Matematika II. - 1. és 2. előadás

Dr. Fejős Csaba előadása alapján - Kovács Emese

2004. április 19.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés a differenciálszámításba

1.1. Különbségi vagy differenciahányados

Definíció:

$$\boxed{D(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

A differenciahányados egy az x_0 ponthoz tartozó függvény.

Példa:

$$f(x) = x^2 \tag{1}$$

$$D(x) = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \tag{2}$$

Ha x közelít x_0-hoz, a függvény érintőjét kapjuk meg.

$$\lim_{x \to x_0} D(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \tag{3}$$

1.2. A differenciahányados x_0-ban vett határértéke: a differenciálhányados

Definíció: Ha $D(x)$-nek van határértéke x_0-ban, akkor ez a határérték a függvény differenciálhányadosa.

A differenciálhányados jelölése:

$$\frac{df(x)}{dx}$$

Nem minden folytonos függvényhez lehet érintőt húzni, pl. $abs(x)$ az $x = 0$ pontban.

Az $y = f(x)$ függvény x_0 pontjában a differenciálhányados nem más, mint:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\delta f(x)}{\delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definíció: Egy függvény különbségi hányadosának határértékét, ha létezik, differenciálhányadosnak nevezzük.

Véges határértékről van mindig szó!

Példa:
Számítsa ki $f(x)$ differenciálhányadosát az $x_0 = 5$ pontban

$$f(x) = x^2$$

Kiszámítjuk a függvény differenciahányadosát:

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} && \text{(4a)} \\ &= \frac{x^2 - 25}{x - 5} && \text{(4b)} \\ &= \frac{(x+5)(x-5)}{x-5} && \text{(4c)} \\ & && \text{(4d)} \end{aligned}$$

Megvizsgáljuk a differenciahányados határértékét amikor x tart x_0-hoz, azaz 5-höz.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 5} D(x) &= ? && \text{(5a)} \\ \lim_{x\to 5} D(x) &= \lim_{x\to 5} \frac{(x+5)(x-5)}{x-5} && \text{(5b)} \\ &= \lim_{x\to 5} (x+5) = 10 && \text{(5c)} \end{aligned}$$

Vezessük le az előbbi esetet tetszőleges x_0 helyre.

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} && (6) \\ &= \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} && (7) \\ \lim_{x\to x_0} D(x) &= ? && (8) \\ \lim_{x\to x_0} D(x) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} && (9) \\ &= \lim_{x\to x_0} (x + x_0) = 2x_0 && (10) \end{aligned}$$

Az $y = x^2$ függvény differenciálhányadosa tetszőleges x_0 pontban $2x_0$.

Ennek geometriai jelentése: Ha $y = x^2$, akkor tetszőleges x_0 pontban húzott érintő meredeksége $2x_0$.

1.3. Hatvány függvények esetén differenciálhányados (álatlános eset)

Tétel: Legyen $y = x^n$.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} D(x) = n \cdot x_0^{n-1}}$$

Bizonyítás:

$$D(x) = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \tag{11}$$

A differenciálhányados megállapításához meg kell vizsgálnunk a differenciahányados x_0-ban felvett határértékét.

$$D(x) = \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + x^{n-3} \cdot x_0^2 + \cdots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \tag{12}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + x^{n-3} \cdot x_0^2 + \cdots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \tag{13}$$

$$\lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + x^{n-3} \cdot x_0^2 + \cdots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = n \cdot x_0^{n-1} \tag{14}$$

Tétel: Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $y = x^\alpha$ diferenciálhányadosa:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} D(x) = \alpha \cdot x_0^{\alpha-1}}$$

Az előző tétel, amit bizonyítottunk is, csak egész n számokra vonatkozik. A második tétel tetszőleges valós α számokra is igaz.

