第2章 离散时间信号与系统

郑南宁 教授

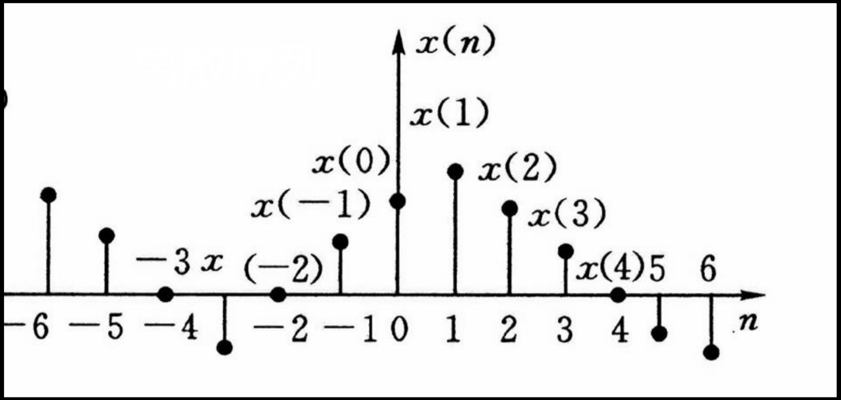
2.1 离散时间信号：序列

- 在数学上表示成数值的序列

  一个序列 x 的第n个数，记作$x(n)$

$$\boxed{x = \{x(n)\}, -\infty < n < \infty}$$

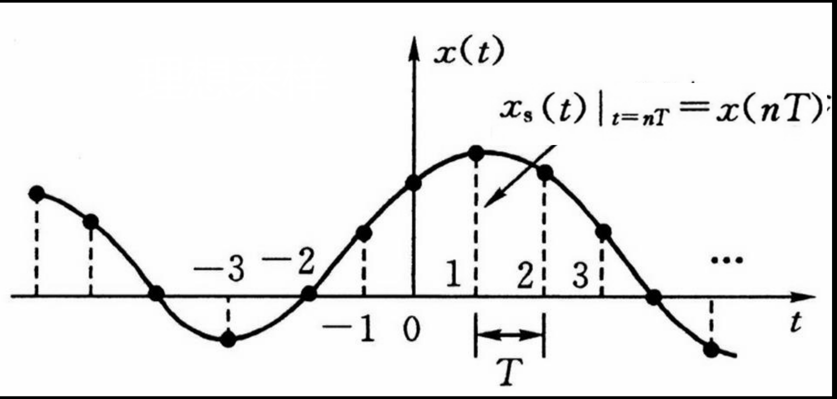
其中n为整数，通常将序列$\{x(n)\}$简记为$x(n)$



- 对模拟信号进行周期的理想采样

$$\boxed{x_s(t)|_{t=nT} = x(nT), -\infty < n < \infty}$$

对T进行归一化得到 $x(n)$；常称 $x(n)$为序列的“第n个样本”



采样信号 $x_s(t)$ 与 $x(n)$是有区别的，在某种意义上 $x_s(t)$还是一个连续函数（冲激串），它除了采样间隔以外都为零，而 $x(n)$ 引入了时间的归一化，没有采样率的信息，仅在 n 为整数时才有定义

2.1.1 序列的分类

如x是复数数组—复序列$x(n)$，复序列$x(n)$可表示成两个实序列的合成：

$$\boxed{x(n)=x_r(n)+jx_i(n)}$$

$x_r(n)$和$x_i(n)$两个实序列分别是复序列$x(n)$的实部$\mathbf{Re}[x(n)]$和虚部$\mathbf{Im}[x(n)]$。因此，可以用实序列的分析方法来处理复序列。

复序列可用它的幅度和相角表示

$$\boxed{x(n)=|x(n)|e^{j\varphi(n)}}$$

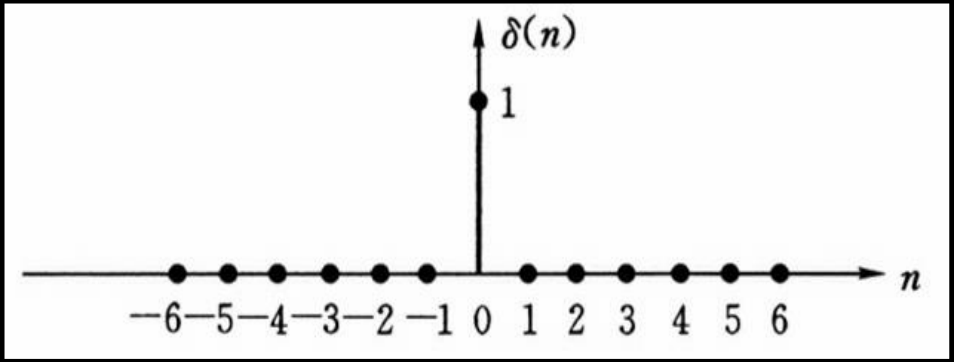
$\boldsymbol{x(n)}$的 $\boldsymbol{n}$ 取值为有限值—有界序列
$\boldsymbol{x(n)}$的 $\boldsymbol{n}$ 取值为无限值—无界序列

2.1.2 基本序列

■ 单位采样序列

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\0, & n\neq 0\end{cases}$$

$$\delta(n-m)=\begin{cases}1, & n=m\\0, & n\neq m\end{cases}$$

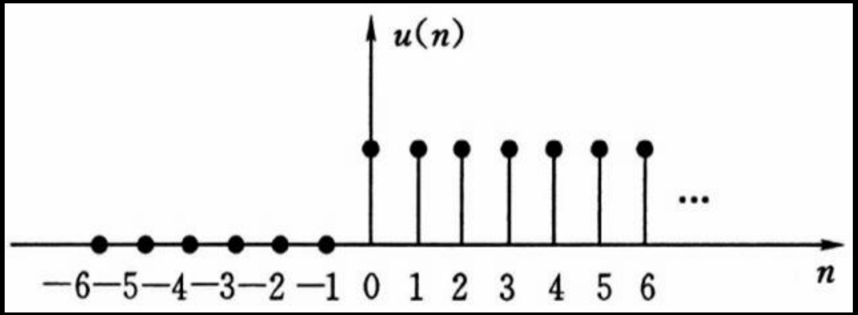


1、单位采样序列（也可称为单位脉冲序列），序列仅在 n =0 时取值为1，其它均为零

2、$\delta(n)$类似于模拟信号和系统中的单位冲激函数$\delta(t)$，但不同的是，$\delta(t)$只具有数学推导的意义，而单位采样序列$\delta(n)$在离散时间系统中是一个实际存在的序列，常作为离散时间系统采样响应的输入信号

单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\ge 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$



单位阶跃序列类似于模拟信号中的单位阶跃函数$u(t)$

$\delta(n)$ 与$u(n)$之间存在关系

$$u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$$

单位阶跃序列可用一组单位采样序列的和来表示

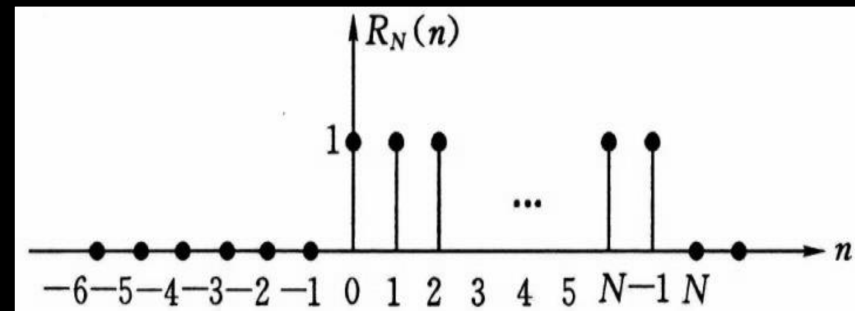
$$u(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\cdots$$

单位采样序列可用单位阶跃系列的后向差分表示

$$\delta(n)=\nabla u(n)=u(n)-u(n-1)$$

■ 矩形序列

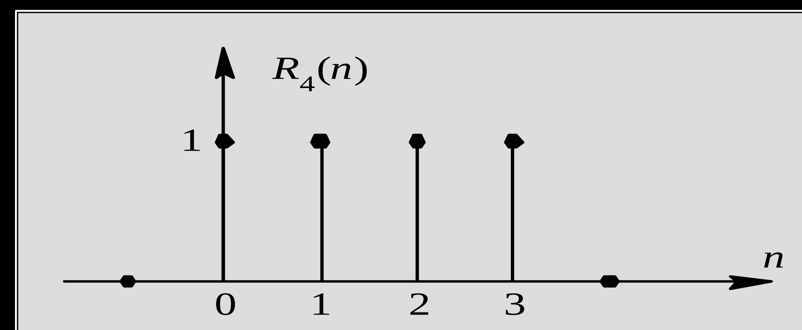
$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le N-1\\ 0, & \text{其他}\,n\end{cases}$$



