Universidad
Técnica Nacional

Puntos críticos, sentido de variación, máximos y mínimos

Coordinación de Matemática y Estadística ME-003 Cálculo I

Para una mejor visualización del documento se le recomienda descargar el mismo y utilizar alguna herramienta lectora de PDF. Al abrirlo se sugiere visualizarlo en pantalla completa para un mejor uso de la navegación. A continuación se detallan los botones de navegación para facilitar su utilización:

Flechas para avanzar hacia atrás y hacia adelante.

Ir al menú principal

Ir al página de información.

Presentación

Este material tiene como finalidad desarrollar las habilidades y destrezas necesarias para determinar puntos críticos, sentido de variación, máximos y mínimos de una función.

Para ello, se plantean una serie de ejercicios, los cuales serán resueltos paso a paso, resaltando aquellos aspectos importantes para resolver cada uno de ellos.

Es importante recalcar que este tema, es una de las aplicaciones de la primera derivada.

Índice

A manera de inicio

Un uso matemático del concepto de derivada se ve reflejado, cuando se analiza la gráfica de la curva que representa una función, particularmente cuando se quiere identificar los puntos máximo y mínimos de la función, o bien, cuando se requiere conocer los intervalos en dónde crece o decrece la gráfica de la función.

En la vida cotidiana, sus aplicaciones son de suma importancia, se aplica en diferentes disciplinas, tales como: Administración, Economía, Ingenierías, Estadística, entre otras.

Te invito a descubrir sobre estas aplicaciones

Puntos críticos

Todo valor c, en el eje x para el cual se cumpla que $f'(c) = 0$ o bien donde $f'(c)$ no exista, se le domina punto crítico de la función $f(x)$.

Los máximos relativos o mínimos relativos ocurren solo en los puntos críticos. Es decir, los puntos críticos son aquellos puntos donde se puede presentar un máximo relativo o un mínimo relativo.

Si una recta horizontal es tangente a la curva de una función en un punto, entonces la primera derivada en ese punto es igual a cero.