Ha $n \in \mathbb{Z}$

$$y = x^n$$
$$y' = nx^{n-1}$$

Ha $\alpha \in \mathbb{R}$

$$y = x^\alpha$$
$$y' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Példa:
Számítsa ki $y = \sqrt[3]{x^5}$ differenciálhányadosát.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$$
$$f'(x) = \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

2. Műveletek

2.1. Szorzás konstanssal

Tétel: Legyen $C \in \mathbb{R}$, akkor

$$\boxed{(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)}$$

Példa:
$(3x^2)' = 3 \cdot 2 \cdot x$

2.2. Összeg differenciálhányadosa

Tétel: Legyen két differenciálható függvény f(x) és g(x). A két függvény összegének differenciálhányadosa a függvények differenciálhányadosainak összege.

$$\boxed{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)}$$

Példa:
$(x^3 + x^4)' = (x^3)' + (x^4)' = 3x^2 + 4x^3$

2.3. Trigonometrikus függvények differenciálhányadosa

Tétel:

$$\boxed{(\sin(x))' = \cos x}$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
D(x) &= \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \\
\sin x - \sin x_0 &= 2\sin(\frac{x - x_0}{2}) \cdot \cos(\frac{x + x_0}{2}) \\
D(x) &= \frac{2\sin(\frac{x-x_0}{2}) \cdot \cos(\frac{x+x_0}{2})}{x - x_0} \\
D(x) &= \frac{\sin(\frac{x-x_0}{2}) \cdot \cos(\frac{x+x_0}{2})}{\frac{x - x_0}{2}} \\
D(x) &= \frac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \cos(\frac{x + x_0}{2}) \\
\lim_{x \to x_0} D(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \lim_{x \to x_0} \cos x \\
\lim_{x \to x_0} D(x) &= 1 \cdot \cos x
\end{aligned}$$

Tétel:

$$\boxed{(\cos(x))' = -\sin x}$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
D(x) &= \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} \\
\cos x - \cos x_0 &= -2\sin(\frac{x + x_0}{2}) \cdot \sin(\frac{x - x_0}{2}) \\
D(x) &= \frac{-2\sin(\frac{x+x_0}{2}) \cdot \sin(\frac{x-x_0}{2})}{x - x_0} \\
D(x) &= \frac{-\sin(\frac{x+x_0}{2}) \cdot \sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}} \\
D(x) &= -\sin(\frac{x + x_0}{2}) \cdot \frac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}} \\
\lim_{x \to x_0} D(x) &= \lim_{x \to x_0} (-\sin(\frac{x + x_0}{2})) \cdot \lim_{x \to x_0} (\frac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}}) \\
\lim_{x \to x_0} D(x) &= -\sin x \cdot 1
\end{aligned}$$

2.4. Szorzat differenciálhányadosa

Legyen $f(x)$ és $g(x)$ két differenciálható függvény. Vizsgáljuk az $f(x) \cdot g(x)$ kifejezés differenciahányadosát.

$$D(x) = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0}$$

$$D(x) = \frac{[f(x) \cdot g(x)] - [f(x_0) \cdot g(x)] + [f(x_0) \cdot g(x)] - [f(x_0) \cdot g(x_0)]}{x - x_0}$$

$$D(x) = \frac{g(x)[f(x) - f(x_0)] + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0}$$

$$D(x) = \frac{g(x)[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} + \frac{f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0}$$

$$D(x) = g(x)\frac{[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} + f(x_0)\frac{[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} D(x) = \lim_{x \to x_0} \left(g(x)\frac{[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} + f(x_0)\frac{[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} \right)$$

$$\lim_{x \to x_0} D(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} D(x) = g(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Tétel:
Legyen $f(x)$ és $g(x)$ két differenciálható függvény, akkor:

$$\boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

2.5. Reciprok függvény differenciálhányadosa

Tétel: Minden $f(x) \neq 0$ igaz hogy:

$$(\frac{1}{f(x)})' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

Bizonyítás:

