

第一章 矢量分析

主要内容

梯度、散度、旋度、亥姆霍兹定理

1-4. 标量场的方向导数与梯度

1-5. 矢量场的通量与散度

1-6. 矢量场的环量与旋度

1-7. 无散场和无旋场

1-8. 格林定理

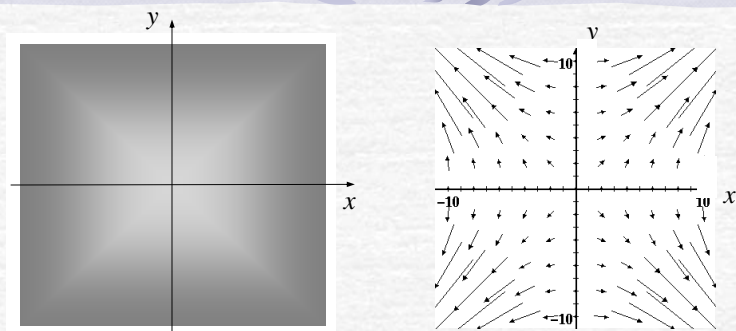
1-9. 矢量场的惟一性定理

1-10. 亥姆赫兹定理

1-11. 正交曲面坐标系

1-4. 标量场的方向导数和梯度

标量场 (ϕ) 和矢量场 (A)



标量场：场量是标量

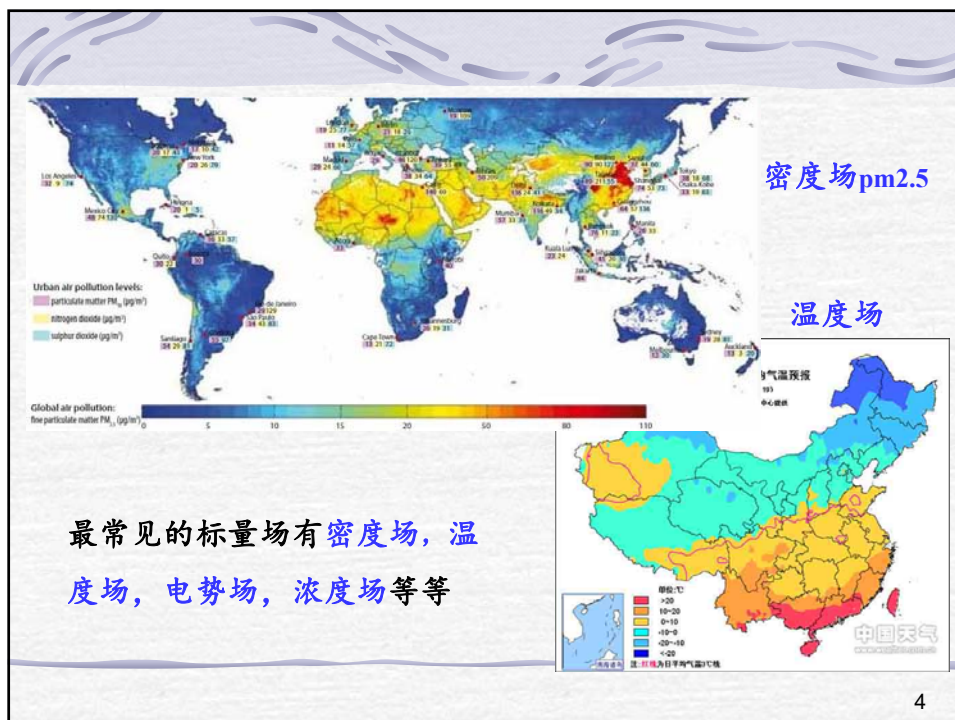
矢量场：场量是矢量

标量场与矢量场的本质区别？

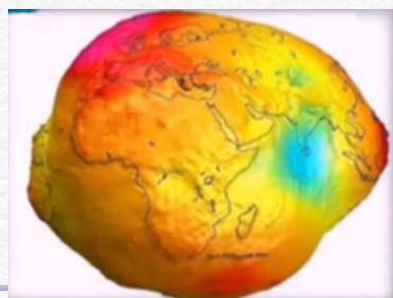
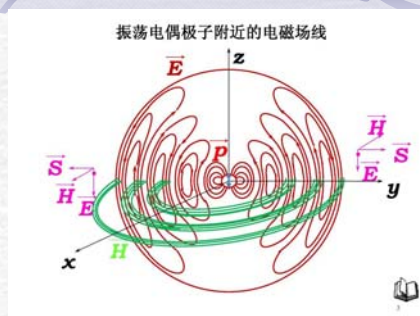
标量场中每一点的场量只有大小，没有方向；

矢量场中每一点的场量既有大小，又有方向。

3



4

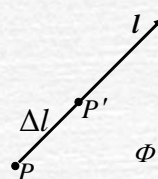


最常见的矢量场有电磁场、引力场、风场、水流场等等

5

1-4. 标量场的方向导数与梯度

标量场在某点的方向导数表示标量场自该点沿某一方向上的变化率。



标量场 Φ 在 P 点沿 l 方向上的方向导数 $\frac{\partial \Phi}{\partial l} \Big|_P$ 定义为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} \Big|_P = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Phi(P') - \Phi(P)}{\Delta l}$$

6

1-4. 标量场的方向导数与梯度

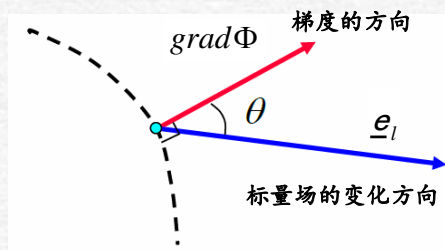
标量场某点梯度的大小等于该点的最大方向导数，某点梯度的方向为该点具有最大方向导数的方向。