Puntos críticos

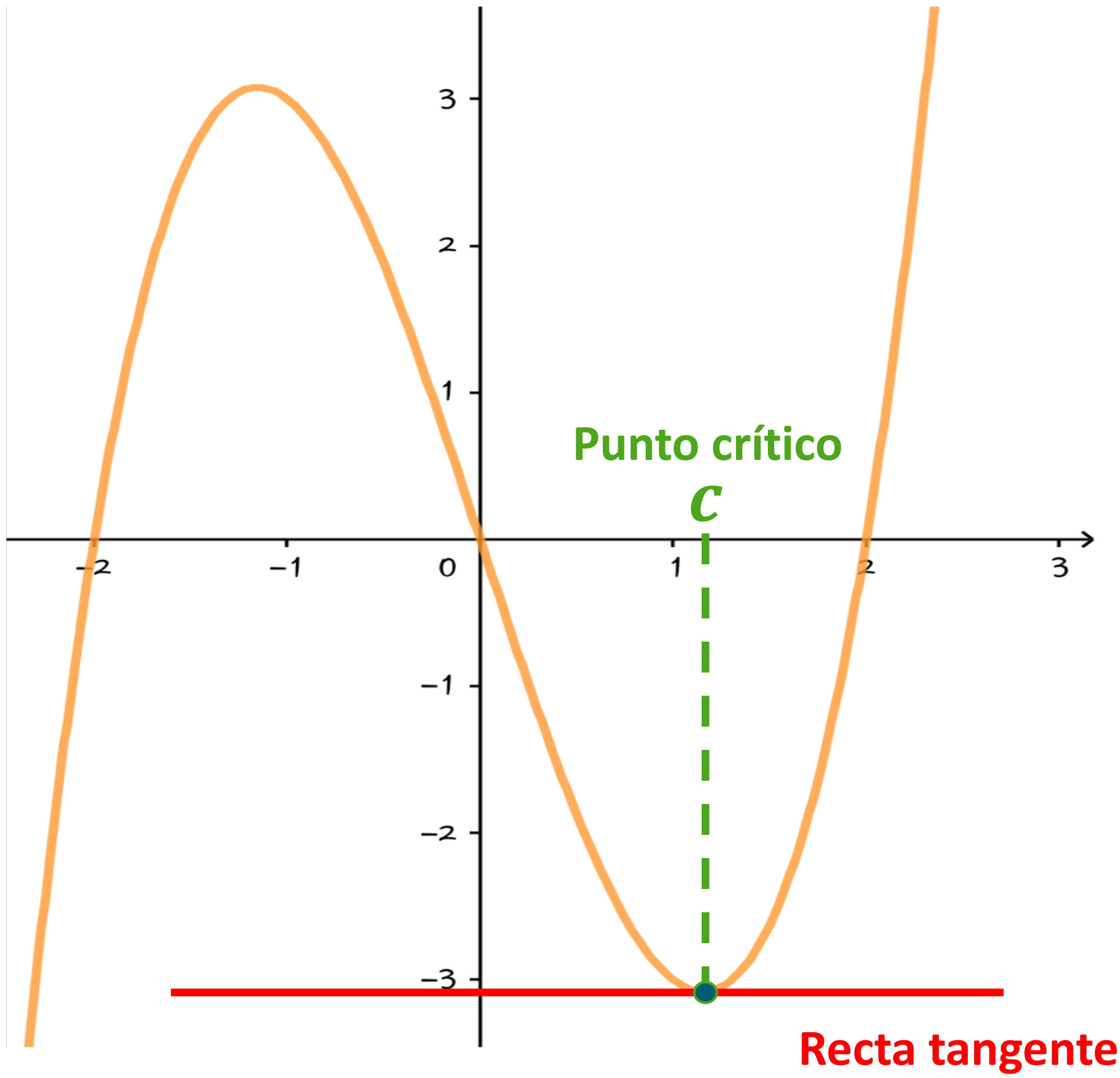
De manera simbólica

Existe un valor c en el eje x tal que:

- La imagen existe: $f(c)$ existe
- La derivada en el punto "c" es cero: $f'(c) = 0$
- La pendiente de la recta tangente en el punto c es cero: $m = f'(c) = 0$ y corresponde a una recta horizontal.

Puntos críticos

De manera gráfica



Ejemplo #1

Determine los puntos críticos de la función

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{13x^3}{3} + \frac{17x^2}{2} + 12x - 3}$$

Paso 1

Obtener la primera derivada de la función

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 4x^3 - \frac{13}{3} \cdot 3x^2 + \frac{17}{2} \cdot 2x + 12$$

$$= 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$$

Paso 2

Igualar a cero la primera derivada

$$2x^3 - 13x^2 + 17x + 12 = 0$$

Ejemplo #1

Paso 3

Factorizar la expresión

$$2x^3 - 13x^2 + 17x + 12 = 0$$

x^3	x^2	x	#			
2	-13	17	12	4	→	$x - 4$
	8	-20	-12			
2	-5	-3	0	→	$2x^2 - 5x - 3$	

$$(2x^2 - 5x - 3)(x - 4) = 0$$

$$(x - 3)(2x + 1)(x - 4) = 0$$

Paso 4

Igualar cada factor a cero

$$x - 3 = 0 \qquad 2x + 1 = 0 \qquad x - 4 = 0$$

Ejemplo #1

Paso 5

Despejar la variable x

$$x - 3 = 0 \qquad 2x + 1 = 0 \qquad x - 4 = 0$$

$$x = 3 \qquad 2x = -1 \qquad x = 4$$

$$x = \frac{-1}{2}$$

Paso 6

Dar la respuesta

Los puntos críticos de la función son:

$$x = 3, \qquad x = 4, \qquad x = \frac{-1}{2}$$

Extremos absolutos

Los máximos y mínimos de una función son los valores extremos de la función. También reciben el nombre de máximo absoluto o mínimo absoluto.

Definición

Si "c" es un punto crítico y pertenece al dominio de la función $f(x)$, entonces:

- $f(c)$ es el **mínimo absoluto** de f si se cumple que $f(c) \leq f(x)$. Es el punto más bajo de la función donde $f'(c) = 0$.

- $f(c)$ es el **máximo absoluto** de f si cumple que $f(c) \geq f(x)$. Es el punto más alto de la función donde $f'(c) = 0$.

Extremos relativos

Los máximos y mínimos relativos de una función son los valores extremos de la función en un intervalo abierto. También reciben el nombre de máximo local o mínimo local.

Definición

Sea f una función definida en un intervalo I, que contiene a c.

