Řešení úloh 1. kola 48. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: M. Jarešová (1, 2, 5, 6, 7), J. Jírů (4) a KVANT (3).
Konečná úprava P. Šedivý

1. Úlohu budeme řešit ve vztažné soustavě, jejíž počátek je ve středu Měsíce a osy směřují k vzdáleným hvězdám. Soustavu budeme považovat za inerciální.

a) Při pohybu tělesa po parabolické trajektorii je celková mechanická energie kosmické lodi nulová: $E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = 0$. V blízkosti povrchu Měsíce tedy platí

$$\frac{1}{2}m_0 v_0^2 - \varkappa\frac{m_0 M}{R} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \sqrt{\frac{2\varkappa M}{R}}\,.$$

2 body

Po zapnutí motoru dojde po určité době k přechodu kosmické lodi na kruhovou trajektorii v blízkosti povrchu Měsíce. Gravitační síla je silou dostředivou. Z toho

$$\varkappa\frac{mM}{R^2} = m\frac{v_1^2}{R} \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{\frac{\varkappa M}{R}}\,.$$

2 body

Velikost rychlosti kosmické lodi se tedy musí změnit o hodnotu

$$\Delta v = v_1 - v_0 = (1-\sqrt{2})\sqrt{\frac{\varkappa M}{R}} = -706\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

b) Úpravou Ciolkovského vztahu

$$\Delta v = -v_\mathrm{r}\ln\frac{m_0}{m}$$

dostaneme

$$m = m_0 \mathrm{e}^{\frac{\Delta v}{v_\mathrm{r}}} = m_0\mathrm{e}^{-\frac{706}{4000}} \doteq 0{,}84 m_0\,.$$

Při manévru se spotřebuje palivo a okysličovadlo o celkové hmotnosti

$$m_0 - m = 0{,}16 m_0\,.$$

4 body

2. a) Carnotův cyklus probíhá jako posloupnost čtyř dějů:

$1 \to 2$ izotermická expanze, $2 \to 3$ adiabatická expanze,
$3 \to 4$ izotermická komprese, $4 \to 1$ adiabatická komprese.

Nejmenší objem má plyn ve stavu 1, kdy $T = T_1 = 600$ K, $p_1 = 3{,}00$ MPa, největší ve stavu 3, kdy $T = T_2 = 300$ K, $p_3 = 0{,}100$ MPa:

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = 1{,}66\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^3\,, \qquad V_3 = \frac{nRT_2}{p_3} = 2{,}49\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3\,.$$

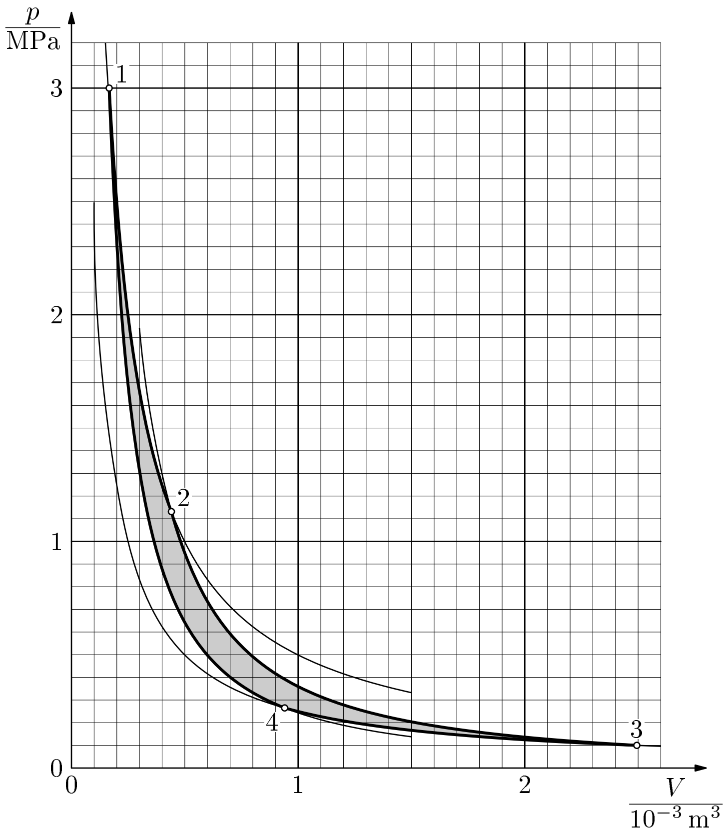
Z Poissonova zákona a stavové rovnice odvodíme:

$$\frac{p_1}{p_4} = \frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} = 2^{3,5}\,.$$