标量场的方向导数是标量，梯度是矢量。

标量场 ϕ 在某点的梯度记为 $\text{grad } \phi$ ，grad 是英文字 gradient 的缩写。

$$\text{grad } \phi \cdot \underline{e}_l = \frac{d\phi}{dl} \quad \text{方向导数}$$

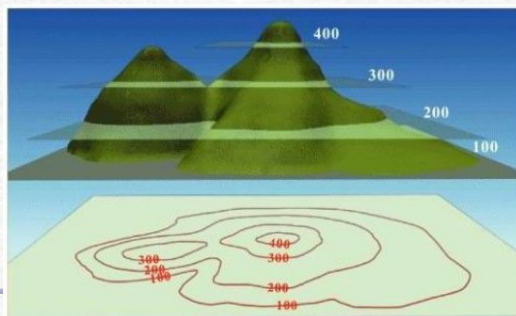
$$|\text{grad } \phi| = \left(\frac{d\phi}{dl} \right)_{\max}$$



e_l 取不同方向时，方向导数不同，当 e_l 与梯度的方向一致时，方向导数最大。

7

1-4. 梯度和方向导数的形象理解



梯度的方向与等值面（线）垂直，且指向标量场增大的方向

8

1-4. 标量场的方向导数与梯度

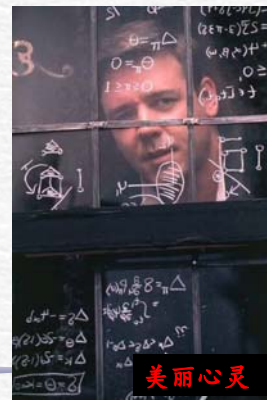
在直角坐标系中，标量场 Φ 的梯度可表示为

$$\text{grad}\Phi = \mathbf{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

若引入算符 ∇ ，在直角坐标系中该算符 ∇ 可表示为

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

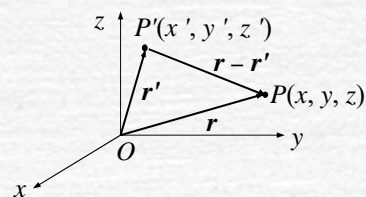
则梯度可以表示为 $\text{grad}\Phi = \nabla\Phi$



1-4. 标量场的方向导数与梯度

例 计算 $\nabla\left(\frac{1}{R}\right)$ 及 $\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$ 。

这里 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \neq 0$ ， ∇ 表示对 x, y, z 运算， ∇' 表示对 x', y', z' 运算



解： $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + z'\mathbf{e}_z$$

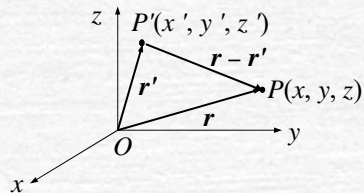
$$\mathbf{R} = (x - x')\mathbf{e}_x + (y - y')\mathbf{e}_y + (z - z')\mathbf{e}_z$$

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

1-4. 标量场的方向导数与梯度

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla' = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z'}$$



$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right) + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R} \right) + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{2} \right) \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right] \\ &= - \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-\frac{3}{2}} (x-x') \end{aligned}$$

11

1-4. 标量场的方向导数与梯度

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right) = - \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-\frac{3}{2}} (x-x')$$

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = - \frac{1}{\left(\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \right)^3} [(x-x')\mathbf{e}_x + (y-y')\mathbf{e}_y + (z-z')\mathbf{e}_z] = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

$$\nabla' = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{\left(\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \right)^3} [(x-x')\mathbf{e}_x + (y-y')\mathbf{e}_y + (z-z')\mathbf{e}_z] = \frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad \nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\nabla' \left(\frac{1}{R} \right)$$

12

1-4. 标量场的方向导数与梯度

关于算符 ∇ （矢量微分算符）的说明：

仅对直角坐标系而言是**算符**，对圆柱坐标系和球坐标系而言只是**记号**。

直角坐标系：

$$\nabla\Phi = \mathbf{e}_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

圆柱坐标系：

$$\nabla\Phi = \mathbf{e}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

奇异点： $r=0$

球坐标系：

$$\nabla\Phi = \mathbf{e}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}$$

奇异点： $r=0$

$\sin\theta=0$

1-4. 标量场的方向导数与梯度

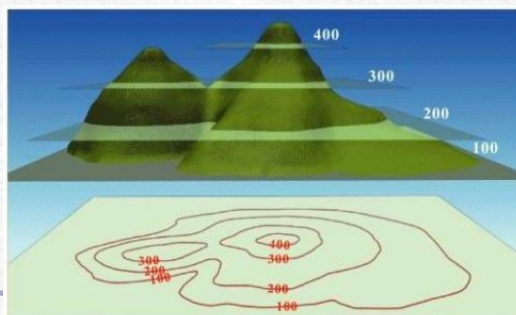
方向导数是一个**标量**，梯度是一个**矢量**。

两者满足关系：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l} = (\nabla\Phi) \cdot \mathbf{e}_l$$