- $f(c)$ es el **mínimo relativo** de f en I, si $f(c) \leq f(x)$ para todo valor de x en I. Es el punto más bajo de la función un intervalo.

- $f(c)$ es el **máximo relativo** de f en I, si $f(c) \geq f(x)$ para todo valor de x en I. Es el punto más alto de la función un intervalo.

Sentido de variación

El sentido de variación de una función se refiere a los intervalos en donde una función es creciente o decreciente.

Se recurre a unos criterios particulares relacionados con la primera y la segunda derivada.

Criterio de la primera derivada

- $f'(x) > 0$

Primera derivada es positiva, implica que la función es creciente.

Es decir, la pendiente de la recta tangente a la curva es positiva.

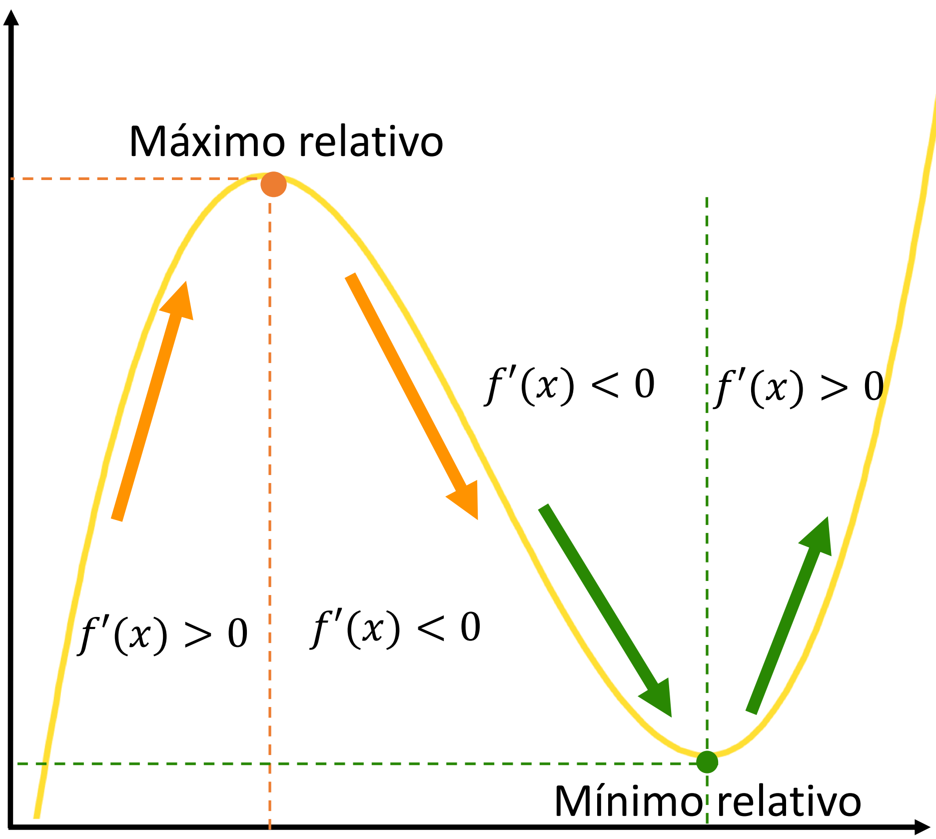
- $f'(x) < 0$

La primera derivada es negativa, implica que la función es decreciente.

Es decir, el valor de la pendiente de la recta tangente es negativo.

Criterio de la primera derivada

Cabe destacar, que el punto donde cambia de dirección es un máximo o mínimo relativo.



Para que se presente un máximo o mínimo relativo, en el punto crítico se debe presentar un cambio de dirección de la curva.

Criterio de la segunda derivada

Sea "c“ un punto crítico, entonces:

- $f''(x) > 0$

Segunda derivada es positiva, implica que c es un mínimo relativo de la función.

- $f''(x) < 0$

Segunda derivada es negativa, implica que c es un máximo relativo de la función.