$$
\begin{aligned}
D(x) &= \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} && (15)\\
D(x) &= \frac{\frac{f(x_0)-f(x)}{f(x)\cdot f(x_0)}}{x - x_0} && (16)\\
D(x) &= \frac{f(x_0) - f(x)}{f(x)\cdot f(x_0)} \cdot \frac{1}{x - x_0} \\
D(x) &= \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{f(x)\cdot f(x_0)} \\
D(x) &= \frac{\frac{f(x_0)-f(x)}{x-x_0}}{f(x)\cdot f(x_0)} \\
D(x) &= \frac{-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{f(x)\cdot f(x_0)} && (17)\\
\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right] &= f'(x)[\text{definíció szerint}] && (18)\\
\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot f(x_0)] &= f^2(x) && (19)\\
\lim_{x\to x_0} D(x) &= -\frac{f'(x)}{f^2(x)} && (20)
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

2.6. Példák

1. Számítsuk ki $y = \frac{1}{\sin x}$ differenciálhányadosát a fenti tétel alkalmazásával.

$y' = \frac{-\cos x}{\sin^2(x)}$

2/a. Számítsuk ki $y = \frac{1}{x^5}$ differenciálhányadosát.

$y' = -\frac{5x^4}{x^{10}} = -\frac{5}{x^6}$

2/b. Számítsuk ki $y = x^{-5}$ differenciálhányadosát.

$y' = -5x^{-6}$

2.7. Hányados függvény differenciálhányadosa

Tétel:

Ha $f(x)$ és $g(x)$ differenciálható és $g(x) \neq 0$, akkor

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2 x} \tag{21}$$

Bizonyítás:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' \tag{22}$$

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)' \tag{23}$$

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) \tag{24}$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x) \cdot \left(\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) \tag{25}$$

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \tag{26}$$

2.8. Példák

1.

$y = \frac{\sin x}{\cos x}$

$y' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2(x)} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$

$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

2.

$y = \frac{x^5}{x^2}$

$y' = \frac{(x^5)' \cdot x^2 - x^5 \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}$

$y' = \frac{5x^4 \cdot x^2 - x^5 \cdot 2x}{x^4}$

$y' = \frac{5x^6 - 2x^6}{x^4}$

$y' = \frac{3x^6}{x^4}$

$y' = 3x^2$

2.9. Elemi függvények diffrenciálhányadosa

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$(\sin x)' = \cos x$

$$\begin{aligned}
(\operatorname{ctg} x)' &= (\frac{\cos x}{\sin x})' && (27)\\
&= \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} && (28)\\
&= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} && (29)\\
&= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} && (30)\\
&= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} && (31)\\
&= -\frac{1}{\sin^2 x} && (32)
\end{aligned}$$

2.10. Az exponenciális függvény differenciál hányadosa, az e szám

Van-e olyan függvény, amelyet ha deriválunk, önmagát kapjuk?

$f'(x)? = ?f(x)$

$(a^x)' = a^x$

$(e^x)' = e^x$

$e = 2,7182818...$

2.11. Összetett függvények differenciálhányadosa: lánc szabály

$x \mapsto x^2$

$x \mapsto x^2 \mapsto \sin(x^2)$

$x \mapsto x^4 \mapsto \operatorname{tg}(x^4) \mapsto \sqrt[3]{\operatorname{tg}(x^4)}$

$x \mapsto x^3 \mapsto \sin(x^3) \mapsto \sqrt{\sin(x^3)} \mapsto e^{\sqrt{\sin(x^3)}}$

Közvetett függvénykapcsolatok:

$y = e^{\sqrt{\sin(x^3)}}$

Tétel (Lánc szabály):

Legyen f(g(h(i(x))))

i diffható az x helyen
h diffható az i(x) helyen
g diffható a h(i(x)) helyen
f diffható a g(h(i(x))) helyen

Akkor:

$$\frac{df(g(h(i(x))))}{dx} = \frac{df(g(h(i(x))))}{dg(h(i(x)))} \cdot \frac{dg(h(i(x)))}{dh(i(x))} \cdot \frac{dh(i(x))}{di(x)} \cdot \frac{di(x)}{dx}$$

3. Gyakorlat

Deriváljuk:

4.