问题：常标量场的梯度是多少？

1-4. 梯度和方向导数的形象理解



梯度的方向与等值面
(线) **垂直**，且指向
标量场**增大**的方向

15

1-5. 矢量场的通量、散度和散度定理

16

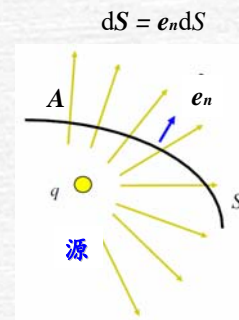
1-5. 矢量场的通量、散度和散度定理

矢量 A 沿某一有向曲面 S 的**面积分**称为矢量 A 通过该**有向曲面 S** 的**通量**，以**标量 Ψ** 表示，即

$$\Psi = \int_S A \cdot dS$$

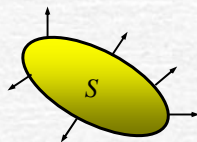
通量可为**正、负、或零**。

当矢量穿出某个**闭合面**时，认为该闭合面中存在产生该矢量场的**源**；当矢量进入这个**闭合面**时，认为该闭合面中存在汇聚该矢量场的**洞（或汇）**。



17

1-5. 矢量场的通量、散度和散度定理



$$\Psi = \int_S A \cdot dS$$

闭合的**有向曲面的方向**通常规定为闭合面的**外法线**方向。

当闭合面中有**源**时，矢量通过该闭合面的通量一定为**正**；反之，当闭合面中有**洞**时，矢量通过该闭合面的通量一定为**负**。

前述的源称为**正源**，而洞称为**负源**。

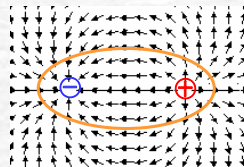
问题：当闭合曲面之中既有正源，又有负源，通过该闭合曲面的通量为正还是为负？

18

1-5. 矢量场的通量、散度和散度定理

已知真空中的电场强度 E 通过任一闭合曲面的通量等于该闭合面包围的自由电荷的电量 q 与真空介电常数 ε_0 之比，即，

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



当闭合面中存在正电荷时，通量为正。当闭合面中存在负电荷时，通量为负。在电荷不存在的无源区中，穿过任一闭合面的通量为零。

1-5. 矢量场的通量、散度和散度定理

通量仅能表示闭合面中源的总量，它不能显示源的分布特性。为此需要研究矢量场的散度。

当闭合面 S 向某点无限收缩时，矢量 A 通过该闭合面 S 的通量与该闭合面包围的体积之比的极限称为矢量场 A 在该点的散度，以 $\text{div } A$ 表示，即

$$\text{div} A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S A \cdot dS}{\Delta V}$$

式中 div 是英文字divergence的缩写， ΔV 为闭合面 S 包围的体积。

1-5. 矢量场的通量、散度和散度定理

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

上式表明，**散度是一个标量**，它可理解为通过包围**单位体积**闭合面的**通量**。

直角坐标系中散度可表示为

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

因此，散度可用算符 ∇ 表示为

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

21

1-5. 矢量场的通量、散度和散度定理

散度定理 $\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$

或者写为 $\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$

从**数学角度**可以认为散度定理建立了面积分和体积分的关系。从**物理角度**可以理解为散度定理建立了区域 V 中的场和包围区域 V 的边界 S 上的场之间的关系。

因此，如果已知区域 V 中的场，根据散度定理即可求出边界 S 上的场。

散度定理建立了**场与源**之间的关系。

22

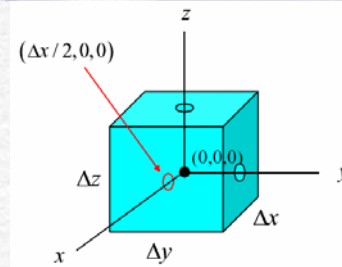
1-5. 矢量场的通量、散度和散度定理

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

?

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$



$$\frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx \frac{A_x\left(\frac{\Delta x}{2}, 0, 0\right) - A_x\left(-\frac{\Delta x}{2}, 0, 0\right)}{\Delta x} + \frac{A_y\left(0, \frac{\Delta y}{2}, 0\right) - A_y\left(0, -\frac{\Delta y}{2}, 0\right)}{\Delta y} + \frac{A_z\left(0, 0, \frac{\Delta z}{2}\right) - A_z\left(0, 0, -\frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z}$$

23

形象理解矢量场的通量、散度和散度定理



1. 假设水管中水分布均匀，水管中和出水口后通过同样圆面积 S 的通量那个大 (S 小于管截面积) ?

(A) 水管中通量大
(B) 出水后通量大
(C) 一样大

(A)

2. 水管中水流场的某点散度与出水后水流场某点的散度?

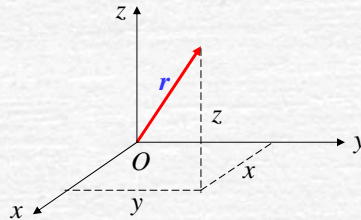
(A) 水管中的散度大
(B) 喷出后的散度大
(C) 相等

(C)

24

1-5. 矢量场的通量、散度和散度定理

例 求空间任一点位置矢量 \mathbf{r} 的散度。



解： 已知 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$

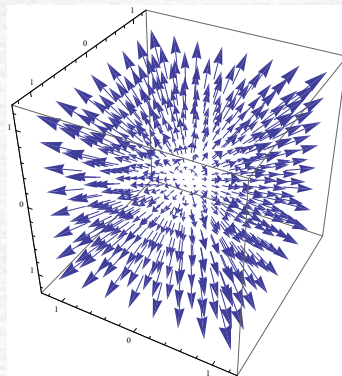
求得

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

25

1-5. 矢量场的通量、散度和散度定理

图示 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$

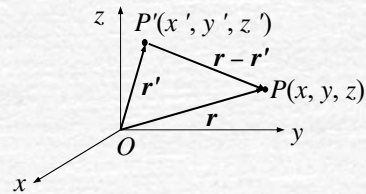


问题： 常矢量场的散度是多少？

26

1-5. 矢量场的通量、散度和散度定理

例 计算 $\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)$ ，其中 $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$