Z toho $p_4 = \dfrac{p_1}{\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}} = 0{,}265\ \text{MPa}\,, \quad p_2 = p_3 \left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} = 1{,}13\ \text{MPa}\,,$

$$V_4 = \frac{nRT_2}{p_4} = 9{,}41 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3\,, \quad V_2 = \frac{nRT_1}{p_2} = 4{,}41 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3\,.$$

4 body



Obr. R1

b) $p-V$ diagram daného Carnotova cyklu na obr. R1 je tvořen izotermami o rovnicích

$$p = \frac{nRT_1}{V}\,, \quad p = \frac{nRT_2}{V} \quad \text{číselně} \quad \{p\} = \frac{498{,}8}{\{V\}}\,, \quad \{p\} = \frac{249{,}4}{\{V\}}$$

a adiabatami o rovnicích

$$p = \frac{p_1 V_1^{\varkappa}}{V^{\varkappa}}\,, \qquad p = \frac{p_3 V_3^{\varkappa}}{V^{\varkappa}}\,, \quad \text{číselně} \quad \{p\} = \frac{15{,}357}{\{V\}^{1,4}}\,, \quad \{p\} = \frac{22{,}683}{\{V\}^{1,4}}\,.$$

4 body

c) Plyn přijímá teplo při izotermické expanzi $1 \to 2$ a odevzdává při izotermické kompresi $3 \to 4$:

$$Q_1 = nRT_1 \ln \frac{p_1}{p_2} = 486 \text{ J}, \qquad Q'_2 = nRT_2 \ln \frac{p_4}{p_3} = 243 \text{ J}.$$

1 bod

d) Celková práce vykonaná při jednom cyklu je

$$W' = Q_1 - Q'_2 = 243 \text{ J}.$$

Účinnost cyklu je

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 50\ \%.$$

1 bod

3. a) Podle 1. Kirchhoffova zákona je součet proudů vstupujících do uzlu B přes rezistory R_1, R_2 a R_3 roven proudu procházejícímu voltmetrem z uzlu B do uzlu A. Potenciál v bodě A můžeme zvolit nulový, potenciál v bodě B je pak roven napětí voltmetru. Proud voltmetrem je zanedbatelný. Platí

$$\frac{U_1 - U}{R_1} + \frac{U_2 - U}{R_2} + \frac{U_3 - U}{R_3} = 0.$$

Z toho

$$U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3},$$

$$U = \frac{\dfrac{U_1}{R_1} + \dfrac{U_2}{R_2} + \dfrac{U_3}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} = 5{,}4 \text{ V}.$$

4 body

b) Nahradíme-li voltmetr ampérmetrem o zanedbatelném odporu, bude potenciál v bodě B téměř nulový. Ampérmetrem bude z bodu B do bodu A procházet proud

$$I = \frac{U_1 - 0}{R_1} + \frac{U_2 - 0}{R_2} + \frac{U_3 - 0}{R_3} = 0{,}135 \text{ A}.$$

2 body

c) V případě s rezistorem označme potenciál v bodě B jako φ. Pak

$$\frac{U_1 - \varphi}{R_1} + \frac{U_2 - \varphi}{R_2} + \frac{U_3 - \varphi}{R_3} = \frac{\varphi - 0}{R},$$

$$\varphi\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3},$$

$$\varphi = \frac{\dfrac{U_1}{R_1} + \dfrac{U_2}{R_2} + \dfrac{U_3}{R_3}}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} = 1{,}61 \text{ V}, \qquad I_R = \frac{\varphi - 0}{R} = 0{,}095 \text{ A}.$$