式中N称为矩形序列的长度

矩形序列可用单位阶跃序列的差表示：

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

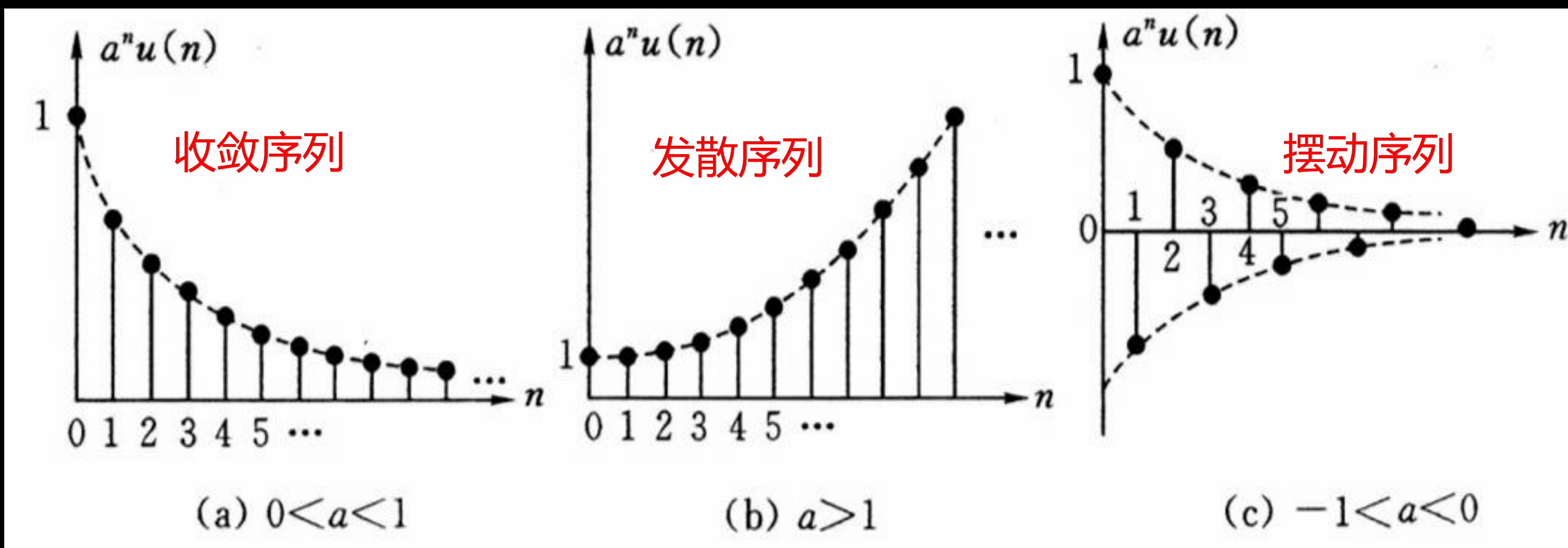


当$N=4$时，$R_4(n)$的波形

实指数序列

$$x(n) = Aa^n u(n) \quad A\text{和}a\text{为实数}$$

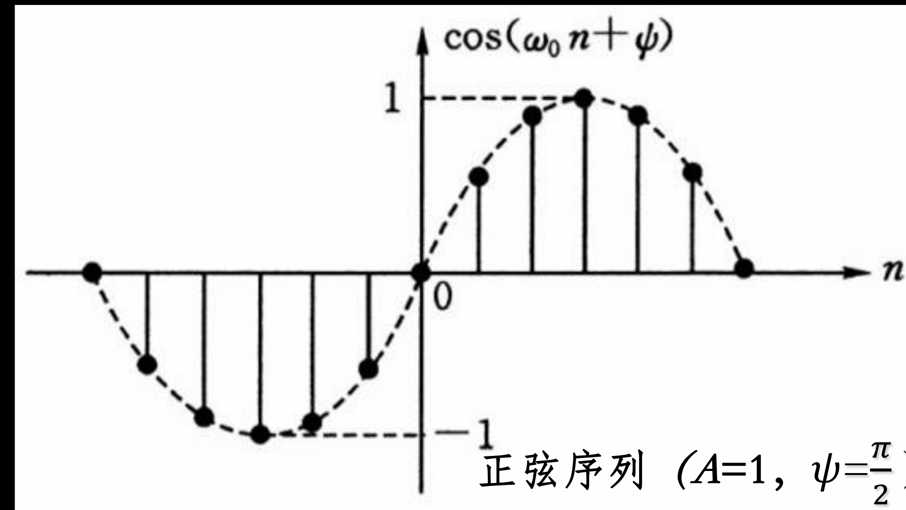
当$|a|<1$，$x(n)$的幅度随 n 的增大而减小，称$x(n)$ 为收敛序列；
当$|a|>1$，$x(n)$的幅度随 n 的增大而增大，称$x(n)$ 为发散序列；
当$-1<a<0$ 时，序列$x(n)$收敛且摆动，如人口增长、企业投资回报等。



正弦序列

$$x(n)=A\cos(\omega_0 n+\psi)$$

式中A为实数，ω_0是正弦序列的频率，ψ为相位，两者的单位都是弧度；ω_0表示序列变化的速率，或者说表示相邻两个序列值之间变化的弧度数。

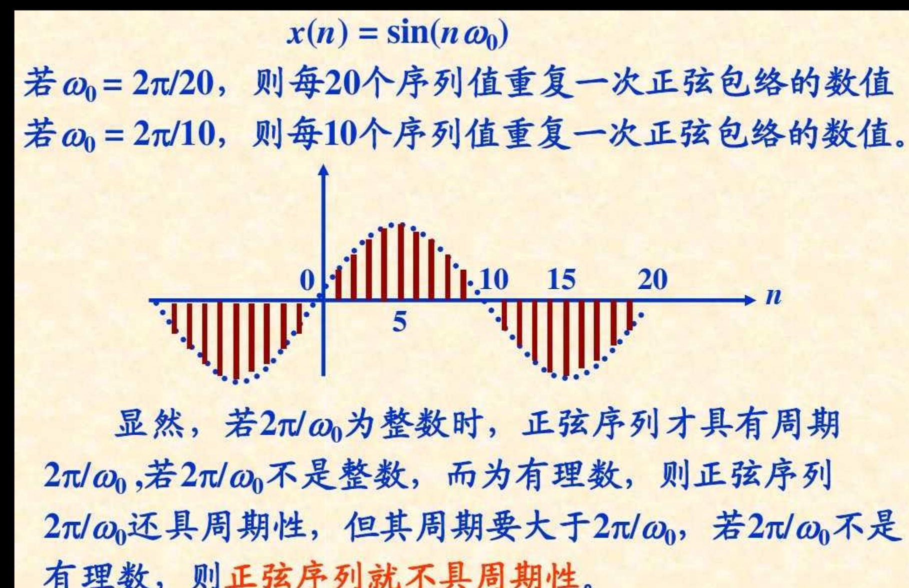


正弦序列$x(n)=\sin(\omega_0 n)$ 可以是对模拟信号$x(t)$采样得到，即

$$x(t)=\sin(\Omega_0 t)$$

$$x(t)|_{t=nT}=\sin(\Omega_0 nT)$$

$$x(n)=\sin(n\omega_0)$$



取 n 的单位为“样本”，频率 ω_0 的单位是“弧度/样本”

- 数字频率 ω 与模拟角频率 Ω 之间的关系

因为在数值上，序列值与采样信号值相等，因此得到数字频率 ω 与模拟角频率 Ω 之间的关系为

$$\omega = \Omega T$$

上式具有普遍意义，它表示凡是由模拟信号采样得到的序列，模拟角频率 Ω 与序列的数字域频率 ω 成线性关系。由于采样频率f_s与采样周期T 互为倒数，也可以表示成下式

$$\omega = \frac{\Omega}{f_s}$$

- 数字频率 ω 表示了两个采样点间隔的弧度

复指数序列

a为复数的指数序列 Aa^n，其实部和虚部是指数加权的正弦序列。

$$x(n)=Aa^n=|A|e^{j\psi}(|a|e^{j\omega_0})^n=|A||a|^n e^{j(\omega_0 n+\psi)}$$

由于 $$e^{j(\omega_0 n+\psi)}=\cos(\omega_0 n+\psi)+j\sin(\omega_0 n+\psi)$$

得到

$$x(n)=Aa^n=|A||a|^n\cos(\omega_0 n+\psi)+j|A||a|^n\sin(\omega_0 n+\psi)$$

复指数序列 $e^{\omega_0 n}$ 是一种最常用的序列(分析离散时间系统的重要序列)

复指数序列与正弦序列的周期问题（**讨论**）

由于n取整数，当考虑频率为$(\omega_0+2\pi)$的复指数序列时，有下面等式成立：

$$\boxed{x(n) = Ae^{j(\omega_0+2\pi)n} = Ae^{j\omega_0 n}\, e^{j2\pi n} = Ae^{j\omega_0 n}}$$

上式说明，频率为$(\omega_0+2\pi r)$的离散时间复指数序列相互之间是无法区分的(r为整数)。

对于正弦序列同样成立：

$$\boxed{x(n) = A\cos[(\omega_0+2\pi r)n+\psi] = A\cos(\omega_0 n+\psi)}$$

因此，当讨论具有 $x(n) = Ae^{j\omega_0 n}$ 或 $A\cos(\omega_0 n+\psi)$信号时，只需长度为 2π 的一段频率区间就可以。