Ejemplo #2

Determine el sentido de variación, máximos y mínimos de la función

$$\boldsymbol{f(x) = 3x^5 - 5x^3}$$

Paso 1

Obtener la primera derivada de la función

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$$

Paso 2

Igualar a cero la primera derivada

$$15x^4 - 15x^2 = 0$$

Ejemplo #2

Paso 3

Factorizar al máximo la expresión

$$15x^2(x^2-1) \ = 0$$

$$15x^2(x-1)(x+1) \ = 0$$

Paso 4

Igualar cada factor a cero y despejar la variable x, para determinar los puntos críticos.

$$15x^2 = 0 \qquad x-1=0 \qquad x+1=0$$

$$x = 0 \qquad x = 1 \qquad x = -1$$

Ejemplo #2

Paso 5

Determinar los puntos críticos

$$x = 0 \qquad x = 1 \qquad x = -1$$

Paso 6

Construir la tabla de signos

$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\mathbf{15x^2}$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\mathbf{x-1}$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\mathbf{x+1}$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\boldsymbol{f'(x)}$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\boldsymbol{f(x)}$	↗	↘	↘	↗

Ejemplo #2

Paso 7

Determinar máximos y mínimos relativos

$$-\infty \qquad -1 \qquad 0 \qquad 1 \qquad +\infty$$

$\boldsymbol{f(x)}$	↗	↘	↘	↗

En $x = -1$ hay un cambio de variación, es decir, crece hasta $x = -1$ y luego decrece. Por lo tanto hay un máximo relativo.

En $x = 1$ hay un cambio de variación, es decir, decrece hasta el punto $x = 1$ y luego crece. Por lo tanto hay un mínimo relativo.

Ejemplo #2

Paso 8

Dar la respuesta

Los intervalos donde la función es creciente:

$$f \nearrow: \ ]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

Los intervalos donde la función es decreciente:

$$f \searrow: \ ]-1, 0[\ \cup \ ]0, 1[$$

En $x = -1$ se presenta un máximo relativo.

En $x = 1$ se presenta un mínimo relativo

Ejemplo #3

Determine los máximos y mínimos relativos de la función

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}}$$

Paso 1

Obtener la primera derivada de la función

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4)-(x^2+1)2x}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{2x^3-8x-2x^3-2x}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2x^3}-8x-\cancel{2x^3}-2x}{(x^2-4)^2}$$

Ejemplo #3

$$= \frac{-10x}{(x^2-4)^2}$$

Paso 2

Igualar a cero la primera derivada

$$\frac{-10x}{(x^2-4)^2} = 0$$

Paso 3

Factorizar el denominador de la expresión

$$\frac{-10x}{\big((x-2)(x+2)\big)^2} = 0$$

$$\frac{-10x}{(x-2)^2(x+2)^2} = 0$$

Ejemplo #3

Paso 4

Igualar cada factor a cero y despejar la variable x, para determinar los puntos críticos.

$$-10x = 0 \qquad (x-2)^2 = 0 \qquad (x+2)^2 = 0$$

$$x = 0 \qquad x - 2 = 0 \qquad x + 2 = 0$$

$$x = 2 \qquad x = -2$$

Paso 5

Determinar los puntos críticos

$$x = 0, \qquad x = 2, \qquad x = -2$$

Ejemplo #3

Paso 6

Determinar la segunda derivada de la función.

$$f''(x) = \frac{-10(x^2-4)^2 - -10x \cdot 2(x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{(x^2-4)[-10(x^2-4) - -10x \cdot 2 \cdot 2x]}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(x^2-4)}[-10x^2+40+40x^2]}{(x^2-4)^{\cancel{4}}}$$

$$= \frac{30x^2+40}{(x^2-4)^3}$$

Ejemplo #3

Paso 7

Evaluar los puntos crítico en la segunda derivada, para aplicar el criterio de la segunda derivada.

- $\boldsymbol{x = -2}$

$$f''(-2) = \frac{30(-2)^2 + 40}{\left((-2)^2 - 4\right)^3}$$

$$= \frac{160}{0} \text{ ¡!}$$

Al evaluar $x = -2$ en la segunda derivada, se indefine la expresión. Por lo tano en $x = -2$ no hay máximo ni mínimo

Ejemplo #3

- $\boldsymbol{x = 0}$

$$f''(0) = \frac{30(0)^2 + 40}{\left((0)^2 - 4\right)^3}$$

$$= \frac{-5}{8} < 0$$

Al evaluar en la segunda derivada $x = 0$, obtiene un valor negativo. Según el criterio de segunda derivada, se cumple que en $x = 0$ se presenta un máximo relativo.