4 body

4. a) Z Hookova zákona $\sigma_\mathrm{n} = E\varepsilon$, kde $\sigma_\mathrm{n} = \dfrac{F}{S}$, $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$, plyne

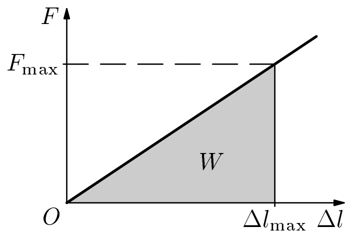
$$F = \frac{ES}{l_0}\Delta l\,. \tag{1}$$

Velikost F síly napínající drát je přímo úměrná jeho prodloužení Δl (obr. R2). Při maximálním prodloužení je též působící síla maximální. Konečné prodloužení nastane při dosažení meze úměrnosti:

$$\Delta l_\mathrm{max} = \frac{\sigma_\mathrm{u} l_0}{E}\,, \qquad F_\mathrm{max} = \sigma_\mathrm{u} S\,. \tag{2}$$

Hledaná práce je určena obsahem plochy pod grafem závislosti (1) na intervalu $\langle 0, \Delta l_\mathrm{max}\rangle$. Plochu tvoří pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami znázorňujícími veličiny Δl_max a F_max. Práce tedy je

$$W = \frac{1}{2}F_\mathrm{max}\Delta l_\mathrm{max} = \frac{\sigma_\mathrm{u}^2 S l_0}{2E} = 1{,}83\ \mathrm{J}\,.$$



Obr. R2

4 body

b) Při postupném zavěšení těles v souladu se vztahem (1) platí:

$$m_0 g = \frac{ES}{l_0}\Delta l_0\,, \qquad (m_0 + m_1)g = \frac{ES}{l_0}\Delta l_1\,.$$

Po přestřižení vlákna bude systém harmonicky kmitat kolem rovnovážné polohy určené prodloužením Δl_0 s amplitudou výchylky

$$y_\mathrm{m} = \Delta l_1 - \Delta l_0 = \frac{m_1 g l_0}{ES} = 5{,}61 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}\,.$$

Frekvence vlastních kmitů systému je

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_0}}\,,$$

kde podle rovnice (1) pro tuhost platí $k = \dfrac{ES}{l_0}$.

Po dosazení dostaneme

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ES}{m_0 l_0}} = 59{,}6\ \mathrm{Hz}\,.$$

Amplituda zrychlení kmitů je

$$a_\mathrm{m} = y_\mathrm{m}\omega^2 = \frac{m_1}{m_0}g = 7{,}85\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

6 bodů

5. a) Na kondenzátor s částečně zasunutou deskou z dielektrika se můžeme dívat jako na paralelní spojení kondenzátoru bez dielektrika a kondenzátoru s dielektrikem. Výsledná kapacita v čase t měřeném od okamžiku, kdy deska s dielektrikem začne vstupovat mezi desky kondenzátoru, je

$$C = \frac{\varepsilon_0 a(a-vt)}{d} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} avt}{d} = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d} + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r}-1)a}{d}vt = C_0 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r}-1)a}{d}vt\,.$$

Na deskách kondenzátoru bude náboj

$$Q = CU = C_0 U + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r}-1)aU}{d}vt = Q_0 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r}-1)aU}{d}vt\,.$$

Deska s dielektrikem bude úplně zasunuta v čase $t_\mathrm{k} = a/v$, kdy kapacita kondenzátoru a náboj na deskách dosáhnou konečných hodnot

$$C_\mathrm{k} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} a^2}{d}\,, \qquad Q_\mathrm{k} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} a^2 U}{d}\,.$$

3 body

b) Protože během zasouvání desky z dielektrika se s rostoucím časem náboj lineárně zvětšuje, bude obvodem procházet konstantní proud

$$I = \frac{Q_\mathrm{k} - Q_0}{t_\mathrm{k}} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r}-1)a^2 U}{d t_\mathrm{k}} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r}-1)aUv}{d}\,.$$