■ 任意序列的单位采样序列表示法

(单位采样移位加权和表示)

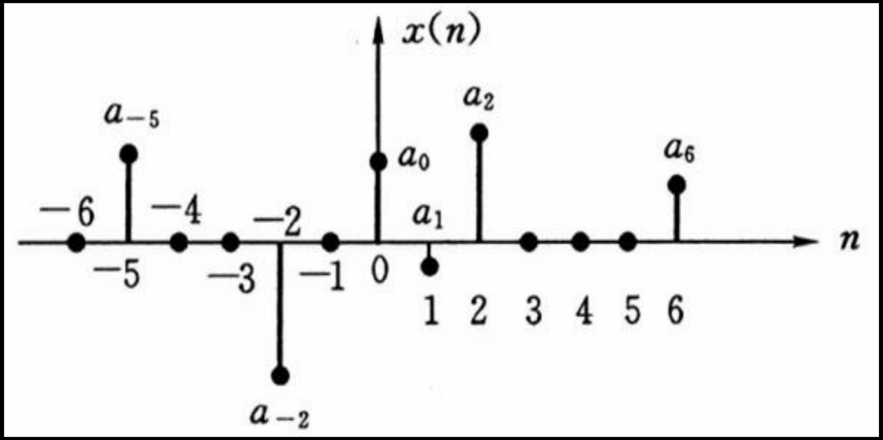
任意一个序列可以用一组移位的单位采样序列的幅度加权和来表示。 如图所示的序列 $x(n)$ 可表示成：

$$x(n)=a_{-5}\delta(n+5) + a_{-2}\delta(n+2) + a_0\delta(n) + a_1\delta(n-1) + a_2\delta(n-2) + a_6\delta(n-6)$$

可导出任意序列的一般表达式：

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

$$\delta(n-m) = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$



这种任意序列的表示方法是离散信号与系统分析中一个很有用的公式

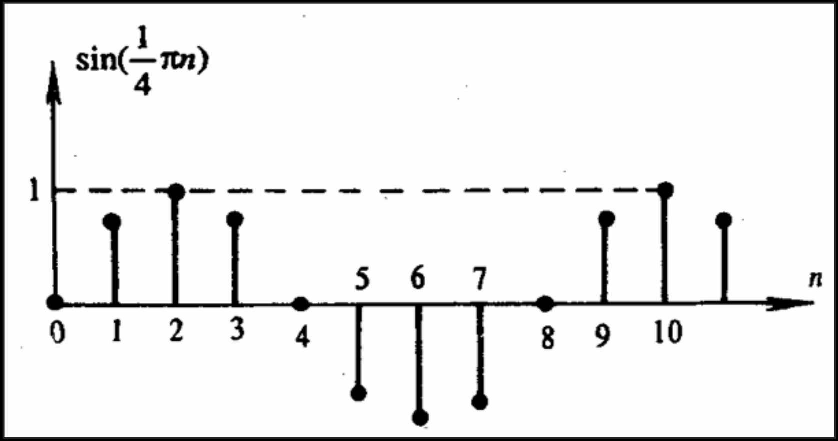
■ 周期序列

如果对所有n存在一个最小的正整数N，使下面等式成立：

$$x(n) = x(n+N), \quad -\infty<n<\infty$$

则称序列$x(n)$为周期性序列，周期为 N（注意N 取整数）。

$$x(n)=\sin(\frac{\pi}{4}n)$$



上式中，数字频率是π/4，由于 n 取整数，可以写成下式

$$x(n)=\sin[\frac{\pi}{4}(n+8)]$$

该式表明$\sin(\frac{\pi}{4}n)$是周期为8的正弦周期序列，如上图所示。

■ 一般正弦序列的周期性

假设 $x(n) = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$

那么（根据周期序列的定义：$x(n) = x(n+N)$ ），有

$$x(n+N) = A\cos(\omega_0(n+N)+\varphi) = A\cos(\omega_0 n + \boxed{\omega_0 N} + \varphi)$$
$$= A\cos(\omega_0 n + \varphi)$$

要使上式成立，则要求 $\boxed{\omega_0 N}=2\pi k$， k 取整数，且 k 的取值要保证 N 是最小的正整数，则 $2\pi/\omega_0$ 必须是整数或有理数。满足这些条件，正弦序列才是以 N 为周期的周期序列。

复指数序列与正弦序列未必以（$2\pi/\omega_0$）为周期，取决于 ω_0 的值，要求 $\omega_0 N= 2k\pi$ ，其中 N 为整数。

■ 以上讨论的小结

1、正弦连续信号一定是周期函数，但正弦序列则不一定是周期序列（$2\pi/\omega_0$必须是整数或有理数）

2、数字角频率ω与模拟角频率Ω不同。连续指数信号$e^{j\Omega t}$中$(t,\Omega)\in R$，不同的Ω对应不同频率的连续信号。但在序列中，有

$$\boxed{e^{jn\omega}=e^{j(\omega+2k\pi)n}}$$

因此，在数字频率轴上相差2π整数倍的所有复指数序列值都相同。或者说ω有效值区间仅限于

$$\boxed{-\pi\le\omega\le\pi}$$

2.1.3 序列的稳定性与因果性

- **稳定性** 序列 $x(n)$ 是稳定的，当且仅当存在一个固定的有限正数 S 使下式成立

$$S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty,\qquad -\infty<n<\infty$$

