第 21 卷 第 4 期 宝鸡文理学院学报(自然科学版) Vol. 21 No. 4
2001 年 12 月 Journal of Baoji College of Arts and Science(Natural Science) Dec. 2001

线性空间的极大子空间*

杨闻起[1], 金志英[2]

(1. 宝鸡文理学院 数学系, 陕西 宝鸡 721007; 2. 宝鸡财经学校, 陕西 宝鸡 721001)

摘 要: 引进了线性空间的极大子空间的概念, 主要得出了 3 个结论: (1) 线性空间 V 的子空间 M 是极大子空间当且仅当 M 是一维子空间的余子空间。(2) 线性空间的任意子空间都可表示为一些极大子空间的交。(3) 在满足子空间降链条件的线性空间中, 每个子空间可表示为有限个极大子空间的交。

关键词: 线性空间; 子空间; 极大子空间

中图分类号: O151.2 **文献标识码**: A **文章编号**: 1007-1261(2001)04-0265-03

The maxmin subspace of linear space

YANG Wen-qi[1], JIN Zhi-ying[2]

(1. Dept. Math., Baoji Coll. Arts & Sci., Baoji 721007. Shaanxi, China;
2. Baoji Finance-Economics School, Baoji 721001, Shaanxi, China)

Abstract: By giving the maxmin subspace of linear space and obtaining the follow some results: (1) Subspace M be maxmin subspace if and only if M be complemented subspace of one dimension subspace; (2) Every subspace in linear space can be written as intersection of some maxmin subspaces; (3) In the linear space with descending chain condition of subspaces, every subspace can be written as finite intersection of maxmin subspaces

Key words: linear space; subspace; maxmin subspace

MR(1991) Subject Classification: 15A03

在线性空间的研究中关于有限维线性空间的结论较多, 但对一般线性空间几乎没有结论。本文通过引进极大子空间的概念, 给出一般线性空间的一些性质。

定义 设 V 是数域 F 上的线性空间, M 是 V 的子空间, 且 $M \neq V$, 如果对 V 的任意子空间 W, 只要 $W \supseteq M$, 就有 $W = M$ 或 $W = V$, 那么就称 M 是 V 的极大子空间。

例 1 向量空间 V_3 中的任一平面是 V_3 中的极大子空间。

例 2 $M_n(F)$ 中, 令 $M_{ij} = \{A \in M_n(F) \mid A$ 的第 i 行第 j 列元素为 0$\}$, 那么 M_{ij} 是 $M_n(F)$ 的极大子空间。

关于极大子空间的结构, 可得到如下结论:

定理 1 设 V 是数域 F 上的线性空间, 子空间 M 是 V 的极大子空间当且仅当 M 是 1 维子空间的余子空间。

证明 "$\Rightarrow$" 设 M 是 V 的极大子空间, 取 $\alpha \in V - M$, 则 $\alpha \neq 0$, 令 $L(\alpha) = \{a\alpha \mid a \in F\}$, 显然 $\dim L(\alpha) = 1$. 下面证明 M 是 $L(\alpha)$ 的余子空间: 首先, 对任意 $\xi \in L(\alpha) \cap M$, 可设 $\xi = a_0\alpha (a_0 \in F)$, 那么 $a_0 = 0$ (否则, 如果 $a_0 \neq 0$, 那么 $\alpha = \xi / a_0 \in M$, 与 $\alpha \notin M$ 矛盾), 所以 $\xi = a\alpha = 0$, 可见 $M \cap L(\alpha) = \{0\}$. 其次, 由于 $\alpha \notin M$, $\alpha \in M + L(\alpha)$, 所以 $M + L(\alpha)$ 真包含 M, 但 M 在 V 中极大, 所以, $M + L(\alpha) = V$. 可见 $V = M \oplus L(\alpha)$, 即 M 是 $L(\alpha)$ 的余子空间。

"$\Leftarrow$" 设 M 是 1 维子空间 $L(\alpha)$ 的余子空间, W 是真包含 M 的任意子空间, 取 $\alpha_1 \in W$ 且 $\alpha_1 \notin M$, 由 $V = L(\alpha) + M$ 可设 $\alpha_1 = a\alpha + \beta (a \in F, \beta \in$