$y = \frac{1}{\operatorname{ctg}(8x)} = (\operatorname{ctg}(8x))^{-1}$

$y' = \frac{8}{\cos^2 8x}$

5.

$y = \sqrt{tg\sqrt{x}}$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{tg\sqrt{x}}\cos^2\sqrt{x}2\sqrt{x}}$

6.

$y = \sqrt{tgx^2}$

$y' = \sqrt{x}\sqrt{tg(x)^2}\cos^2 x^2$

7.

$y = \sqrt{e^{\sin x}}$

$y' = \frac{e^{\sin x} \cos x}{2\sqrt{e^{\sin x}}}$

8.

$y = e^{\cos x}$

$y' = -e^{\cos x} \sin x$

9.

$y = e^{\sqrt{\sin x}}$

$y' = \frac{e^{\sqrt{\sin x}} \cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

10.

$y = \sqrt{\frac{6}{x^2} + 2x}$

$y' = \frac{-12x^{-3}+2}{2\sqrt{6x^{-2}+2x}}$

11.

$y = \sqrt[3]{5x^{-2} + 4x}$

$y' = \frac{10x^{-3}-4}{3\sqrt[3]{(5x^{-2}+4x)^2}}$

12.

$y = \cos(\sqrt{6x})$

$y' = \frac{-3\sin(\sqrt{6x})}{\sqrt{6x}}$

13.

$y = \operatorname{ctg} x \cdot \sin 5x$

$y' = \frac{-\sin 5x}{\sin^2 x} + 5 \operatorname{ctg} x \cdot \cos 5x$

14.

$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 2$

$y' = x^3 - x^2 + 6x$ $y'' = 3x^2 - 2x + 6$ $y''' = 6x - 2$

HF1.

$y = \sin(\sqrt{8x})$

$y' = y'' =$

HF2.

$y = \cos \frac{1}{x^2}$

$y' =$

$y'' =$

HF3.

$y = \operatorname{tg}(\sin(\sqrt{\operatorname{tg} x}))$

$y' =$

4. Függvényvizsgálat

A függvényvizsgálat segíthet megoldani „valós” problémákat:

pl.:

Házat építünk és 60 méter (külső) fal elkészítéséhez van alapanyagunk. Mekkora kell legyen a ház alapterületének hossza és szélessége, ha adott kerület mellett a legnagyobb területet szeretnénk bekeríteni?

A probléma megoldásához meg kell tanulnunk a függvények szélsőértékét meghatározni.

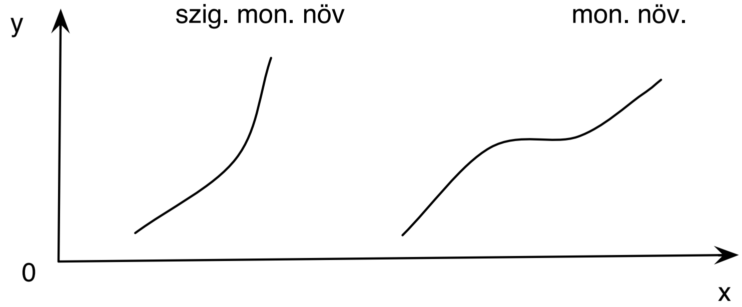
Ha egy függvény növekedő (szigorúan monoton növekedő vagy monoton növekedő), bármely pontjába húzott érintő meredeksége nagyobb nullánál (szig. monoton esetben) vagy nagyobb egyenlő nullával (monoton esetben).

4.1. Tétel. *Ha $f(x)$ folytonos és differenciálható és igaz az, hogy $f'(x) \geq 0$ az $f(x)$ függvény monoton növekvő.*

4.2. Tétel. *Ha $f(x)$ folytonos és differenciálható és igaz az, hogy $f'(x) > 0$ az $f(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő.*

Ezek a tételek fordítva is igazak (szükséges és elégséges feltétel)!

