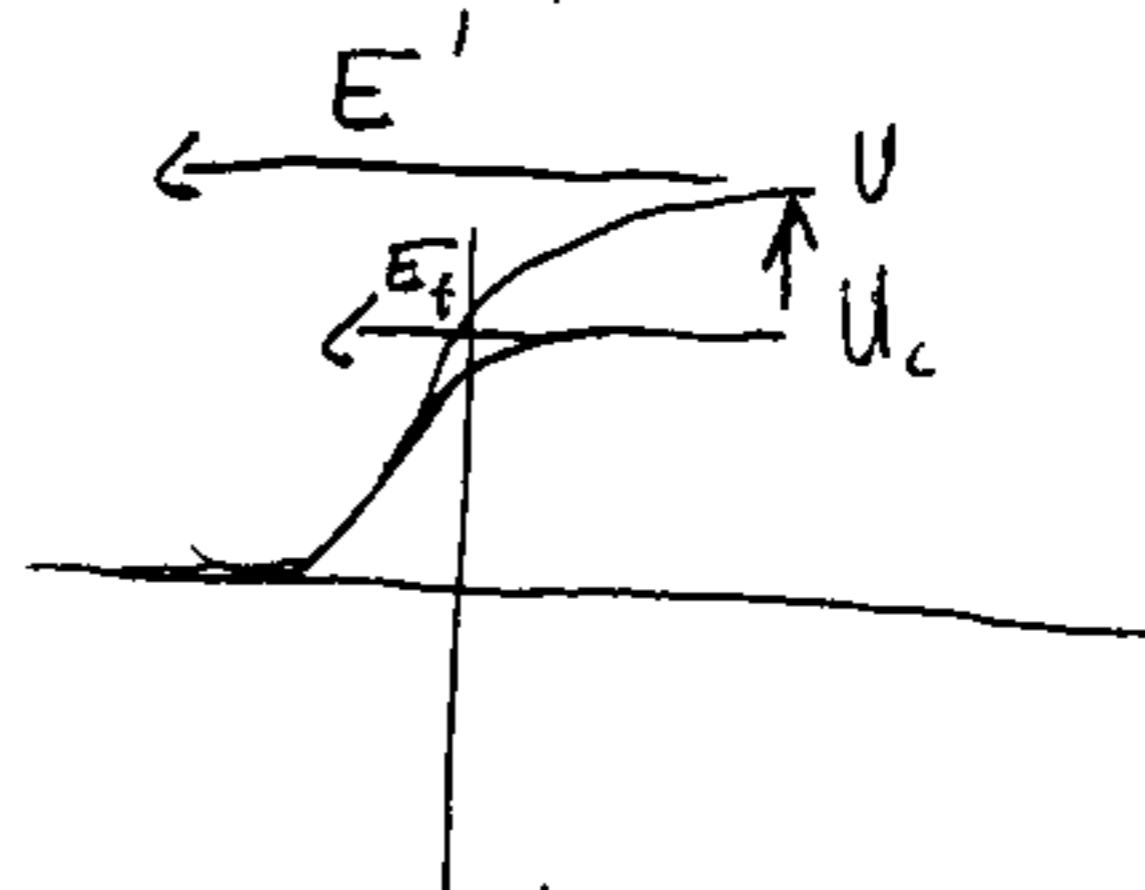
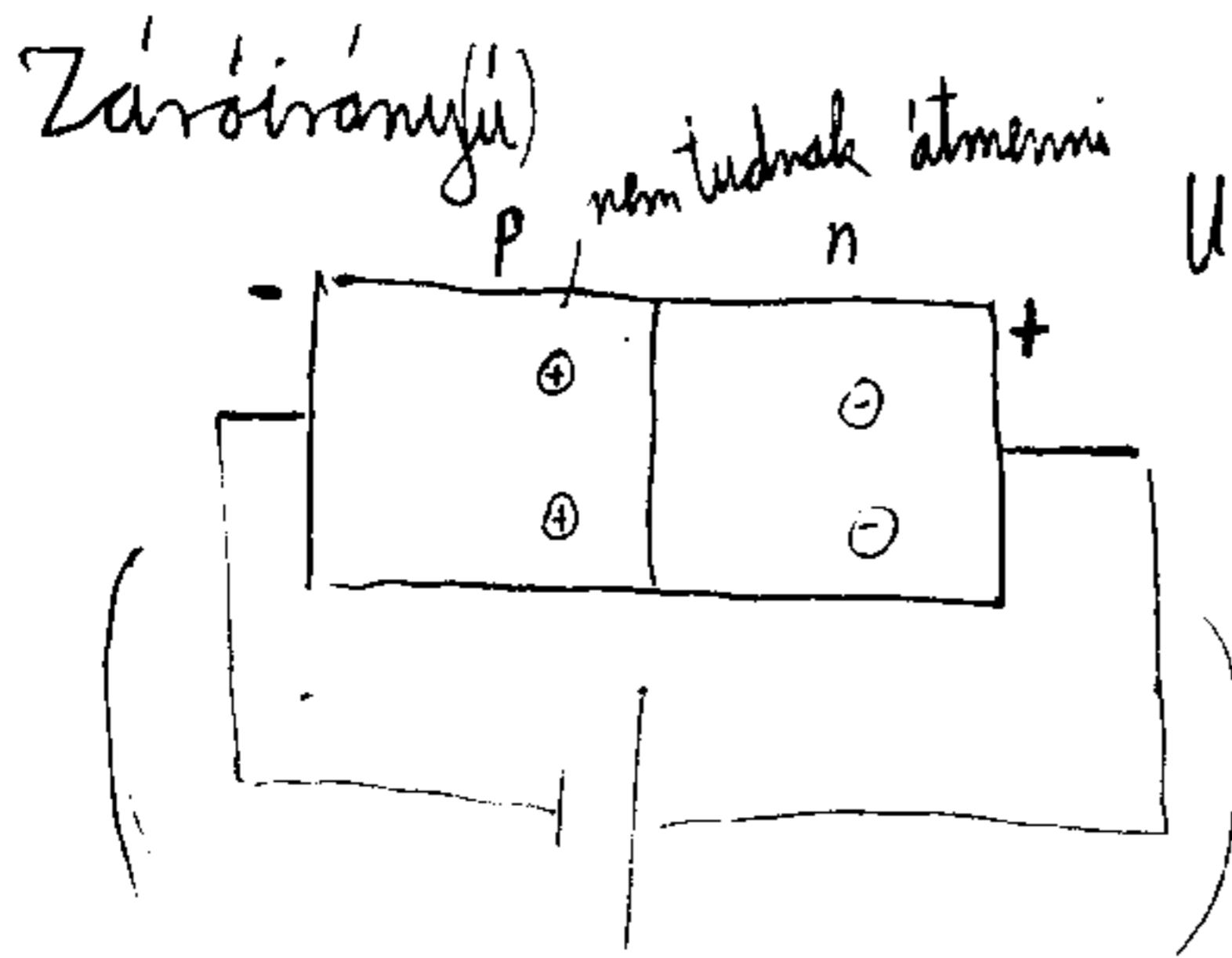
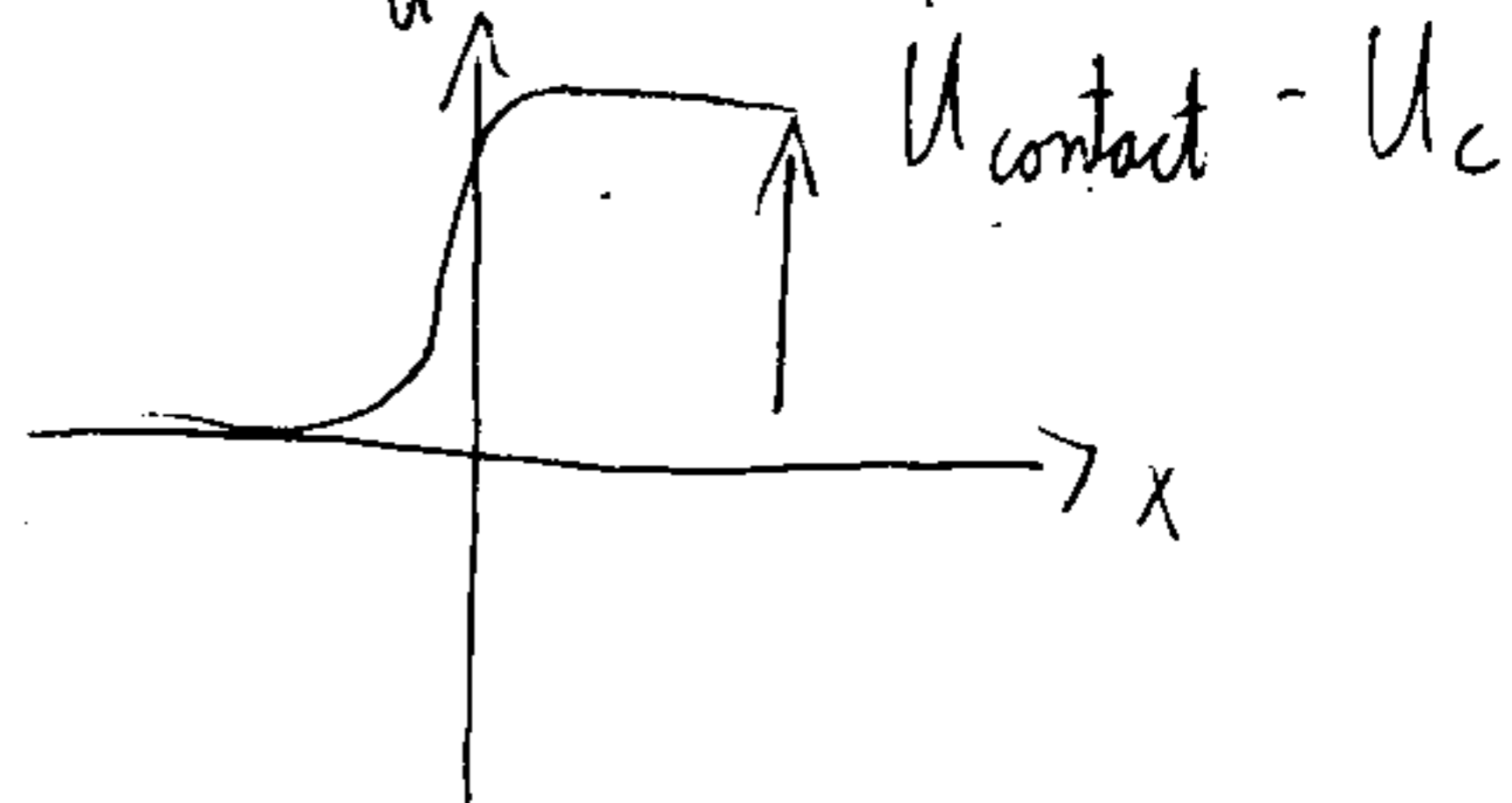
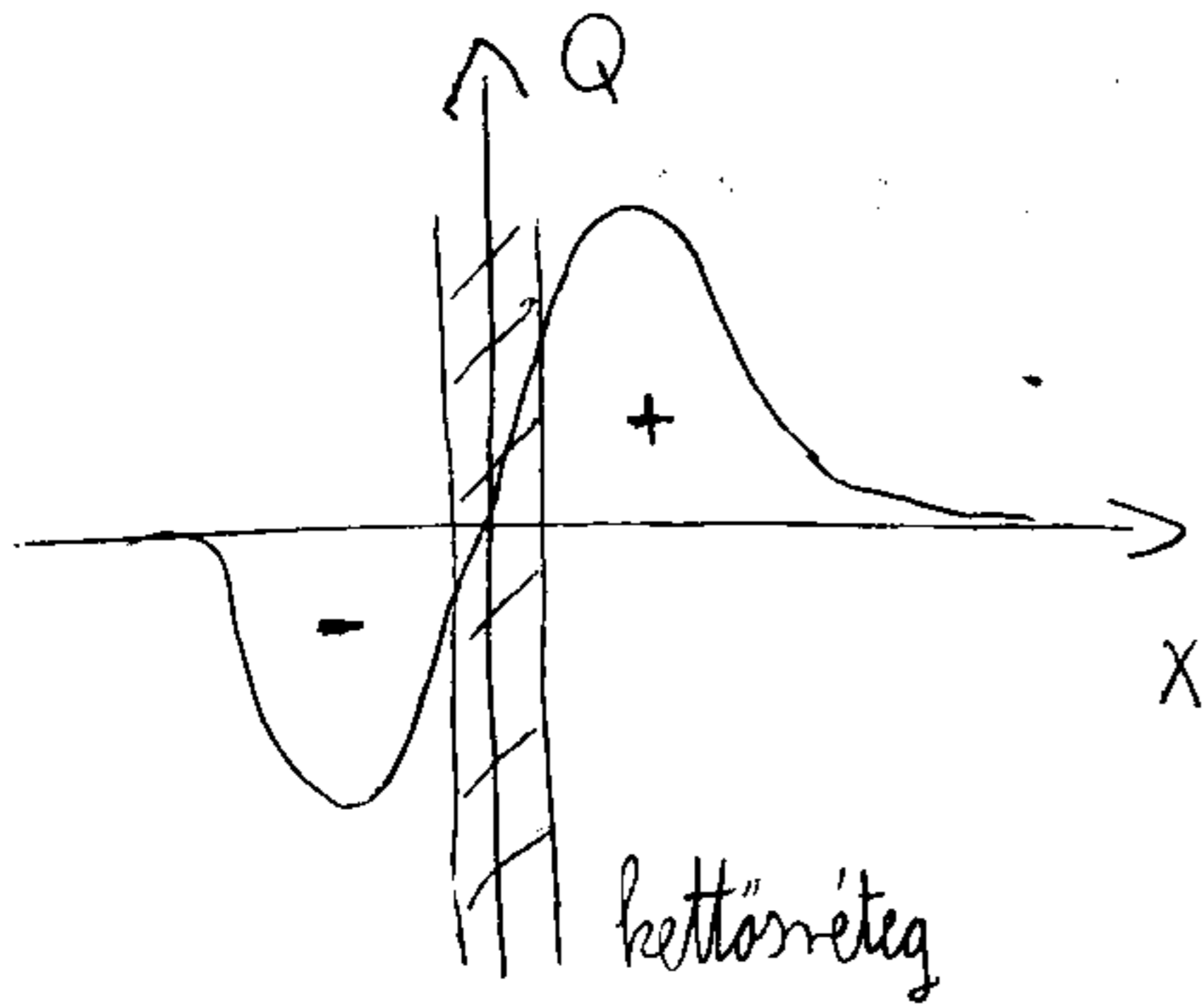
szennyezés iont lönek be
 $\sim 30 \text{ nm}$ bármilyen strukturát
 also határa van - létre lehet hozni

$T \uparrow \uparrow \rightarrow T \uparrow \uparrow$
 pozitív visszacsatolás - hűteni kell

p-n átmenet:

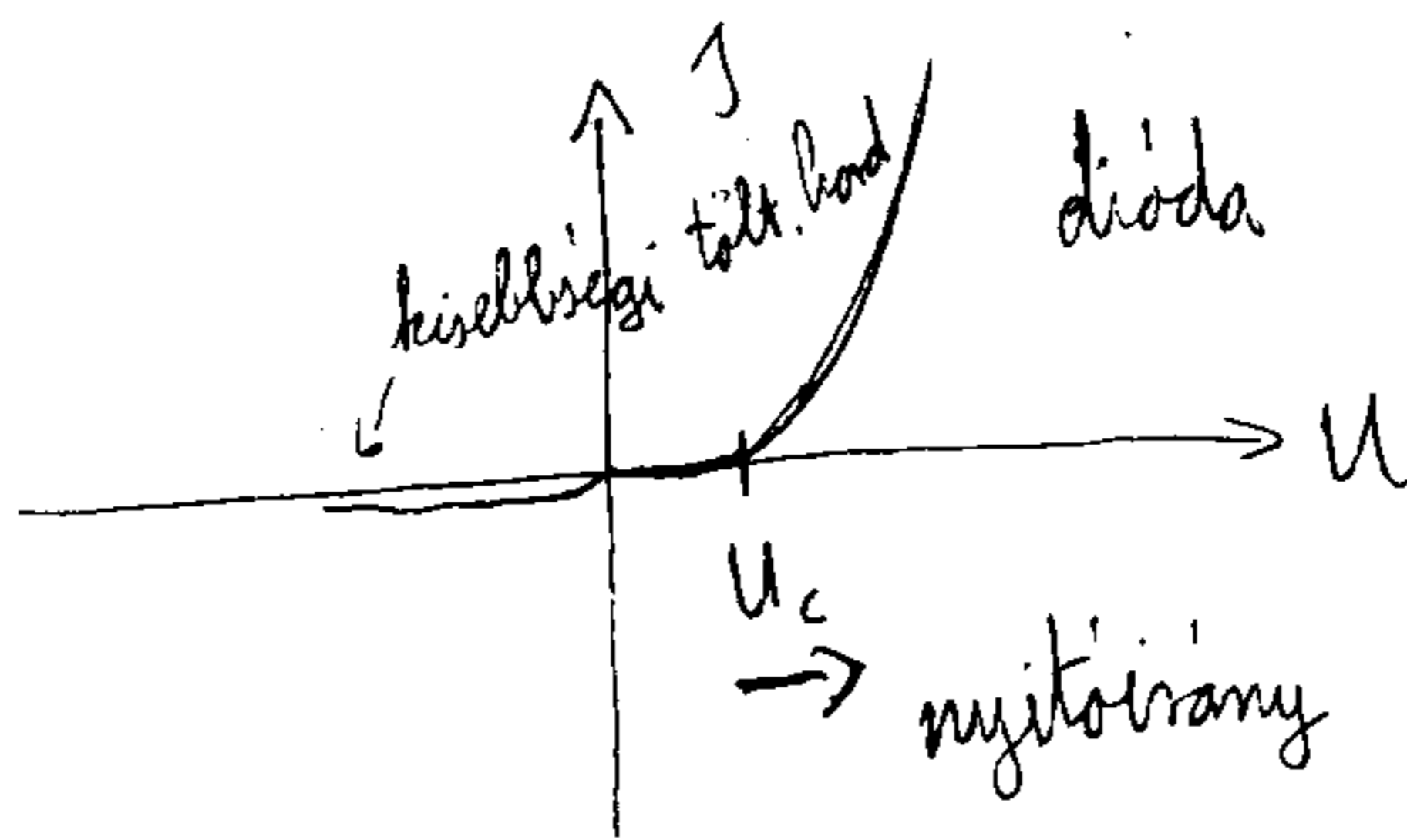
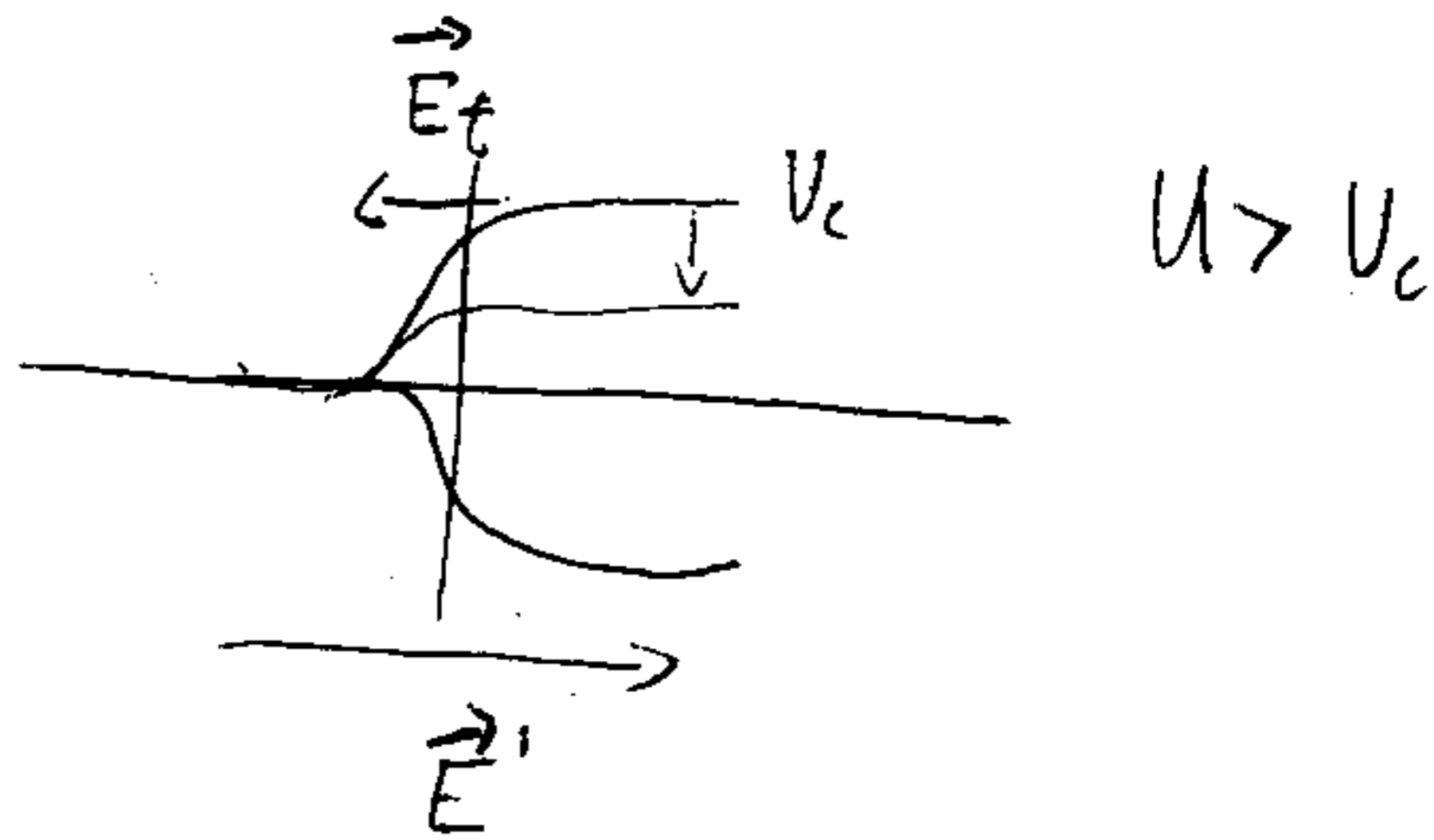
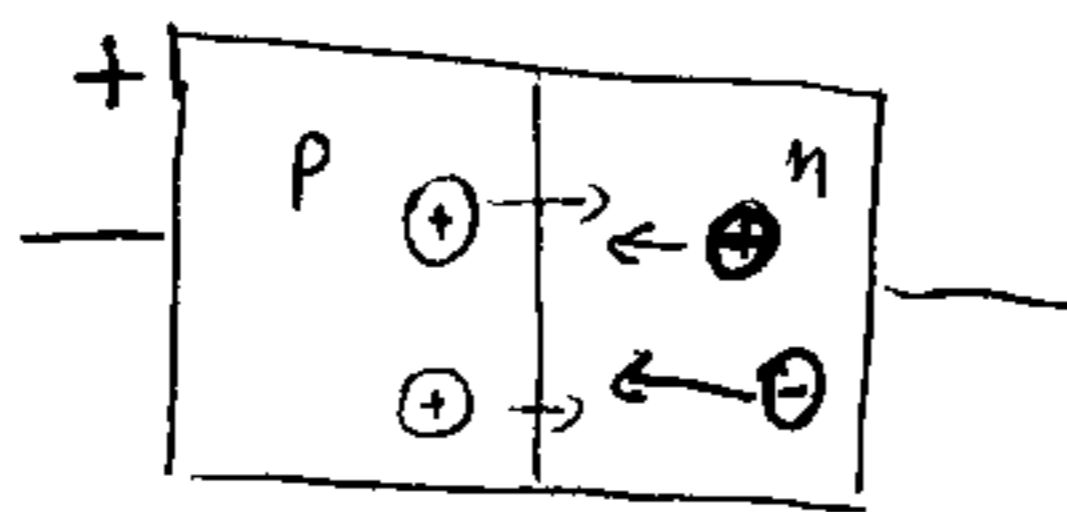


\vec{E} - megakadályozza a töltések további terjedését



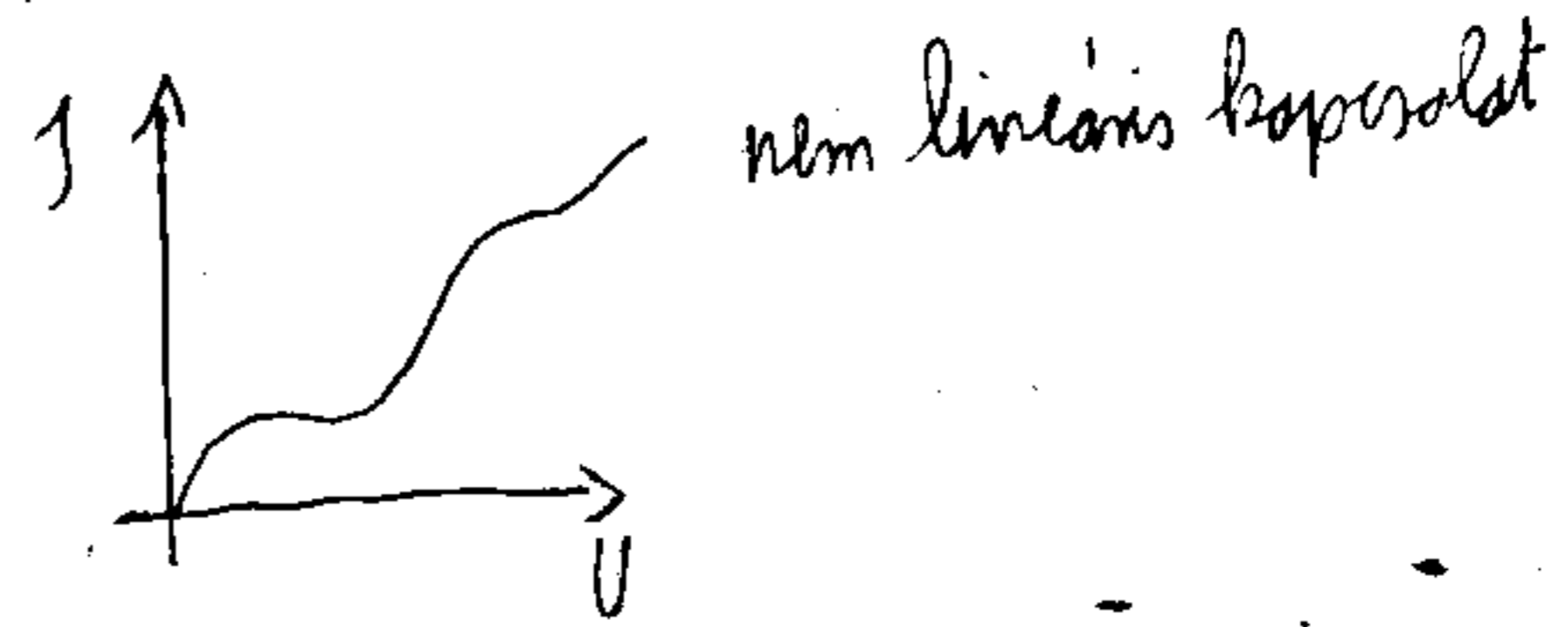
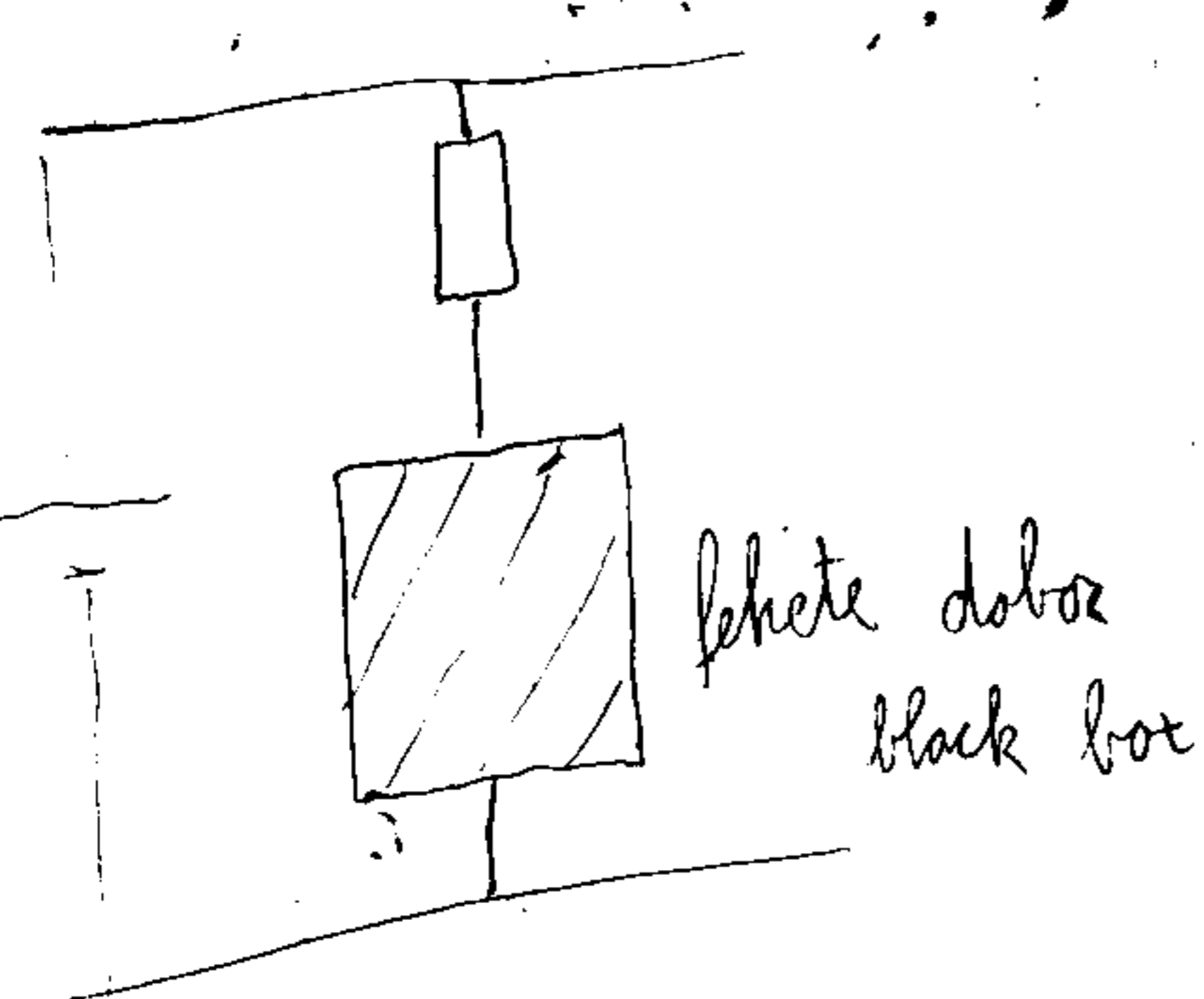
~ nincs töltésmorogás (csak kisebbségi töltések morognak)

nyitási irány

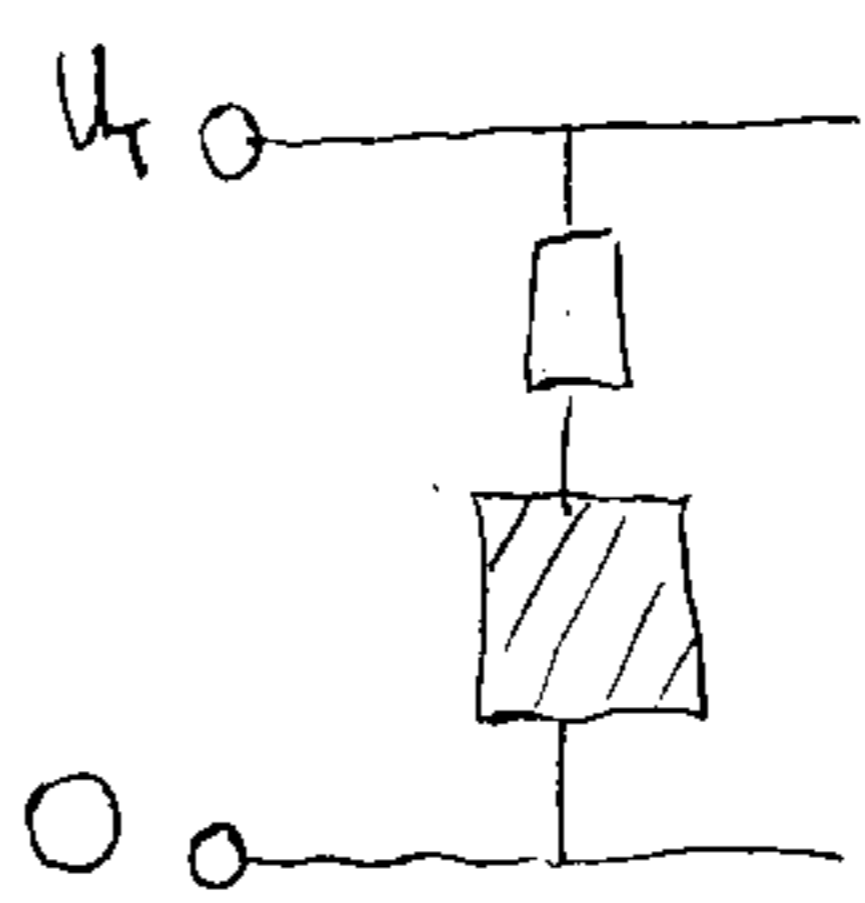


Si esetén $U_c \approx 0,7V$

nincs lineáris kapcsolat U és I között

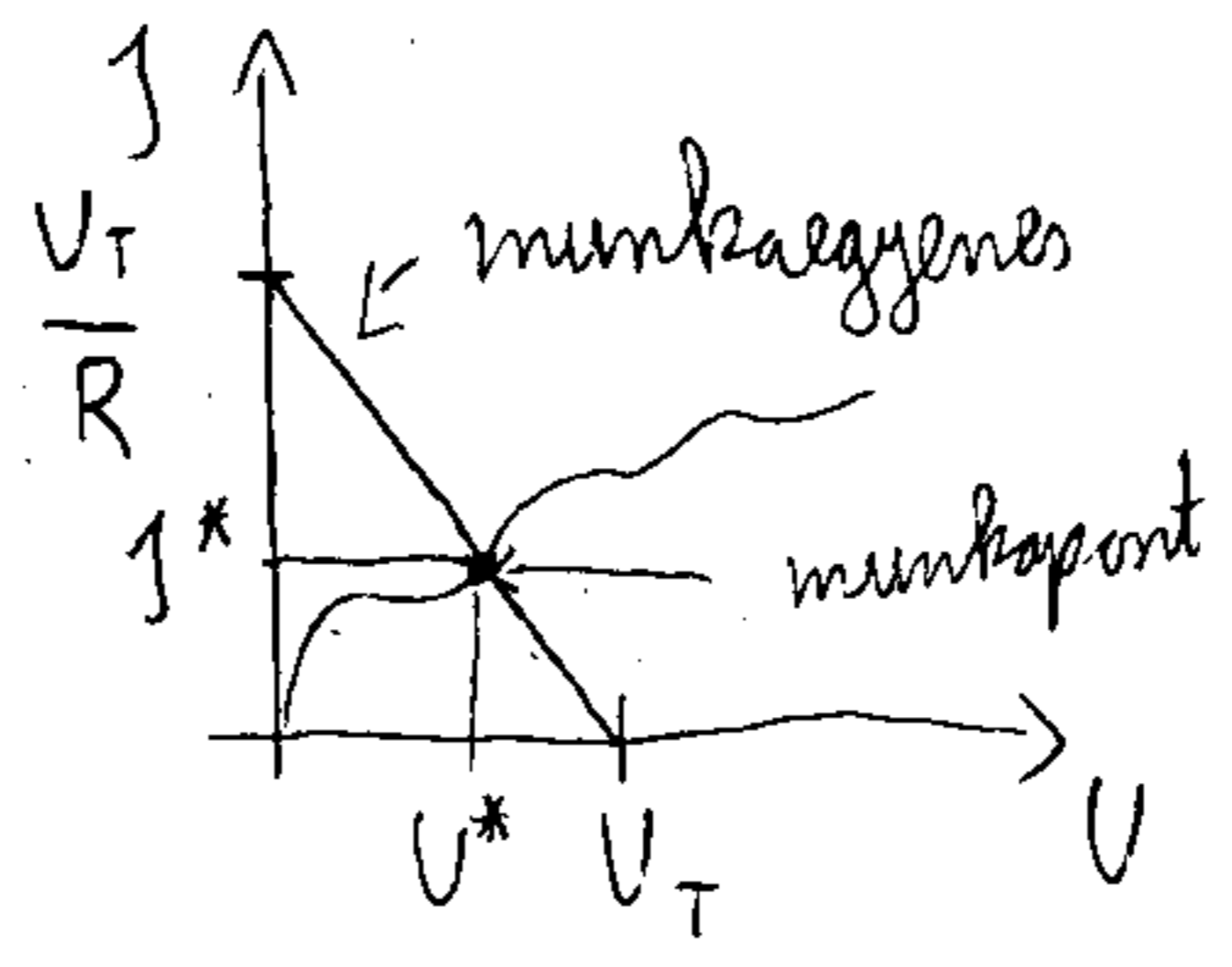


mérési rajzolásban:

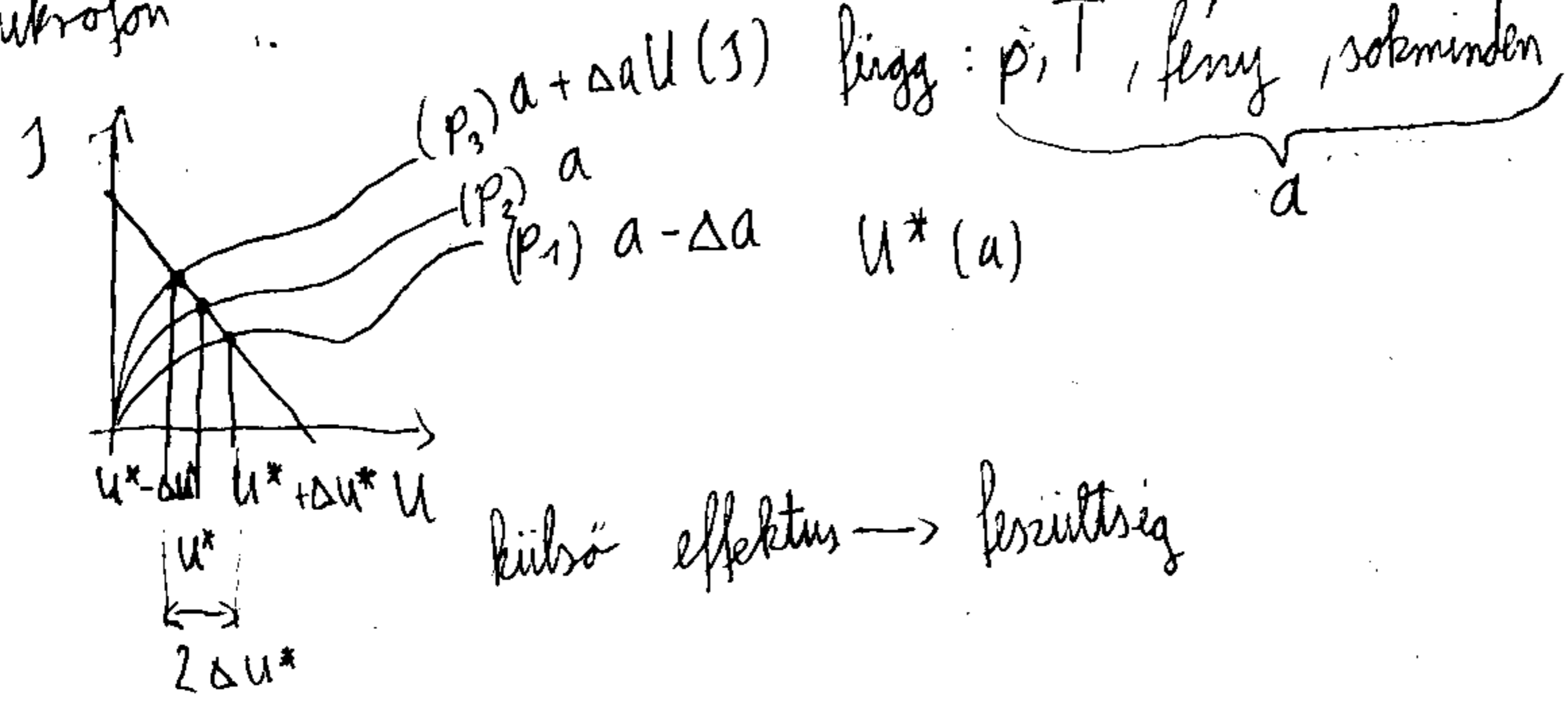


$$U_T = R J + U(J)$$

$$J = \frac{U_T}{R} - \frac{U}{R}$$

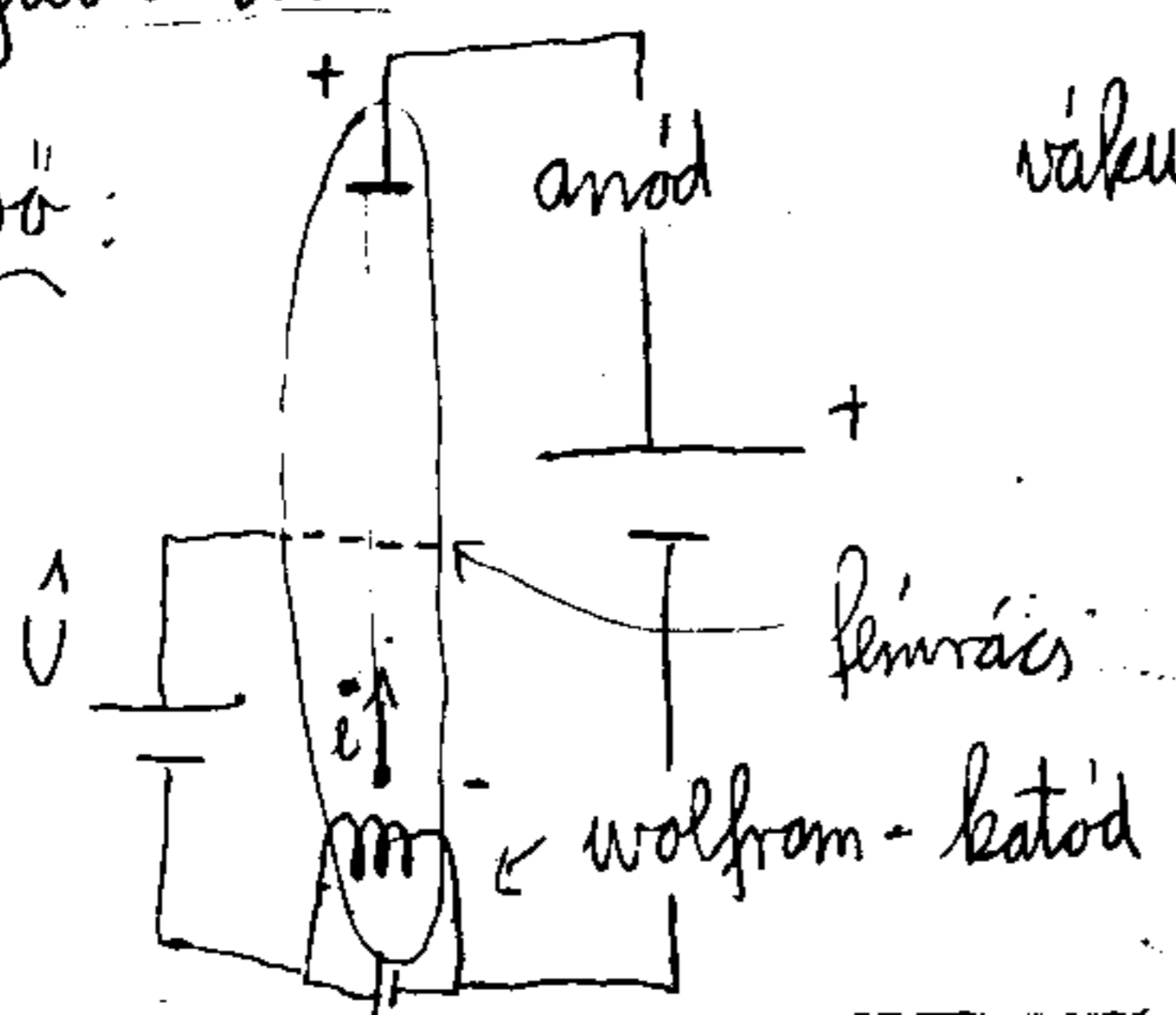


mikrofon



Technika fejlődés történet:

vákuumcső:



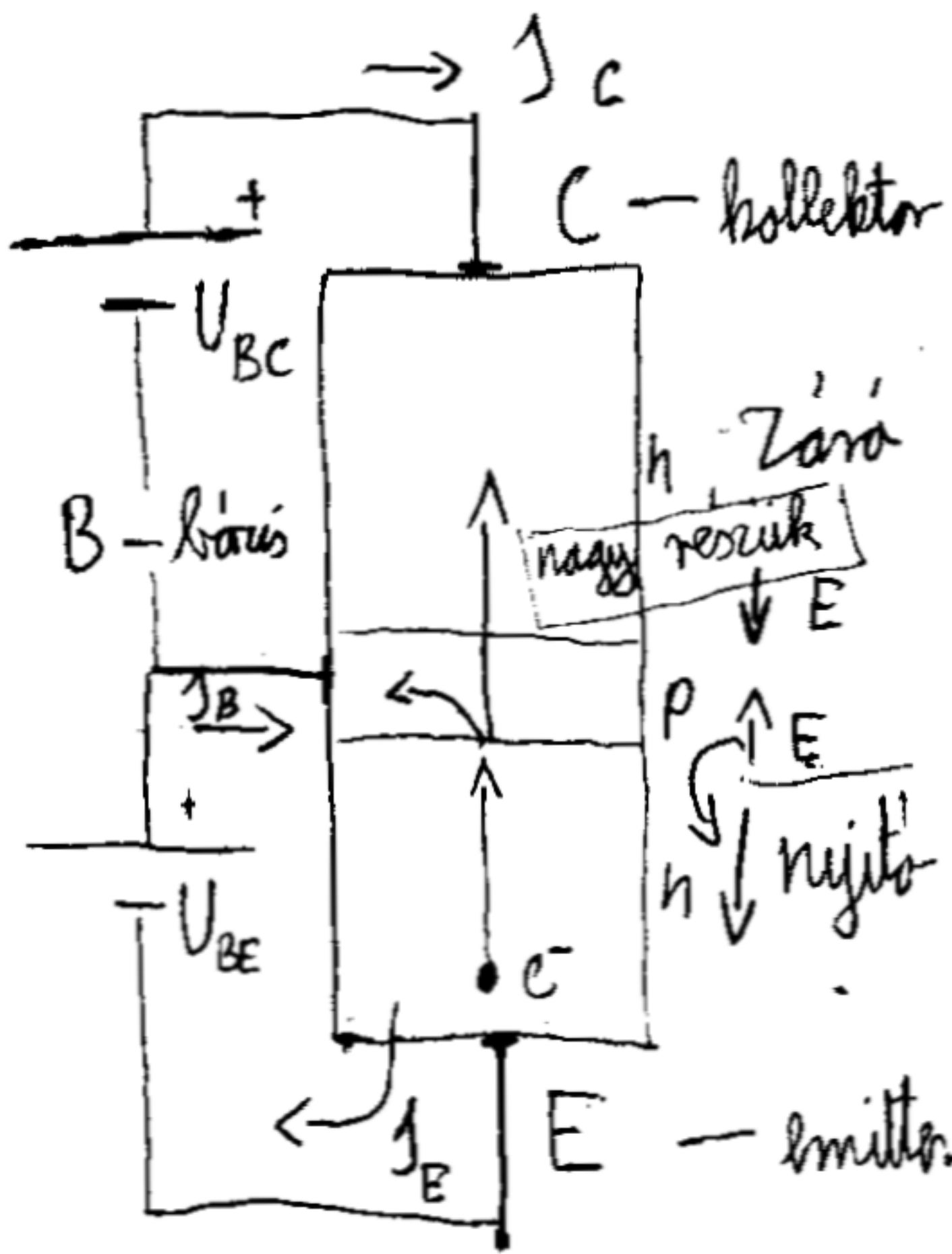
vákuumdióda

\hat{U} vezérli e^- -ok mozgását $\rightarrow J$ -t

vákuumtrióda itt $a \equiv \hat{U}$

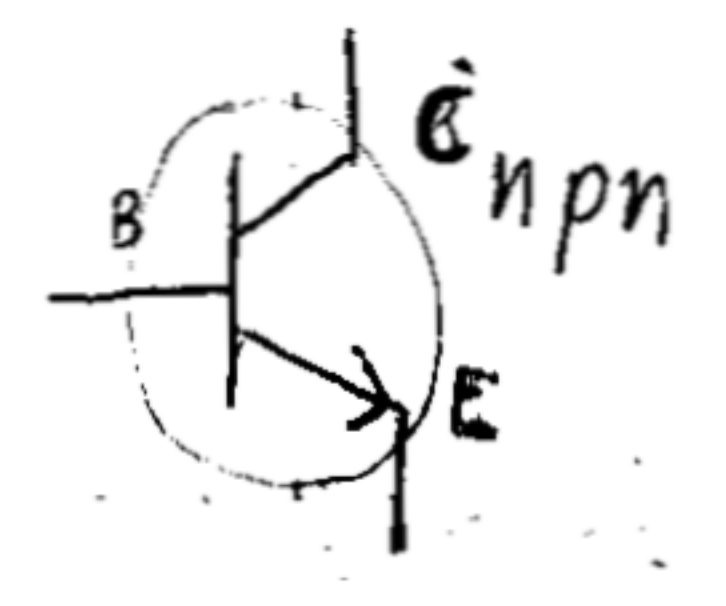
kelően nagy feszültségnél e^- -t bocsát ki

Bipoláris tranzistor: 1949 - Nobel-díj: Bardeen, Brattain, Shockley



p-réteg nagyon vékony

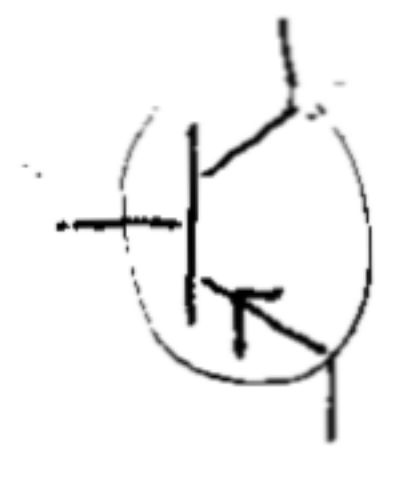
kapcsolási rajza



teszteléssel megfordul

- I_E - emitter áram
- I_B - bázis áram
- I_C - kollektor áram

van pnp is



$$I_E = I_B + I_C$$

$$I_C = \alpha I_E$$

ma már: $0,95 \leq \alpha \leq 1$

↑ régen

← átviteli tényező

$$I_C = \alpha (I_B + I_C)$$

$$\frac{I_C}{I_B} = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \beta$$

↑ erősítési tényező

$$I_C = \alpha I_B + \alpha I_C$$

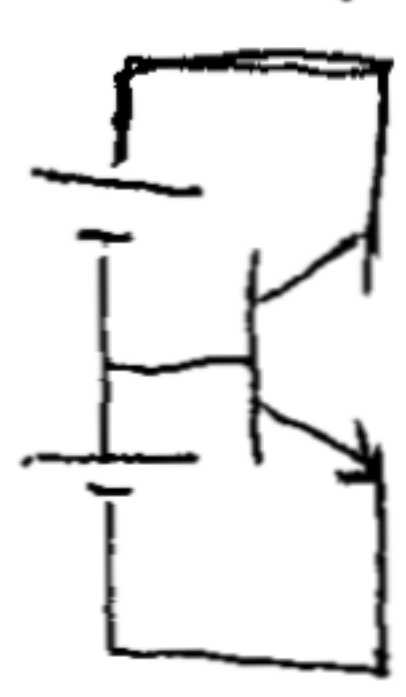
ma $\beta \approx 100$

$$(1 - \alpha) I_C = \alpha I_B$$

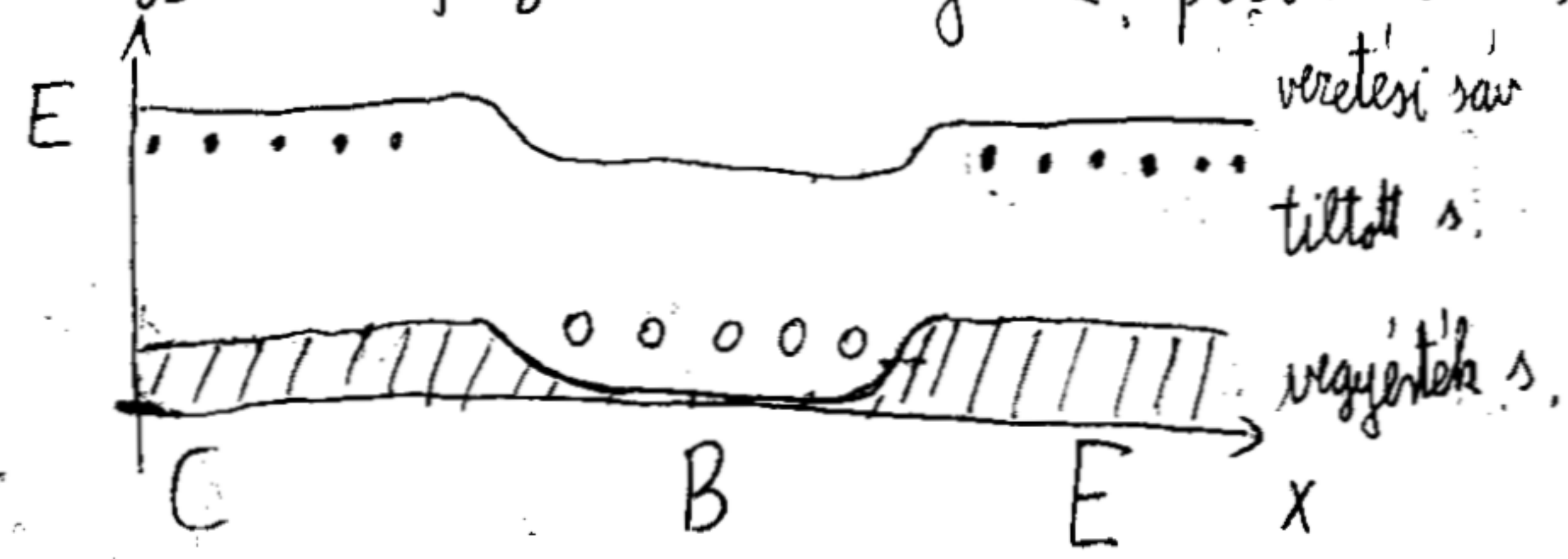
$$V_{BE} \rightarrow I_B \rightarrow I_C$$

↑ áramerősítő

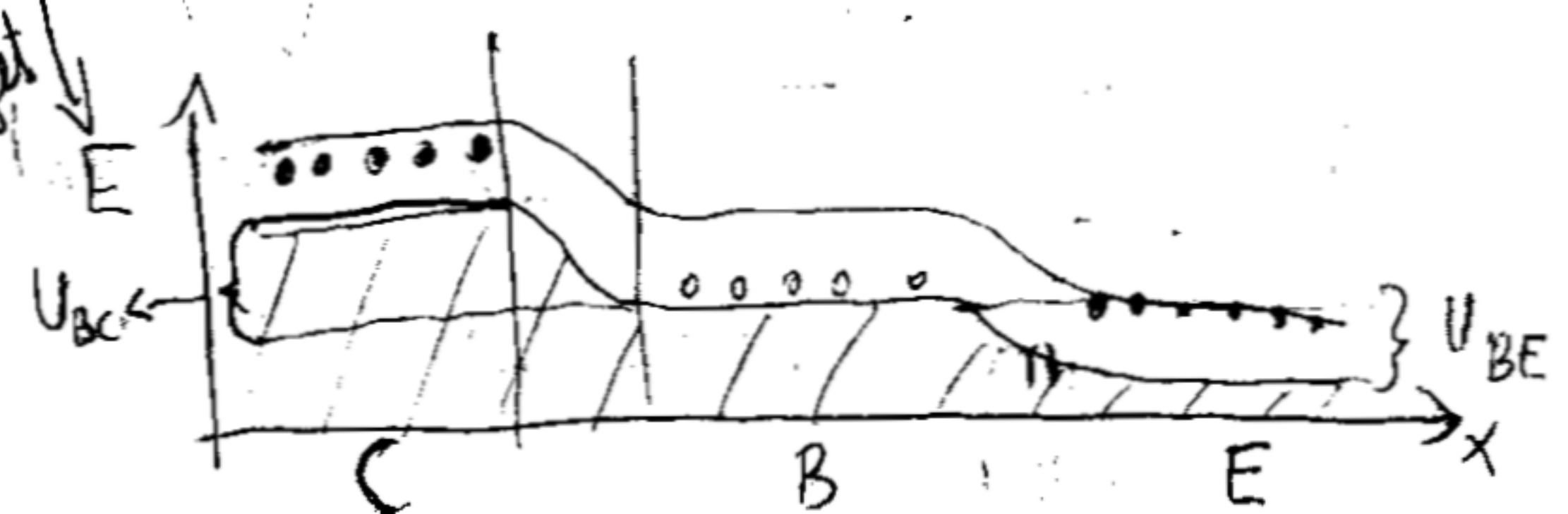
kapcsolási rajzon

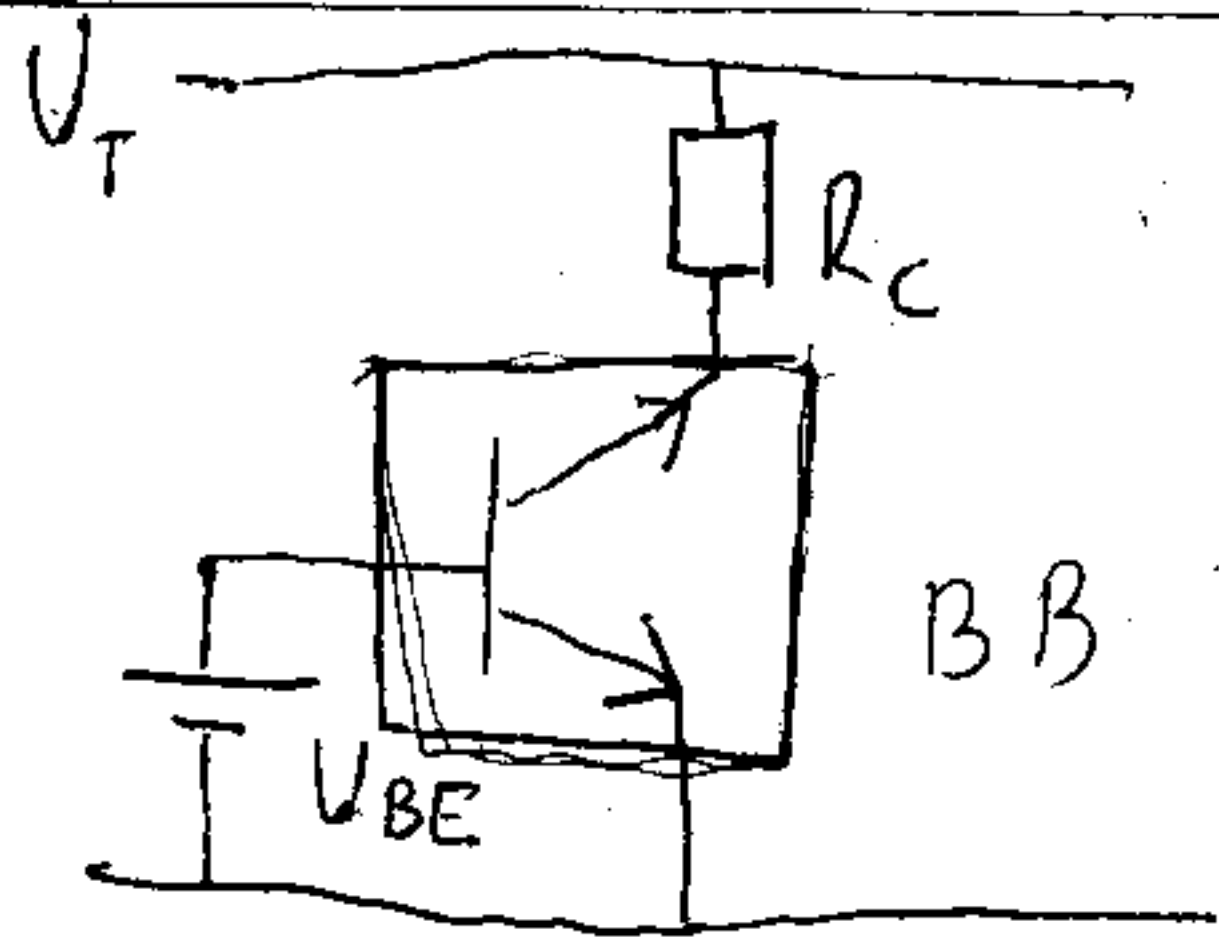


nagy áram folyik → melegszik: pozitív visszacsatolás

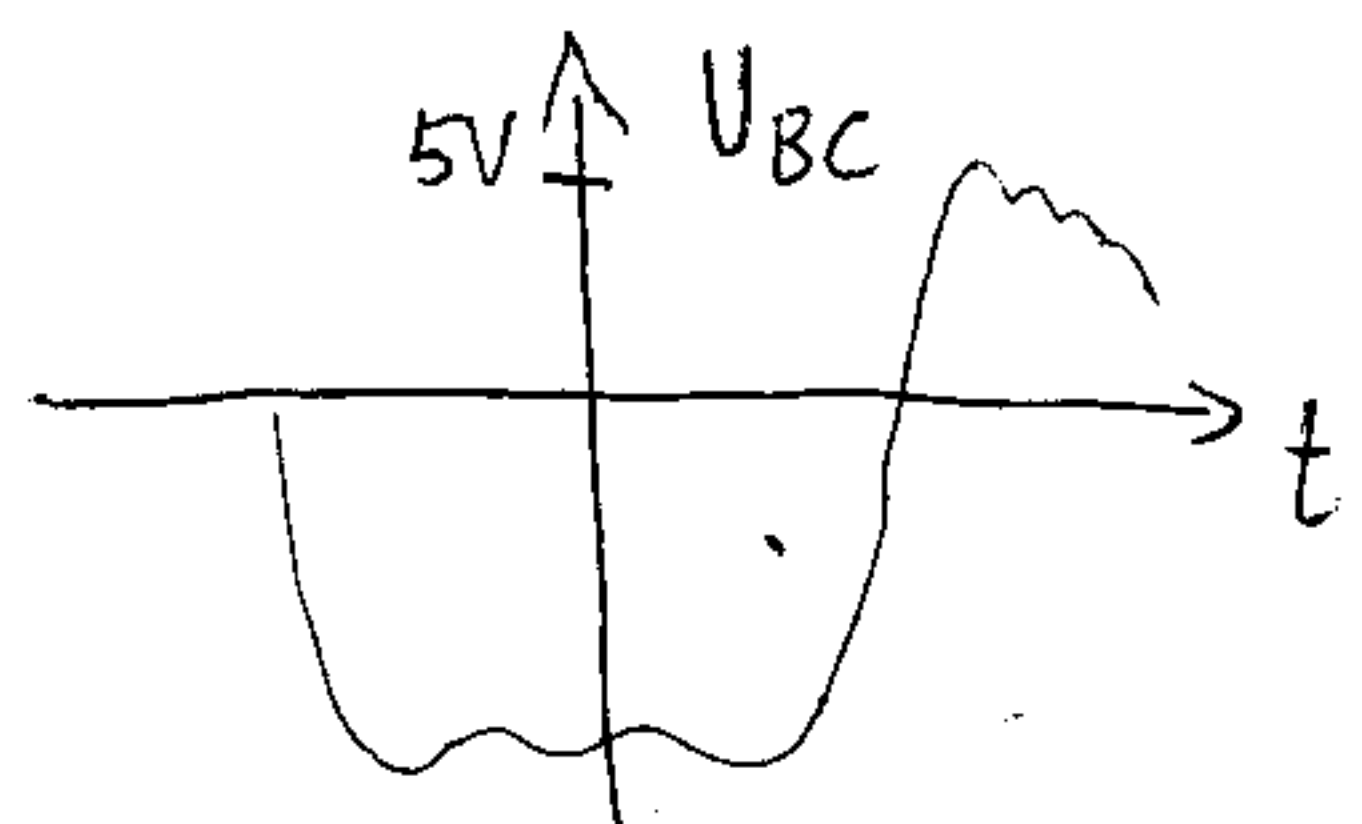
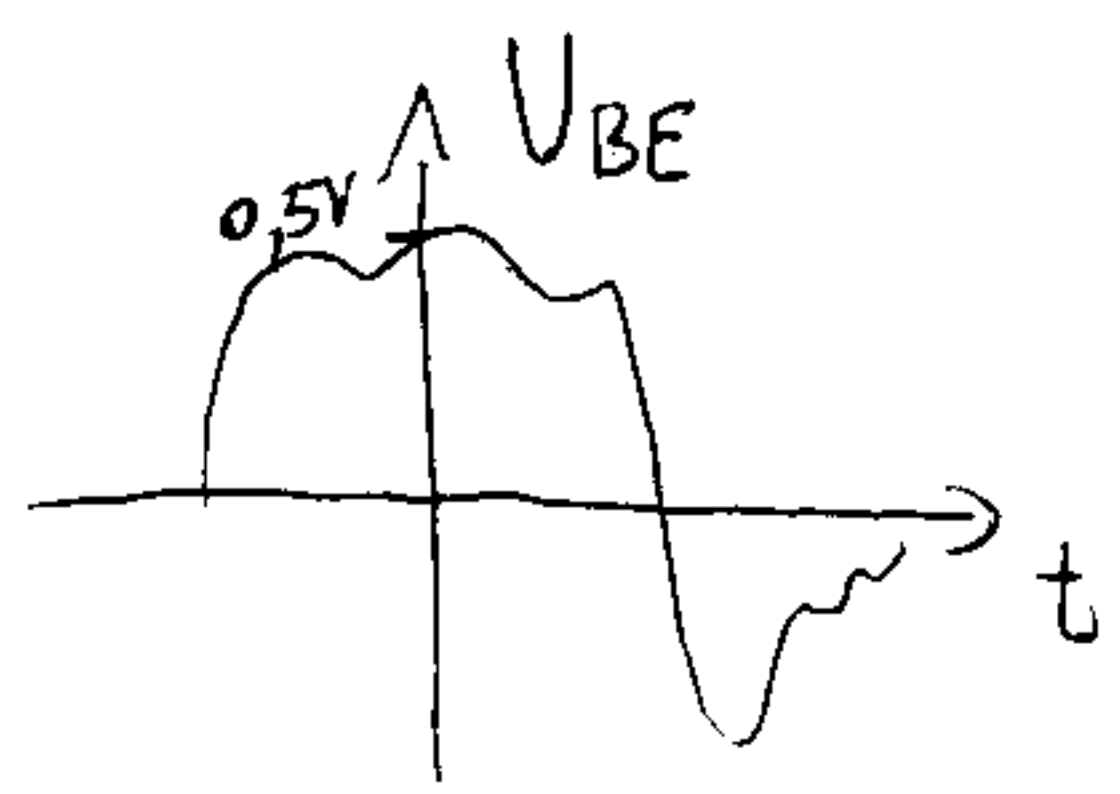
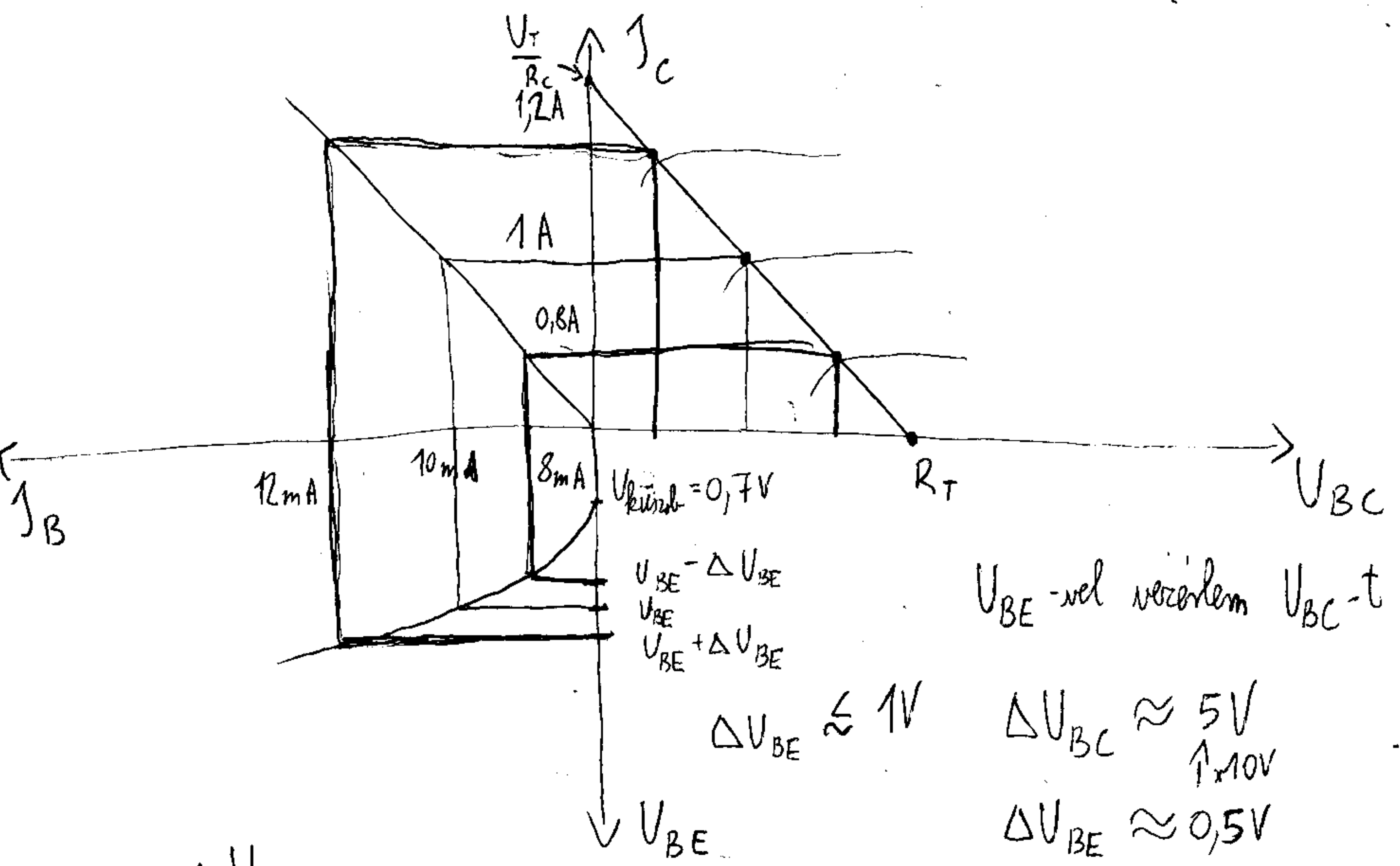


↑ rákapcsolom a feszültséget





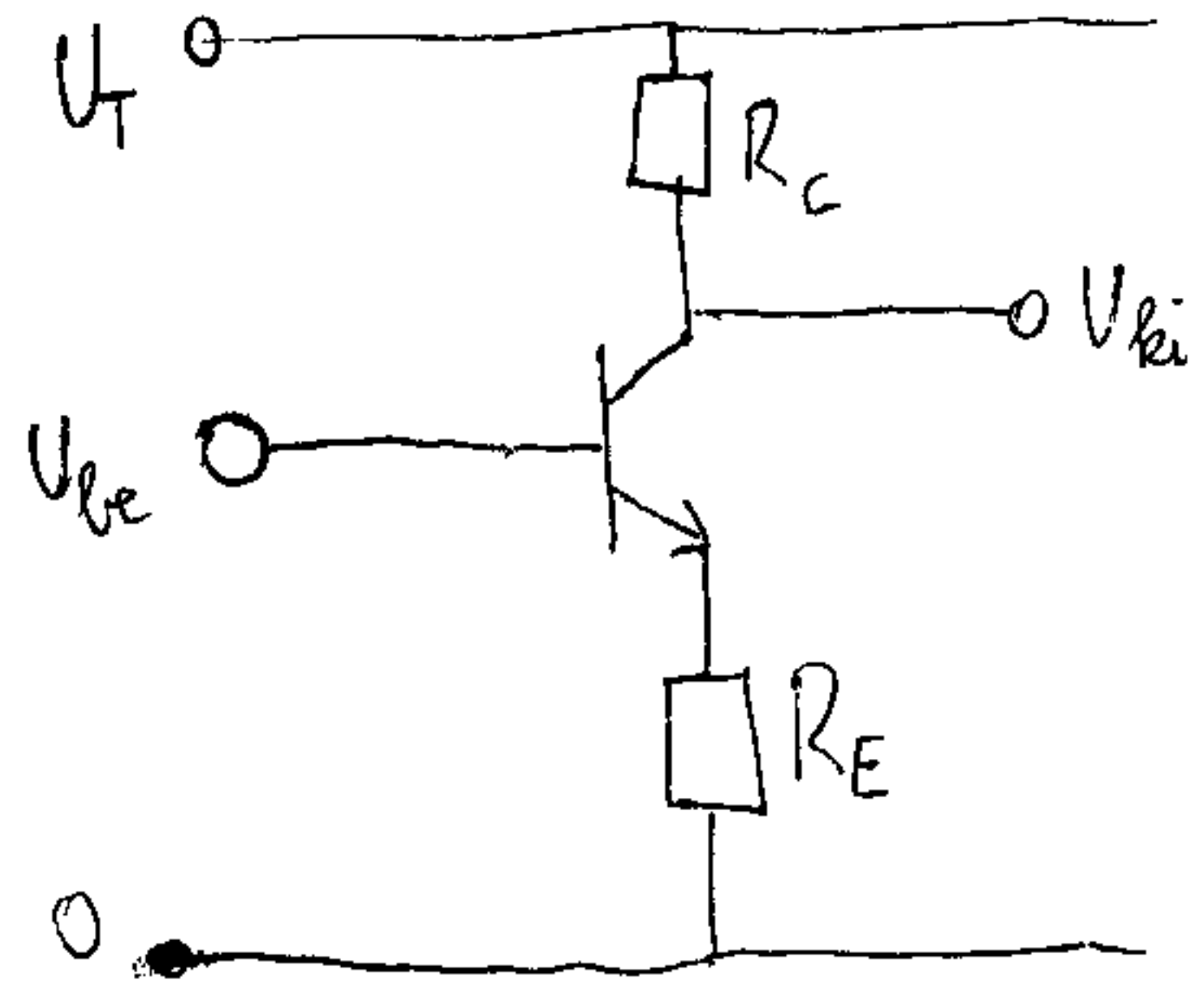
$$U_T = R_c I_c + U(U)$$



áramszabályzás → ellenállással

R melegsítke → R ↑ → I ↓

Tranzistoros erősítő:



$$I_E = I_B + I_C$$

$$I_C = \beta I_B$$

I $U_{be} = U_{BE} + R_E \cdot I_E$

II $U_{ki} = U_T - R_c I_c$

$$\text{III } U_{be} + \Delta U_{be} = U_{BE} (\rightarrow I_B + \Delta I_B) + R_E (I_E + \Delta I_E) \quad \text{III} - \text{I}$$

$$\text{IV } U_{ki} + \Delta U_{ki} = U_T - R_C (I_C + \Delta I_C) \quad \text{IV} - \text{II}$$

$$\text{III} - \text{I} : \Delta U_{be} = \underbrace{U_{BE} (\rightarrow I_B + \Delta I_B) - U_{BE} (\rightarrow I_B)}_{R_{be}''} + R_E \cdot \Delta I_E$$

$$\Delta U_{ki} = -R_C \Delta I_C$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x$$

$$U_{BE} (\rightarrow I_B + \Delta I_B) - U_{BE} (\rightarrow I_B) = \frac{dU_{BE}}{dI_B} \cdot \Delta I_B$$

$$\Delta U_{be} = \left. \begin{aligned} & \frac{dU_{BE}}{dI_B} \cdot \Delta I_B + R_E \cdot \Delta I_E \\ & \xrightarrow{R_{be}''} \end{aligned} \right\} \frac{\Delta U_{ki}}{\Delta U_{be}}$$

$$\Delta U_{ki} = -R_C \Delta I_C$$

$$A = \frac{\Delta U_{ki}}{\Delta U_{be}} = \frac{-R_C \Delta I_C \beta \Delta I_B}{R_{be} \cdot \Delta I_B + R_E \cdot \Delta I_E} = \frac{-R_C \beta \Delta I_B}{R_{be} \Delta I_B + R_E (1+\beta) \Delta I_B}$$

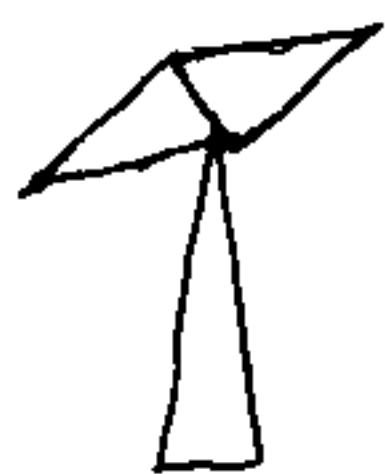
$$= \frac{R_C}{\underbrace{R_{be} + R_E}_{\approx 0 \Omega}} \cdot \frac{\beta}{\underbrace{1+\beta}_{\approx 1}} \approx \boxed{-\frac{R_C}{R_E}} \sim 100 \times \text{erősítés}$$

10^8 erősítés elérhető

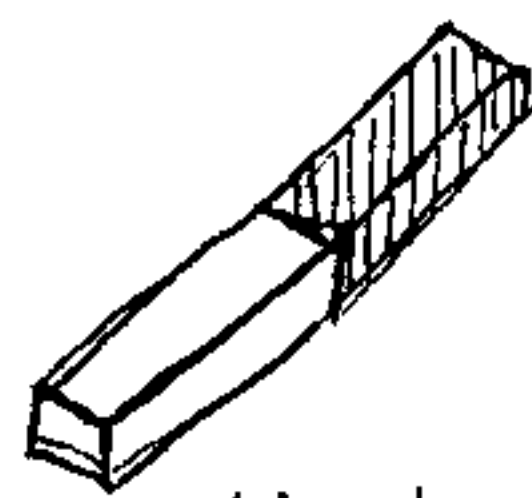
$R_{be}'' \ll R_E$

Magnetostatika

- már a kínaiak is → 11. sz új típusú kölcsönhatás, iránytű



beáll egy irányba

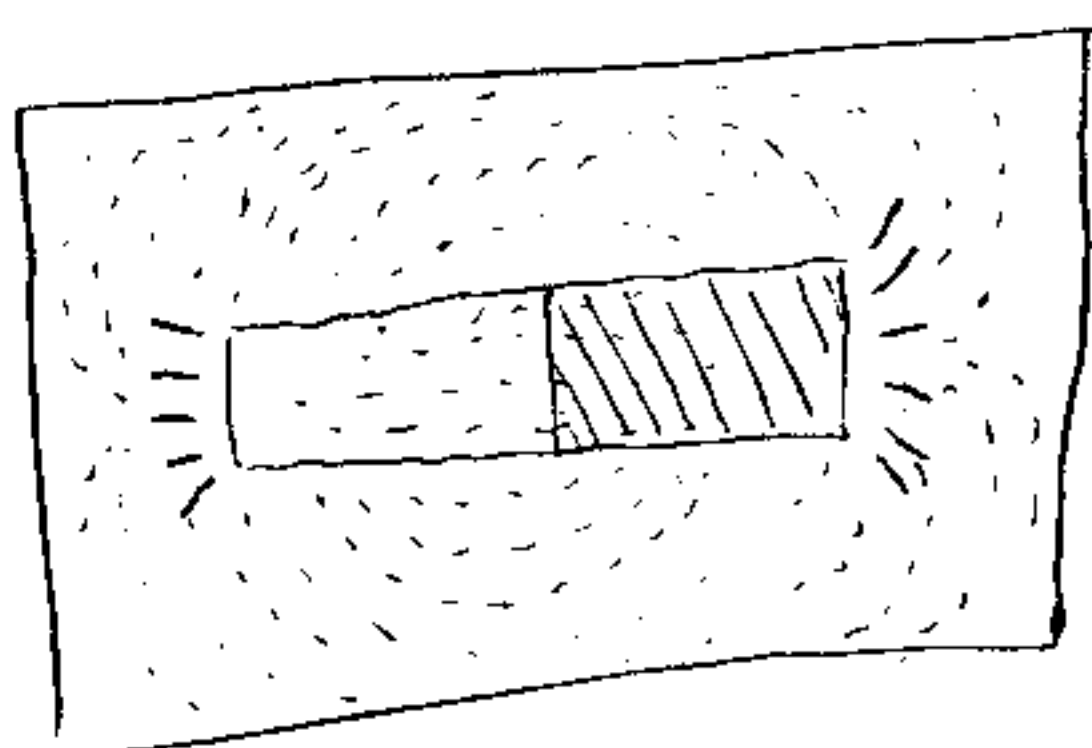


rúdmágnes

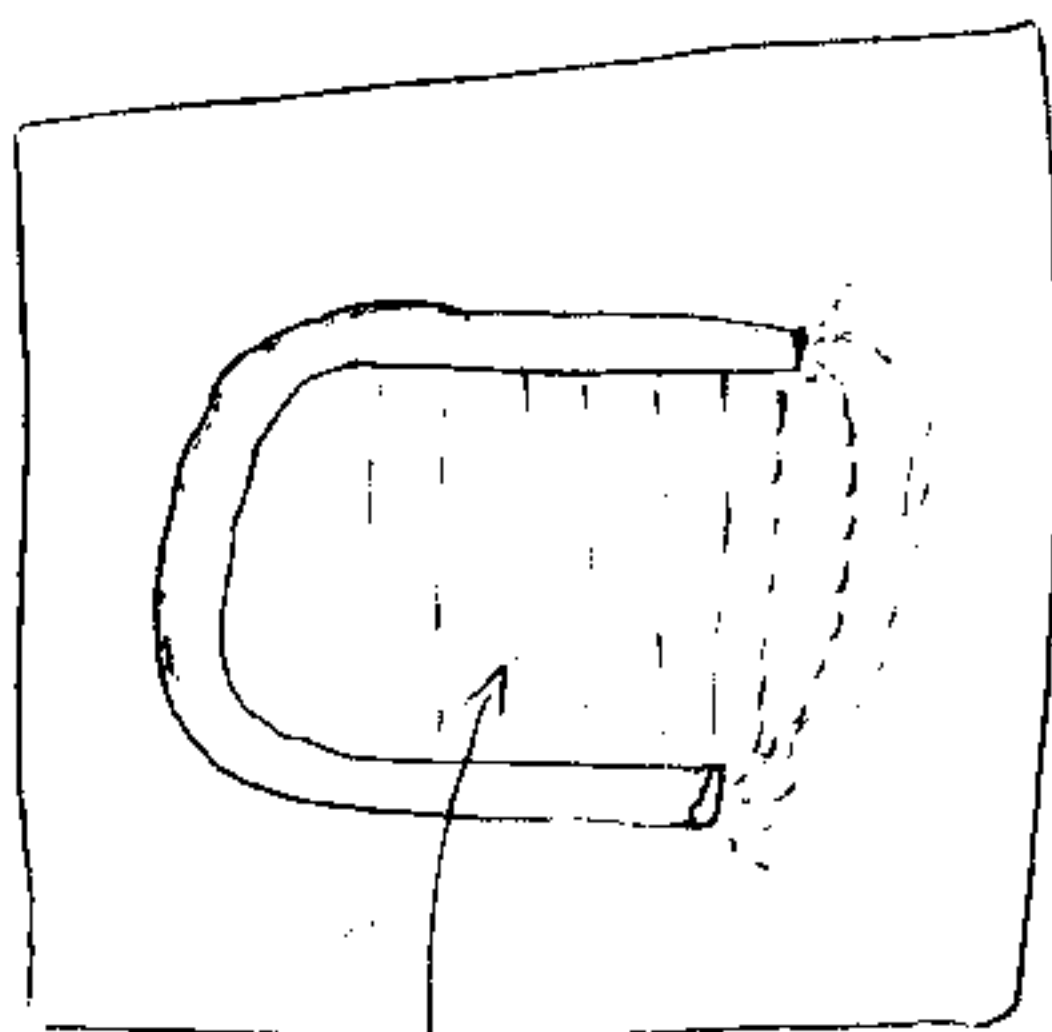
mágnesezett vasdarab

- hosszú hatótávolságú mint az elektromos v. gravitációs kölcs. hat.