2 body

c) Během zasouvání desky s dielektrikem energie kondenzátoru vzrostla o

$$E_\mathrm{k} - E_0 = \frac{1}{2}(C_\mathrm{k} - C_0)U^2\,.$$

Zdroj přitom dodal do obvodu dvakrát větší energii

$$U(Q_\mathrm{k} - Q_0) = (C_\mathrm{k} - C_0)U^2\,.$$

2 body

d) Rozdíl mezi energií dodanou zdrojem a energií přijatou kondenzátorem je roven práci elektrické síly působící na zasouvanou desku. Během zasouvání desky platí v čase t:

$$\Delta E = \frac{1}{2}(C - C_0)U^2\,, \qquad \Delta E + W = (C - C_0)U^2 = 2\Delta E\,.$$

Z toho

$$W = \Delta E = \frac{1}{2}(C - C_0)U^2 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r}-1)aU^2}{2d} \cdot vt\,.$$

Práce elektrické síly je přímo úměrná dráze vt. To znamená, že síla má konstantní velikost

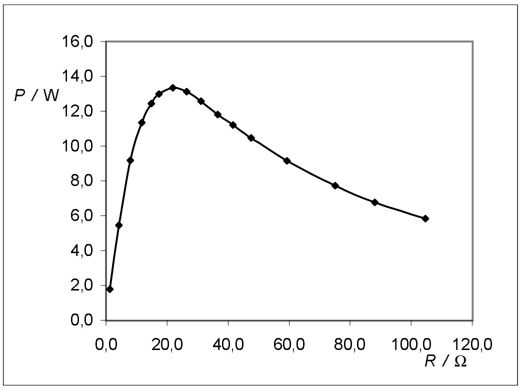
$$F = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r}-1)aU^2}{2d}\,.$$

Protože práce této síly je kladná, působí ve směru rychlosti $\boldsymbol{v}$. Deska z dielektrika je touto silou mezi desky kondenzátoru vtahována.

3 body

6. Zde je ukázka naměřených hodnot a příslušný graf:

I / mA	U / V	U_L / V	U_R / V	R / Ω	P / W
236	26,2	4,3	24,7	104,7	5,8
277	26,1	5,3	24,4	88,1	6,8
321	26,2	6,3	24,1	75,1	7,7
393	26,2	8,1	23,3	59,3	9,2
469	26,1	9,9	22,3	47,5	10,5
519	26,1	11,1	21,6	41,6	11,2
568	26,0	12,2	20,8	36,6	11,8
635	26,0	13,8	19,8	31,2	12,6
705	26,1	15,4	18,6	26,4	13,1
780	26,1	17,1	17,1	21,9	13,3
865	26,0	19,0	15,0	17,3	13,0
915	26,0	20,1	13,6	14,9	12,4
986	26,0	21,6	11,5	11,7	11,3
1068	26,2	23,3	8,6	8,1	9,2
1136	26,0	24,6	4,8	4,2	5,5
1179	26,1	25,6	1,5	1,3	1,8



Z tabulky a grafu je zřejmé, že výkon spotřebiče měl maximální hodnotu $P_{\max} = 13{,}3$ W, když $U_R = U_Z = 17{,}1$ V. V tomto případě $Z = R = 21{,}9\ \Omega$.

Účiník obvodu určíme pomocí kosinové věty:

$$\cos\varphi = \frac{U_R^2 + U^2 - U_Z^2}{2U_R U} = 0{,}763\,.$$

Celkový činný výkon a účinnost obvodu jsou

$$P_{\text{celk}} = UI\cos\varphi = 15{,}5\ \text{W}\,, \qquad \eta = \frac{P_{\max}}{P_{\text{celk}}} = 86\ \%\,.$$

Pro samotnou cívku dostáváme:

$$\cos\varphi_1 = \frac{U^2 - U_R^2 - U_Z^2}{2U_R U_Z} = 0{,}165\,, \qquad \varphi_1 = 80{,}5^\circ\,,$$

$$r = \frac{U_r}{I} = \frac{U_Z\cos\varphi_1}{I} = 3{,}6\ \Omega\,, \qquad L = \frac{U_L}{\omega I} = \frac{U_Z\sin\varphi_1}{2\pi f I} = 0{,}069\ \text{H}\,.$$