上式意味着 $x(n)$绝对可加（对应连续信号的绝对可积）

- **因果性** 如果对于$n<0$时，序列$x(n)=0$，那么序列$x(n)$称为因果性的（或物理可实现的）

在线性时不变系统中稳定性和因果性有着明确的物理意义

2.1.4 序列的基本运算

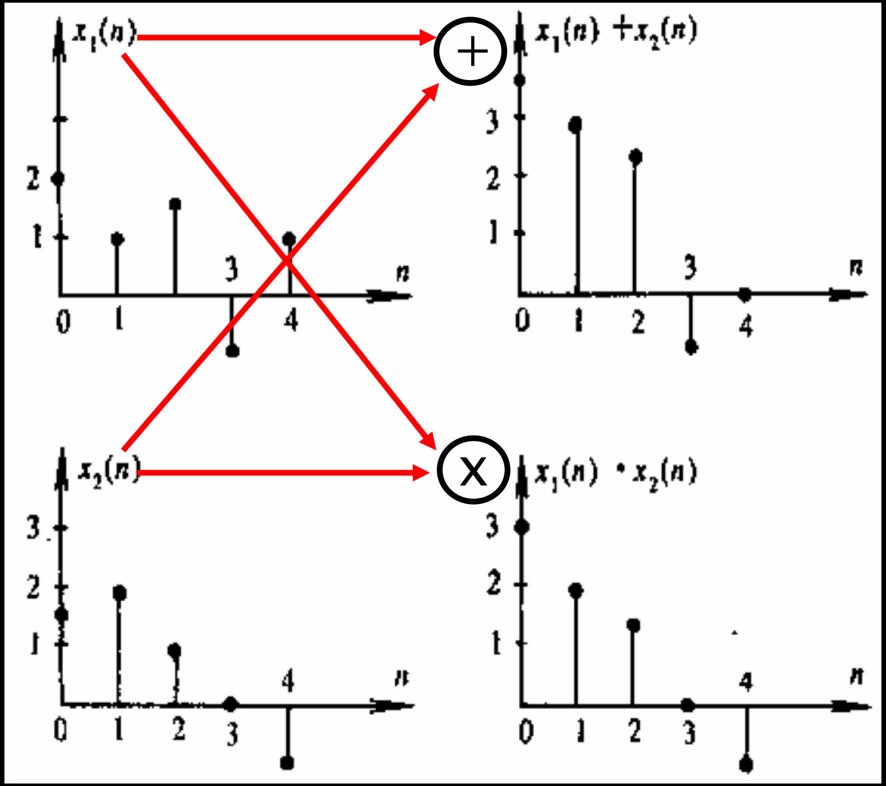
在数字信号处理中，基本的序列运算有加法、乘法、移位、翻转及尺度变换。

■ 序列的相加与相乘

序列之间的加法和乘法，是指它的同序号的序列值逐项对应相加和相乘得一新序列

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

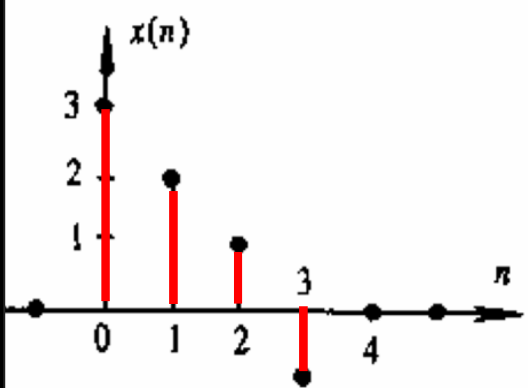
$$y(n) = x_1(n)x_2(n)$$



■ 序列的加权

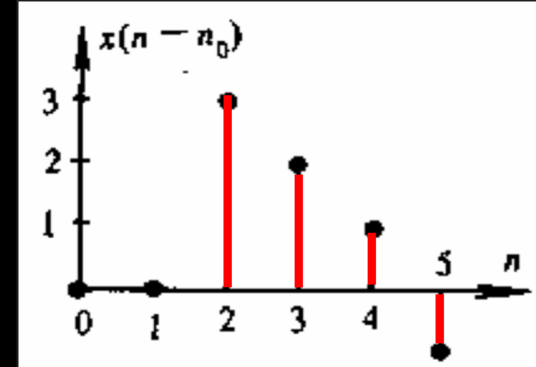
$ax = a \cdot x(n)$ 序列的每个样本值与常数a相乘

■ 序列的移位与反转



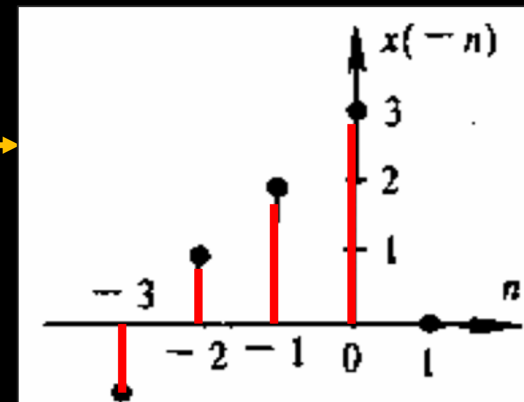
(a) 序列 $x(n)$

当m为正时，
$x(n-m)$表示依次右移m位；
$x(n+m)$表示依次左移m位



(b) $x(n)$移位

将$x(n)$以$n=0$为对称轴反转得到序列$x(-n)$



(c) $x(n)$反转

序列的样本累加

不同于序列相加，是将给定区间$[n_1, n_2]$中的所有序列样本值相加

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) = x(n_1) + \cdots + x(n_2)$$

序列的样本相乘

不同于序列相乘，是将给定区间$[n_1, n_2]$中的所有序列样本值相乘

$$\prod_{n=n_1}^{n_2} x(n) = x(n_1) \times \cdots \times x(n_2)$$

序列的差分

前向差分（先左移后相减）$y(n) = \Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$

后向差分（先右移后相减）$y(n) = \nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$

- 序列的能量

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

- 周期为N的周期序列的平均功率

$$p_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

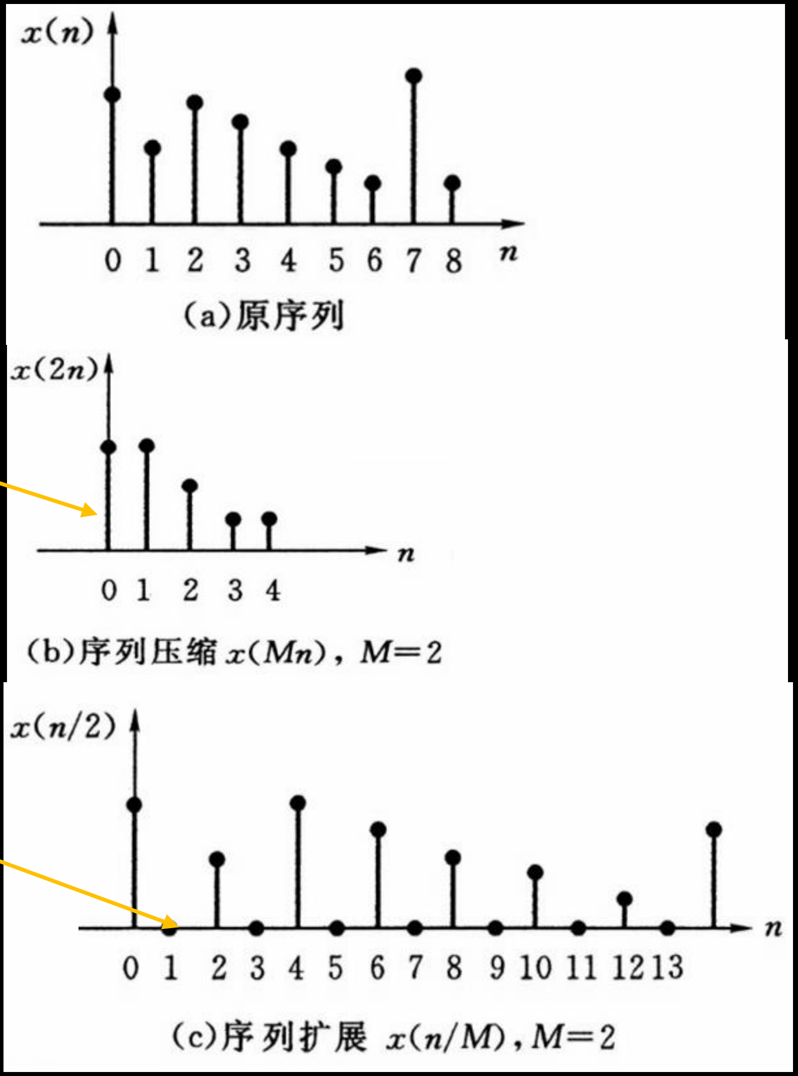
(抽取与内插)

抽取　$x(n) \rightarrow x(mn)$, m 为正整数

例如，　m=2，$x(2n)$，相当于两个点取一点；以此类推。

插值　$x(n) \rightarrow x(n/m)$, m 为正整数

例如，m=2，$x(n/2)$，相当于两个点之间插一个点；以此类推。



(a)原序列

(b)序列压缩 $x(Mn)$，M=2

(c)序列扩展 $x(n/M)$，M=2

2.2 序列的离散时间傅里叶变换

■ 采样信号的傅里叶变换表示

分析 $$X_s(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(nT)e^{-j\Omega nT}$$

综合 $$x(nT)=\frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_s(j\Omega)e^{j\Omega nT}d\Omega$$

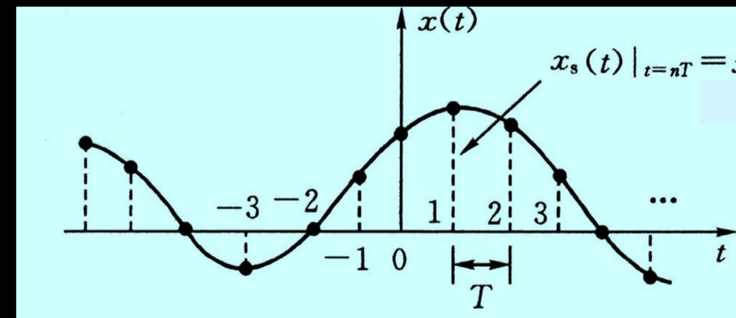
$nT\longrightarrow n$ 时域的归一化

$\Omega T=\omega$ 频域的归一化

■ 序列信号的傅里叶变换表示

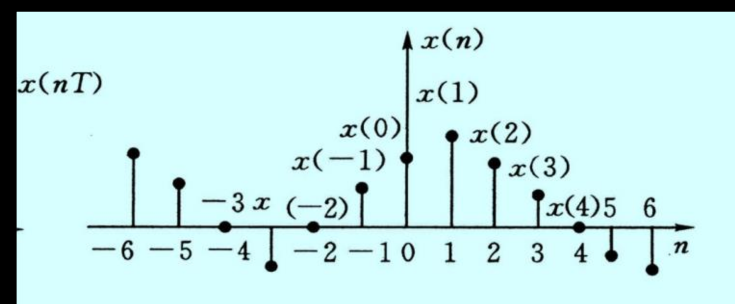
分析 $$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

综合 $$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$



(a)对连续时间信号 $x(t)$ 进行采样得到的 $x(nT)$

(T—采样周期)



(b)对 $x(nT)$ 进行时间归一化($T=1$)处理得到的 $x(n)$；$x(n)$ 也可表示为离散过程直接产生的离散时间信号

- ■ 傅里叶变换（分析公式）用来分析序列$x(n)$所包含的各个频率分量的大小
- ■ 傅里叶反变换（综合公式）是将序列$x(n)$表示为一系列无限小的复正弦的叠加

回顾

- 周期信号的傅里叶级数表示

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\Omega_0)\,e^{jn\Omega_0 t}$$

$$X(n\Omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)e^{-jn\Omega_0 t}\mathrm{d}t$$

任何周期信号都可以用傅里叶级数表示

- 非周期信号的傅里叶变换

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

对非周期信号进行周期延拓

$$x(t)=\lim_{T\to\infty}x_T(t)$$

- 采样信号的离散时间傅里叶变换

$$X_s(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega nT}$$

$$x(nT)=\frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}X_s(j\Omega)e^{j\Omega nT}\mathrm{d}\Omega$$

对连续时间信号进行等间隔采样

$$x_s(t)=x(t)p(t)=x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

采样信号频谱与原连续信号频谱的关系

$$X_s(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}X\left(j\Omega-j\frac{2\pi r}{T}\right)$$

- 序列信号的傅里叶变换

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})\,e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$

$X_s(j\Omega)$与$X(e^{j\omega})$的关系？（讨论）

$X_s(j\Omega)$与$X\left(e^{j\omega}\right)$的关系？

由非周期信号的傅里叶变换 →

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

变量替换 $t{=}nT$, $v{=}\ \Omega{+}2\pi r/T$

$$x(nT)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty}X\left(j\Omega-j\frac{2\pi r}{T}\right)\right]e^{j\Omega nT}$$