解：当 $R \neq 0$ 时

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

$$\mathbf{R} = (x-x')\mathbf{e}_x + (y-y')\mathbf{e}_y + (z-z')\mathbf{e}_z$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = \nabla \cdot \nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{R}}{R^3}\right) = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x'}{R^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-y'}{R^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-z'}{R^3}\right)\right]$$

27

1-5. 矢量场的通量、散度和散度定理

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x'}{R^3}\right) = \frac{1}{R^3} - \frac{3(x-x')^2}{R^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-y'}{R^3}\right) = \frac{1}{R^3} - \frac{3(y-y')^2}{R^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-z'}{R^3}\right) = \frac{1}{R^3} - \frac{3(z-z')^2}{R^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{\partial}{\partial x}[f(x)] - f(x)\frac{\partial}{\partial x}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{3}{R^3} - \frac{3[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]}{R^5} = \frac{3}{R^3} - \frac{3}{R^3} = 0$$

当 $R \neq 0$ 时成立。

28

1-5. 矢量场的通量、散度和散度定理

$$\int_V \nabla \cdot A dV = \oint_S A \cdot dS$$

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

当 $R=0$ 时，被积函数出现奇点，上述计算结果无效。

在数学上，遇到这种奇点的问题我们**通常的处理方法**是以这个奇点为球心作一个**无限小的圆球**，再利用相关的定理如**散度定理**将对球体积的积分变成对球表面的积分。

$$\begin{aligned} \int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) dV &= \int_V \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dV = \oint_S \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \left(-\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oint_S \left(-\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_n}{R^3} \right) dS = \oint_S \left(-\frac{1}{R^2} \right) dS = -\frac{1}{R^2} \oint_S dS = -4\pi \end{aligned}$$

29

1-5. 矢量场的通量、散度和散度定理

当 $R=0$ 时，

$$\int_V \left[\frac{1}{-4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) \right] dV = 1$$

当 $R \neq 0$ 时，

$$\int_V \left[\frac{1}{-4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) \right] dV = 0$$

$$\left[\frac{1}{-4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) \right] = \delta(\mathbf{R}) \quad \longrightarrow \quad \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{R})$$

30

1-5. 矢量场的通量、散度和散度定理

算子

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

标量场的梯度

$$\nabla \Phi = \mathbf{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

矢量场的散度

$$\text{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

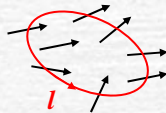
$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

矢量场的旋度

1-6. 矢量场的环量、旋度和旋度定理

1-6. 矢量场的环量、旋度和旋度定理

矢量场 A 沿一条**闭合有向曲线** l 的线积分称为
矢量场 A 沿该曲线的**环量**，以 Γ 表示，即



$$\Gamma = \oint_l A \cdot dl$$

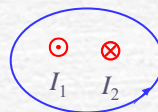
若在闭合有向曲线 l 上，矢量场 A 的方向处处
与线元 dl 的方向保持**一致**，则环量 $\Gamma > 0$ ；若处处
相反，则 $\Gamma < 0$ 。可见，环量可以用来描述矢量场
的**旋涡特性**。

33

1-6. 矢量场的环量、旋度和旋度定理

已知真空中磁通密度 B 沿任一闭合有向曲线 l 的**环量**等
于该闭合曲线包围的**传导电流强度** I 与真空磁导率 μ_0 的乘
积。即

$$\oint_l B \cdot dl = \mu_0 I$$



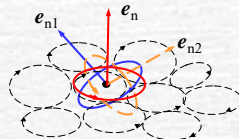
式中电流 I 的正方向与 dl 的方向构成**右旋**关系。

环量可以表示产生具有旋涡特性的**源的强度**，但是环量
代表的是闭合曲线包围的**总的源强度**，它不能显示源的**分布**
特性。为此，需要研究矢量场的**旋度**。

34

1-6. 矢量场的环量、旋度和旋度定理

旋度是一个矢量。以符号 $\text{curl } A$ 表示矢量 A 的旋度，其方向是使矢量 A 具有最大环量强度的方向，其大小等于对该矢量方向的最大环量强度与其所包围面积的比值，即



$$\text{curl} A = e_n \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\left| \oint_l A \cdot d\mathbf{l} \right|_{\max}}{\Delta S}$$

式中 curl 是旋度的英文字， e_n 为最大环量强度的方向上的单位矢量， ΔS 为闭合曲线 l 包围的面积。

矢量场的旋度大小可以认为是包围单位面积的闭合曲线上的最大环量。

35

1-6. 矢量场的环量、旋度和旋度定理

直角坐标系中，旋度可用矩阵表示为

$$\text{curl} A = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad \text{或者} \quad \text{curl} A = \nabla \times A$$

无论梯度、散度或旋度都是微分运算，它们表示场在某点附近的变化特性。因此，梯度、散度及旋度描述的是场的点特性或称为微分特性。

函数的连续性是可微的必要条件。因此在场量发生不连续处，也就不存在前述的梯度、散度或旋度。

36

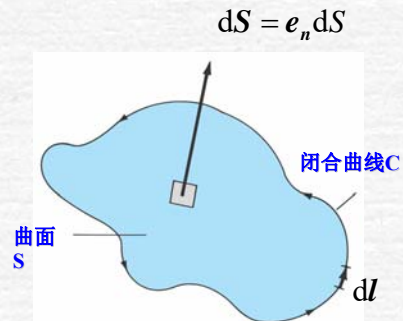
1-6. 矢量场的环量、旋度和旋度定理

旋度定理（斯托克斯定理）

矢量的旋度在任意曲面上的面积分等于该矢量沿包围该曲面的闭合曲线的总环量。

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

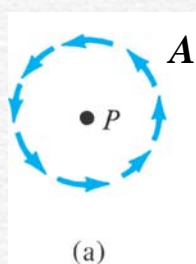
面积分 线积分



从数学角度可以认为旋度定理建立了面积分和线积分的关系。从物理角度可以理解为旋度定理建立了区域 S 中的场和包围区域 S 的边界 L 上的场之间的关系。因此，如果已知区域 S 中的场，根据旋度定理即可求出边界 L 上的场。