Ejemplo #3

- $x = 2$

$$f''(-2) = \frac{30(2)^2 + 40}{\left((2)^2 - 4\right)^3}$$

$$= \frac{160}{0} \; ¡!$$

Al evaluar $x = 2$ en la segunda derivada, se indefine la expresión. Por lo tano en $x = 2$ no hay máximo ni mínimo

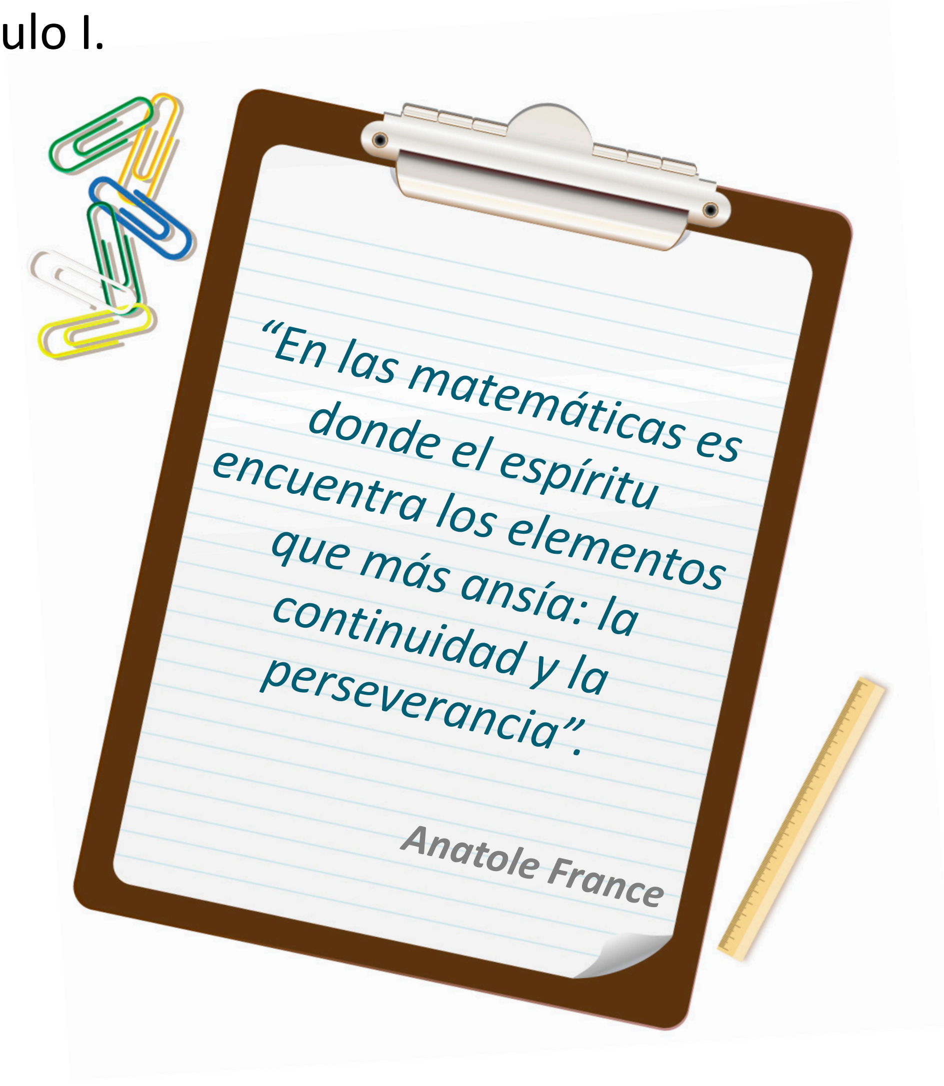
Paso 8

Dar la respuesta

En $x = 0$ se presenta un máximo relativo

A manera de cierre

Espero que estos ejercicios le sean de utilidad para reforzar los conceptos necesarios para determinar sentido de variación, máximos y mínimos, y de esta manera pueda construir los nuevos conocimientos de Cálculo I.



Créditos

Universidad Técnica Nacional

Coordinación de Matemáticas y Estadística

Contenido

Autores: Silvia Arguedas Méndez
Evelyn Delgado Carvajal

Producción del recurso didáctico:

Productora académica: Guadalupe Camacho

Diseño Gráfico y multimedia: Karol González Ugalde

Universidad Técnica Nacional

Centro de Formación Pedagógica y Tecnología Educativa

Tecnología Educativa y Producción de Recursos Didácticos CFPTE - UTN