Az előbbi két tétel testvérei csökkenő esetben:



1. ábra. monoton es szigorúan monoton

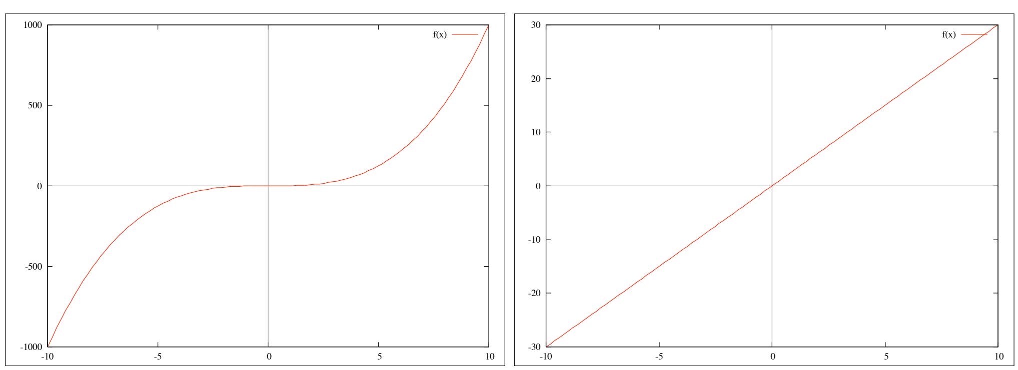
4.3. Tétel. *Ha $f(x)$ folytonos és differenciálható és igaz az, hogy $f'(x) \leq 0$ az $f(x)$ függvény monoton csökkenő.*

4.4. Tétel. *Ha $f(x)$ folytonos és differenciálható és igaz az, hogy $f'(x) < 0$ az $f(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő.*

[15:45]Ezek a tulajdonságok az intervallum bármely pontjában lokális tulajdonságok, csak egy pontra, a vizsgált pontra és annak közvetlen környezetére vonatkoznak.

Ha egy intervallum minden pontjában lokálisan monoton nő a függvény, akkor elmondhatjuk, hogy abszolut értelemben monoton növekedő függvényről beszélünk.

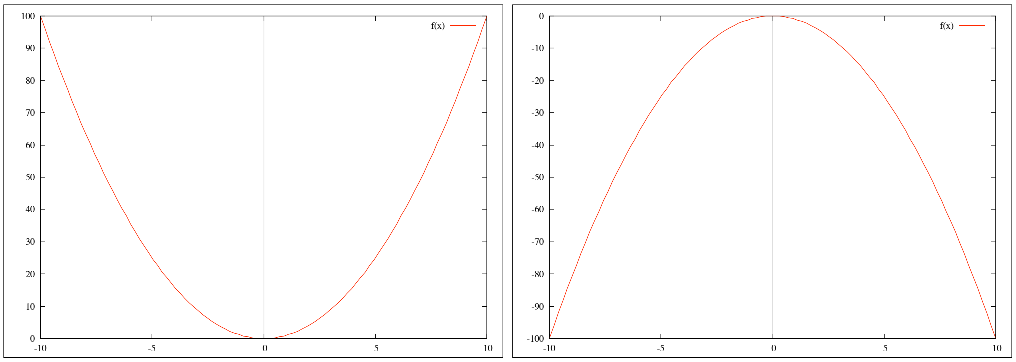
pl. $abs(x)$ függvényről nem lehet abszolut értelemben beszélni, két intervallumon kell vizsgálni.