$\omega=\Omega T$ 代入上式(推导 $X_s(j\Omega)$与$X\left(e^{j\omega}\right)$ 的关系)

$$x(nT)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left(j\frac{\omega}{T}-\frac{2\pi r}{T}\right)\right]e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$

采样信号的离散时间傅里叶变换

$$x(nT)=\frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}X_s(j\Omega)e^{j\Omega nT}\mathrm{d}\Omega$$

比较

$$X_s(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}X\left(j\Omega-j\frac{2\pi r}{T}\right)$$

序列信号的傅里叶变换

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$

比较

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left(j\frac{\omega}{T}-\frac{2\pi r}{T}\right)$$

$$X_s(j\Omega)=X\left(e^{j\omega}\right)\big|_{\omega=\Omega T}$$

(频率的归一化）

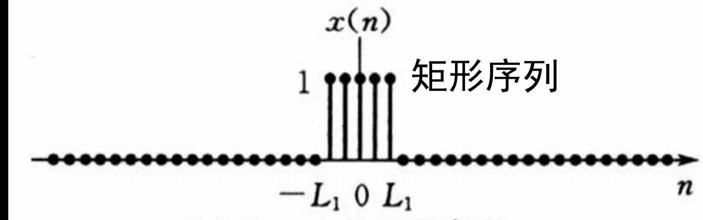
举例：求下式的离散时间傅里叶变换

$$x(n)=\begin{cases}1, & -L_1\le n\le L_1\\ 0, & \text{其它}n\end{cases}$$

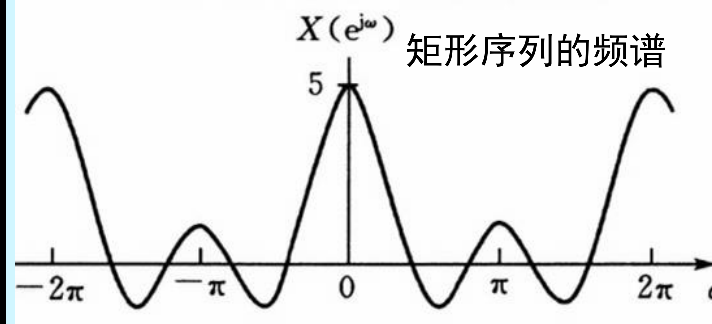
$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-L_1}^{L_1}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{\sin\omega\left(L_1+\frac{1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

（利用几何级数的前L_1项之和公式）



（a）$L_1=2$ 的矩形序列



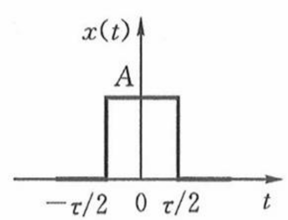
（b）对应的离散时间傅里叶变换

矩形序列的频谱是连续的，是频率变量ω的周期函数（与矩形脉冲比较-举例）

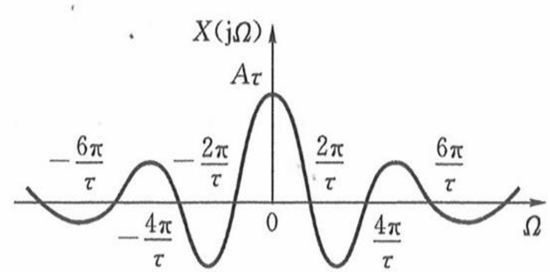
非周期矩形脉冲信号的频谱分析

$$x(t)=\begin{cases}A, & -\frac{\tau}{2}\le t\le\frac{\tau}{2}\\ 0, & \end{cases}$$

$$X(j\Omega)=A\tau\frac{\sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}$$



(a)



矩形脉冲信号的频谱是是非周期的

(b)

- 序列的傅里叶变换收敛的一个充分条件是序列绝对可加

$$|X(e^{j\omega})| = |\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}|$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|\,|e^{-j\omega n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

序列的绝对可加保证了傅里叶级数**一致收敛**到一个ω 的连续函数

- 稳定序列是绝对可加的，必然存在傅里叶变换

举例：稳定的指数序列的傅里叶变换

$$x(n) = a^n u(n) \qquad |a| < 1$$

- 非绝对可加，但平方可加的序列

放宽$X(e^{j\omega})$定义中无限求和项的一致收敛为均方收敛

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} - \sum_{n=-M}^{M} x(n)e^{-j\omega n} \right|^2 d\omega = 0$$

偏差未必趋于零，但偏差的“能量”趋于零

2.3 离散时间傅里叶变换的性质

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

1. 周期性

由于$e^{-j(\omega+2\pi r)n} = e^{-j\omega n}$，$r$为整数， 故有

$$X\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j(\omega+2\pi r}\right)$$

上式说明序列的离散时间傅里叶变换是ω的周期函数（周期2π），这样在计算或分析的过程中，只需考虑$X\left(e^{j\omega}\right)$的一个周期，即$\omega\in[0，2\pi]$或$[-\pi，\pi]$。

2. 对称性

- 任意序列可表示为共轭对称与共轭反对称序列之和

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] = x_e^*(-n)$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] = -x_o^*(-n)$$

共轭对称实序列即为偶序列，共轭反对称实序列即为奇序列

- 傅立叶变换也可表示为共轭对称与共轭反对称函数之和

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] = X_e^*(e^{-j\omega}) \qquad \text{共轭对称}$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] = -X_o^*(e^{-j\omega}) \qquad \text{共轭反对称}$$

共轭对称实函数即为偶函数，共轭反对称实函数即为奇函数

■ 实序列的傅里叶变换是共轭对称的

实序列的DTFT$X(e^{j\omega})$是共轭对称的，即 $X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$，用实部和虚部表示为

$$X(e^{j\omega})=\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]+j\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$$

则得

$$\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]=\mathrm{Re}[X(e^{-j\omega})] \quad \text{偶对称}$$

$$\mathrm{Im}[\mathrm{X}(e^{j\omega})]=-\mathrm{Im}[X(e^{-j\omega})] \quad \text{奇对称}$$

极坐标形式

$$X(e^{j\omega})=|X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}$$
$$=|X(e^{-j\omega})|e^{-j\angle X(e^{-j\omega})}=X^*(e^{-j\omega})$$

1、实序列傅里叶变换的实部是偶函数
2、实序列傅里叶变换的虚部是奇函数
3、实序列傅里叶变换的幅值是偶函数
4、实序列傅里叶变换的相位是奇函数

对称性的两个基本性质

1、如果有 $X(e^{j\omega})=\mathcal{F}[x(n)]$，则有

$$X^*(e^{-j\omega})=\mathcal{F}[x^*(n)]$$

证明:

$$\mathcal{F}[x^*(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)\,e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)e^{j\omega n}]^*$$

$$=X^*(e^{-j\omega})$$

2、如果有 $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x(n)]$，则有

$$X^*(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x^*(-n)]$$

证明:

$$\mathcal{F}[x^*(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(-n)\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)\, e^{j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)\, e^{-j\omega n}]^* = X^*(e^{j\omega})$$

■ 序列的实、虚部与其傅里叶变换的偶、奇部的关系

1. 序列实部的傅里叶变换等于其傅里叶变换的偶部

即 $\mathcal{F}[\mathrm{Re}\{x(n)\}] = X_e(e^{j\omega})$

证明

因为 $\mathrm{Re}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)] = x_e^*(-n)$

故 $\mathcal{F}[\mathrm{Re}\{x(n)\}] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})]$

$= X_e(e^{j\omega})$

2. 序列 j 倍虚部的傅里叶变换等于其傅里叶变换的奇部

即 $\mathcal{F}[j\mathrm{Im}\{x(n)\}] = X_o(e^{j\omega})$

证明

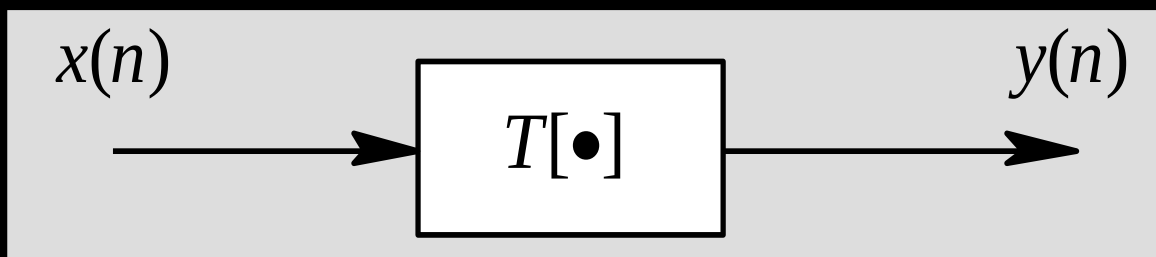
因为 $\mathrm{Im}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)] = x_e^*(-n)$

故 $\mathcal{F}[j\mathrm{Im}\{x(n)\}] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*\ (e^{-j\omega})]$