Kísérlet:



← vasreszelék szórás
↳ kis vasreszelék
rúd-mágnessel



patkómágnessel

homogén mágneses tér

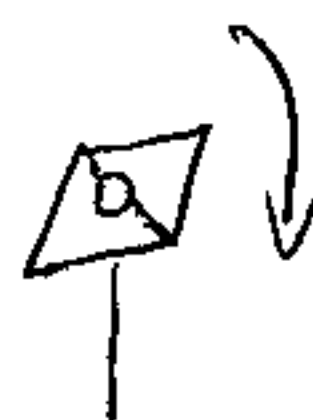
19. sz eleje → Ampère ~ 1820, Ørsted - fontos kísérlet:

Hans Christian Ørsted

1777 - 1851

Ørsted kísérlet:

$$J = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

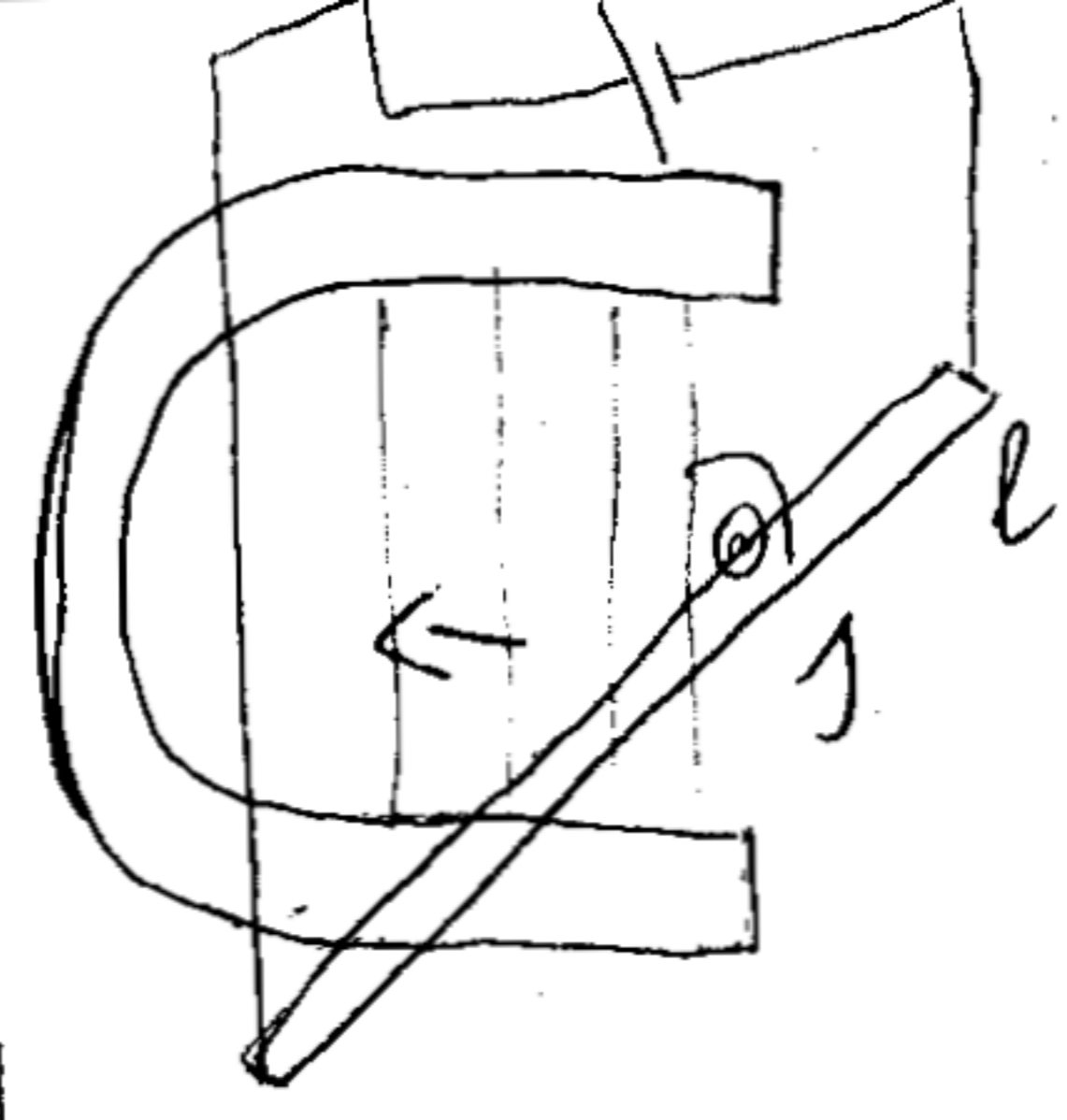


demonstrálni elektromos áram hőhatása →
→ iránytűt otthagyták →
→ drót → áram → iránytű kitért

elektromosságban

→ mágnességben

Kísérlet:



áramjárta vezető mágneses térben

hát - helyben marad erő hat rá a kótel és a nehérségi erőn kívül

$$|\vec{B}| = \frac{|F_{max}|}{I \cdot l}$$

\vec{B} : mágneses indukció vektor

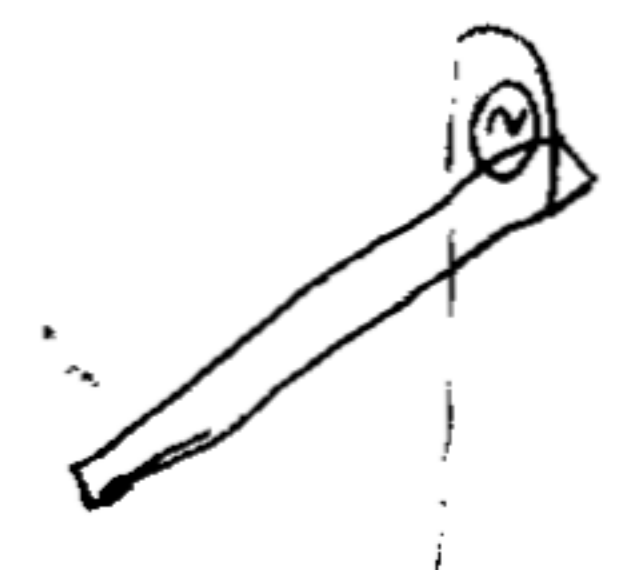
F_{max} : maximális erő

$$F \sim l$$

$$F \sim I \text{ előjelesen is}$$

$$F \sim \sin \alpha$$

$$[\vec{B}] = \frac{N}{Am} = \frac{C \frac{V}{m}}{Am} = \frac{Vs}{m^2} = 1T \text{ (Tesla)}$$



Nicola Tesla 1856-1943 mérnök, feltaláló

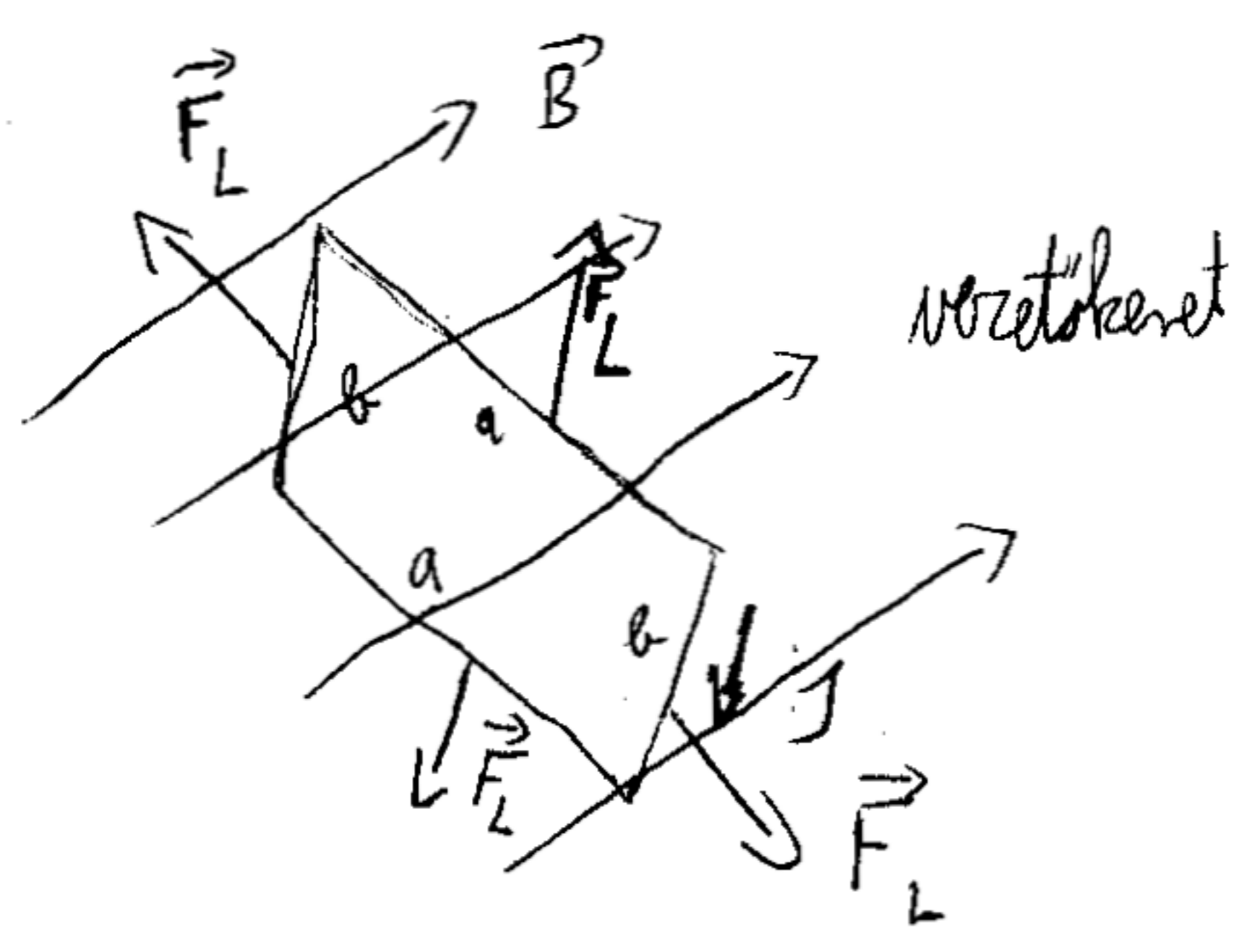
Puskás Tivadar meghívta dolgozni a Ganz-művekhez

$$\vec{F}_L = I (\vec{l} \times \vec{B})$$

Lorentz-erő

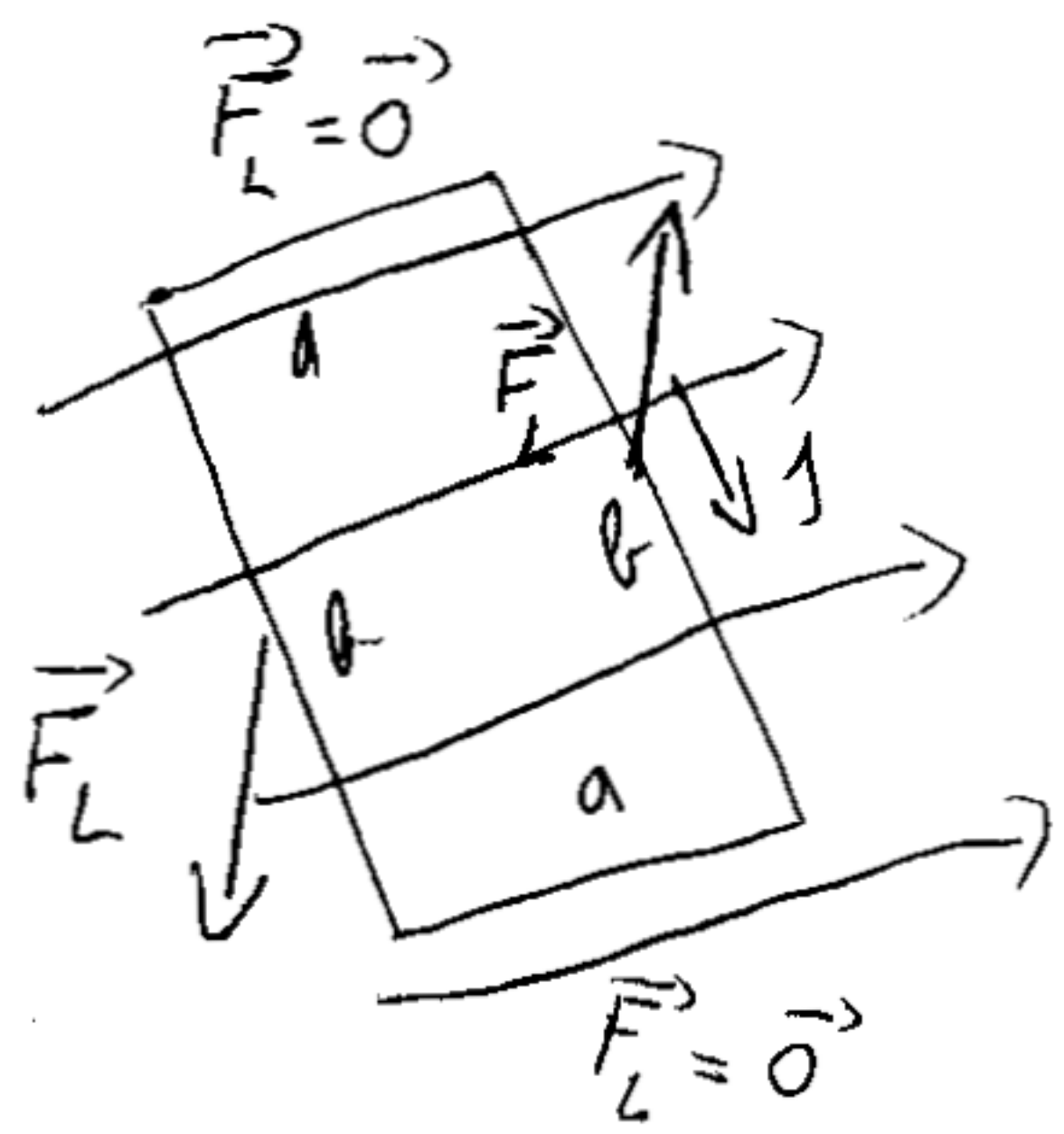
\vec{l} : hosszúságvektor, iránya az áram iránya

Hendrik Lorentz 1853-1928



$$\sum \vec{F}_L = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M} = \vec{0}$$



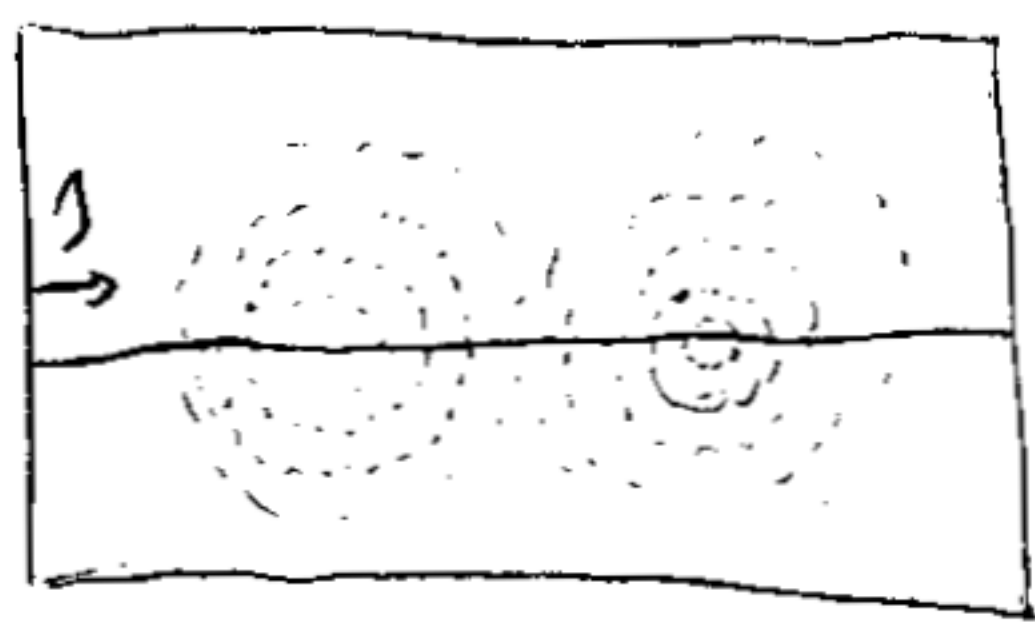
$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M} \neq \vec{0}$$

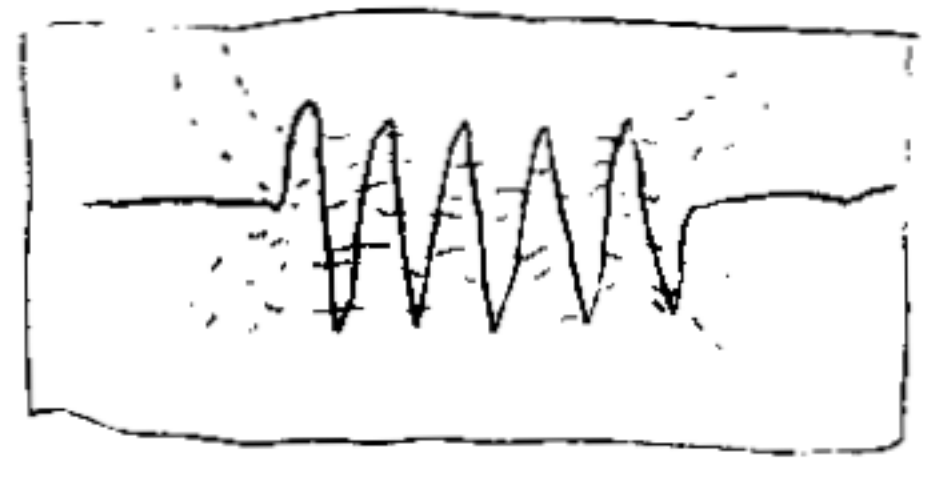
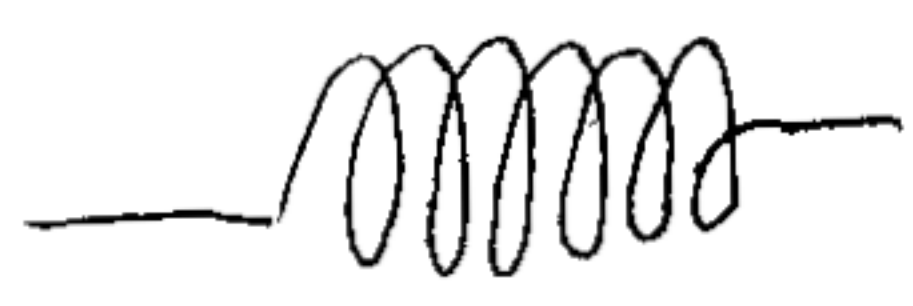
$$|\sum \vec{M}| = |\vec{F}_L| \cdot a =$$

$$= I \cdot b \cdot |\vec{B}| \cdot a = I \cdot f \cdot |\vec{B}|$$

Kísérlet:



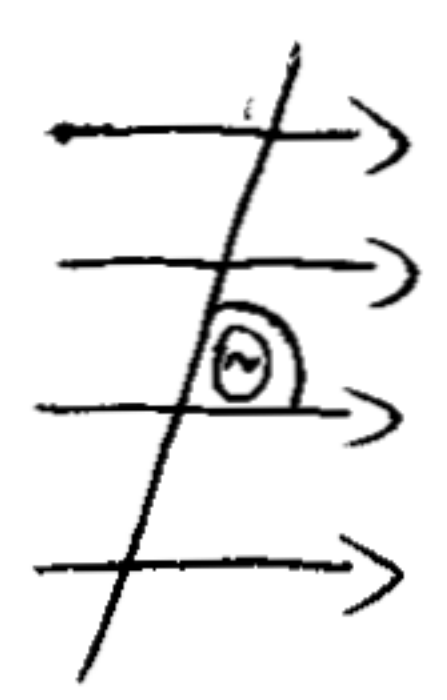
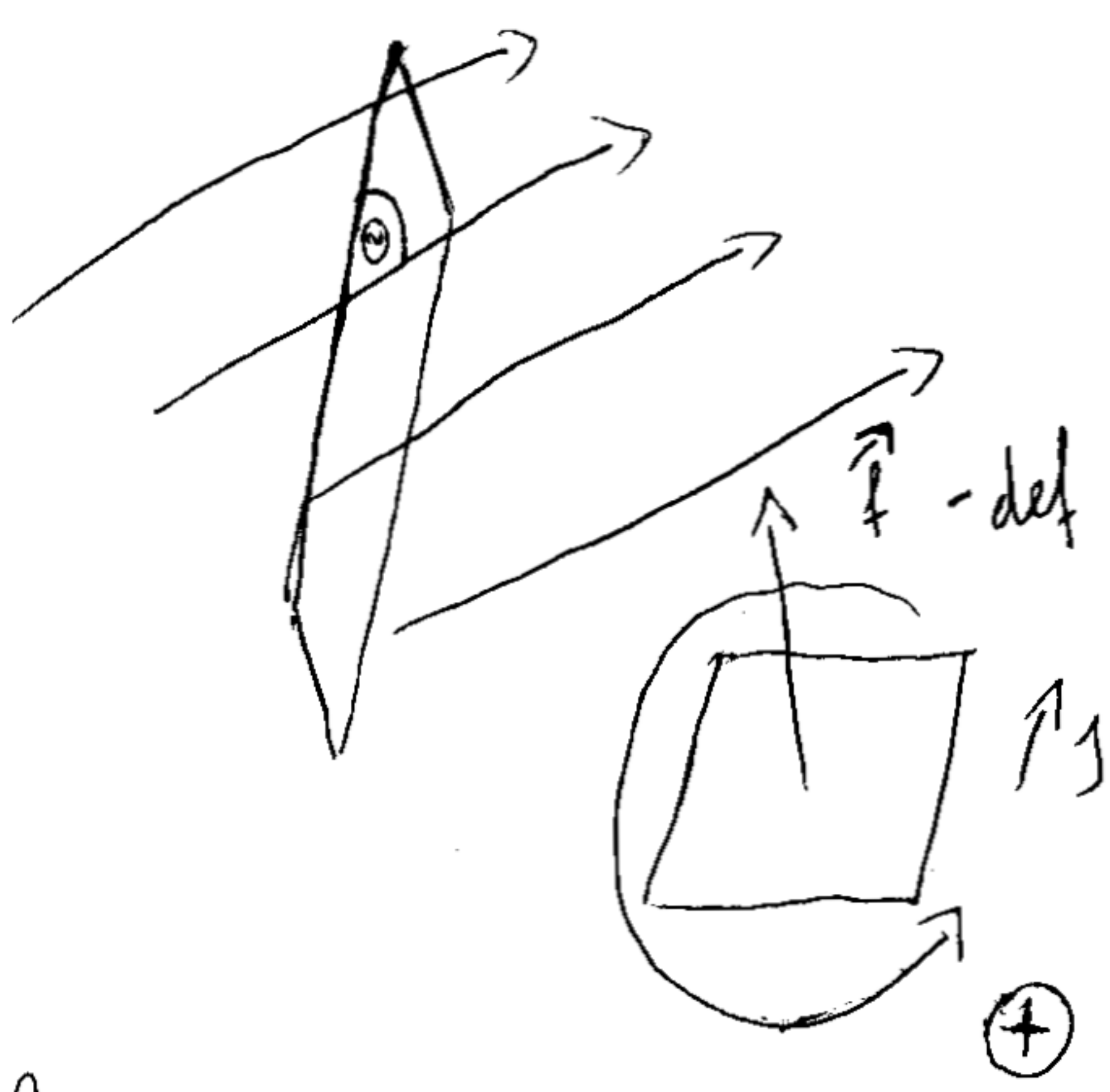
előremutató kísérlet: szolenoid tekercs



kondenzátor ~ tekercs
hasonló szerep

$$|\vec{M}| = I \cdot f \cdot |\vec{B}| \sin \theta$$

$$\vec{M} = I (\vec{f} \times \vec{B})$$



$\vec{f} := f \cdot \vec{n}$ jobbsavos
felületelem vektor

$$I \cdot \vec{f} := \vec{m}$$

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

bármely vezetőhurok-ra
homogén

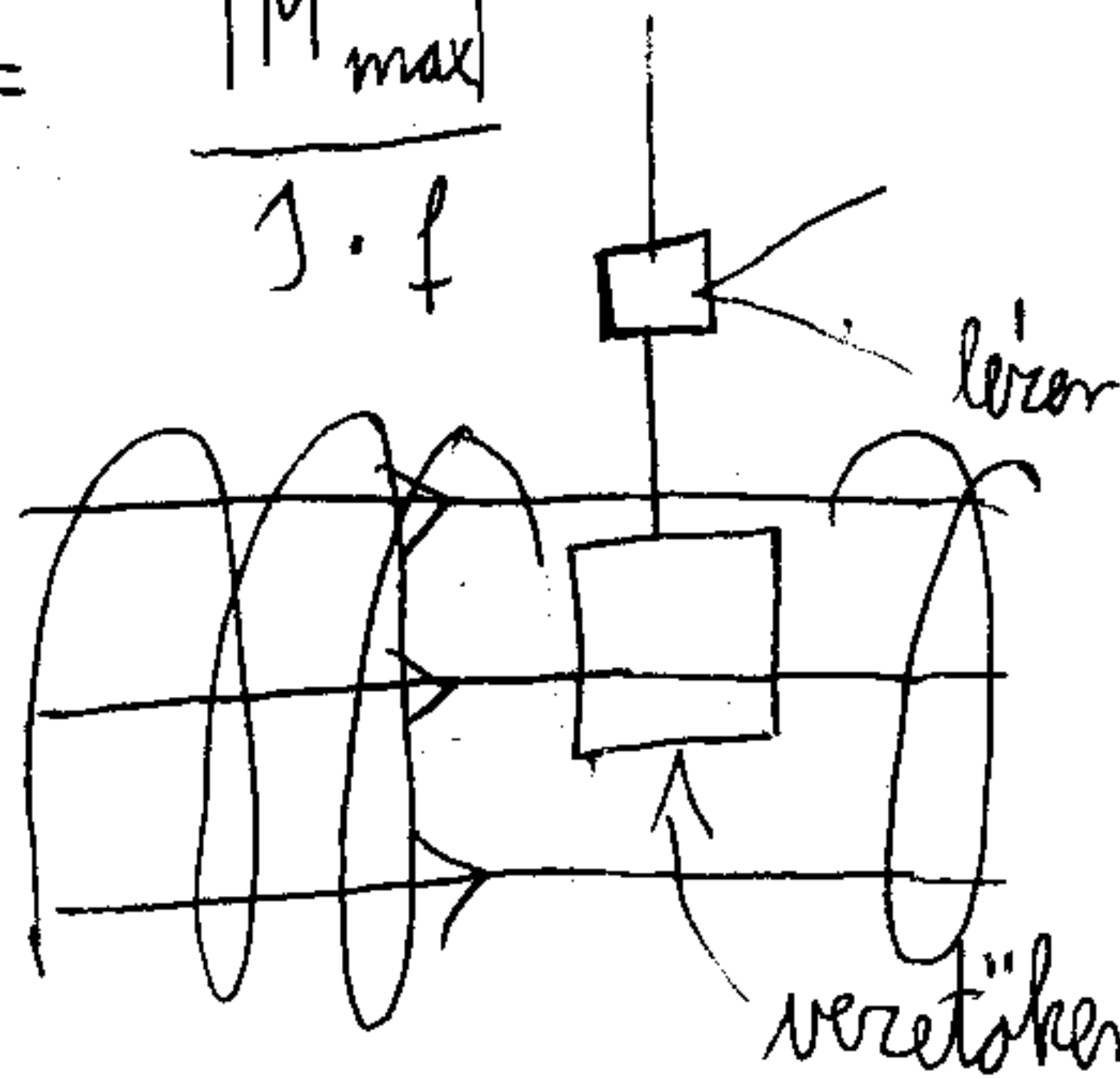
formálisan hasonló a \rightarrow
 \rightarrow homogén \vec{E} + dipólus $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$

$$[\vec{m}] = A m^2 \text{ tíme igaz!!!}$$

\vec{m} : mágneses momentum

megj.: $|\vec{B}|_{\text{max}} := \frac{|\vec{M}|_{\text{max}}}{I \cdot l}$

Kísérlet:



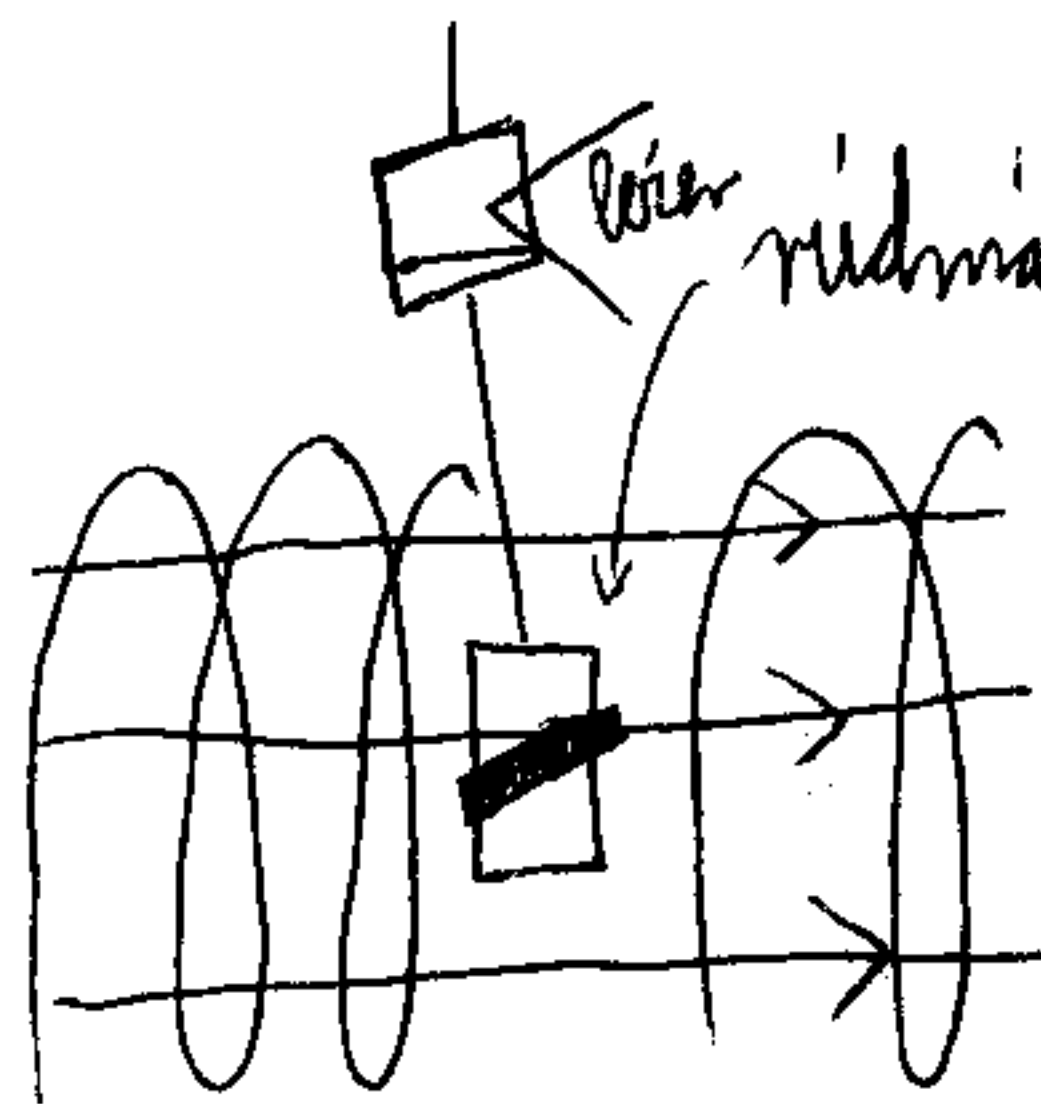
vezetőkeret $\rightarrow \vec{l}$ - et növeljük \rightarrow

megj.: ha a mágneses tér nem homogén \rightarrow több "keret" \rightarrow tekercs \rightarrow próbatekercs

\rightarrow inhomogén $\vec{B}(\vec{r}) \quad \sum \vec{F} \neq \vec{0}$

$$F_x \sim m_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \dots$$

Kísérlet:



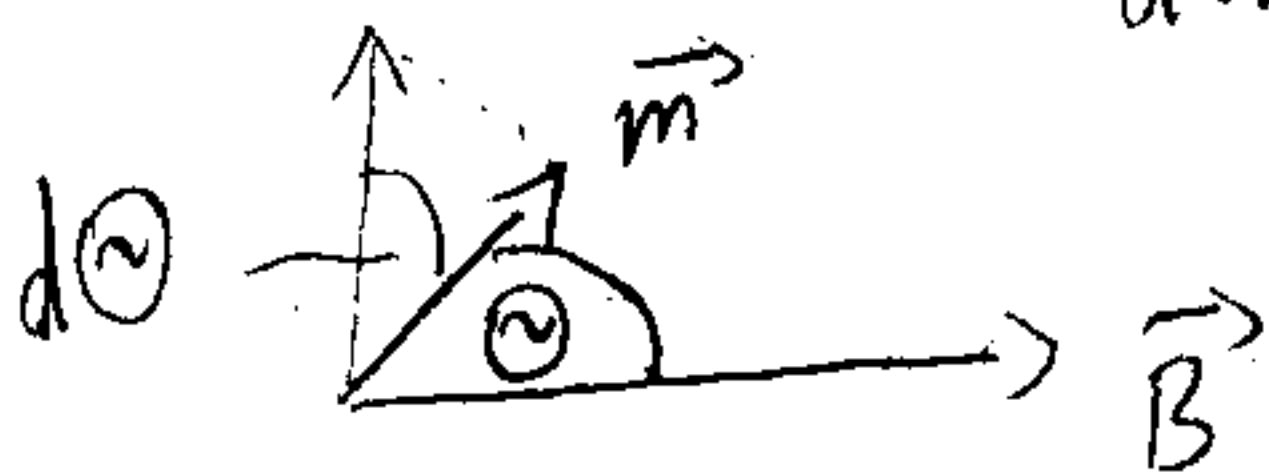
úrdipólus - rá is hat forgatónyomaték

ennek van: \vec{m}
de nem lehet ekvivalens
felbontani I és \vec{l}
szorzatára

$$|\vec{m}| = \frac{M_{\text{max}}}{B}$$

áramjárta vezető keret ugyanúgy viselkedik mágneses térben mint egy mágnes

$$dW = M d\vartheta = m B \sin \vartheta d\vartheta$$

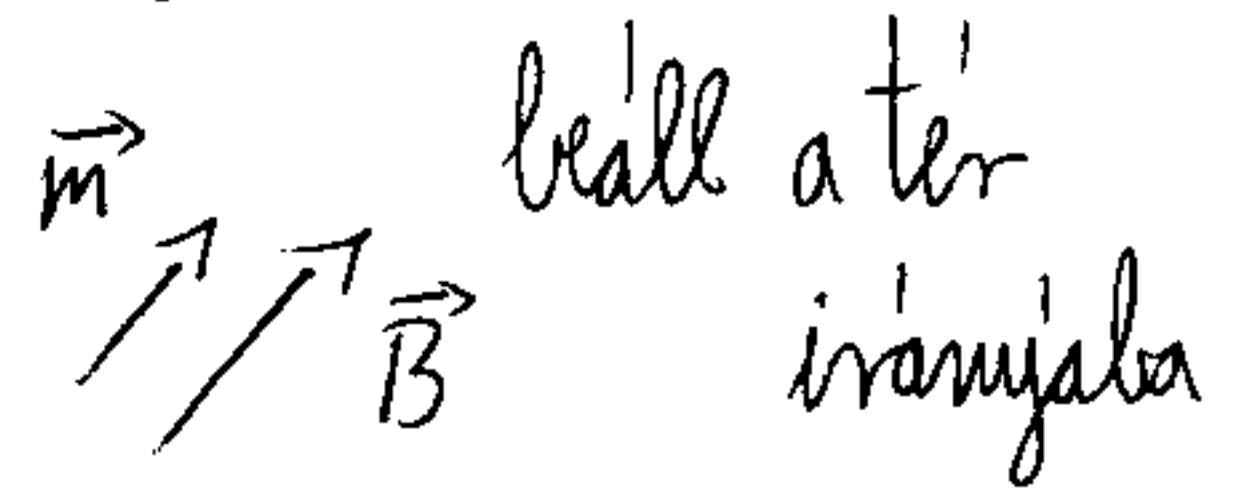


$$W = \int_{(\vartheta_1)}^{(\vartheta_2)} m B \sin \vartheta d\vartheta = -m B \cos \vartheta$$

$$W = E_{\text{pot}} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

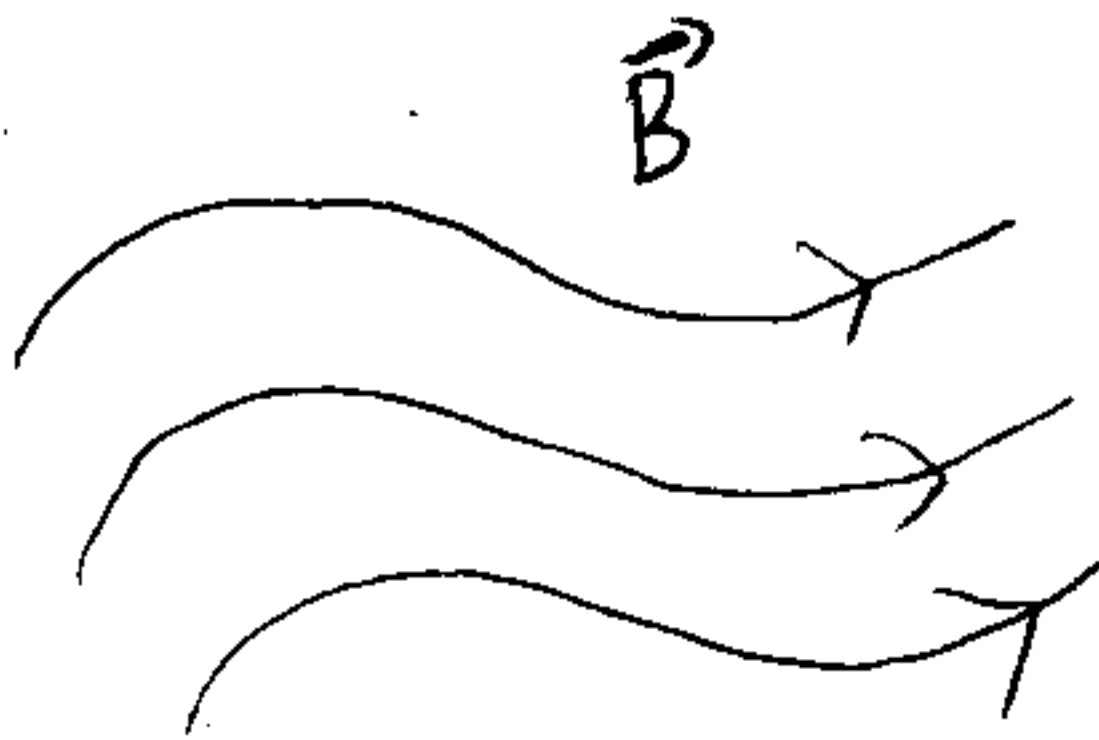
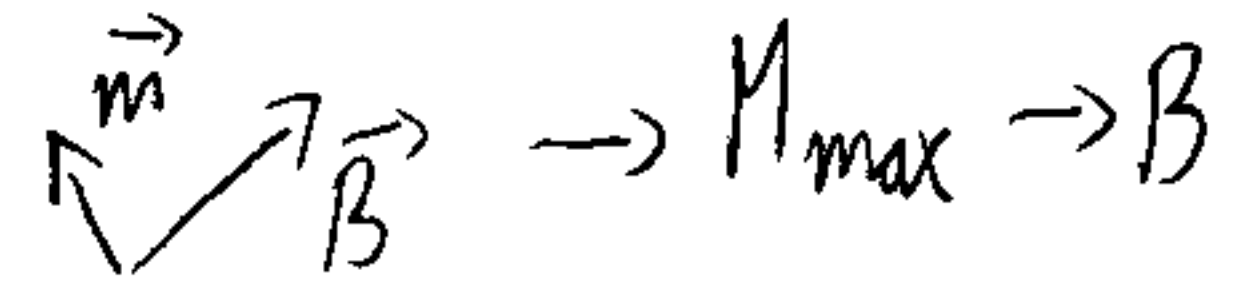
formálisan UA mint az elektrosztatikában a dipólusnál

vasreszelék \rightarrow beáll abba a helyzetbe ahol nem hat rá egyenlő erők
 azaz ahol $\vec{m} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{M} = \vec{0}$



erővonalak hasonlóan definiálhatóak

$\downarrow 90^\circ$



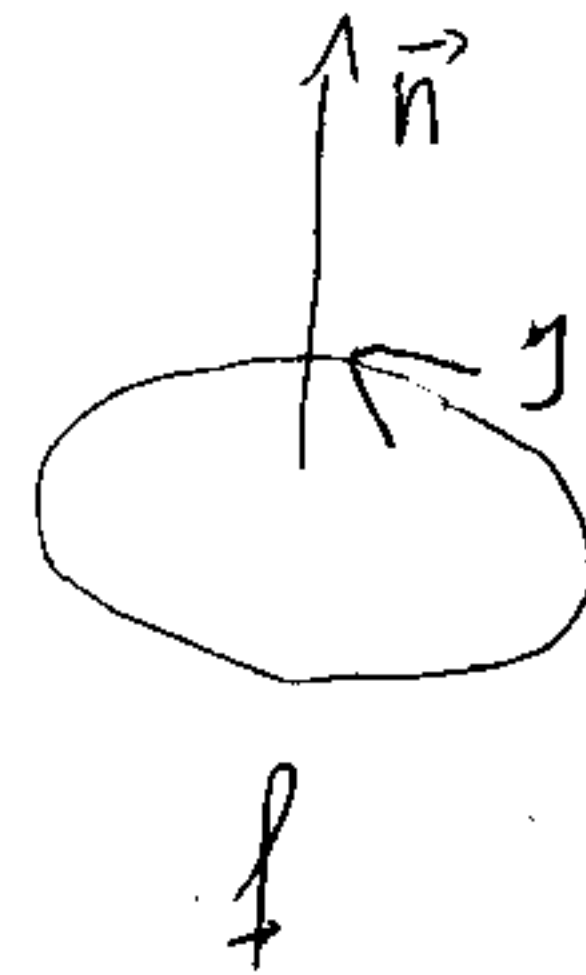
eszköz: magnetométer

mágnesség szempontjából nem tudjuk megkülönböztetni:



rúd-mágnes

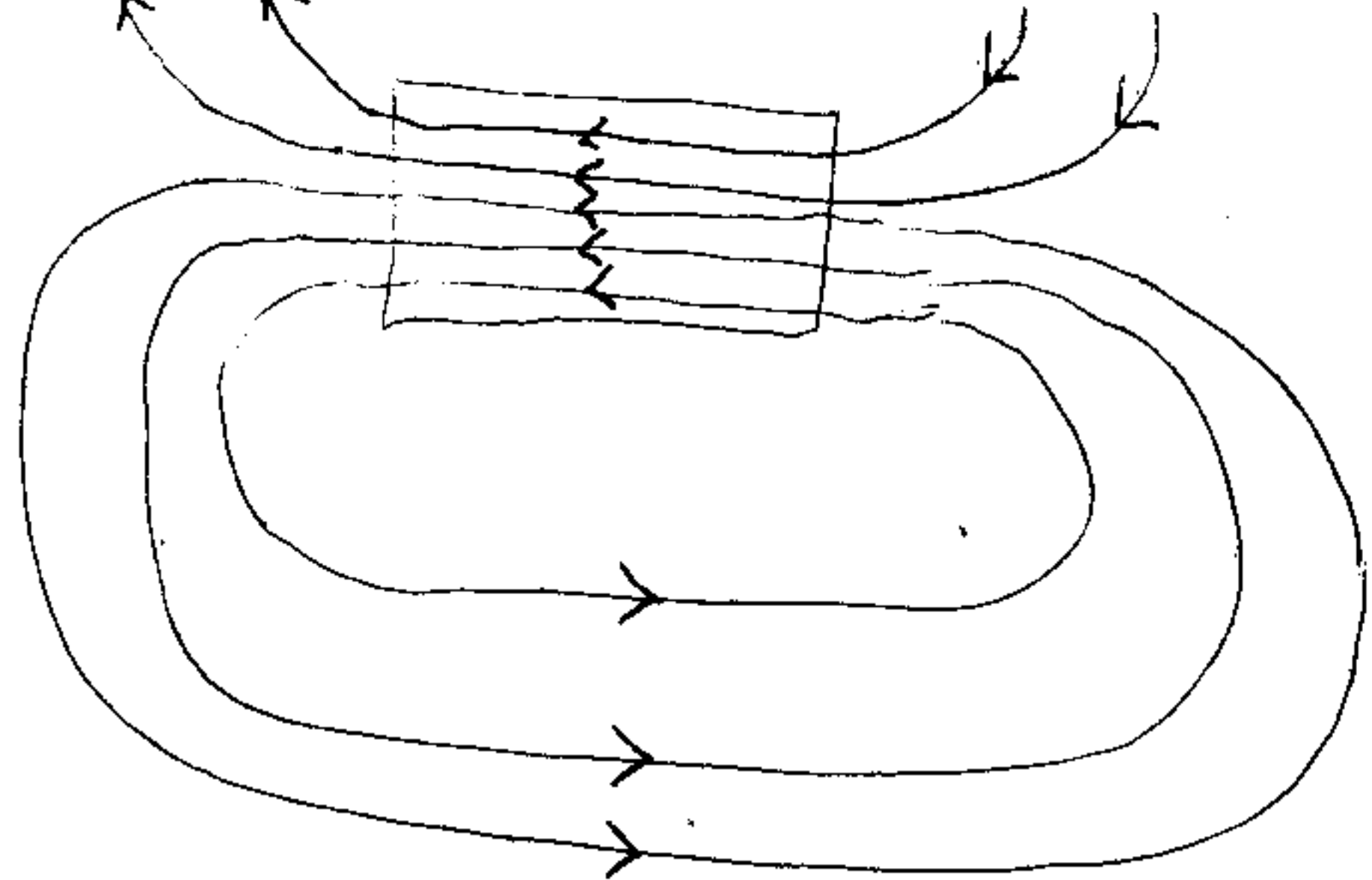
vs.



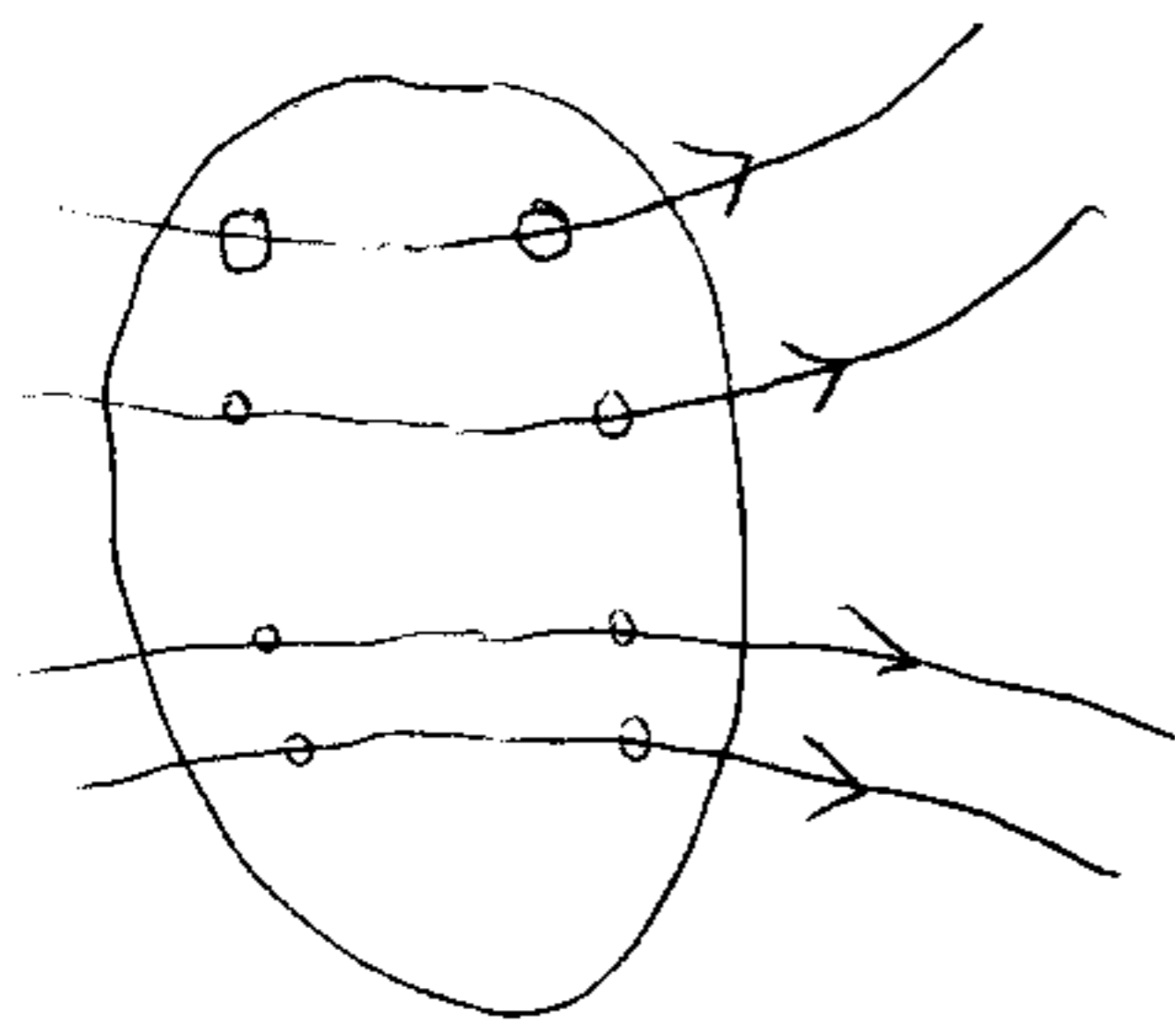
$$\vec{m} = I \cdot \vec{A}$$

\leftarrow vasreszelék - kis irányítók \rightarrow irányítás?

erővonalak záródnak; indukcióvonal



Nem rendelkeznek forrással
 nincs mágneses monopólus



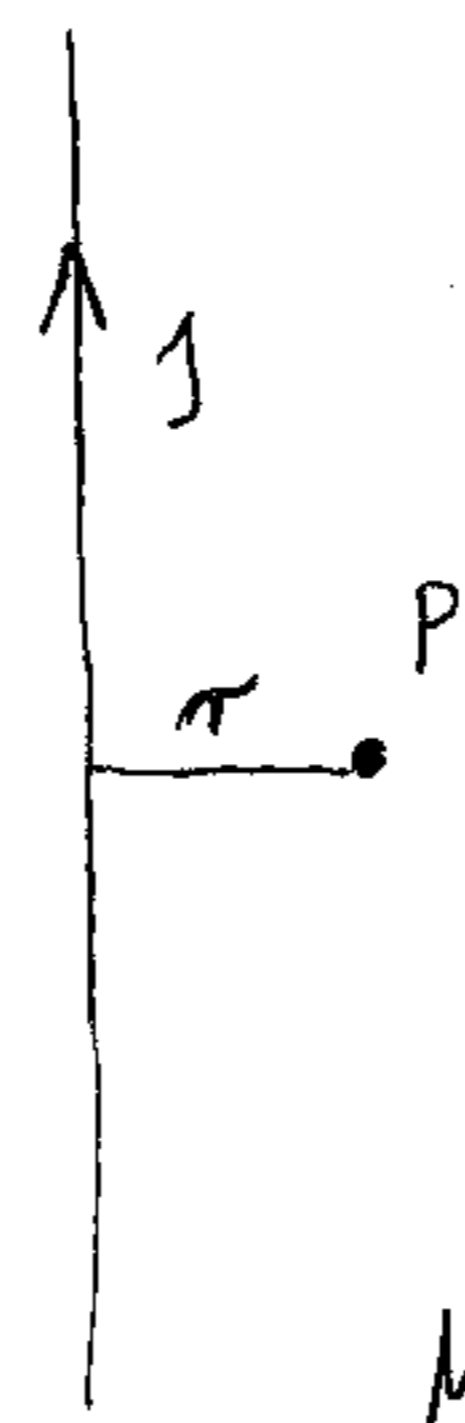
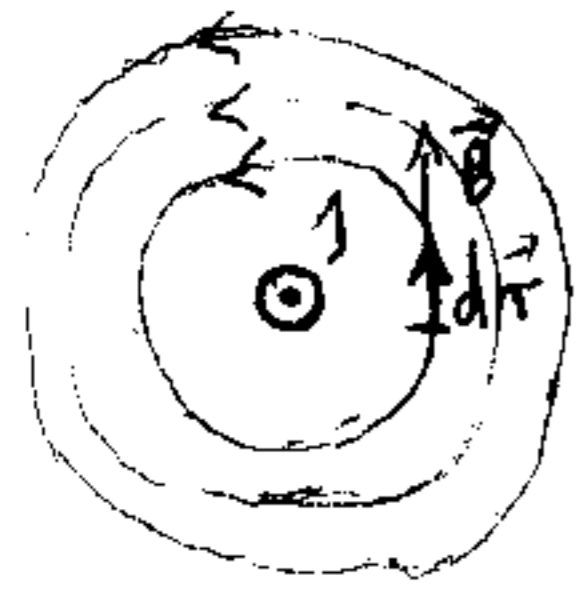
$\underline{B}(r)$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = 0$$

F

Magnetostatika 1. törvénye

$$\oint \vec{B} d\vec{r} = ?$$



tapasztalat $B_p(r) \sim I$
 $B_p(r) \sim \frac{1}{r}$

$$\rightarrow B_p(r) \sim \frac{1}{r}$$

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \quad [\mu_0] = T \cdot \frac{m}{A} =$$

$$= \frac{Vs}{m^2} \cdot \frac{m}{A} =$$

$$= \frac{Vs}{Am}$$

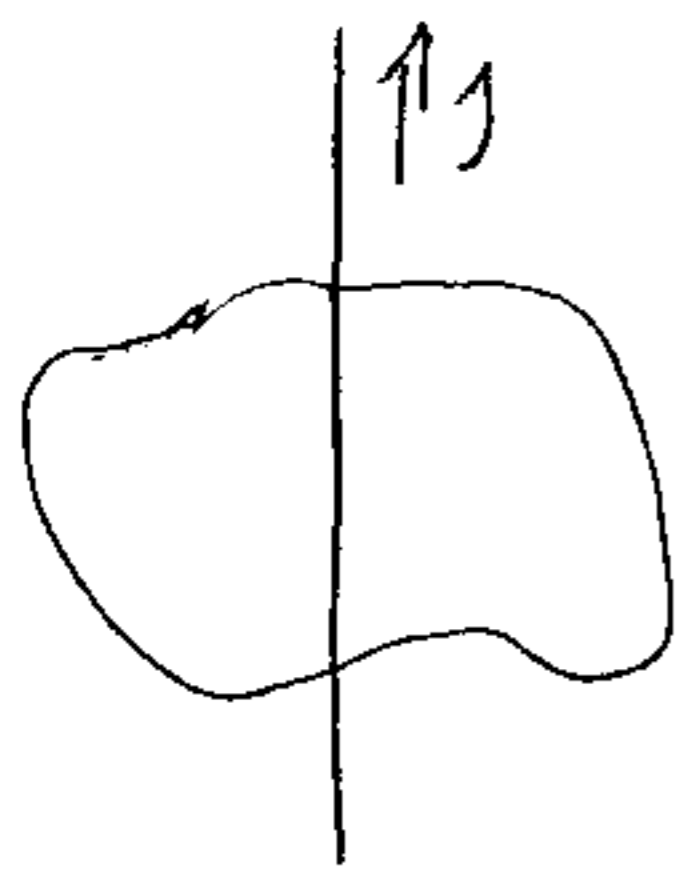


$$\oint \vec{B} d\vec{r} = B \oint dr = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

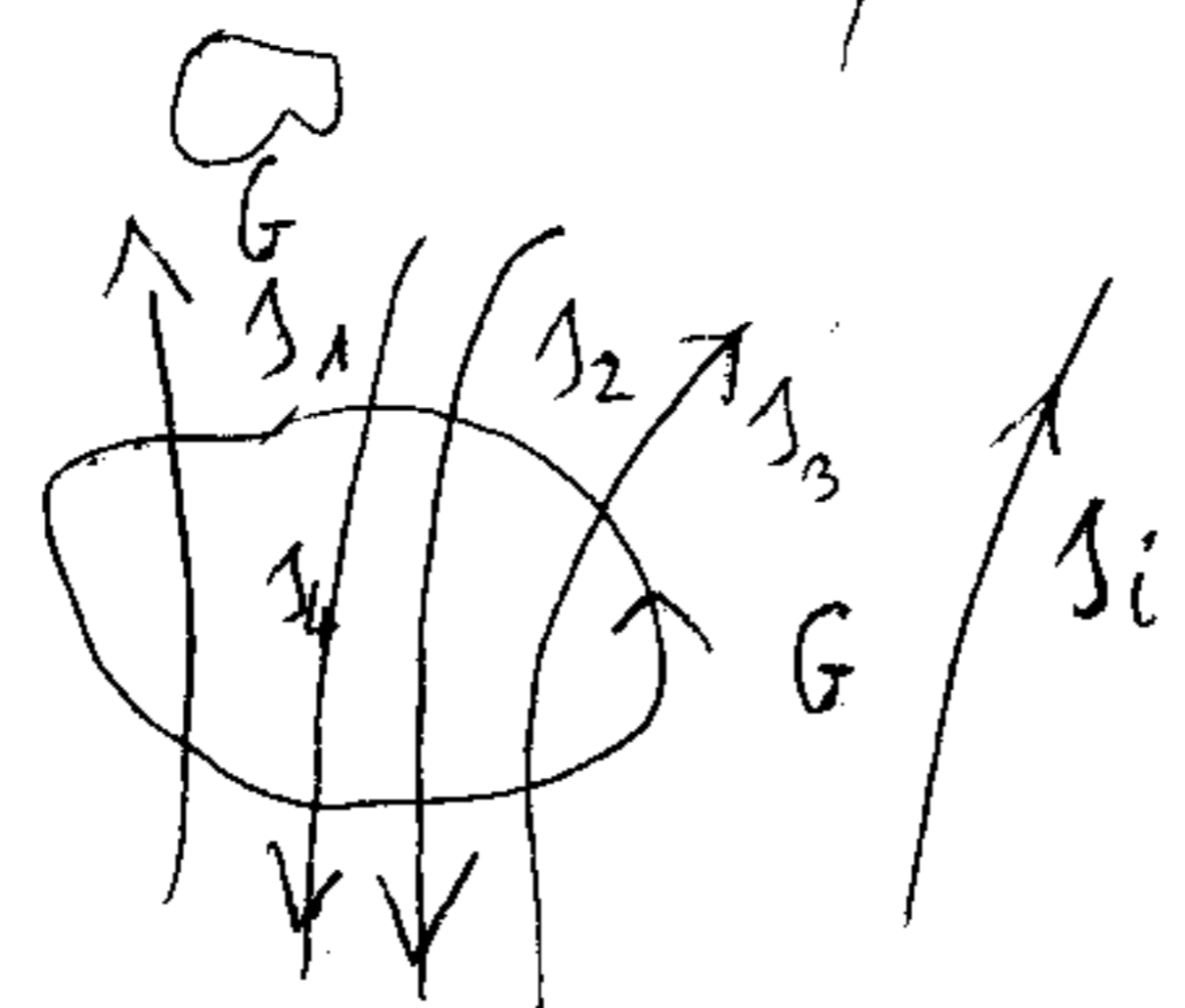
$|\vec{B}|$ konstans, $d\vec{r} \parallel \vec{B}$

magneses tér örvényes
 forrásmentes

elektromos tér örvénymentes
 forrásos



$$\underline{G} \text{ All: } \oint \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 I$$



kiderül:

csak azon áramok adnak járulékat amíg a görbe által körülhatárolt felületet dőfeli

$$\oint_G \vec{B} d\vec{\tau} = \mu_0 \sum_i I_i$$

előjelesen! amik döfik a felületet
Magnetostatika II. tővénye

$$\oint_G \vec{B} d\vec{\tau} = \mu_0 \int_F \vec{j} d\vec{f}$$

F: G által határolt felület
 { jobbkéz szabály
 } körüljárási irány felületelem
 vektor jobbsavon

Amper-tővény

Amper-féle gerjesztési tővény



Megj.: $[\mu_0 \cdot \epsilon_0]^{-1} = \left(\frac{Vs}{Am} \cdot \frac{C^2}{Nm^2} \right)^{-1} = \left(\frac{A \cdot m^2}{C \cdot s} \right)^{-1} = \frac{m^2}{s^2} = \left(\frac{m}{s} \right)^2$

$$k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \quad (\mu_0 \epsilon_0)^{-1} = \left(4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{9 \cdot 10^{16}}} = 9 \cdot 10^{16} = (3 \cdot 10^8)^2$$

Elektromosság

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_i \frac{Q Q_i}{(r - r_i)^2} \cdot \frac{r - r_i}{|r - r_i|}; \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{d}; \quad \vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}; \quad E_{pot} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$$

$$\oint_F \vec{E} d\vec{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV; \quad \oint \vec{E} d\vec{\tau} = 0$$

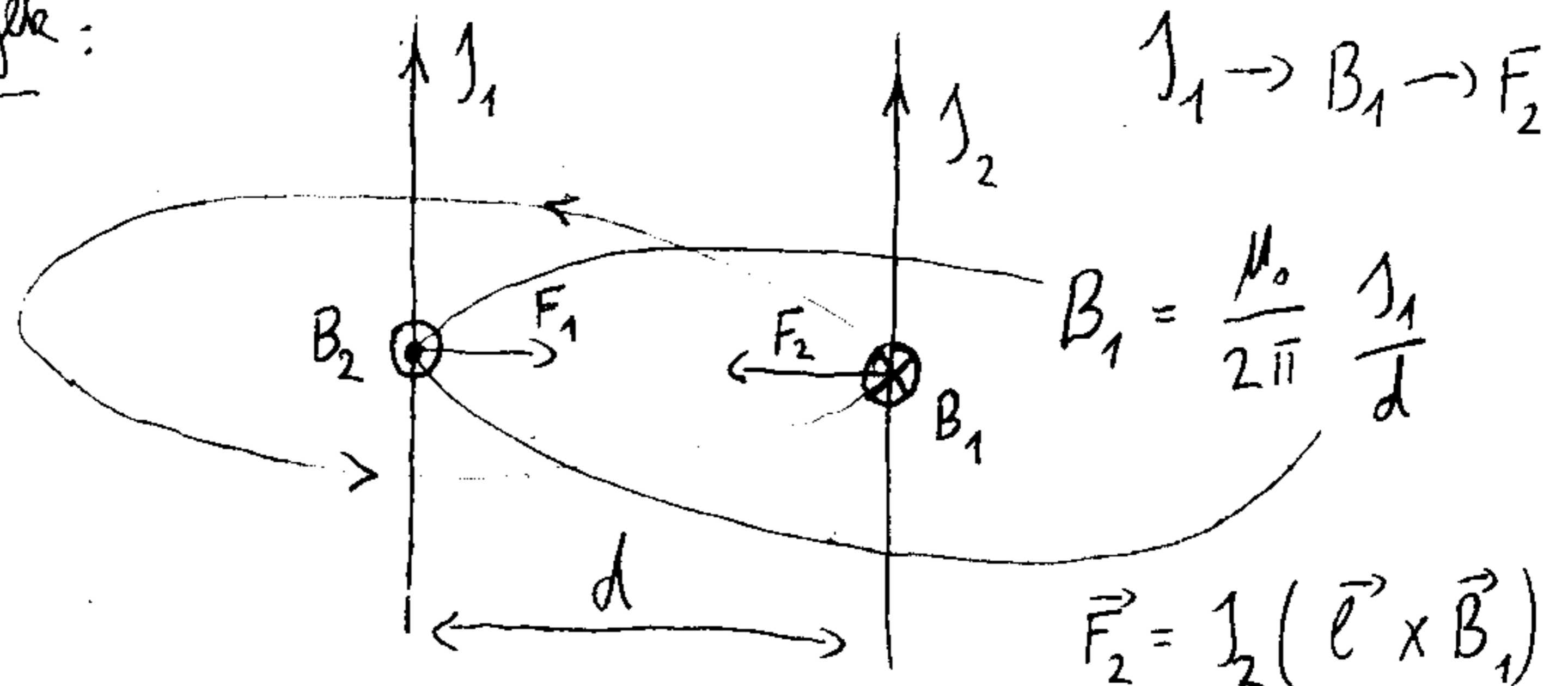
Mágnesség

$$B = \frac{M_{max}}{l \cdot f} \quad (j \cdot \vec{f} = \vec{m}; \quad \vec{M} = \vec{m} \times \vec{B})$$

$$E_{pot} = -\vec{m} \cdot \vec{B}; \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

$$\oint_F \vec{B} d\vec{f} = 0; \quad \oint_G \vec{B} d\vec{\tau} = \mu_0 \int_F \vec{j} d\vec{f}$$