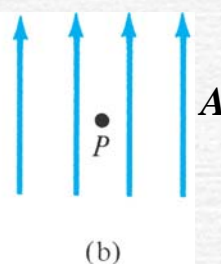
37

1-6. 矢量场的环量、旋度和旋度定理



(a)

$$|\nabla \times \mathbf{A}| > 0$$



(b)

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

旋度可理解为在其方向上矢量场沿包围单位面积闭合曲线的环量最大。

38

生活中常见的涡旋现象



39

1-6. 矢量场的环量、旋度和旋度定理

例1-6-1: 证明 $\nabla \times (C \times r) = 2C$ 其中 C 为常矢量, r 为位置矢量。

$$C = C_x e_x + C_y e_y + C_z e_z$$

$$r = x e_x + y e_y + z e_z$$

$$C \times r = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ C_x & C_y & C_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (zC_y - yC_z)e_x + (xC_z - zC_x)e_y + (yC_x - xC_y)e_z$$

$$\nabla \times (C \times r) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ zC_y - yC_z & xC_z - zC_x & yC_x - xC_y \end{vmatrix}$$

40

1-6. 矢量场的环量、旋度和旋度定理

$$\nabla \times (\mathbf{C} \times \mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ zC_y - yC_z & xC_z - zC_x & yC_x - xC_y \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{e}_x \text{ 分量 } \frac{\partial}{\partial y}(yC_x - xC_y) - \frac{\partial}{\partial z}(xC_z - zC_x) = 2C_x$$

$$\mathbf{e}_y \text{ 分量 } \frac{\partial}{\partial z}(zC_y - yC_z) - \frac{\partial}{\partial x}(yC_x - xC_y) = 2C_y$$

$$\mathbf{e}_z \text{ 分量 } \frac{\partial}{\partial x}(xC_z - zC_x) - \frac{\partial}{\partial y}(zC_y - yC_z) = 2C_z$$

$$\nabla \times (\mathbf{C} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{C}$$

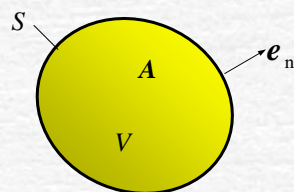
41

1-6. 矢量场的环量、旋度和旋度定理

例1-6-2：试证任何矢量场 \mathbf{A} 均满足下列等式

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{A}) dV = -\oint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$$

式中， S 为包围体积 V 的闭合表面。此式又称为 **矢量旋度定理**，或 **矢量斯托克斯定理**。



P343

证明：设 \mathbf{C} 为任一**常矢量**，则 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

$$\nabla \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = -\mathbf{C} \cdot \nabla \times \mathbf{A}$$

42

1-6. 矢量场的环量、旋度和旋度定理

$$\nabla \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = -\mathbf{C} \cdot \nabla \times \mathbf{A}$$

对任意体积 V 进行积分，可以得到

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) dV = -\mathbf{C} \cdot \int_V \nabla \times \mathbf{A} dV$$

P343

对等式左端采用**散度定理** $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) dV &= \oint_S (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S (\mathbf{A} \times d\mathbf{S}) \cdot \mathbf{C} \\ &= \mathbf{C} \cdot \oint_S (\mathbf{A} \times d\mathbf{S}) \end{aligned}$$

$$-\mathbf{C} \cdot \int_V \nabla \times \mathbf{A} dV = \mathbf{C} \cdot \oint_S (\mathbf{A} \times d\mathbf{S})$$

43

1-7. 无散场和无旋场

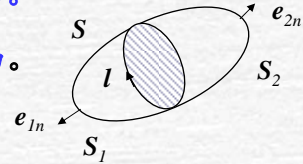
44

1-7. 无散场和无旋场

散度处处为零的矢量场称为无散场。

旋度处处为零的矢量场称为无旋场。

恒等式： $\nabla \cdot (\nabla \times A) \equiv 0$



在矢量场取任意体积 V ，对等式右边利用散度定理

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla \times A) = \oint_S (\nabla \times A) \cdot dS$$

$$\oint_S (\nabla \times A) \cdot dS = \int_{S_1} (\nabla \times A) \cdot dS_1 + \int_{S_2} (\nabla \times A) \cdot dS_2$$

对等式右边两项分别利用旋度定理

$$\int_{S_1} (\nabla \times A) \cdot dS_1 = \oint_l A \cdot dl \quad \int_{S_2} (\nabla \times A) \cdot dS_2 = -\oint_l A \cdot dl$$

45

1-7. 无散场和无旋场

$$\oint_S (\nabla \times A) \cdot dS = \int_{S_1} (\nabla \times A) \cdot dS_1 + \int_{S_2} (\nabla \times A) \cdot dS_2 = 0$$

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla \times A) = \oint_S (\nabla \times A) \cdot dS = 0$$