2. ábra. Monoton növekvő: $f(x) = x^3$ és szigorúan monoton növekvő $f(x) = 3x$

Az $f(x) = x^2$ és a páros kitevőjű függvények csökkennek majd nőnek. Vizsgáljuk $f(x) = x^2$ változását. x=0 pontig szigorúan monoton csökken, utána szigorúan monoton növekszik. Az x=0 pontban szélsőértéke van. Vizsgáljuk a differenciálhányados függvényt:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}$$



3. ábra. $f(x) = x^2$ és $f(x) = -x^2$

Az $f'(x) = 2x$ függvényről elmondhatjuk, hogy $x < 0$ számokra a kifejezés negatív, $x > 0$ számokra pozitív. Ebből az következik, hogy $x < 0$ $f(x)$ csökken, és $x > 0$ $f(x)$ növekszik.

x	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x)$ szélsőérték: minimum	$\nearrow$

4. ábra. $f(x) = x^2$ függvény vizsgálata

Szükséges feltétetle a szélsőértéknek, hogy az első differenciálhányados nulla legyen.

Ugyanez elmondható az $f(x) = -x^2$ függvényre is:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 \\ f'(x) &= -2x \end{aligned}$$

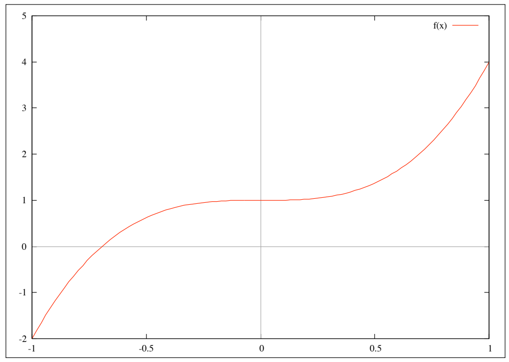
x	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x)$ szélsőérték: maximum	$\searrow$

5. ábra. $f(x) = -x^2$ függvény vizsgálata

A szélsőértéknek szükséges, de nem elégséges feltétele, hogy f'(x)=0. Nézzünk egy példát:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 + 1 \\ f'(x) &= 9x^2 \end{aligned}$$

Az első differenciálhányados négyzetes csak tagot tartalmaz, ezért bármelyik x-re f'(x) pozitív lesz, tehát a függvény mindig monoton növekvő. f'(0)=0, de még sincs szélsőérték. Tehát f'(x)=0 nem elégséges feltétele a szélsőértéknek. x=0 -ban a függvénynek inflexiós pontja van. Az inflexiós pontnál az érintő átmetszi abban a pontban a függvényt.

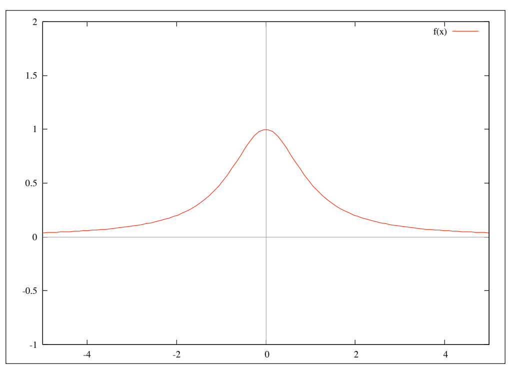


6. ábra. $f(x) = 3x^3 + 1$

x	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x)$ inflexiós pont	$\nearrow$

7. ábra. $f(x) = 3x^3 + 1$ függvény vizsgálata

Megjegyzés Vannak olyan eseteki is, amikor az inflexiós pontban húzott érintő nem vízszintes. pl: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, a kalapgörbe. Páros függvény, y tengelyre szimmetrikus.



8. ábra. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2+1} \\ f'(x) &= ? \end{aligned}$$

$f'(x)$ a reciprok differenciálszámítási szabály alapján számítható.

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + 1 \\ f'(x) &= -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \\ f'(x) &= -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \\ f'(x) &= -\frac{2x}{(x^4+2x^2+1)} \end{aligned}$$

$f''(x)$ a hányados differenciálszámítási szabály alapján számítható.