---

* 收稿日期: 2001-05-21
作者简介: 杨闻起(1962-), 男, 陕西岐山人, 讲师, 研究方向: 代数。

M), 由于 $\alpha_1 \notin M$, 所以 $a \neq 0$, 于是 $\alpha = \alpha_1/a - \beta/a$. 由于 $\alpha_1 \in W$, $\beta \in M \subseteq W$, 所以 $\alpha \in W$, 于是 $L(\alpha) \subseteq W$。又由于 $M \subset W$, 且 $L(\alpha) \oplus M$ 是包含 $L(\alpha)$ 和 M 的最小子空间[2], 所以 $L(\alpha) \oplus M \subseteq W$, 由已知 $L(\alpha) \oplus M = V$, 所以 $W = V$。可见 M 必是 V 的极大子空间。

特别是有限维线性空间的极大子空间的结构更加明确。

推论 1.1　设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, 子空间 M 是极大子空间当且仅当 $\dim M = n - 1$.

证明　"$\Rightarrow$"设 M 是 V 的极大子空间, 由定理 1, 存在 1 维空间 W, 使 $V = W \oplus M$, 由维数定理, $\dim M = \dim V - \dim W = n - 1$.

"$\Leftarrow$"设 $\dim M = n - 1$, 设 W 是 M 的余子空间, 则 $\dim W = \dim V - \dim M = n - (n - 1) = 1$, 显然 M 也是 W 的余子空间, 由定理 1 知 M 是极大子空间。

定理 2　设 V 是数域 F 上的线性空间, W 是 V 的任意子空间且 $W \neq V$, α 是 V 中不属于 W 的任一向量, 则存在极大子空间 M, 使 $\alpha \notin M \supseteq W$。

证明　设 $\mathbf{A} = \{H \mid H$ 是 V 的子空间且 $\alpha \notin H \supseteq W\}$。由于 $W \in \mathbf{A}$, 显然 $\mathbf{A} \neq \varnothing$. 设 $\mathbf{B}$ 是 $\mathbf{A}$ 的任意链, 令 $K = \bigcup_{H \in \mathbf{B}} H$. 容易验证 $K \in \mathbf{A}$ 且 K 是 $\mathbf{B}$ 的上界, 由 zorn 引理[1] 知, $\mathbf{A}$ 中必有极大元, 设 M_α 为之, 下面证明 M_α 在 V 中极大: 设 W 是包含 M_α 的任意子空间。如果 $\alpha \notin W$, 则 $W \in \mathbf{A}$, 由 M_α 的极大性知 $M_\alpha = M$; 如果 $\alpha \in W$, 则由 α 生成的子空间 $L(\alpha) = \{a\alpha \mid a \in F\} \subseteq W$, 所以 $M_\alpha + L(\alpha) \subseteq W$。下面只需证明 $M_\alpha + L(\alpha) = V$. 假设 $M_\alpha + L(\alpha) \neq V$, 则存在 $\xi_0 \in V$ 且 $\xi_0 \notin M_\alpha + L(\alpha)$. 令 $M'_\alpha = M_\alpha + L(\xi_0)$, 那么 $\alpha \notin M'_\alpha$ (否则如果 $\alpha \in M'_\alpha$, 可设 $\alpha = \xi + a_0\xi_0$ ($a_0 \in F$, $\xi \in M_\alpha$), 由于 $\alpha \notin M_\alpha$, 于是 $a_0 \neq 0$, 故 $\xi_0 = -\dfrac{a}{a_0}\xi + \dfrac{1}{a_0}\alpha \in M_\alpha + L(\alpha)$, 矛盾)。所以 $M'_\alpha \in \mathbf{A}$, 但显然 M'_α 真包含 M_α, 这与 M_α 在 $\mathbf{A}$ 中极大矛盾。可见 $M_\alpha + L(\alpha) = V$, 即可得到 $W = V$. 综上所述, M_α 是 V 的极大子空间。

在 n 维线性空间中, 任一子空间可表示为若干个 $n - 1$ 维子空间的交[2], 由推论 1.1 知, n 维线性空间中的 $n - 1$ 维子空间等价于极大子空间, 所以, n 维线性空间的任意子空间可表示为若干极大空间的交。下面的定理 3 将把该结论推广到一般线性空间中。