对任意体积都成立 $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$

上式表明，任一矢量场 A 的旋度的散度一定等于零。因此，任一无散场可以表示为另一矢量场的旋度，或者说，任何旋度场一定是无散场。

以后将会看到，恒定磁场为无散场： $\nabla \cdot B \equiv 0$ ， $B = \nabla \times A$

磁通密度

矢量位

46

1-7. 无散场和无旋场

又可证明 $\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$

上式表明，任一标量场 Φ 的梯度的旋度一定等于零。因此，任一无旋场一定可以表示为一个标量场的梯度，或者说，任何梯度场一定是无旋场。

静电场为无旋场： $\nabla \times E \equiv 0, \quad E = \nabla \Phi$
电场强度 标量位

47

1-7. 无散场和无旋场

标量 Φ 的拉普拉斯算符 Laplacian

$\nabla \cdot (\nabla \Phi) \equiv \nabla^2 \Phi$ 标量场 Φ 的梯度的散度

直角坐标系 $\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$

圆柱坐标系 $\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$
奇异点： $\rho = 0$

球坐标系

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}$$

奇异点： $r = 0$
 $\sin \theta = 0$

48

1-7. 无散场和无旋场

Pierre-Simon Laplace



Pierre-Simon Laplace (1749–1827).

Posthumous portrait by

Jean-Baptiste Paulin Guérin, 1838.

Born 23 March 1749
Beaumont-en-Auge,
Normandy, Kingdom of France
Died 5 March 1827 (aged 77)

法国数学家、天文学家，法国科学院院士。是天体力学的**主要奠基人**、天体演化学的**创立者之一**，他还是分析概率论的**创始人**。

1784~1785年，他求得天体对其外任一质点的引力分量可以用一个势函数来表示，这个势函数满足一个偏微分方程，即著名的**拉普拉斯方程**

49

矢量微分算符二阶运算的5种类型

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0 \quad \text{无散场}$$

$$\nabla \times (\nabla \Phi) \equiv 0 \quad \text{无旋场}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \nabla^2 \Phi \quad \text{拉普拉斯算符}$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = ? \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = ? \end{array} \right\} \text{这两种运算通常一起用于矢量恒等式}$$

可以证明 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ 恒等式

$\nabla^2 \mathbf{A}$ 仅在**直角坐标系定义**有运算规则，对于圆柱坐标系和球坐标系，需要采用下式计算

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

该式在研究**波动方程**时会经常用到

50

1-8. 格林定理

51

1-8. 格林定理

George Green	
Born	14 July 1793 Sneinton, Nottinghamshire, England
Died	31 May 1841 (aged 47) Nottingham, Nottinghamshire, England
Fields	Mathematician
Institutions	Gonville and Caius College, Cambridge ^[1]
Alma mater	Gonville and Caius College, Cambridge (BA, 1838)

格林定理建立了区域 V 中的场与边界 S 上的场之间的关系。

格林定理说明了两种标量场或矢量场之间应该满足的关系。

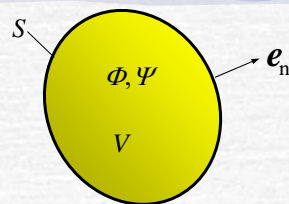
52

1-8. 格林定理

使用格林定理的前提条件：

两个标量场 Φ 及 Ψ 或者矢量场 P 和 Q 在

区域 V 中具有连续的二阶偏导数。



标量第一格林定理
$$\int_V (\nabla \Psi \cdot \nabla \Phi + \Psi \nabla^2 \Phi) dV = \oint_S (\Psi \nabla \Phi) \cdot dS$$

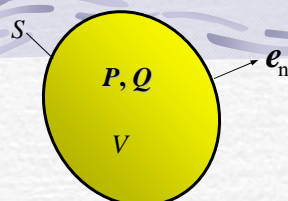
标量第二格林定理
$$\int_V (\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi) dV = \oint_S (\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) \cdot dS$$

矢量第一格林定理
$$\int_V [(\nabla \times Q) \cdot (\nabla \times P) - Q \cdot \nabla \times \nabla \times P] dV = \oint_S (Q \times \nabla \times P) \cdot dS$$

矢量第二格林定理
$$\int_V \{Q \cdot [\nabla \times (\nabla \times P) - P \cdot \nabla \times (\nabla \times Q)]\} dV = \oint_S [P \times (\nabla \times Q) - Q \times (\nabla \times P)] \cdot dS$$

53

1-8. 格林定理



散度和旋度定理

格林定理

已知边界值

求场分布

矢量场的惟一性定理

是否唯一?

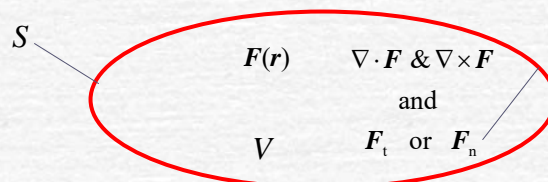
54

1-9. 矢量场的唯一性定理

55

1-9. 矢量场的唯一性定理

位于某一区域中的矢量场，当其散度、旋度以及边界上场量的切向分量或法向分量给定后，则该区域中的矢量场被唯一地确定，这就是矢量场的唯一性定理。



已知散度和旋度代表产生矢量场的源，可见唯一性定理表明，矢量场被其源及边界条件共同决定的。

56

1-9. 矢量场的唯一性定理

唯一性定理 证明 (反证法)