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^4+2x^2+1)}$$

Legyen:

$$g(x) = -2x$$

és

$$h(x) = (x^4 + 2x^2 + 1)$$

Ekkor:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Ebből:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)} \\ &= \frac{-2 \cdot (x^4 + 2x^2 + 1) - (-2x) \cdot (4x^3 + 4x)}{(x^4 + 2x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-2x^4 - 4x^2 - 2 + 8x^4 + 8x^2}{(x^4 + 2x^2 + 1)^2} \\ f''(x) &= \frac{6x^4 + 4x^2 - 2}{(x^4 + 2x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

f”(x) -nek ott van zérushelye, ahol a kifejezés számlálójának értéke nulla.

$$6x^4 + 4x^2 - 2 = 0$$

Ha $X = x^2$, a fenti egyenlet visszavezethető egy másodfokú egyenletre, amely megoldható:

$$6X^2 + 4X - 2 = 0$$

A diszkrimináns:

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 16 + 48 = 64$$

A megoldások:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-4 - \sqrt{64}}{2 \cdot 6} = \frac{-12}{12} \\ X_1 &= -1 \\ X_2 &= \frac{-4 + \sqrt{64}}{2 \cdot 6} = \frac{4}{12} \\ X_2 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Mivel $X = x^2$, a $X = -1$ nem jó megoldás. A jó megoldások tehát:

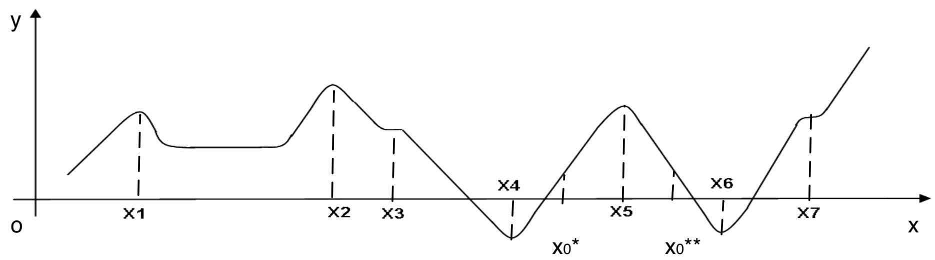
$$x^2 = \frac{1}{3}$$
$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

A kalapgörbéhez visszatérve: $f''(x)$-nek két zérushelye van, $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ és $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ helyeken. Ennek örülünk, mert az eredmény alátámasztja f(x) paritását (y tengelyes szimmetria).

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	∞
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+

9. ábra. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ függvény vizsgálata

5. Összefoglalás



10. ábra. $f(x)$ tenyésztett függvény

x		x_1		x_{11}		x_{12}		x_2		x_3		x_4		x_0^*		x_5		x_0^{**}		x_6		x_7	
$f'(x)$	+	0	-	0	0	0	+	0	-	0	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$		min		$\nearrow$	max	$\searrow$	inf p	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$	inf p	$\nearrow$
$f''(x)$										0				0				0				0	

11. ábra. $f(x)$ tenyésztett függvény vizsgálata

	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) = 0$
$f'(x) = 0$	lokális minimum	lokális maximum	inflexiós pont
$f'(x) > 0$	$f(x) \nearrow$ gyorsul	$f(x) \nearrow$ lassul	inflexiós pont
$f'(x) < 0$	$f(x) \searrow$ gyorsul	$f(x) \searrow$ lassul	inflexiós pont

Ha egy függvény első deriváltja nulla, akkor a függvénynek ott szélsőértéke vagy inflexiós pontja van. Meg kell vizsgálni a második deriváltat is.
Ha x_0 helyen $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor az $f(x)$ függvénynek x_0-ban lokális minimuma van.
Ha x_0 helyen $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor az $f(x)$ függvénynek x_0-ban lokális maximuma van.
Ha x_0 helyen $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) = 0$, akkor az $f(x)$ függvénynek x_0-ban vízszintes inflexiós pontja lehet.
Ha x_0 helyen $f'(x_0) \neq 0$ és $f''(x_0) = 0$, akkor az $f(x)$ függvénynek x_0-ban ferde inflexiós pontja lehet.