定理 3　设 V 是数域 F 上的线性空间, 则 V 的任意子空间都可表示为一些极大子空间的交。

证明　设 W 是 V 的任意子空间, 如果 $W = V$, 可认为 W 是 0 个极大子空间的交。下设 $W \neq V$, 设 α 是 W^c (即为 $V - W$) 的任意向量, 由定理 2, 存在极大空间 M_α 且满足 $\alpha \notin M_\alpha \supseteq W$。令 $W_1 = \bigcap_{\alpha \in W^c} M_\alpha$, 下证 $W_1 = W$。一方面, $\forall \alpha \in W$, $W \subseteq M_\alpha$, 于是 $W \subseteq \bigcap_{\alpha \in W^c} M_\alpha = W_1$, 即 $W \subseteq W_1$。另一方面, $\forall \alpha \in W^c$, $\alpha \notin M_\alpha$, 即 $\alpha \in M_\alpha^c \subseteq \bigcup_{\alpha \in W^c} M_\alpha^c = (\bigcap_{\alpha \in W^c} M_\alpha)^c = W_1^c$, 即 $W^c \subseteq W_1^c$, 于是 $W_1 \subseteq W$, 所以 $W = W_1 = \bigcap_{\alpha \in W^c} M_\alpha$

推论 3.1　线性空间的任意子空间都可表示为一些 1 维空间的余子空间之交。

推论 3.1 可由定理 1 和定理 3 直接得出。

推论 3.2　线性空间的子空间是极大子空间当且仅当它不能表示为其它一些子空间之交。

证明　设 W 是线性空间 V 的子空间, 如果 W 可表示为其它一些子空间的交, 显然 W 不是极大子空间, 反过来, 如果 W 不是极大子空间, 则由定理 3 知 W 可表示为其它一些子空间的交。

推论 3.3　线性空间的所有极大子空间的交为零子空间。

证明　设 W_0 是 V 的所有极大子空间之交, 显然 $\{0\} \subseteq W_0$; 另一方面, 由定理 3 知, $\{0\}$ 也可表示为一些极大子空间的交, 所以 $W_0 \subseteq \{0\}$, 于是 $W_0 = \{0\}$.

线性空间 V 满足子空间降链条件, 是指对 V 的任一子空间链 $W_1 \supseteq W_2 \supseteq \cdots$, 存在正整数 n, 使得当 $i \geq n$ 时, $W_i = W_n$.

定理 4　设 V 是满足子空间降链条件的线性空间, 那么 V 的每个子空间都可表示为有限个极大子空间的交。

证明　假设存在 V 的子空间 W_0 不能表示成有限个极大子空间的交, 显然 $W_0 \neq V$, 取 $\alpha_1 \in V - W_0$, 由定理 2 知, 存在极大子空间 M_1 满足 $\alpha_1 \notin M_1 \supseteq W_0$, 由假设可得 $M_1 \supsetneqq W_0$, 令 $A_1 = M_1$, 取 $\alpha_2 \in A_1 - M_0$, 再由定理 2 知, 存在极大子空间 M_2 满足 $\alpha_2 \notin M_2 \supseteq W_0$, 令 $A_2 = A_1 \cap M_2$, 显然 $A_1 \supsetneqq A_2$, 且由假设知 $A_2 \supsetneqq W_0$, 由于 W_2 不是有限个极大子空间的交, 故以上步骤可以无限重复下去, 便得到一个严格无限降链 $A_1 \supsetneqq A_2 \supsetneqq \cdots\cdots$, 这与 V 满足子空间的降链条件矛盾, 所以每个子空间都能表

示为有限个极大子空间的交。

定理 5　同构映射把极大子空间变为极大子空间。

证明　设 $f: V_1 \to V_2$ 是同构映射，M_1 是 V_1 的极大子空间，显然 $f(M_1)$ 是 V_2 的子空间，下证 $f(M_1)$ 是 V_2 的极大子空间：设 W_2 是 V_2 的包含 $f(M_1)$ 的任意子空间，即 $W_2 \supseteq f(M_1)$，由于 f 为同构映谢，于是 $f^{-1}(W_2) \supseteq M_1$，但 M_1 是 V_1 的极大子空间，且 $f^{-1}(W_2)$ 是包含 M_1 的子空间，所以 $f^{-1}(W_2) = M_1$ 或者 $f^{-1}(W_2) = V_1$，于是 $W_2 = f(M_1)$ 或 $W_2 = f(V_1) = V_2$，这说明 $f(M_1)$ 是 V_2 的极大子空间。

参考文献:

[1] HUNGERORD Thomas W. 代数学[M]. 冯克勤译, 长沙: 湖南教育出版社, 1985. 15-19.