Következmények:



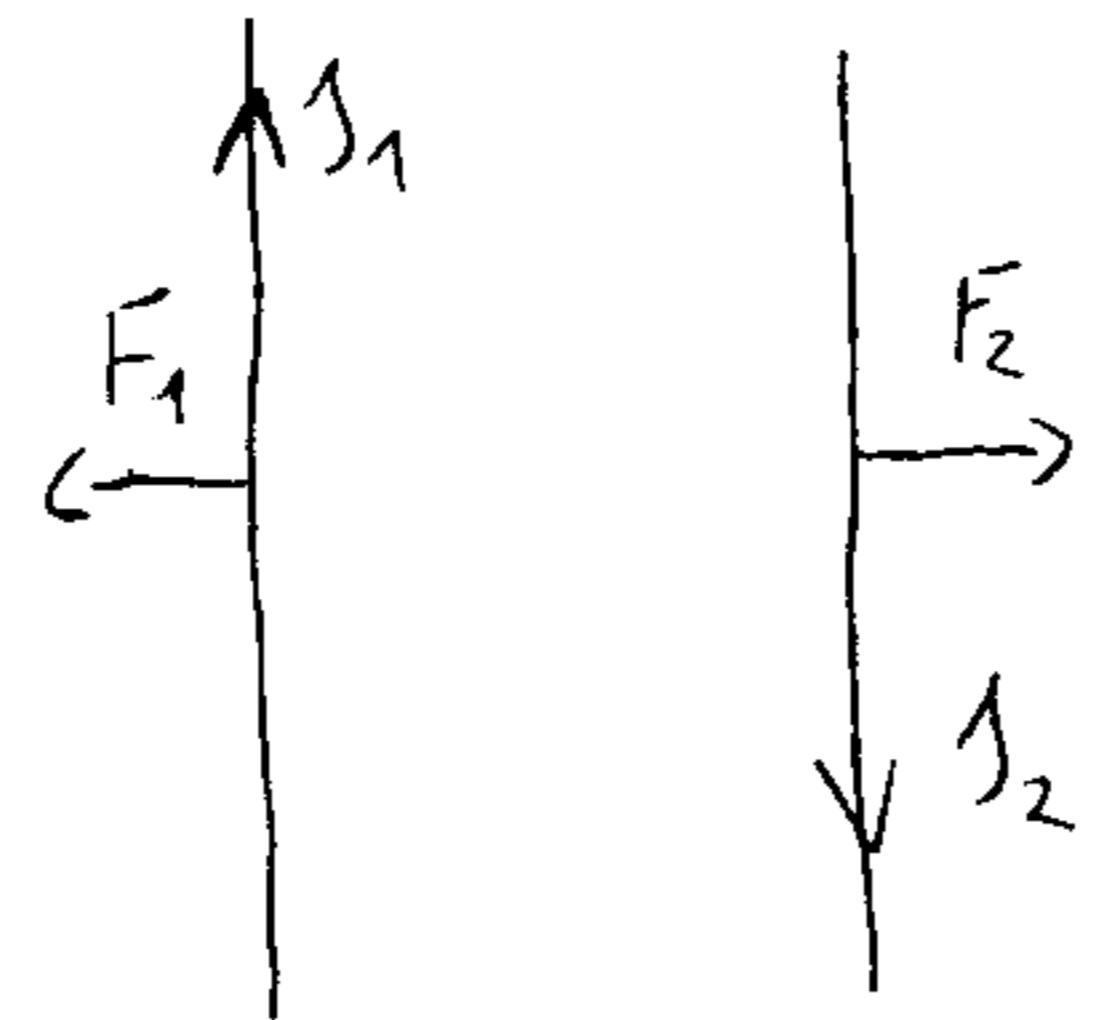
$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{2} (\vec{l} \times \vec{B}_1)$$

$$\frac{F_2}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{d} \quad |\vec{F}_2| = I_2 l B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{d} l$$

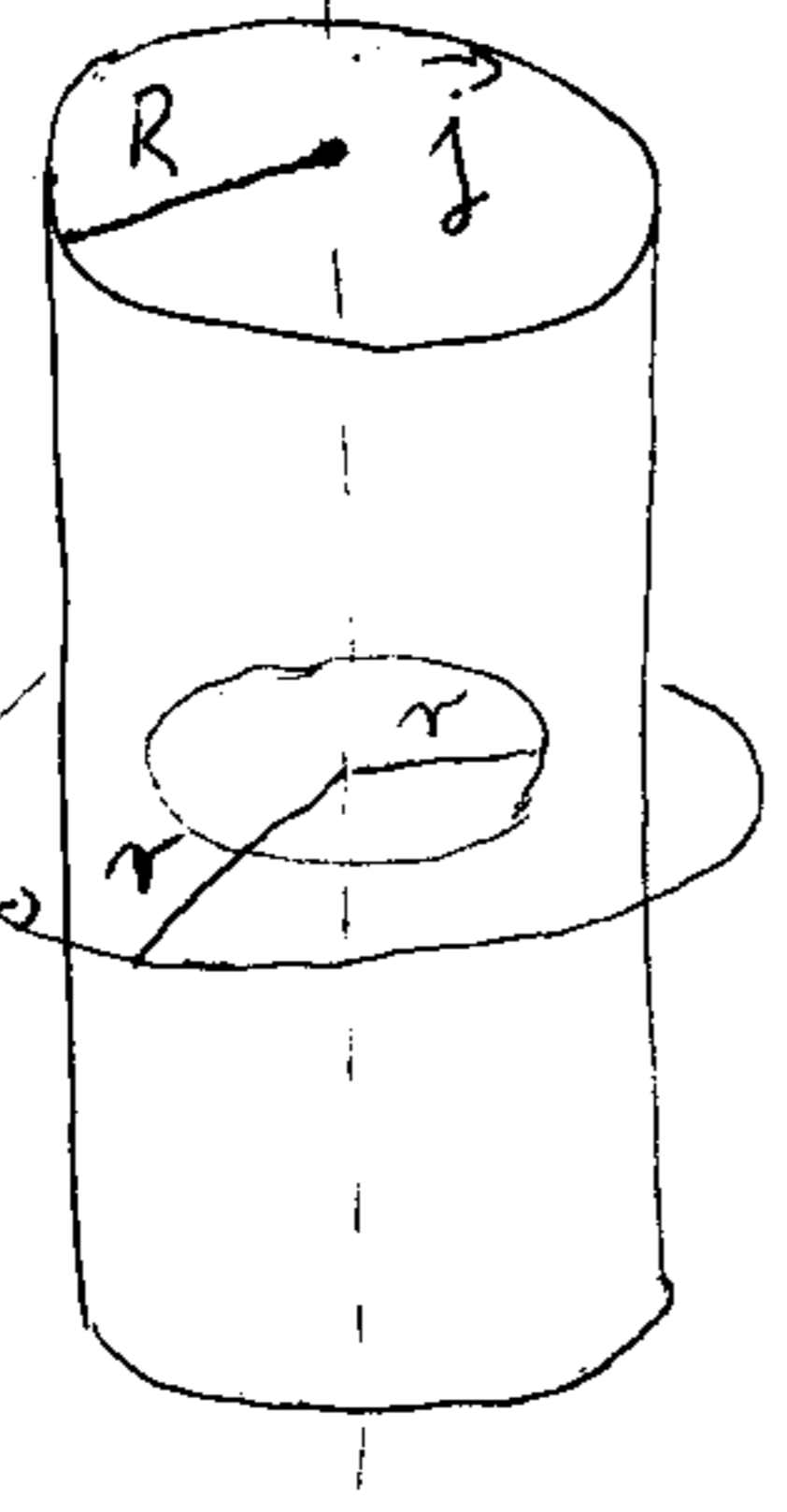
hosszegységre eső eső

ellenkező eset



Pl:

"külsőből"
"nem lehet megkülönböztetni"
→ kiterjedés nélküli drót v. vastag drót



$\vec{j} = \text{állandó}$ $|\vec{B}(\vec{r})| = ?$
1., $r < R$

$$\oint \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r} = \mu_0 \int \vec{j} d\vec{l}$$

hengerszimmetria \odot $I = |\vec{j}| R^2 \pi$

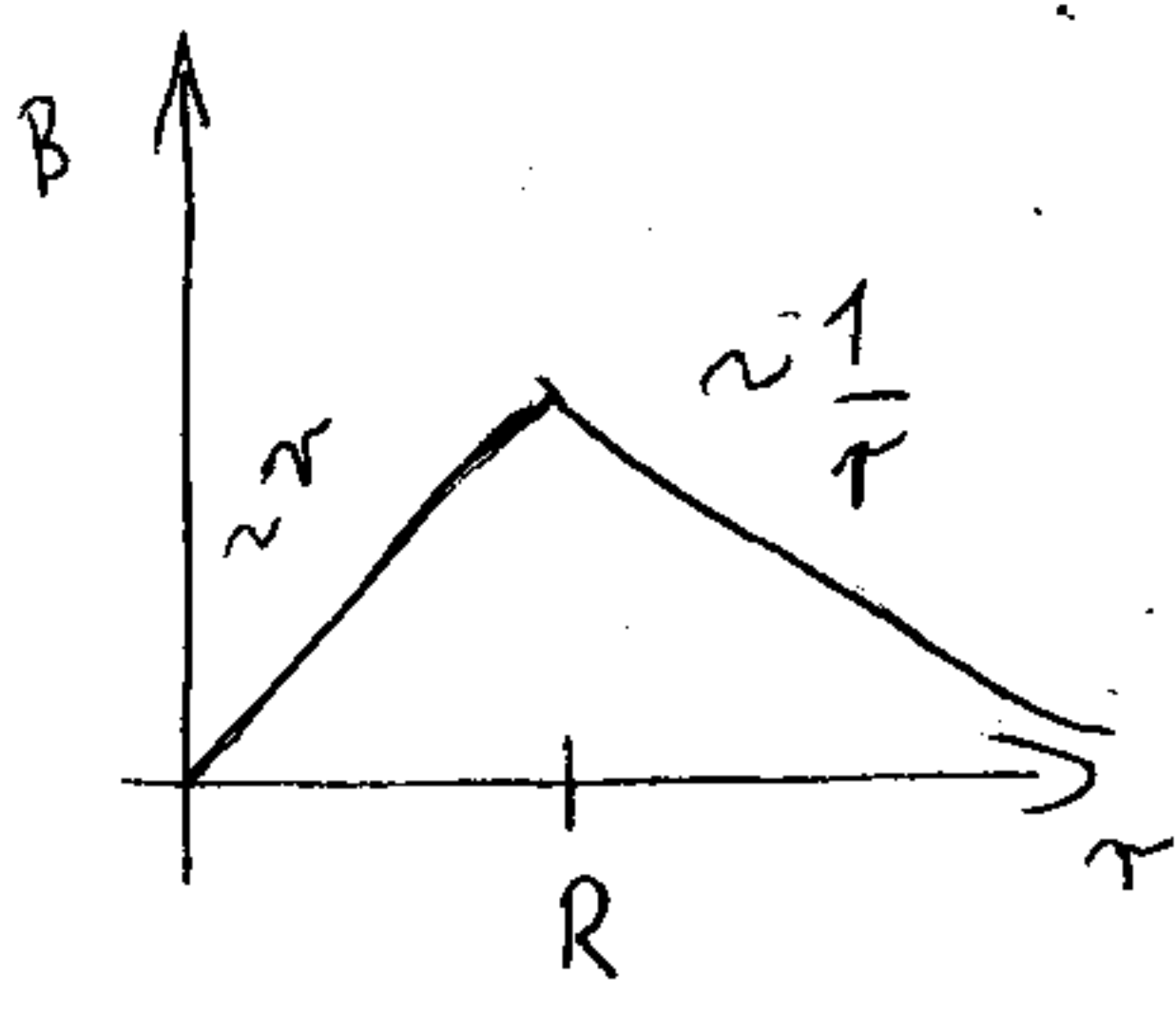
$$|\vec{B}| 2\pi r = \mu_0 |\vec{j}| r^2 \pi$$

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2} j r = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{R^2} r$$

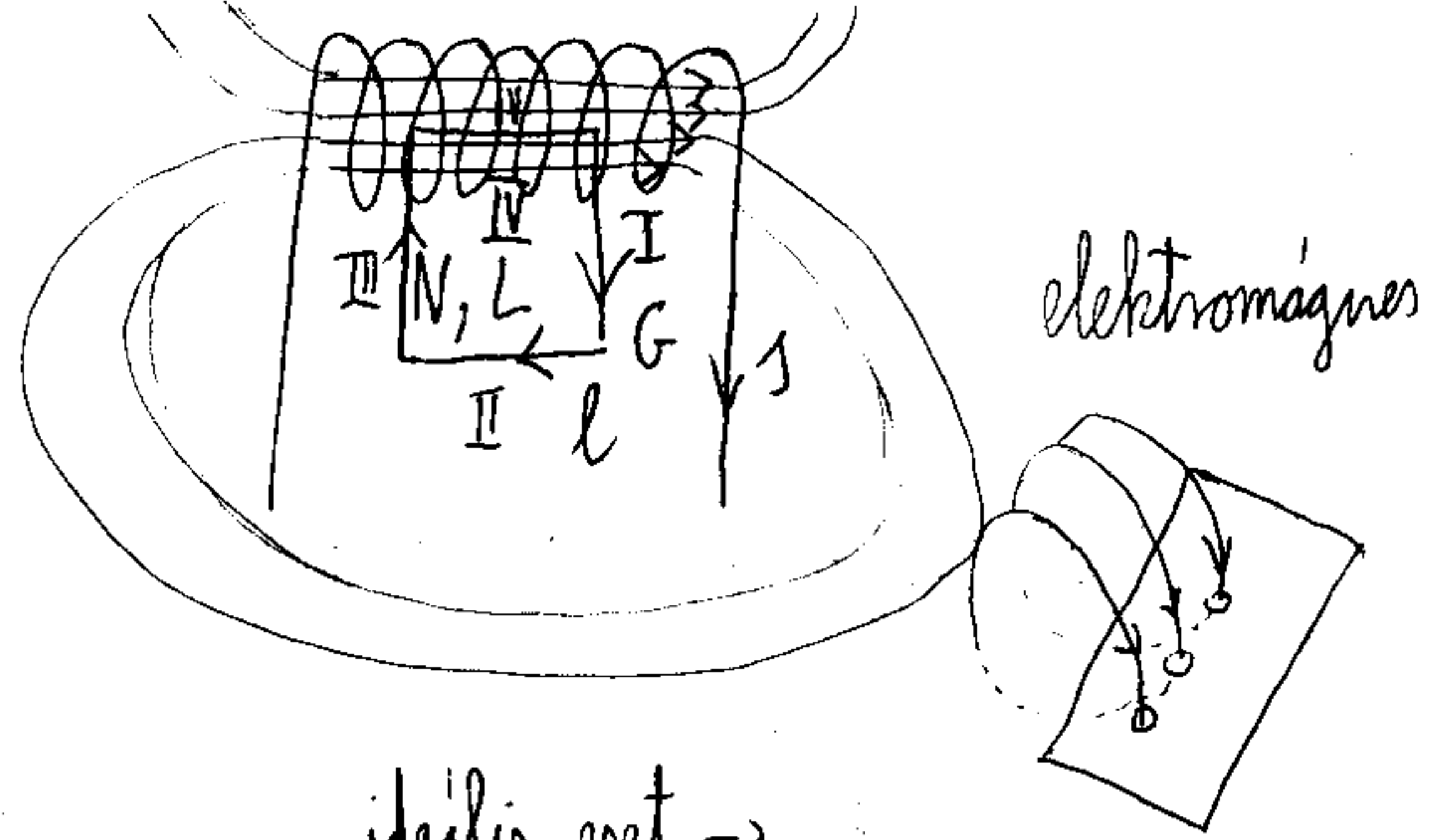
2., $r > R$

$$\oint \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 \int \vec{j} d\vec{l} \rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$



Pl :: szolenoid tekercs



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \sum_i I_i$$

ideális eset →
→ tekercsben homogén $\frac{n}{l} = \frac{N}{L}$

$$\int_I \vec{B} \cdot d\vec{r} + \int_{II} \vec{B} \cdot d\vec{r} + \int_{III} \vec{B} \cdot d\vec{r} + \int_{IV} \vec{B} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \text{kívül } \vec{B} = \vec{0}$$

$$\vec{B} \perp d\vec{r} \quad \vec{B} \approx \vec{0} \quad \vec{B} \perp d\vec{r} \quad \underbrace{\int_{IV} \vec{B} \cdot d\vec{r}}_{B \cdot l} \quad \Rightarrow \quad \mu_0 \underbrace{\sum_i I_i}_{nI} \Rightarrow$$

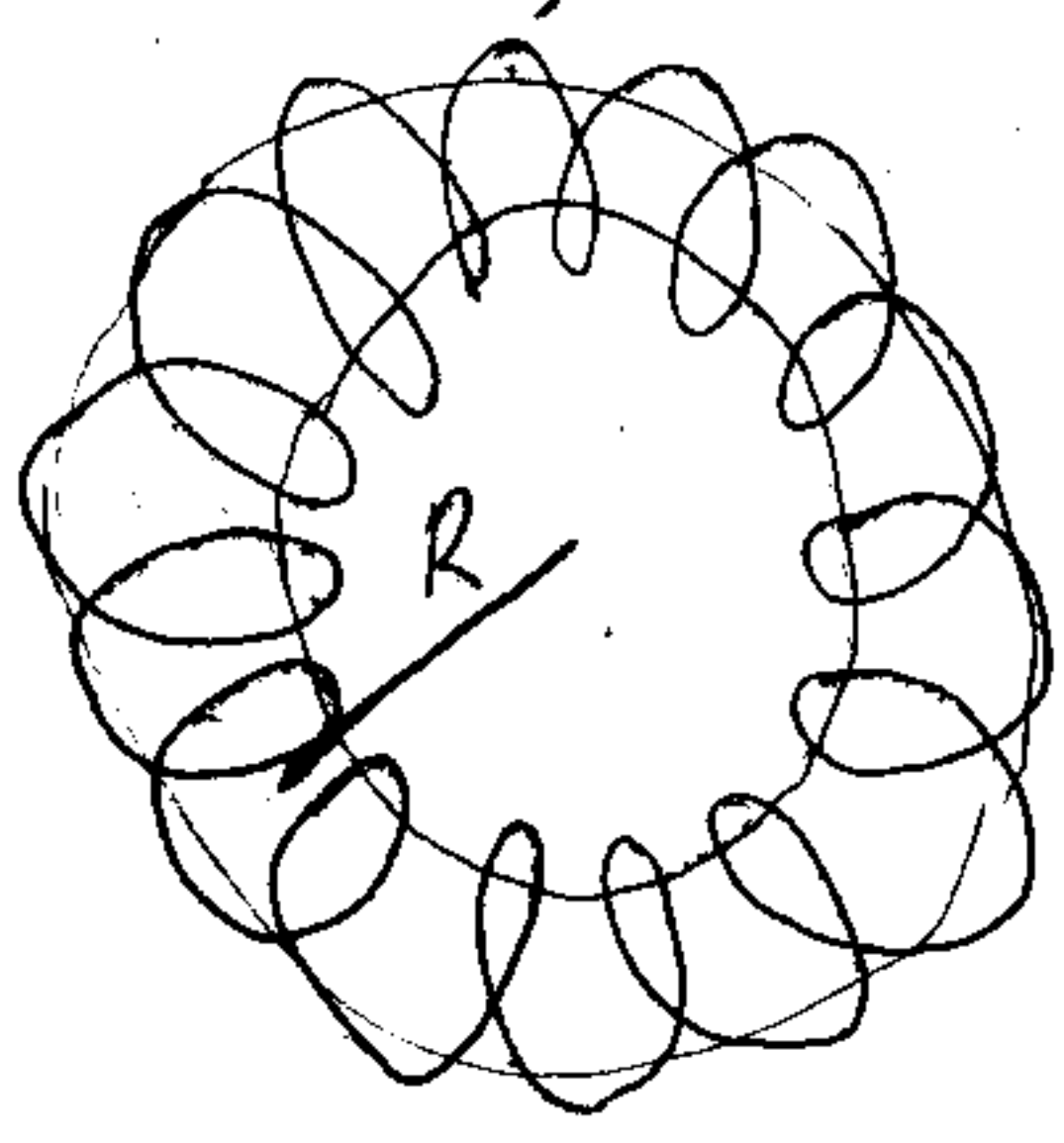
$$\Rightarrow B \cdot l = \mu_0 \frac{N}{L} l I$$

$$\underline{\underline{B = \mu_0 \frac{NI}{L}}}$$

körelítés

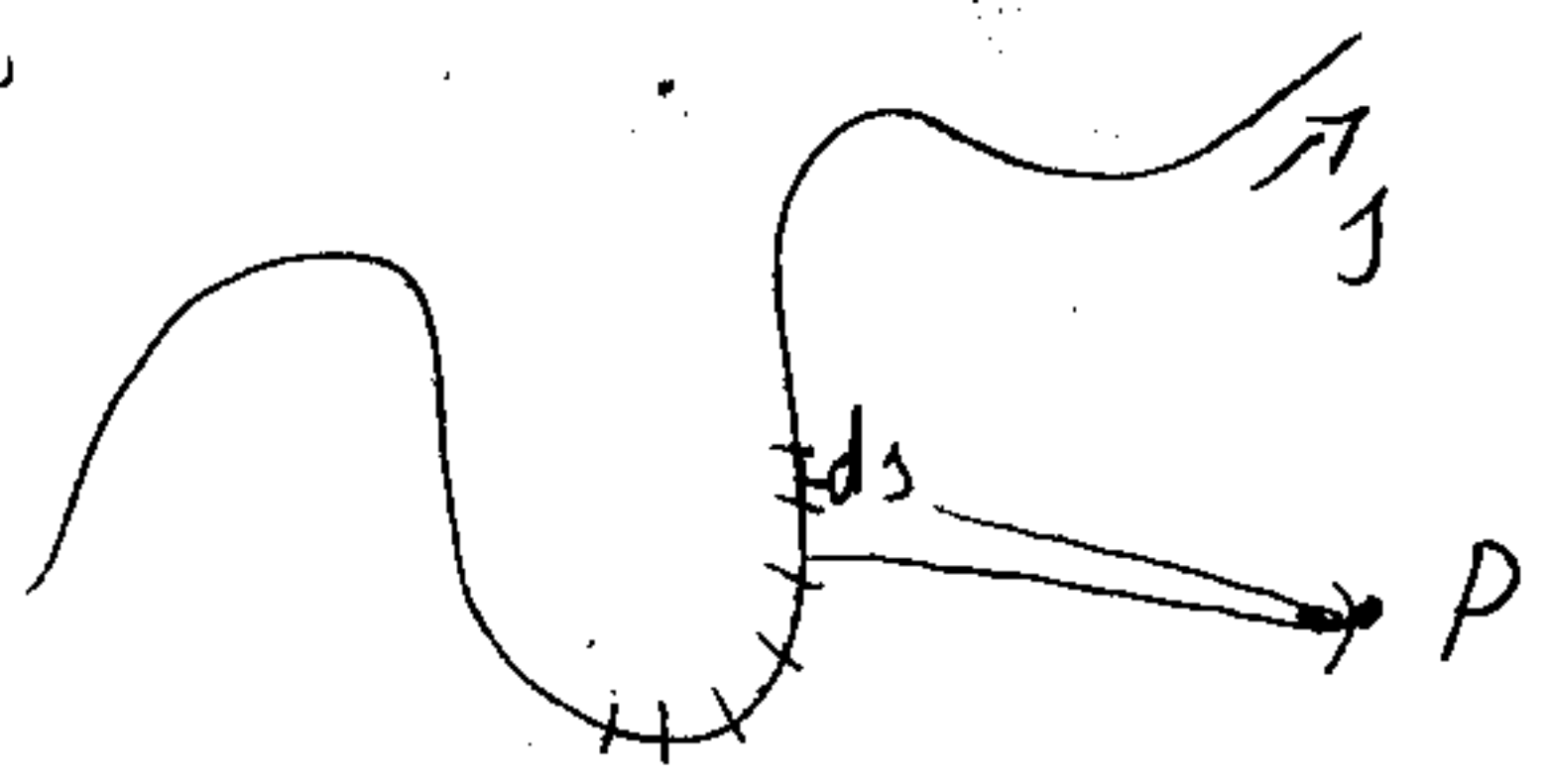
$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R\pi}$$

Pl: törvénysz



törvény → szimmetria nélküli esetre

$$|\vec{B}(P)| = ?$$



Biot-Savart törvény:

$$I ds \rightarrow d\vec{B}$$

$$d\vec{B} \sim \frac{J \cdot d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \longrightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{J \cdot d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

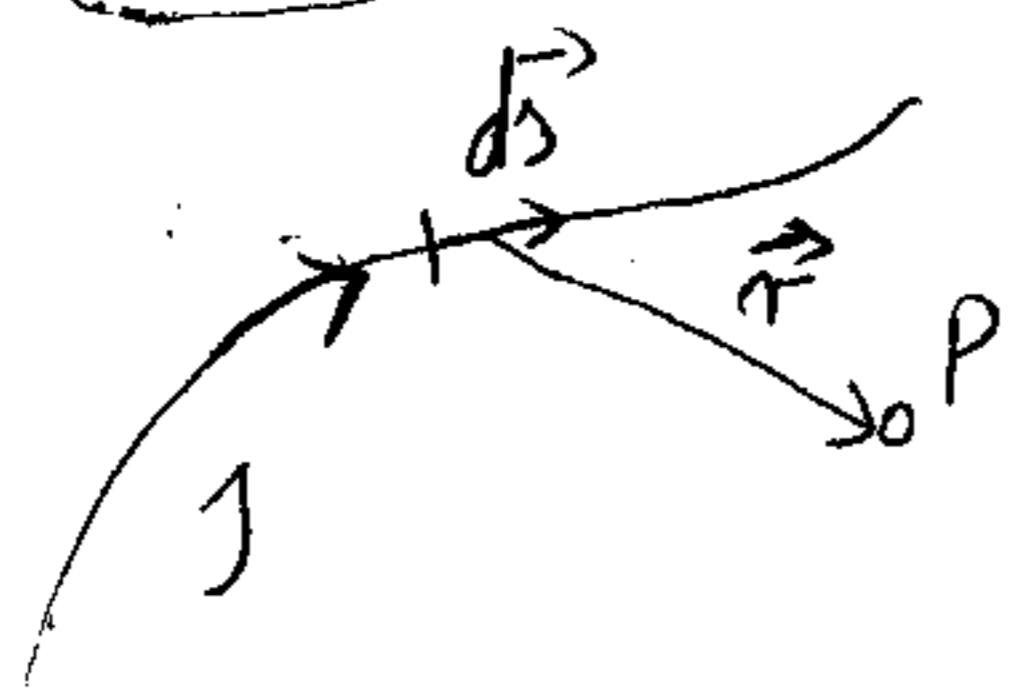
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Ismétlés: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ mágneses tér forrásmentes

$$\oint_G \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_F \vec{j} \cdot d\vec{l} \quad \text{mágneses tér örvényes}$$

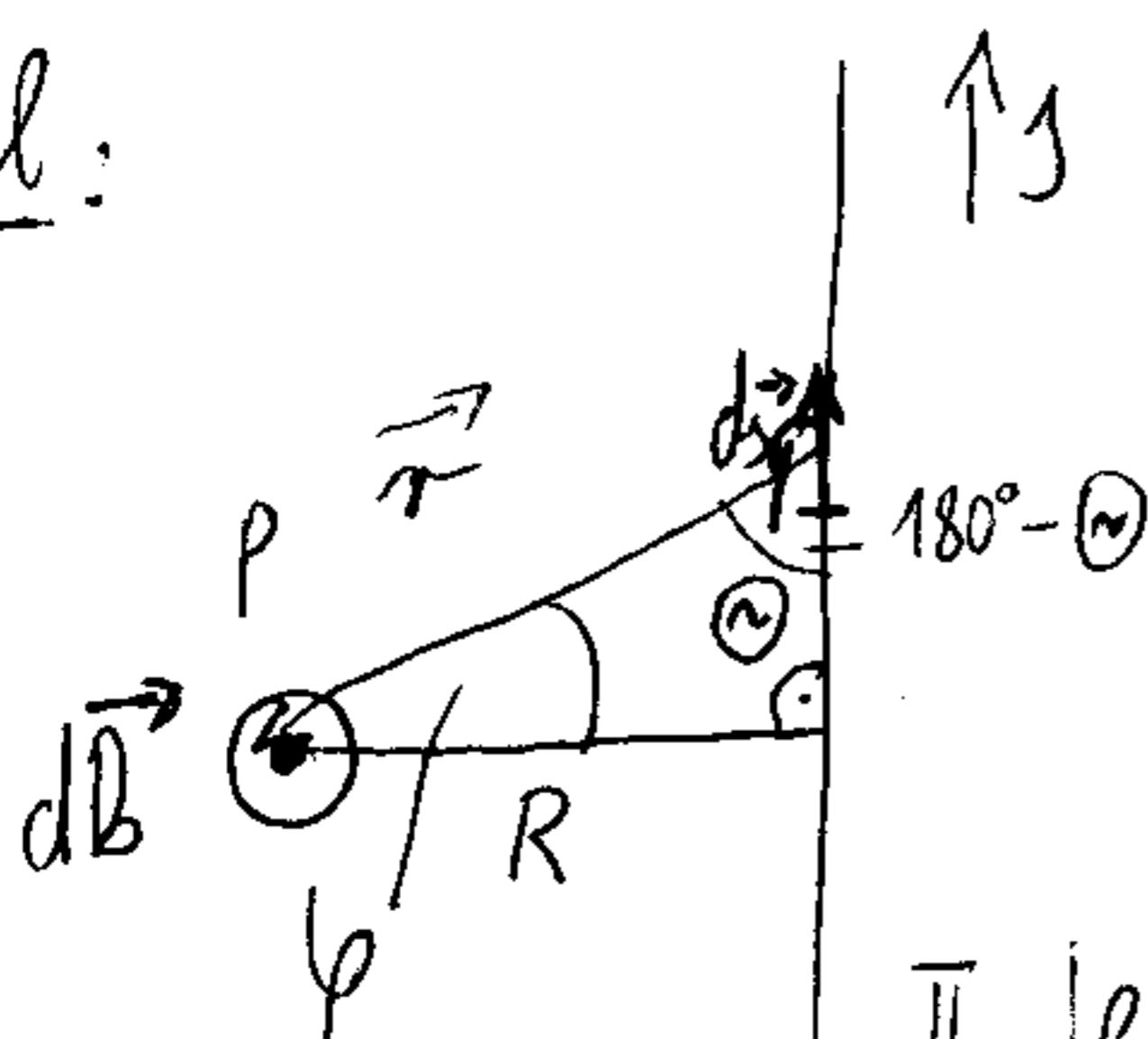


$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Pl:



$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \frac{ds \cdot \sin \theta}{r^2}$$

$$B = \int \frac{\mu_0 J}{4\pi} \frac{ds \sin \theta}{r^2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad 1, \frac{R}{r} = \cos \varphi \quad 2, \cos \varphi = \sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

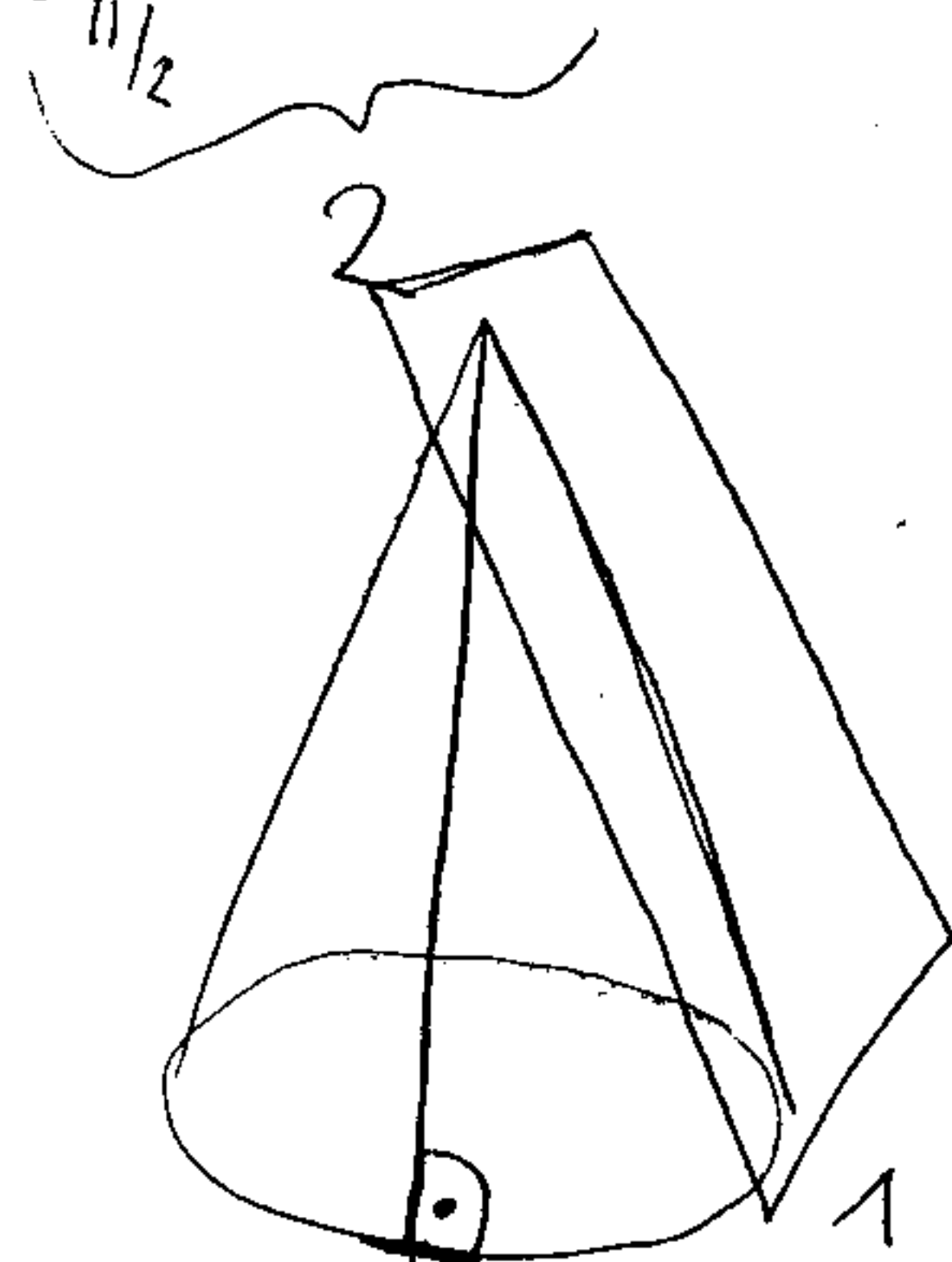
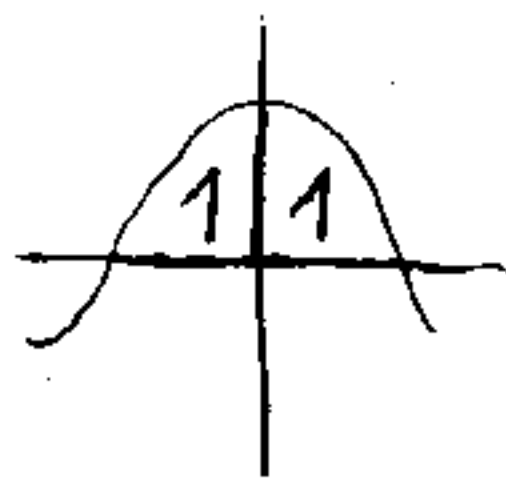
$$r = \frac{R}{\cos \varphi}$$

$$3, \frac{\sin(d\varphi)}{ds} = \frac{\sin \theta}{r}$$

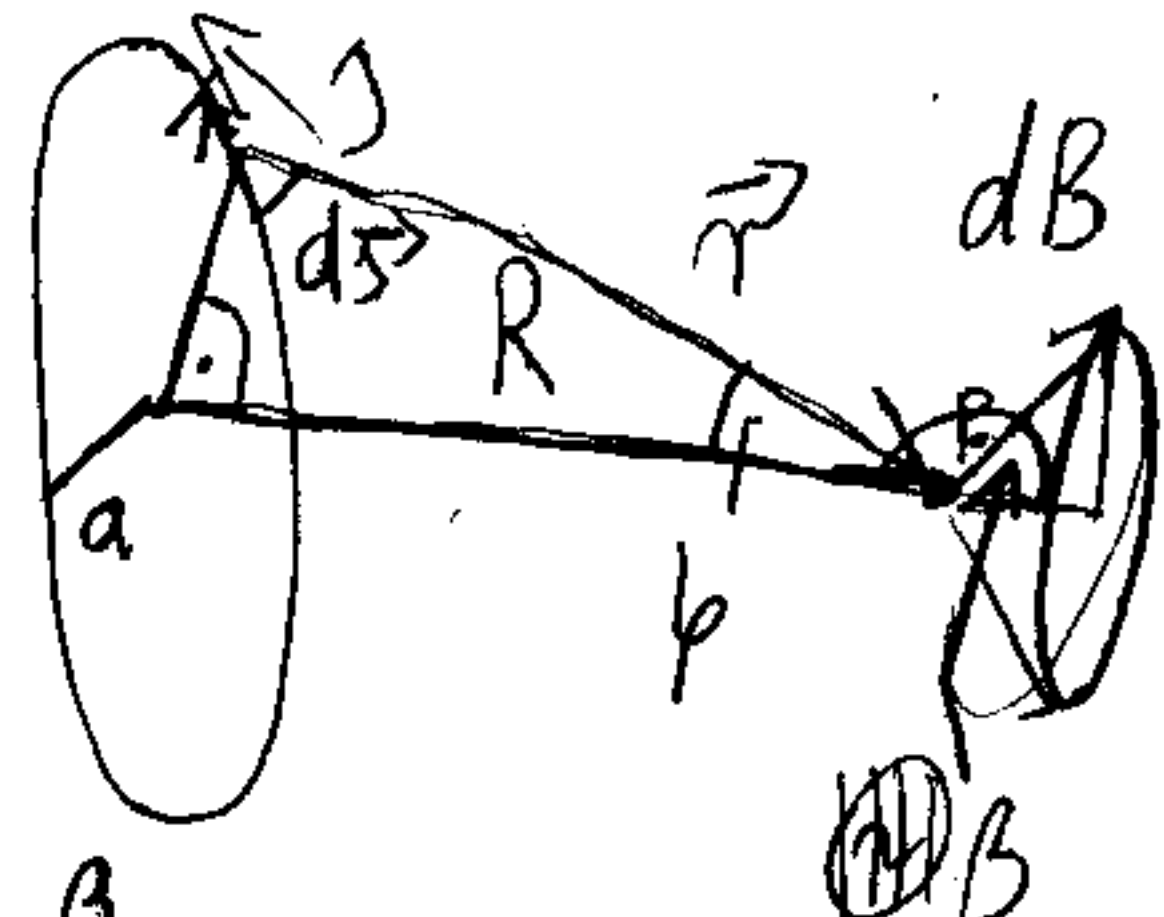
$$ds = \frac{r}{\sin \theta} d\varphi = \frac{r}{\cos \varphi} d\varphi = \frac{R}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{R}{\cos^2 \varphi} d\varphi$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R}{\cos^2 \varphi} \cos \varphi \frac{\cos^2 \varphi}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



Pl.:



$$90^\circ + \varphi + \beta = 180^\circ$$

$$\varphi + \beta = 90^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - \varphi$$

$$r^2 = R^2 + a^2$$

$$\sin \varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{(R^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$|\vec{B}| = \int |d\vec{B}| \cdot \sin \varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{ds \cdot \sin \varphi}{r^2} \sin \varphi =$$

$$\varphi = 90^\circ$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{ds}{a^2 + R^2} \cdot \frac{a}{(a^2 + R^2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2 \cdot 4\pi} \cdot \frac{a}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2\pi a =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{a^2}{(a^2 + R^2)^{3/2}}$$

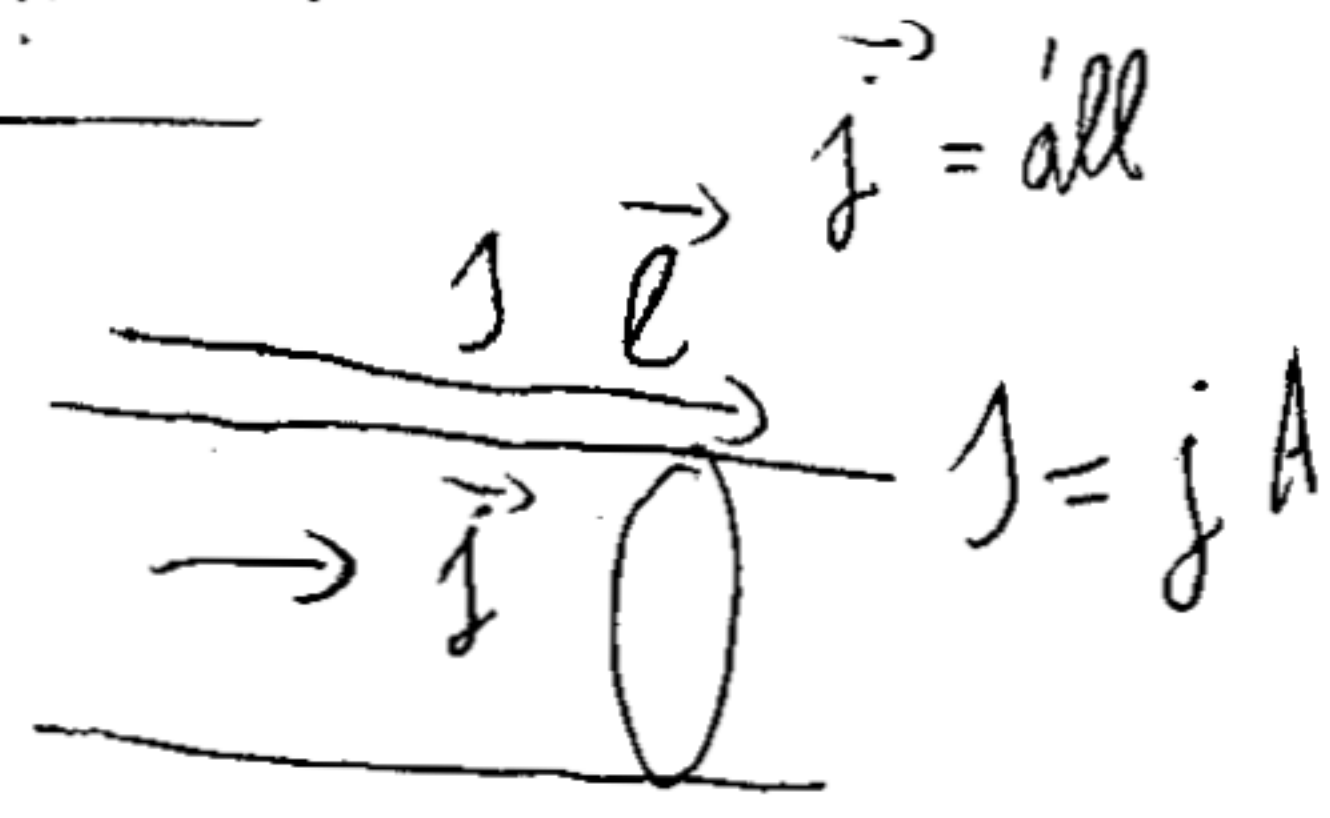
$$|\vec{m}| = I \cdot a^2 \pi \rightarrow B = \frac{\mu_0 m}{2\pi (a^2 + R^2)^{3/2}}$$

a, $R=0$ $B(R=0) = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{a^2}{a^3} = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{1}{a}$ für $\text{lep.} = a$

$R \rightarrow \infty$ $B \approx \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{R^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{m}{R^3}$

Mozgás állandó mágneses térben:

$$\vec{F}_L = j (\vec{l} \times \vec{B})$$



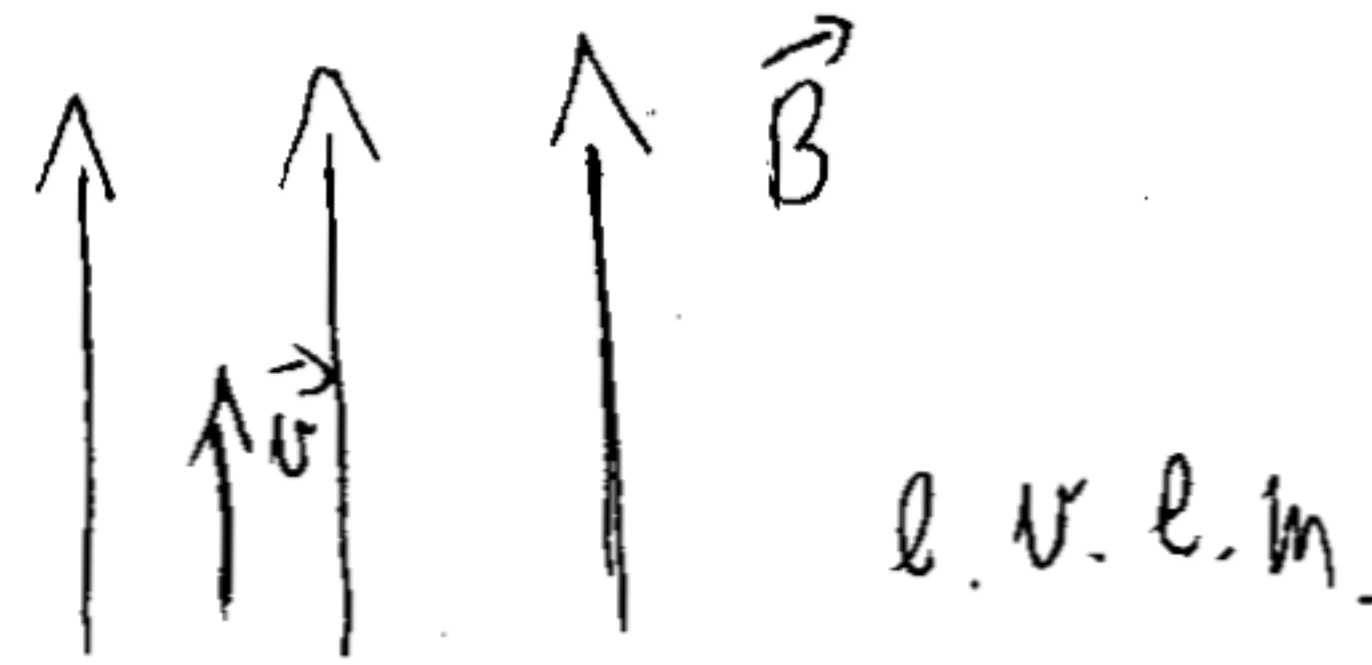
$$\vec{F}_L = j A (\vec{l} \times \vec{B}) =$$

$$= \underbrace{nq A l}_{Q} (\vec{v} \times \vec{B}) = Q (\vec{v} \times \vec{B})$$

$\vec{j} = nq \vec{v}$

térfogategységenkénti töltés

a, $\vec{v} \parallel \vec{B} \rightarrow \vec{F}_L = \vec{0}$



$\vec{F}_L = q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad | \cdot \vec{v}$

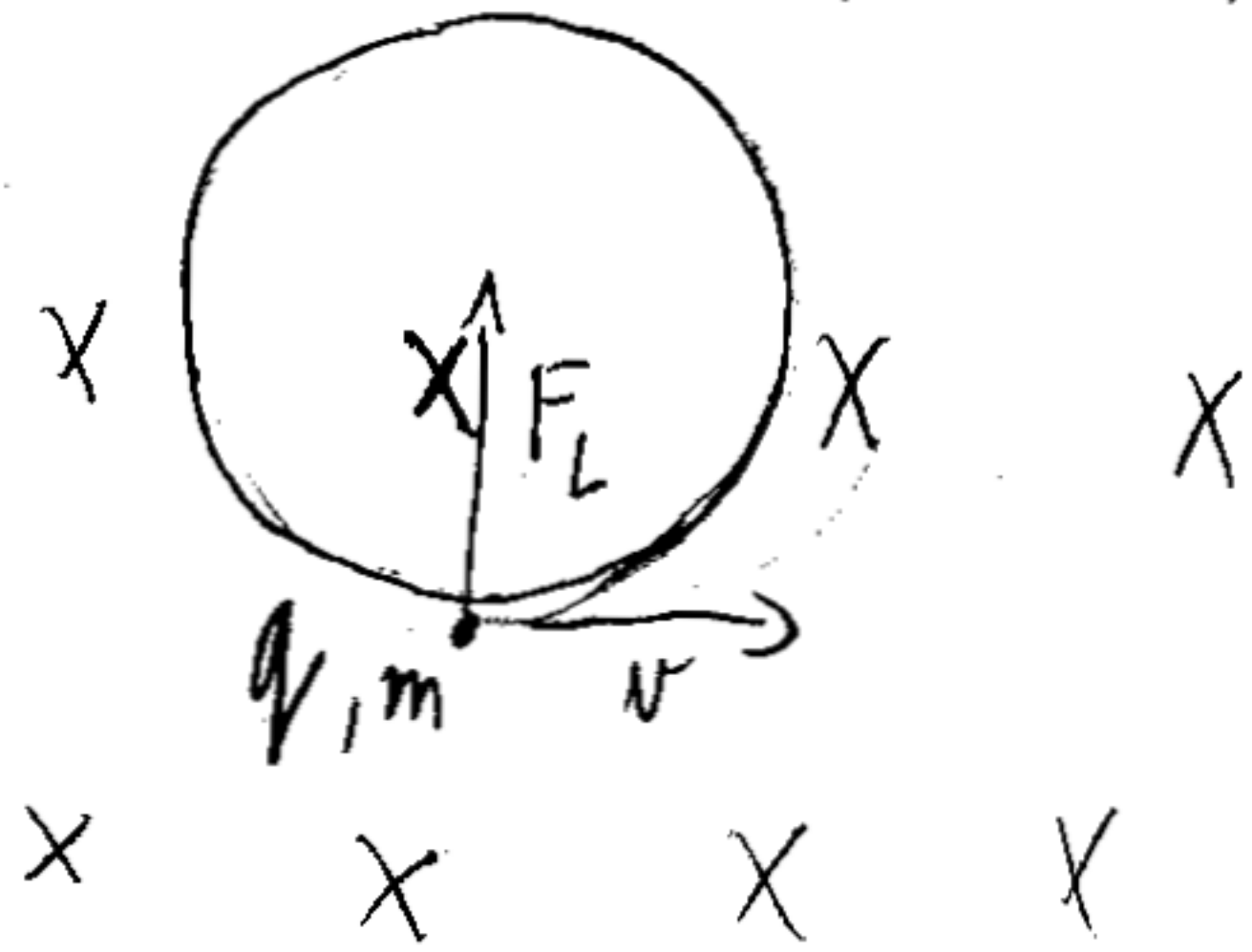
$\vec{F}_L \cdot \vec{v} = q \underbrace{\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})}_{\phi}$

$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \rightarrow \Delta E_{kin} = \Delta W = 0$

$E_{kin} = \text{dlt}$

$|\vec{v}| = \text{dlt}$

b, $\vec{v} \perp \vec{B}$



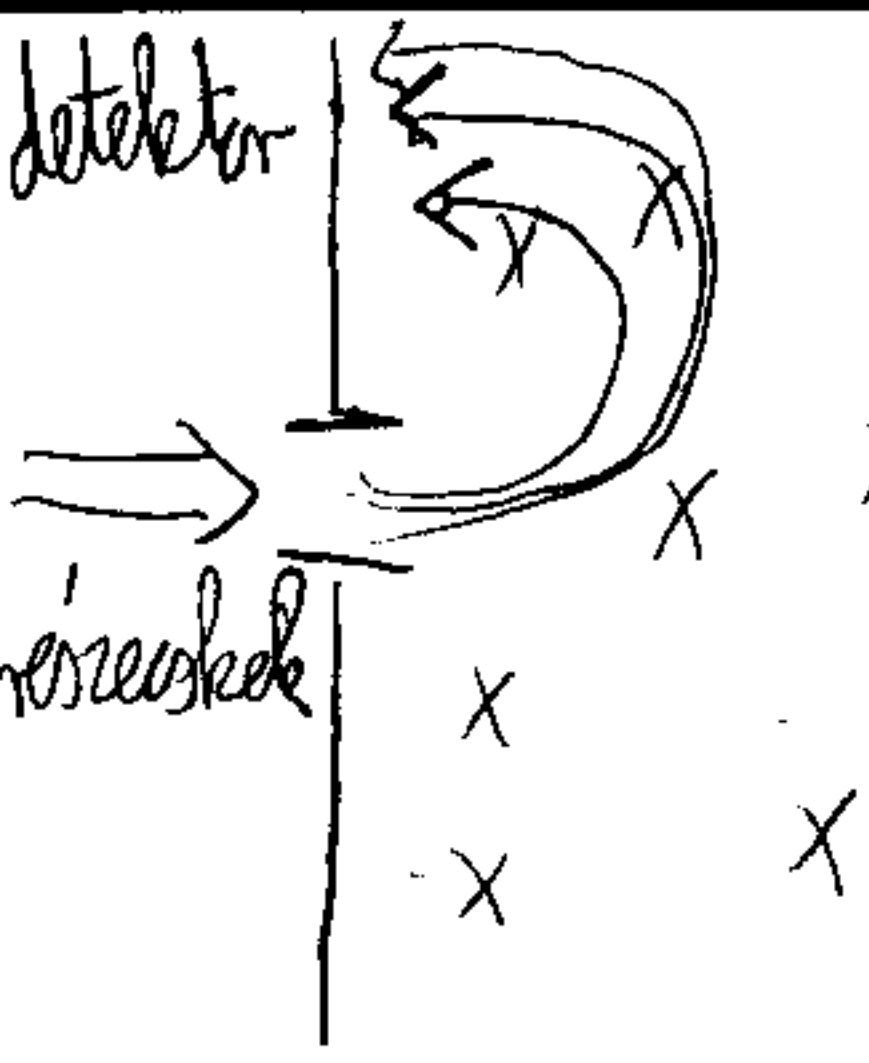
$|\vec{F}_L| = q v B$
egyenletes körmozgás

$\frac{mv^2}{r} = q v B$

$q' = \frac{q}{m}$ részecske fajlagos töltése

$r = \frac{m v}{q B} = \frac{1}{q'} \cdot \frac{v}{B}$

tömegspektrométer



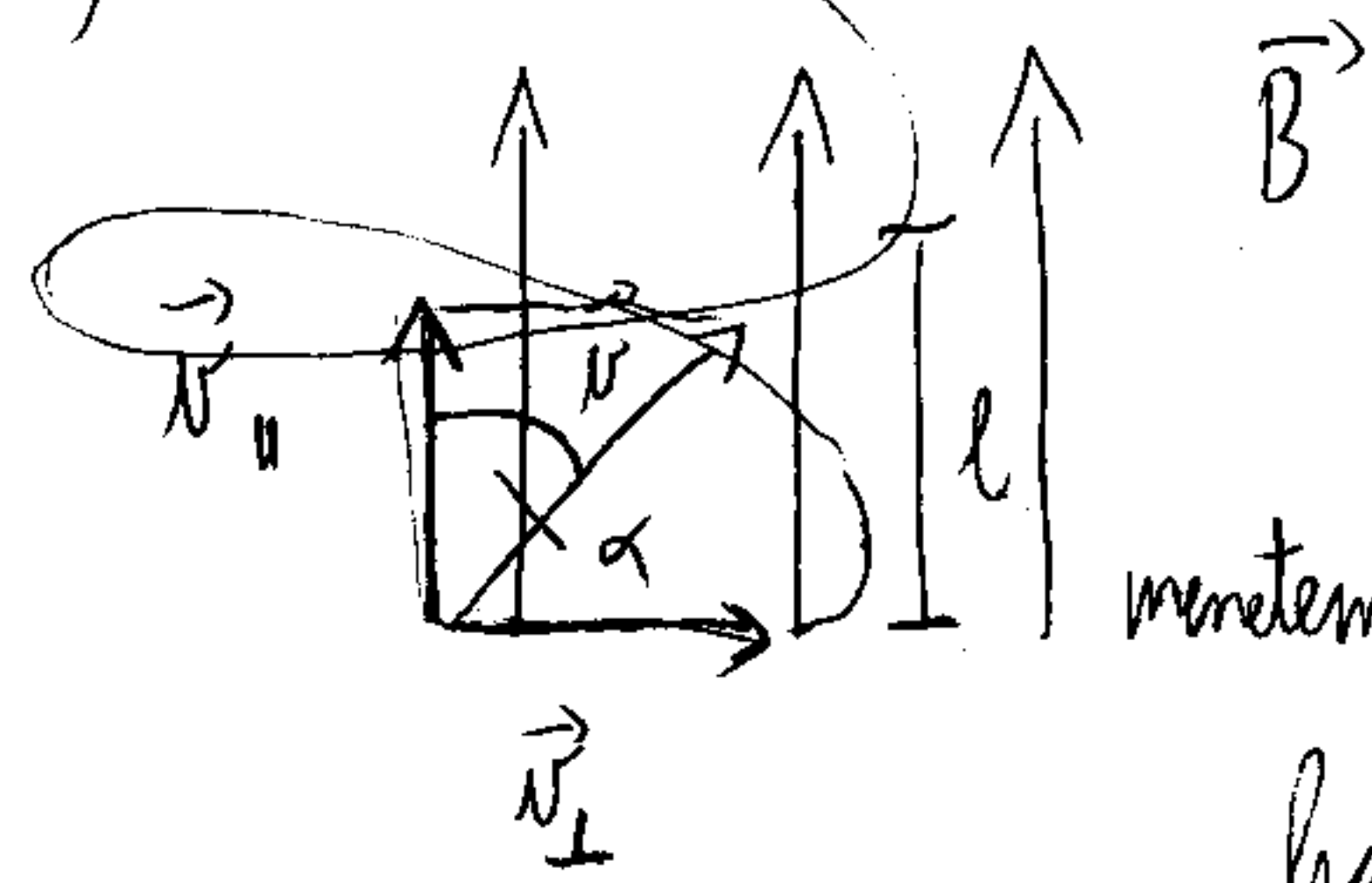
$$\frac{mv}{r} = qB$$

$$m\omega = qB$$

$$\omega = \frac{q}{m}B = q'B \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

c) $(\vec{v}, \vec{B}) \angle = \alpha$

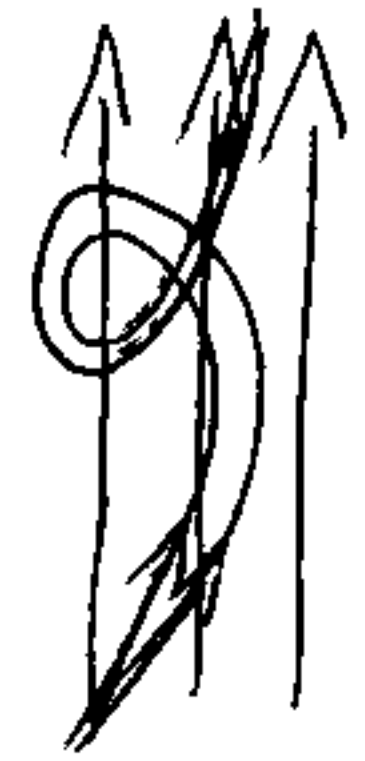
$$\frac{2\pi}{q'B} = \text{áll}$$



$$l = v_{\parallel} \cdot T = v \cdot \cos \alpha \cdot \frac{2\pi}{q'B}$$

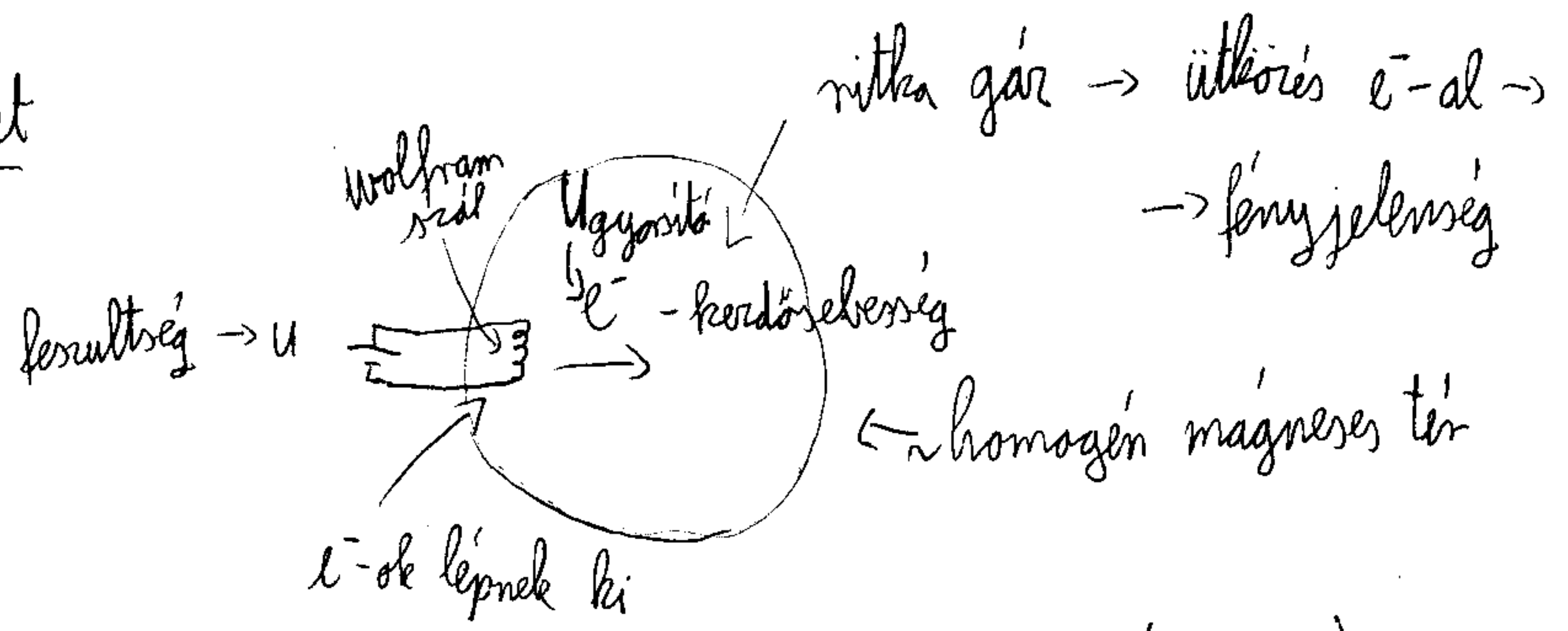
menetemelkedés

ha α kicsi $\angle \approx 0^\circ \rightarrow \cos \alpha \approx 1$



$l \approx \text{áll}$
mágneses lencse

Házi feladat

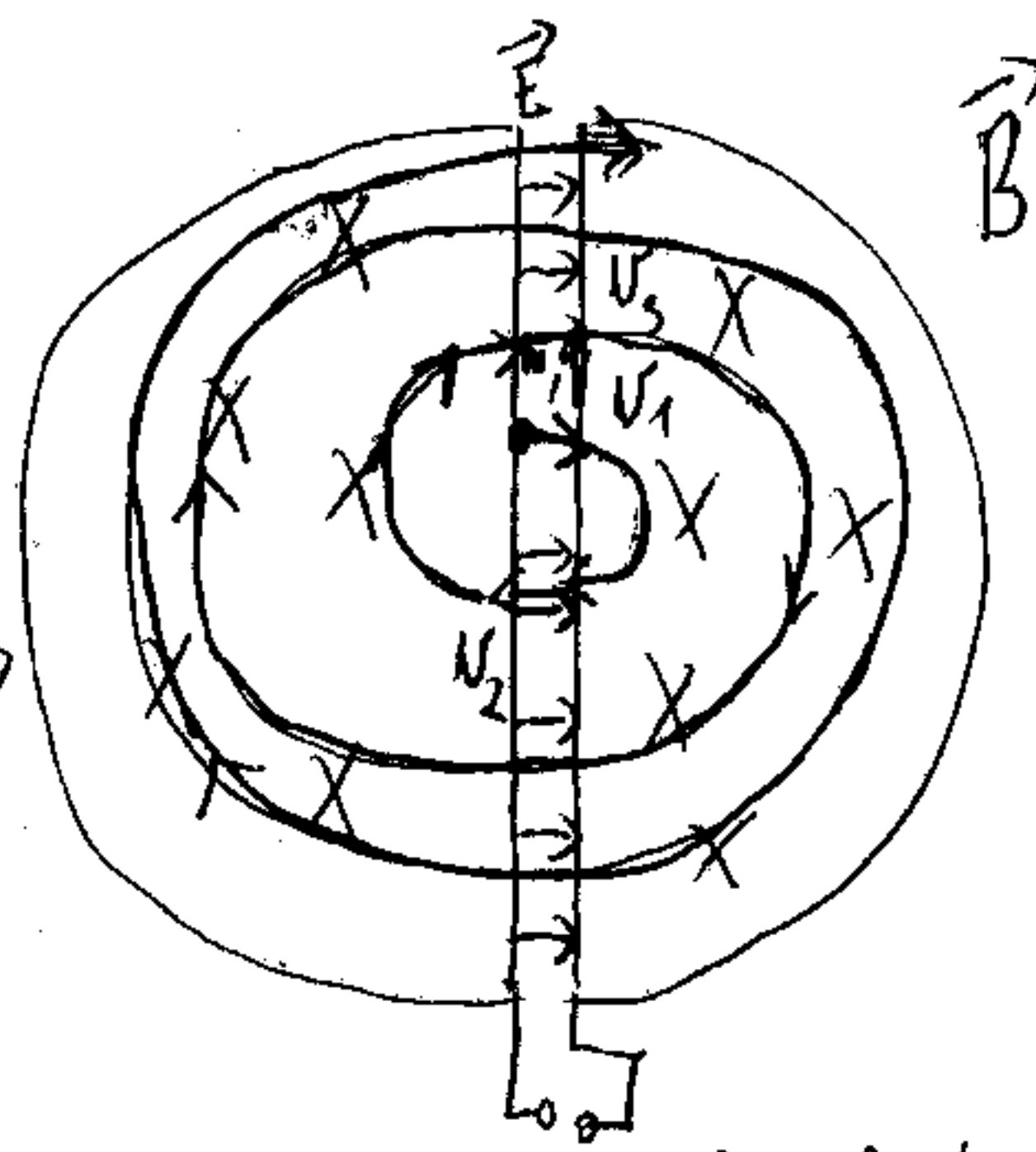


elektromos térben: $\Delta E_{\text{pot}} = QU = \Delta W = \Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$

feszültséggel lehet részecskék sebességét növelni

Ciklotron:

duóans

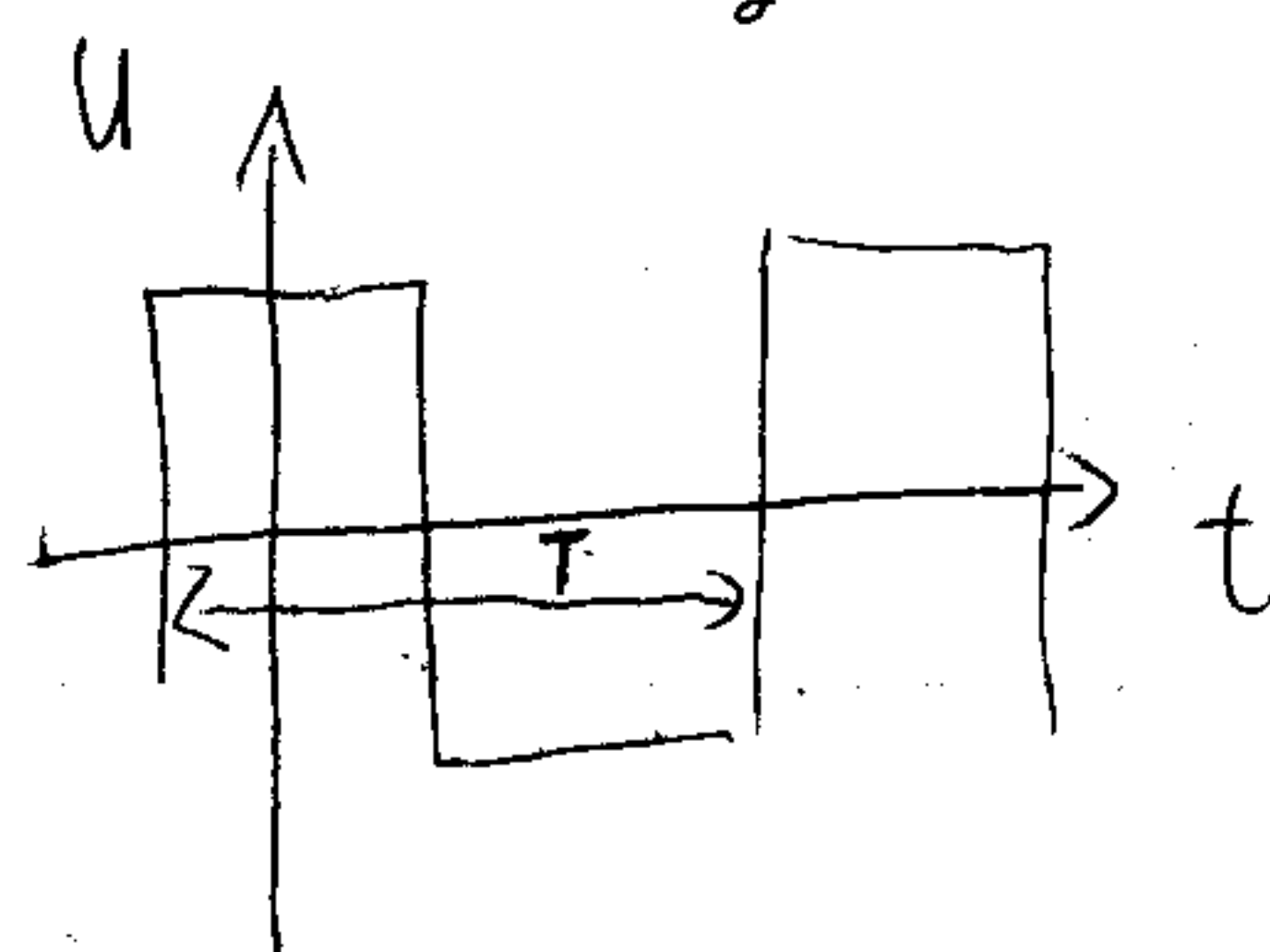


$$F = Eq = ma$$

$$a = \frac{E \cdot q}{m} = Eq'$$

sejmssebesség jól közelíthető

u - feszültség → w - val váltogatják

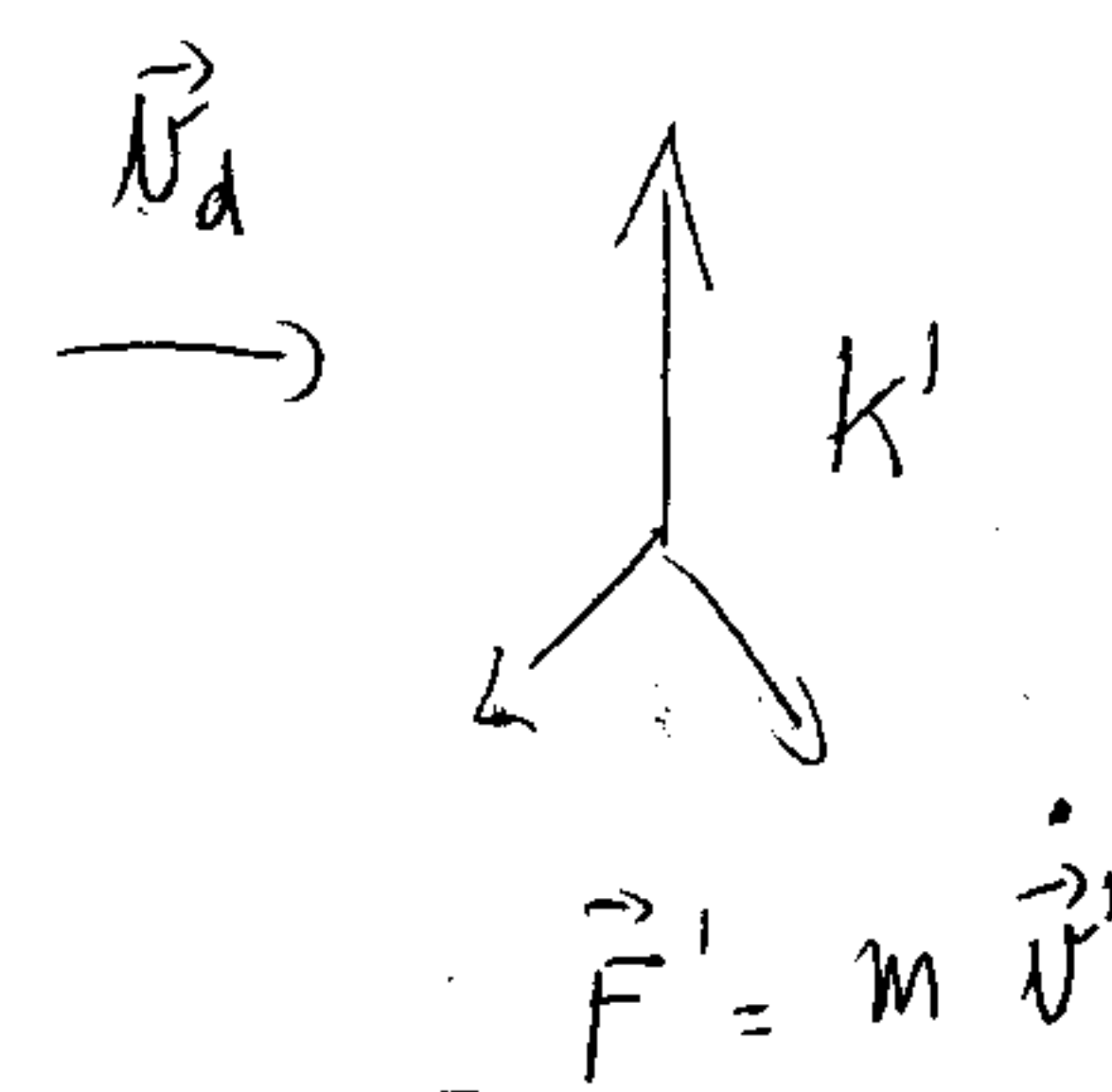
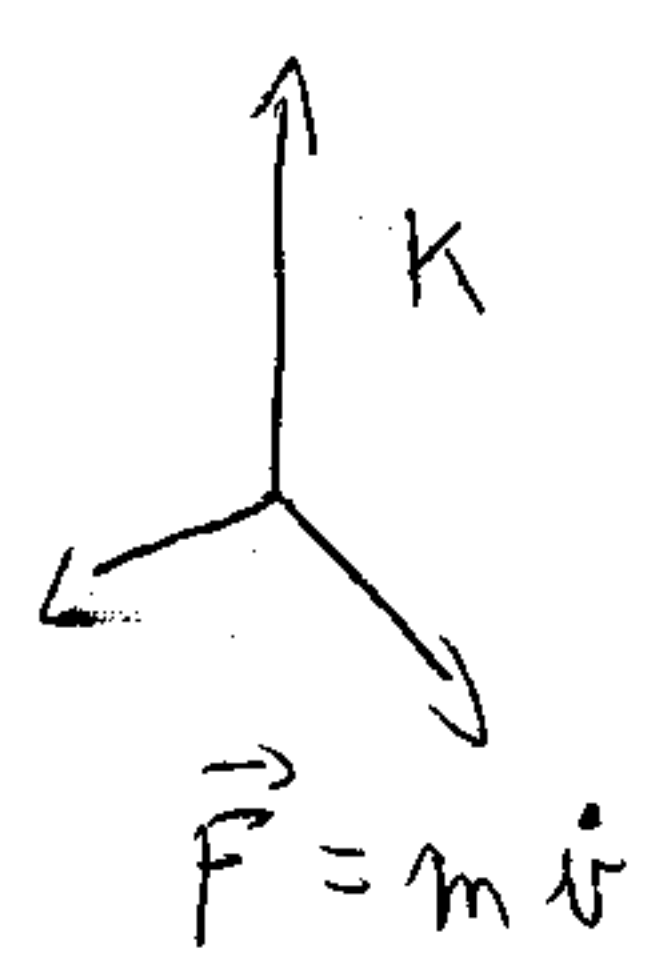


alt. sinus

$$\vec{F}_L = q [(\vec{v} \times \vec{B}) + \vec{E}]$$

általános alak elektromos térrel együtt

Galilei-transzformáció (erőtörvény - sebesség függés)



$$\vec{v}' = \vec{v}_d + \vec{v}$$

$$\vec{v}_d = 0$$

$$\vec{F}'_L = q (\vec{v} + \vec{v}_d) \times \vec{B} + q \vec{E}$$

$$\vec{F}'_L = m \vec{v}'$$

$$q(\vec{v} \times \vec{B}) + q(\vec{v}_d \times \vec{B})$$

$$q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}' = \vec{F}$$

$$\vec{F}' = q \vec{v} \times \vec{B} + q \vec{v}_d \times \vec{B} + q \vec{E}$$

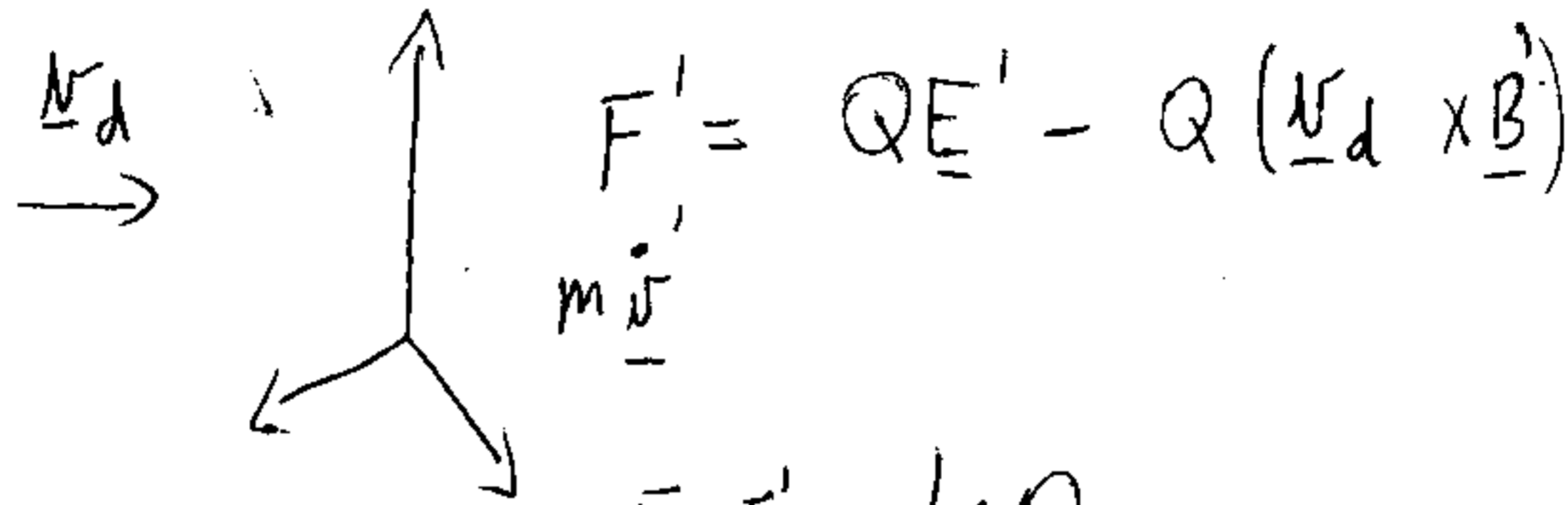
$$m \dot{\vec{v}}' = m \dot{\vec{v}}$$

Round two:

Q: K rendszerben áll



$$\underline{F} = m \underline{\dot{v}}$$



$$\underline{F} = \underline{F}' \quad | : Q$$

látványos \rightarrow $\underline{E}'' = \underline{E}' - (\underline{v}_d \times \underline{B}')$

lehet olyan \underline{v}_d -t választani, hogy $\underline{E} = 0$

egyik koor. rendszer \rightarrow elektromos
 \rightarrow elektromos és mágneses

$$\underline{v}_d = \frac{\underline{E}'}{\underline{B}'}$$

Csak elektromágneses tér van

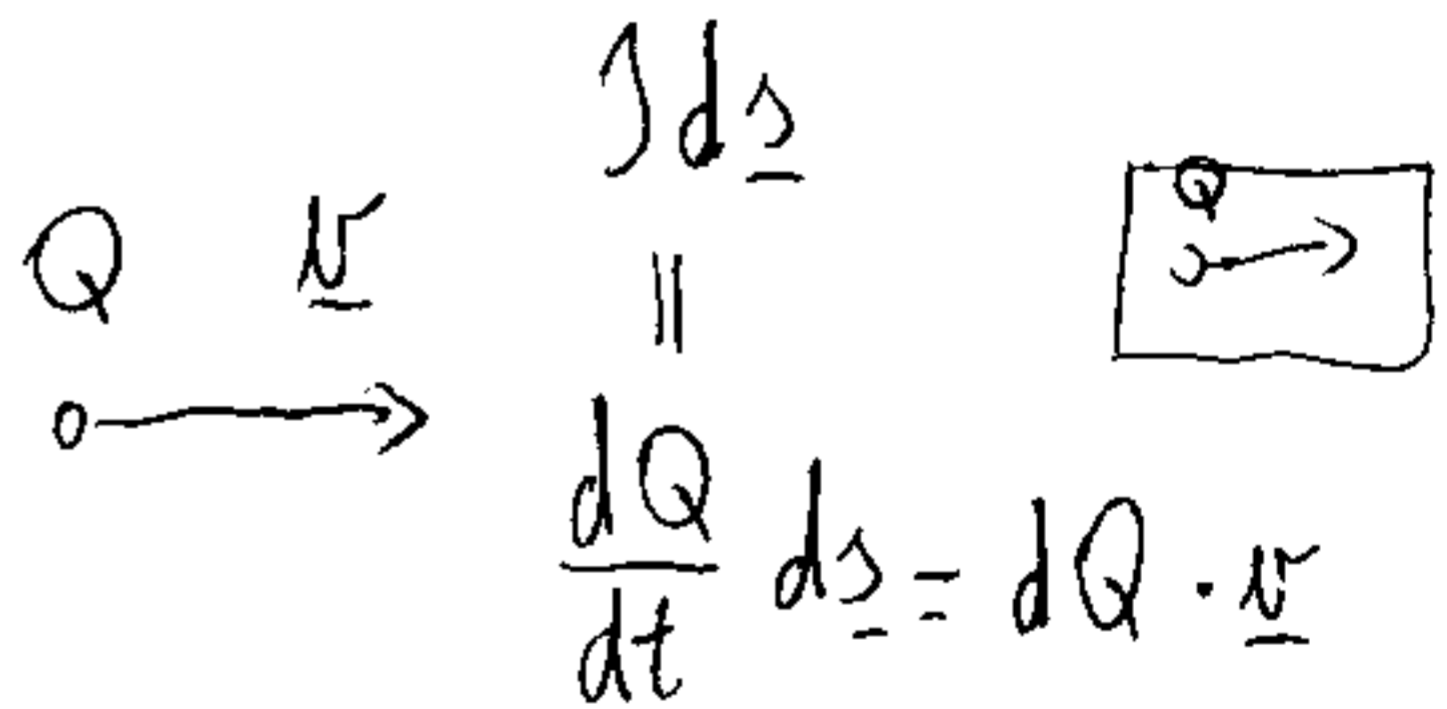
Mozgó ponttöltés tere:

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\underline{s} \times \underline{r}}{|\underline{r}|^3} =$$

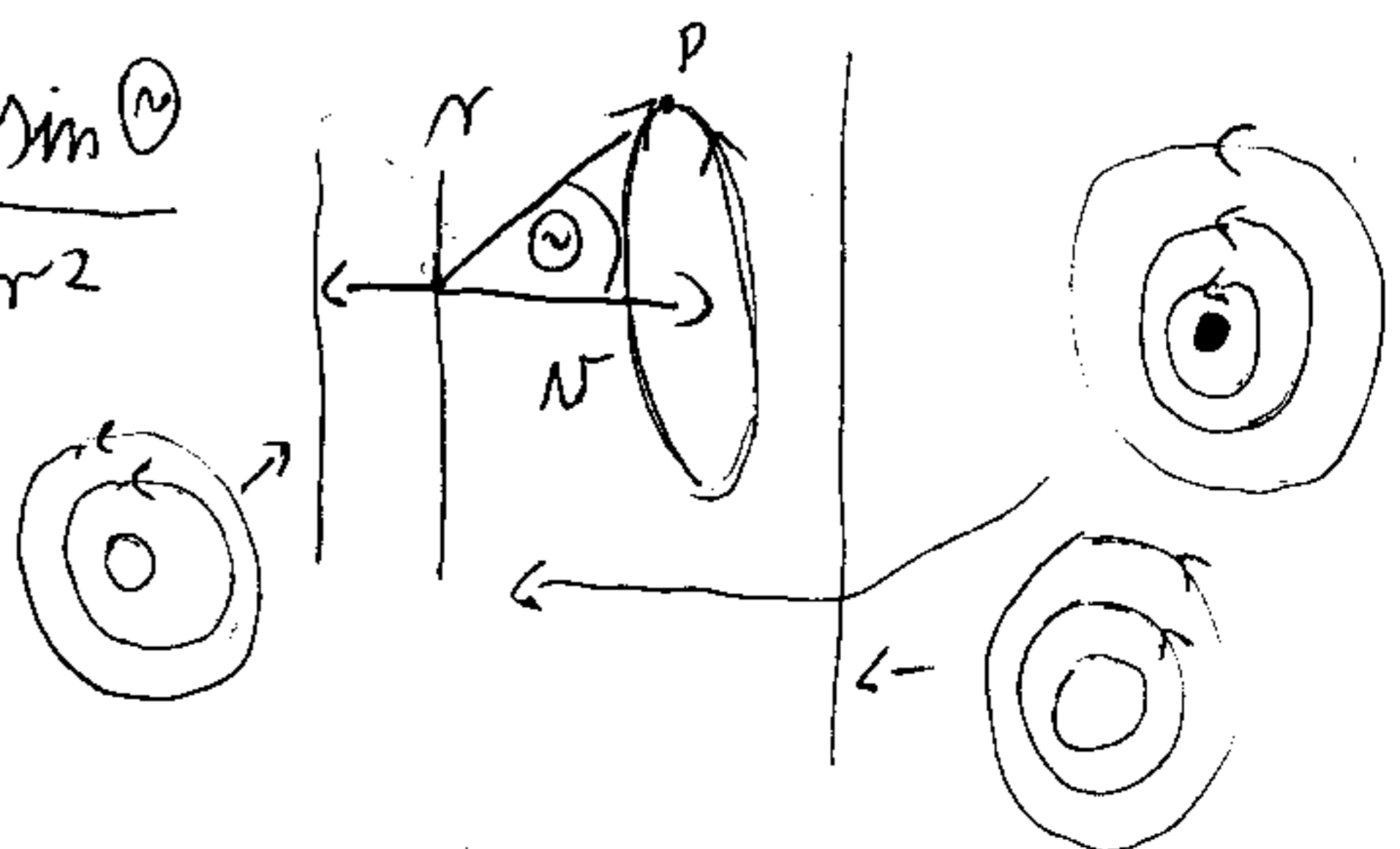
BS:

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^Q dQ' \cdot \frac{\underline{v} \times \underline{r}}{|\underline{r}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} Q \frac{\underline{v} \times \underline{r}}{|\underline{r}|^3}$$

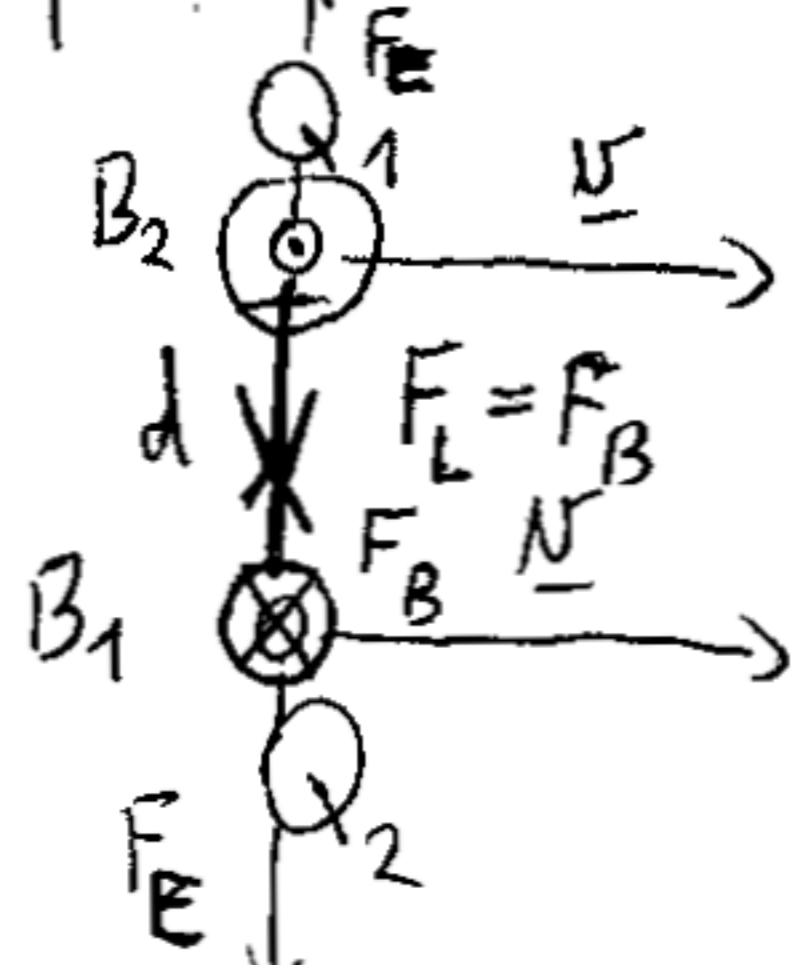
$$|\underline{B}(\underline{r})| = \frac{\mu_0}{4\pi} Q \frac{v \sin \alpha}{r^2}$$



erősen függő



2 ponttöltés-párhuzamosan mozognak $F_E = F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{d^2}$



$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} Q_2 \frac{v}{d^2}$$

$$F_L = F_B \Rightarrow F_{L1} = Q_1 v B_2 =$$

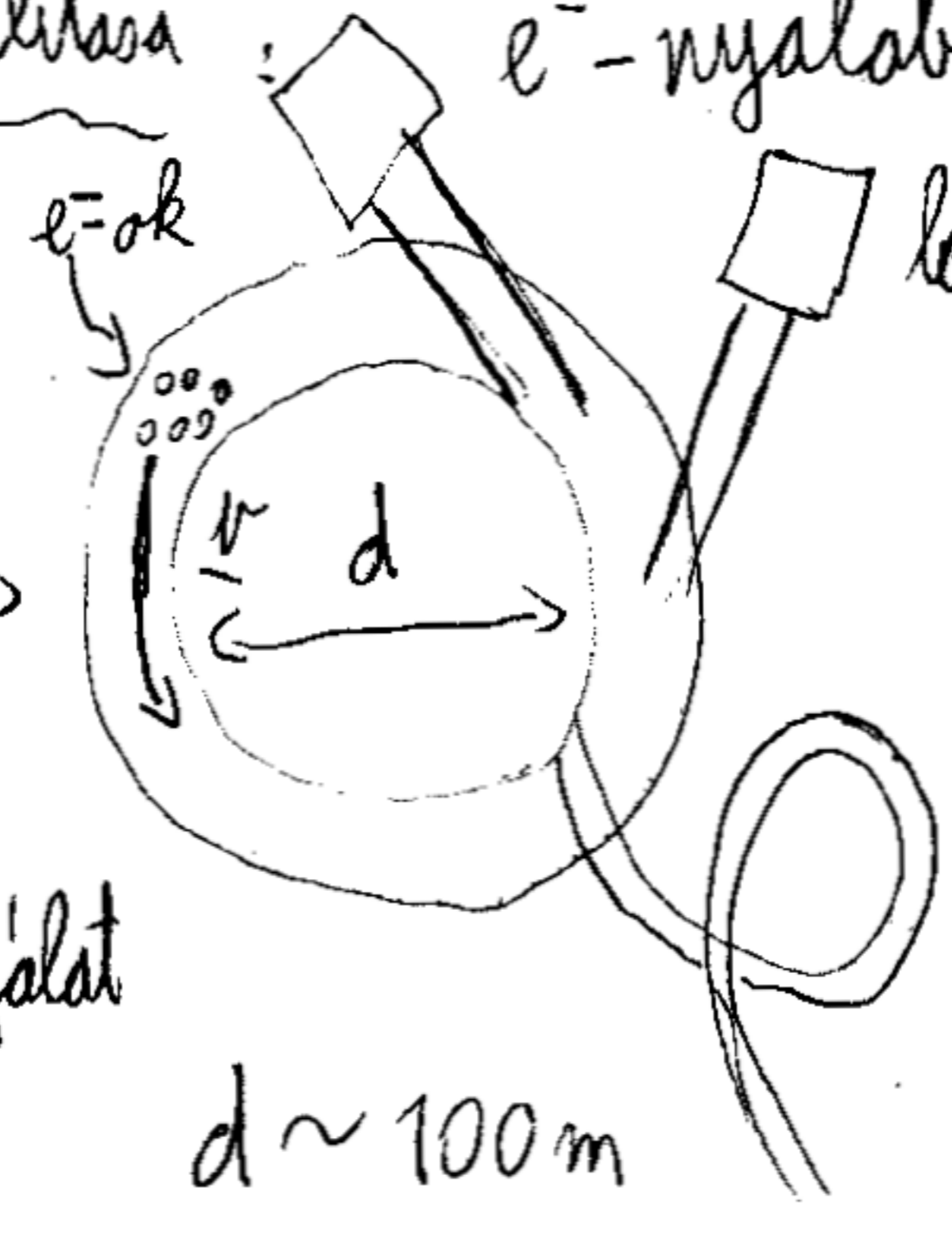
$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1 Q_2}{d^2} v^2}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{d^2}} = \mu_0 \epsilon_0 v^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1 = Q_1 v \frac{\mu_0}{4\pi} Q_2 \frac{v}{d^2}$$

kis sebességeknél $v \ll c \rightarrow F_B \approx 0$

ha megközelítjük c -t $\rightarrow F_B$ már összemérhető F_E -vel
 két alufólia között semleges nincs F_E

e^- csomagok előállítás
 szinkrotron

e^- -nyaláb előállítás



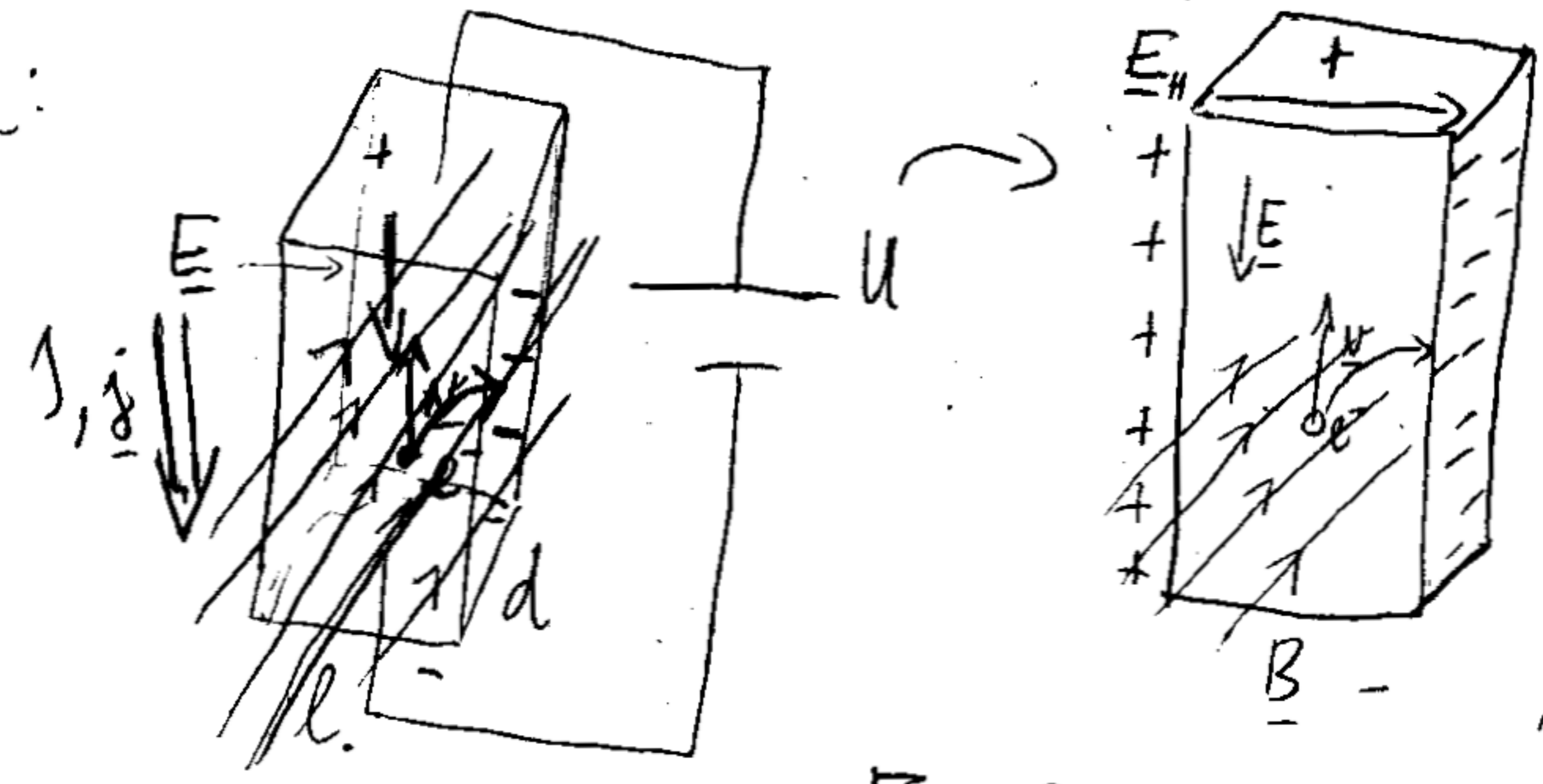
$v \ll c \quad \sum F \approx 0$
 előgyorsítás

- $e^- \rightarrow$ gyorsulnak \rightarrow
- \rightarrow fotonkibocsátás \rightarrow
- \rightarrow anyagszerkezet vizsgálata

$d \sim 100m$

Hall-effektus:

homogén
 mágneses
 tér



$F = 0 \rightarrow E_H \cdot Q = Q \cdot v \cdot B$

$$E_H = v B \rightarrow U_{Hall} = l v B = \frac{j}{nq} l B = \frac{1}{nq} \frac{j}{l} l B = \frac{1}{nq} \frac{j B}{d}$$

$$j = n \cdot q \cdot v$$

$$j = \frac{I}{A}$$

$$v = \frac{j}{nq}$$

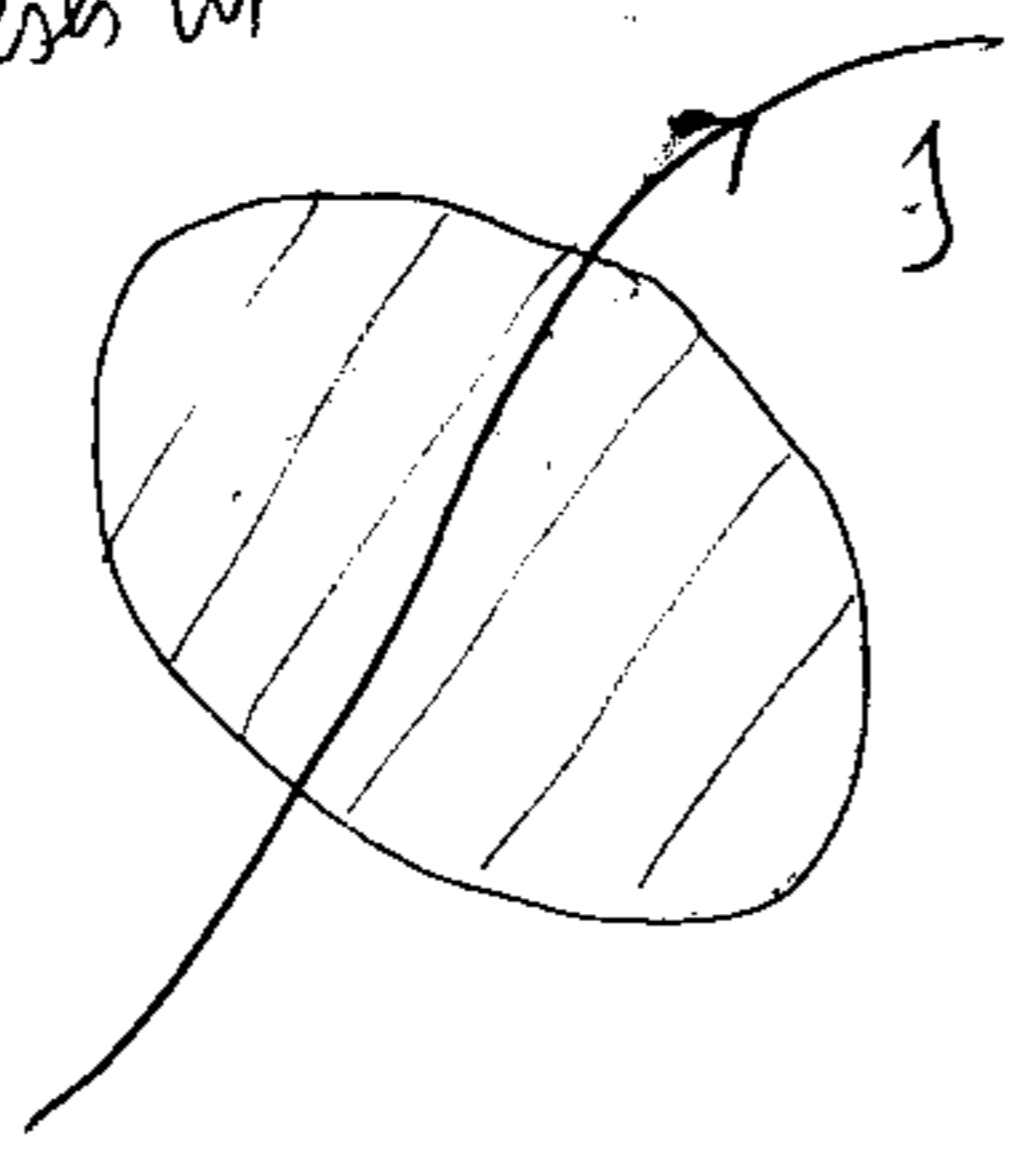
$q \equiv e^-$ fém esetén

→ ezzel a kísérlettel lehet meghatározni: n -et

Anyagok mágnessége:

B_0 : külső mágneses tér

↑
 I_{szabad}



Amper-féle tárgyalási mód (1822)

anyag válasza: molekuláris áram
 $I_m \rightarrow \underline{m}_m \rightarrow$

$$\underline{B} = \underline{B}_0 + \underline{B}_m \rightarrow \underline{B}_m$$

$$\underline{m}_m = I_m \cdot \underline{f}_m$$

$$\underline{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \underline{m}_i$$

két törvény: $\oint \underline{B} d\underline{l} = 0$

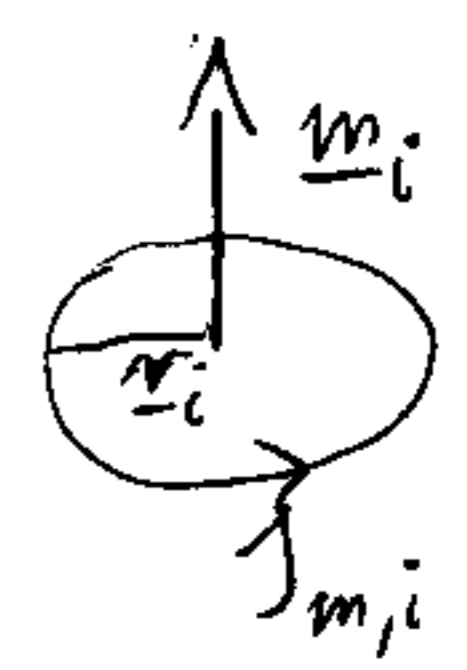
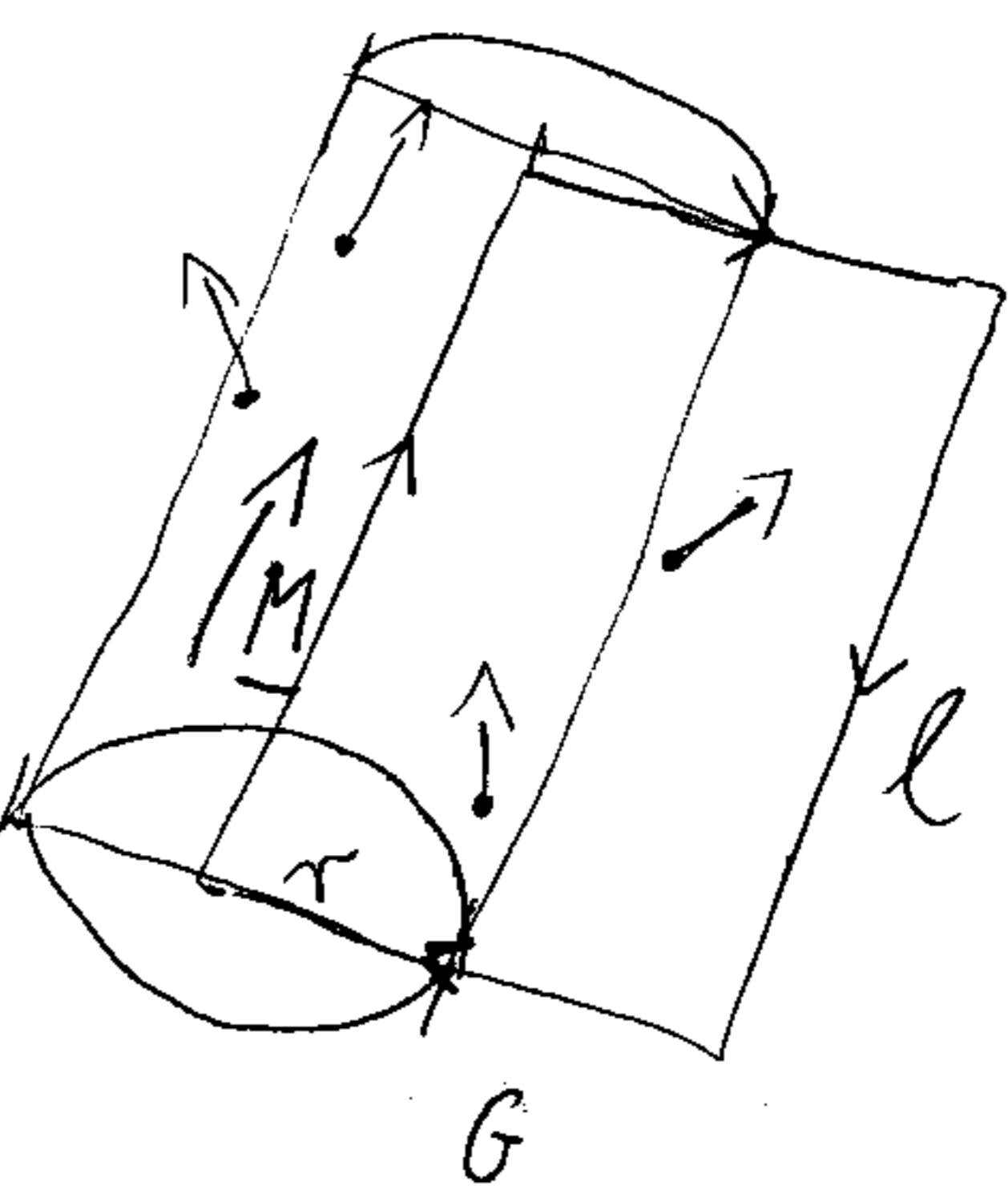
$\oint \underline{B} d\underline{r} = \mu_0 \sum_i I_i$ eredő mágnesezettség vektor

váltakozás: $\oint \underline{B} d\underline{l} = 0$
nincs váltakozás

$$[M] = \frac{A}{m}$$

$$\oint \underline{B} d\underline{r} = \mu_0 \sum_i (I_{sz} + I_m)$$

$$\mu_0 \sum_i I_m \rightarrow \mu_0 \int \underline{j}_{mol} d\underline{l}$$



azon mágneses momentumok középpontja ami járulékat

ad a G görbébe egy r sugarú hengeren helyezkednek el

$$\text{Henger } \sum_i \underline{m}_i = \underline{M} r^2 \pi l \rightarrow \sum_i I_i \underline{f}_i = \sum_i I_i r^2 \pi l = M r^2 \pi l$$

$$\sum_i I_{m,i} = \underline{M} \cdot \underline{l} \stackrel{\uparrow}{=} \underline{M} \underline{l}$$

↑
most

$$\oint \underline{M} d\underline{r} = \int + \int + \int + \int = \underline{M} \underline{l} = \sum_i I_{m,i}$$

□ G
heng fedő alaj kívül
M ⊥ dr
≈ M=0

$$\left(\sum Q_p = \oint \underline{P} d\underline{l} \right)$$

$$\oint_G \underline{B} d\underline{r} = \mu_0 \sum_i \left(I_{sz,i} + I_{mj} \right) \rightarrow \oint_G \left(\frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{M} \right) d\underline{r} = \sum_i I_{sz}$$

↑
H mágneses térerősség

$$\oint_G \underline{H} d\underline{r} = \int_F \underline{I}_{sz} d\underline{l}$$

$$\oint \underline{B}_m d\underline{r} = \mu_0 \sum_i I_{i,m}$$

↑
M d r

anyagra jellemző mennyiség kell

$$M(B) = ?$$

$$B(H) = ?$$

↓ anyagi ismefüggés

$$\underline{M}(H)$$

$$\underline{B}_m = \mu_0 \underline{M}$$

$$\underline{M} \sim \underline{H} \quad [H] = \frac{A}{m}$$

$$\chi_m \geq 0$$

↳ lehet negatív

$$\underline{M} = \chi_m \underline{H}$$

anyagok nagy hányadára igaz
↳ mágneses susceptibilitás

a, $\chi_m < 0$ diamágneses

$$\chi_m \approx -10^{-5}$$

alig mágnesezhető

b, $\chi_m > 0$ paramágneses anyagok

$$\chi_m \approx 10^{-4}$$

puai mágnesezettség

Ismétlés: $\oint \underline{B} d\underline{l} = 0$

$$\oint \underline{H} d\underline{r} = \sum_i I_{i,r} = \int \underline{j}_r d\underline{l}$$

$$\underline{H} =: \frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{M} \quad \underline{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \underline{m}_i$$

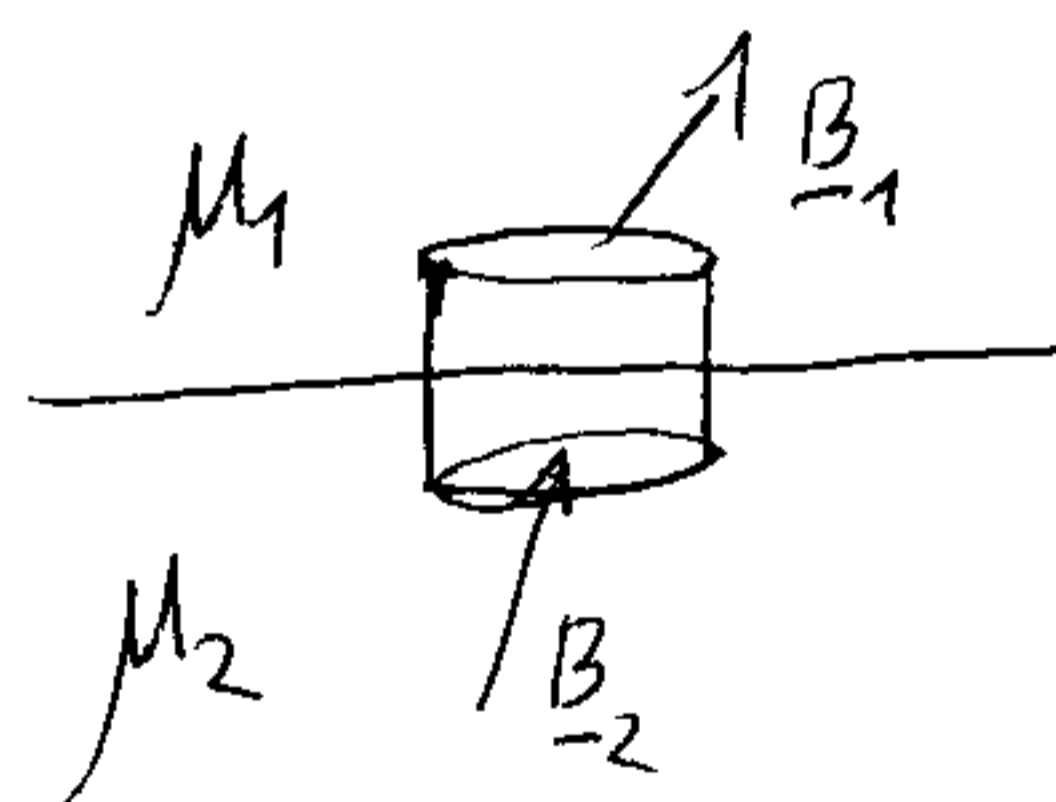
$$\underline{M} = \chi_m \underline{H} \quad \chi_m \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{B}}{\mu_0} - \chi_m \underline{H} \rightarrow \underline{B} = \mu_0 \underline{H} + \mu_0 \chi_m \underline{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \underline{H}$$

μ
relatív mágneses permeabilitás

$$\underline{B} = \mu_0 \mu \underline{H}$$

I.



1. $\oint \underline{B} d\underline{l} = 0$

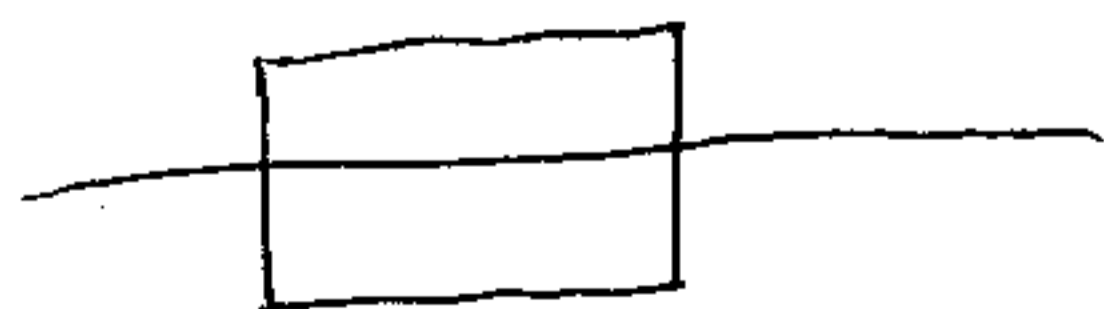
$$B_{n1} = B_{n2} \rightarrow \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$$

~~$$\frac{B_{n1}}{\mu_1} = B$$~~

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

II. $\oint \underline{H} d\underline{r} = 0$

$$H_{tg1} = H_{tg2}$$



$$\frac{B_{tg1}}{\mu_1} = \frac{B_{tg2}}{\mu_2}$$

$$\underline{B} = \underline{B}_0 + \underline{B}_m =$$

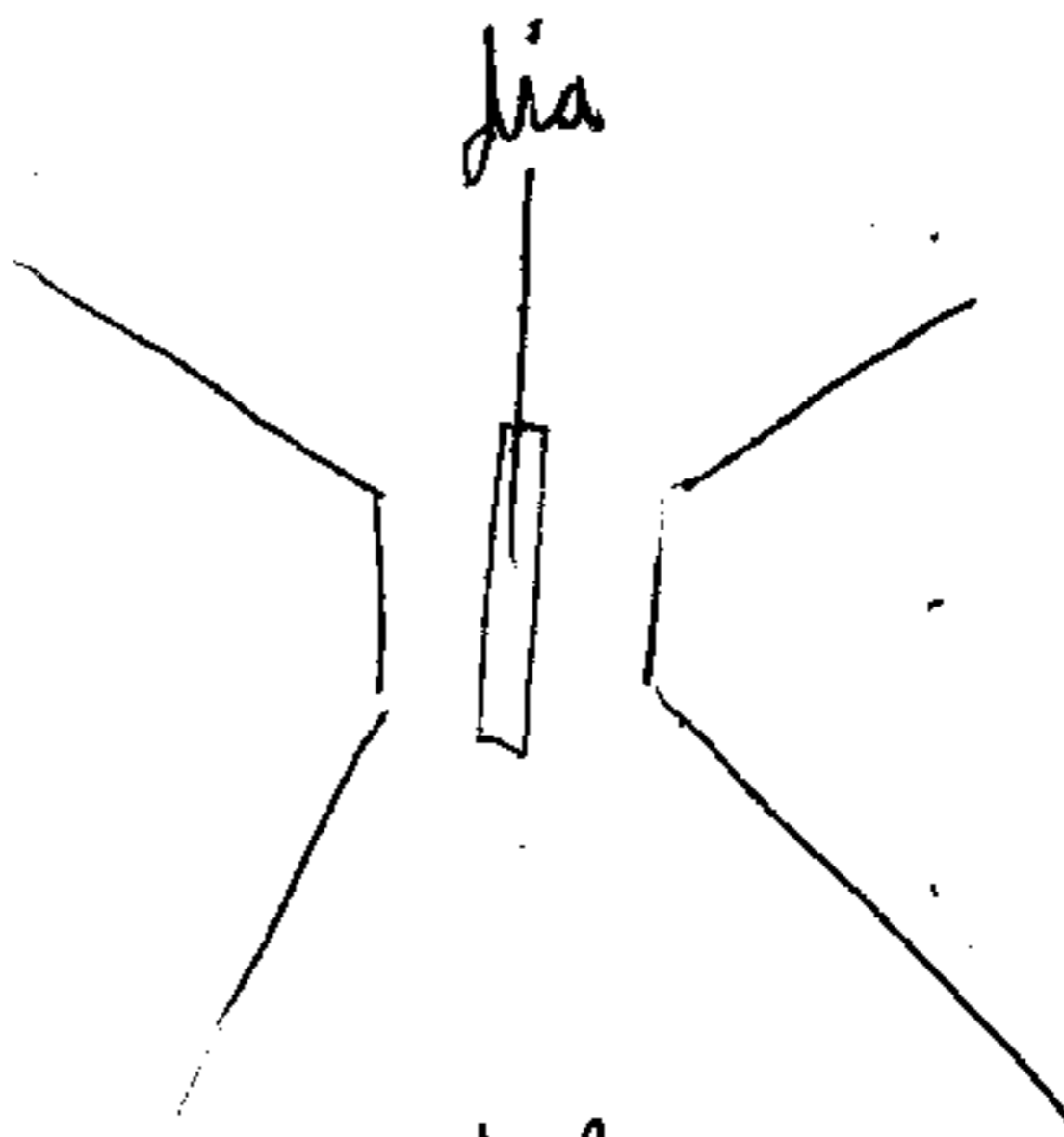
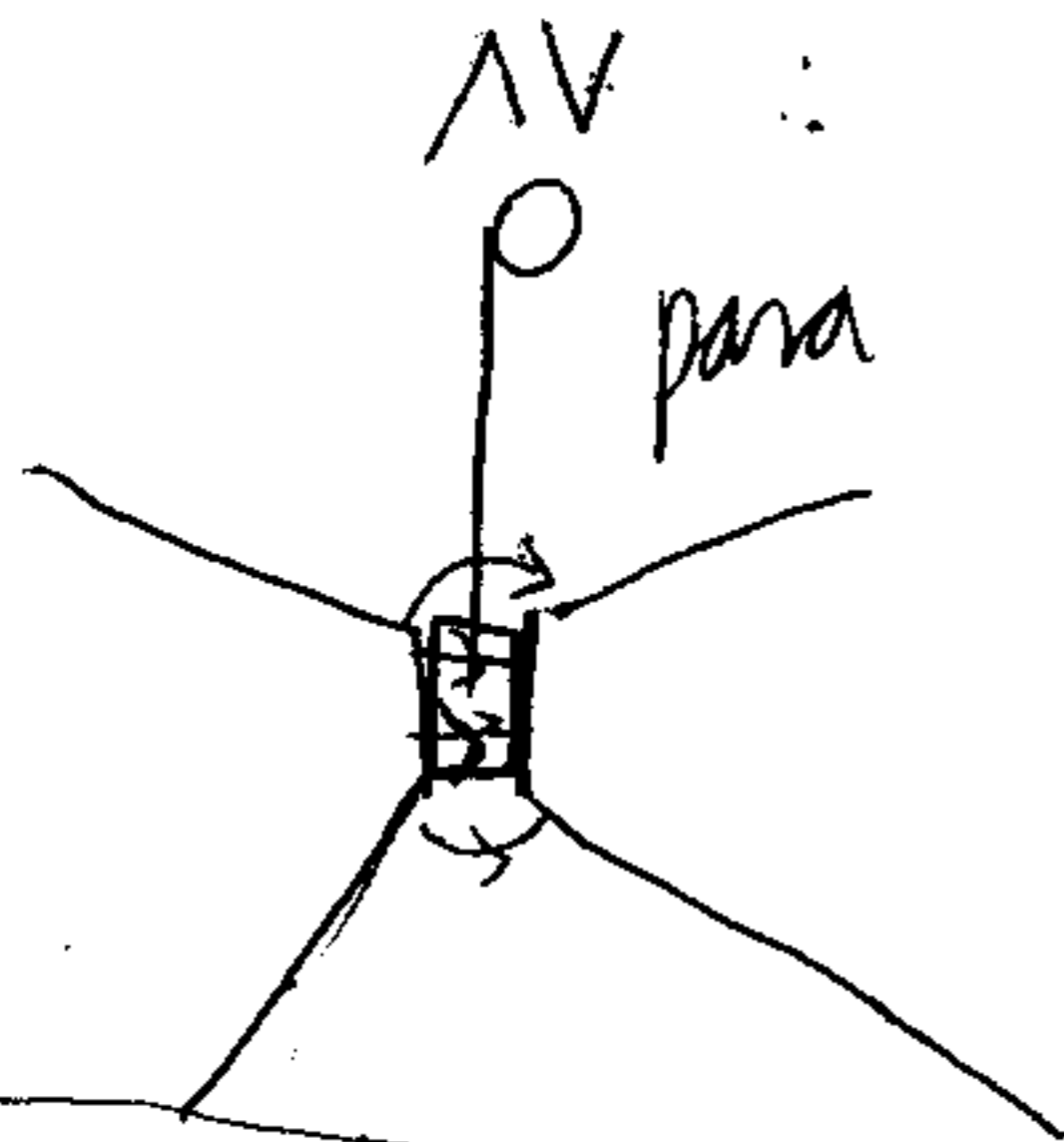
$$\underline{B}_m = \mu_0 \underline{M}$$

paramagneses $B > B_0$

$$= \underline{B}_0 + \underbrace{\mu_0 \chi_m \underline{H}}$$

dia - u - $B < B_0$

↳ vizmut

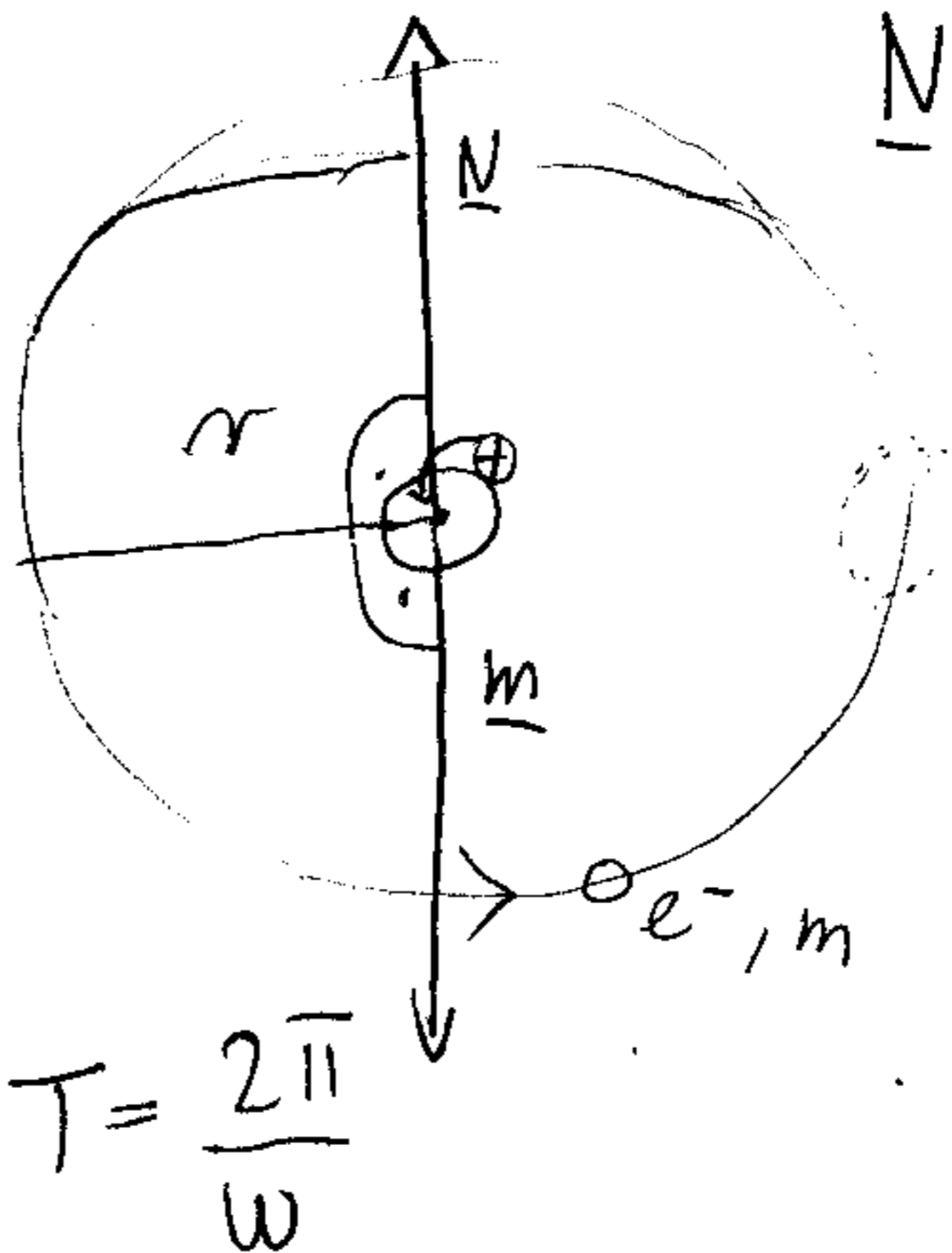


Atomok mágneses tulajdonságai

klasszikus - fizikában → se atom se molekuláris áram

	χ_m
Al	$2 \cdot 10^{-4}$
Bi	$-1,7 \cdot 10^{-4}$
O ₂	$1,9 \cdot 10^{-5}$
Ni	$-3 \cdot 10^{-9}$

$$\underline{N} = \underline{r} \times m \underline{v}$$



$$|\underline{N}| = m r v = m r^2 \omega$$

$$|\underline{m}| = I \cdot \underline{f} = \frac{dQ}{dt} \cdot r^2 \pi =$$

$$= \frac{e^-}{T} \cdot r^2 \pi = T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= e^- \cdot \frac{\omega}{2\pi} r^2 \pi = e^- \cdot \frac{1}{2} r^2 \omega$$

γ_p : gíromágneses faktor

$$\frac{\underline{N}}{m} = -\frac{m}{e^-} \cdot \frac{2}{e^-} \rightarrow$$

$$\underline{m} = -\frac{e^-}{2m} \cdot \underline{N}$$

de kvantummechanikában: N - maximális értéke van

$$N = \hbar \cdot \sqrt{l(l+1)} \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

$$N_z = \hbar m_l$$

mágnestérben

mágneses kvantumszám

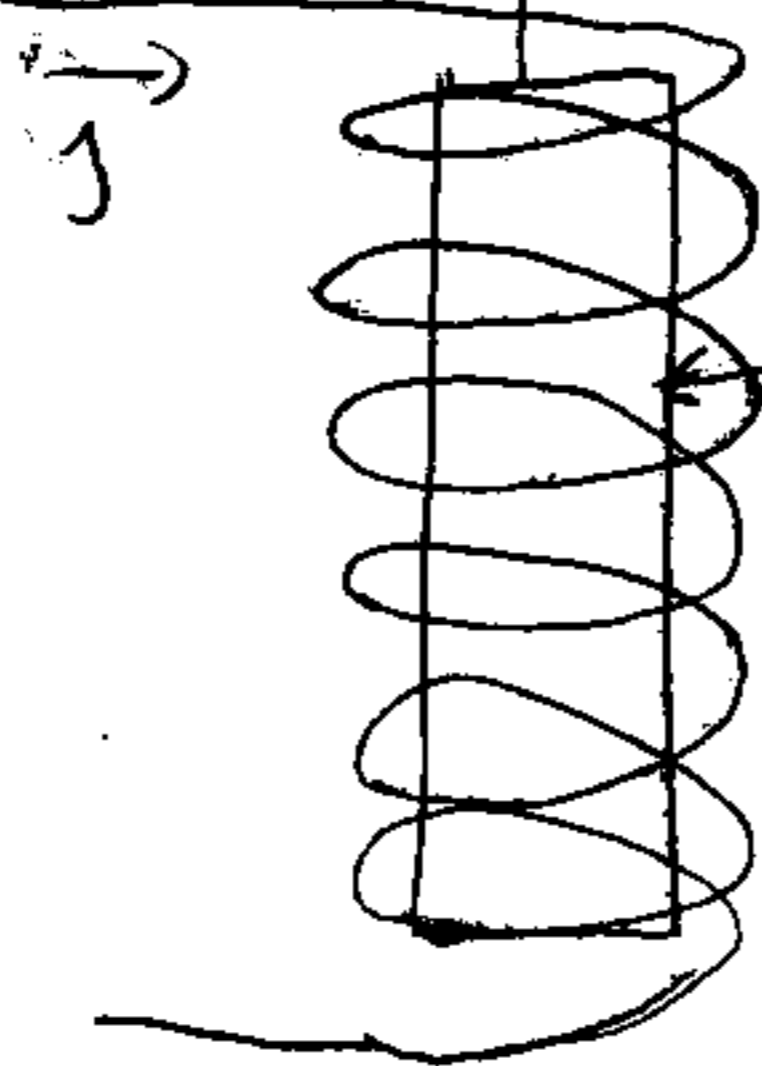
$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\underline{m} = -\frac{e}{2m} \cdot \hbar \cdot m_l = -\mu_B \cdot m_l$$

μ_B : Bohr-magnetron

kísérleti igazolás: Einstein-de Haas kísérlet

mágneses tér \vec{S}



← forgatónyomaték hat rá

rezonanciakísérlet

$\gamma(\omega)$
periodikus váltottetés

ha ω megegyezik a test s. frekv.-val
→ észlelhető az effektus

$$\gamma_s = -\frac{e}{m} = 2 \gamma_p$$

kísérlethez kapták

spin

nem csak pályamomentumuk van hanem spinjük is

$$N_{spin} = \pm \frac{1}{2} \hbar$$

$$m_{spin} = \pm \left(\frac{e}{2m} \cdot \frac{1}{2} \cdot \hbar \right) = \pm \mu_B \cdot \frac{1}{2}$$

a, Diamagnesség: olyan atomokból tapasztalható

(~ apoláros mol.)

$$\underline{B}_0 = \underline{0}$$

$$\sum_i m_{\text{atomi}} = 0$$

külső mágneses tér hiányában

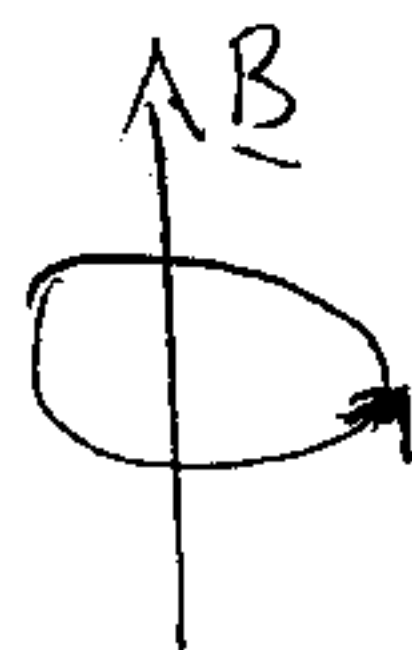
$$\underline{B}_0 \neq \underline{0}$$

$$m_{\text{atomi}} \rightarrow \underline{M} = m_{\text{atomi}} \times \underline{B}_0$$

↳ indukált precesszió

$$W = \frac{eB}{2m}$$

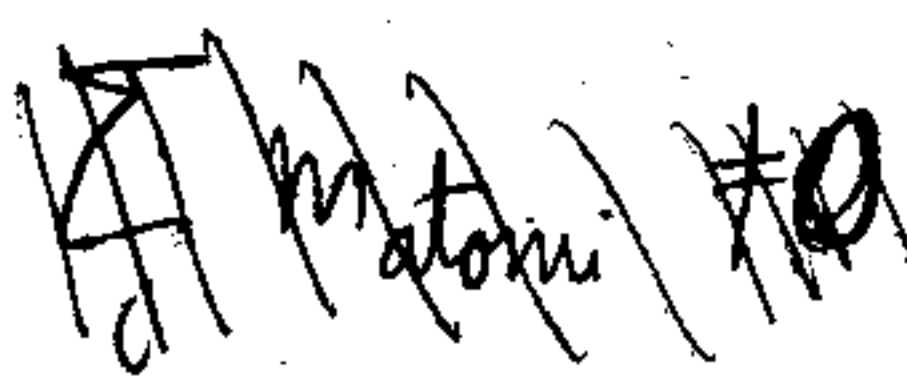
↓
Larmor precessió



b, Paramagnesség:

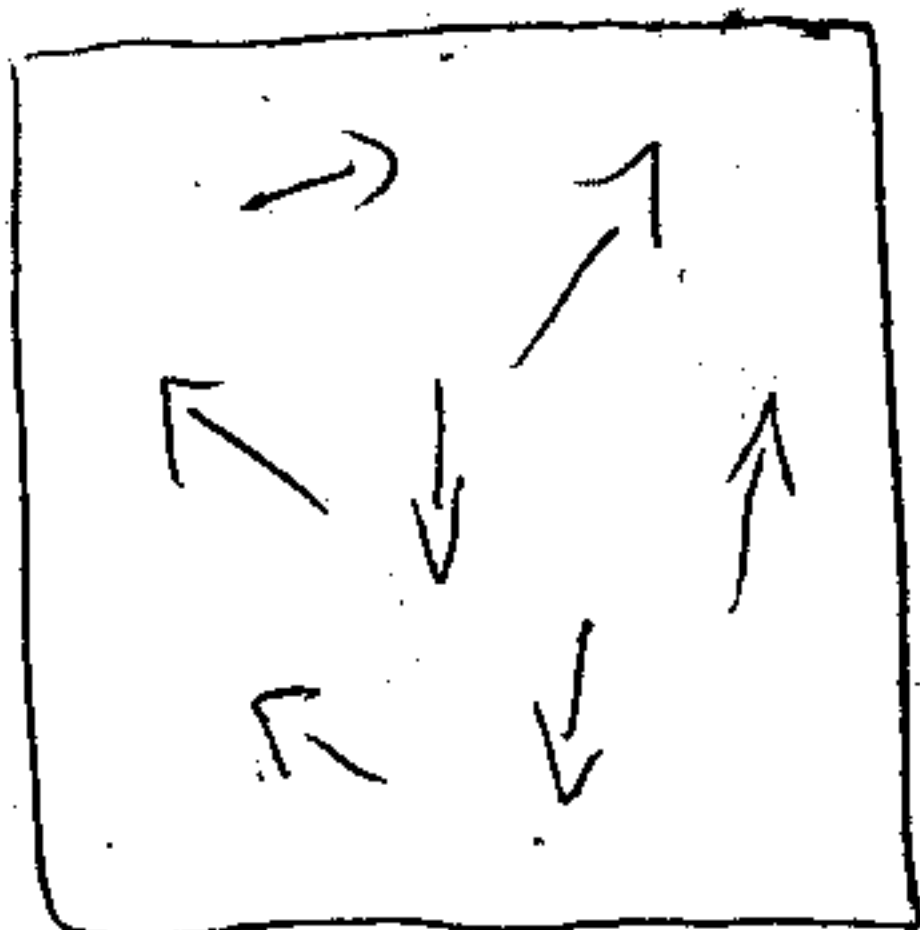
Pauli kényszer

$$\underline{B}_0 = \underline{0}$$



$$m_{\text{atomi}} \neq 0$$

$$T = 0$$



$$\underline{M} = \underline{0}$$

eredő mágnesesség

Langevin-elmélet (1905)

$$\underline{B}_0 \neq \underline{0}$$

m_i és \underline{B}_0 rögzítve

$$T \neq 0$$

zárnak be →

$$E_{\text{pot}} = -\underline{m} \underline{B}$$

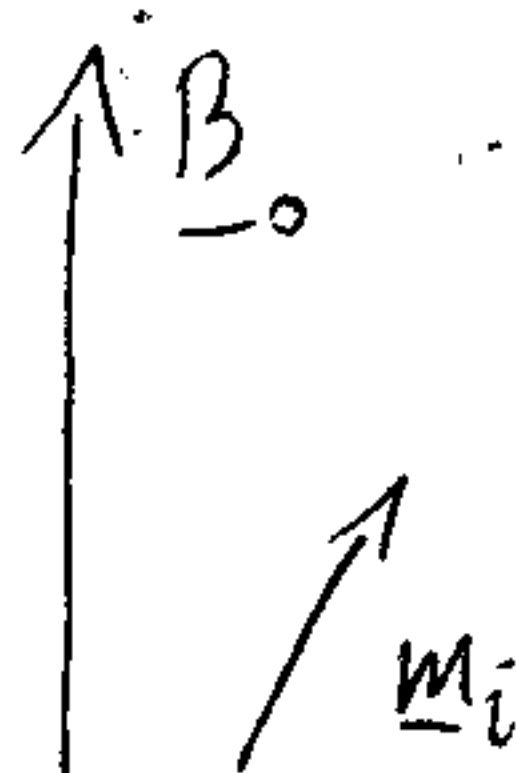
→ van valamilyen eloszlása

Boltzmann:

$$\sim e^{-\frac{E}{kT}}$$

$$N_{\uparrow} = A e^{-\frac{-mB}{kT}}$$

↳ momentumok száma amik a tér irányában állnak



$$N_{\downarrow} = A e^{-\frac{mB}{kT}} \quad N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow}$$

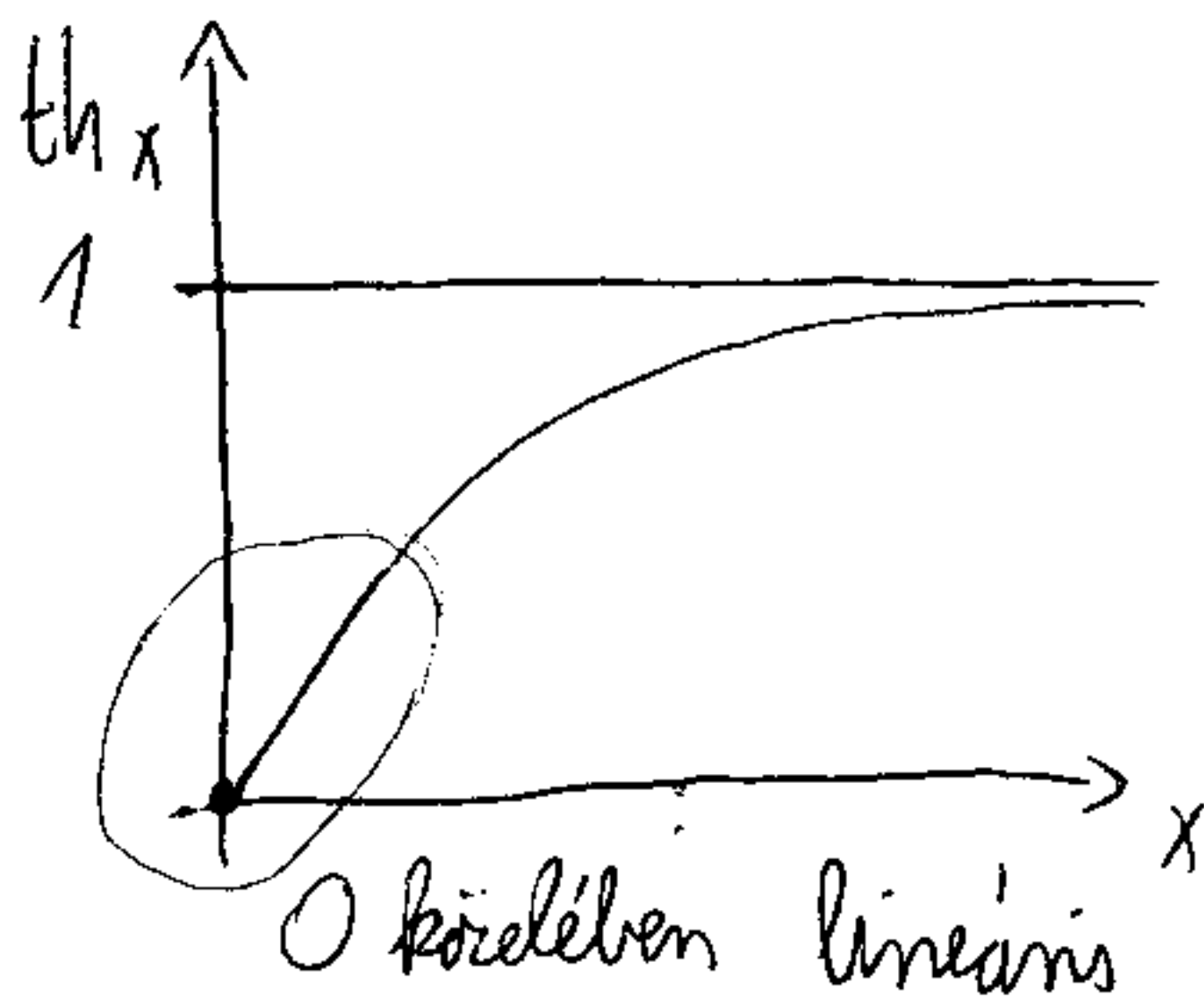
$$N = A \cdot \left(e^{-\frac{mB}{kT}} + e^{\frac{mB}{kT}} \right) \Rightarrow A = \frac{N}{e^{\frac{mB}{kT}} + e^{-\frac{mB}{kT}}}$$

$$\langle \underline{m} \rangle = m_{\uparrow} N_{\uparrow} - m_{\downarrow} N_{\downarrow} \approx m N_{\uparrow} - m N_{\downarrow} =$$

$$= m(N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) =$$

$$= m N \frac{e^{\frac{mB}{kT}} - e^{-\frac{mB}{kT}}}{e^{\frac{mB}{kT}} + e^{-\frac{mB}{kT}}} = m N \cdot \text{th} \left(\frac{mB}{kT} \right)$$

th x



$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$e^x = 1 + x$$

$$e^{-x} = 1 - x$$

$$\text{th } x \approx \frac{1+x - (1-x)}{1+x + 1-x} = x$$

$$M = \frac{\langle \underline{m} \rangle}{V} \approx \frac{m N}{V} \cdot \frac{mB}{kT} = \left(\frac{n m^2}{kT} \right) \cdot \mu_0 H$$