$= X_o(e^{j\omega})$

2.4 离散时间系统

输入与输出都是离散序列的系统定义为离散时间系统（线性和非线性两大类），离散时间系统数学上可定义为一个变换或算子，将输入序列映射为输出序列



$$y(n)=T\,[x(n)]$$

对变换$T\,[\,\bullet\,]$的不同约束条件定义了各类不同的离散系统。线性和时不变的约束条件定义了一类可以用“卷积和”表示的系统，如果再有因果性和稳定性的约束就定义了一类离散线性时不变系统；线性系统的输出序列$y(n)$的第n个样本的值依赖于输入序列$x(n)$的所有或部分样本

2.4.1 线性系统

满足叠加原理的系统称为线性系统。设$x_1(n)$和$x_2(n)$分别作为系统的输入序列，其输 出分别用$y_1(n)$和$y_2(n)$表示，即

$$y_1(n)=T[x_1(n)],\quad y_2(n)=T[x_2(n)]$$

那么线性系统一定满足

$$T[x_1(n)+x_2(n)] = T[x_1(n)]+T[x_2(n)] = y_1(n)+y_2(n) \qquad (1)$$

$$T[ax_1(n)]= aT[x_1(n)] = a\,y_1(n),\quad a\text{是常数} \qquad (2)$$

满足(1)式称为线性系统的叠加性；满足(2)式称为线性系统的比例性或齐次性；如线性系统同时满足式（1）和（2）

$$y(n)=T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n),\quad a\text{和}b\text{均是常数}$$

则称该线性系统满足齐次性和叠加性

如累加器

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m)$$

2.4.2 离散线性时不变系统

如果系统对输入信号的运算关系 $T[\bullet]$ 在整个运算过程中不随时间变化，或者说系统对于输入信号的响应与信号加于系统的时间无关，则这种系统称为时不变系统，用公式表示如下

$$y(n) = T[x(n)]$$

$$y(n-k) = T[x(n-k)]$$

例　讨论 $y(n)=ax(n)+b$ 代表的系统是否是时不变系统式中 a 和 b 是常数。

解

$$y(n) = ax(n)+b$$

$$y(n-k) = ax(n-k)+b$$

$$y(n-k) = T[x(n-k)]$$

因此该系统是时不变系统。（讨论系统的单位采样响应）

例　讨论 $y(n)=nx(n)$ 所代表的系统是否是时不变系统

解

$$y(n) = nx(n)$$

$$y(n-k) = (n-k)x(n-k)$$

$$T\,[x(n-k)] = nx(n-k)$$

$$y(n-k) \neq T\,[x(n-k)]$$

因此该系统是一个时变系统。

同样方法可以证明 $y(n)=e^{-n}x(n)$ 所代表的系统是一个时变系统。

（讨论系统的单位采样响应）

■ 离散线性时不变系统输入与输出之间的关系

设系统的输入$x(n)=\delta(n)$，系统输出$y(n)$的初始状态为零；定义这种条件下系统输出称为系统的单位采样响应，用$h(n)$表示。换句话说，单位采样响应是系统对于$\delta(n)$的零状态响应。用公式表示为

$$h(n)=T\left[\delta(n)\right]$$

$h(n)$ 和模拟系统中的 $h(t)$ 单位冲激响应相类似，都代表系统的时域特征。

设系统的输入为 $x(n)$ ，并把$x(n)$表示成单位采样序列移位的加权和，即

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

则线性系统的输出为

$$y(n) = T[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)]$$

根据线性系统的性质

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[\delta(n-m)]$$

又根据时不变性质

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$
$$= x(n) * h(n)$$

上式表示线性时不变系统的输出等于输入序列$x(n)$和该系统的单位采样响应$h(n)$的卷积。只要知道系统的单位采样响应$h(n)$，按照上式，对于任意输入$x(n)$都可以求出系统的输出$y(n)$

- 离散线性卷积公式 $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$

离散域的卷积定理 $y(n)=x(n)*h(n)\Leftrightarrow \mathrm{Y}(e^{j\omega})=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$

$$y(n)=\ x(n)\,h(n)\Leftrightarrow \mathrm{Y}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\ X\left(je^{j\omega}\right)*H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=\underline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega-\theta}\right)\mathrm{d}\theta}$$

连续域的卷积定理 $y(n)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau\Leftrightarrow X(j\Omega)H(j\Omega)$

$$y(n)=h(t)x(t)\Leftrightarrow Y(j\Omega)=\underline{\frac{1}{2\pi}H(j\Omega)*X(j\Omega)}$$

离散域的卷积是周期卷积，而连续域的卷积是无限积分 $\int_{-\infty}^{\infty}$

卷积求解过程

按照式

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

1、将 $x(n)$ 和 $h(n)$ 用 $x(m)$ 和 $h(m)$ 表示，并将 $h(m)$ 进行反转，形成 $h(-m)$；

$h(-m)$移位n，得到 $h(n-m)$；当 $n>0$ 时，序列右移；$n<0$时，序列左移；

3、将$x(m)$和$h(n-m)$相同m的序列值对应相乘后，再相加。

按照以上三个步骤可得到卷积结果$y(n)$

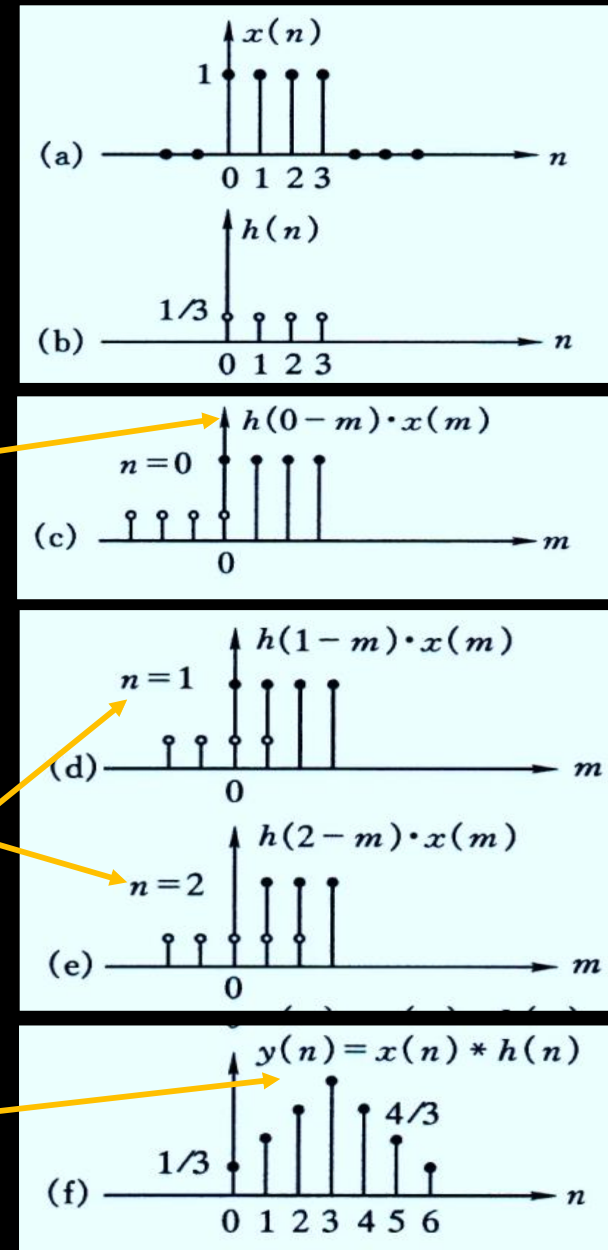
离散线性时不变系统卷积过程的图解说明

$$y(n) = \sum_{m=0}^{3} x(m)h(n-m)$$

1. 将$x(n)$和$h(n)$用$x(m)$和$h(m)$表示，并将$h(m)$进行反转，形成$h(-m)$；

2. 将 $h(-m)$ 移位n，得到$h(n-m)$
   当$n>0$时，序列右移；
   当$n<0$时，序列左移；

3. 将$x(m)$和$h(n-m)$相同m的序列对应相乘后，再相加。



例　设 $x(n)=R_4(n)$，$h(n)=R_4(n)$，求 $y(n) = x(n) * h(n)$

解　按照式

$$\boxed{y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_4(m)R_4(n-m)}$$

上式中矩形序列长度为4，求解上式需要先根据矩形序列的非零值区间确定求和的上、下限，$R_4(m)$的非零值区间为：$0\le m\le 3$，　$R_4(n\text{-}m)$的非零值区间为：$0\le n\text{-}m\le 3$，其乘积值的非零区间，要求 m 同时满足以下两个不等式