[2] 张禾瑞. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 1983. 208-244.

[3] 杨闻起. 一类与代数对象有关的集族[J]. 宝鸡文理学院学报(自然科学版), 1993, (2): 34-39.

(校对: 诸平 李哲峰)

(上接第 264 页)

证明　由(14)和(15)知(4)在满足上述条件之一时只有一个奇点，该奇点要么是中心要么是鞍点，因此(4)没有同宿轨线。于是由定理 1 知(1)没有孤立波。

3　孤立波的解析表达式

以下我们取积分常数 $g = 0$。

当 $c > 0, b > 0, a > 0$ 即 $(a, b) \in A_1$ 时，由定理 2 知(4)有 2 条同宿轨线连接鞍点 $(0, 0)$，在 (φ, y) 平面上同宿轨线具有表达式

$$y^2 = \frac{1}{\delta}\varphi^2\left(c - \frac{a}{10}\varphi^3 - \frac{ab}{28}\varphi^6\right) \tag{16}$$

从 $\varphi'(\xi) = y$，沿同宿轨线积分得(1)的 2 个孤立波解。一个是

$$u(x, t) = \left(\frac{2a_1}{\beta_1 \cosh \alpha_1 (x - ct) - b_1}\right)^{1/3} \tag{17}$$

另一个是 $u(x, t) =$

$$\left(\frac{2a_1}{\beta_1^0 \cosh \alpha_1 (x - ct) - b_1}\right)^{1/3} \tag{18}$$

其中 $\alpha_1 = 3\sqrt{\frac{c}{\delta}}, a_1 = \frac{28c}{ab}, b_1 = -\frac{14}{5b}$,

$$\beta_1 = \frac{b_1 \mu_1 + 2a_1}{\mu_1} \tag{19}$$

$$\mu_1 = -\frac{7}{5b} + \sqrt{\frac{49}{25b^2} + \frac{28c}{ab}} \tag{20}$$

$$\mu_2 = -\frac{7}{5b} - \sqrt{\frac{49}{25b^2} + \frac{28c}{ab}}, \beta_1^0 = b_1 + \frac{2a_1}{\mu_2} \tag{21}$$

当 $c > 0, -\frac{7a}{100c} < b < 0, a > 0$ 即 $(a, b) \in A_2$ 时，由定理 2 知(4)有一条同宿轨线连接鞍点 $(0, 0)$，在 (φ, y) 平面上同宿轨线具有表达式是(16)。同上，可得(1)的一个孤立波解是(18)。当 $c = 0, b > 0, a > 0$ 即 $(a, b) \in C_1$ 时，由定理 2 知(4)有一条同宿轨线连接鞍点 $(0, 0)$，在 (φ, y) 平面上同宿轨线具有表达式

$$y^2 = -\frac{a}{\delta}\varphi^5\left(\frac{1}{10} - \frac{b}{28}\varphi^3\right) \tag{22}$$

从 $\varphi'(\xi) = y$，沿同宿轨线积分得(1)的一个孤立波解

$$u(x, t) = \left(-\frac{280}{100b + 63^{ax^2}/\delta}\right)^{1/3} \tag{23}$$

当 $c > 0, b = 0, a > 0$，即 $(a, b) \in I_1$ 时，由定理 2 知(4)有一条同宿轨线连接鞍点 $(0, 0)$，在 (φ, y) 平面上同宿轨线具有表达式

$$y^2 = \frac{1}{\delta}\varphi^2\left(c - \frac{a}{10}\varphi^3\right) \tag{24}$$

从 $\varphi'(\xi) = y$，沿同宿轨线积分得(1)的一个孤立波解

$$u(x, t) = \left(\frac{20c}{2a}\operatorname{sech}^2 \frac{3\sqrt{c/\delta}(x - ct)}{2}\right)^{1/3} \tag{25}$$

参考文献:

[1] DEY B, Domain Wall solutions of *KdV* like equations with higher order nonlinearity[J]. *Phys A: Math Gen*, 1986, 19: 9-12.

[2] QIAN Ti-fei, TANG Min-ying. Peakons and periodic cusp waves in a generalized Camassa-Holm equation[J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2001, 12: 1 347-1 360.

[3] 谢绍龙. 广义 Camassa-Holm 方程的孤立尖波[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2001, 23(1): 5-9.

(校对: 李哲峰　诸平)