7. a) Vyjdeme z podmínek rovnováhy, které platí v okamžiku, kdy se větší válec začne převalovat přes menší. V tomto okamžiku na něj působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_{G1}$, síla provazu $\boldsymbol{F}$ a reakce menšího válce, která má normálovou složku $\boldsymbol{N}_1$ a tečnou složku – třecí sílu $\boldsymbol{F}_{t1}$. Síla reakce podložky je nulová. Na menší válec současně působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_{G2}$, síly $-\boldsymbol{N}_1$ a $-\boldsymbol{F}_{t1}$ od většího válce a reakce vodorovné roviny, která má normálovou složku $\boldsymbol{N}_2$ a tečnou složku – třecí sílu $\boldsymbol{F}_{t2}$ (obr. R3). Aby nedošlo k prokluzu, musí platit

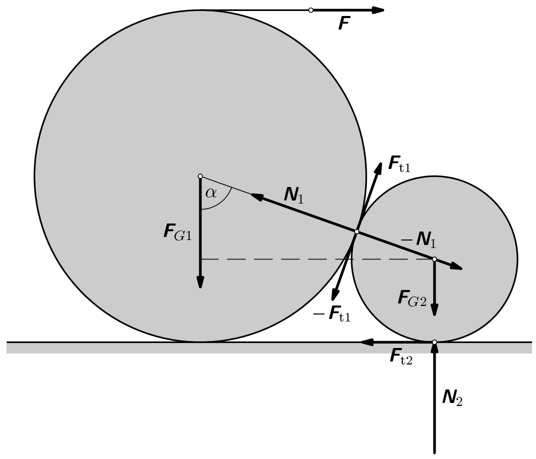
$$F_{t1} \le f\boldsymbol{N}_1\,, \qquad F_{t2} \le f\boldsymbol{N}_2\,. \qquad (1), (2)$$

1 bod

Z momentové věty plyne pro tuto polohu bez pohybu válců

$$FR(1+\cos\alpha) = F_{G1}R\sin\alpha\,, \qquad FR = F_{t1}R\,, \qquad F_{t1}r = F_{t_2}r\,.$$

Z toho $F = F_{t1} = F_{t2} = F_{G1} \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. **2 body**



Obr. R3

Dále platí

$$N_1 \sin\alpha = F + F_{t1}\cos\alpha = F_{G1}\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}(1+\cos\alpha) \quad\Rightarrow\quad N_1 = F_{G1}\,,$$

$$N_2 = F_{G2} + F_{t1}\sin\alpha + N_1\cos\alpha = F_{G2} + F_{G1}\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} + F_{G1}\cos\alpha =$$

$$= F_{G2} + F_{G1}\frac{\sin^2\alpha + \cos\alpha + \cos^2\alpha}{1+\cos\alpha} = F_{G2} + F_{G1}\,.$$

2 body

Dosazením do podmínek (1), (2) dostaneme:

$$F_{G1}\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \le fF_{G1} \quad\Rightarrow\quad f \ge \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\,,$$

$$F_{G1}\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \le f(F_{G1}+F_{G2}) \quad\Rightarrow\quad f \ge \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{m_1}{m_1+m_2}\,.$$

Je-li splněna přísnější podmínka (1), je zřejmě automaticky splněna i podmínka (2). Aby nedošlo k prokluzu, musí tedy platit

$$f \ge \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\dfrac{\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}}{R+r}}{1+\dfrac{R-r}{R+r}} = \frac{2\sqrt{Rr}}{2R} = \sqrt{\frac{r}{R}}\,.$$

2 body

b) Síla $\boldsymbol{F}$ má v okamžiku, kdy se začne větší válec převalovat přes menší, velikost

$$F = F_{G1}\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = m_1 g\sqrt{\frac{r}{R}}\,.$$

2 body