$$0\le m\le 3$$

$$n\text{-}3\le m\le n$$

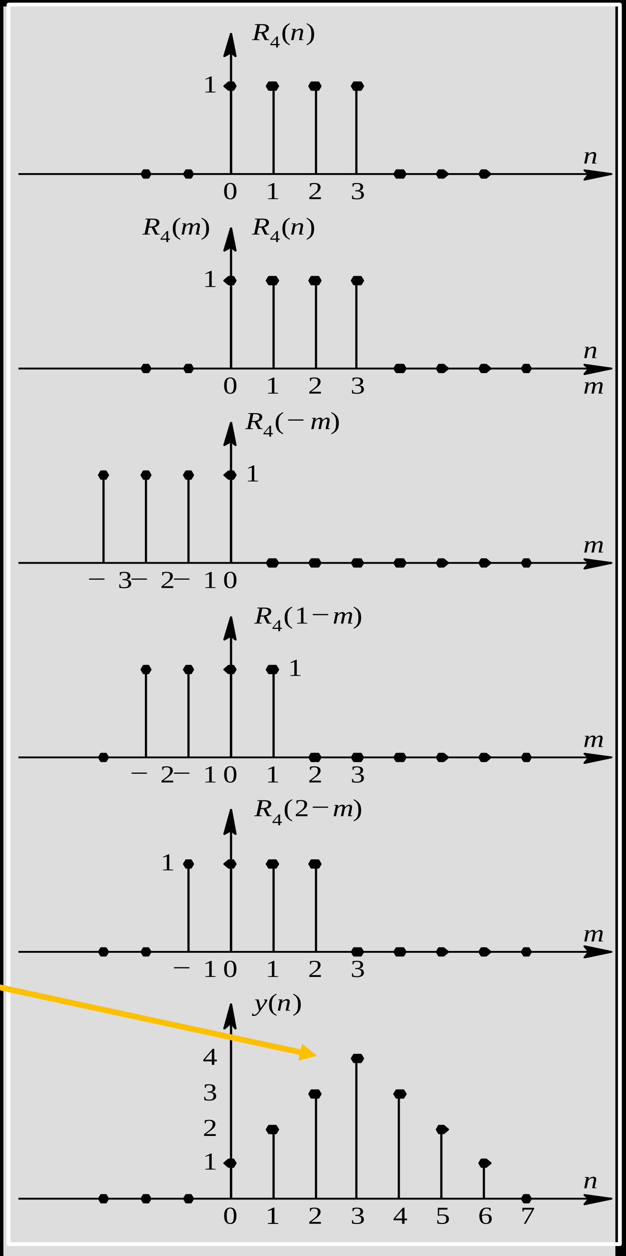
因此

$$0 \le n \le 3, y(n) = \sum_{m=0}^{n} 1 = n + 1$$

$$4 \le n \le 6, y(n) = \sum_{m=n-3}^{3} 1 = 7 - n$$

卷积过程以及 $y(n)$ 波形如图所示，$y(n)$用公式表示为

$$y(n) = \begin{cases} n+1, & 0 \le n \le 3 \\ 7-n, & 4 \le n \le 6 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



$0 \le m \le 3$

$0 \le n-m \le 3$

两个乘积

$0 \le m \le 3$

$n-3 \le m \le n$

- 卷积的运算是反转、移位、相乘和相加，这类卷积称为序列的线性卷积。设两序列分别的长度是N和M，线性卷积后的序列长度为$(N+M-1)$。
- 线性卷积满足

1. 交换律

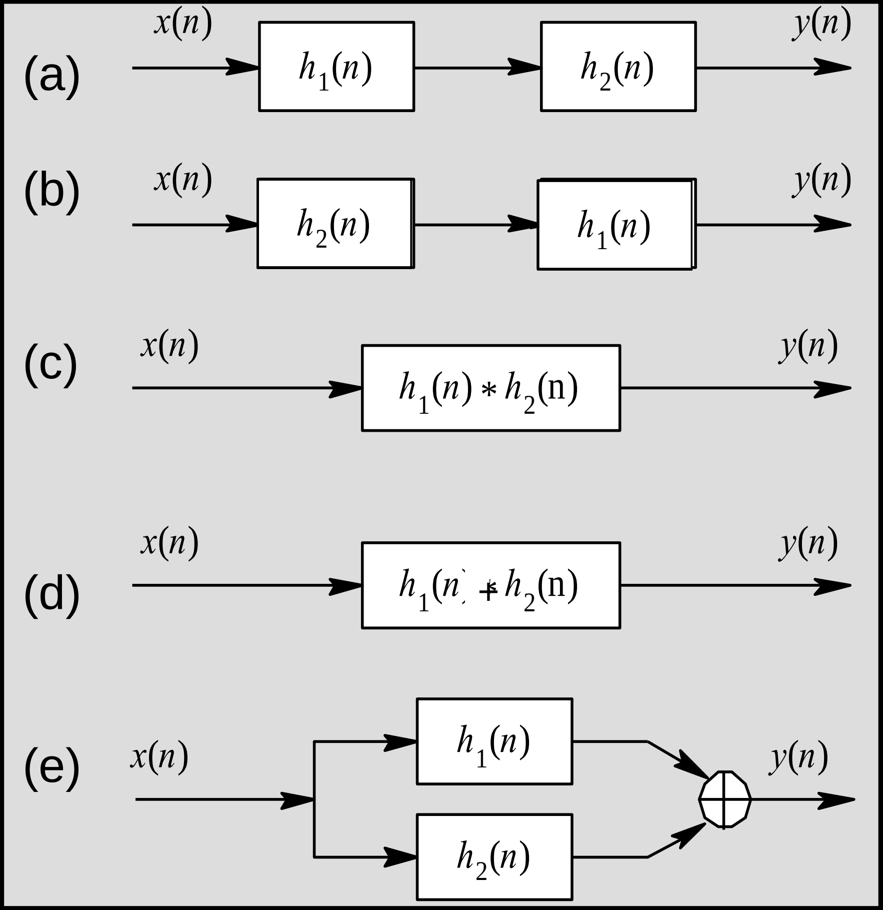
$$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

2. 结合律 图(a)、(b)、(c)

$$y(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$$
$$=[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)$$

3. 分配律 图(d)、(e)

$$y(n)=x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]$$
$$=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$



离散卷积的结合律和分配律

2.4.3 离散线性时不变系统的因果性

- 因果性是对一类线性时不变系统的约束条件

如果系统的输出$y(n)$只取决于 n 时刻和 n 时刻以前的输入，而与 n 时刻以后的输入序列无关，则称该系统具有**因果性质**，或称该系统为**因果系统**；如果 n 时刻的输出还取决于 n 时刻以后的输入序列，在时间上违背了因果性，系统无法实现，则系统被称为**非因果系统**。因此**系统的因果性是指系统的可实现性**。

线性时不变系统具有**因果性的充分必要条件**是系统的单位采样响应满足下式

$$\boxed{h(n)=0, \quad n<0}$$

满足上式条件的序列称为因果序列，因此因果系统的单位采样响应必然是因果序列。

因果性系统的条件式从概念上也容易理解，因为单位采样响应是输入为$\delta(n)$的零状态响应，在$n=0$时刻以前即$n<0$ 时，没有加入信号，输出只能等于零，因此系统满足因果性的条件为

$$\boxed{h(n)=0, \quad n<0}$$

(讨论因果性的证明)

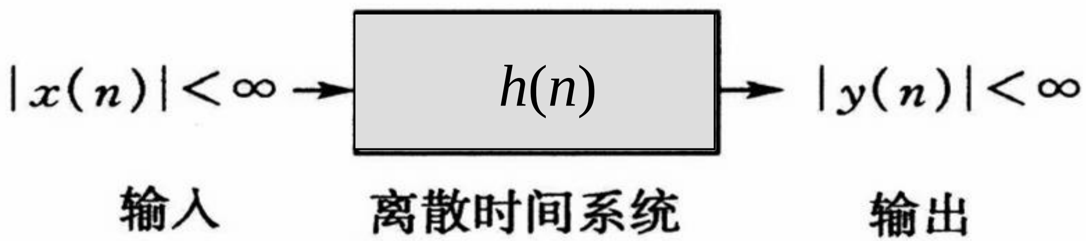
2.4.4 离散线性时不变系统的稳定性

- 稳定性是线性系统理论中的一个重要概念

有界输入有界输出（BIBO）稳定性：当且仅当每一个有界的输入序列都产生有界的输出序列，则该系统是BIBO稳定的。

稳定性的充要条件是系统的单位采样响应绝对可加

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leqslant S < \infty$$



离散时间系统的稳定条件

（讨论稳定条件的充分性和必要性）

根据$h(n)$的时宽：有限冲激响应（finite impulse response，FIR）和无限冲激响应（infinite impulse response，IIR ）两类系统

线性时不变系统可由其单位采样响应$h(n)$完全刻画

$$y(n)=T\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)\right\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)T\{\delta(n-m)\}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

1、线性时不变系统是稳定的，当且仅当其单位采样响应$h(n)$是绝对可加的

$$B_h=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=S<\infty$$

2、线性时不变系统是因果的，当且仅当其单位采样响应$h(n)$是因果序列

$$h(n)=0,\quad n<0$$

几种典型的线性时不变系统的单位采样响应

- 累加器

$$h(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)=\begin{cases}1, & k\geq 0\\ 0, & k<0\end{cases}$$