χ_m^{para} függ a hőmérséklettől

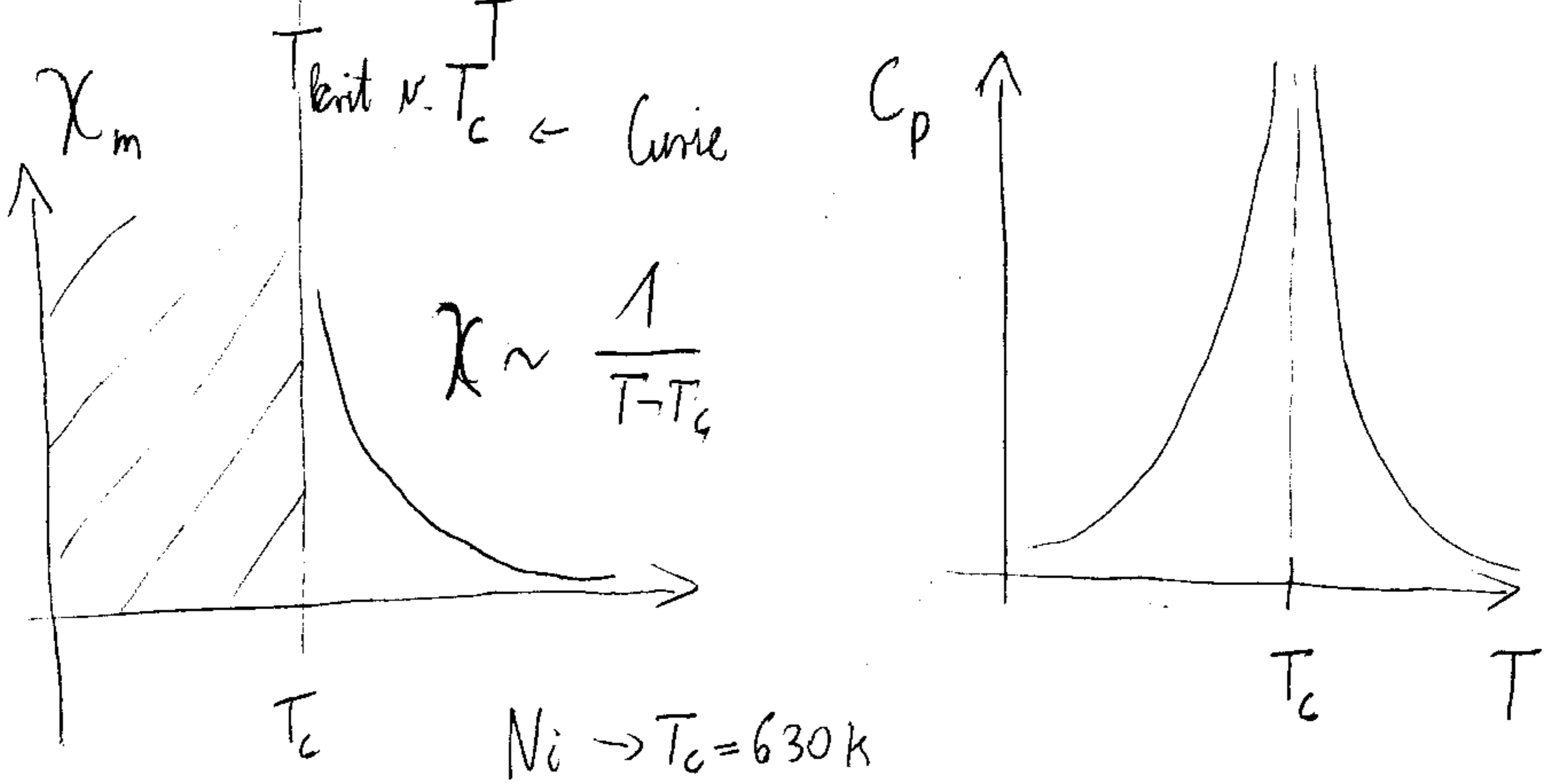
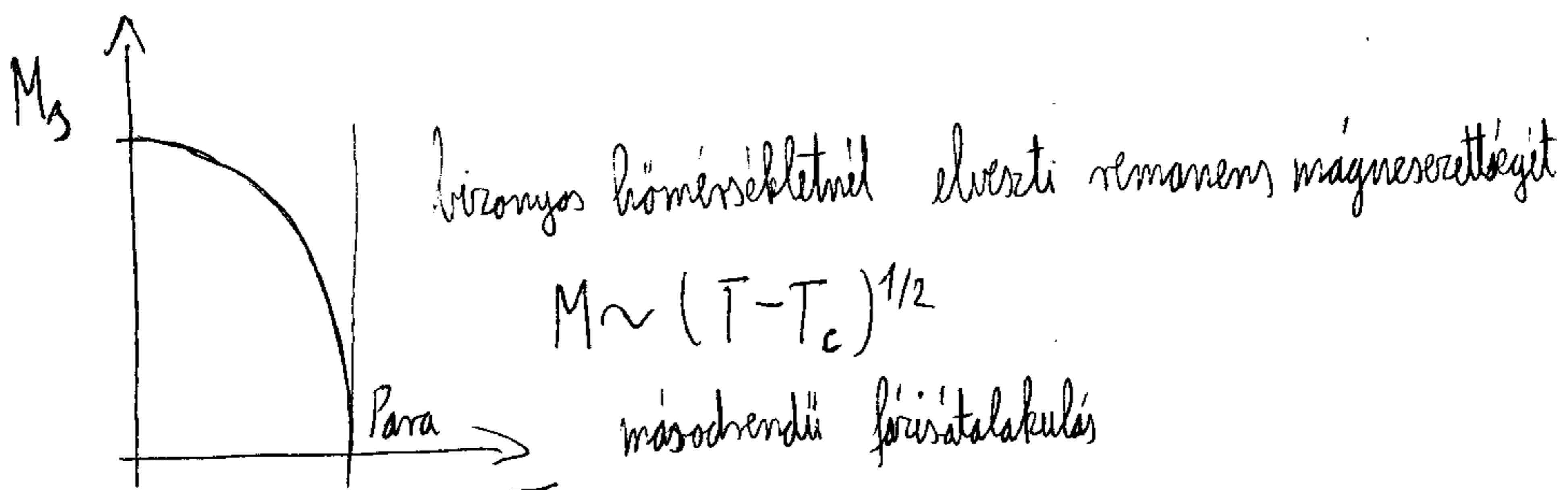
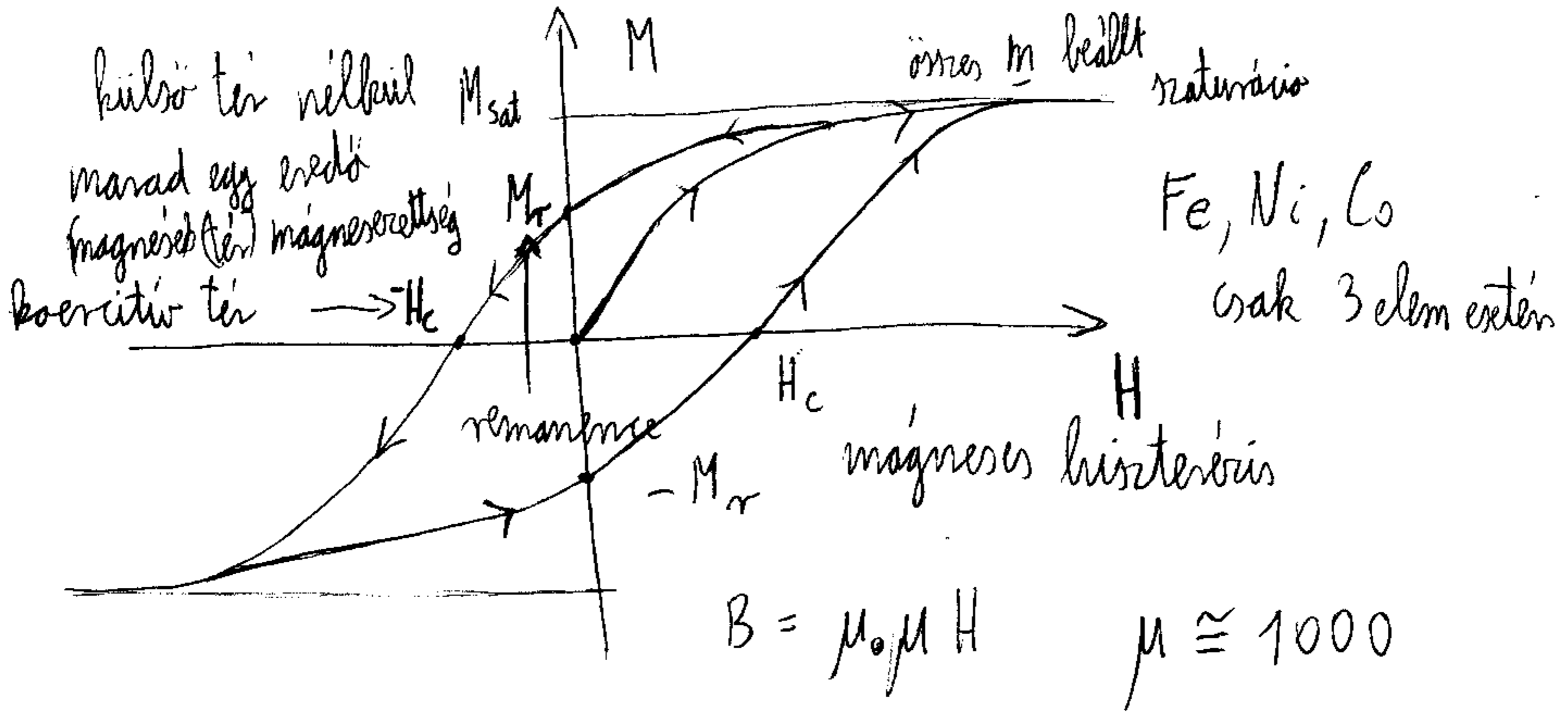
→ Langevin-formula közelítés

$$\chi_m^{\text{para}} = \frac{C}{T}$$

χ_m^{dia} nem függ a hőmérséklettől

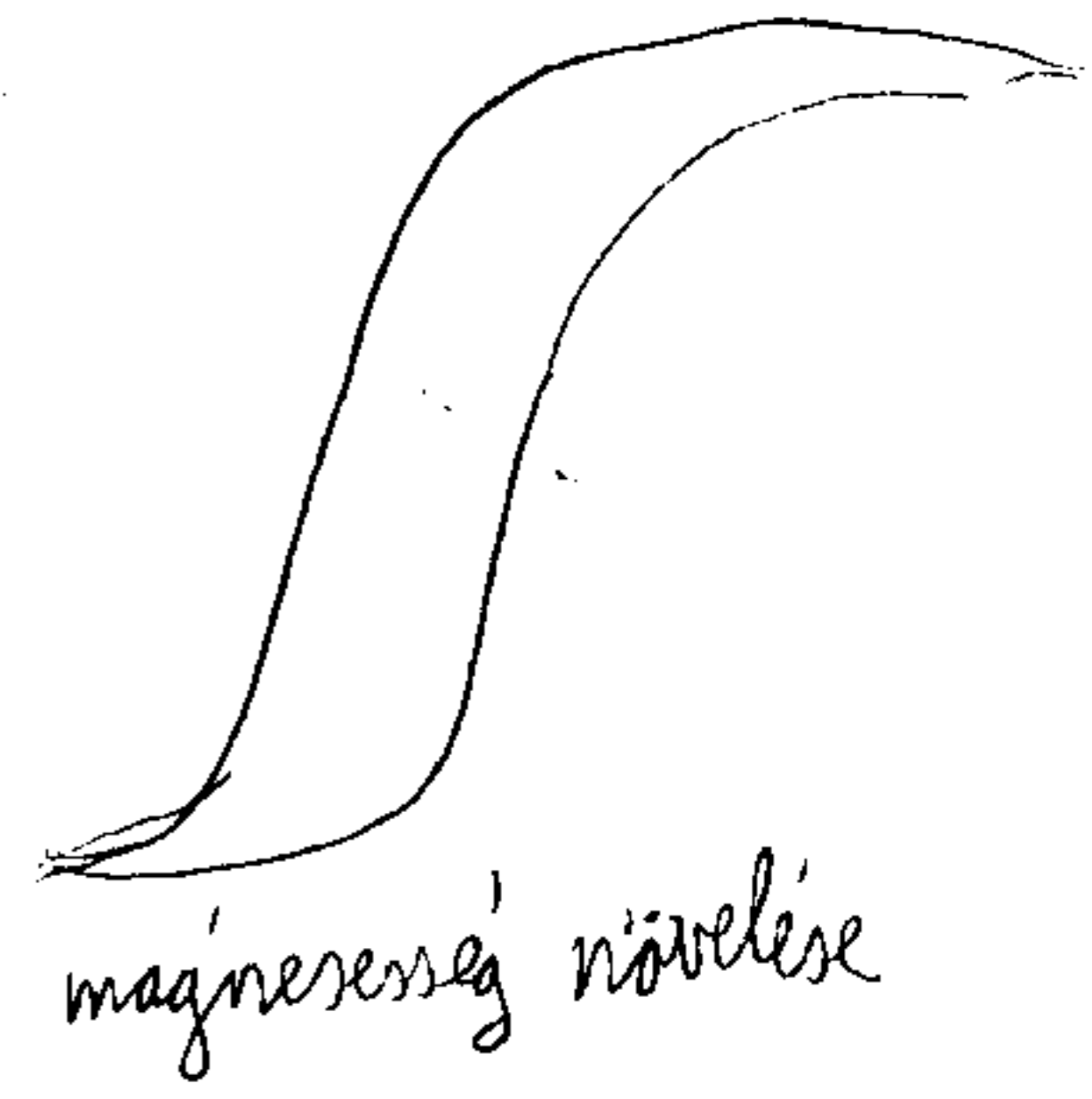
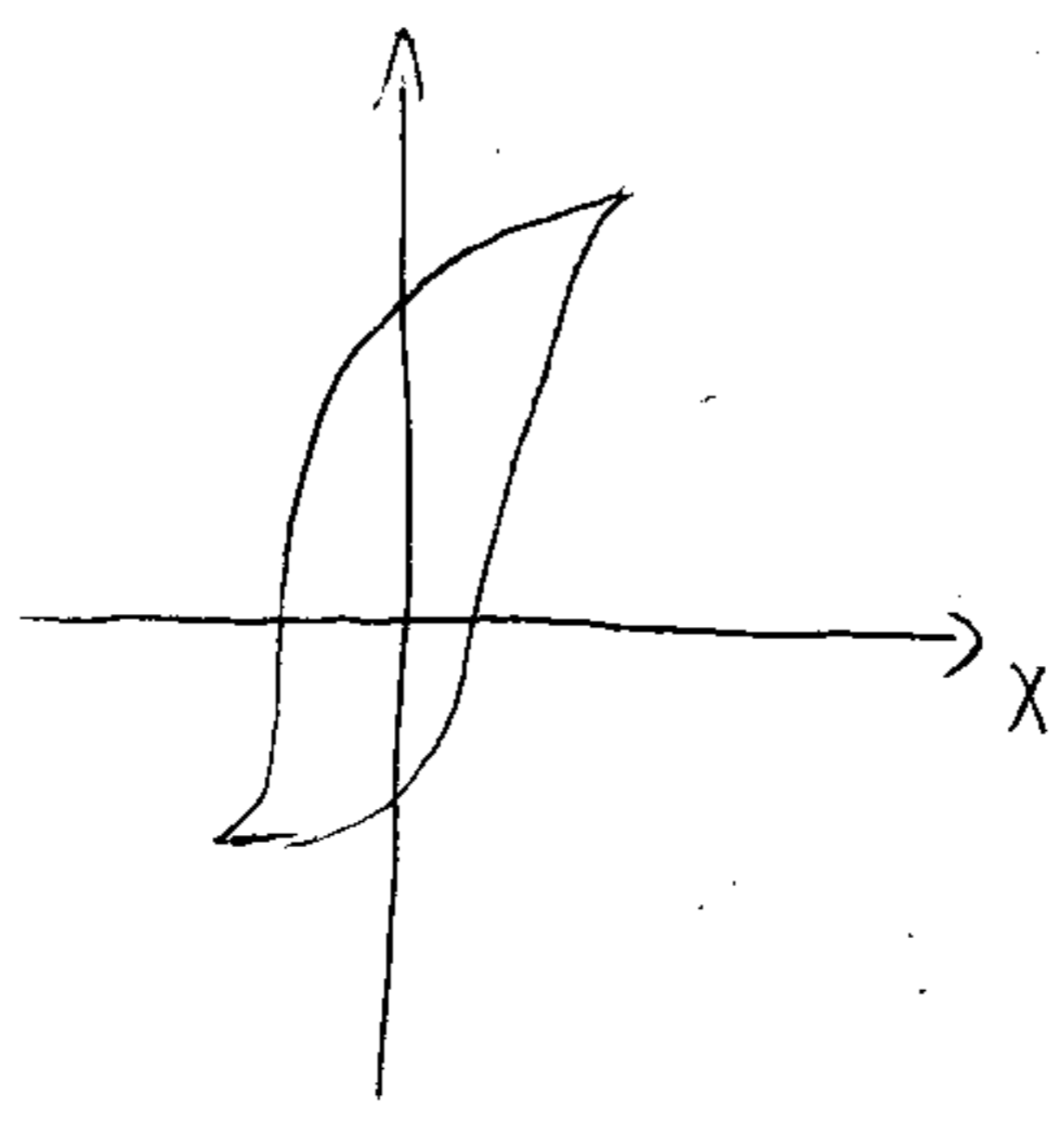
c, Ferromágnesesség: vas, nikkel, kobalt, átvözetek (csak dia- és paramágneses anyagokból)

(vas) kollektív tulajdonság



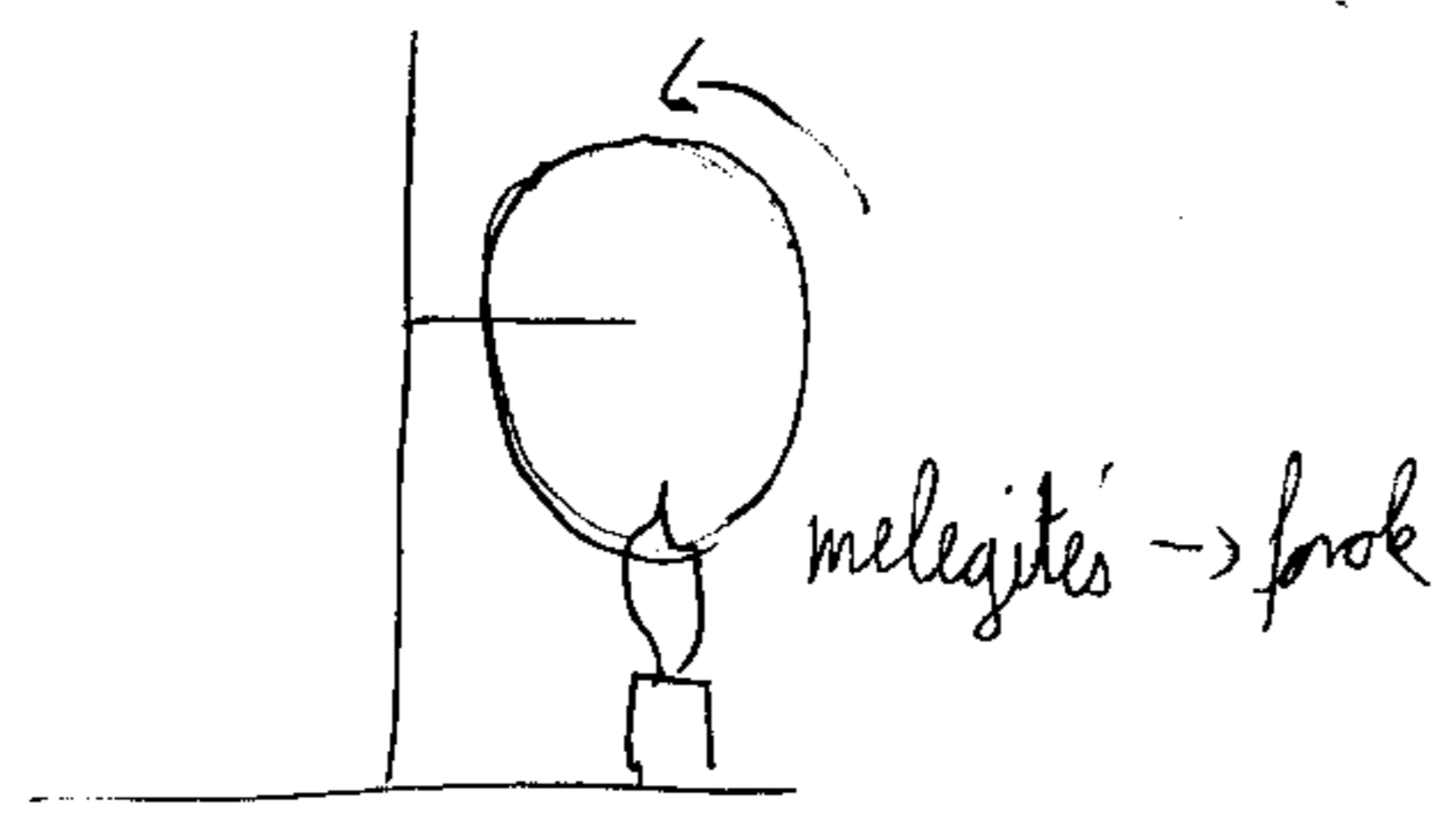
Histerézis : histerézis - görbe

vasmag \rightarrow váltóáram \rightarrow U ind



Curie - körök Nikkel - körök

melegített tartomány \rightarrow paramágnessé válik



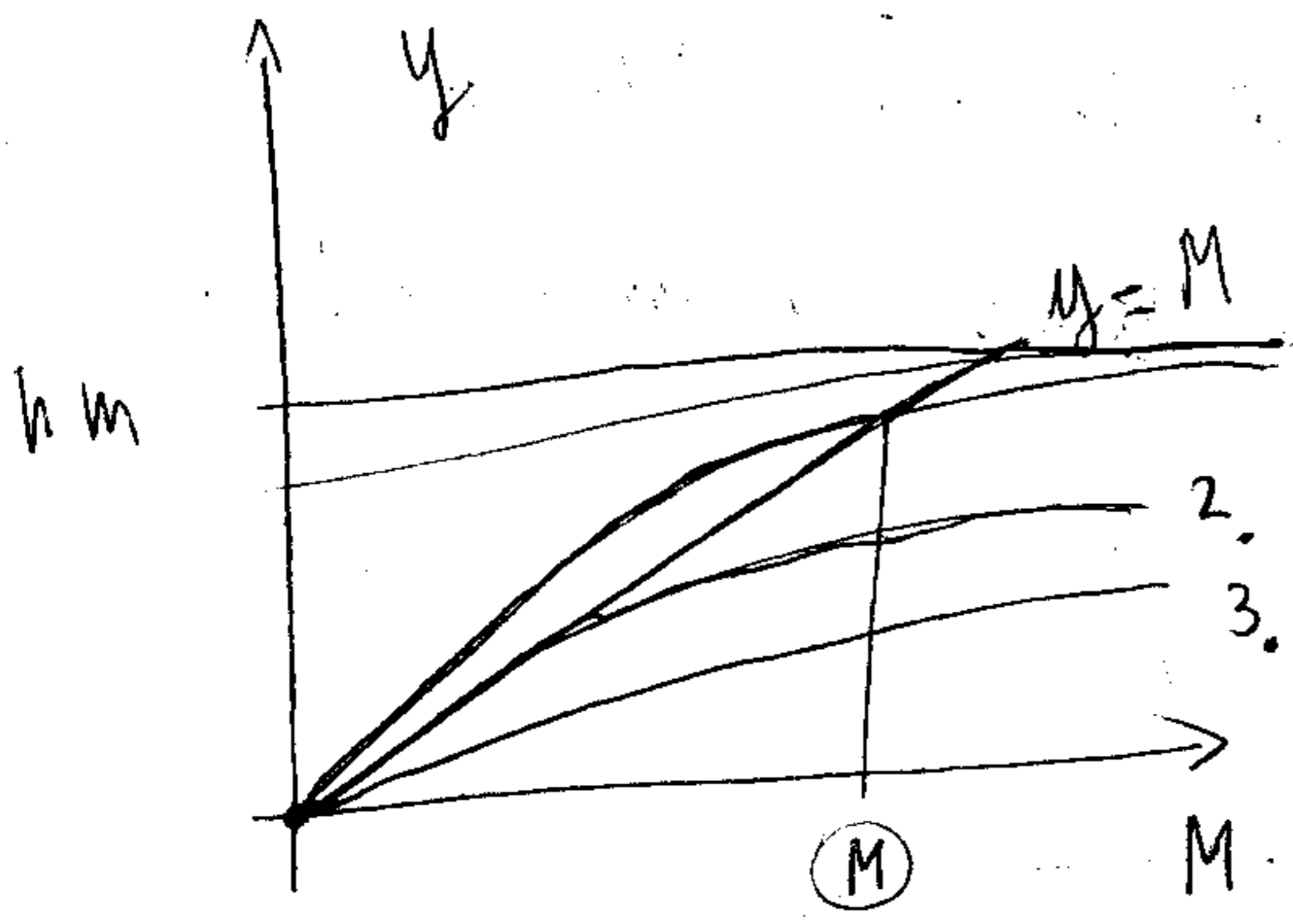
Weiss - féle átlagter elmélet (1907)

kvant. mecha : kiseneredési köles hat

$$B_{ml} = \lambda M$$

$m \rightarrow$ éri a közelítőle lévő m -ek hatását

$$M = n m \tanh\left(\frac{m B_k}{kT}\right) = n m \tanh\left(\frac{m \lambda m}{kT}\right)$$



$$y = n m t h \frac{m \lambda M}{k T}$$

meredekség: $n m \cdot \frac{m \lambda}{k T} = \frac{n m^2 \lambda}{k T}$

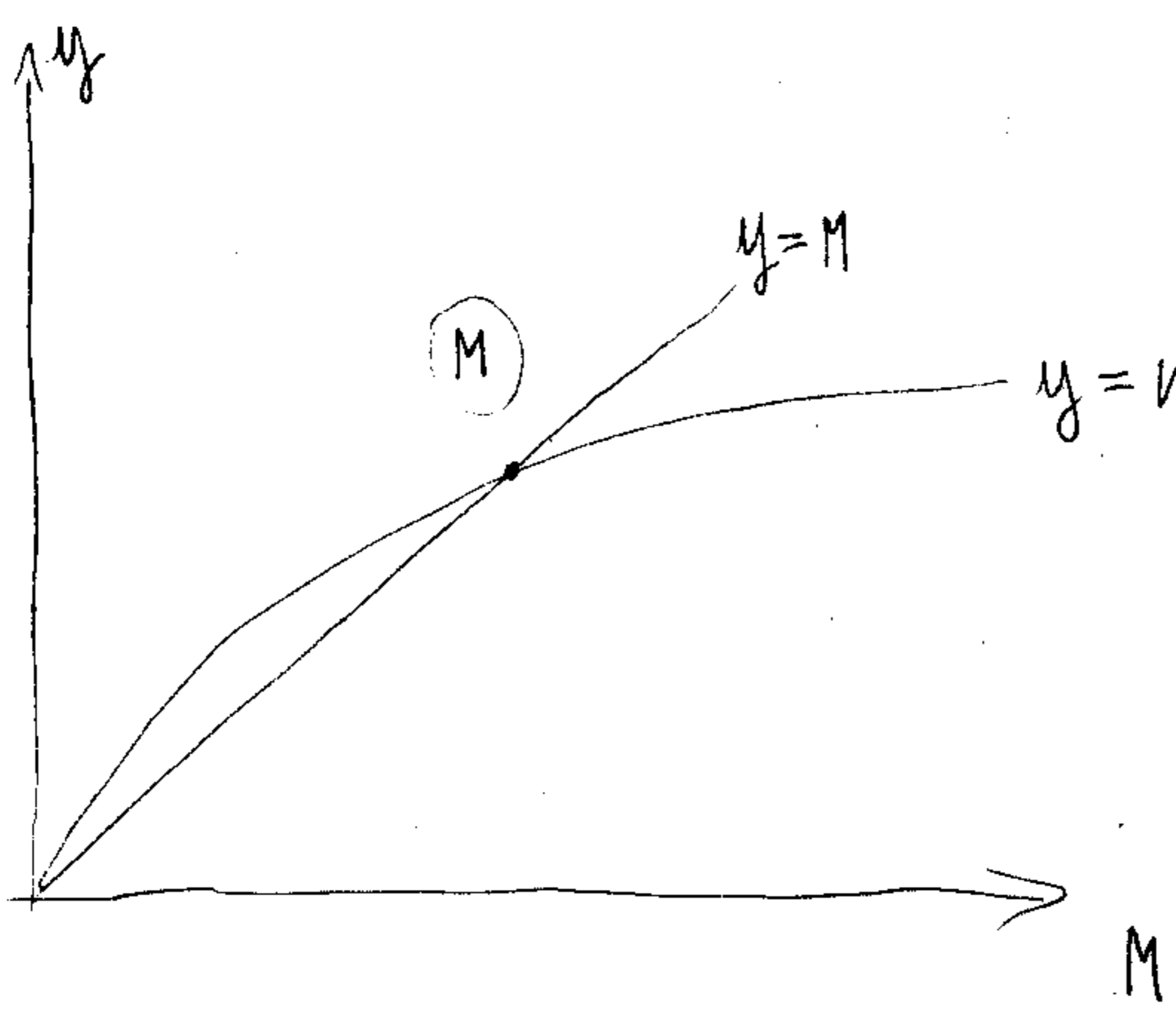
3 eset:

$$2, \quad T_c = \frac{n m^2 \lambda}{k}$$

1, $T < T_c \rightarrow (M)_{\text{reményes}}$

3, $T > T_c$

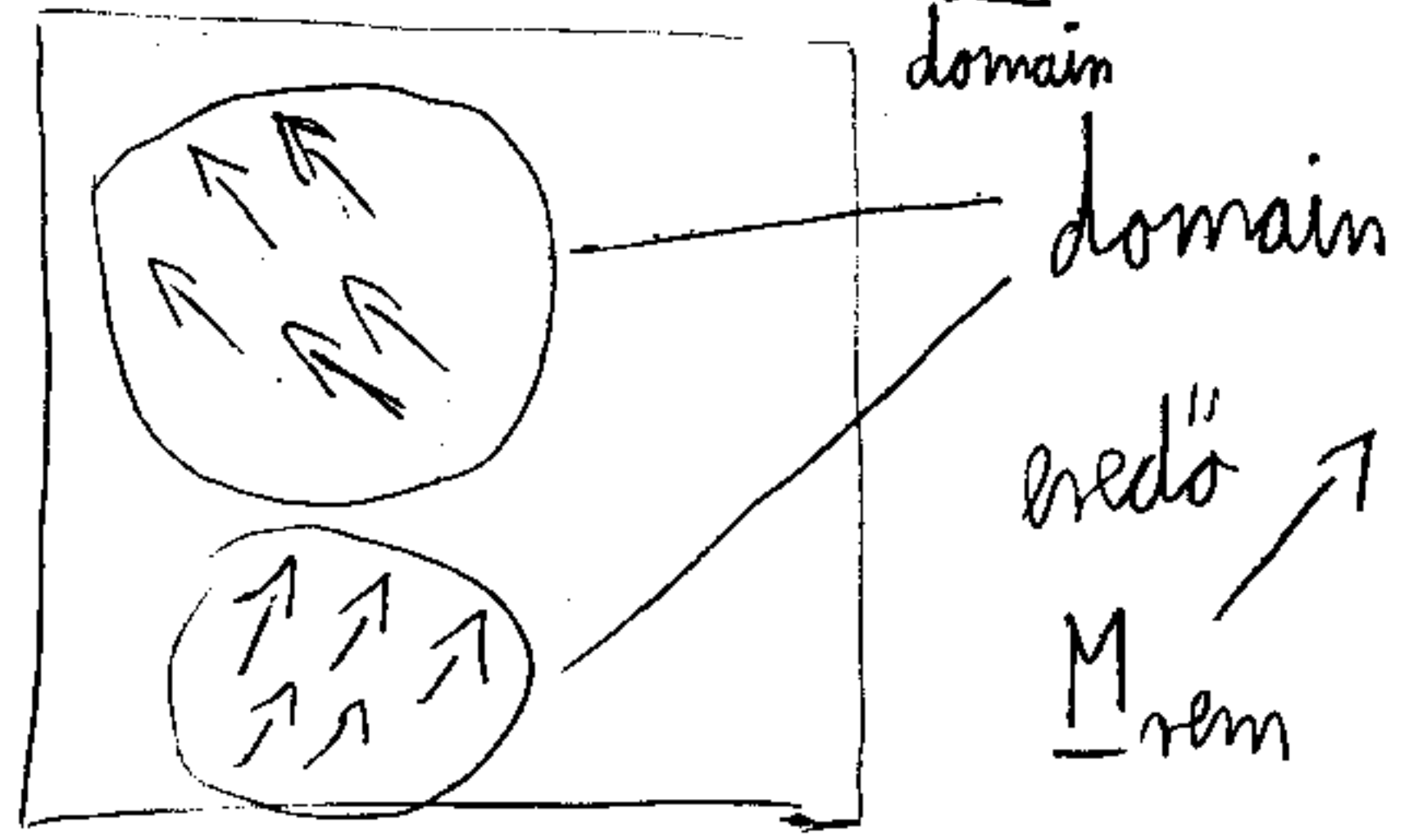
Ismétlés: $B_{\text{mol}} = \lambda M$ rossz alapfeltevés \rightarrow jó eredmény



Energiaminimumra törekvés:

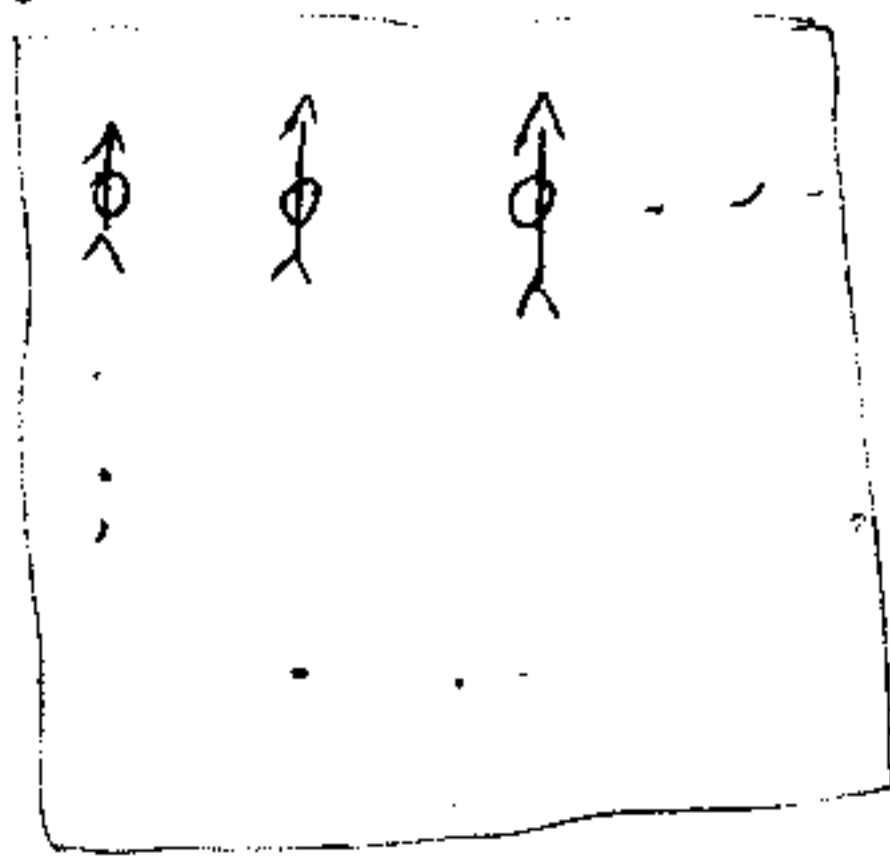
$$E_{pot} = - \underline{m} \cdot \underline{B}$$

kristályszerkezet nem tökéletes
 ↳ nem mind párhuzamos egymással

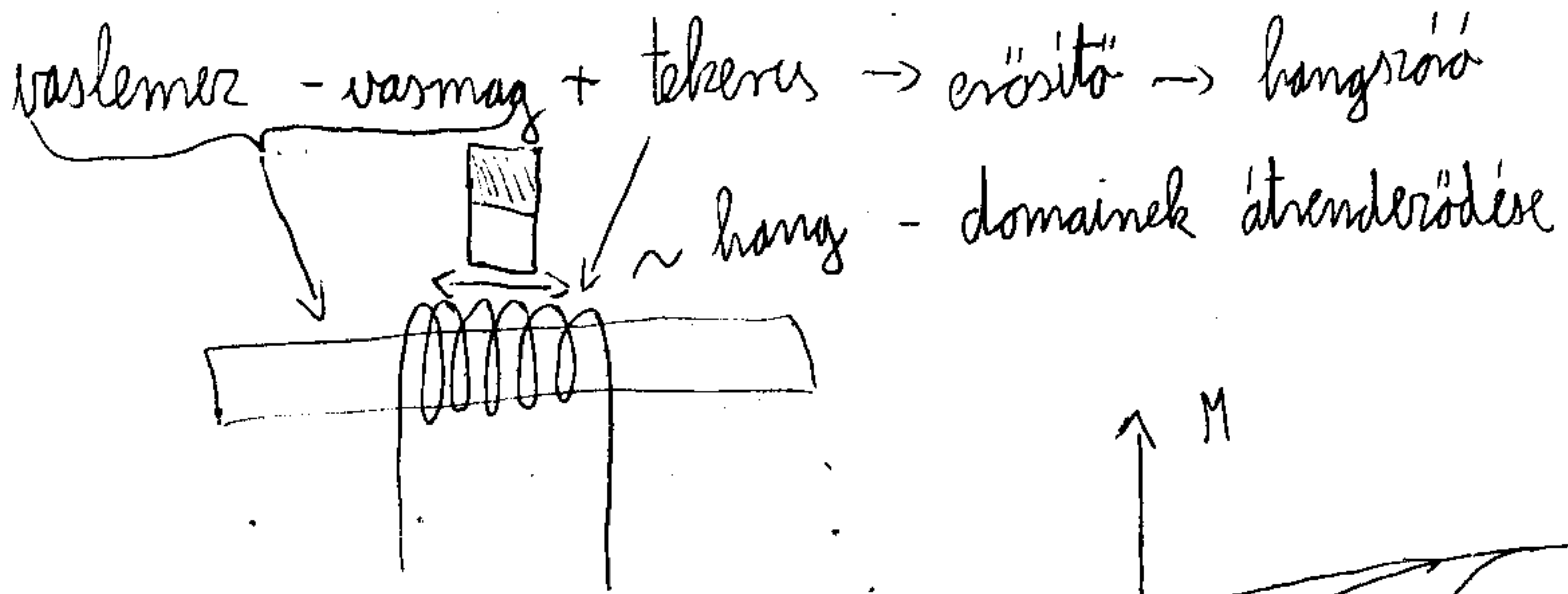


párhuzamosan állnak → E_{pot} min.
 ↳ "ideális" esetben ($T=0K$)

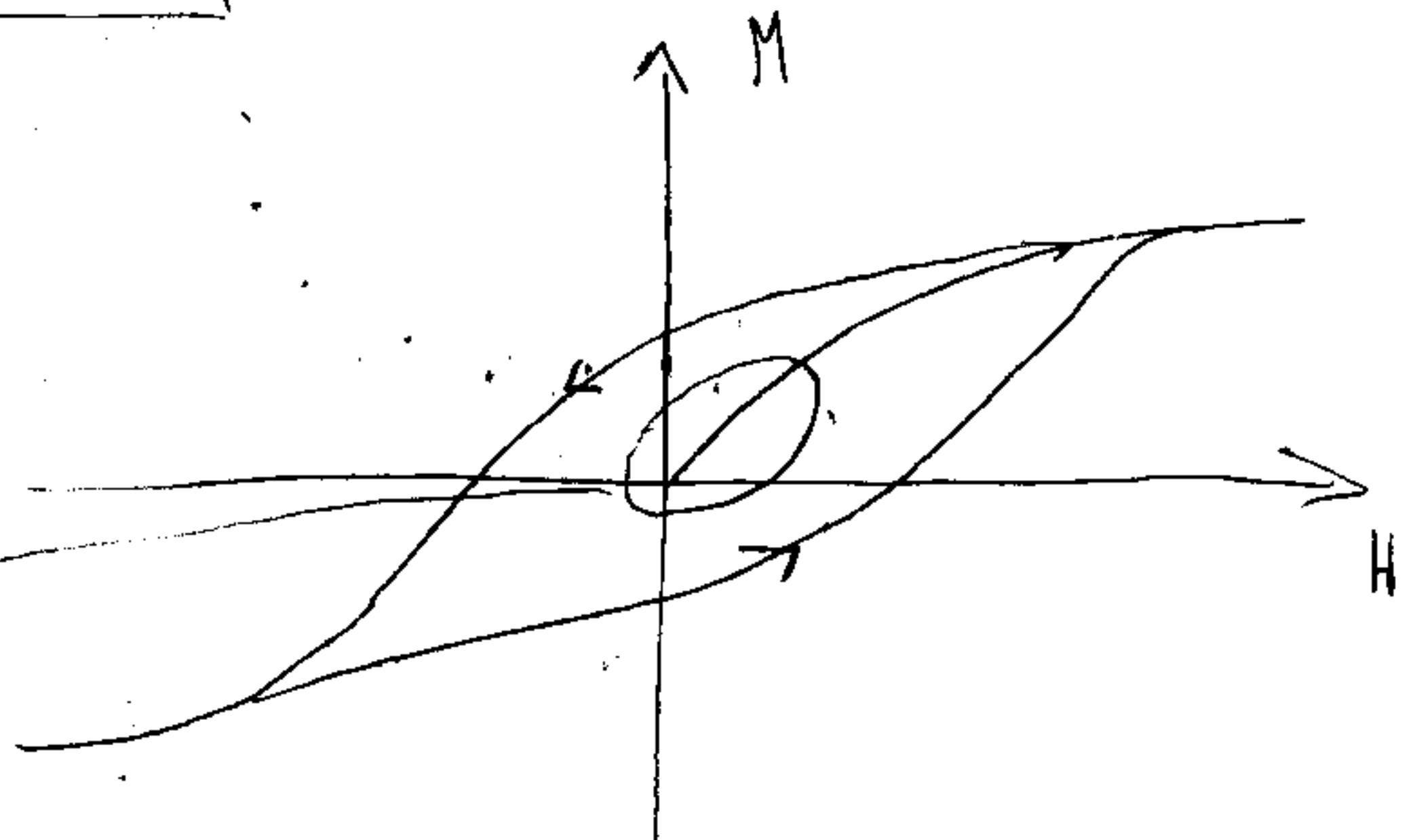
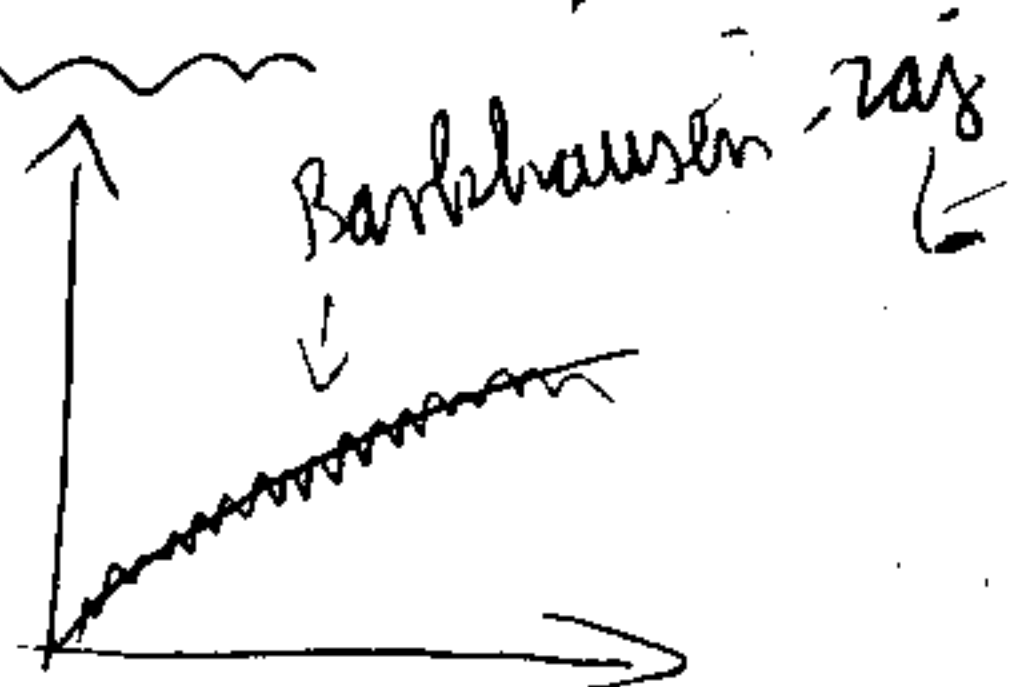
modell: kis mágnesekből



kísérlet: Barkhausen - effektus
 - zaj



magyarázat:



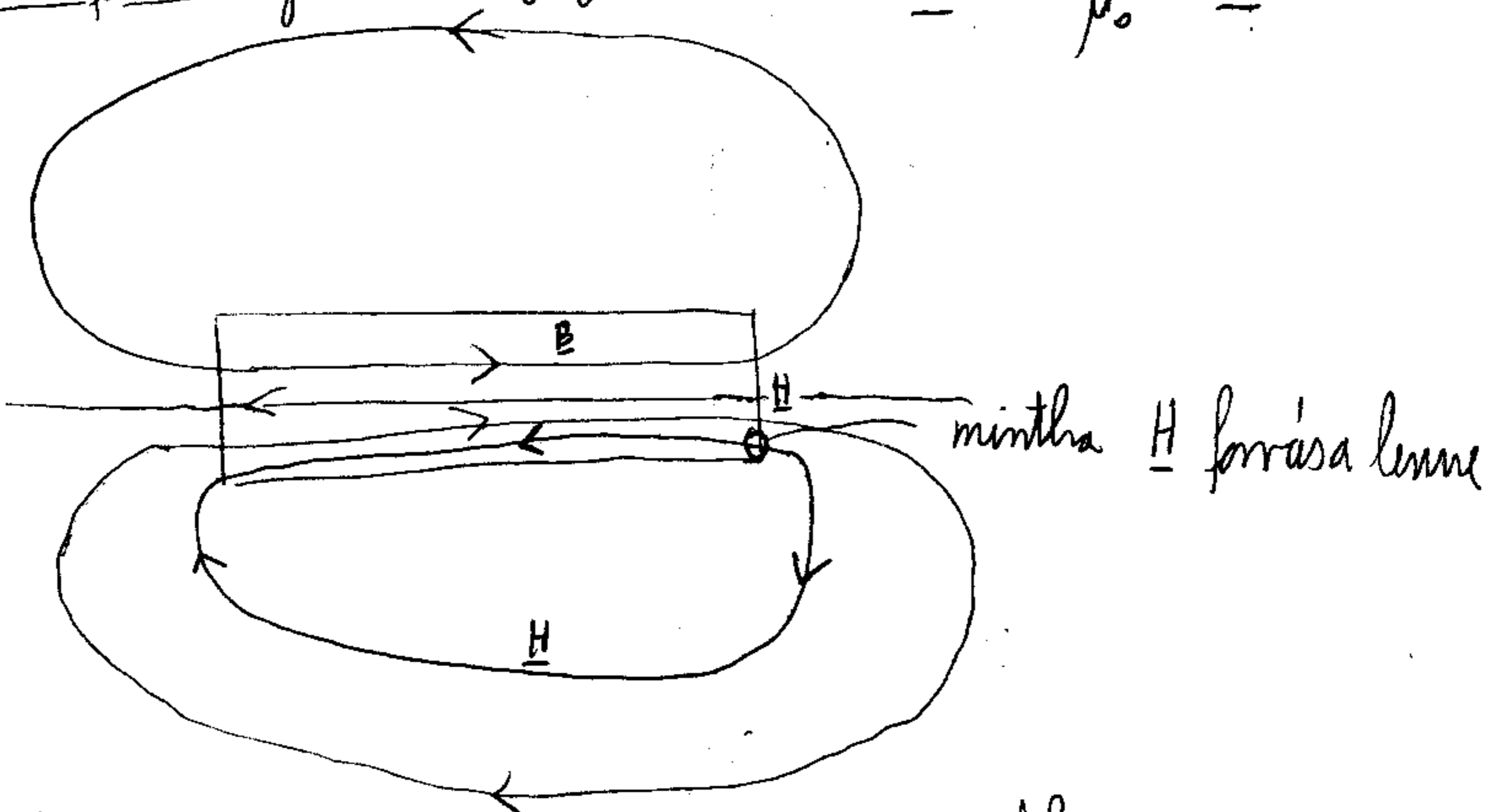
Antiferromágneses anyagok: $M = 0$ eredő mágnesesség

$\uparrow\downarrow \uparrow\downarrow \uparrow\downarrow$ nem statisztikusságból adódó nulla

Ferromágneses anyagok: $M \neq 0$

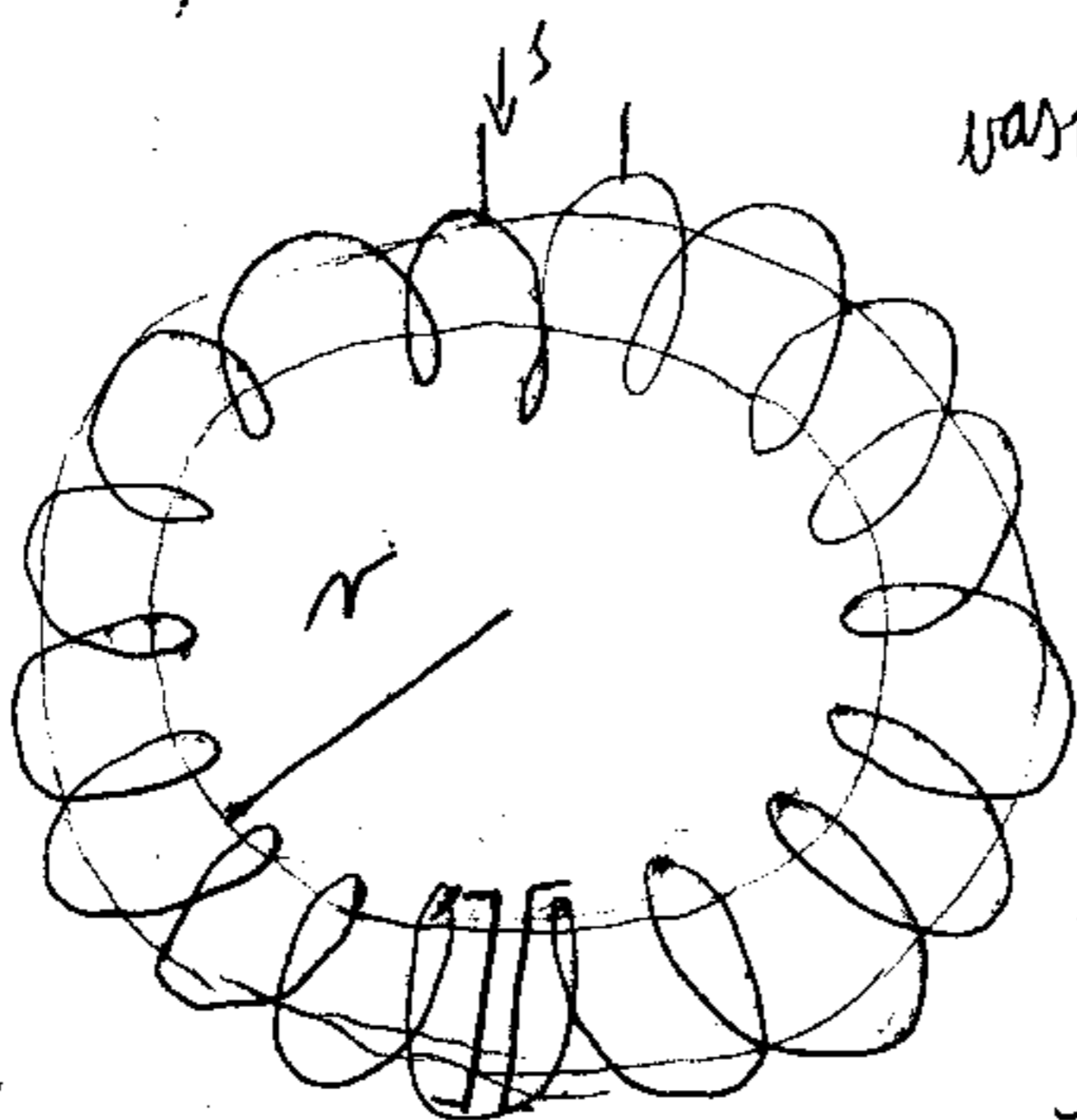
Antiferromágneses anyagok: $\uparrow\downarrow \uparrow\downarrow \uparrow\downarrow$

Erővonalak ferromágneses anyagban: $\underline{H} = \frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{M}$



$B = \mu_0 \mu H$ $\mu_{\text{vas, nikkél, kobalt}} \approx 1000$ vasmagos tekercs

vasmagos torus tekercs



$l = 2\pi r$

$\oint \underline{H} d\tau = \sum_i I_{i, \text{sz}} = N \cdot I$

$\int_{\text{res}} \underline{H} d\tau + \int_{\text{vasmag}} \underline{H} d\tau = N \cdot I$

$\frac{B}{\mu_0} \Delta l + \frac{B}{\mu_0 \mu} l = N \cdot I$

$$B \left(\frac{\Delta l}{\mu_0} + \frac{l}{\mu_0 \mu} \right) = N \cdot I$$

$$B = \mu_0 \frac{N I}{L}$$

$$B \frac{\mu_0}{L} \left(\frac{\Delta l}{\mu_0} + \frac{l}{\mu_0 \mu} \right) = \underbrace{\frac{\mu_0 N I}{L}}_{B_0}$$

$$\frac{B}{B_0} = \frac{1}{\frac{\mu_0}{L} \left(\frac{\Delta l}{\mu_0} + \frac{l}{\mu_0 \mu} \right)} = \frac{1}{\frac{\Delta l}{L} + \frac{1}{\mu}} \approx \frac{1}{1000}$$

ha

$$\frac{\Delta l}{L} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{1000}$$

↑ értékes

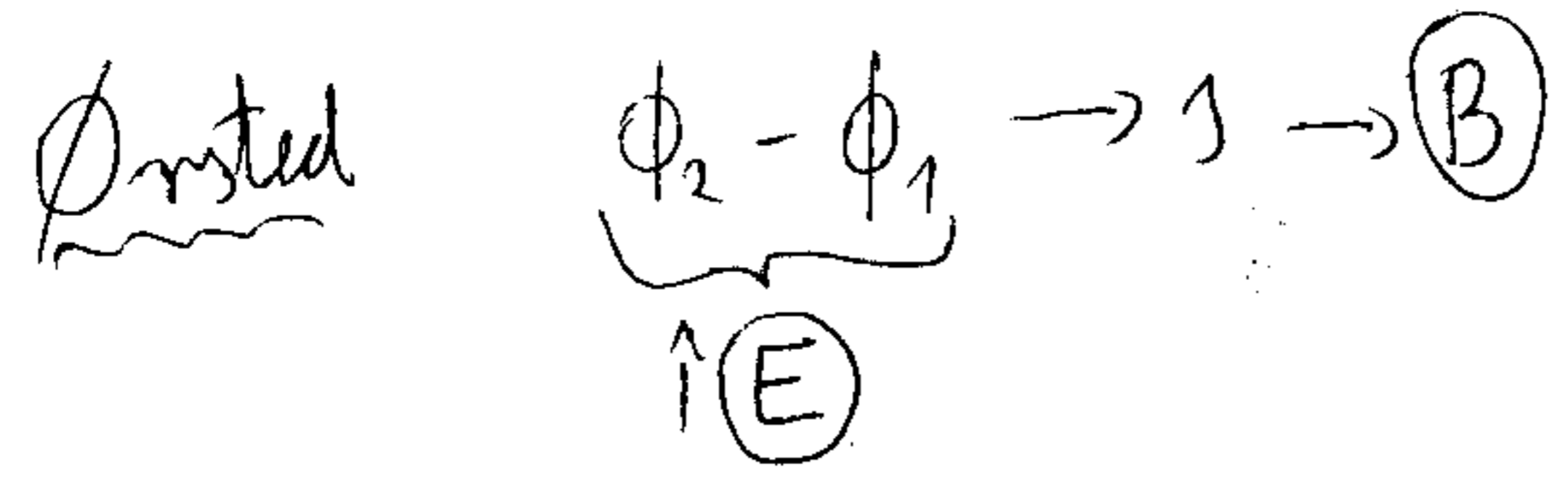
kísérlet: tekercs + vasmag → elektromágnes



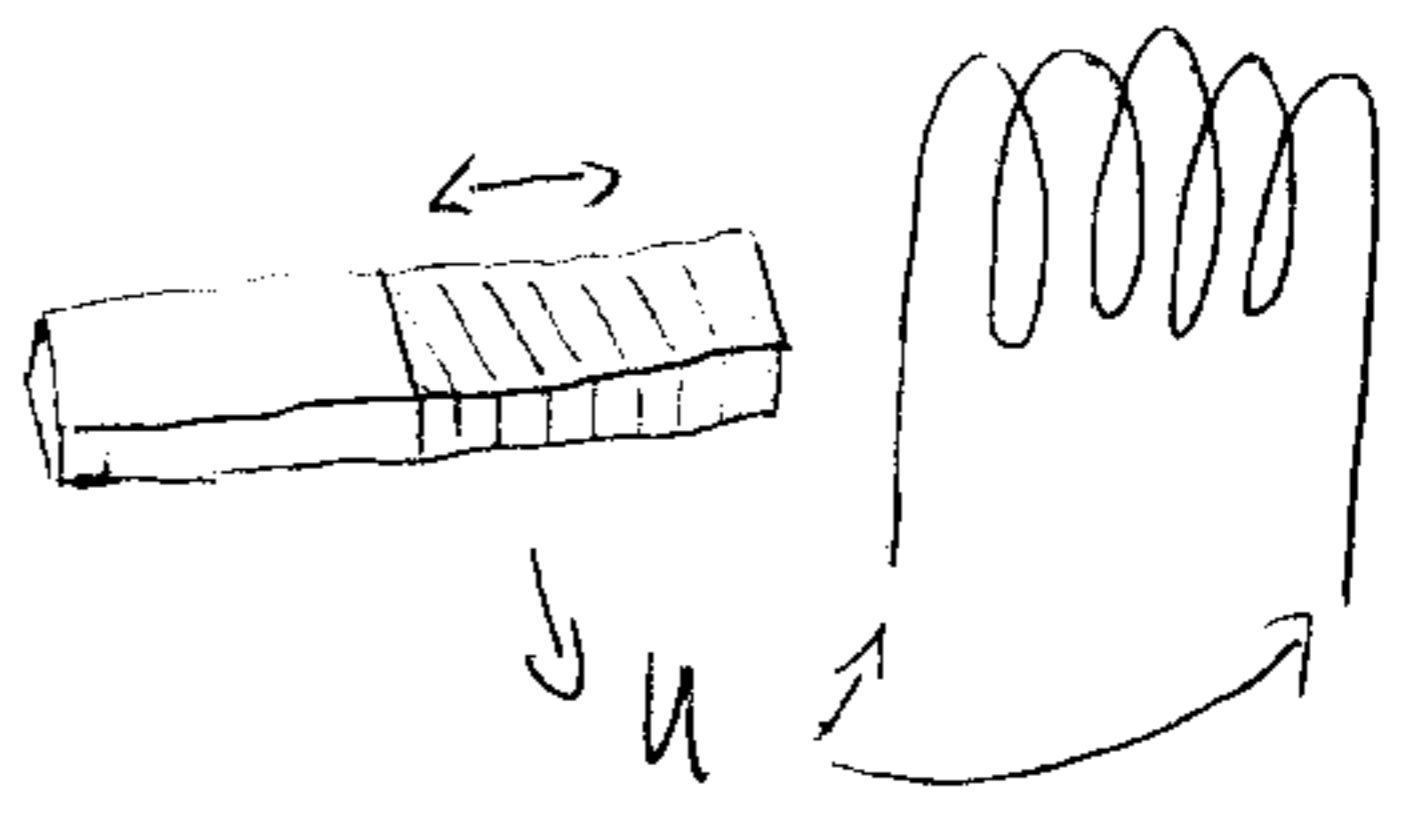
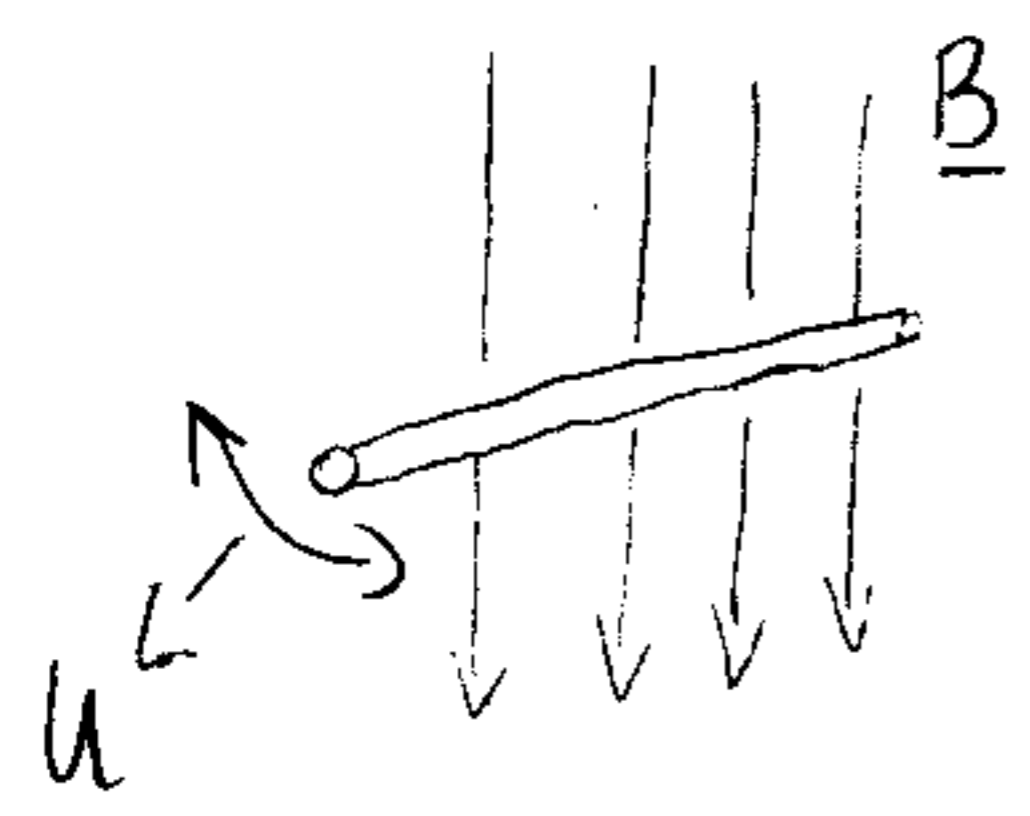
Δl → nem bírja el a súlyt

Elektromágneses indukció

- Faraday - ismerte az Oersted kísérletet
 - ↳ feltételezte az e.m. indukciót



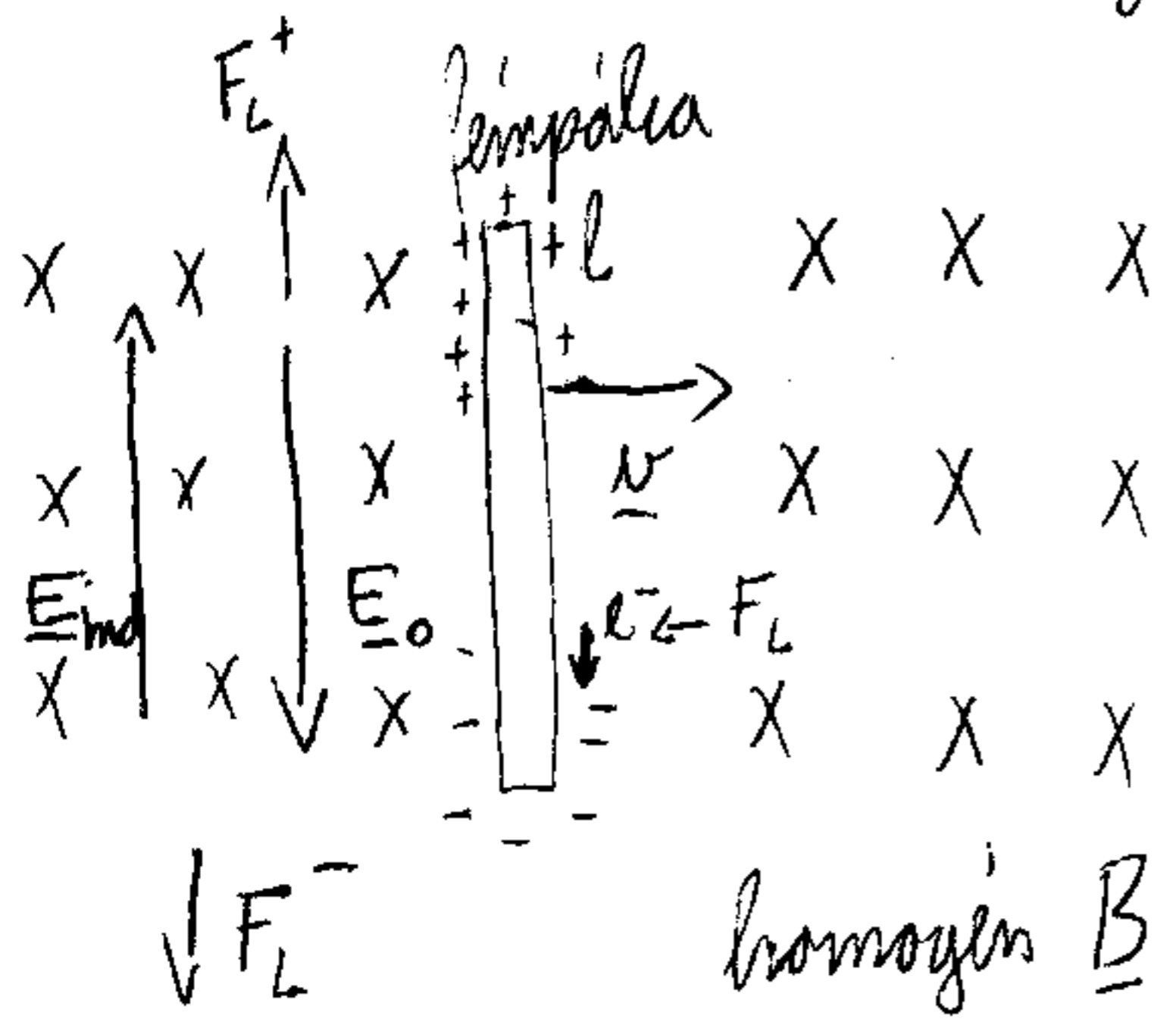
Faraday: vajon $B \rightarrow E$? $\leftrightarrow U \leftrightarrow \text{I}$



U függ a mozgás sebességétől

feszültség előjele függ: mágneses tér irányától

mágneses tér megfordítása \rightarrow feszültség előjelet vált



$$F_L = Q (\underline{v} \times \underline{B})$$

$$\underline{E}_0 \rightarrow Q \underline{E}_0 + Q (\underline{v} \times \underline{B}) = 0$$

nincs további nettóválasztás

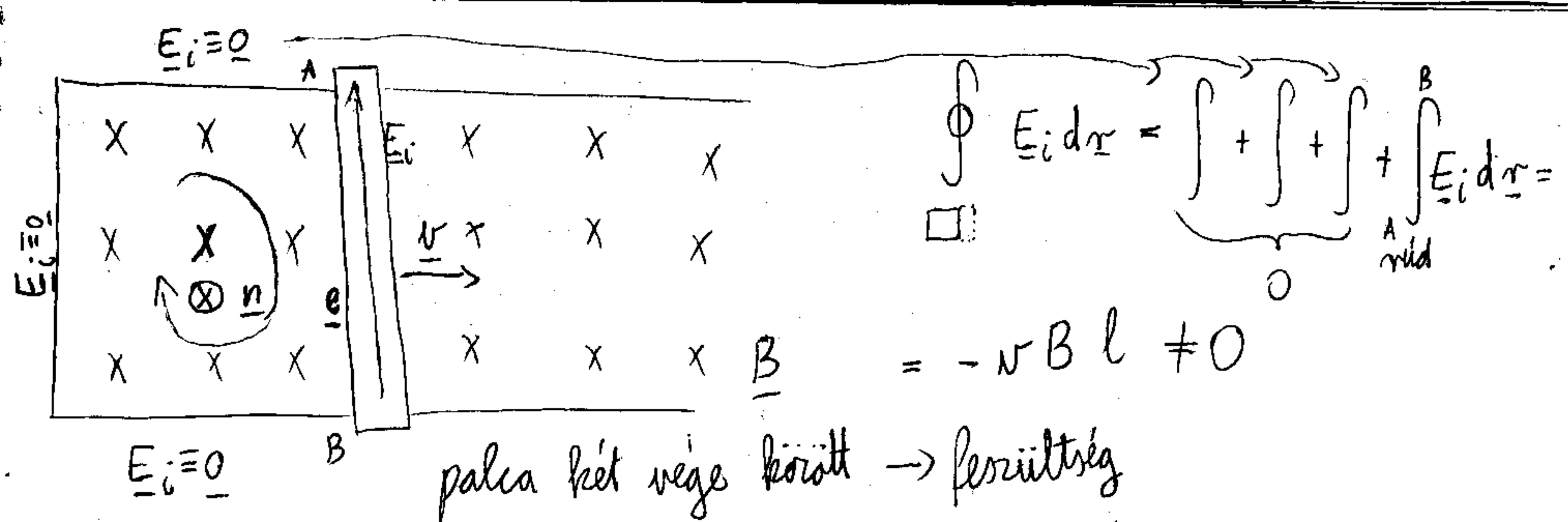
homogén \underline{B}

$$\underline{E}_{ind} = \underline{v} \times \underline{B}$$

$$\underline{E}_0 + \underline{v} \times \underline{B} = 0$$

$$\dim(\underline{v} \times \underline{B}) = \dim(\underline{E}_0)$$

↳ indukált elektromos tér

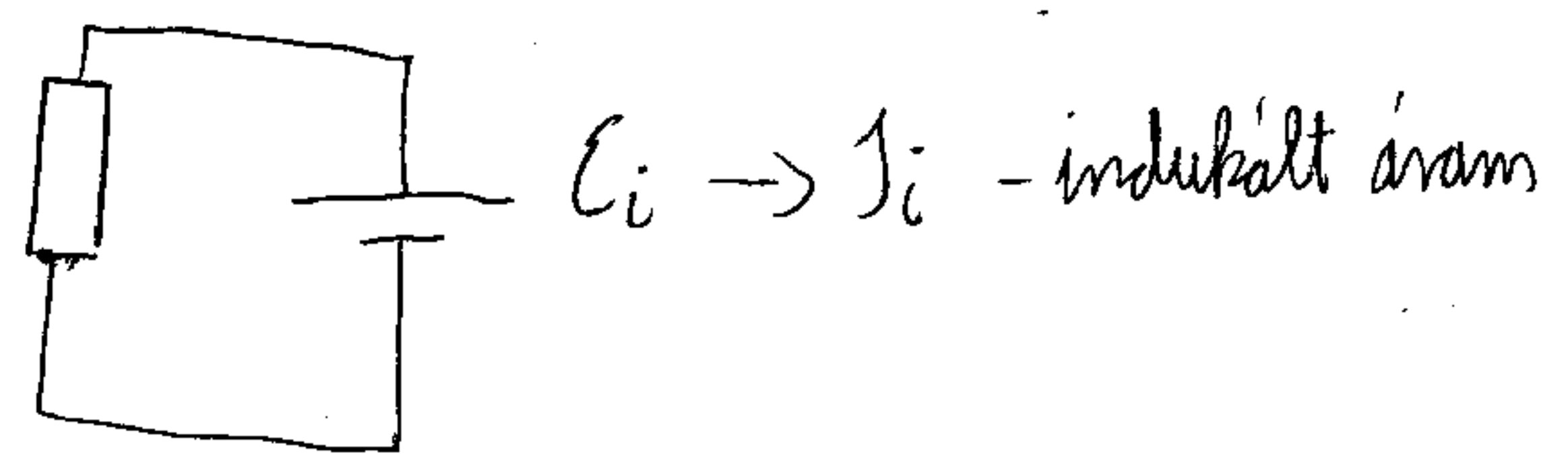


$\underline{E}_i = -vBl$

Neumann-törvény

indukált elektromotoros erő

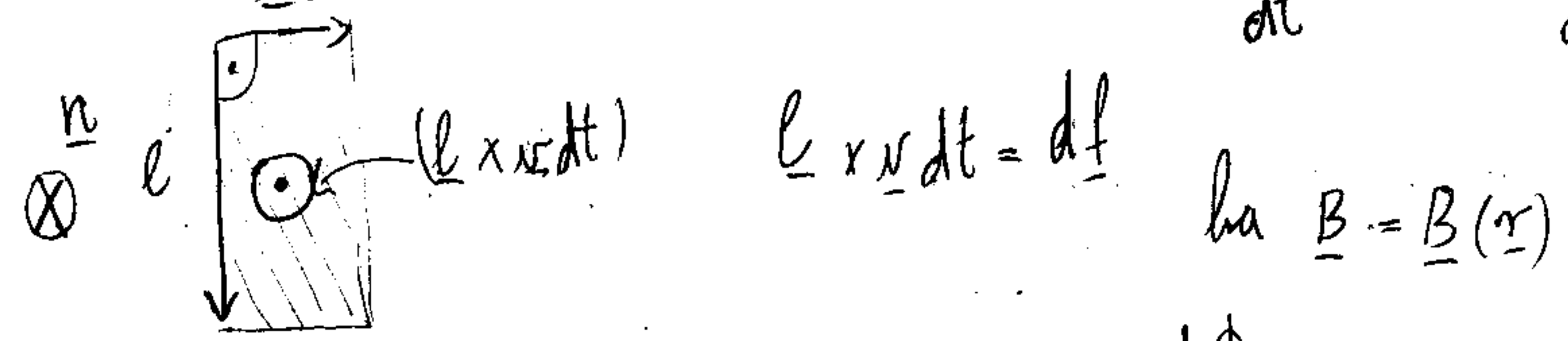
kísérlet: fémpalca tükros galvanométer
 ↓
 Föld mágneses terét használjuk \sim drót rögzíthetőség



$\underline{I}_i = \frac{\underline{E}_i}{R}$

↑
 mágneses fluxus

$\oint \underline{E}_i d\underline{r} = (\underline{v} \times \underline{B}) \underline{l} = (\underline{l} \times \underline{v}) \underline{B} = \frac{d\underline{\Phi}}{dt} \underline{B} = -\frac{d\underline{\Phi}}{dt} \underline{B} \ominus$



$\Phi = \int \underline{B} d\underline{\Phi} \ominus -\frac{d\Phi}{dt}$

mágnesi indukció

Faraday: $\underline{I}_i = \frac{-1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$

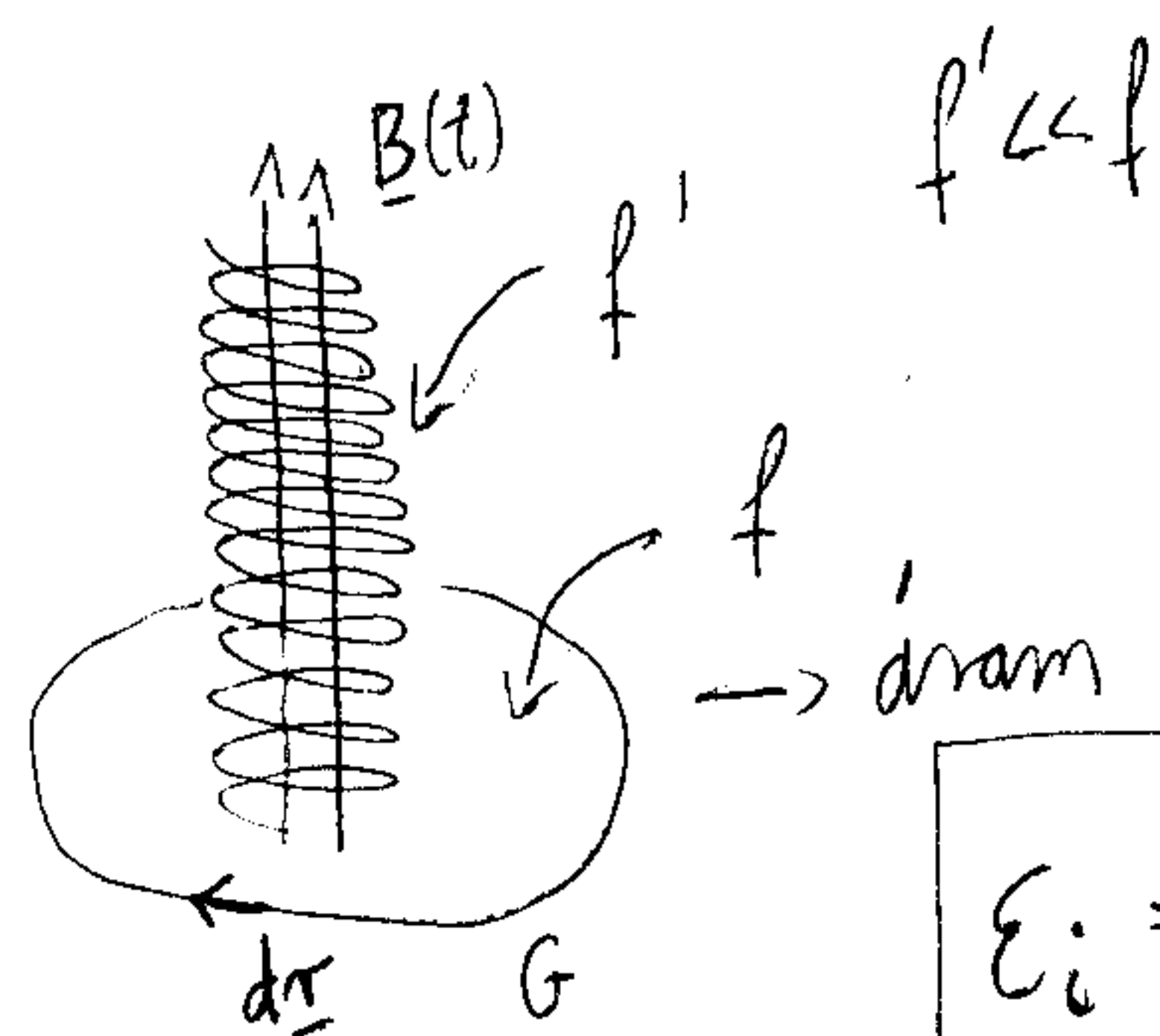
$\oint \underline{E}_i d\underline{r} = -\frac{d}{dt} \int \underline{B} d\underline{\Phi}$

$\square G(t)$

$\square F(t)$ mozgó palca sírja

kísérlet:

árammérő, ellenállás, teheres
 áram \rightarrow teheres \rightarrow mágneses tér
 tolóellenállás \rightarrow áram nagyságának változtatása \rightarrow
 \rightarrow változó mágneses mező \rightarrow másik teheresben
 feszültség indukálódik



$$\mathcal{E}_i = \oint \underline{E}_i d\vec{r}$$

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

nyugalmi
indukció

$$\mathcal{E}_i = \oint_{G \text{ áll}} \underline{E}_i d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \int_{F \text{ áll}} \underline{B} d\vec{f} = - \int_F \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} d\vec{f}$$

ha a hurok és a hurok által határolt terület időben állandó

ha egyszerre van jelen mozgási és nyugalmi indukció:

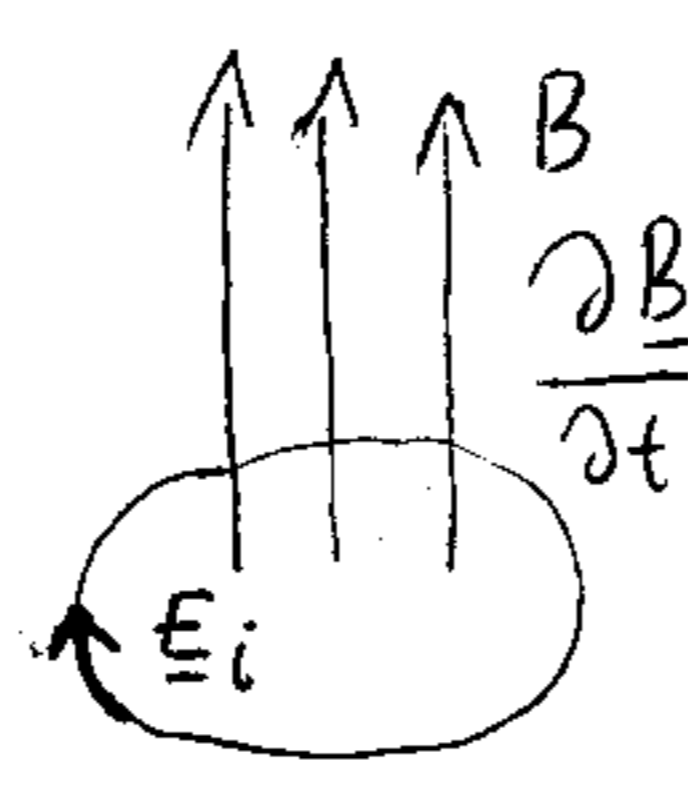
$$\mathcal{E}_i = \oint_{G(t)} \underline{E}_i d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \int_{F(t)} \underline{B} d\vec{f} - \int_F \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} d\vec{f} = - \frac{d}{dt} \left(\int_{F(t)} \underline{B} d\vec{f} \right) + \int_F \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} d\vec{f}$$

$$\oint_G \underline{E} d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \int_F \underline{B} d\vec{f}$$

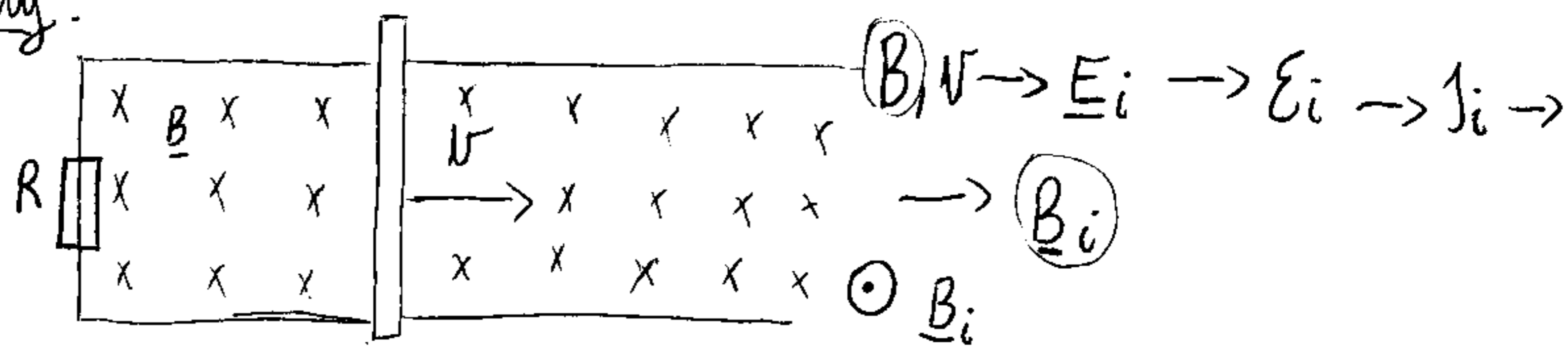
ha nincs retatiba

$$\epsilon_i = \int_G \underline{E} d\underline{r} = - \frac{d}{dt} \int_F \underline{B} d\underline{f} \rightarrow \int_{G(t)} (\underline{v} \times \underline{B}) d\underline{r} + \int_F \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} d\underline{f}$$

$$\epsilon_i = \int_G \underline{E} d\underline{r} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

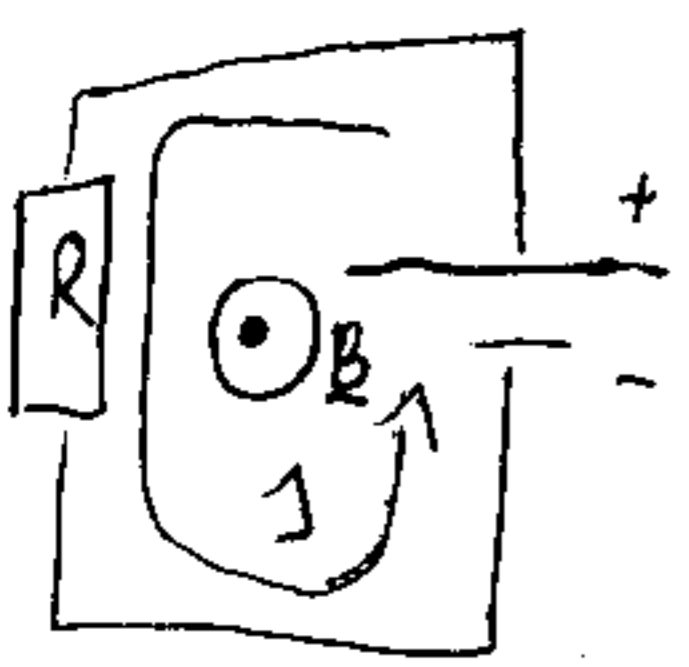


Lenz - törvény:



Olyan indukált mágneses tér jön létre, ami akadályozza az Φ indukáló hatást.