假设有两个矢量场满足唯一性定理给定的条件, 只要证明这两个矢量场相等即可。

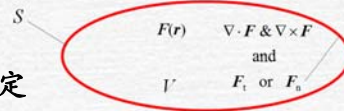
设满足唯一性定理给定条件的两个矢量场为 F_1, F_2

令 $F_1 - F_2 = \delta F$ 需证明 $\delta F = 0$

由于 F_1 和 F_2 具有相同的散度和旋度, 因此,

$$\nabla \cdot (\delta F) = \nabla \cdot F_1 - \nabla \cdot F_2 = 0$$

$$\nabla \times (\delta F) = \nabla \times F_1 - \nabla \times F_2 = 0$$



57

1-9. 矢量场的唯一性定理

可见, 差场 δF 是一个无散、无旋场, 可表示为另一个标量场 Φ 的梯度

$$\delta F = \nabla \Phi$$

由差场 δF 的散度为零(无散场)可得

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

标量场 Φ 满足拉普拉斯方程。

根据第一标量格林定理, 并令 $\Psi = \Phi$, 可得

$$\int_V (\cancel{\Phi \nabla^2 \Phi} + \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) dV = \oint_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS$$

$$\longrightarrow \int_V |\nabla \Phi|^2 dV = \oint_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\delta F) &= \nabla \cdot F_1 - \nabla \cdot F_2 = 0 \\ \nabla \times (\delta F) &= \nabla \times F_1 - \nabla \times F_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{e}_n$$

58

1-9. 矢量场的唯一性定理

(1) 给定边界上矢量场的法向分量

由于 F_1 和 F_2 在边界上具有相同的法向分量，因此，

$$(\delta F) \cdot \mathbf{e}_n = (\delta F)_n = F_{1n} - F_{2n} = 0$$

$$(\delta F) \cdot \mathbf{e}_n = (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{e}_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

$$\int_V |\nabla \Phi|^2 dV = \oint_S \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS$$

可得
$$\int_V |\nabla \Phi|^2 dV = 0$$

由于上式中被积函数恒大于0，只能有

$$\nabla \Phi = \delta F = 0$$

59

1-9. 矢量场的唯一性定理

(2) 给定边界上矢量场的切向分量

$$(\delta F) \cdot \mathbf{e}_t = F_{1t} - F_{2t} = 0 \quad (\delta F) \cdot \mathbf{e}_t = (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{e}_t = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

沿边界 S 上的切线方向没有变化，也就是说，在 S 上 Φ 为常量。

$$\int_V |\nabla \Phi|^2 dV = \oint_S \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS$$

右端
$$\oint_S \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS = \Phi \oint_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = \Phi \oint_S (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{dS}$$

根据散度定理，上式可变为
$$\int_V \nabla \cdot A dV = \oint_S A \cdot \mathbf{dS}$$

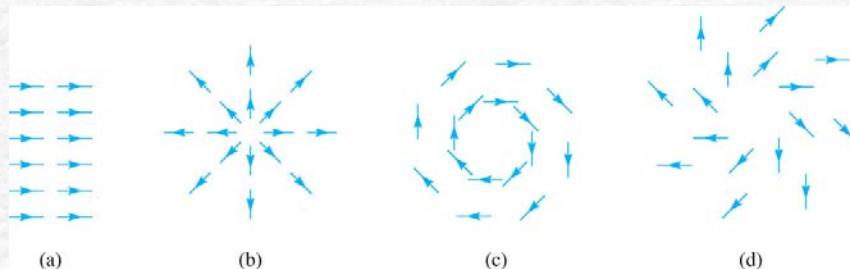
$$\Phi \oint_S (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{dS} = \Phi \int_V \nabla \cdot (\nabla \Phi) dV = \Phi \int_V \nabla^2 \Phi dV \quad \nabla^2 \Phi = 0$$

可得
$$\int_V |\nabla \Phi|^2 dV = 0 \quad \text{因此} \quad \nabla \Phi = \delta F = 0$$

60

1-9. 矢量场的唯一性定理

根据矢量场的散度和旋度，可把矢量场分为如下四种类型



$\nabla \cdot A = 0$	$\nabla \cdot A \neq 0$	$\nabla \cdot A = 0$	$\nabla \cdot A \neq 0$
$\nabla \times A = 0$	$\nabla \times A = 0$	$\nabla \times A \neq 0$	$\nabla \times A \neq 0$
无散、无旋场	有散、无旋场	无散、有旋场	有散、有旋场

61

1-9. 矢量场的唯一性定理

(1) 无散、无旋场	$\nabla \cdot A = 0$ $\nabla \times A = 0$	该矢量场既无标量源，又无矢量源，仅存在于局部的无源区域。 例：无电荷区域的静电场
(2) 无散、有旋场	$\nabla \cdot A = 0$ $\nabla \times A = J$	该矢量场只有矢量源。 例：恒定电流产生的磁场
(3) 有散、无旋场	$\nabla \cdot A = \rho$ $\nabla \times A = 0$	该矢量场只有标量源。 例：电荷区域的静电场
(4) 有散、有旋场	$\nabla \cdot A = \rho$ $\nabla \times A = J$	该矢量场同时具有标量源和矢量源，属于最一般的矢量场。 例：存在时变磁场的导电介质中电场。

62

1-10. 亥姆赫兹定理

若矢量场 $F(r)$ 在无限区域中处处是单值的，且其导数连续有界，源分布在有限区域 V' 中，则当矢量场的散度及旋度给定后，该矢量场 $F(r)$ 可以表示为

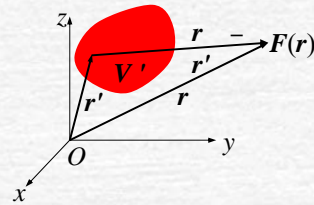
$$F(r) = -\nabla \Phi(r) + \nabla \times A(r)$$

$$\text{式中 } \Phi(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot F(r')}{|r - r'|} dV'$$

$$A(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times F(r')}{|r - r'|} dV'$$

$$\text{散度源 } \nabla \cdot F(r) = \rho(r)$$

$$\text{旋度源 } \nabla \times F(r) = J(r)$$



已知梯度场为无旋场，旋度场为无散场，因此，根据亥姆霍兹定理，任一矢量场均可表示为一个无旋场与一个无散场之和。

63

1-10. 亥姆赫兹定理

Hermann von Helmholtz



Born Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz
August 31, 1821
Potsdam, Kingdom of Prussia