- 理想延迟系统

$$h(n)=\delta(n-n_d),\qquad -\infty<n<+\infty$$

- 移动平均系统

$$h(n)=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2}\delta(n-k)$$

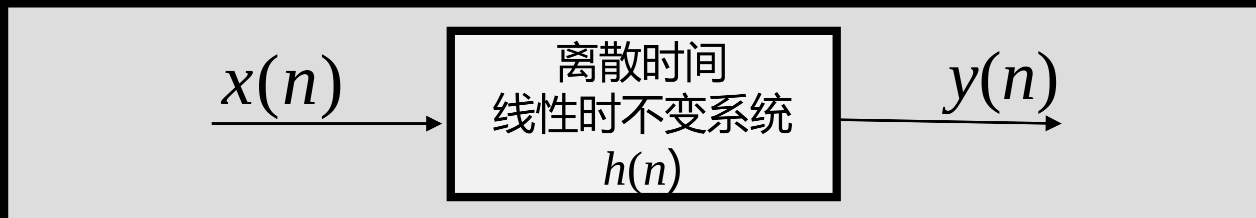
输出序列的第n个样本是输入序列第 n 个样本附近的(M_1+M_2+1)个样本的平均值

- 无记忆系统

系统在每一个n时刻的输出只取决于该时刻的$x(n)$值，如， $y(n)=[x(n)]^2$ 就是这类系统、对于理想单元延迟系统，当$n_d=0$时 系统是无记忆的。

2.4.5 用差分方程表示离散线性时不变系统

任何离散线性时不变系统的输入与输出满足 N 阶线性常系数差分方程



$$\sum_{k=0}^{N} b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} a_k x(n-k)$$

$$\boxed{y(n) = \sum_{k=0}^{M} \frac{a_k}{b_0} x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{b_0} y(n-k), \quad b_0 \neq 0}$$

- 常系数：$a_0, a_1, \ldots, a_M$；$b_0, b_1, \ldots, b_N$均是常数（不含n）
- 阶数：$y(n)$ 变量 k 的最大序号与最小序号之差，如 $N=N-0$
- 线性：$y(n\text{-}k)$与 $x(n\text{-}m)$各项只有一次幂，且不含它们的乘积项
- 线性常系数差分方程求解：时域：递推法、卷积和法; 变换域：Z变换法

■ 用迭代法求解差分方程

举例：已知常系数线性差分方程为 $y(n)=x(n)+by(n\text{-}1)$，求满足该方程的因果系统的单位采样响应$h(n)$.

解：为了得到系统的单位采样响应，令$x(n)=\delta(n)$

于是有 $y(n)=h(n)$

系统方程变为 $h(n)=bh(n-1)+\delta(n)$

因果系统有$h(n)=0,\ n<0$ （这是初始条件）；

系统方程： $h(n) = bh(n-1) + \delta(n)$

初始条件： $h(n)=0,\ n<0$

$$h(1) = bh(0) + \delta(1) = b \cdot 1 + 0 = b$$

$$h(2) = bh(1) + \delta(2) = b^2 + 0 = b^2$$

$$h(3) = bh(2) + \delta(3) = b^3 + 0 = b^3$$

$$\vdots$$

$$h(n) = bh(n-1) + \delta(n) = b^n + 0 = b^n, \qquad n \geq 0$$

归纳得到 $h(n)=b^n u(n)$，对应一个因果系统，且 $|b| < 1$时稳定

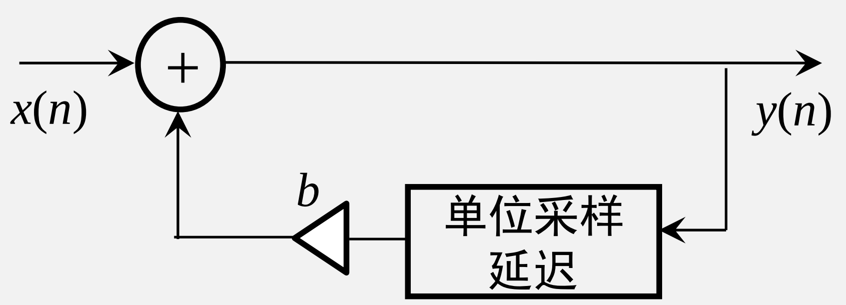
如果初始条件： $h(n)=0, n > 0$ ，则递推得。 （**讨论**）

$h(n)= -b^n u(-n-1)$ 对应一个非因果系统，且$|b| > 1$时稳定

- 对于给定的输入，线性常系数差分方程的解不是唯一的；如要得到特定的输出，需要初始条件约束

  对于实际系统，用递推解法求解，总是由初始条件向$n>0$的方向递推，是一个因果解；但对于差分方程，其本身也可以向$n<0$的方向递推，得到的是非因果解。因此差分方程本身并不能确定该系统是因果还是非因果系统，相应的初始条件决定系统是否满足因果性。

- 差分方程的递推数值解法中的三种基本运算



一阶差分方程描述的离散线性时不变系统（讨论）

加法、乘法、延迟

对于一个给定的离散线性时不变系统，可以有多个不同的差分方程表达

- 零阶线性常系数差分方程（没有反馈项）

$$y(n)=\sum_{m=0}^{M}\frac{a_m}{b_0}x(n-m)$$

相应的单位采样响应为

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}\frac{a_k}{b_0}\delta(n-k)=\begin{cases}\left(\dfrac{a_n}{b_0}\right) & 0\le n\le M\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

FIR系统的输出可以无需递归地被计算。

注意

1、一个常系数线性差分方程并不一定代表因果系统，也不一定表示线性时不变系统。这些都由初始条件所决定

2、我们讨论的系统都假定：常系数线性差分方程就代表线性时不变系统，且多数代表因果系统

2.5 离散时间系统的频率响应函数

2.5.1 对复指数序列的响应

线性时不变系统的一个重要特性是对某些类型的输入特征函数，其输出依然保持同样的特征函数，复指数函数是这种特征函数之一（**讨论**）

- 复指数序列$e^{j\omega n}$是线性时不变系统的**特征函数**

$$y(n)=T[e^{j\omega n}]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{j\omega(n-m)}=e^{j\omega n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{-j\omega m}$$

如定义

$$H(e^{j\omega})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{-j\omega m}$$

则$y(n)$可表示为

$$y(n)=e^{j\omega n}H(e^{j\omega})$$

系统对 $e^{j\omega n}$ 输入所产生的输出序列 $y(n)$ 依然是具有相同频率的复指数序列，只是乘了一个复数常数$H(e^{j\omega})$（又称**特征值**）

- **特征值**$H(e^{j\omega})$是频率ω的函数，描述了由系统导致的复指数输入信号在复振幅上的变化，称为**系统的频率响应**

- 通常，$H(e^{j\omega})$ 为复数

$$H(e^{j\omega}) = \mathrm{Re}[H(e^{j\omega})] + j\mathrm{Im}[(e^{j\omega})] = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$$

- 系统的单位采样响应$h(n)$可由其频率响应$H(e^{j\omega})$ 的离散时间傅里叶反变换求得

$$h(n) = \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$

- 离散时间线性时不变系统的频率响应是频率ω的周期函数，周期为2π

$$H(e^{j(\omega+2\pi)})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j(\omega+2\pi)k}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j\omega k}e^{-j2\pi k}=H(e^{j\omega})$$

1、频率ω与$(\omega+2r\pi)$复指数序列是无法区别的

2、只需要给出 2π 区间内的$H(e^{j\omega})$即可

3、一般取 $-\pi<\omega\leq\pi$

2.5.2 对任意序列的响应

系统的单位采样响应为$h(n)$，系统的输入为任意绝对可加序列 $x(n)$，它们各自有 $h(n) \Leftrightarrow H\left(e^{j\omega}\right)$，$x(n) \Leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)$ ，系统的输出由离散线性卷积给出。由卷积性质可知，系统的输入和输出的离散时间傅里叶变换存在以下关系

$$y(n) = x(n) * h(n)$$
$$Y\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right) H\left(e^{j\omega}\right)$$

系统的单位采样响应$h(n)$的傅里叶变换称作系统频率响应

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, e^{-j\omega n}$$

也就是说，其输出序列的傅里叶变换由输入序列的傅里叶变换 $X\left(e^{j\omega}\right)$ 与该系统的频率响应$H\left(e^{j\omega}\right)$相乘得到。 **（讨论）**

2.5.3 利用差分方程求频率响应函数

离散线性时不变系统的 N 阶差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} a_k x(n-k)$$

应用DTFT 时间移位特性，即$x(n-k) \Leftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega k}$

为分析方便，设式中 b_0=1。对上式两边进行离散时间傅里叶变换(DTFT)

$$Y(e^{j\omega})\sum_{k=0}^{N} b_k e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega})\sum_{k=0}^{M} a_k e^{-j\omega k},\quad b_0 = 1$$

因此，系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} a_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} b_k e^{-j\omega k}} = \frac{a_0 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{-j2\omega} + \cdots + a_M e^{-jM\omega}}{1 + b_1 e^{-j\omega} + b_2 e^{-j2\omega} + \cdots + b_N e^{-jN\omega}}$$

由上式可知，离散线性时不变系统的频率响应$H(e^{j\omega})$可以用两个$e^{-j\omega}$的多项式之比来描述，将不同的ω代入上式，就可以求出系统的频率特性。

本章小结

- 离散时间序列：基本序列及其运算
- 离散序列信号的傅里叶变换表示
- 离散时间傅里叶变换的性质
- 离散线性时不变系统
- 离散时间系统的频率响应函数