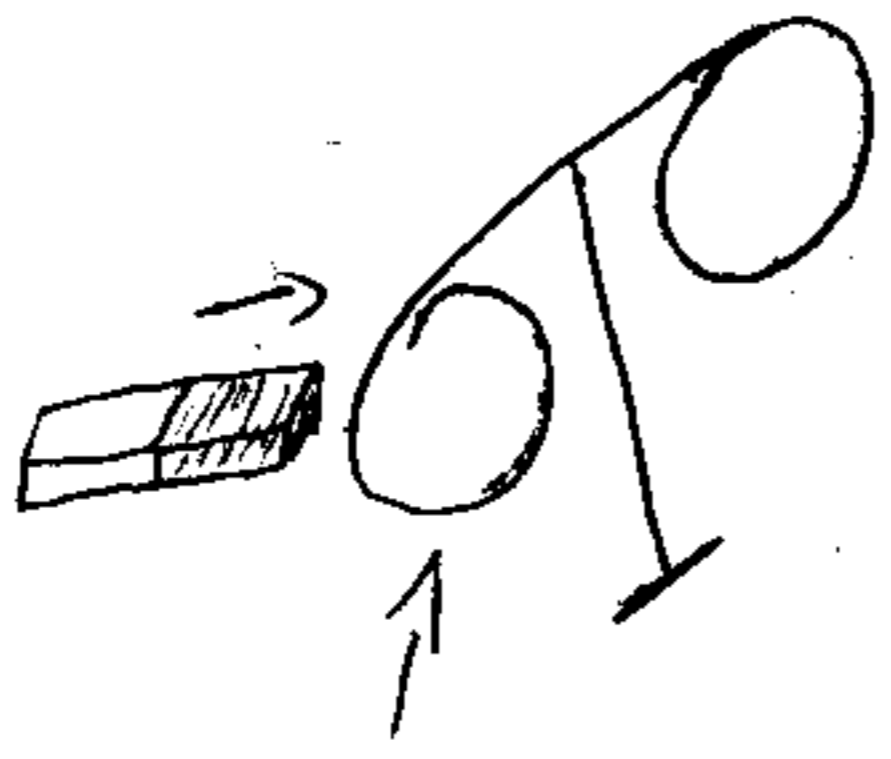
felületek \rightarrow örvényáramok



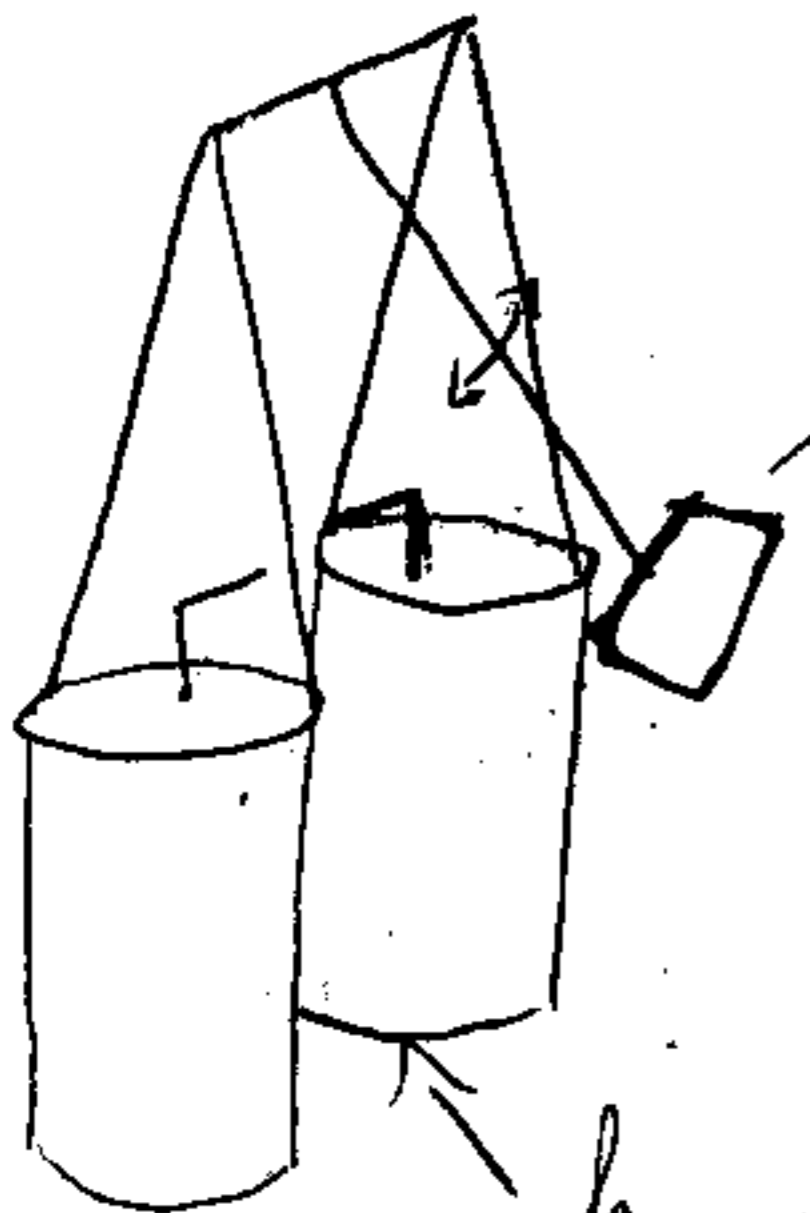
Hűsítés:

← folyó áram Φ változás mindkét esetben

$d\Phi$ minimalizálni akarja egyült mozg a mágnessel



meg van szelítve \rightarrow nincs áram



I_i nem nagy
 \rightarrow megáll

senmi $+B$

koncentrált mágnesestér



Thomson - ágyú kilóvi a fémkarkat

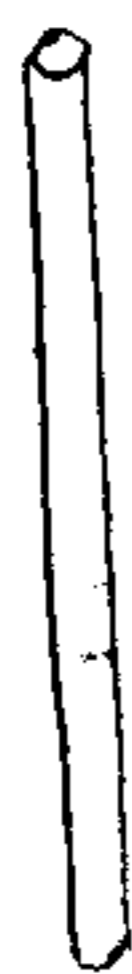
gyors - nagy B változása

leszorítjuk \rightarrow nagy $I \rightarrow$

\rightarrow nagy joule - hő

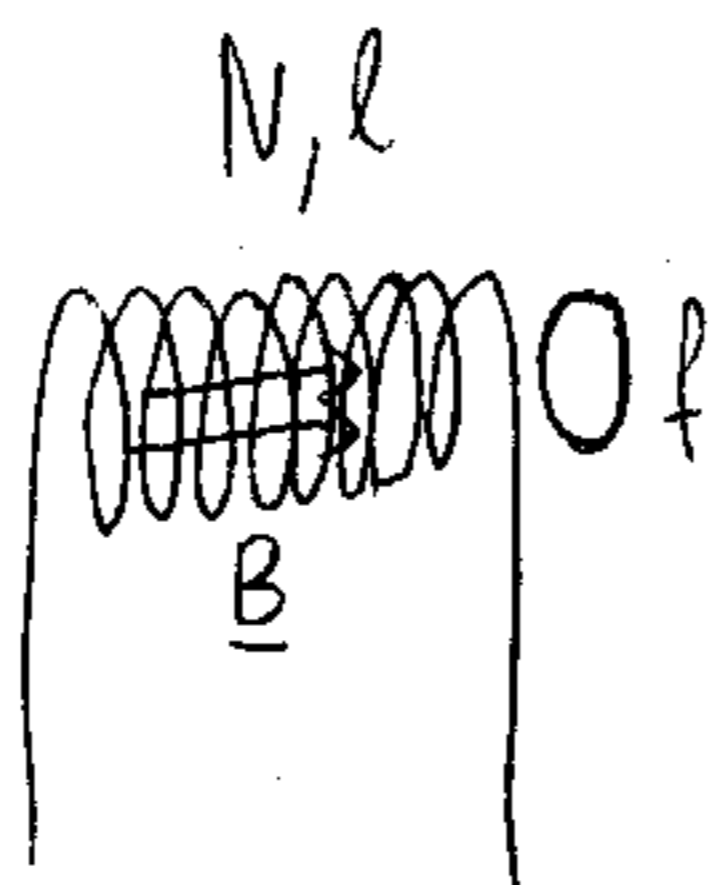
nagy I

rész



részdarabba ^{leszik}, mágnes darabba ^{lessem esik}
 $B, d\Phi \rightarrow \mathcal{E}_i \rightarrow I_i \rightarrow B_i$

Önindukció:



$$\begin{aligned} \Phi &= \int \underline{B} \cdot d\underline{f} = B \cdot N \cdot f = \\ &= \frac{\mu_0 N I}{l} \cdot N \cdot f = \\ &= \frac{\mu_0 N^2 \cdot f}{l} \cdot I \end{aligned}$$

vasmag esetén: $\frac{\mu_0 \mu N^2 f}{l} \cdot I$

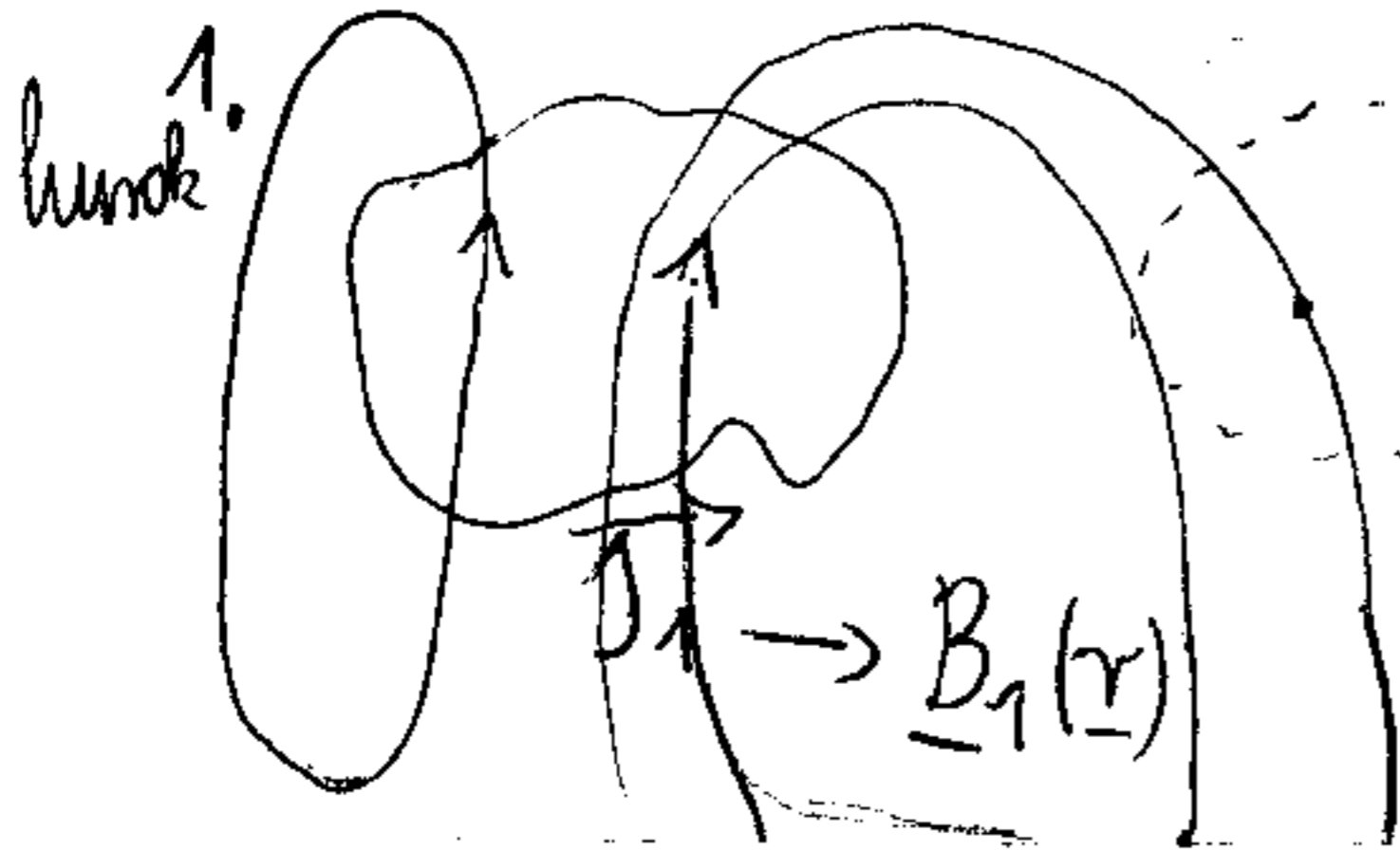
$$\Phi = L \cdot I$$

L: tekercs önindukciós együtthatója

$$[L] = \frac{T \cdot m^2}{A} = \text{Henry} = H$$

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (L \cdot I) = -L \frac{dI}{dt}$$

Mutuos indukció:



2. hurok

$$\Phi_2 \approx I_1$$

$$\Phi_2 = M_{12} I_1$$

$$\Phi_2 \leftarrow B_1 \text{ által} \leftarrow I_1 \text{ által}$$

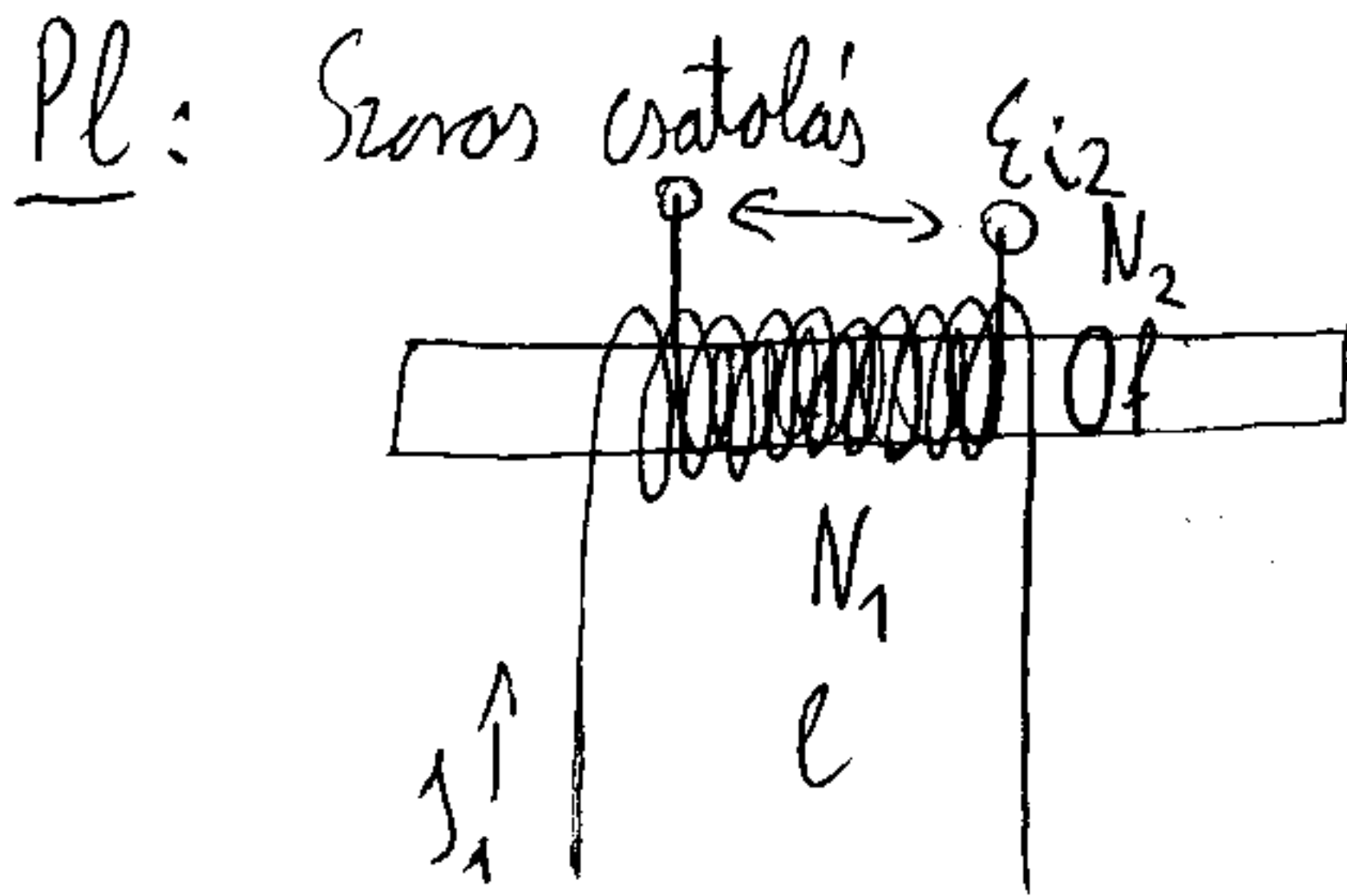
M_{12} : kölcsönös indukciós együttható

$$\Phi_1 = M_{21} I_2 \quad \cdot \quad M_{12} = M_{21} = M$$

M - mérési kell általában

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$



hossz vasmag

$$I_1 \rightarrow B_1 \rightarrow \Phi_1$$

$$I_2 \rightarrow B_2 \rightarrow \Phi_2$$

$$\left(\mathcal{E}_{i2} = -M \frac{dI_1}{dt} \right) \quad \mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d(N_2 \cdot B_2 \cdot l)}{dt}$$

$$= -\frac{d}{dt} \left(N_2 \frac{\mu_0 \mu N_1}{l} I_1(t) \cdot l \right) =$$

$$= - \underbrace{\frac{\mu_0 \mu N_1 N_2 l}{l}}_M \cdot \frac{dI_1}{dt}$$

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

csak szoros csatolásnál

Bekapcsolási jelenségek:

$$\oint \underline{E} \cdot d\underline{r} = 0$$

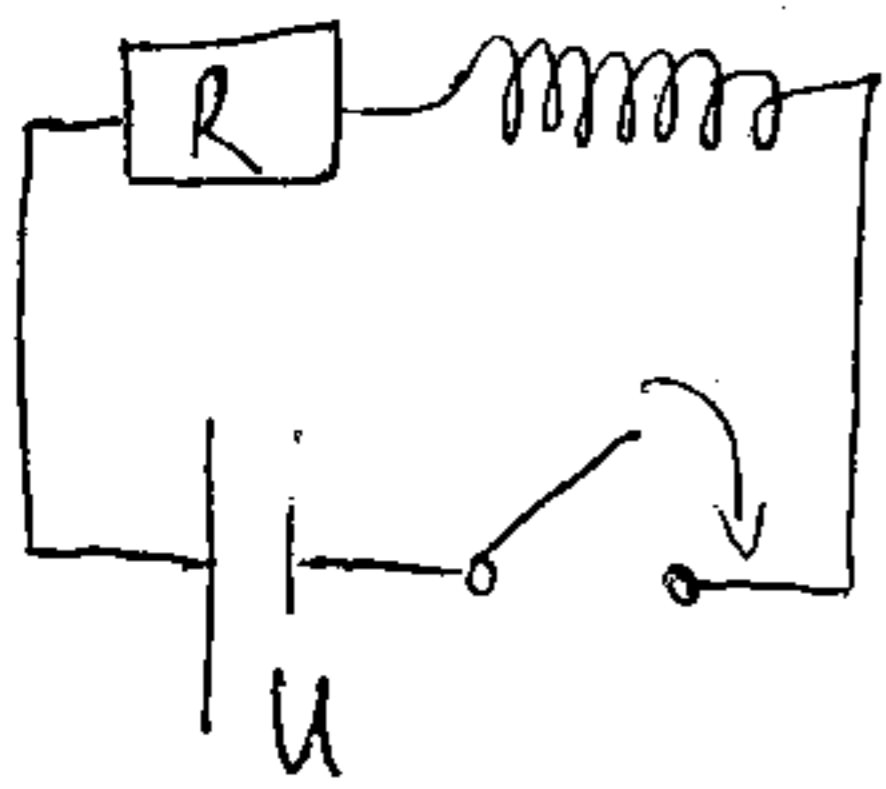
$$\underline{j} = \sigma (\underline{E} - \underline{E}_{idegen})$$

stacionárius eset

$$\sum_k R_k I_k = \sum_j \underbrace{\mathcal{E}_{idegen,j}}_{\text{telep}} \rightarrow \sum_k R_k I_k = \sum_j \underbrace{\mathcal{E}_{id.,j}}_{\text{kémiai el.mot. erő}} - \frac{d\Phi}{dt}$$

kémiai
el.mot. erő

indukált
el.mot. erő



$$Ri = U - L \frac{di}{dt}$$

fluxus változás most csak a tekercsben

$$Ri + L \frac{di}{dt} = U \quad \text{lin. inhom. elsőrendű, elsőfokú}$$

$$i(t) = A + B e^{\lambda t}$$

$$R \cdot (A) + R B e^{\lambda t} + L \cdot B \cdot \lambda e^{\lambda t} = U$$

próbaív.

A, B, λ - paraméterek meghatározása; $\forall t$ igaznak kell lennie \rightarrow

$$\rightarrow RA = U \quad RB + L \cdot B \cdot \lambda = 0$$

$$A = \frac{U}{R}$$

$$R = -L\lambda$$

$$\lambda = -\frac{R}{L}$$

$$i(t) = \frac{U}{R} + B \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\boxed{\frac{R}{L}} = \tau = \frac{1}{\gamma}$$

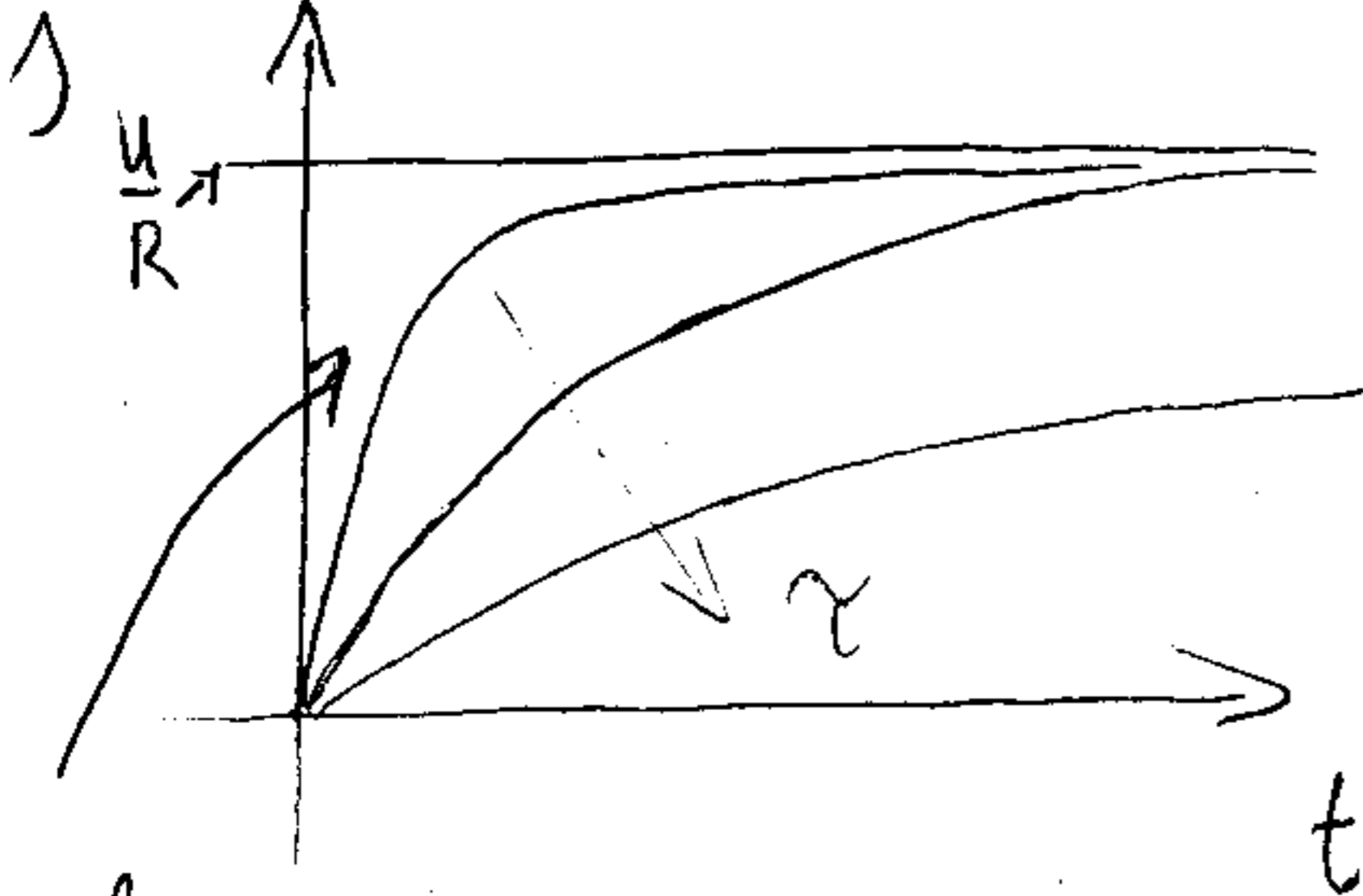
$$i(t=0) = 0$$

$$i(t=0) = \frac{U}{R} + B \cdot 1 = 0 \rightarrow B = -\frac{U}{R} \rightarrow i(t) = \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$\frac{L}{R} = \left(\frac{R}{L}\right)^{-1} =: \tau \text{ időállandó}$$

$$i(t) = \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$t \rightarrow \infty \rightarrow$ mintha ott se lenne a tekercs



ha τ nagy

Tekercs késlelteti az áramot

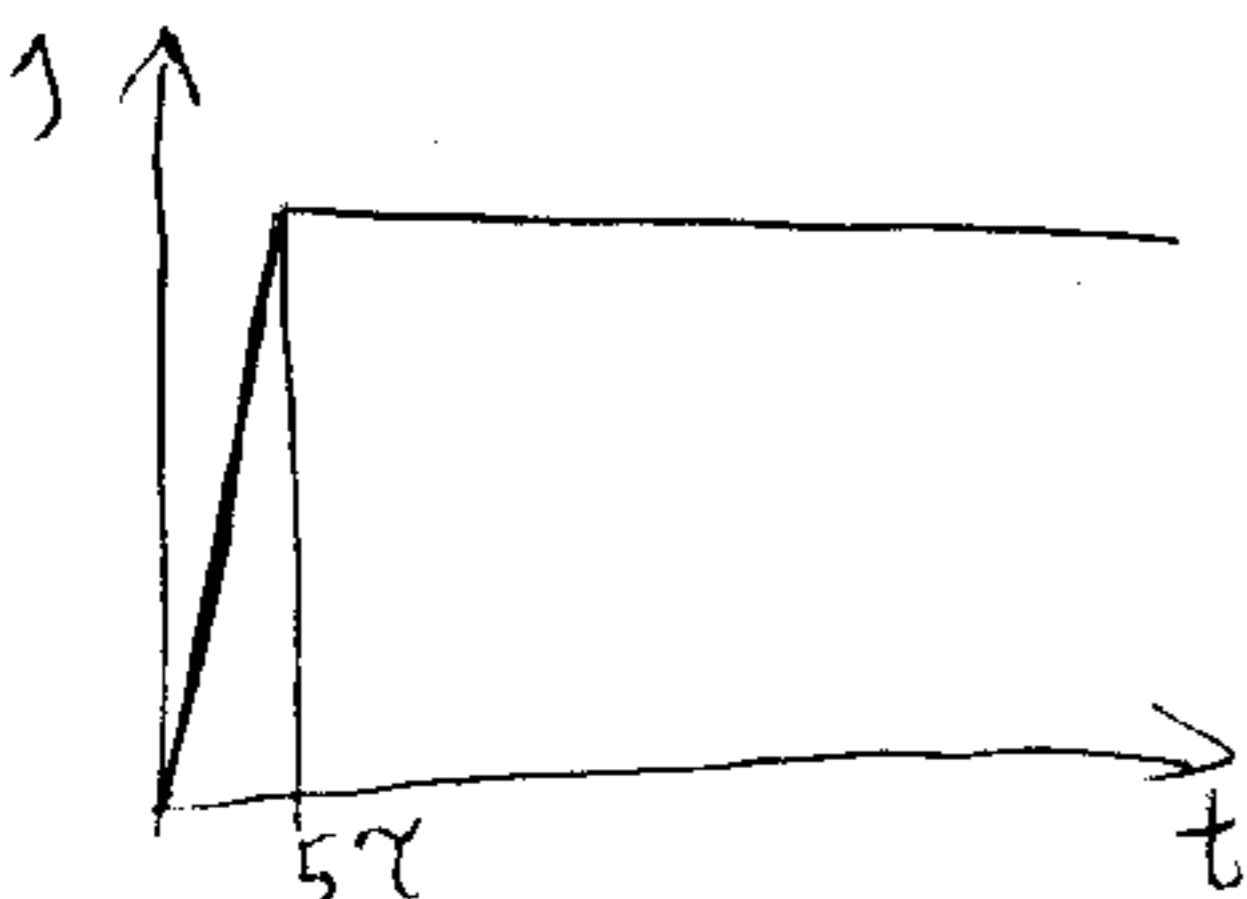
ha kis τ

BME-n

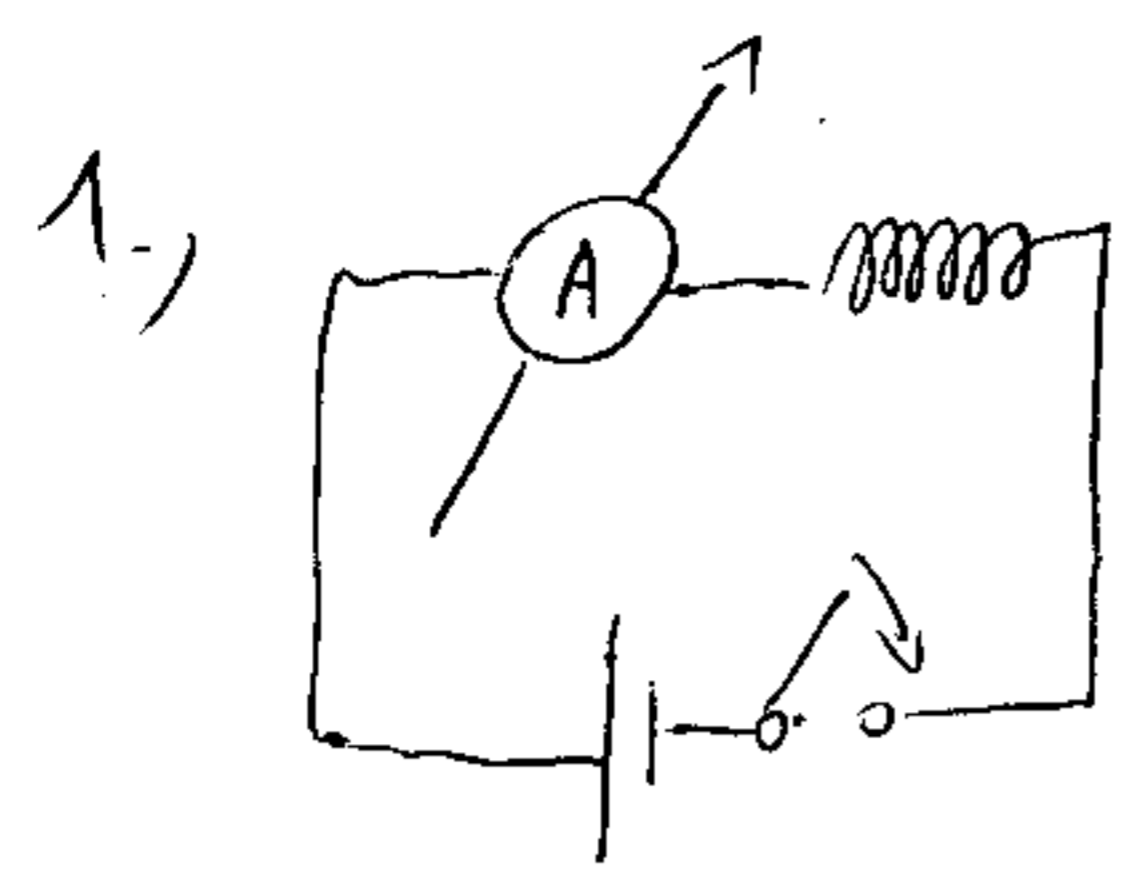
$$e^{-5} \approx 1\%$$

$$\boxed{t = 5\tau}$$

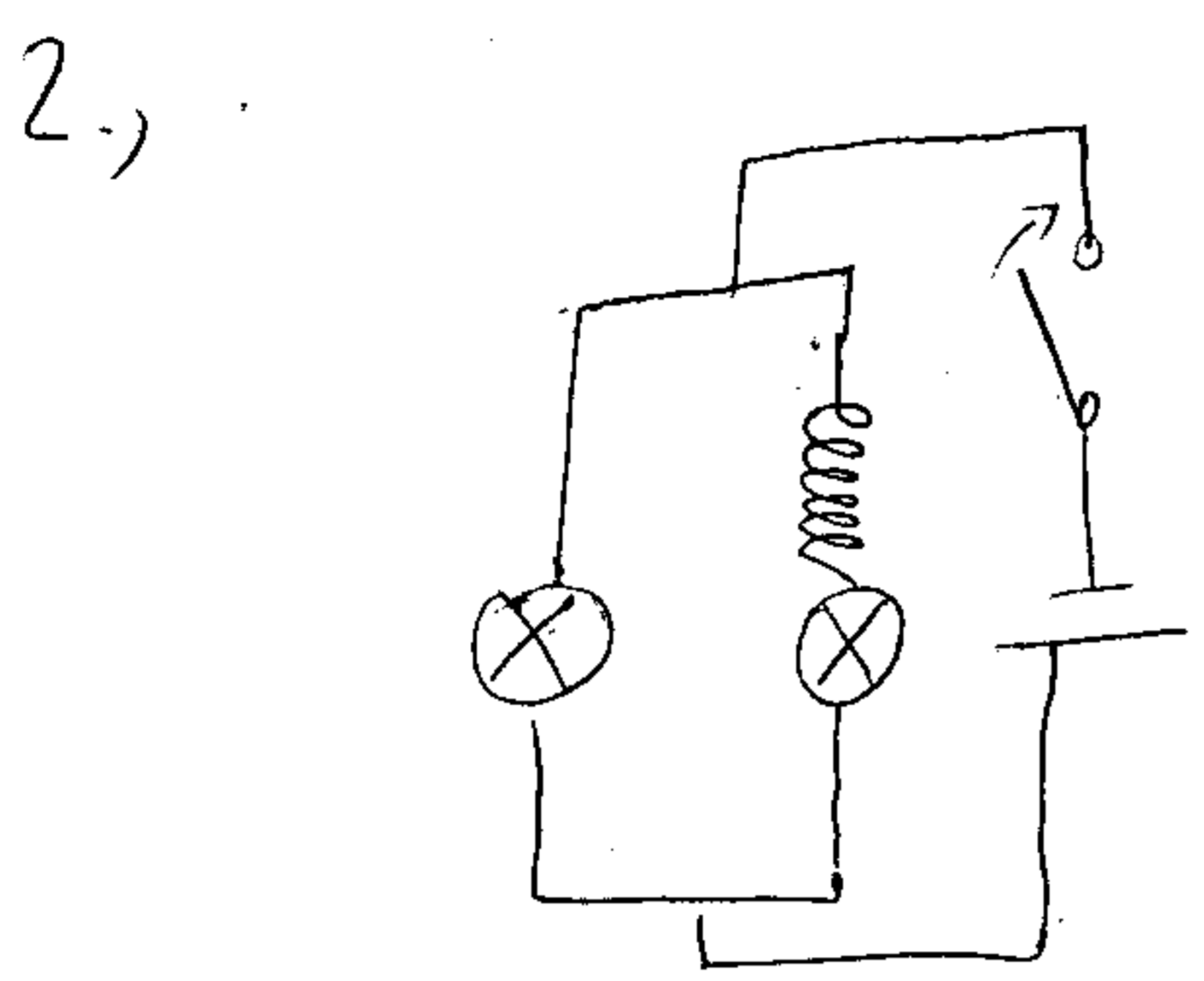
után \rightarrow stationárius eset



Házi feladat:

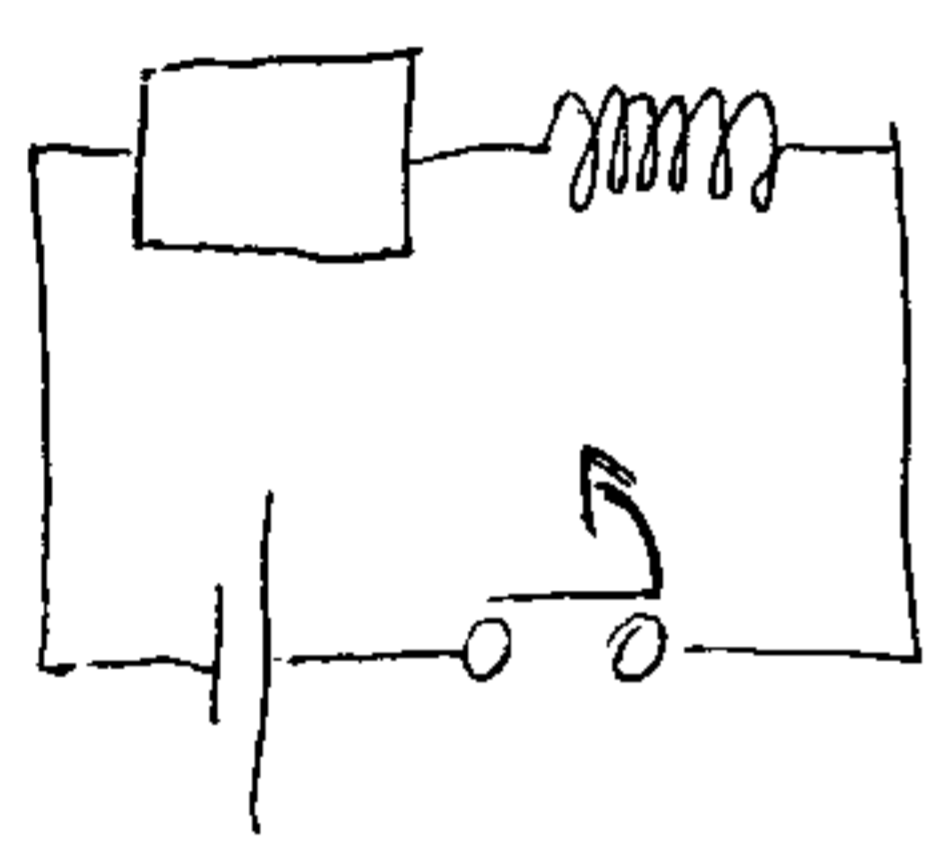


$\tau \sim 2s$



heli küszöbáram a fény
kiégéséhez

hom. lin. I. rendű



$R I + L \frac{dI}{dt} = 0$

$I(t) = B e^{\lambda t}$

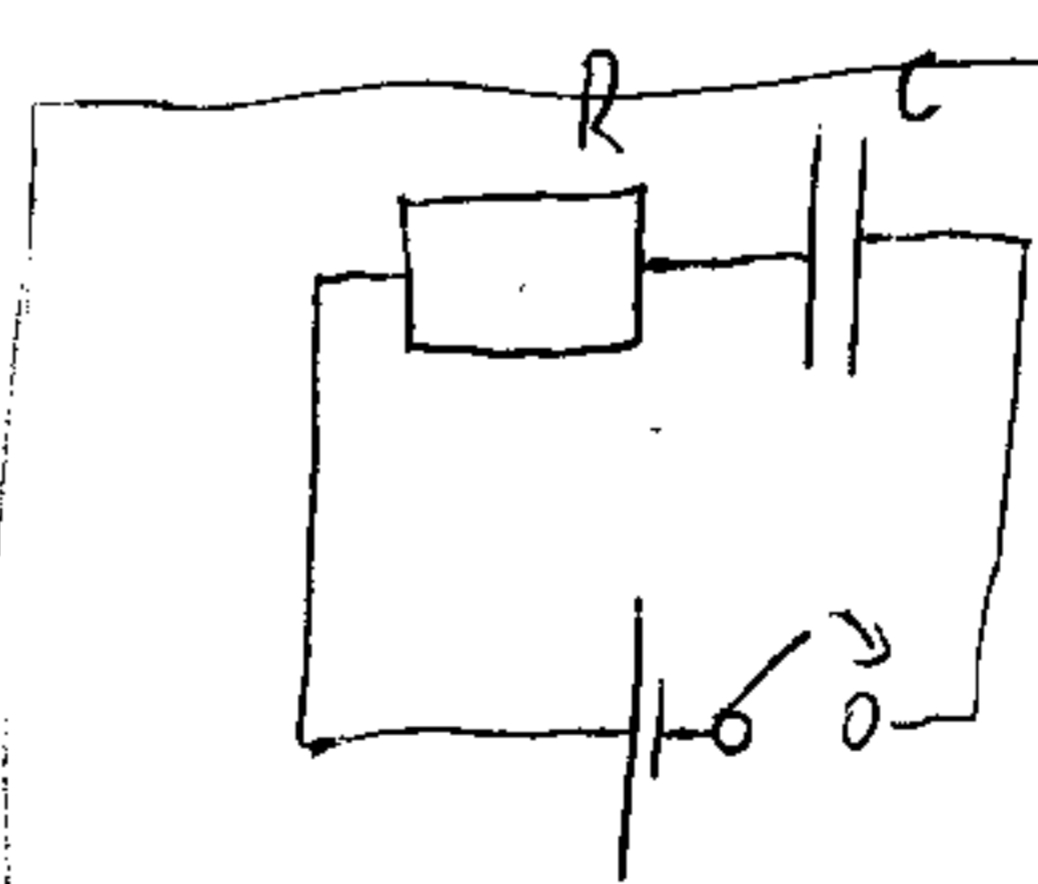
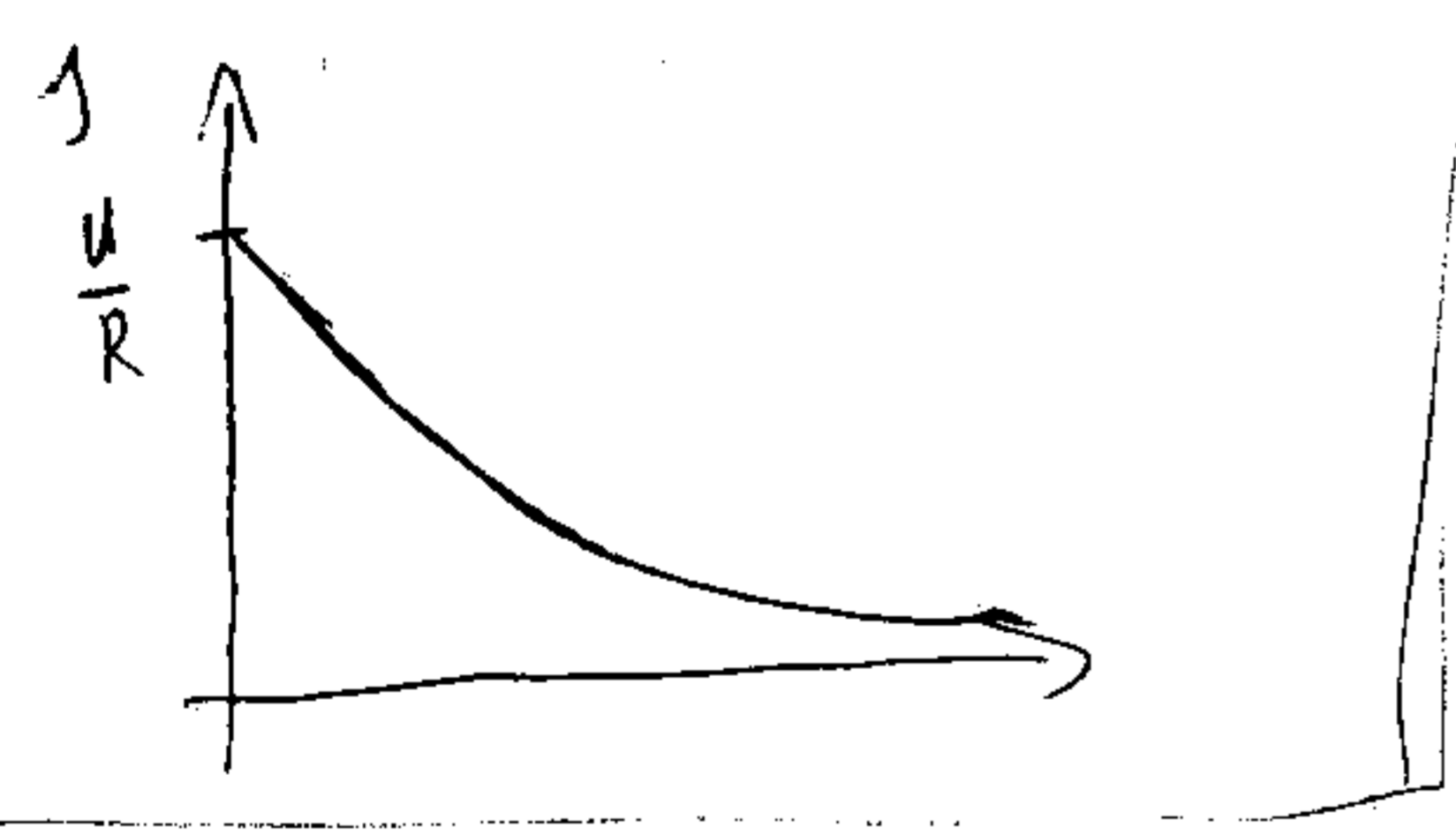
$R B e^{\lambda t} + L B \lambda e^{\lambda t} = 0$

$R = -L \lambda \rightarrow \lambda = -\frac{R}{L}$

$I(t=0) = \frac{U}{R} \rightarrow$

$I(t) = B e^{-\frac{R}{L}t} = B e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\rightarrow I(t) = \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$



$U = R I + \frac{Q}{C}$

$U = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$

$Q = A + B e^{\lambda t}$

$\left[\frac{1}{RC} \right] = \lambda^{-1}$

$A = UC$

$RC = \tau$

$RC \lambda + 1 = 0$

$Q(t) = UC + B e^{-\frac{1}{RC}t}$

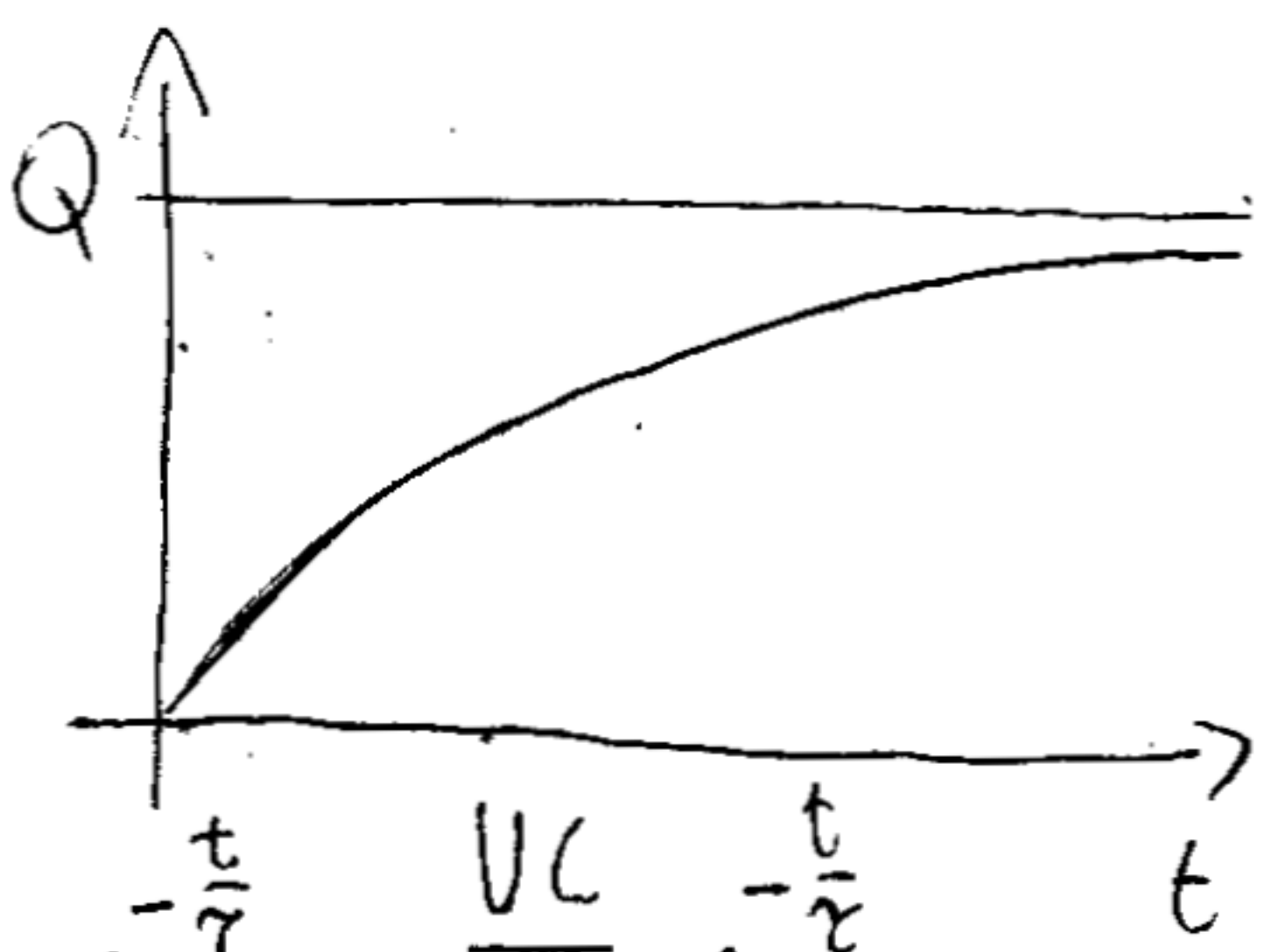
$UC = RC B \lambda e^{\lambda t} + A + B e^{\lambda t}$

$\lambda = -\frac{1}{RC}$

$$Q(t=0) \stackrel{!}{=} 0 \quad 0 = UC + B \rightarrow B = -UC$$

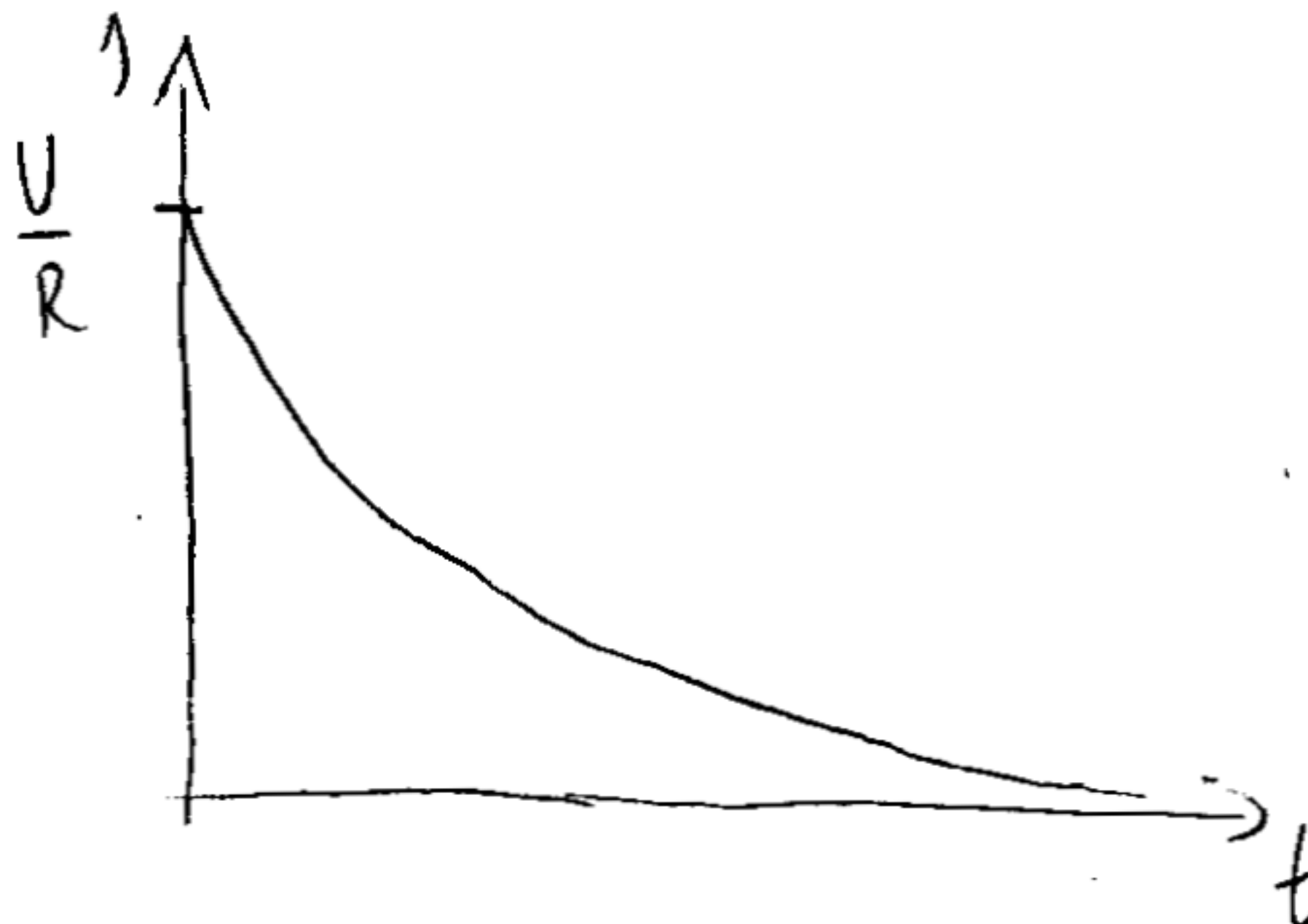
$$Q(t) = UC(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$t \rightarrow \infty \quad Q \approx UC$$



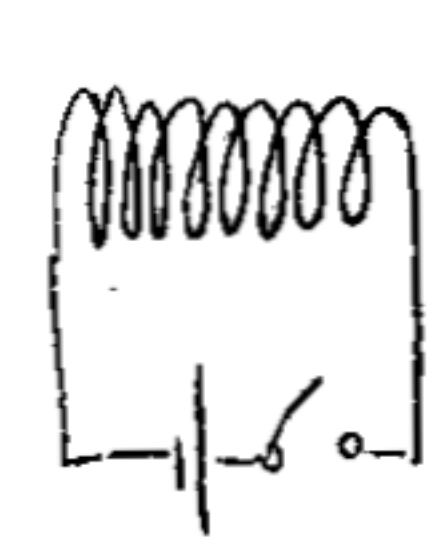
$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -UC \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{UC}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{UC}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

HF: RC kikapcs



Mágneses tér energiája, energiasűrűsége:

(Elektrosztatikában: $u = \frac{1}{2} \underline{D} \underline{E} \quad u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$) vákuum



$$W = \int P(t) dt = \int u(t) I(t) dt = \int L \frac{dI}{dt} \cdot I \cdot dt = \int_0^t \frac{1}{2} L \frac{d}{dt'} I^2 dt' = \frac{1}{2} L I^2(t) - \frac{1}{2} L I^2(0) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (I^2)$$

$= \frac{1}{2} L I^2 = U$ tekercs energiája $\left(U = \frac{1}{2} C U^2 \right.$ kondenzátor energiája)

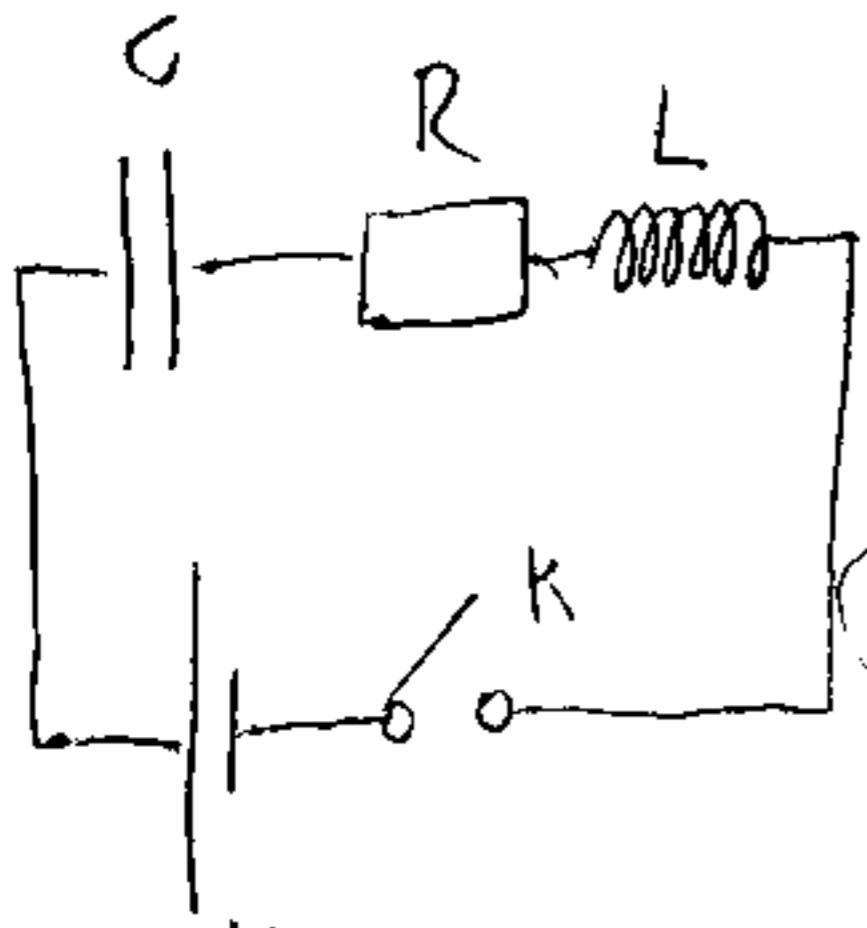
$$U = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu N^2 l}{L} I^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\mu_0 \mu N}{l}}_B \cdot \underbrace{\frac{NI}{l}}_H \cdot \underbrace{l}_{V}$$

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \underline{B} \underline{H} \quad \text{vákuum: } u = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

E + M tér esetén vákuumban

Váltoáramok



$$\frac{Q}{C} + R I + L \frac{dI}{dt} = U \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

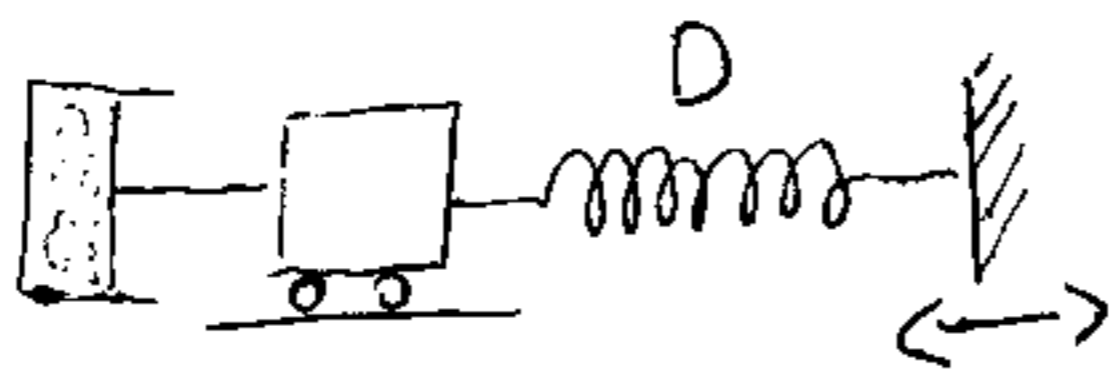
$$\textcircled{1} \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2 Q}{dt^2} = U \quad \text{inhom. másodrendű}$$

$$\textcircled{1} U(t) = \text{const.}$$

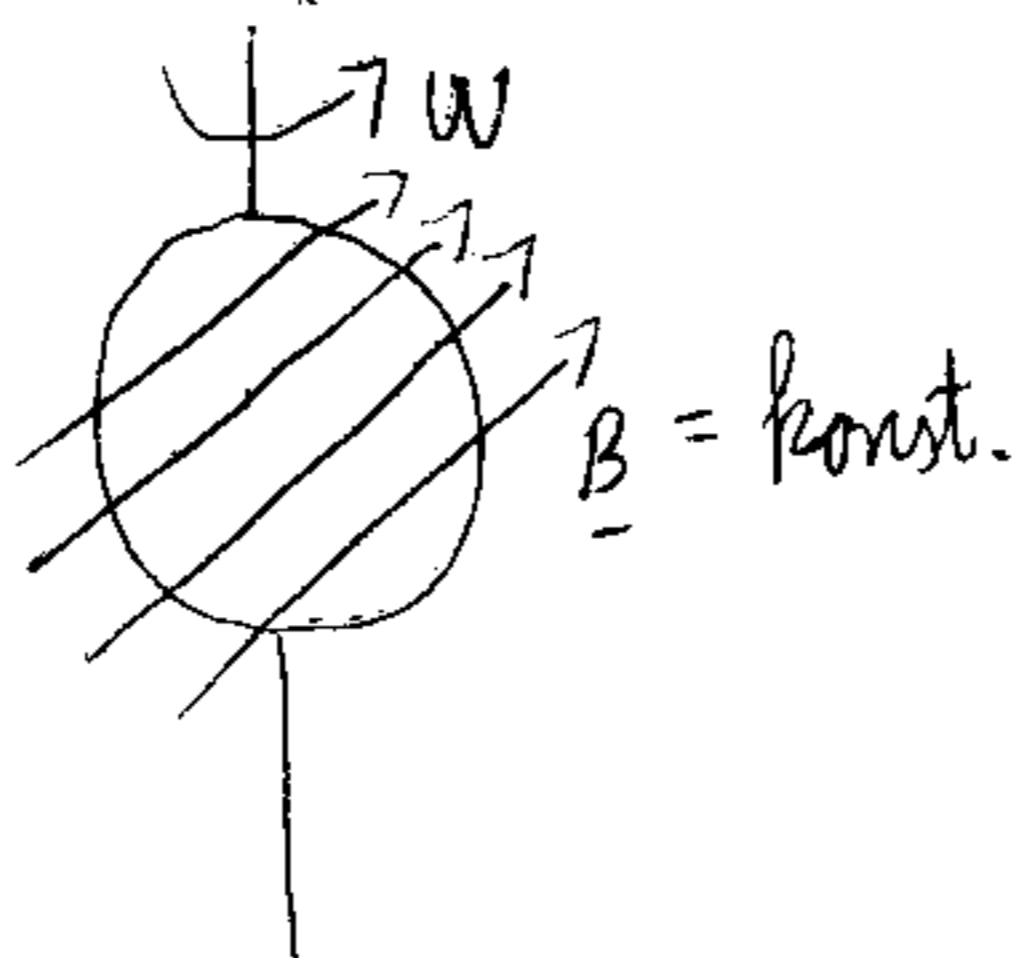
$m \ddot{x} = m g - \lambda \dot{x} - D x$ nehézségi erőterben csillapított oszcillátor

$$\textcircled{2} I \cdot \frac{1}{C} Q(t) + R \frac{dQ(t)}{dt} + L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} = f(t+T) = U_0 \cos(\omega t) \quad \text{gerjesztő fű.}$$

mechanikai analógia

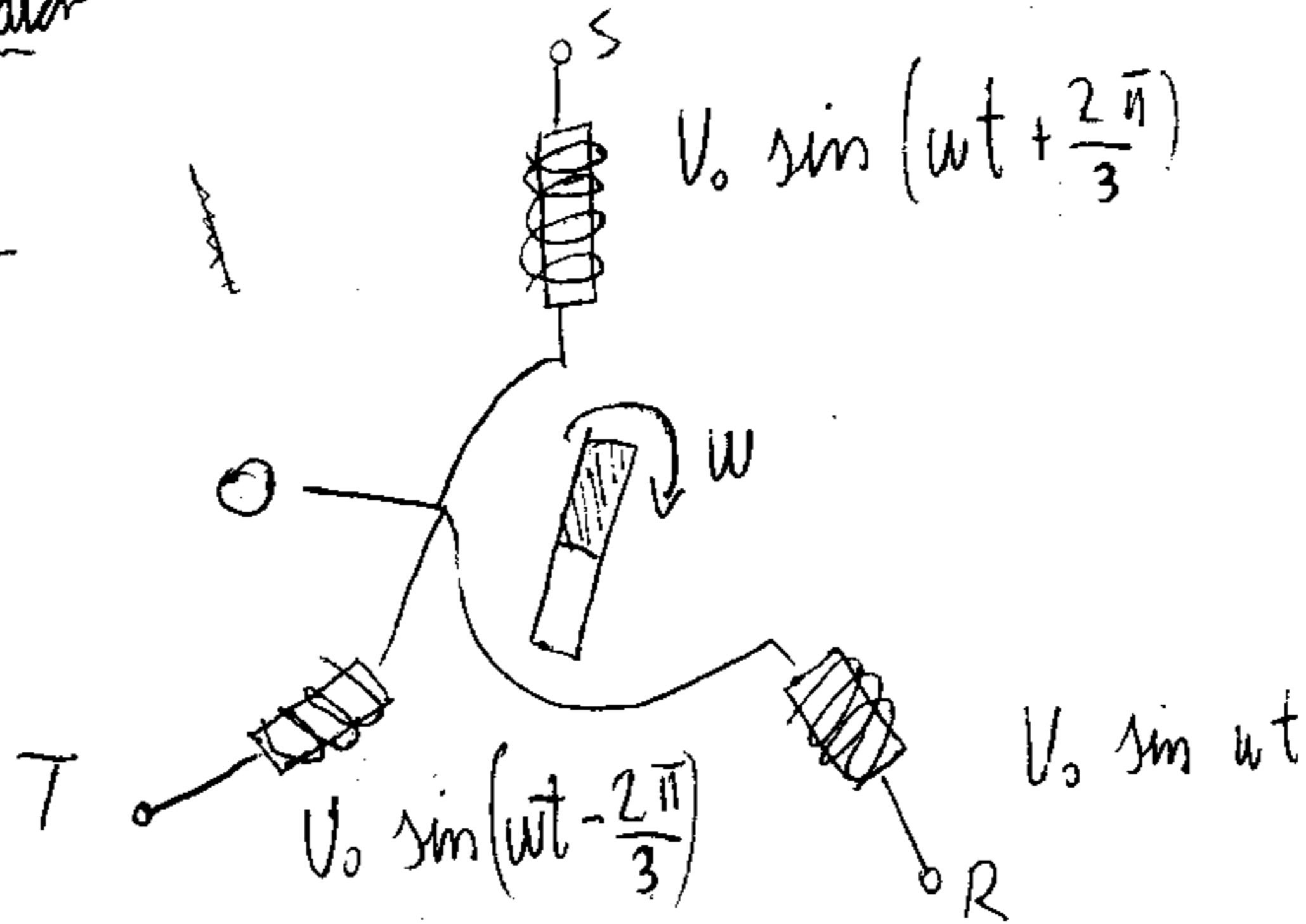


periodikus feszültség előállítás



Váltoáram generátor

3 fázisú generátor



időben eltolt állapot: $\text{II. } \frac{Q'}{C} + R \frac{dQ'}{dt} + L \frac{d^2 Q'}{dt^2} = U_0 \sin(\omega t) / j$

$\text{I} + \text{II} \Rightarrow q = Q + jQ'$

↑
imaginárius
egység
 $j^2 = -1$

$\frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2 q}{dt^2} = U_0 e^{j\omega t}$

$q(t) = q_0 e^{j\omega t} \quad i(t) = \frac{dq}{dt} = q_0 j\omega e^{j\omega t} = j\omega q$

$\frac{d^2 q}{dt^2} = (j\omega)^2 q$

$\left[\frac{q_0}{C} + R j\omega q_0 + L (j\omega)^2 q_0 \right] e^{j\omega t} = \underbrace{U_0 e^{j\omega t}}_{\text{!! } u(t)}$