Died September 8, 1894 (aged 73)
Charlottenburg, German Empire

Residence Germany

Nationality German

Fields Physics
Physiology • Psychology



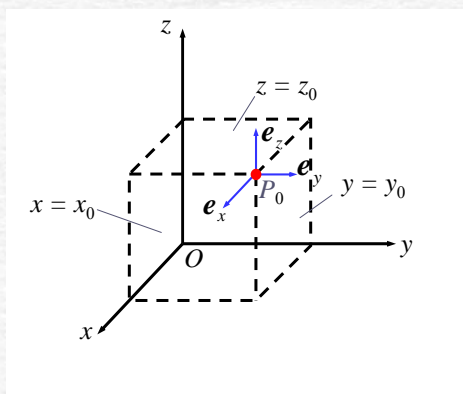
Map of the Helmholtz Centres in Germany

德国最大的科研机构
亥姆赫兹研究中心就是以他的名字来命名的。

64

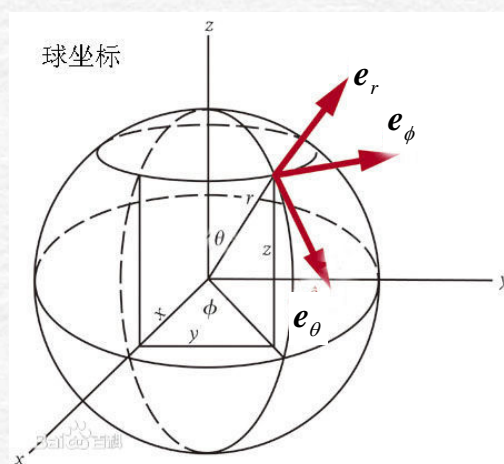
1-11 正交曲面坐标系

直角坐标系 (x, y, z)



65

球坐标系 (r, θ, ϕ)



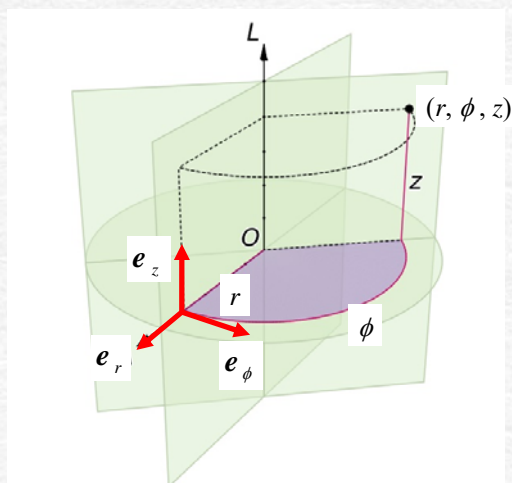
$$-\infty < r < \infty$$

$$0 \leq \theta < \pi$$

$$0 \leq \phi < 2\pi$$

66

圆柱坐标系 (r, ϕ, z)



$$0 \leq r < \infty$$

$$-\infty < z < \infty$$

$$0 \leq \phi < 2\pi$$

67

坐标变量的转换

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \phi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

68

微分单元的表达

直角坐标系

$$d\mathbf{l} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz$$

$$d\mathbf{S} = \mathbf{e}_x dy dz + \mathbf{e}_y dx dz + \mathbf{e}_z dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

圆柱坐标系

$$d\mathbf{l} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\phi r d\phi + \mathbf{e}_z dz$$

$$d\mathbf{S} = \mathbf{e}_r r d\phi dz + \mathbf{e}_\phi dr dz + \mathbf{e}_z r dr d\phi$$

$$dV = r dr d\phi dz$$

球坐标系

$$d\mathbf{l} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta + \mathbf{e}_\phi r \sin\theta d\phi$$

$$d\mathbf{S} = \mathbf{e}_r r^2 \sin\theta d\theta d\phi + \mathbf{e}_\theta r \sin\theta dr d\phi + \mathbf{e}_\phi r dr d\theta$$

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

69

第一章 矢量分析 小结

主要内容

梯度、散度、旋度、亥姆霍兹定理

1-4. 标量场的方向导数与梯度

1-5. 矢量场的通量与散度

1-6. 矢量场的环量与旋度

1-7. 无散场和无旋场

1-8. 格林定理

1-9. 矢量场的惟一性定理

1-10. 亥姆霍兹定理

1-11. 正交曲面坐标系

70

第一章 矢量分析 作业

1-1, 1-5, 1-10, 1-20, 1-21

71

2018年考题

4. 已知静磁场矢势 $\vec{A} = \frac{\sqrt{2}}{4} B_0 (z(\vec{e}_x - \vec{e}_y) + (y-x)\vec{e}_z)$, 则磁感应强度 \vec{B} 为_____。

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

4. 已知静磁场矢势 $\vec{A} = \frac{\sqrt{2}}{4} B_0 (z(\vec{e}_x - \vec{e}_y) + (y-x)\vec{e}_z)$, 则磁感应强度 \vec{B} 为

$$\frac{\sqrt{2}}{2} B_0 (\vec{e}_x + \vec{e}_y)。$$

一、填空题（5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

72