5 parameter: $R, L, C, U_0, \omega \rightarrow i(t) = ?$

$\frac{i(t)}{j\omega C} + R i(t) + L j\omega i(t) = u(t)$

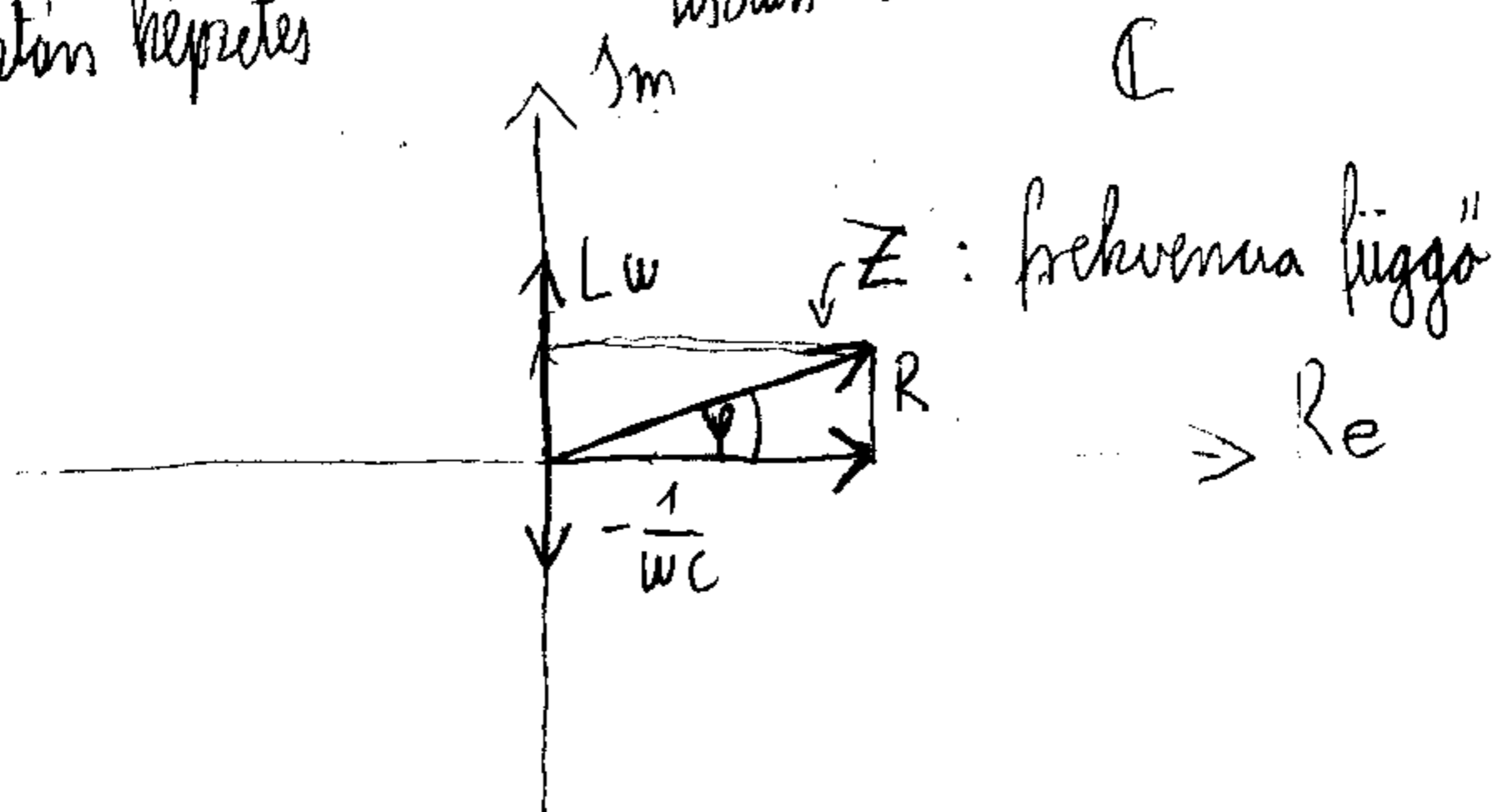
$\underbrace{\left[\frac{-j}{\omega C} + R + L j\omega \right]}_{\in \mathbb{C}} i(t) = u(t)$

komplex Ohm-törvény
impedancia: komplex
ellenállás

$Z_C = -\frac{j}{\omega C} \quad Z_L = j\omega L \quad Z_R = R$

tiszta képzetes

tiszta valós



$$Z = Z_C + Z_R + Z_L \quad Z = \frac{u(t)}{i(t)} \quad i(t) = j\omega q_0 e^{j\omega t} \Rightarrow \dots$$

$$i_0, \varphi = ?$$

$$\Rightarrow i(t) = i_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\downarrow$$

$$j(t) = \operatorname{Re}(i(t))$$

$$\left(i(t) = \frac{u(t)}{Z} \right) \quad Z = \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{i_0 e^{j(\omega t + \varphi)}} = \frac{V_0}{i_0 e^{j\varphi}} \rightarrow$$

$$e^{j\varphi} e^{-j\varphi} = 1$$

$$|i_0|^2 = i_0 i_0^* = \frac{V_0}{Z e^{j\varphi}} \cdot \frac{V_0}{Z^* e^{-j\varphi}} =$$

$$\rightarrow i_0 = \frac{V_0}{Z e^{j\varphi}}$$

$$= \frac{V_0^2}{Z Z^*} = \frac{V_0^2}{\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] \left[R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right]} =$$

$$= \frac{V_0^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \rightarrow |i_0| = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad |Z|$$

$$j(t) = \operatorname{Re}[i(t)] = \operatorname{Re}\left[i_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \right] = \underbrace{|i_0|}_{I_0} \cdot \cos(\omega t + \varphi) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$U_R(t) = R j(t) = R I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

strom kesik

$$U_L(t) = R \frac{dj}{dt} = R I_0 \omega (-\sin(\omega t + \varphi)) = L \omega I_0 \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int j dt = \frac{1}{C} \int I_0 \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{\omega C} I_0 \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

"
sin(ωt + φ) ^{strom} _{siet}

$U \rightarrow \varphi$ -vel, el van tolna az áram \rightarrow kondenzátoron szel. tekerésen késik

Rezonancia: $\exists \omega = \omega_0$ frekvencia amikor $\varphi = 0$

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

ekkor $Z = R$

Thomson-frekvencia

$$|\dot{I}_0| = \frac{U_0}{Z e^{i\varphi}} = \frac{U_0}{R}$$

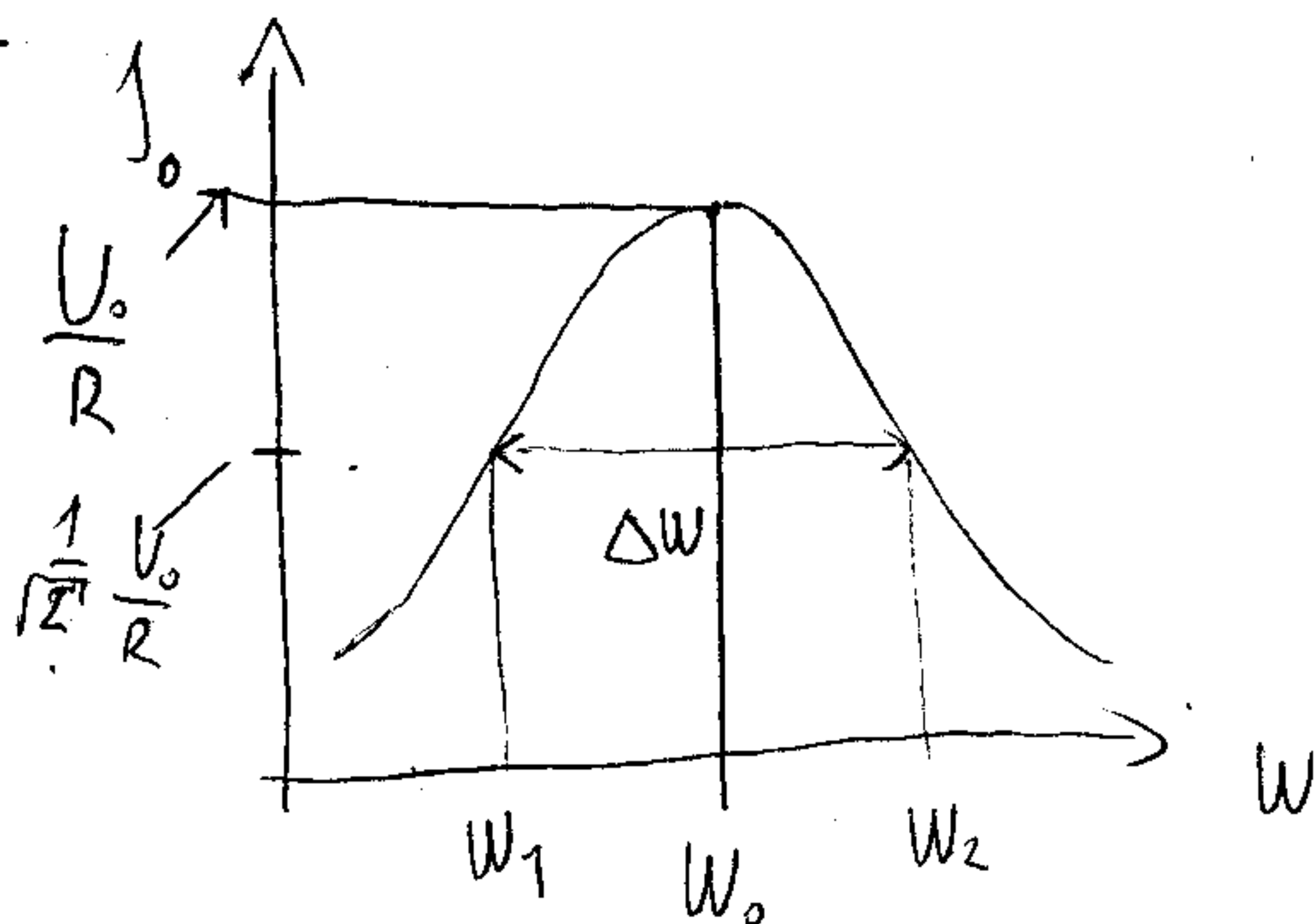
\parallel
 \dot{I}_0

$$|\dot{I}_0| = \dot{I}_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{U_0}{R}$$

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R^2$$

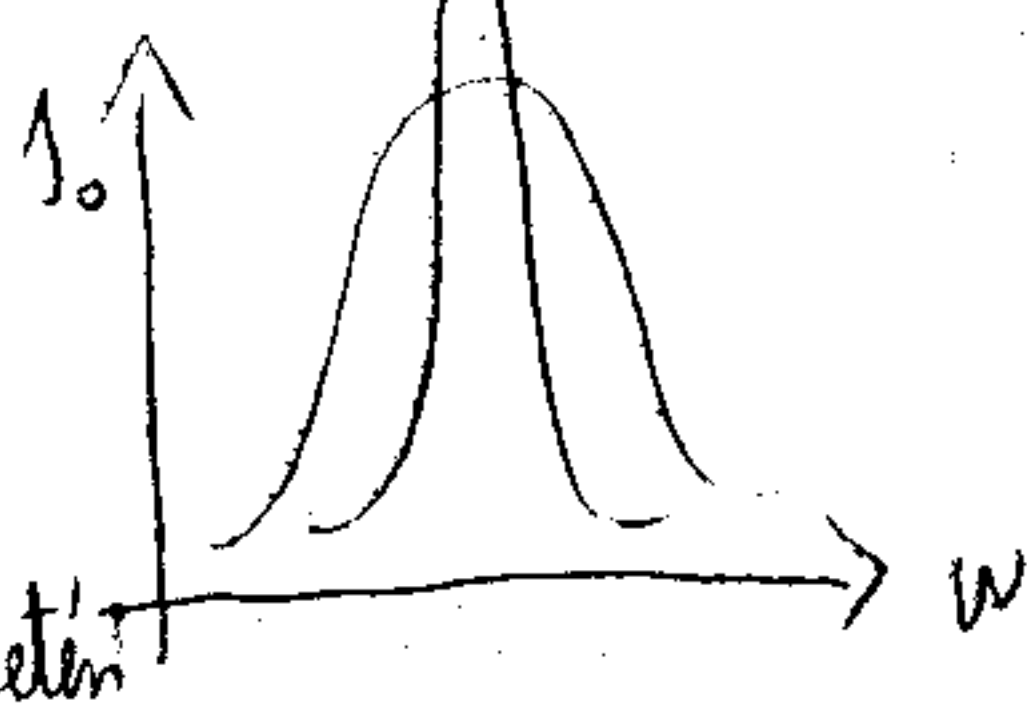
$$|\omega_2 - \omega_1| = \Delta\omega = \frac{R}{L}$$



rez. frekv. ellenállás csökkenése

$$R \rightarrow 0 \quad \dot{I}_0 \rightarrow \infty \quad \begin{cases} \omega = \omega_0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\Delta\omega \rightarrow 0$$



$$U_R(t, \omega_0) = R \dot{I}_0 \cos(\omega_0 t)$$

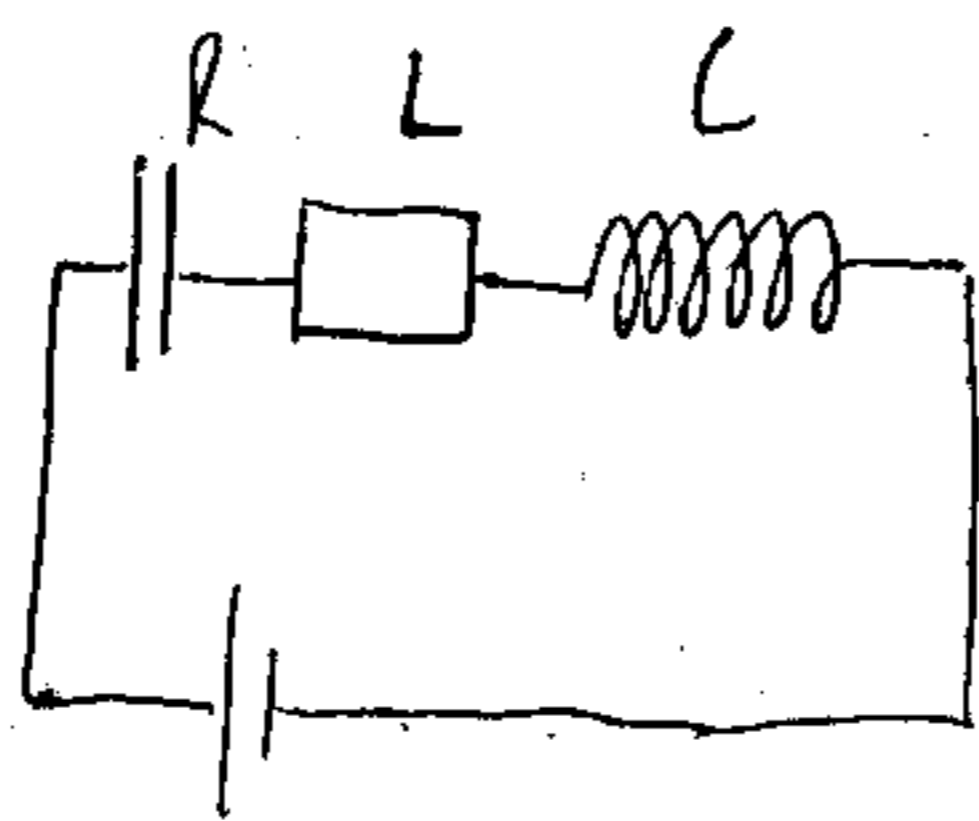
$$U_L(t, \omega_0) = L \dot{I}_0 \omega_0 (-\sin(\omega_0 t))$$

$$U_C(t, \omega_0) = \frac{1}{\omega_0 C} \dot{I}_0 (\sin(\omega_0 t))$$

\parallel
 $L \omega_0$

$$U_L + U_C = 0$$

Árnyék:



L, R változtatható

L, R, C amplitúdót mér - U

Teljesítményfelvétel: $U_0 \cos(\omega t) \rightarrow I_0 \cos(\omega t + \varphi)$

$$P(t) = U_0 \cos(\omega t) \cdot I_0 \cos(\omega t + \varphi) = U_0 I_0 =$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi) \cdot U_0 I_0 = \frac{U_0 I_0}{2} [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi]$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \omega t + \varphi \quad \frac{\alpha - \beta}{2} = \omega t \quad \oplus \rightarrow \alpha = 2\omega t + \varphi$$
$$\beta = \varphi$$

$$\bar{P}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos \varphi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$$

effektív \rightarrow U_{eff} I_{eff}

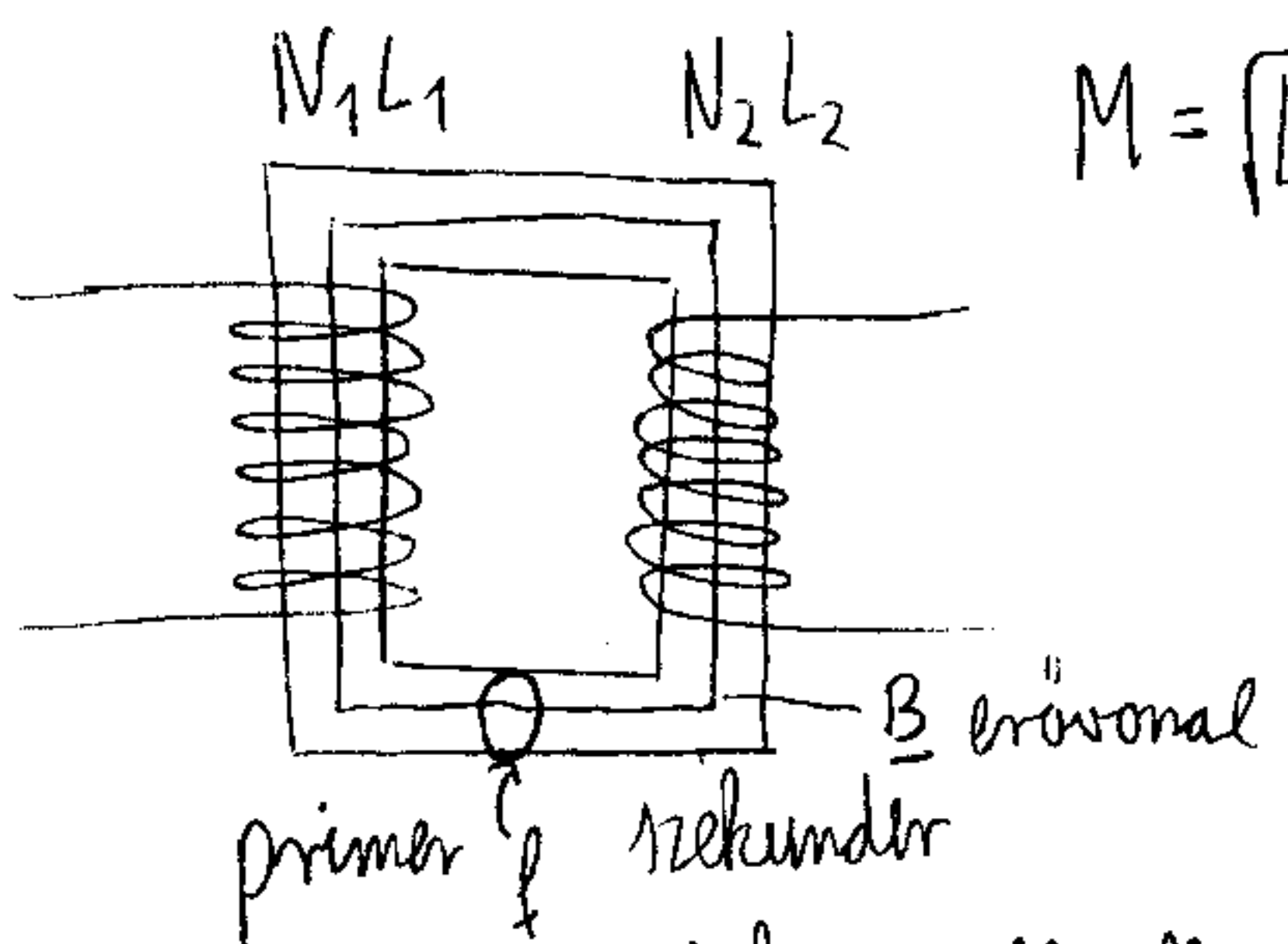
$L, C: \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ideális tekercs és kondenzátor nem vesz fel teljesítményt.
 $\bar{P}(t) = 0$

$R: \varphi = 0 \quad R = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$

Zárt vasmagos transzformátor:

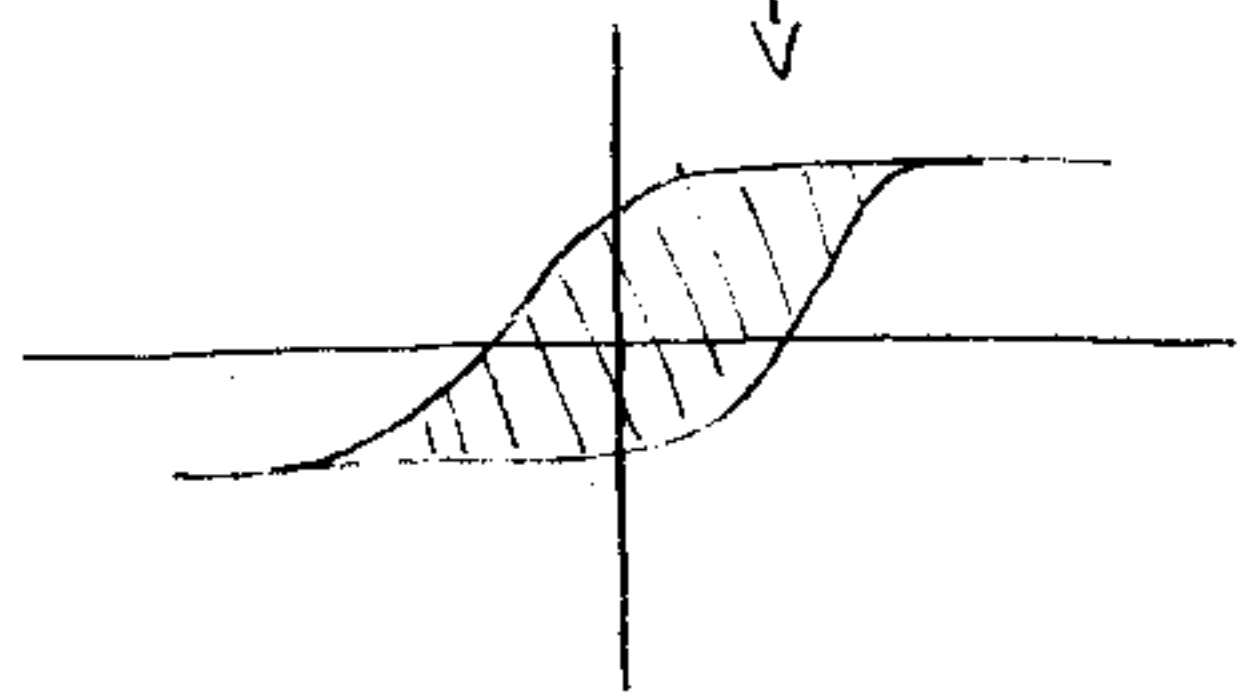
Déri Miksa, Bláthy Ottó,
Zipernowsky Thároly

1885



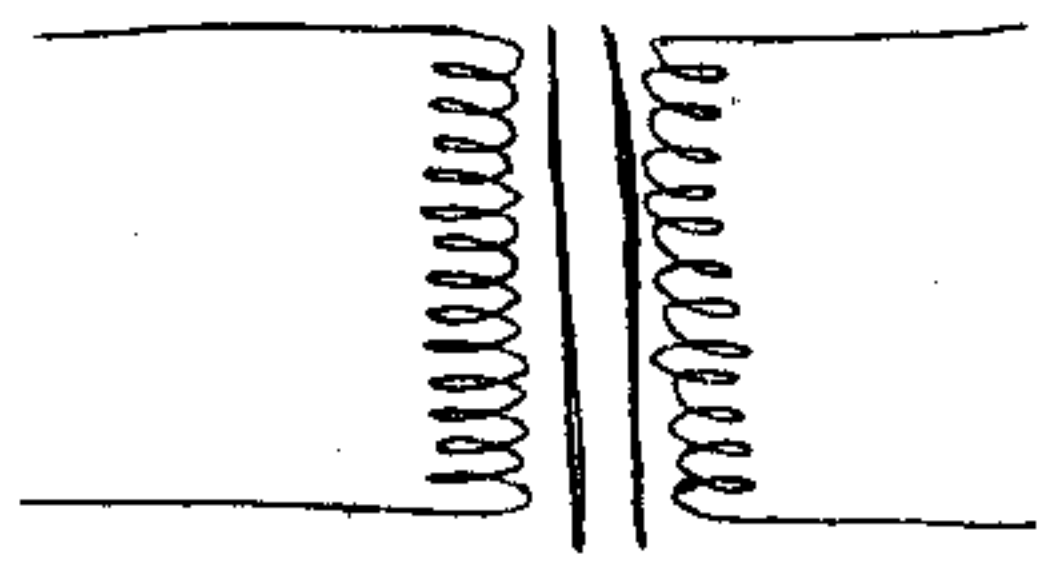
$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

mindig van veszteség:
- vasvesztés, hisztérezis
vesztés \sim terület

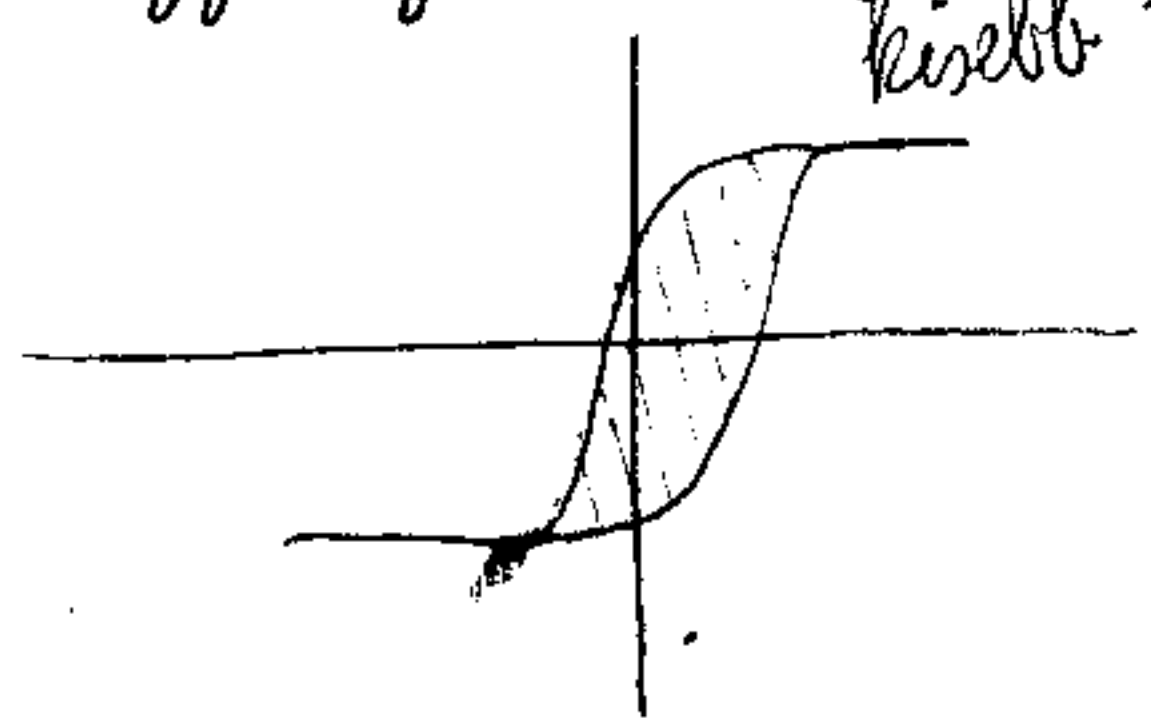


- rézvesztés \rightarrow réztekerés ellenállása

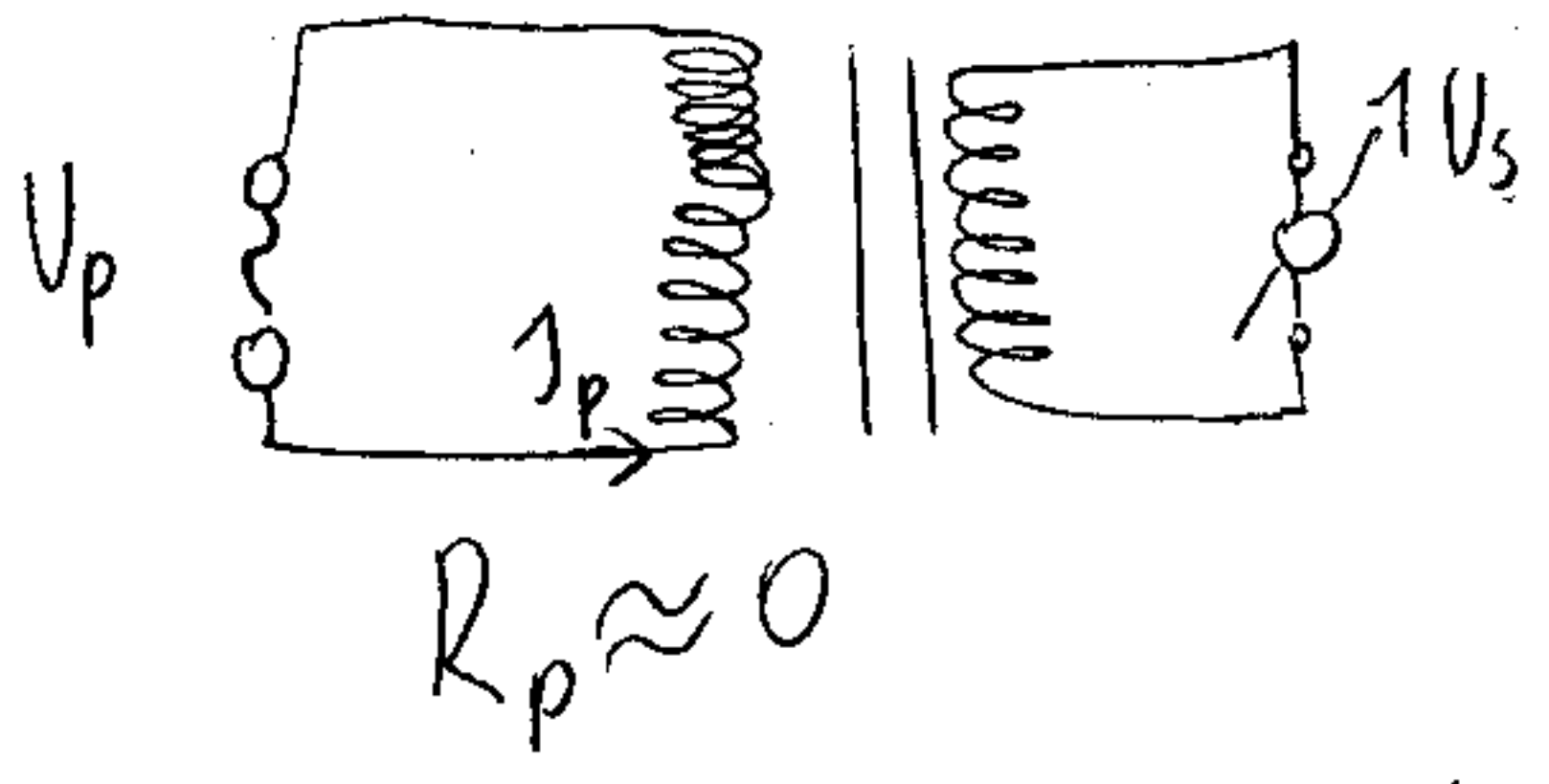
jelle:



ötívörlet lágymágneses anyagok
kiseb terület



a, terheletlen



$$U_p - \frac{d\Phi}{dt} = 0$$

$$U_p = L_1 \frac{dI_1}{dt}$$

$$I_s \equiv 0 \quad U_s = - \frac{d\Phi_s}{dt} =$$

$$B_1 \approx B_2 = B$$

$$B = \frac{\mu_0 \mu N_1 I_p}{l}$$

$$= - \frac{d}{dt} N_2 B l = - \frac{d}{dt} N_2 \left(\frac{\mu_0 \mu N_1 I_p}{l} \right) l =$$

$$= - M \frac{dI_p}{dt} \quad \left[\frac{U_s}{U_p} = \frac{-M \frac{dI_p}{dt}}{L_1 \frac{dI_p}{dt}} = - \frac{N_2}{N_1} \right]$$

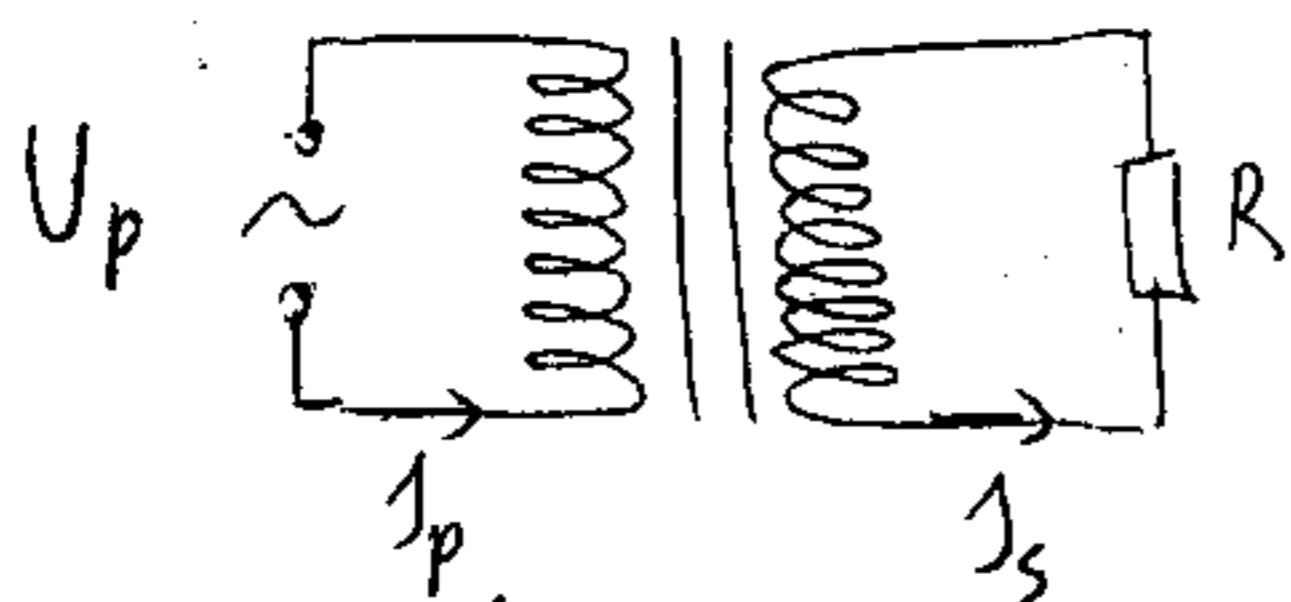
feszültség amplitúdó
 a menetáramok arányával
 transzformálódik

Kísérlet: $N_p = 220 \quad N_s = 1000$

b, terhelt eset

I P. oldal: $u(t) = U_0 \cos \omega t = j\omega L_1 i_1 +$

$i(t) = i_0 e^{j\omega t}$ \uparrow
 $\frac{d}{dt} \cdot L$
 $+ j\omega M i_2$



$i_1 \leftrightarrow i_2$
 hatnak egymásra

II S. oldal: $0 = j\omega M i_1 + j\omega L_2 i_2 + i_2 R$

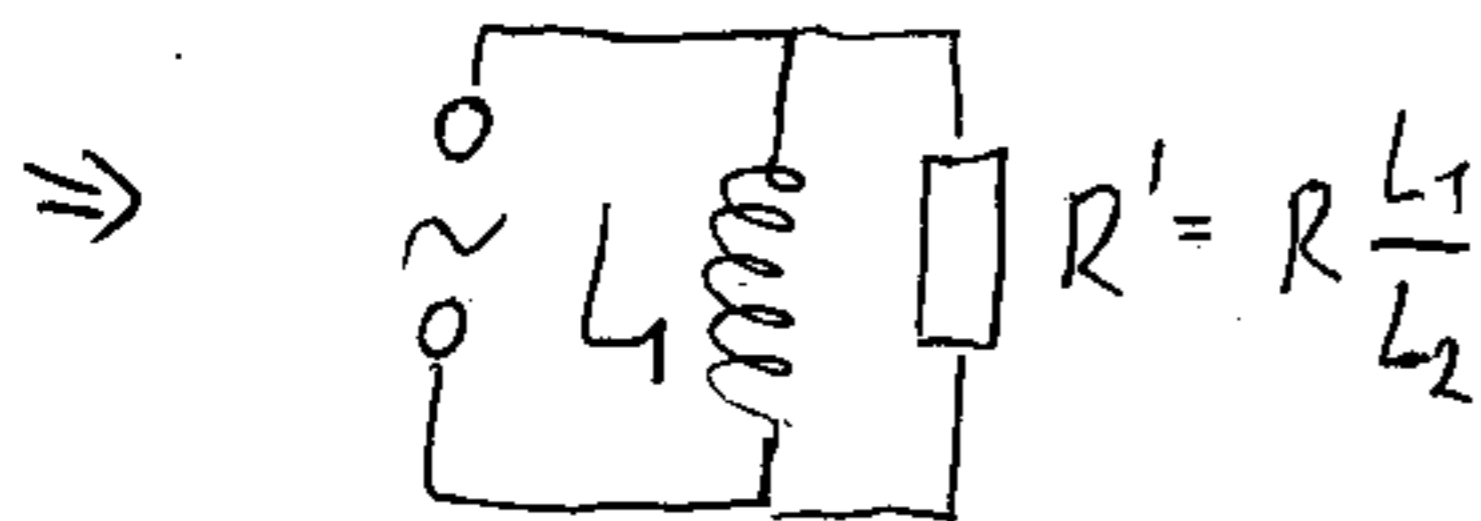
II $\rightarrow i_2 \rightarrow i_2 = \frac{-j\omega M i_1}{j\omega L_2 + R}$

$M^2 = L_1 L_2$ szoros csatolás esetén

$u(t) = j\omega L_1 i_1 + \frac{-j\omega M i_1 \cdot j\omega M}{j\omega L_2 + R} = \frac{-\omega^2 L_1 L_2 i_1 + R j\omega L_1 i_1 + \omega^2 M^2 i_1}{j\omega L_2 + R}$

$= \frac{j\omega L_1 R}{j\omega L_2 + R} \cdot i_1$ $Z_p = \frac{(j\omega L_1) \left(R \cdot \frac{L_1}{L_2} \right)}{j\omega L_2 \frac{L_1}{L_2} + R \frac{L_1}{L_2}} = \frac{1}{\frac{R L_1}{L_2} + \frac{1}{j\omega L_2}} \Rightarrow$

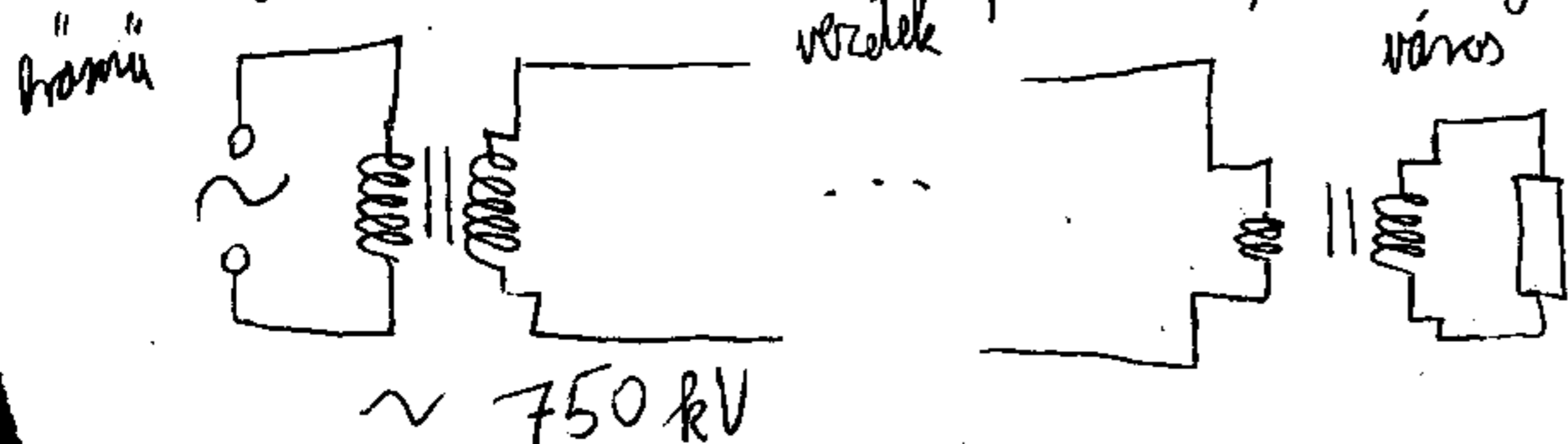
Z_p : primer oldali (komplex) impedancia



terhelt transzformátor helyettesítő képe

$P_p = \frac{U_p^2}{R'} = \frac{U_p^2}{R} \cdot \frac{L_2}{L_1} = \frac{U_p^2}{R} \cdot \frac{N_2^2}{N_1^2} = \left(U_p \frac{N_2}{N_1} \right)^2 (R)^{-1} = \frac{U_s^2}{R} = P_s$

teljesítményt nem transzformálja; energia megmarad, energia szállítás



$P_{\text{vezeték}} = I^2 \cdot R \approx 0$

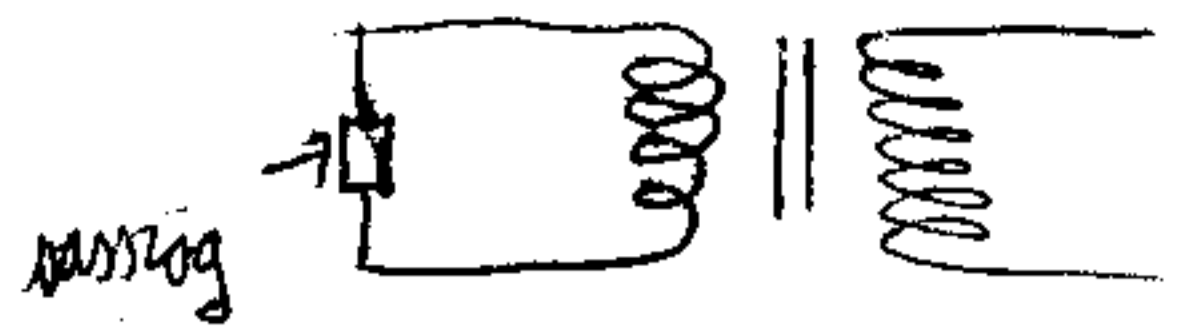
$\eta \approx 99\%$

Thésislet

$$N_s = 5$$

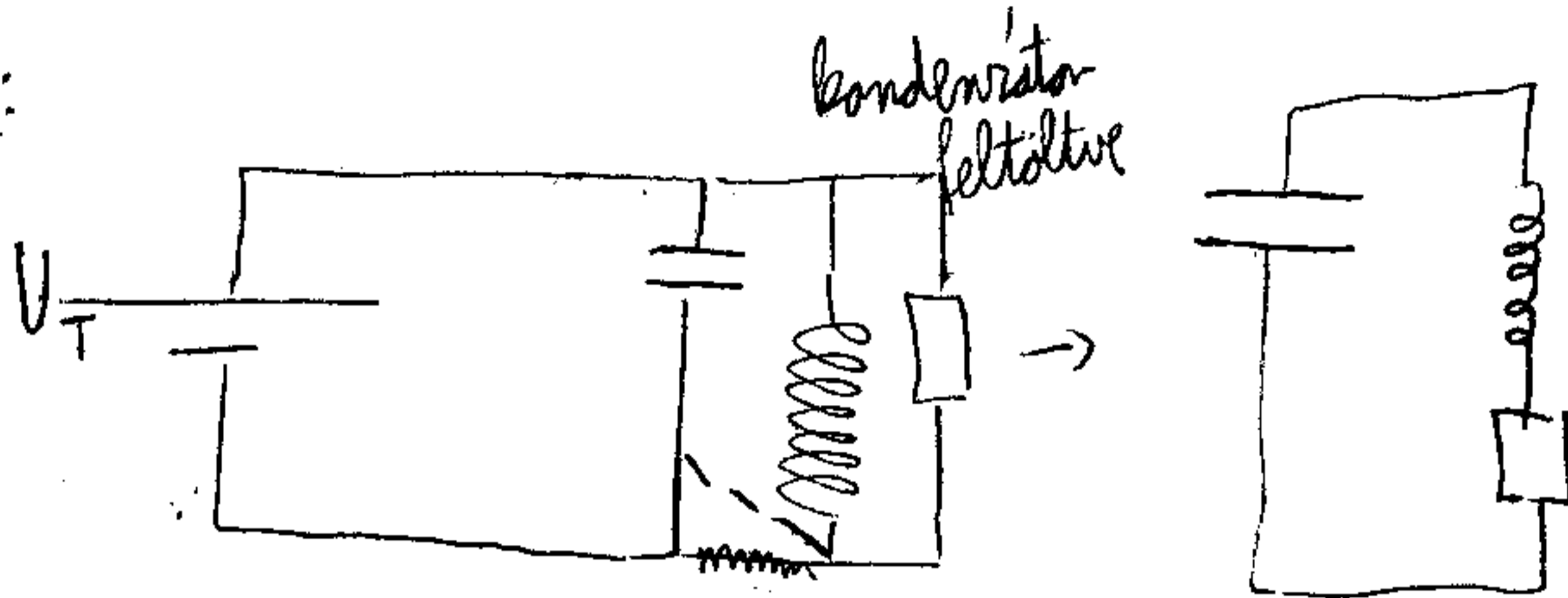
$$N_p \gg N_s$$

nagy áram \rightarrow szög meglövés



$N_s = 1$ ferrastórn, indukciós ferrastás

Szaladrezgés:



$$0 = \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2Q}{dt^2} \quad | :L$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t)$$

$$2\beta = \frac{R}{L} \quad \left[\frac{R}{L} \right] = \frac{1}{\tau} \quad \omega = \omega_0^2 - \beta^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2 = \omega_0^2$$

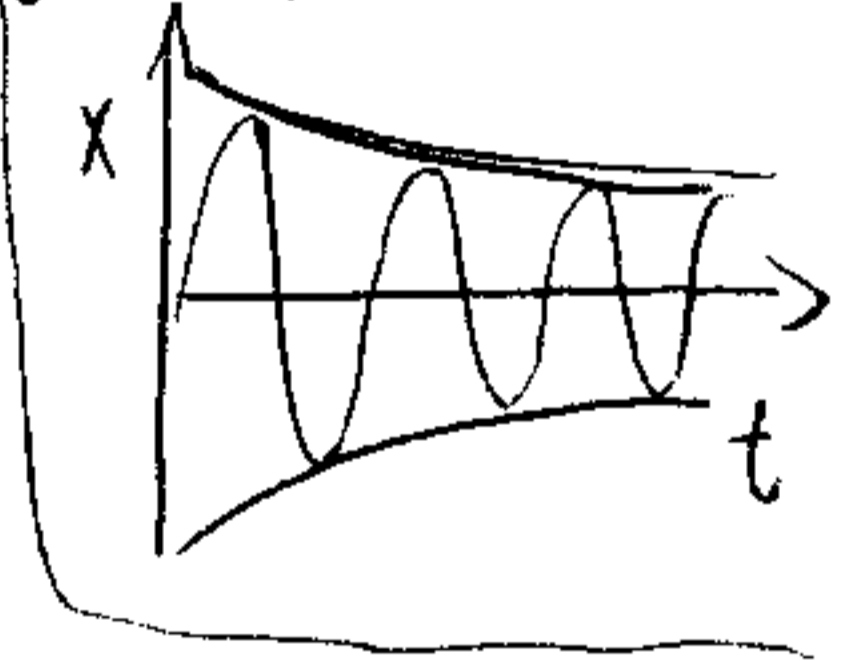
analógia a mechanikában:

$$0 = \ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x$$

csillapított rezgés

$$x(t) = A(t) \sin(\omega t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t) \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

gyenge csillapítás \forall



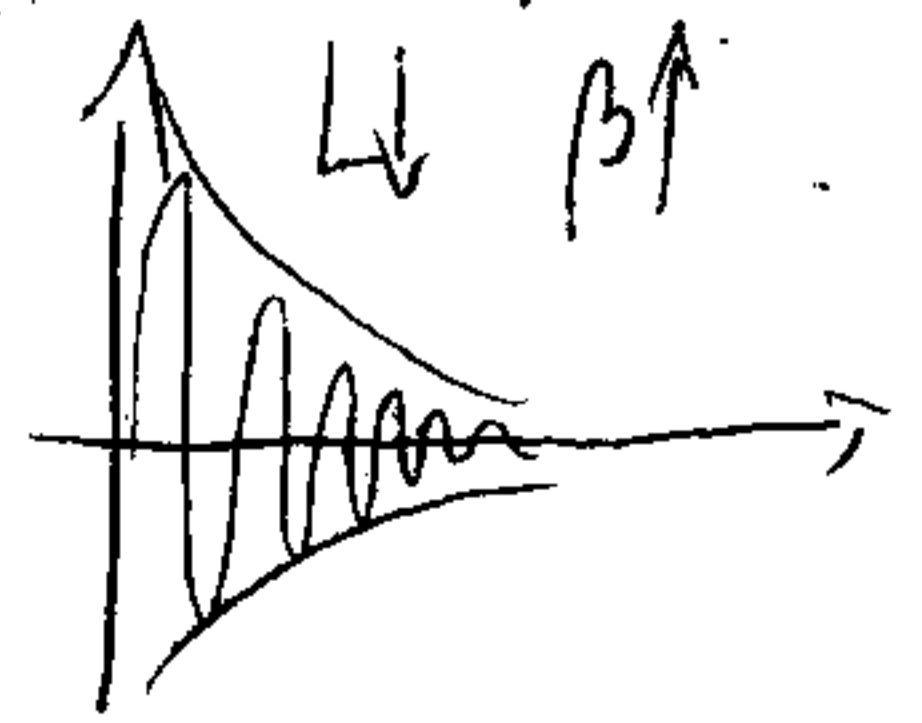
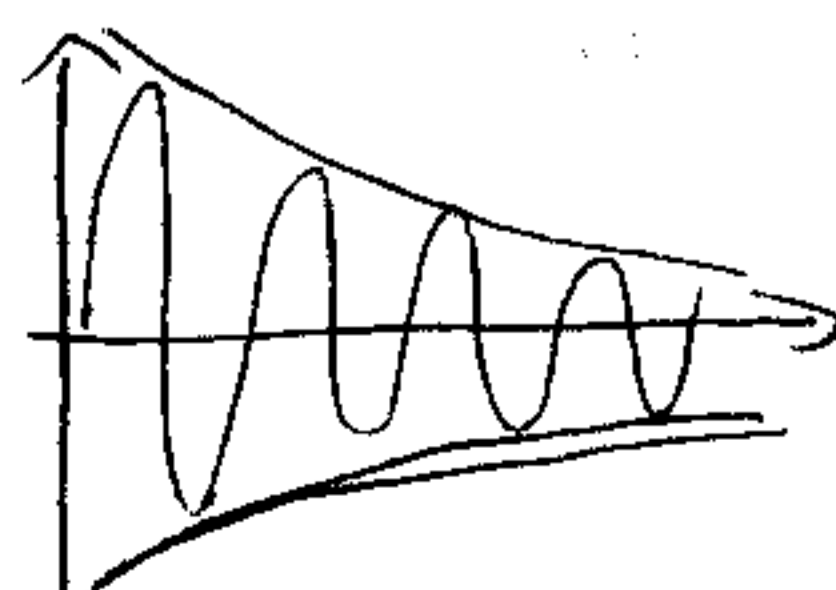
$$\underline{I(t)} = \frac{dQ}{dt} = Q_0 \left(-\beta e^{-\beta t} \sin(\omega t) + e^{-\beta t} \omega \cos(\omega t) \right) =$$

$$= Q_0 e^{-\beta t} \left(-\beta \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t) \right) =$$

$$= \underbrace{Q_0 \omega_0}_{I_0} e^{-\beta t} \left(\underbrace{-\frac{\beta}{\omega_0}}_{\cos \varphi} \sin \omega t + \underbrace{\frac{\omega}{\omega_0}}_{\sin \varphi} \cos \omega t \right) = \underline{I_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)}$$

$$U_C = \frac{Q(t)}{C}$$

Oszilláshóppal: berregés kapcsoló ki-be kapcsolása

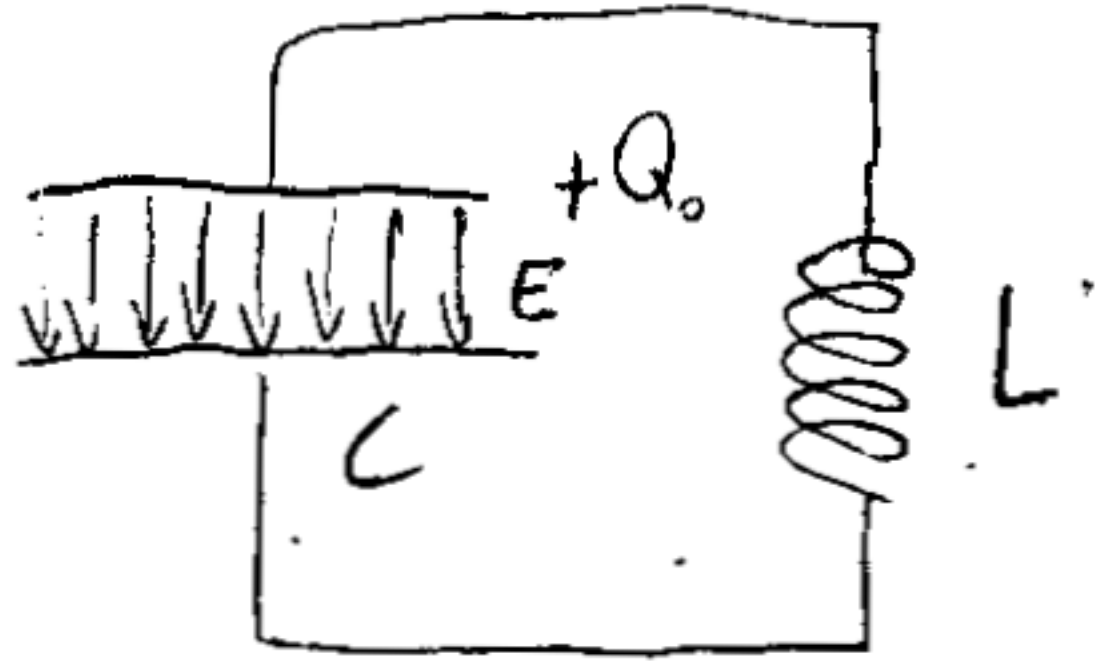


$L \downarrow \quad \beta \uparrow$

$$R \rightarrow 0 \Rightarrow \beta \rightarrow 0 \Rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = Q_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$\cos \varphi = 0 \rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \quad I = I_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) =$$

$$= I_0 \sin(\omega_0 t \pm \frac{\pi}{2}) = I_0 \pm \cos(\omega_0 t)$$



csillapítatlan rezgőkör

$$U_C + U_L = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2 \sin^2(\omega_0 t)}{C} + \frac{1}{2} L \underbrace{\left(\frac{Q_0^2}{C} \right)}_{= Q_0^2 \omega_0^2} \cos^2(\omega_0 t) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_0^2}{C} = \text{állandó}$$

Maxwell - egyenletek

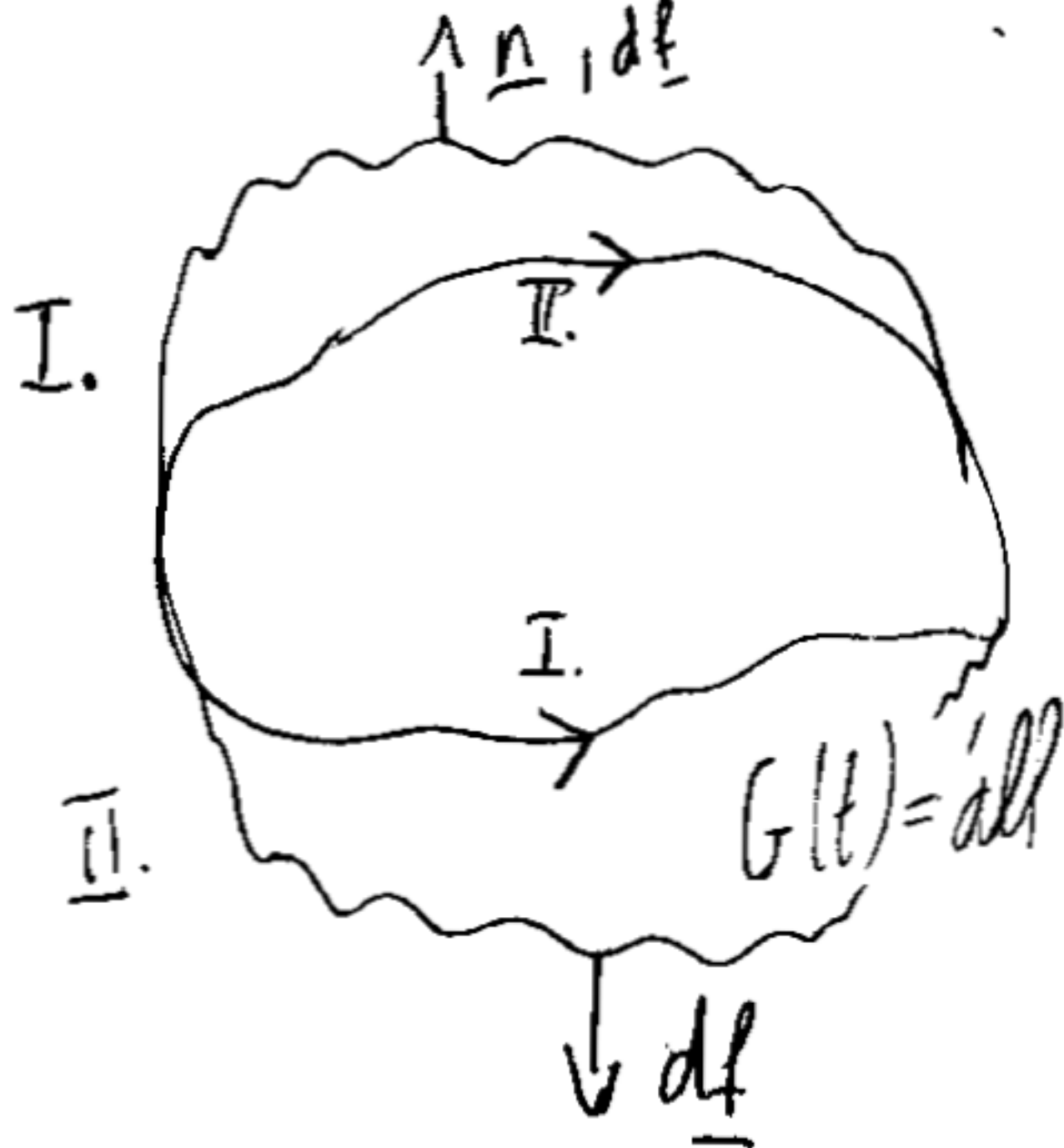
James Clerk Maxwell (1831 - 1879)

1873: $\oint_F \underline{D} \cdot d\underline{l} = \int_V \underline{j}_e \cdot dV$; $\oint_G \underline{E} \cdot d\underline{r} = -\frac{d}{dt} \int_F \underline{B} \cdot d\underline{f}$



$$\oint_{G(t)} \underline{B} \cdot d\underline{f} = 0 ; \quad \oint_G \underline{H} \cdot d\underline{r} = \int_F \underline{j}_m \cdot d\underline{f}$$

nincs az elektromos
térnek a deriváltja



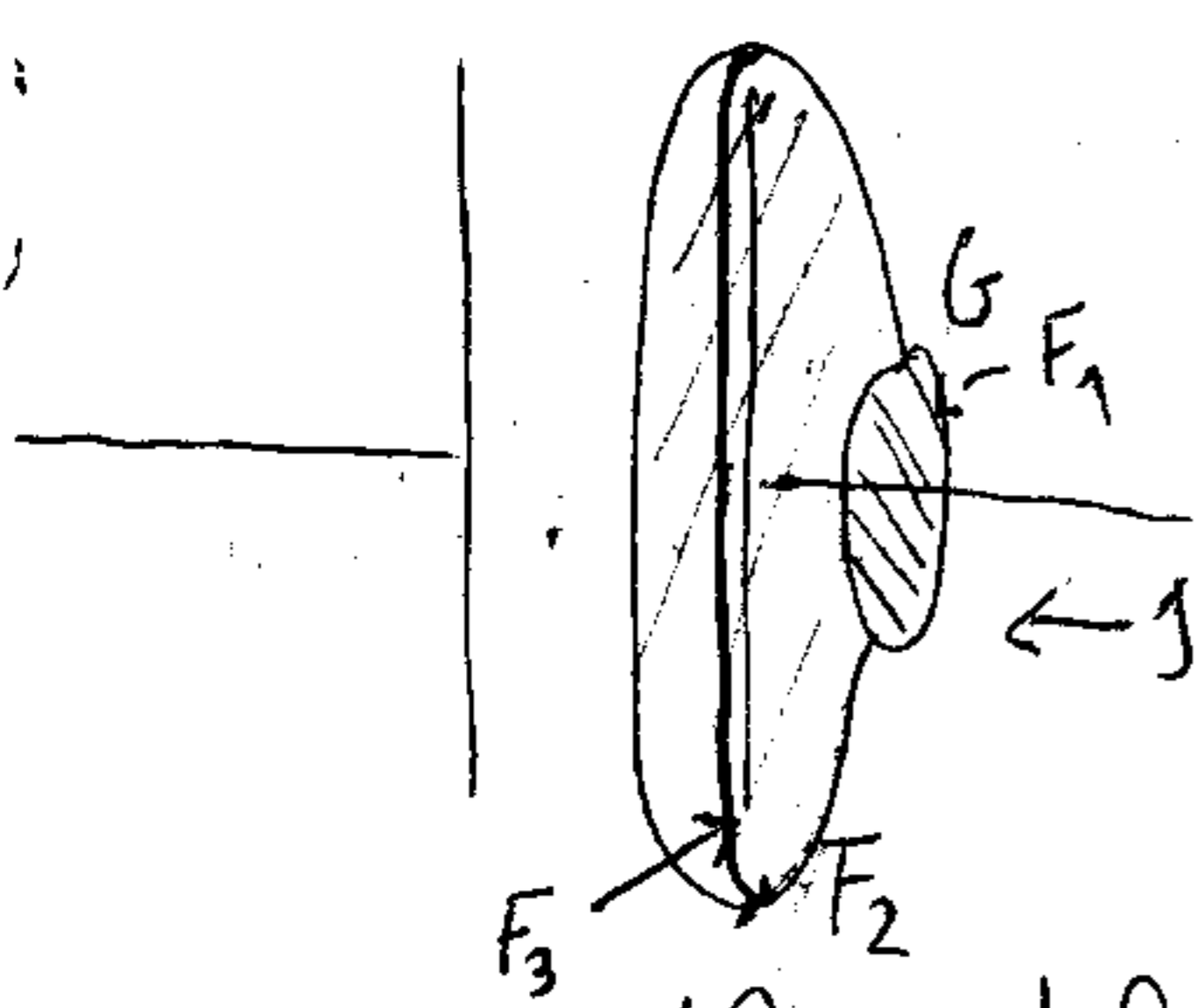
I + II felület zárt $\oint_G \underline{H} \cdot d\underline{r} = \int_{F_1} \underline{j}_m \cdot d\underline{f}$

$$\oint_G \underline{H} \cdot d\underline{r} = \int_{F_2} \underline{j}_m \cdot d\underline{f} +$$

$$0 = \frac{dQ}{dt} + \oint_F \underline{j} \cdot d\underline{f}$$

$$0 = \oint_{F_1 + F_2} \underline{j}_m \cdot d\underline{f} \quad \text{Csak stacionárius esetben!}$$

nem stacionárius esetben a gerjesztési törv. nem adja vissza



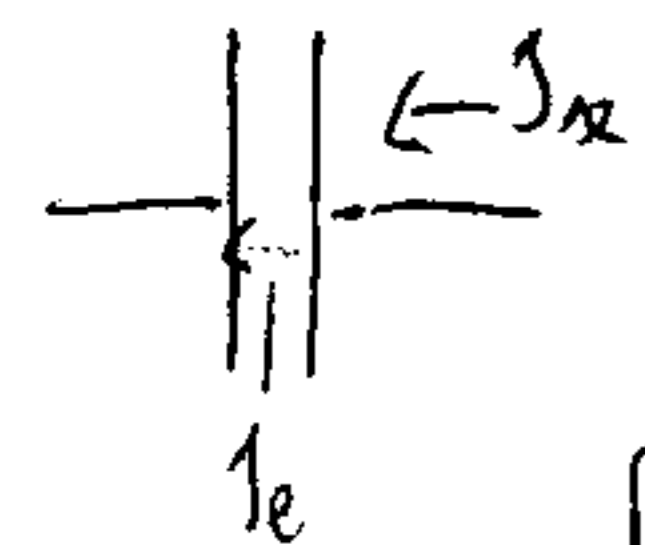
$$F_1: \oint \underline{H} d\underline{r} = I$$

$$F_2: \oint \underline{H} d\underline{r} = 0$$

Amper-féle görj. tör. nem működik.

ha $F(t) = \text{áll}$ $\left[\frac{\partial D}{\partial t} \right] = \left[\underline{j} \right]$

$$F_3: I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \frac{d}{dt} \int_V D dV \stackrel{!}{=} \int_V \frac{\partial D}{\partial t} dV = \int_V \underline{j}_{\text{eltolódási}} dV = I_e$$



eltolódási áramsűrűség

$$\oint_G \underline{H} d\underline{r} = \sum_i I_{\text{sz}} + \sum_j I_e = \int_V \underline{j}_{\text{sz}} + \underline{j}_e dV = \int_V \left(\underline{j}_{\text{sz}} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dV$$

megjelenik az elektromos tér időderiváltja

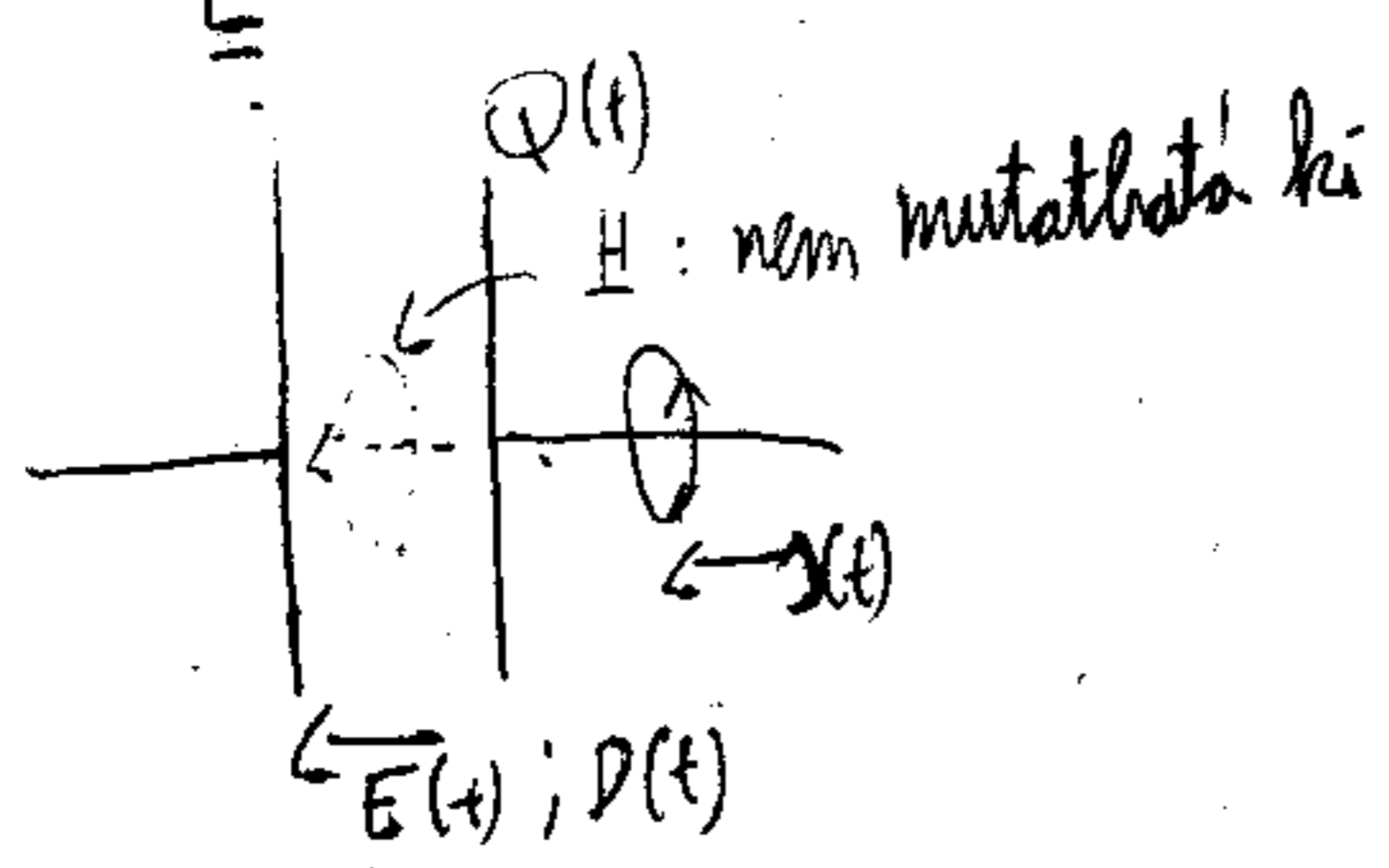
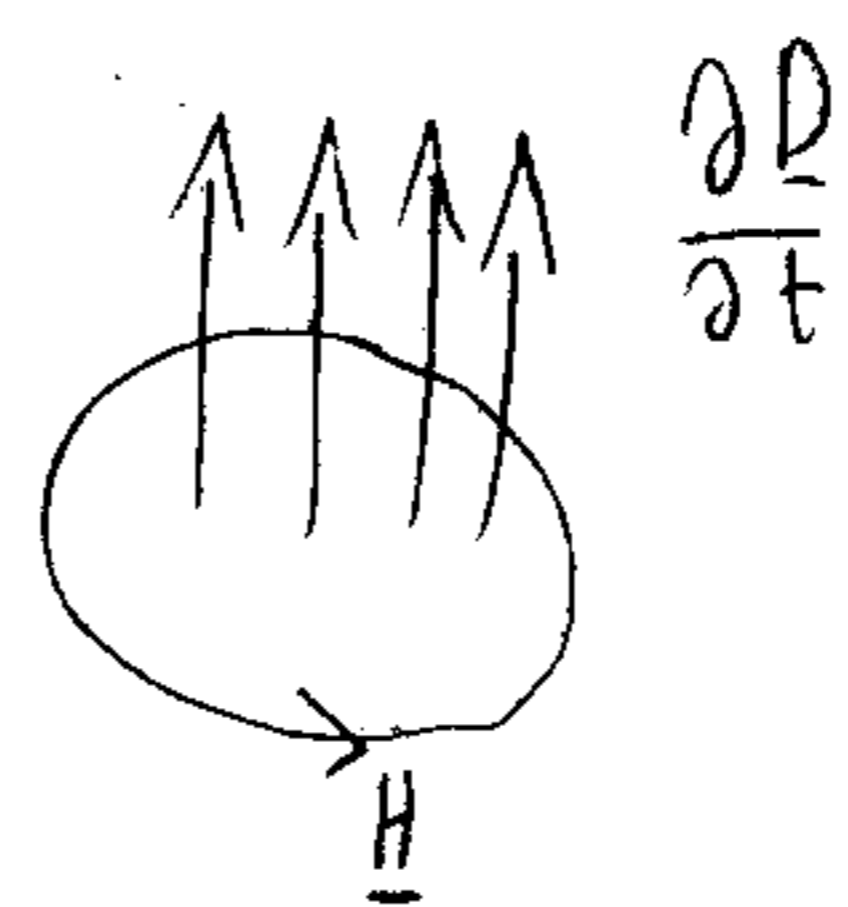
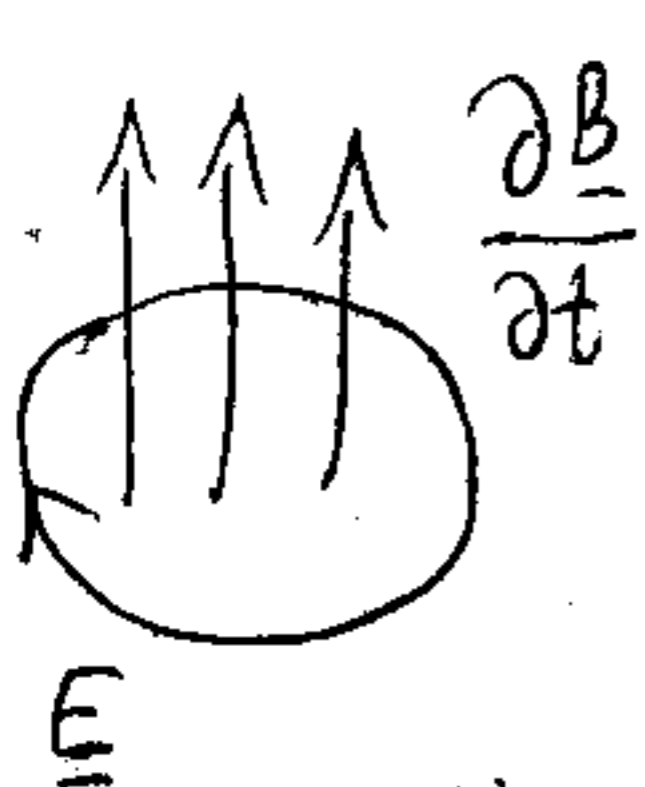
$$\frac{dE}{dt} \rightarrow B(t) \rightarrow E(t)$$

$$\underline{B} = \mu_0 \underline{j}$$

$$\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon \underline{E}$$

$$\underline{j} = \underline{\sigma} \underline{E}$$

$\oint D d\underline{l} = \int P_{\text{sz}} dV$	$\oint_B d\underline{l} = 0$
$\oint E d\underline{r} = -\frac{d}{dt} \int_B d\underline{l}$	$\oint_G \underline{H} d\underline{r} = \int_V \left(\underline{j}_{\text{sz}} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dV$



Megj:



$$\oint_G \underline{H} d\underline{r} = \int_{F_1} \underline{j} d\underline{t} + \int_{F_2} \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} d\underline{t}$$

$$\oint_G \underline{H} d\underline{r} = \int_{F_2} \underline{j} d\underline{t} + \int_{F_2} \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} d\underline{t}$$

$$0 = \oint_{F_1+F_2} \underline{j} d\underline{t} + \oint_{F_1+F_2} \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} d\underline{t} = \oint_{F_1+F_2} \underline{j} d\underline{t} + \frac{d}{dt} \underbrace{\oint_{F_1+F_2} \underline{D} d\underline{t}}_Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \oint \underline{j} d\underline{t} + \frac{dQ}{dt}$$

Elektromágneses hullámok:

$$\mu=1, \epsilon=1 \quad Q_{\text{re}}=0; \quad \underline{j}_{\text{re}}=0$$

$$\text{ekkor: } \oint_F \epsilon_0 \underline{E} d\underline{t} = 0; \quad \oint_G \underline{E} d\underline{r} = -\frac{d}{dt} \int \underline{B} d\underline{t};$$

$$\oint_F \underline{B} d\underline{t} = 0;$$

$$\oint_G \frac{\underline{B}}{\mu_0} d\underline{r} = \int_F \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} d\underline{t}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$



$$\begin{matrix} \rightarrow E(t) \rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} \rightarrow B(t) \rightarrow \frac{\partial B}{\partial t} \\ \uparrow \\ \text{ha nem} \\ \text{allando} \end{matrix}$$

$$\oint_G \underline{B} d\underline{r} = \frac{1}{c^2} \int_F \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} d\underline{t}$$

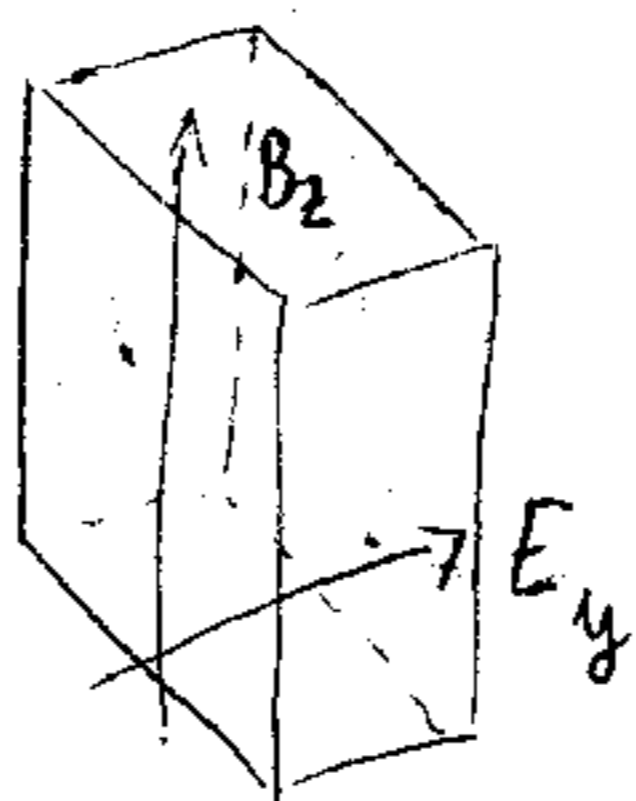
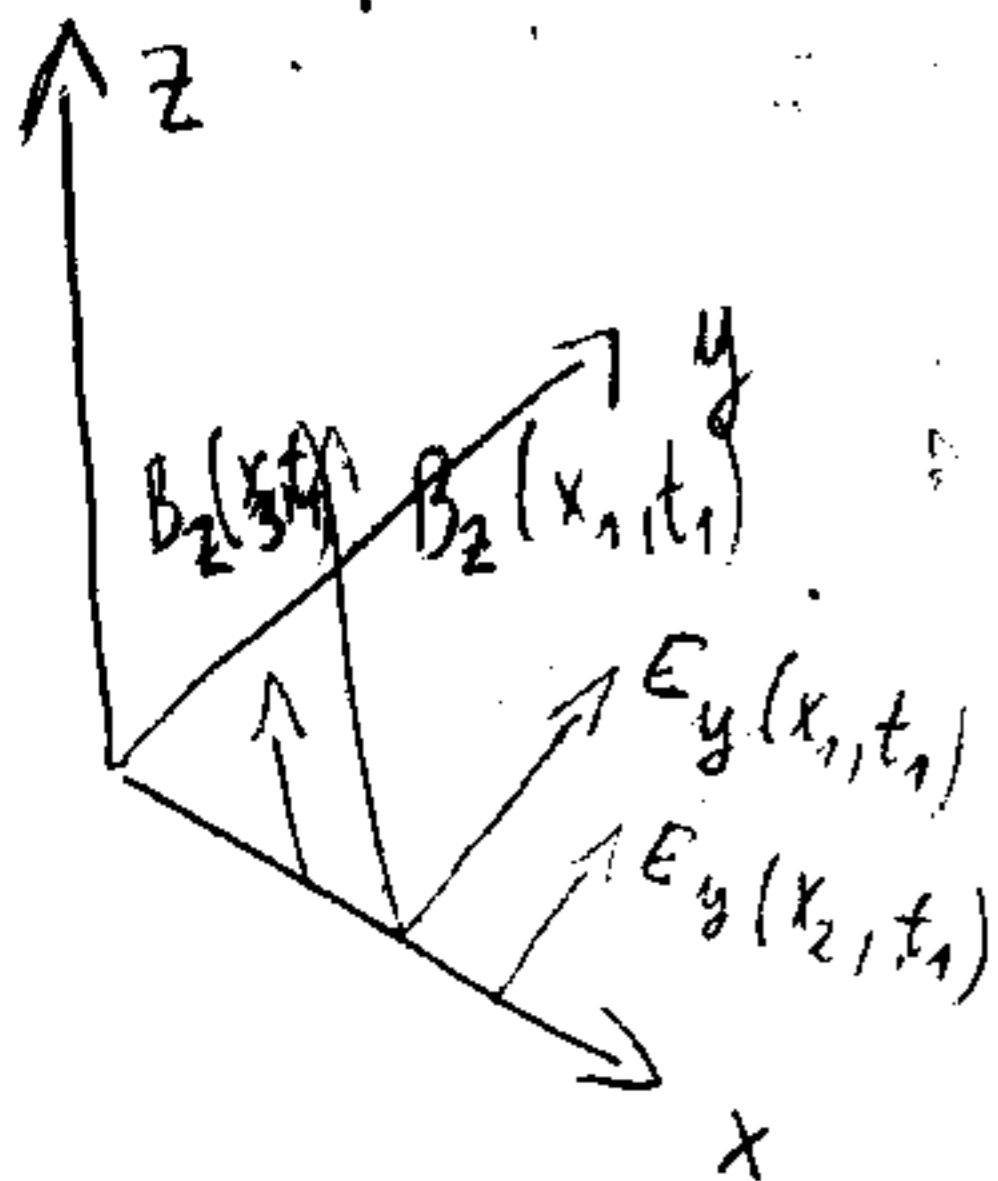
$$\oint_G \underline{B} d\underline{r} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_F \underline{E} d\underline{t}$$

$$\underline{All}: \left. \begin{matrix} \underline{E} = (0, E_y, 0) \\ \underline{B} = (0, 0, B_z) \end{matrix} \right\} \text{megoldás}$$

$$\underline{E} = (0, E_y(x,t), 0)$$

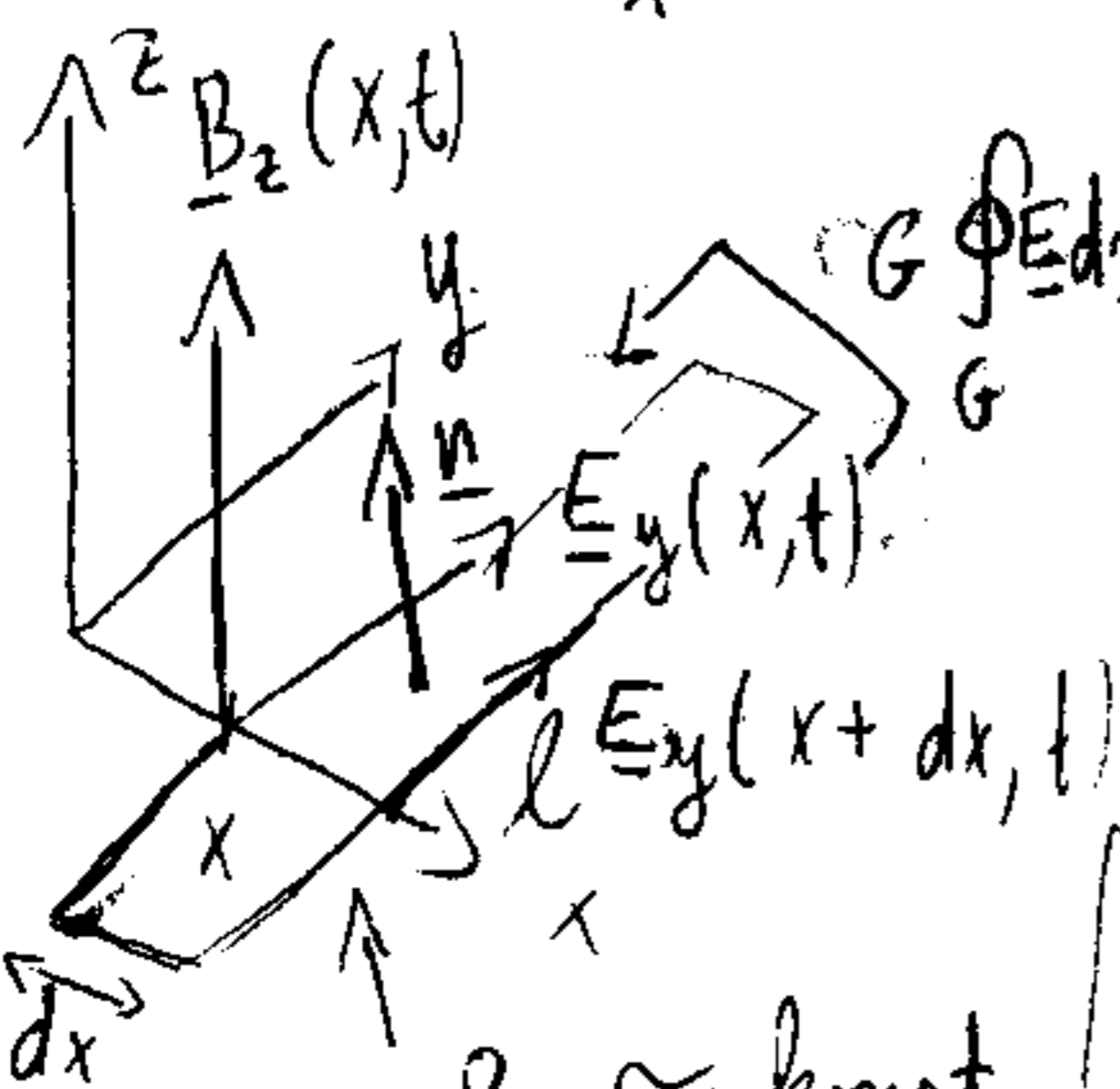
$$\underline{B} = (0, 0, B_z(x,t))$$

kielégítik a 4 egyenletet?



$$\oint_{\Gamma} \underline{E} \cdot d\underline{l} = 0 \text{ V}$$

$$\oint_{\Gamma} \underline{B} \cdot d\underline{l} = 0 \text{ V}$$

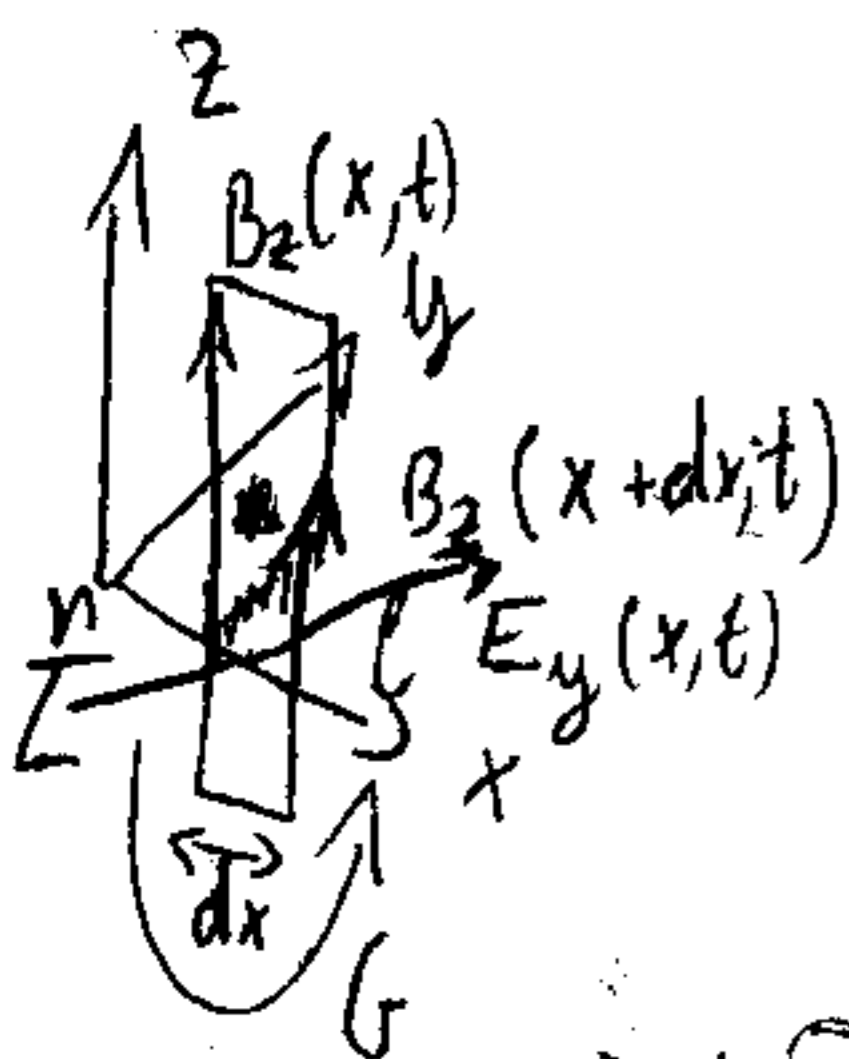


$$\oint_{\Gamma} \underline{E} \cdot d\underline{l} = E_y(x+dx, t) l - E_y(x, t) l =$$

$$\approx - \frac{\partial}{\partial t} (B_z \cdot l dx) \quad / : dx$$

$B_z \approx \text{konst.}$

$$\text{I. } \frac{\partial E_y}{\partial x} = - \frac{\partial B_z}{\partial t}$$



$$\oint_{\Gamma} \underline{B} \cdot d\underline{l} = B_z(x+dx, t) l - B_z(x, t) l = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} E_y l dx$$

$$\text{II. } \frac{\partial B_z}{\partial x} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\text{I: } \left| \frac{\partial}{\partial x} \right. \quad \text{II: } \left| \frac{\partial}{\partial t} \right. \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

hullámegyenlet

c : terjedési sebesség

megoldás: $f(t \pm \frac{x}{c}) = f(x \pm ct)$

k : hullám szám: egységnyi

Spec. eset: $f = \sin$

$k = \frac{\omega}{c}$

hossz, hány db hullám

$$E_y(x, t) = E_{y0} \sin(t \pm \frac{x}{c}) = E_{y0} \sin(\omega t \pm kx)$$

$$B_z(x, t) = B_{z0} \sin(\omega t \pm kx)$$

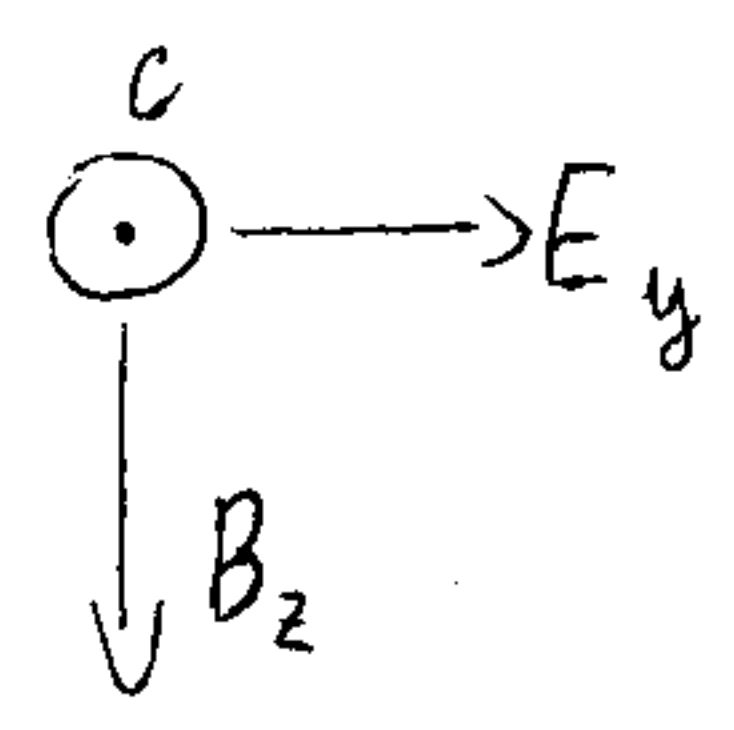
$$\text{II } \frac{\partial E_y}{\partial t} = E_{y0} \omega \cos(\omega t \pm kx) \stackrel{!}{=} \frac{\partial B_z}{\partial x} = B_{z0} k \cos(\omega t \pm kx)$$

$$\left(E_{y0} \cdot \omega = \cancel{\frac{1}{c^2}} B_{z0} k \xrightarrow{/:k} E_{y0} \frac{\omega}{k} = -\frac{1}{c^2} B_{z0} \right)$$

$$-\frac{1}{c^2} E_{y0} \omega \cos(\omega t \pm kx) \stackrel{!}{=} B_{z0} k \cos(\omega t \pm kx) \quad /: k$$

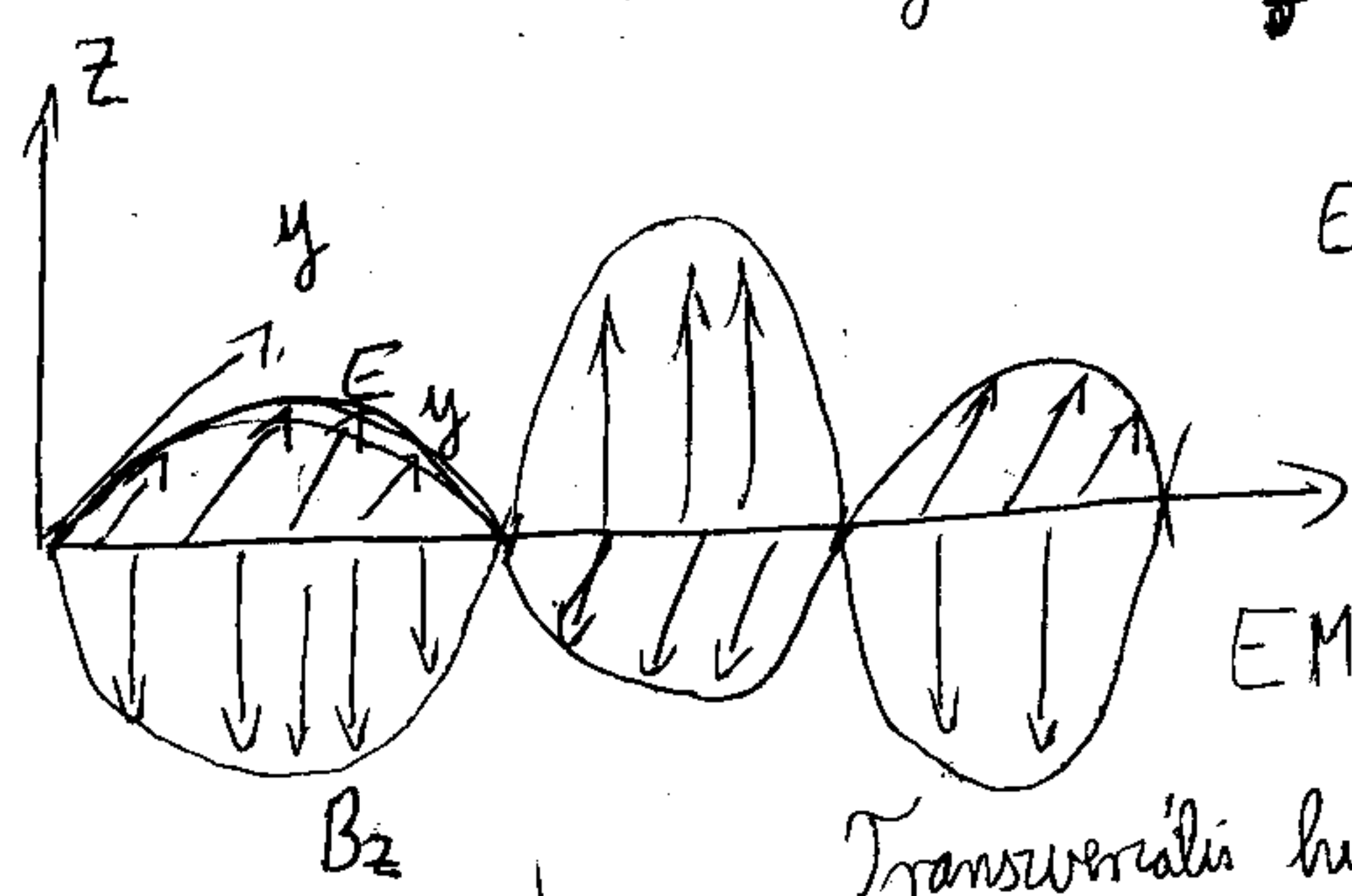
$$-\frac{1}{c^2} E_{y0} \frac{\omega}{k} = B_{z0} \quad \frac{\omega}{k} = c$$

$$\boxed{\frac{E_{y0}}{B_{z0}} = -c}$$



Lehetséges megoldás: $E_y(x,t) = E_{y0} \sin(\omega t \pm kx)$

$$B_y(x,t) = B_{z0} \sin(\omega t \pm kx + \pi)$$

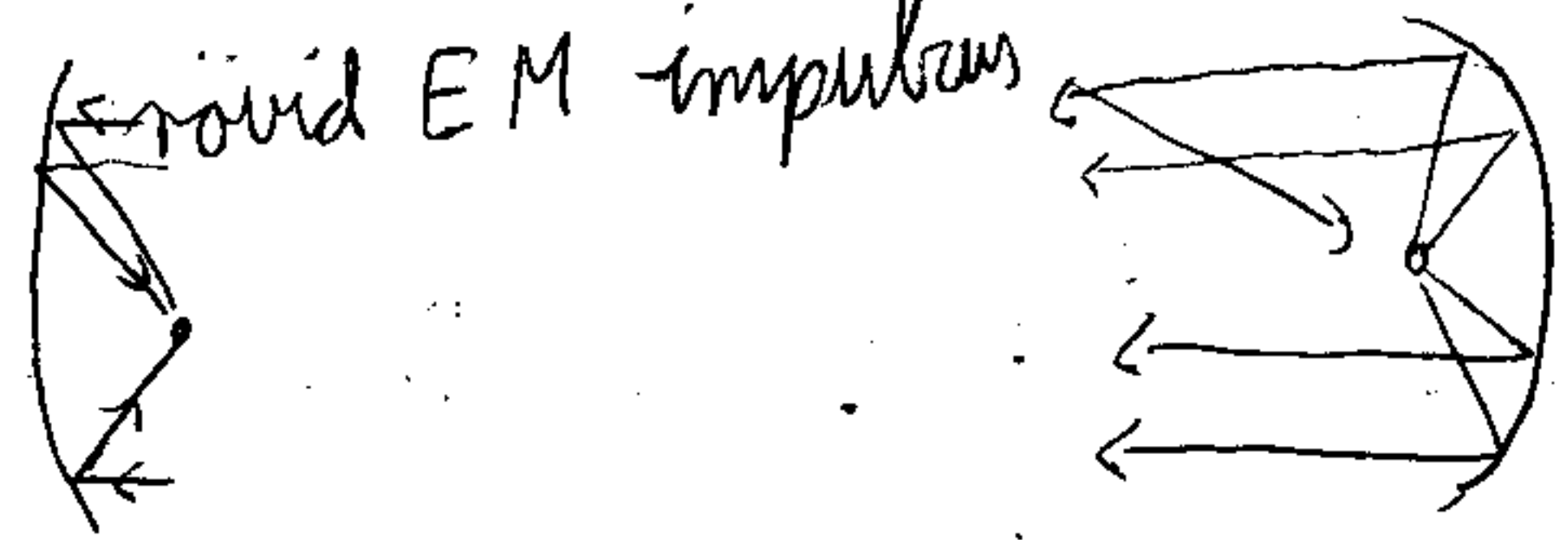


EM hullám tulajdonságai \leftrightarrow látható fény tulaj.
 kísérleti bizonyítás?

EM létezik? \rightarrow látható fényre érvényes törvények rá is vonatkoznak?

$c = \lambda \nu$ $\lambda_{\text{fény}} \approx 400 - 800 \text{ nm} \approx 10^{-7} \text{ m}$

Hertz - kísérlet: rövid EM impulzus



rács - polarizálás



interferencia
 elhajlás

forrás



$10,5 \text{ GHz} \rightarrow \lambda = 2,8 \text{ cm} \approx 10^{-2} \text{ m}$

detektor

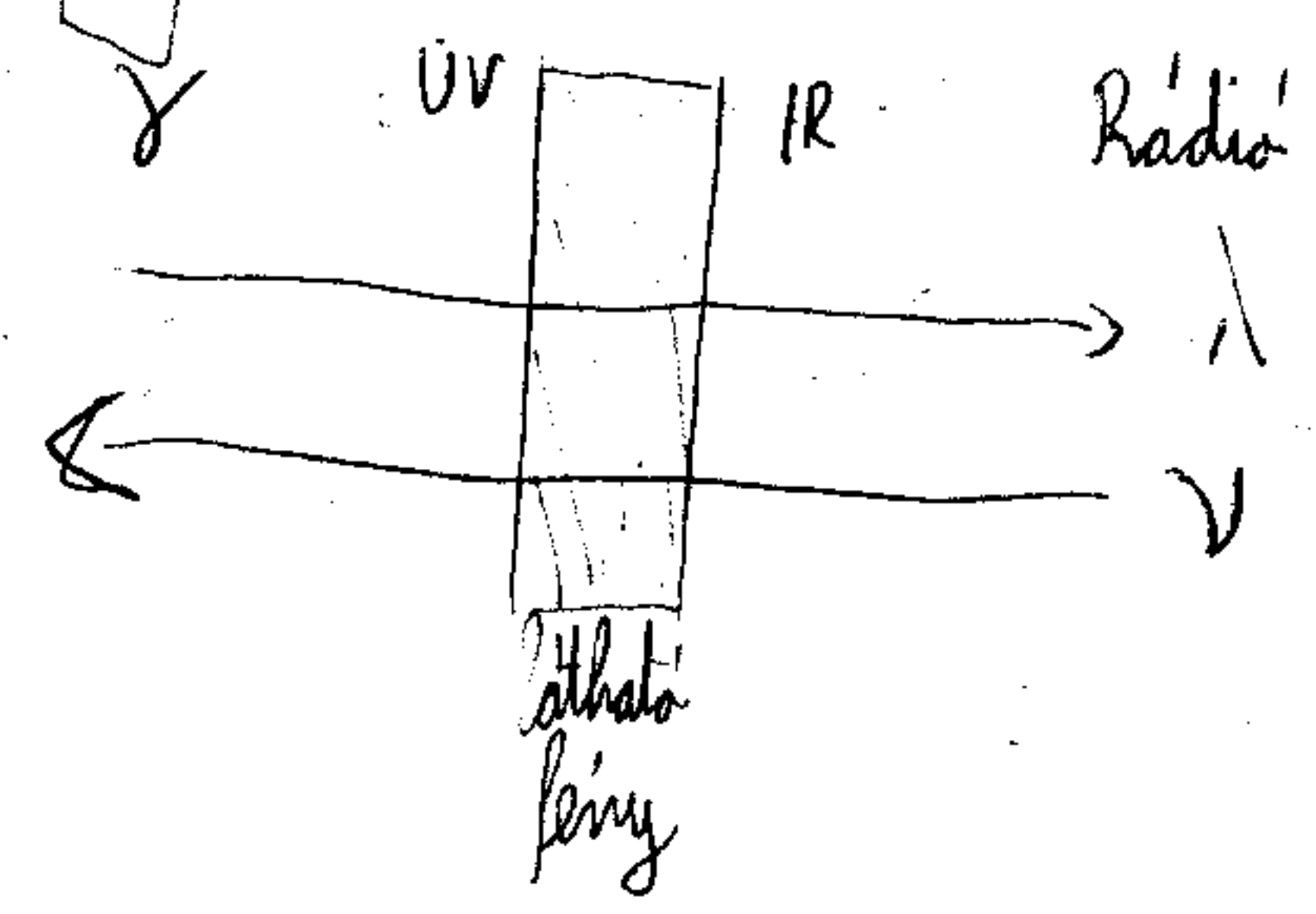


\rightarrow hullámmagasság

viszaverődés, visszaverés - intenzitás
 fókusz, prizma, vizsgálata



Hertz-kísérletek:

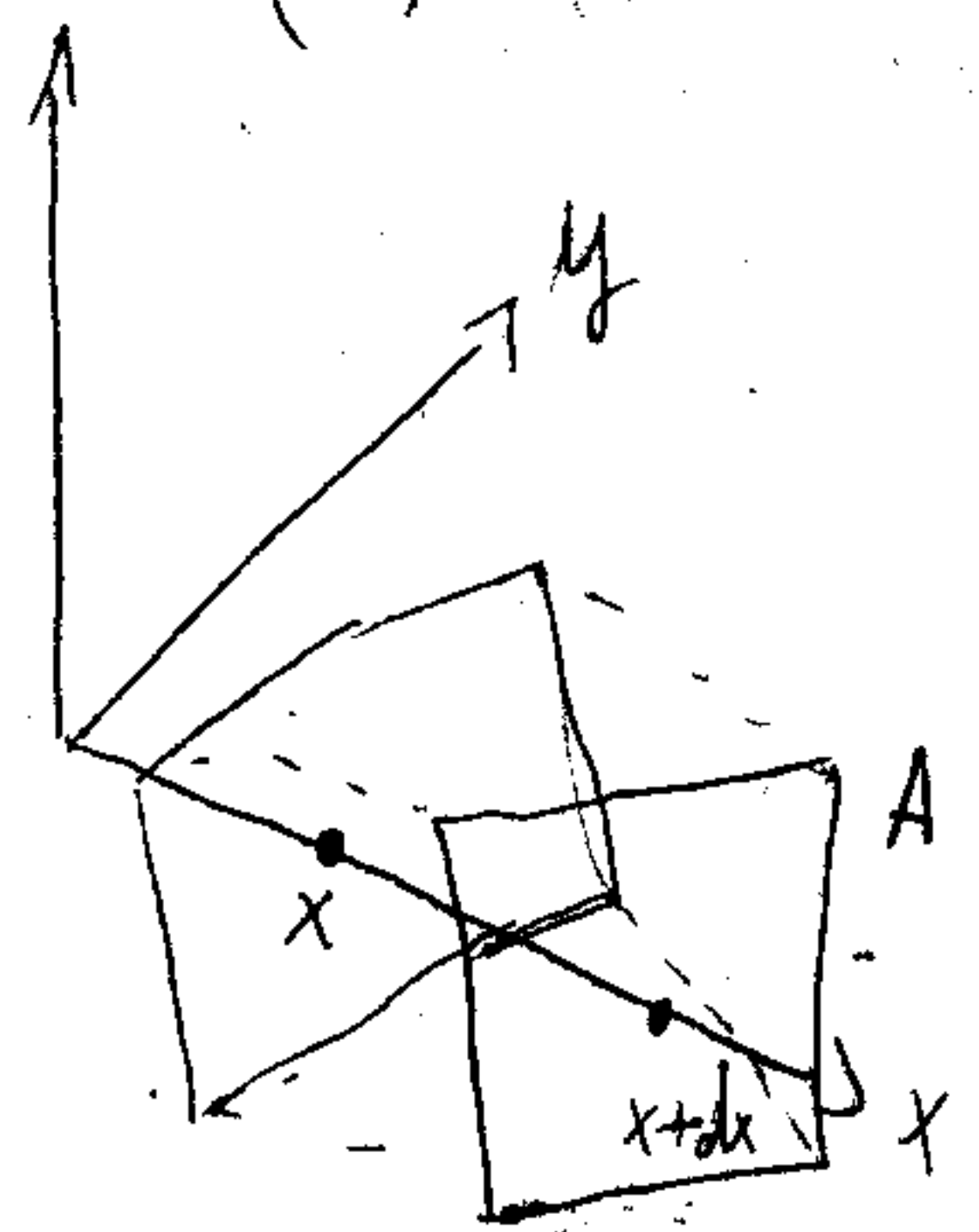


Energia: $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} \right.$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon_0 E \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} B \frac{\partial B}{\partial t} \right] \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon_0 E \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} B \frac{\partial B}{\partial t} =$$

$-c^2 \frac{\partial B}{\partial t} \quad -\frac{\partial E}{\partial x}$

$$= \left(\epsilon_0 \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} E \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} B \frac{\partial E}{\partial x} \right) = - \left(E \frac{\partial H}{\partial x} + H \frac{\partial E}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} (E H)$$



$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \int u dV = \int \frac{\partial u}{\partial t} dV =$$

$$= - \int \frac{\partial}{\partial x} (E H) dV = - \left[(E H) (x+dx) - (E H) (x) \right] \cdot A \quad \text{⊖}$$

$\underline{S} := \underline{E} \times \underline{H}$ Poynting-vektor

$\underline{S}(x)$

$|\underline{S}| = E H$

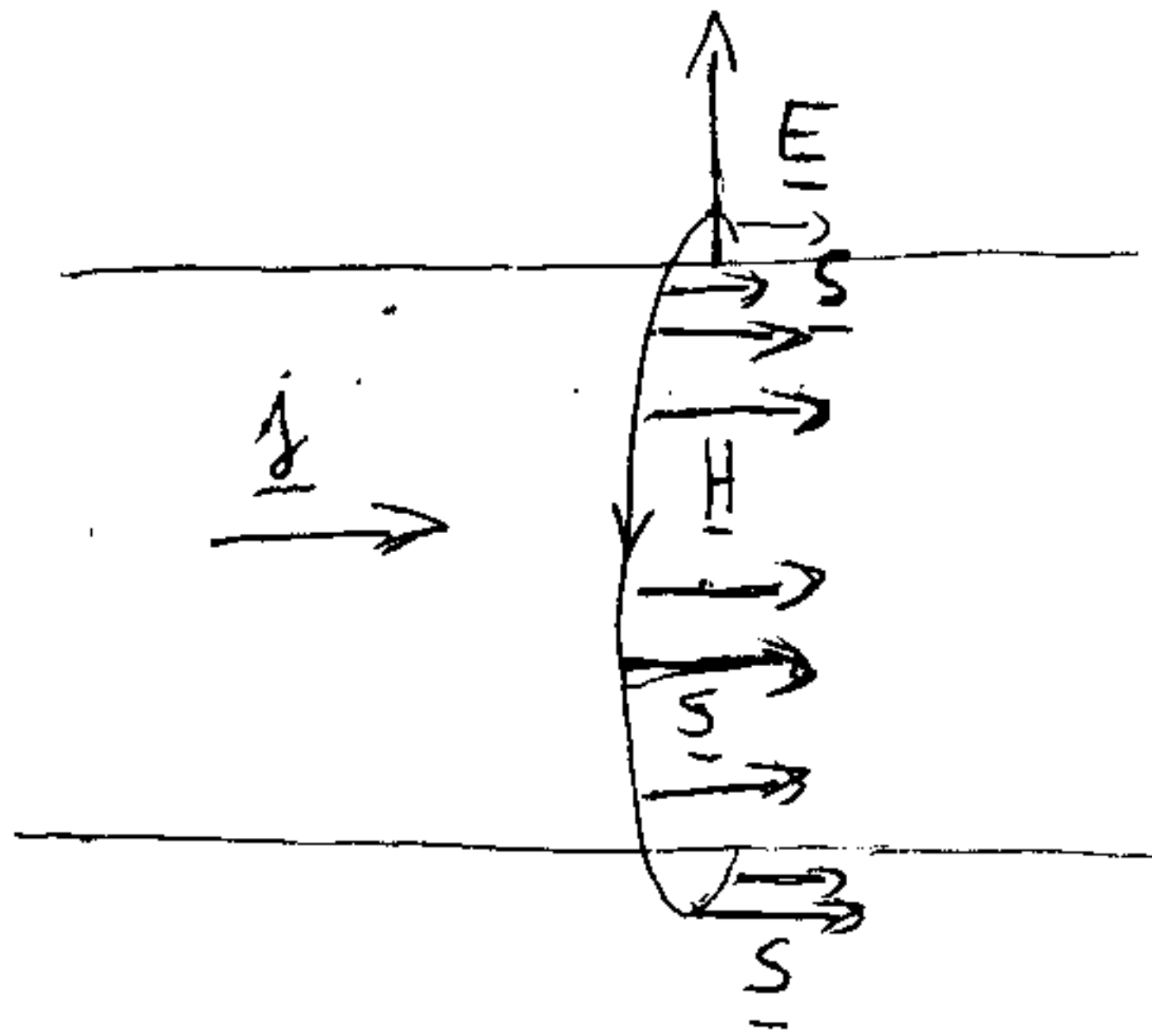
$\ominus \oint \underline{S} \cdot d\underline{f}$: energiáram fluxus

$$\frac{du}{dt} + \oint \underline{S} \cdot d\underline{f} = 0$$

EM tétel - energiamegmaradás

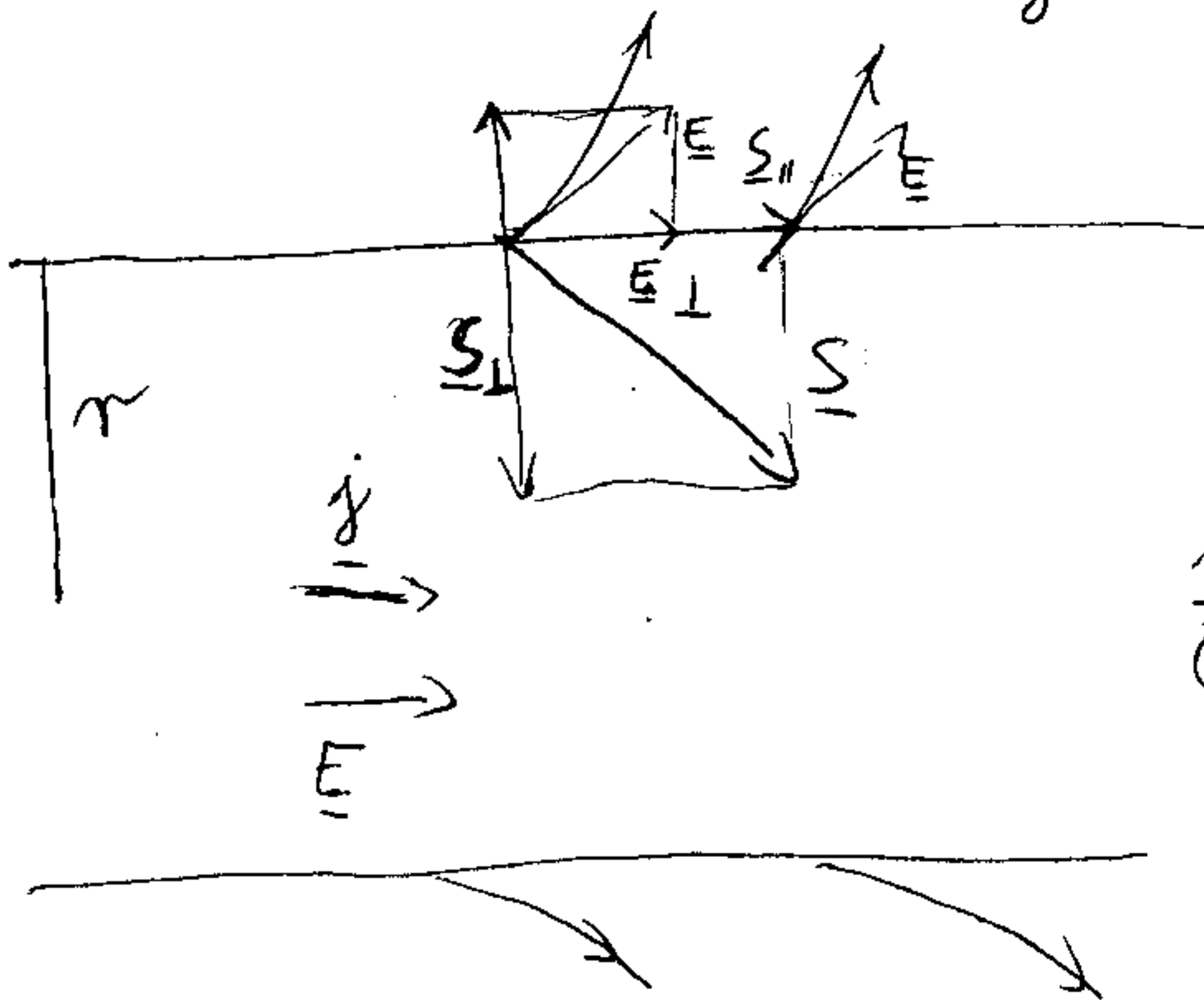
$$\frac{dU}{dt} = - \oint_F \underline{S} \cdot d\underline{f} - \int_V \underline{j} \cdot \underline{E} \, dV = \frac{d}{dt} \int_V u \, dV$$

Drót esetén: 2 eset: - ideális vezető: $\rho=0; \sigma=\infty$



$$\underline{j} = \sigma \underline{E} \rightarrow \underline{E} = \underline{0}$$

- nem ideális vezető σ véges



$$S_{\perp} \cdot f = E_{\perp} \cdot H \cdot f =$$

$$= \frac{j}{\sigma} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{j}{r} \cdot 2\pi r l =$$

$$j = \frac{j}{r^2 \pi} = \rho j l \cdot \frac{j}{r^2 \pi} =$$

$$\frac{1}{\sigma} = \rho = j^2 \frac{\rho l}{r^2 \pi} = j^2 R \quad \text{Joule-hő}$$

$f(\underline{x} \pm \frac{x}{c})$ all: 3 dimenzióban is igaz; 3D $\underline{E} = \underline{E}_0 \sin(\omega t \pm \underline{k} \cdot \underline{r})$

$$\underline{B} = \underline{B}_0 \sin(\omega t \pm \underline{k} \cdot \underline{r} + \pi)$$

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \quad \text{hullámvektor}$$

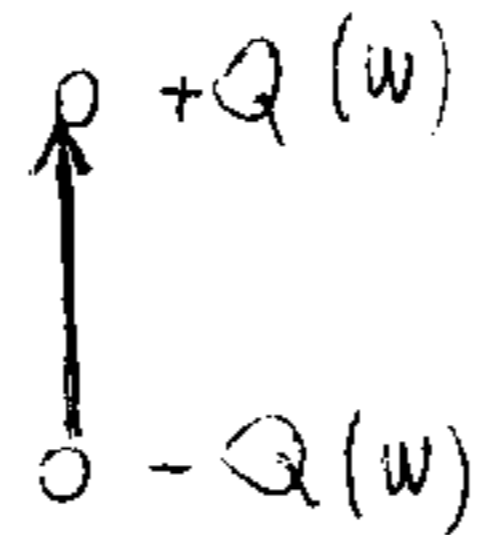
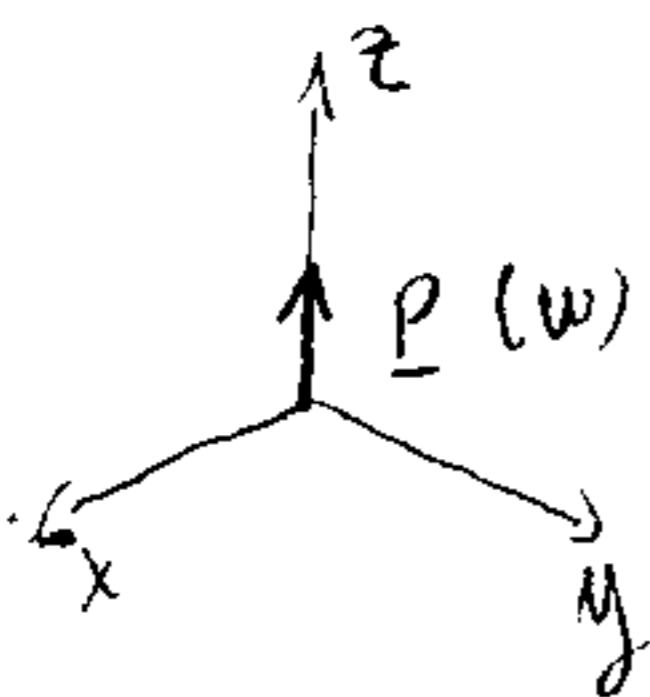
$$\underline{E} \perp \underline{B} \quad \underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$$

Gömbhullám megoldás

$$\underline{E} = \underline{E}_0 \frac{1}{|r|} \sin(\omega t + \underline{k} \cdot \underline{r})$$

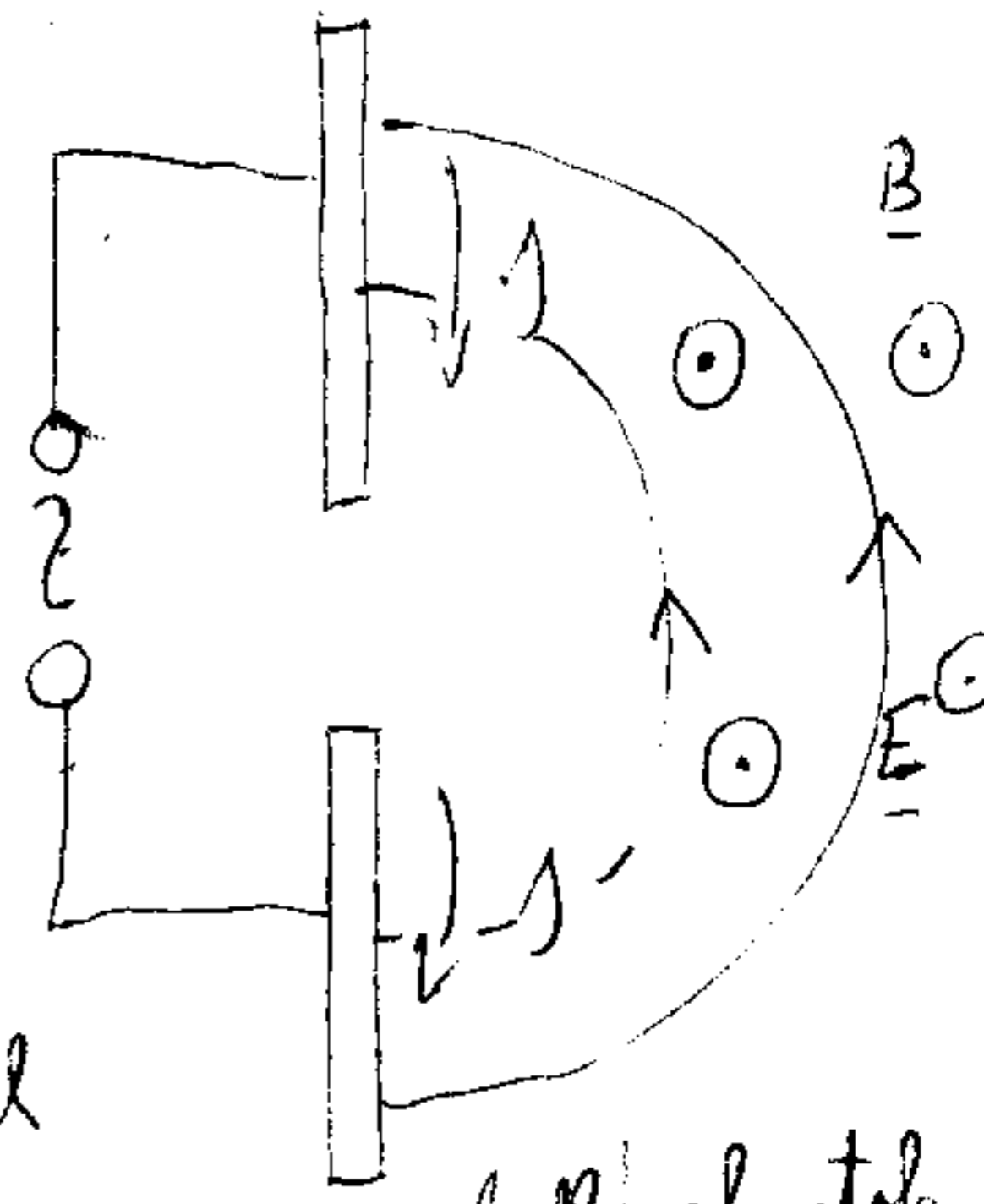
Elektromágneses sugárzás

- ponttöltés mozgása \rightarrow EM hullám
- dipól rezgése \rightarrow



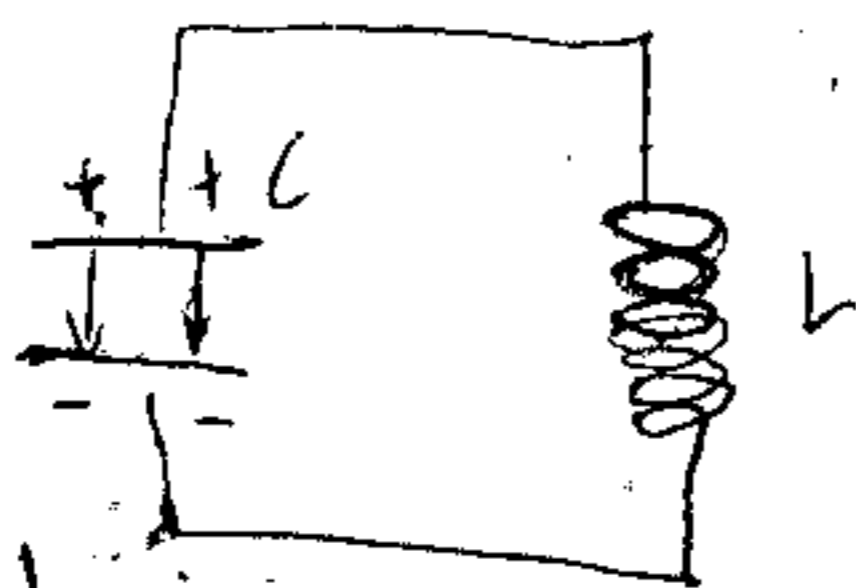
áram iránya megfordul
 \underline{E} és \underline{B} iránya megfordul

előállítás:

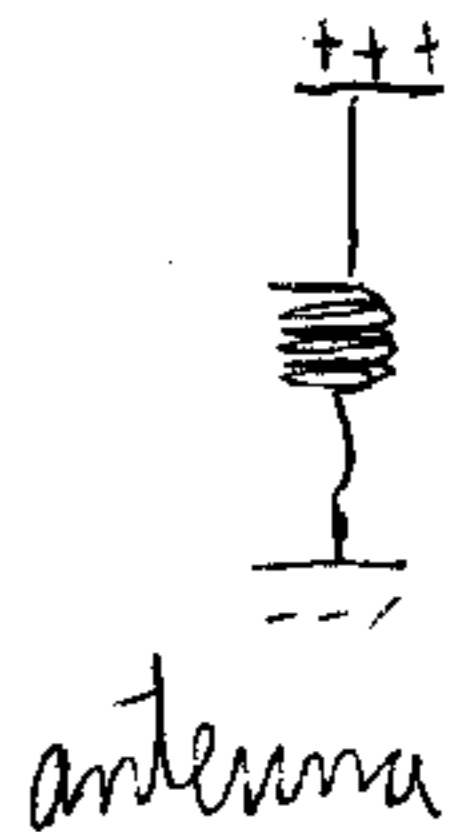
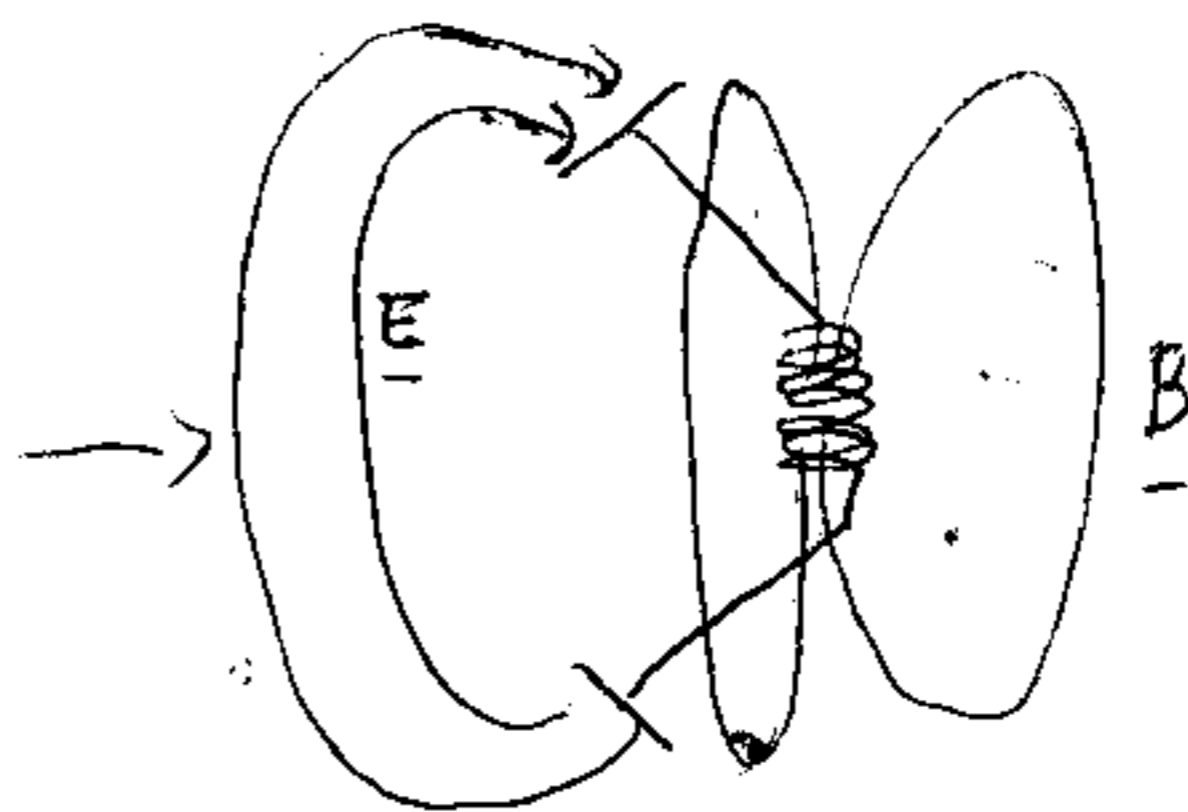


hullámfontok
 leválnak

Ideális rezgőkör



deig egy fémműl
 $j(\omega)$
 L, C



$$c = \lambda \nu$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu_H}$$

$$= \frac{3 \cdot 10^8}{10^4 \text{ Hz}} \approx 10^4 \text{ m}$$

hang fr.



\rightarrow sugárzás hullámszáma

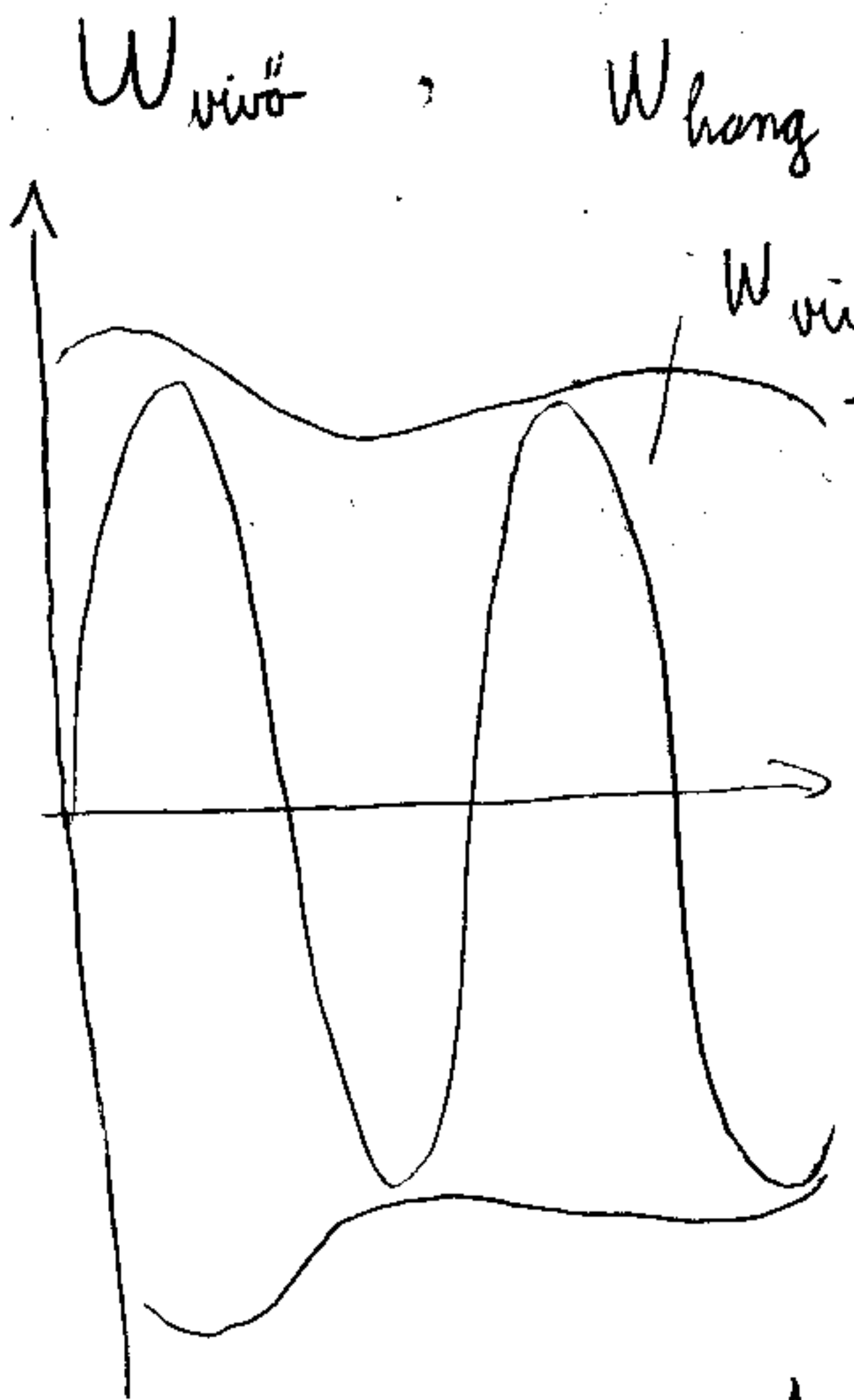
$$\frac{\lambda}{2} n = l$$

vegyjük $n=1$ esetet

$$l \approx 10^4 \text{ m}$$

Moduláció:

Adás
Amplitúdó
moduláció
AM
(lehet fr. mod
FM)



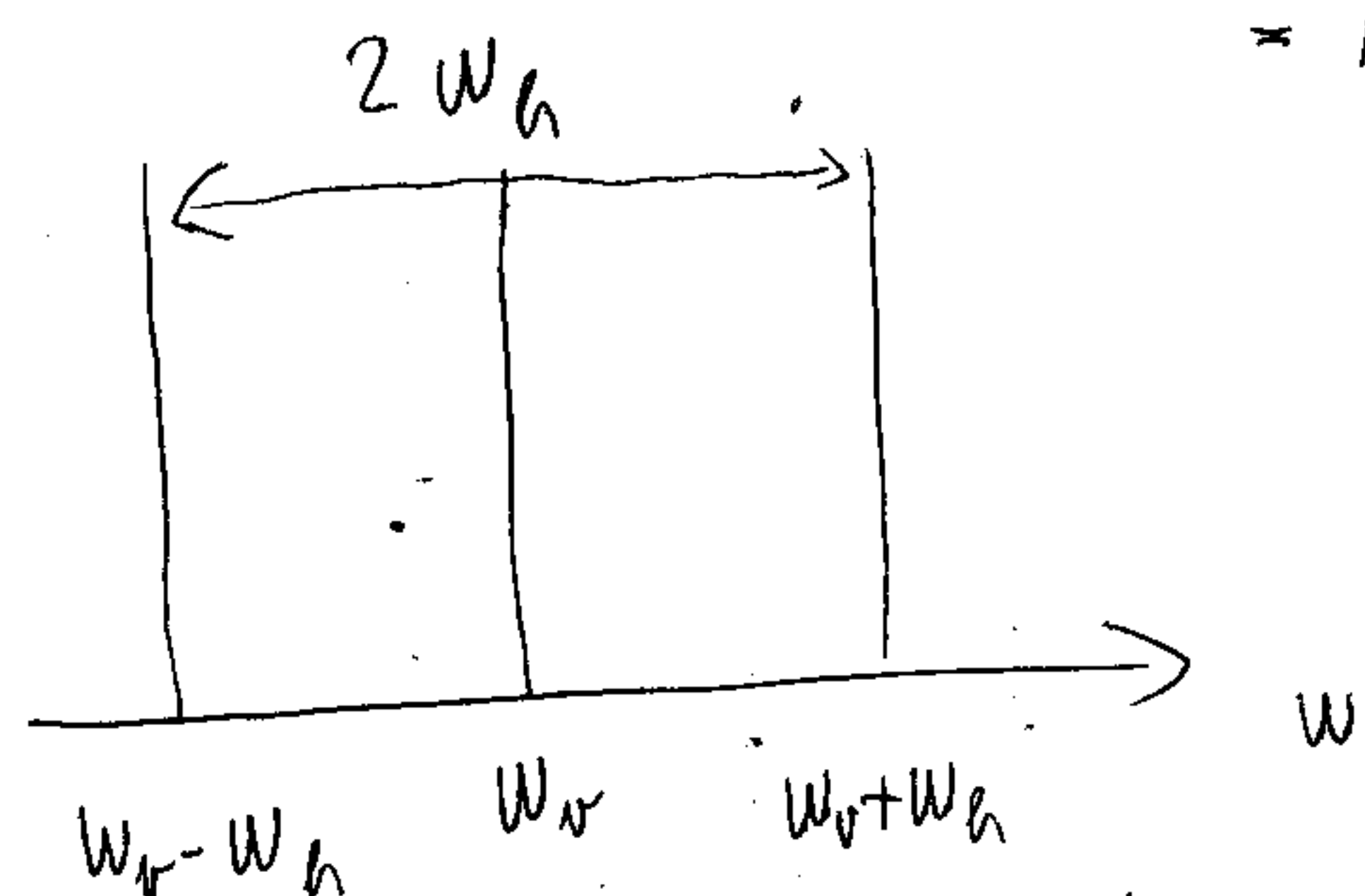
$$x(t) = A(\omega) \sin(\omega_v \cdot t) =$$

$$= A(1 + m \sin(\omega_h t)) \cdot \sin(\omega_v \cdot t) =$$

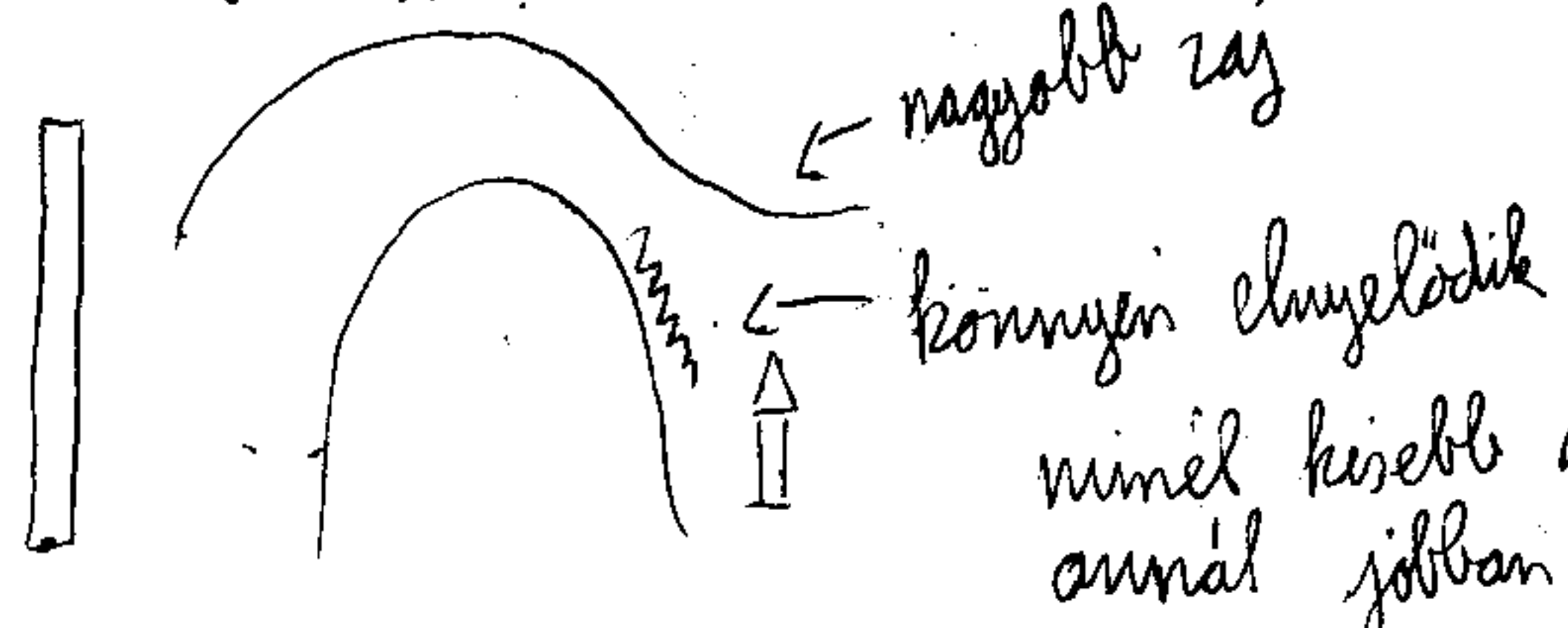
$$= A \sin(\omega_v \cdot t) + A m \sin(\omega_h t) \cdot \sin(\omega_v \cdot t)$$

$\omega_h \approx 10^4 - 10^3 \text{ Hz}$

$$= A \sin(\omega_v \cdot t) + \frac{A}{2} [\cos((\omega_v + \omega_h)t) - \cos((\omega_v - \omega_h)t)]$$

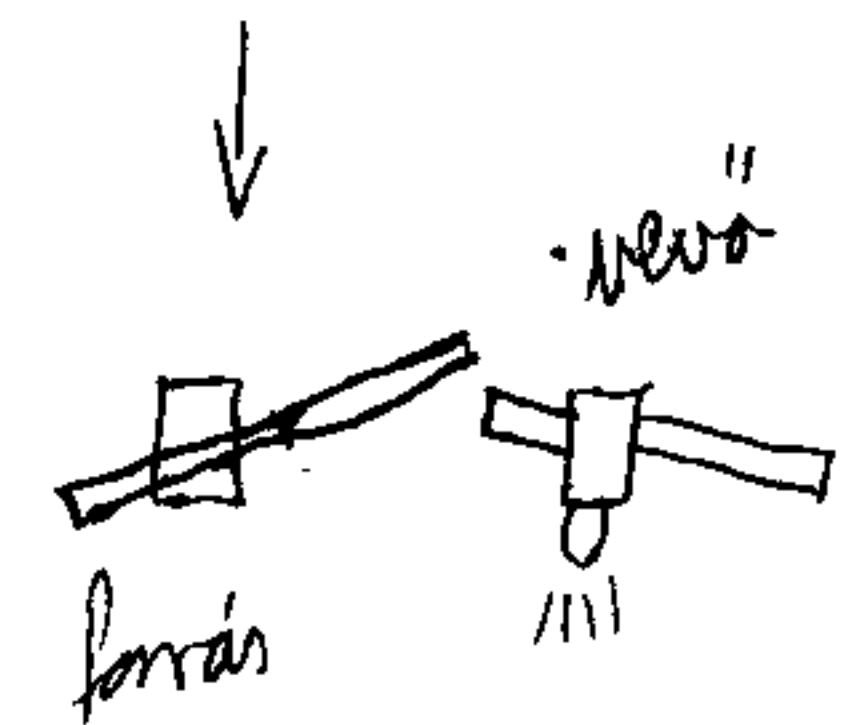


ω_v	λ	
300 kHz	~1000 m	hosszú hullám
3-30 MHz	~100 m	középhullám
300 MHz	1-10 m	UR H ultra rövid hullám
G Hz	~1cm	mobil



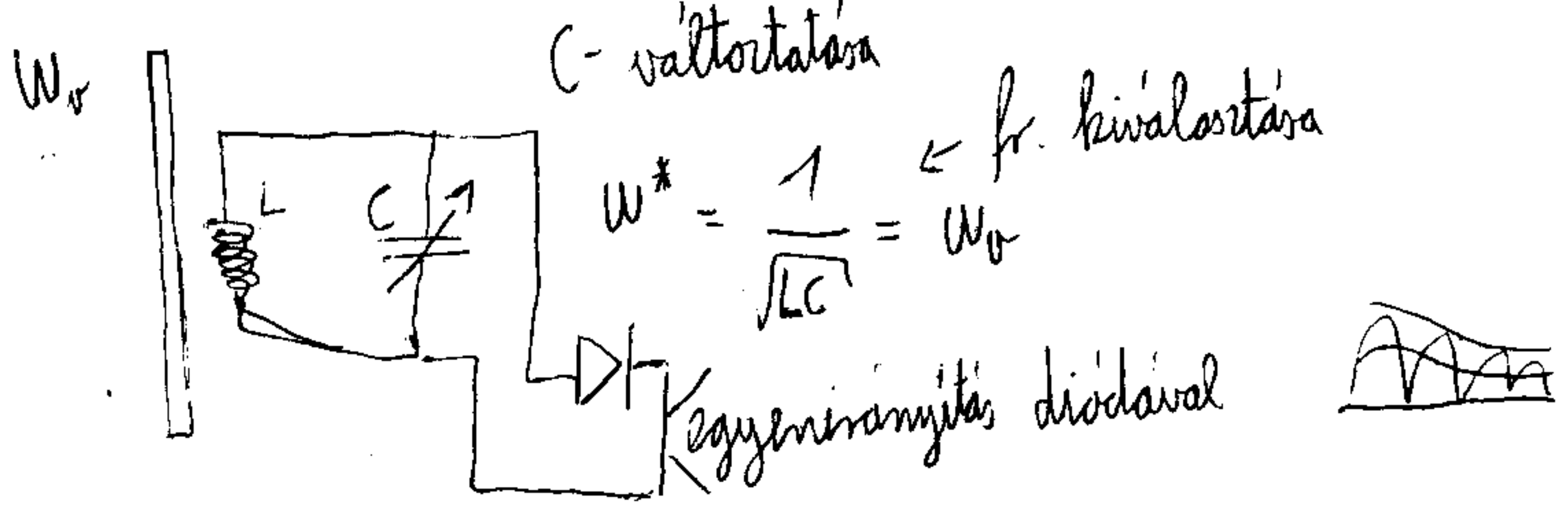
minél kisebb a hullámhossz → átjáróállomás
annál jobban elterelődik

Hisztória: 434 MHz · 2.35 cm = 4,34 · 10⁸ · 7 · 10⁻⁷ = 30 · 10⁷

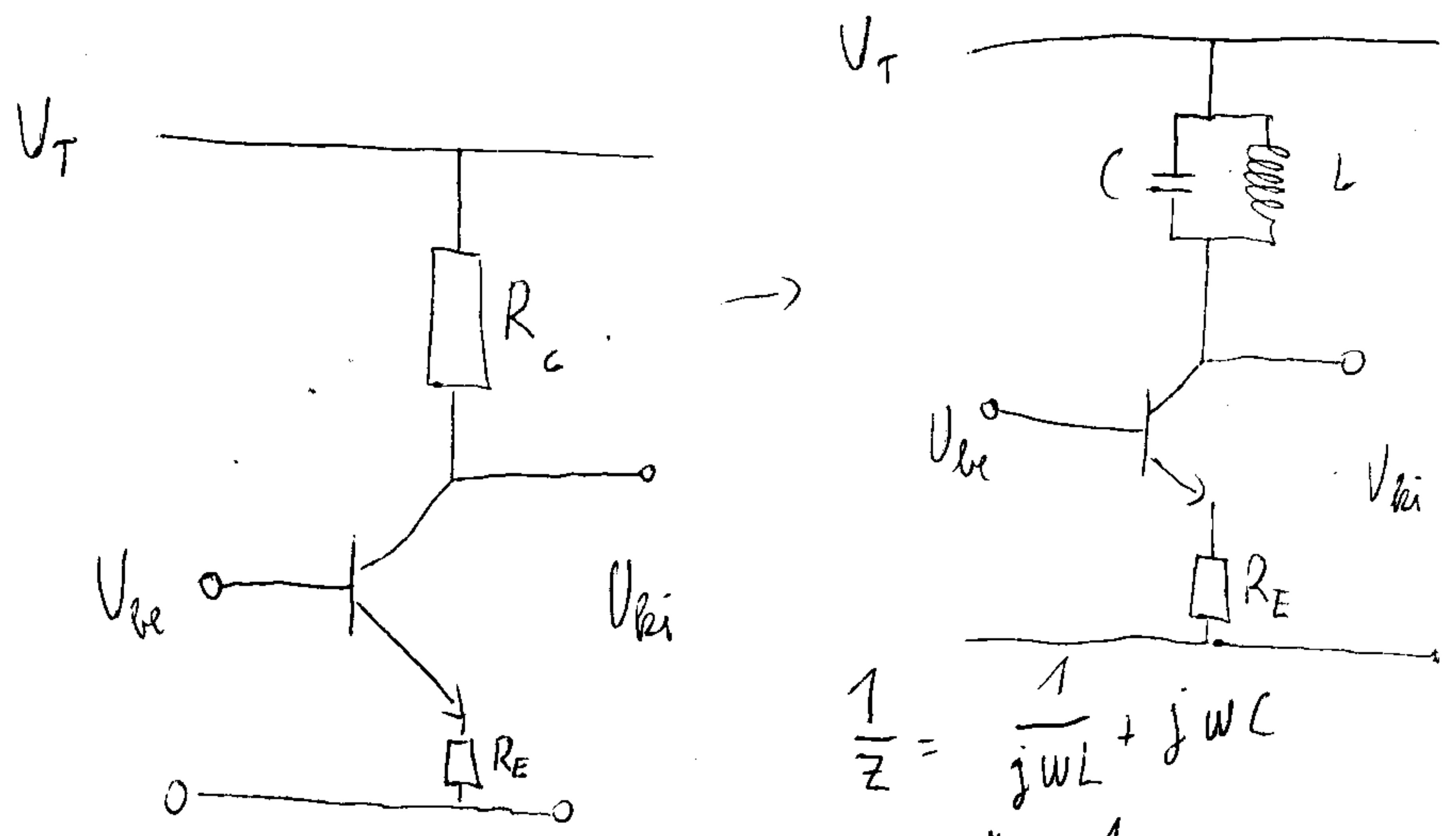


hosszabb rádió visszaverődik az EM sug.

Vétel:



erősítés transistornal:



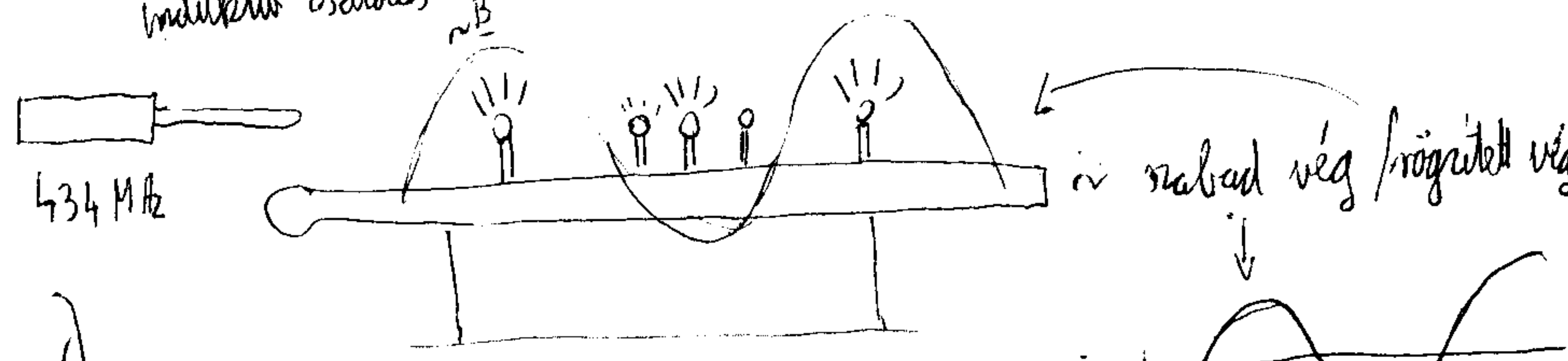
$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$$

$$\omega = \omega^* \quad \frac{1}{Z} = 0$$

$$A = -\frac{V_{ki}}{V_{be}} = \frac{R_c}{R_E} \quad Z = \infty$$

Thesislet: EM hullámok irányított terjedése

hecher - drótpár
induktív csatolás



duzzadóhelyeken gyullad ki az izzó

terjedési sebesség meghatározása:

minimumhelyek távolsága: 35 cm

$$\frac{\lambda}{2} = 0,35 \text{ m}$$

$$\nu = 343 \text{ MHz}$$

$$c = \lambda \nu = 0,7 \cdot 4,34 \cdot 10^8 =$$
$$= \underline{\underline{3,04 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Vízgáról: