

2016

# COMUNICACIONES DIGITALES

Apuntes

UABC-FIAD

Juan de Dios Sánchez López

UABC-FIAD  
01/01/2016





## TABLA DE CONTENIDOS

<b>Presentación.....</b>	<b>5</b>
<b>Capítulo I.....</b>	<b>7</b>
<b>Introducción a los Sistemas de Comunicaciones.....</b>	<b>7</b>
1.1 Definición de sistemas de comunicaciones .....	8
1.2 Sistemas de comunicaciones digitales .....	10
1.2.1 Ventajas de las comunicaciones digitales .....	10
1.2.2. Señales y formas de onda. ....	12
1.2.2.1 Señales Periódicas y aperiódicas. ....	12
1.2.2.3 Densidades espectral de energía y de potencia (Espectros).....	15
1.3 Nomenclatura de los sistemas comunicaciones digitales.....	28
<b>MODULACIÓN DE PULSO Y TRANSMISIÓN DE SEÑALES DIGITALES EN BANDA</b>	
<b>BASE.....</b>	<b>33</b>
2.1 Modulación de pulso .....	34
2.1.1 Modulación del tiempo del pulso .....	35
2.2. Señales de banda base y señales pasabanda.....	37
2.2.1 Muestreo por impulsos. ....	40
2.3 Modulación de pulso codificados. (PCM) .....	45
2.4 Transmisión de señales digitales en banda. ....	57
2.5 Detección de banda base .....	62
2.6 Probabilidad de error de señales de error binarias en ruido gaussiano .....	64
2.6.1 Recepción óptima .....	70
2.6.2 Filtro acoplado.....	71
2.7 Probabilidad de error de bit de receptores basados en filtros óptimos de señales binarias en ruido. ....	76
2.8 Técnicas de reducción de ancho de banda .....	82
2.81 Delta PCM .....	82
2.82 PCM diferencial.....	83
<b>CAPITULO III.....</b>	<b>85</b>
<b>MODULACIÓN DIGITAL BINARIA PASABANDA.....</b>	<b>85</b>
3.1 Modulación digital.....	86
3.2 Técnicas de Modulación Digital pasabanda .....	87
3.2.1 Modulación por conmutación de Amplitud (Amplitude Shift Keying o ASK) .....	89
3.2.2 Modulación por desplazamiento de frecuencia, FSK .....	96
3.2.4. Modulación PSK diferencial (DPSK).....	115
3.2.5. Eficiencia espectral.....	118
<b>CAPÍTULO IV .....</b>	<b>121</b>
<b>MODULACIÓN M-ARIA PASABANDA .....</b>	<b>121</b>
4.1 Introducción.....	122
4.2 Teorema de capacidad de canal de Shannon - Hartley .....	122
4.3 Modulaciones eficientes en ancho de banda.....	123
4.3.1 Modulación M -aria.....	123
4.3.2 Baudío ó tasa de transmisión de símbolo.....	123
4.4 Modulación MPSK.....	123
4.4.1 Conmutación por cambios de fase en cuadratura. (QPSK Quadrature Phase Shift Keying). ..	124
4.4.2 Técnica de modulación OQPSK.....	132
4.4.3 Modulación 8-PSK. ....	133
4.4.5 Modulación por mínimo desplazamiento de frecuencia (MSK).....	143
<b>CAPÍTULO V .....</b>	<b>145</b>
<b>SISTEMAS DE ESPECTRO ESPARCIDOY CODIFICACION DE CANAL .....</b>	<b>145</b>
5.1 Introducción.....	146
5.2 Características de espectro esparcido (ventajas).....	146
5.2.1 Espectro esparcido en presencia de ruido .....	147
5.2.2 Espectro esparcido en presencia de interferencia .....	148
5.3 Modelo del sistema de espectro esparcido (SS).....	150

5.4 Técnicas de espectro esparcido.....	151
5.4.1 Secuencia pseudoaleatoria.....	152
5.5 Función autocorrelación de las secuencias PN.....	156
5.5.1 Autocorrelación para una secuencia PN (ejemplo).....	157
5.6 Sistemas de espectro esparcido en secuencia directa.....	158
5.6.2 Ganancia de procesamiento.....	162
5.7 Sistemas de espectro esparcido con salto en frecuencia.....	164
5.8 Sincronización.....	166
5.9 Aplicaciones.....	166
5.10 Codificación de canal.....	167
5.11 Codificación de la forma de onda - Introducción a la modulación digital.....	169
5.12 Detección de errores.....	172
<b>Bibliografía.....</b>	<b>197</b>

## Presentación

Este material bibliográfico surge de la necesidad de un texto que cubra con los contenidos de la materia de Comunicaciones Digitales, la cual es cursada en la parte terminal de la carrera de Ingeniero en Electrónica, impartida en la Facultad de Ingeniería Ensenada de la UABC. Es este texto busca cubrir la necesidad del material bibliográfico la materia antes citada (ó materias afines), el cual conjugue la profundidad requerida para un curso de este nivel, pero tratando de presentar los diferentes conceptos teóricos de una manera sencilla. La pretensión de esta obra es la ofrecer a los estudiantes de la parte Terminal de la carrera de ingeniero en electrónica, así como de otras ramas afines, de facilitar el acceso al conocimiento en esta área de la ingeniería

En el periodo histórico en el que vivimos, se hace urgente la tarea de institucional de facilitar el aprendizaje de nuestros educandos en sus estudios profesionales, y en particular en esta área de la ingeniería, debido a la importancia para el desarrollo de nuestro estado y de nuestro país . Actualmente (y en el futuro) la necesidad profesionales en el área de las comunicaciones electrónicas ha ido en aumento, los cuales deben afrontar la rapidez del desarrollo de esta área, por lo que conceptos y técnicas tradicionales al igual que los que han emergido en las últimos años deben ser conocidos, entendidos y aplicados para la solución de problemas de la ingeniería de las telecomunicaciones.

El presente material consta de cinco capítulos. En el primer capítulo se hace una revisión de conceptos básicos requeridos para el entendimiento de las técnicas utilizadas por los sistemas de comunicaciones digitales, así como la presentación de conceptos propios de este tipo de sistemas.

En el capítulo II se presenta las técnicas de modulación de pulso, los diferentes formatos de señales usadas en las comunicaciones de banda base así como sus parámetros de desempeño.

El capítulo III se enfoca hacia los sistemas de comunicaciones digitales pasabanda, área que actualmente tiene mucha relevancia debido al gran crecimiento de sistemas inalámbricos. Diferentes técnicas de modulación son descritas, haciendo énfasis en sus aspectos prácticos.

Los sistemas de comunicaciones pasabanda multisimbólicos son presentados y analizados en el capítulo IV. La importancia de estos sistemas se debe a su aplicación en soluciones de ingeniería de comunicaciones que emplean sistemas de microondas, satélites y con el advenimiento de los sistemas de televisión digital.

Espectro esparcido es el tema abordado en el capítulo V. La importancia de este concepto de las telecomunicaciones es cada día más evidente debido al crecimiento en su aplicación en la ingeniería de las telecomunicaciones.

# **Capítulo I**

## **Introducción a los Sistemas de Comunicaciones**

## **CAPÍTULO I**

### **I. INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE COMUNICACIONES**

#### **1.1 Definición de sistemas de comunicaciones**

Comunicación se puede definir como el intercambio de información, por lo tanto podemos definir a las telecomunicaciones como el proceso de la comunicación sobre distancias mayores a las que pudieran lograrse sin ayuda artificial. En la actualidad, tal ayuda se debe a el uso de sistemas de comunicaciones eléctricas ú ópticas, en los cuales las comunicaciones se logran por transmitir la información por medio de señales a través de alambres o cables, fibras ópticas ó a través del espacio utilizando ondas electromagnéticas.

La vida actual demanda el uso de sistemas de comunicaciones electrónicos, los cuales deben ser accesibles, económicos y confiables. Hay sistemas que nos permiten la comunicación punto a punto con cualquier otro usuario en el mundo, tal como el sistema de telefónico público, y permiten una comunicación bidireccional. Hay otros tipos de sistemas, (los más tradicionales) en los cuales la información fluye en un solo sentido tales como la radio.

Los primeros sistemas de comunicaciones tales como las señales de humo, espejos, antorchas, etc. fueron de naturaleza digital. El telégrafo fue el primero de los sistema de comunicaciones eléctrico (desarrollado en 1830) también fue del tipo digital al usar cuatro tipos de señales, puntos, rayas y espacios para letras y palabras. El primer sistema de comunicaciones eléctrico analógico fue teléfono, desarrollado alrededor de 1870 para la transmisión de voz. En la siguiente tabla se muestra algunos de los eventos más importantes de la historia de las telecomunicaciones hasta la actualidad.



Suceso	Inventor/desarrollo	Año
Telégrafo	Morse	1837
Teléfono	Bell	1875
Conmutador telefónico	Strowger	1897
Radiotelegrafo	Marconi	1901
Receptor superheterodino	Armstrong	1918
Televisión	Farnsworth	1928
Radio FM	Armstrong	1933
Despliegue de la televisión comercial	BBC	1939
Propuesta de satélites geoestacionarios	Clarke	1945
Repetidoras de microondas	RCA	1955
Demostración del láser	Maiman	1960
Primer satélite de comunicaciones	Telstar 1	1962
Fibras ópticas	Kao / Hockman	1966
Redes de datos	ARPA	1970
Concepto de la Internet	Cerf/Kahn	1974
Telefonía celular	Motorola/ATT	1978
Sistema de posicionamiento global		1978
Demostración de la Televisión digital	NHK	1981

**Tabla 1.1 Eventos trascendentes en la historia de las telecomunicaciones**

## **1.2 Sistemas de comunicaciones digitales**

Actualmente en sistemas comerciales de comunicaciones se considera que los sistemas electrónicos digitales como un sinónimo de calidad o de mayores capacidades y los sistemas de comunicaciones analógicos como cosas antiguas. De lo anterior se podrían formular las siguiente preguntas: ¿Porqué los sistemas de comunicaciones evolucionan hacia sistemas digitales?

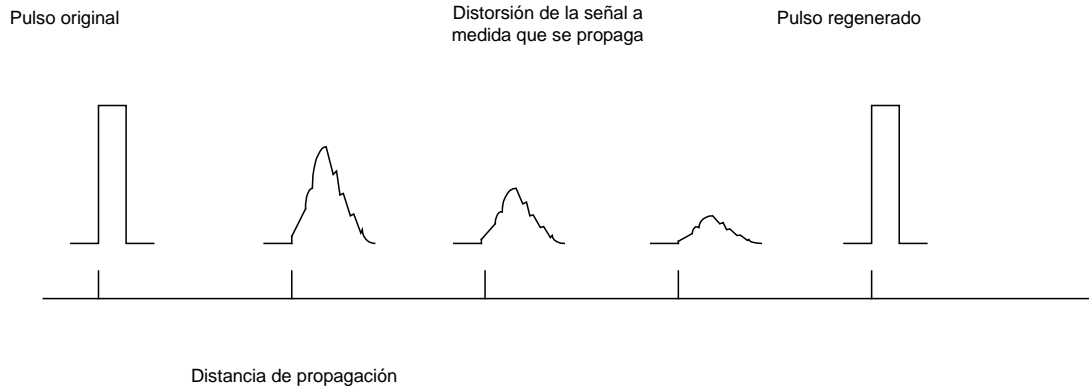
¿Por qué son "mejores" los sistemas de comunicaciones digitales que los analógicos?

Las respuestas a estas interrogantes son:

- Facilitan la regeneración de la señal en comparación con los sistemas analógicos, lo anterior debido el contorno de las formas de onda son afectadas por dos mecanismos: (1) las líneas de transmisión y los circuitos no tienen funciones de transferencia ideal y distorsionan a los pulsos y (2) el ruido y la interferencia afectan a la forma de onda de las señales.
- Circuitos digitales pueden ser fabricados a menor costo que los analógicos.

### **1.2.1 Ventajas de las comunicaciones digitales.**

La principal ventaja de los sistemas de comunicaciones digitales, como se ha mencionado en los párrafos anteriores parte del hecho de la facilidad para regenerar señales digitales a diferencia de lo que ocurre con las señales analógicas. Esto se ilustra en la siguiente figura



**Figura 1.1 Degradación de un pulso y regeneración del mismo**

Al transmitir una señal eléctrica, esta sufre distorsiones debido principalmente a dos fenómenos: (1) a la no linealidad del medio de transmisión y (2) debido a señales eléctricas no deseadas como el ruido y la interferencia. Estos mecanismos hacen que la señal se degrade en función de la distancia entre el emisor y receptor. En la figura 1.1 se muestra los posibles cambios que sufre un pulso a lo largo de una línea de transmisión. Si el pulso resultante al final de la línea de transmisión, aunque esté distorsionado, todavía es reconocible, puede ser amplificado digitalmente (regeneración). Esto es posible en los sistemas digitales binarios debido a que únicamente operan en dos estados (unos y ceros). Esta operación en dos estados facilita la regeneración de la señal y evita que el ruido y la distorsión se acumulen durante el proceso de transmisión.

En cambio las señales analógicas no son señales que únicamente tengan dos estados, sino que ellas pueden tomar un número infinito de formas. Una vez que una señal analógica es distorsionada, esta distorsión no puede ser eliminada.

Otras de las ventajas de los sistemas de comunicación digital es la facilidad de producir circuitos digitales, que son más confiables de mucho menor costo y de implementación más flexible que los circuitos electrónicos analógicos.

La principal desventaja de los sistemas de comunicación digital es el requerimiento de un mayor ancho de banda para enviar la misma información en un formato digital si se compara con sistemas que utilicen un formato analógico.

### **1.2.2. Señales y formas de onda.**

Las señales y formas de onda son el tema sobre el que gira las telecomunicaciones. Una señal, en forma general puede ser definida como cualquier signo que sirve para transmitir información, y esta información es de naturaleza aleatoria. En las telecomunicaciones eléctricas, las señales son cantidades eléctricas, tales como la corriente o el voltaje en el cual algunas de sus características se utilizan para transmitir la información. Una forma de onda es definida como la forma o contorno de una onda u oscilación obtenida por dibujar el valor de una cantidad cambiante en el tiempo. De manera más sencilla y en el sentido de las comunicaciones electrónicas, la forma de onda es una cantidad eléctrica (voltaje, corriente, etc.) que varía periódicamente, la cual lleva información.

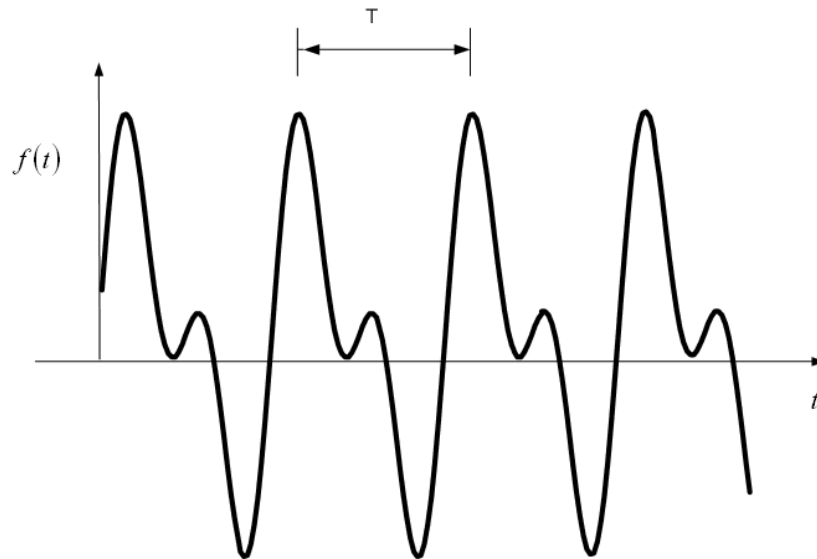
#### **1.2.2.1 Señales Periódicas y aperiódicas.**

Una señal periódica es aquella, la cual si es desplazada en el tiempo un intervalo adecuado, esta se observa (en el nuevo intervalo de tiempo) sin sufrir ningún cambio. Al intervalo de tiempo se le conoce como periodo. La señal que no posea la propiedad

anterior se le conoce como aperiódica. Matemáticamente, una señal periódica es definida como una en la cual posee la propiedad:

$$x(t) = x(t \pm nT) \quad (1.1)$$

En donde  $n$  es entero y  $T$  es el periodo de la señal. En la figura 1.2 se representa a una señal periódica. De acuerdo a la anterior definición, una señal periódica no tiene principio ni fin (es infinita). (Lo anterior es una definición ya que en las telecomunicaciones no existen este tipo de señales). Si no hay valor de  $T$  que satisfaga la ecuación anterior, entonces la señal es aperiódica



**Figura 1.2 Ejemplo de una onda periódica**

**1.2.2.2 Potencia de una señal periódica.**

La potencia de una señal periódica (de voltaje)

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{v^2(t)}{R} dt \quad (1.2)$$

para una señal de corriente P se obtiene:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} i^2(t) R dt \quad (1.3)$$

donde R es la resistencia del circuito por donde circula la corriente. En los sistemas de comunicaciones se acostumbra a normalizar la potencia asumiendo una carga de  $1\Omega$ , aunque R puede tener otro valor en el circuito en cuestión. Si el valor de la potencia para el circuito con R diferente a  $1\Omega$  es requerido, se desnormaliza, obteniendo la potencia para el circuito con R diferente a  $1\Omega$ . Para el caso de la potencia normalizada:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) R dt \quad (1.4)$$

La potencia es la energía por periodo y es una cantidad definida. La energía para una señal periódica es infinita:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \infty \quad (1.5)$$

Por lo anterior las señales periódicas son llamadas señales de potencia. Las señales periódicas son irrealizables pero son un concepto simple, fácil de manejar. En la tónica del anterior concepto se definen las señales de energía como aquellas señales que tienen energía no cero pero finita ( $0 < E < \infty$ ). En la práctica todas las señales son de energía

### 1.2.2.3 Densidades espectral de energía y de potencia (Espectros)

**DENSIDAD ESPECTRAL:** La densidad espectral de una señal caracteriza la distribución de la energía o potencia de la señal en el dominio de la frecuencia.

#### **DENSIDAD ESPECTRAL DE ENERGIA(DEE)**

De acuerdo al teorema de Parseval, el cual nos muestra la relación la energía de una señal en el tiempo con su respectiva representación en el dominio de la frecuencia

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (1.6)$$

Donde  $X(f)$  es la transformada de Fourier de una señal no periódica,  $x(t)$ . Haciendo la siguiente definición:

$$\psi_x(f) = |X(f)|^2 \quad (1.7)$$

La magnitud al cuadrado de  $X(f)$  es el espectro de energía de  $x(t)$ , por lo tanto:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(f) df = 2 \int_0^{\infty} \psi_x(f) df \quad (1.8)$$

La expresión anterior donde el intervalo de integración va de 0 a infinito hace uso de la naturaleza par de la función densidad de energía. La función densidad de energía se expresa en unidades de Joules/Hz. Ex muestra la distribución de energía de una señal en el eje de la frecuencia.

### DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

La potencia promedio  $p_x(t)$  de una señal  $x(t)$  con una carga normalizada de 1 ohm viene dada por la expresión para una señal periódica con periodo T

$$p_X = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (1.9)$$

De acuerdo al teorema de Parseval, para señales periódicas reales, se cumple la siguiente igualdad:



$$p_X = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (1.10)$$

En donde  $|c_n|^2$  son los coeficientes de la serie de Fourier de la señal periódica

La densidad espectral de potencia (DEP) de una señal periódica  $\mathbf{x(t)}$  es una función real, par no negativa de la frecuencia que describe la distribución de la potencia de la señal  $\mathbf{x(t)}$  en el eje de frecuencia. Esta se define por:

$$G_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(f - nf_0) \quad (1.11)$$

La función  $\mathbf{Gx(f)}$  para una señal periódica consiste en una sucesión de funciones deltas ponderadas por el coeficiente  $|c_n|^2$ . La potencia de una señal periódica puede ser obtenida de su espectro:

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = 2 \int_0^{\infty} G_x(f) df \quad (1.12)$$

Para una señal no periódica, la densidad espectral de potencia puede ser obtenida considerando un periodo de observación  $T_0$ . Considerando lo anterior:

$$G_x(f) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} |X(f)| \quad (1.13)$$

### ESPECTRO DE UN TREN DE PULSOS

Una de las señales de mayor interés en las comunicaciones digitales es una secuencia de pulsos rectangulares, llamada Tren de Pulsos.

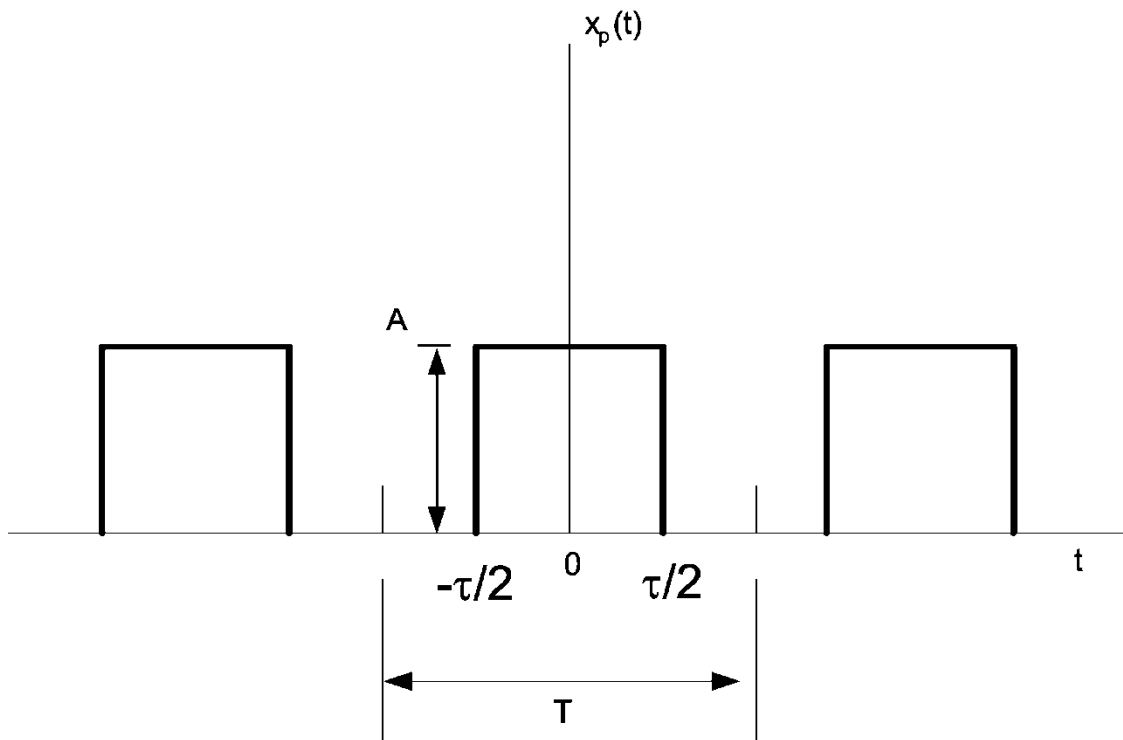


Figura 1.3. Señal tren de pulsos

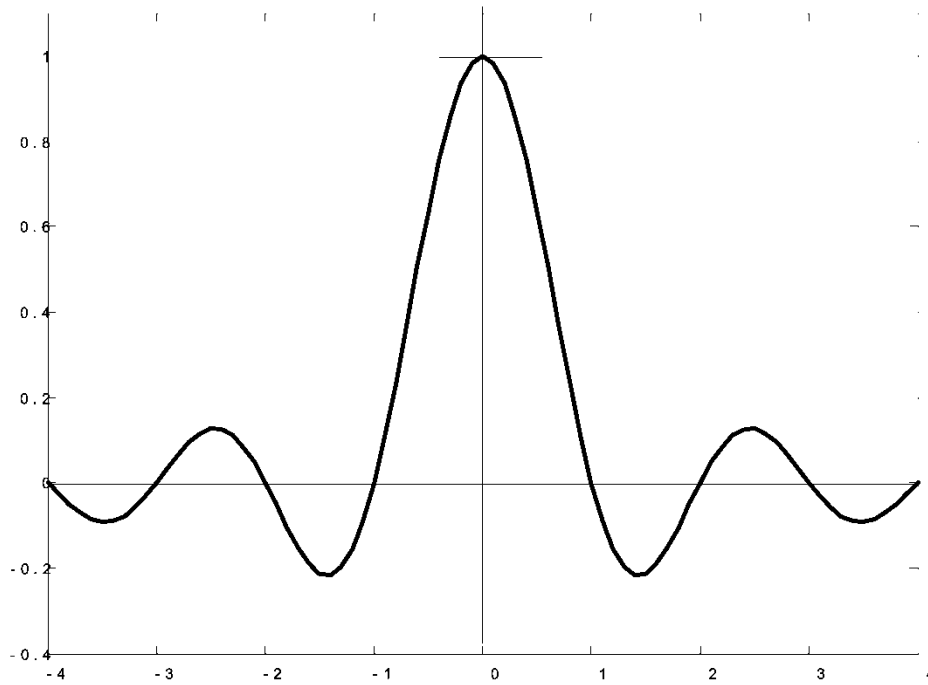
De los cursos básicos de matemáticas y señales, se demuestra que una señal periodica puede ser representada por una suma de señales senoidales de diferentes valores de frecuencia y con coeficientes  $c_n$  (Serie de Fourier).

Para un tren de pulsos  $X_p(t)$  con amplitud, anchura  $T$  y periodo  $A$  los coeficientes de la serie de Fourier son

$$C_n = \frac{A\tau}{T} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi n \tau}{T}\right)}{\frac{\pi n \tau}{T}} = \frac{A\tau}{T} \text{ sinc } \frac{n\tau}{T} \quad (1.14)$$

donde

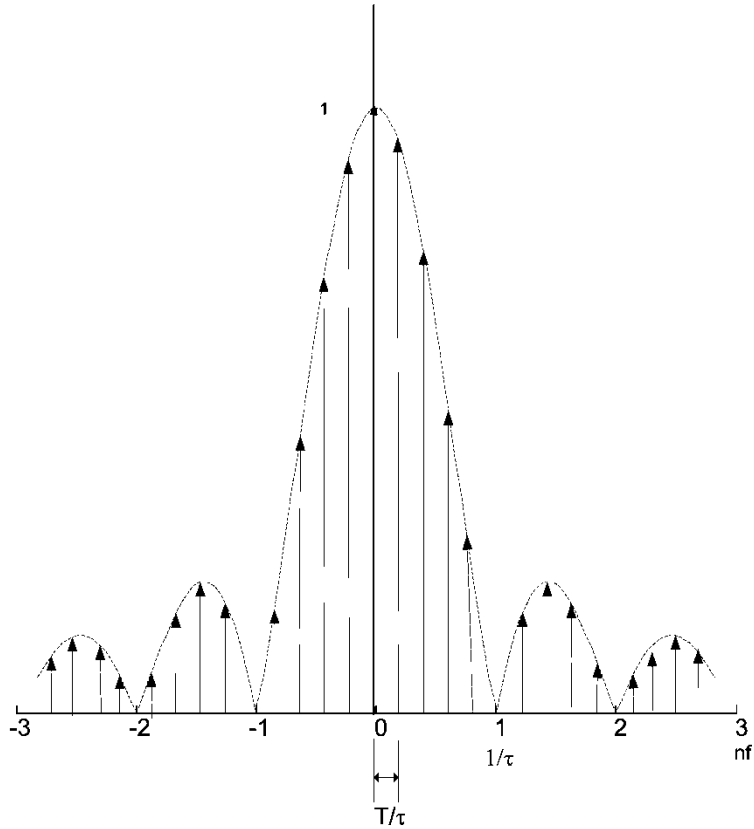
$$\text{Sinc } y = \frac{\text{sen } \pi y}{\pi y} \quad (1.15)$$



**Figura 1.4 Función Sinc(y)**

La función Sinc tiene su máximo en  $y=0$  y se aproxima a cero conforme  $y$  se aproxima a infinito. Oscila entre valores positivos y negativos. Vale cero en  $y = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$

La magnitud del espectro de  $c_n$  del tren de pulsos como función de  $nT$  se muestra en la siguiente figura



**Figura 1.5 Espectro de un tren de pulsos**

En el mundo real solo las frecuencias positivas pueden ser reproducidas. Usando el espectro  $x_p(f)$  puede ser expresado como:

$$x_p(t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \text{sinc} \frac{n\tau}{T} \exp(jn\pi ft) \quad (1.16)$$

La porción del espectro de cero hasta el primer nulo menudo es referida como ancho de banda de la señal. Lo anterior ocurre en  $1/\tau$  [hertz]. De la figura podemos notar que el ancho de banda es inversamente proporcional a  $T$ . El espacio entre líneas espectrales es  $1/T$ , y es inversamente proporcional al periodo del pulso.

### ***Señales analógicas y discretas***

Señal analógica  $x(t)$  es una función continua del tiempo, es decir  $x(t)$  está definida únicamente para cada  $t$ . Señales de este tipo se originan de fenómenos físicos que se convierten a señales eléctricas por medio de un transductor. Una señal discreta  $x(kT)$  es la que existe únicamente en tiempos discretos. Se caracteriza por una secuencia de números definida en cada tiempo  $kT$ , donde  $k$  es un entero y  $T$  es un intervalo fijo de tiempo

#### **1.2.2.4 Señales aleatorias y ruido**

Las señales de información, transportadas por un sistema de comunicaciones son de naturaleza aleatoria (de no ser así no tuviera sentido la existencia del sistema de comunicaciones ni la comunicación misma). Por otro lado las señales en los sistemas de comunicaciones se ven afectadas por otro tipo de señales aleatorias, las cuales son conocidas como ruido.

### 1.2.2.5 Ruido en los sistemas de comunicaciones

El ruido puede ser clasificado en función de la naturaleza de su fuente generadora como natural o generado por el hombre. Ejemplos de ruido generado en forma natural esta el ruido térmico, el ruido galáctico, el ruido generado por la atmósfera, etc. Por otro lado, fuentes de ruido generado por el hombre es el ruido de ignición, el ruido de generado por transitorios ó conmutación de sistemas de alimentación de energía, entre otros.

Ruido térmico, también conocido como ruido Johnson, se debe al movimiento de electrones en los componentes disipativos, resistencia, alambres. Ruido térmico puede ser descrito como un PROCESO ALEATORIO GAUSSIANO CON MEDIA CERO.

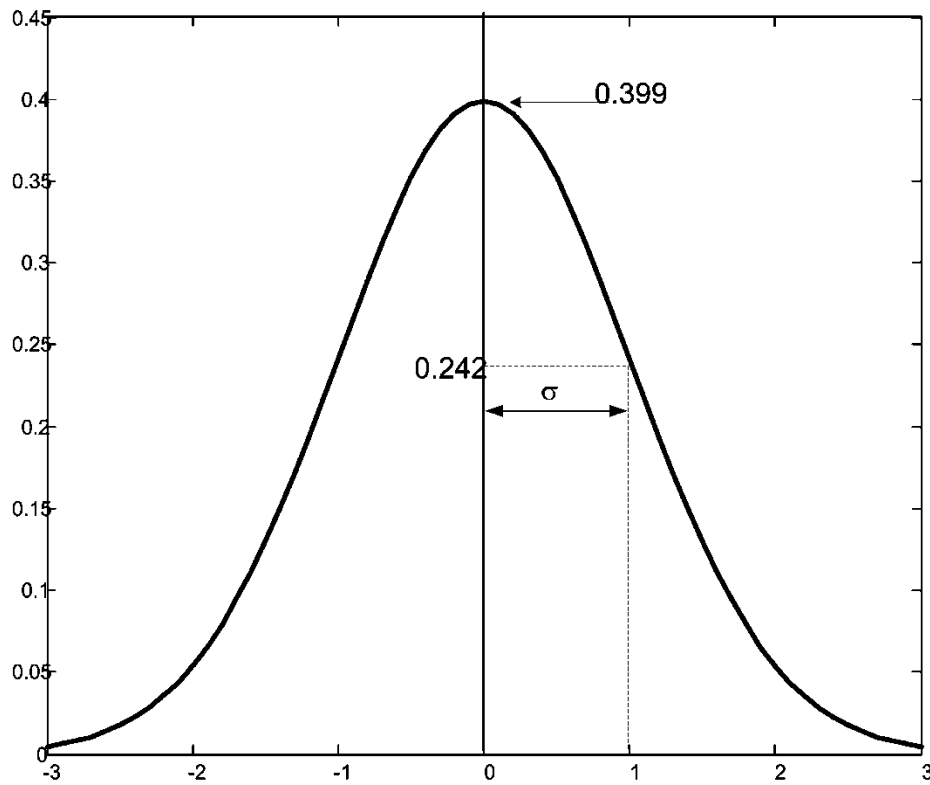
La distribución Gaussiana es usado como modelo del ruido debido al teorema del límite central, el cual establece que la bajo condiciones muy generales la distribución de probabilidad de la suma de “ $k$ ” variables aleatorias estadísticamente independientes es aproximadamente a una distribución Gaussiana, cuando  $k$  tiende a infinito no importa el tipo de distribución.

Un proceso gaussiano  $n(t)$ , es una función aleatoria “ $n$ ” para cualquier arbitrario tiempo, estadísticamente caracterizado por la función densidad de probabilidad gaussiana:  $p(n)$ .

$$p(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma}\right)^2\right] \quad (1.17)$$

En donde el parámetro  $\sigma^2$  = varianza de  $n$

La función densidad de probabilidad gaussiana estandarizada de un proceso aleatorio con media cero es obtenida asumiendo que tiene una desviación estándar  $\sigma = 1$ . En la figura 1.6 se muestra



**Figura 1.6** Función densidad de probabilidad gaussiana normalizada



A menudo se representa una señal aleatoria como la suma del ruido gaussiano y una señal de corriente directa (CD):

$$z = c + n \quad (1.18)$$

Donde  $c$  es la componente de CD de la señal aleatoria y  $n$  es el variable aleatoria gaussiana correspondiente al ruido. La pdf ( $z$ ) es :

$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a}{\sigma}\right)^2\right] \quad (1.19)$$

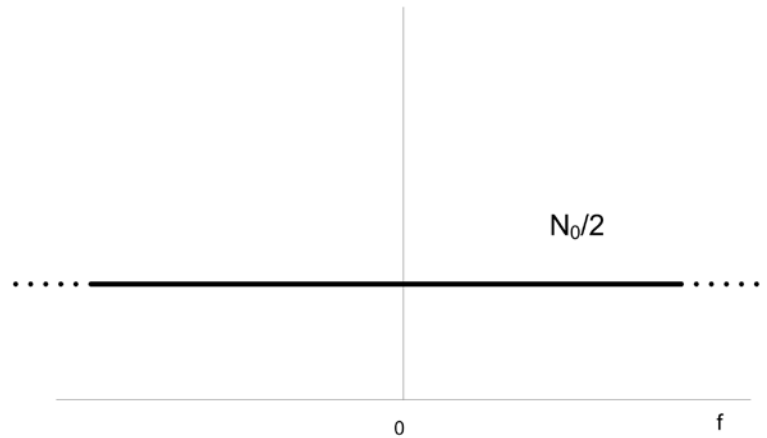
$\sigma^2$  es la varianza de ruido.

### 1.2.2.6 Ruido Blanco

Ruido blanco se define al tipo de ruido que tiene una densidad espectral de potencia (DEP) igual para todas las frecuencias. El ruido térmico puede ser considerado como blanco para muchas aplicaciones en los sistemas de comunicaciones. (0-10<sup>12</sup> Hz)

Por lo tanto el ruido blanco tiene un valor constante para todos los valores de frecuencia:

$$G_n(f) = \frac{N_0}{2} \quad (1.18)$$



**Figura 1.7 Densidad espectral de potencia del ruido blanco**

El ruido blanco tiene una potencia infinita. (ecuación) . La función de autocorrelación del ruido puede ser obtenida aplicando la transformación de Fourier, lo que resulta una función delta de Dirac con peso  $N_0/2$ . si bien el ruido blanco es una abstracción, el concepto puede ser aplicado considerando que el ancho de banda de ruido es mayor que el de las señales involucradas.

### **1.2.2.7 Señales aleatorias en los sistemas de comunicaciones**

El fin de los sistemas de comunicaciones es la transferencia de información a través de un canal de comunicaciones. Desde la perspectiva del receptor la información es de naturaleza aleatoria ya que no conoce de antemano la señal que será transmitida, además que generalmente las señales de información son afectas por el ruido. En los sistemas de comunicaciones es importante el conocimiento de las técnicas para describir y manejar las señales de naturaleza aleatoria. Las cantidades o funciones que describen los fenómenos de este tipo son al menos media de ensamble y la función de autocorrelación, aunque en la práctica es difícil que se tenga el conocimiento de las funciones densidad de probabilidad conjunta de primer y segundo orden. Muchas veces se puede considerar a un proceso estocástico como ergódico, el cuál se caracteriza por ser equivalentes sus promedios estadísticos que sus promedios temporales. La condición de ergodicidad es que el proceso sea estacionario. Debido a la dificultad de cumplir tal condición, en muchos casos para el análisis de sistemas de comunicaciones, estos son considerados como procesos estacionarios en el sentido amplio. Un proceso se considera estacionario en el sentido amplio si su media es constante y su función de autocorrelación depende únicamente de la diferencia del tiempo más que del tiempo en sí.

De lo anterior, si se considera que una señal aleatoria es estacionaria en el sentido amplio (como lo puede las señales de información ó el ruido, por ejemplo), se desprenden las relaciones dadas en la siguiente tabla

Cantidad	Expresión	Significado físico
Valor medio	$E\{X(t)\}$	Nivel de corriente directa de la señal
El cuadrado del valor medio	$[E\{X(t)\}]^2$	Potencia normalizada de la señal de la componente de c.d.
Promedio del cuadrado de la variable aleatoria (Segundo momento de X)	$E\{X^2(t)\}$	Potencia total normalizada
Raíz del promedio cuadrático	$(E\{X^2(t)\})^{1/2}$	Valor eficaz (ó r.m.s.) del voltaje ó corriente
Varianza de X(t)	$\sigma_x^2$	Potencia promedio normalizada de la componente de corriente alterna de la señal.
Desviación estándar de X(t)	$\sigma_x$	Valor eficaz de la componente de c.a. de la señal.

**Tabla 2.1 Parámetros de procesos aleatorios estacionarios en el sentido amplio**

### 1.3 Nomenclatura de los sistemas comunicaciones digitales.

A continuación se definen algunos términos de amplio uso en los sistemas de comunicaciones digitales

**FORMATEO:** Transformación de la información en símbolos digitales. Esto hace que la información compatible con el procesamiento de la señal en un sistema de comunicación digital.

**MODULACION:** Es el proceso por el cual los símbolos son convertidos en formas de onda compatibles con el canal de transmisión.

**FUENTE DE INFORMACION:** Dispositivo que produce la información que debe ser comunicado por el SCD. Ésta puede ser analógica ó discreta (digital)

**MENSAJE TEXTUAL:** Secuencia de caracteres; de un conjunto finito de símbolos o alfabeto.

Ejemplos de mensajes de texto

**Hola como estas**

**ok**

**\$96,872,153.4**

**CARACTER:** Miembro de un alfabeto ó conjunto de símbolos. Los caracteres pueden ser “mapeados” ó asignados dentro de una secuencia de dígitos binarios.

Ejemplo de caracteres:

**A**

**9**

**&**

Como ejemplos de alfabetos se tienen por ejemplo los códigos estándar BAUDOT ASCII, EBCDIC, HOLLERIT, entre otros.

**SECUENCIAS DE BIT** (bit stream). Es una secuencia de dígitos, binarios (unos y ceros).

**SIMBOLO:** Mensaje digital. Grupo de “K” bits considerados como una unidad o carácter  $m_i$  desde un conjunto de símbolos (finito) o alfabeto. El tamaño del alfabeto M, es  $M=2^K$  (K es el # de bits en el símbolo). Para su transmisión cada  $m_i$  símbolo ( $i=1, \dots, m$ ) será representada por un correspondiente forma de onda  $S_1(t), S_2(t), \dots, S_m(t)$ . El símbolo  $m_i$  es enviado por la transmisión de la forma de onda digital  $S_i(t)$  por segundos; T es la duración de símbolo. El siguiente símbolo es enviado durante el siguiente intervalo de tiempo “T”.

Ejemplos:

“1” → Símbolo binario (K=1, M=2)

“10” → Símbolo cuaternario (K=2, M=4)

“011” → Símbolo 8 – ario Símbolo (K=3, M=8)

→ Formas de ondas digital pasa banda  $S_i(t), i=1, \dots, M$ . T es la duración de símbolo (Ver figura).

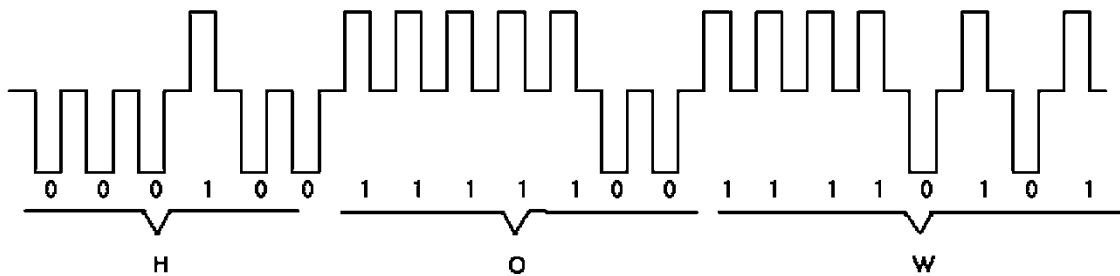
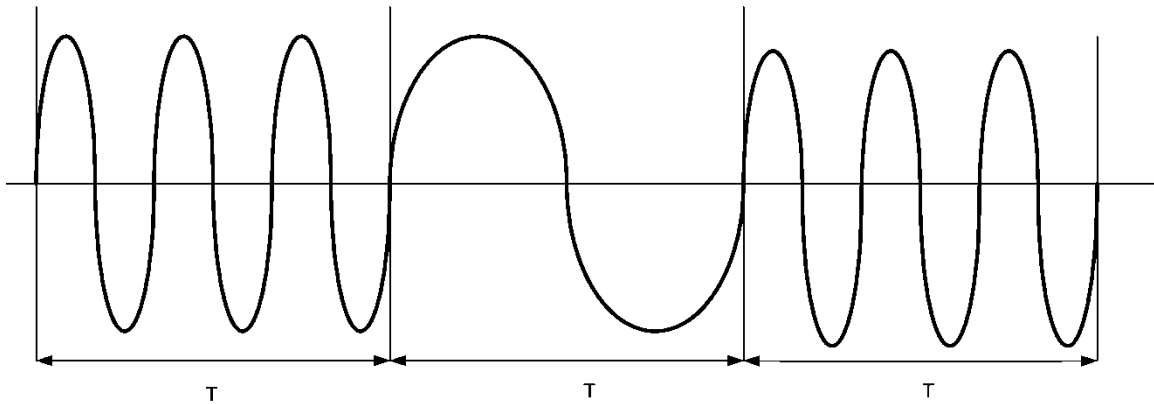


Figura 1.8 Secuencia de bits



**Figura 1.9 Forma de onda digital pasabanda**

FORMA DE ONDA DIGITAL: Forma de onda de corriente o voltaje (pulso para banda base o sinusoidal para pasa – banda) que representa un símbolo digital.

#### CARACTERISTICAS DE FORMA DE ONDA

$$\begin{array}{l}
 \text{PULSOS} \left\{ \begin{array}{l} *Amplitud \\ *Anchura \\ *Posicion \end{array} \right. \\
 \text{SINUSOIDAL} \left\{ \begin{array}{l} *Amplitud \\ *Frecuencia \\ *Fase \end{array} \right.
 \end{array}$$

Aunque la forma de onda es senoidal y consecuentemente una apariencia analógica, es llamada forma de onda digital, porqué esta codificada información digital. Las figuras de mérito de un sistema de comunicación analógico son entre otras, la razón señal a ruido y el porcentaje de distorsión armónica.

Para los sistemas de comunicaciones digitales la figura de mérito ó medida de desempeño principal es la probabilidad de error de bit



## CAPITULO II

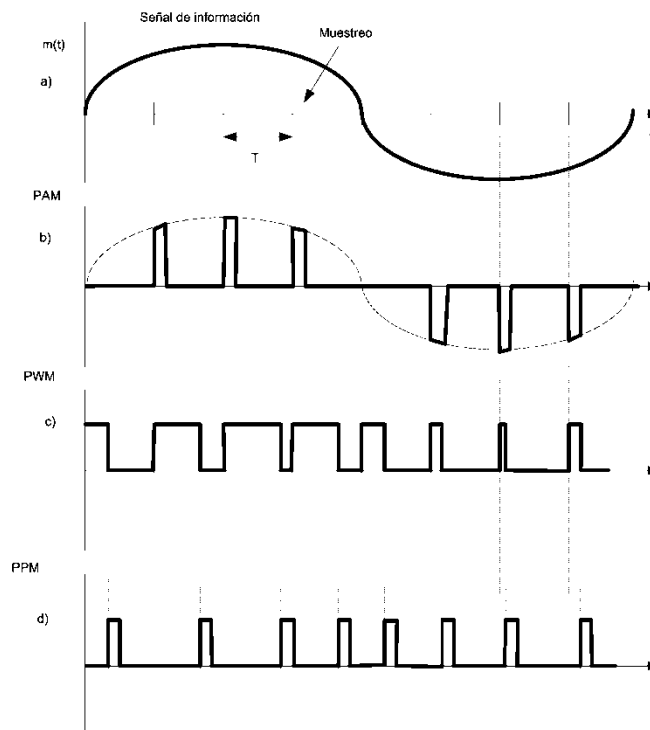
# **MODULACIÓN DE PULSO Y TRANSMISIÓN DE SEÑALES DIGITALES EN BANDA BASE**

## CAPITULO II

### II. MODULACIÓN DE PULSO Y TRANSMISIÓN DE SEÑALES DIGITALES EN BANDA BASE

#### 2.1 Modulación de pulso

La modulación de pulso es el proceso en el cual la amplitud, la anchura y la posición de pulsos individuales en un tren de pulsos son variados ó modulados en concordancia con la amplitud de una señal de información en banda base  $m(t)$  . En la siguiente figura se muestra una visión de lo anterior.



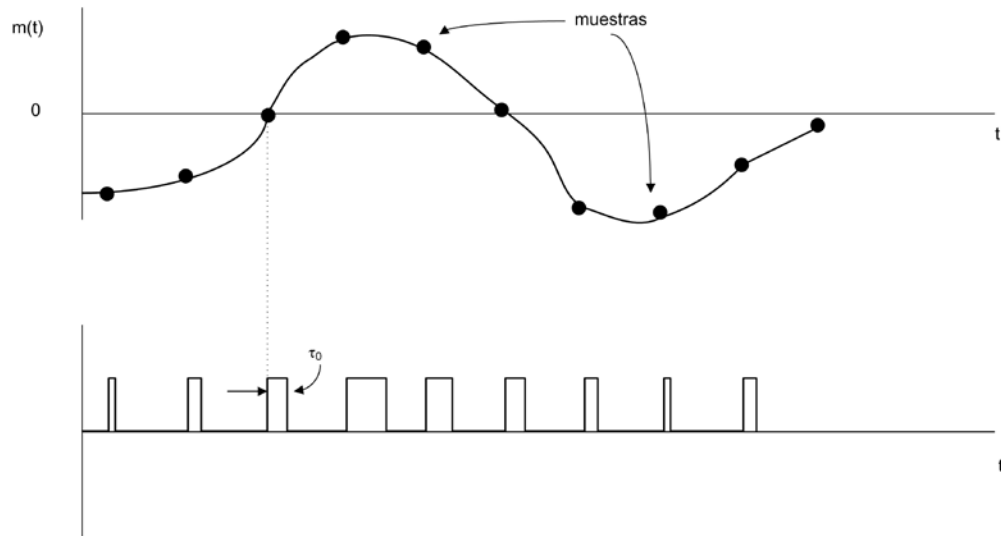
**Figura 2.1 Formatos de modulación de pulso: (a) señal de entrada. (b) modulación de amplitud de pulso. (c) modulación de anchura de pulso, (d) modulación por posición de pulso.**

### 2.1.1 Modulación del tiempo del pulso

En la modulación de amplitud de pulso (PAM por sus siglas en inglés), la señal de banda base modula la amplitud del pulso, el cual se encuentra localizado en una ranura de tiempo específica. Una forma alternativa de modulación de pulsos, es variar de alguna forma la “temporización” del pulso dentro de su correspondiente ranura de tiempo. La “modulación de tiempo de pulso” puede ser logrado en diferentes formas tales como modulación de posición de pulso o modulación de anchura de pulso.

#### MODULACIÓN DE ANCHURA DE PULSO (PWM)

También conocida como modulación de duración de pulso (PDM) o modulación de longitud de pulso (PLM). A manera de explicación, suponiendo que una señal de banda base es muestreada a intervalos regulares, pero en cada instante de muestreo es generado un pulso de amplitud fija, pero su duración es modulada por la señal  $m(t)$  (señal de información de banda base). Si la señal es no modulada, es decir  $m(t) = 0$ , la anchura del pulso es  $\tau_0$ , y la desviación alrededor de  $\tau_0$  es proporcional a  $m(t)$ . Para lograr lo anterior  $\tau_0$  debe ser más pequeño que la duración de la ranura de tiempo. Además la máxima duración permisible del pulso debe ser más pequeño que la separación entre muestras con el fin de exista un tiempo de guarda, entre la terminación de un pulso y el comienzo del siguiente. Lo anterior se visualiza en la figura 2.1



**Figura 2.2. Señal de banda base y pulso modulado en anchura**

La generación de pulsos PWM pueden ser por medio de un comparador en el cual una de las señales de entrada es el mensaje y otra es una señal diente de sierra. La demodulación puede ser lograda por medio de un filtro pasabajos.

### MODULACIÓN POR POSICIÓN DE PULSO (PPM)

En este tipo de modulación, la señal  $m(t)$  modula el momento del comienzo del pulso. De igual manera se podría modular el borde final o caída del pulso o ambos. Cuando  $m(t)=0$  se tiene un pulso retrasado un instante  $\tau_0$  con respecto a la ocurrencia del instante de muestreo. El cambio en el retardo de  $\tau_0$  es proporcional a la señal moduladora. (figura 2.1) . PPM puede ser obtenida a partir de PWM por medio de un circuito monoestable.

## **2.2. Señales de banda base y señales pasabanda**

### **Señal de banda base**

La señal la cual su espectro se extiende desde CD (ó cerca) hasta un valor finito, (normalmente hasta unos pocos megahertz) es llamada señal de banda base o señal pasobajas. Como ejemplos de este tipo de señales son los “mensaje” ó señales de información, los datos, etc. Para la transmisión de este tipo de señales en un sistema de comunicaciones digitales, la información es “formateada” de forma que son representadas por símbolos digitales. Formas de onda son asignadas para representar estos símbolos digitales; a este proceso se le llama modulación de pulso o modulación de banda base.

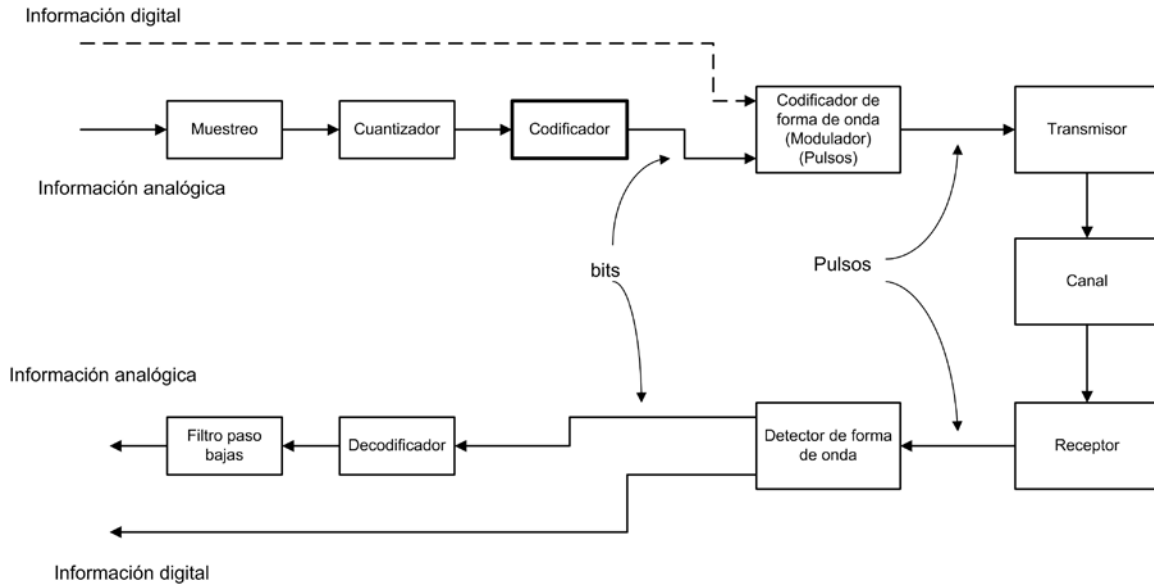
Las señales de banda base no son apropiadas para propagarse a través de muchos medios de transmisión.

### **Señal Pasa Banda**

Las señales pasabanda en las cuales el espectro se ha desplazado a una banda de frecuencia que es más apropiada para su propagación a través de cierto medio de transmisión son llamadas son llamadas señales de modulación pasa banda ó señales pasabanda. Las señales pasabanda tienen su contenido espectral dentro de una banda de frecuencias cercano a la frecuencia portadora.

### **Sistemas de Banda Base**

En la siguiente figura se muestra el diagrama a bloques típico de un sistema de comunicación digital para señales de banda base.



**Figura 2.5 . Sistema de comunicaciones digitales de banda base**

La información digital no pasa por los bloques que dan formato a la señal de información. La señal analógica es “formateada” por los procesos de muestreo, cuantización y codificado. A la salida de este último bloque se obtiene una secuencia de bits. Estos bits son transmitidos es transmitido por medio de un canal de banda base tal como un par trenzado o cable coaxial. Para poder transmitir estos bits por el canal se requiere transformar estos bits en señales eléctricas o formas de onda adecuadas, que en este caso son los pulsos. Esta conversión tiene lugar en el codificador de forma de onda o modulador de banda base. La salida de este bloque es una secuencia de pulsos correspondientes a los bits enviados. Una vez transmitidos por el canal, los pulsos son detectados para producir un estimado de los bits transmitidos y posteriormente se realiza los pasos inversos para recuperar la información.

### Procesamiento de la información analógica.

La información analógica debe de ser transformado a un formato digital. Uno de los primeros pasos es el muestreo de la señal analógica para producir un pulso modulado en amplitud (PAM, por sus siglas en inglés).

### Teorema de muestreo.

El proceso de muestreo puede ser implementado de diversas formas, siendo la más común el uso de un dispositivo de muestra y retención. Este consiste en mecanismo de conmutación y almacenaje que forma una secuencia de muestras de la señal analógica de entrada conocida como pulsos modulados en amplitud. La señal analógica a su vez puede ser aproximadamente recuperada por medio de un filtraje pasa bajos. El límite de la precisión con la que se puede recuperar la señal analógica es contestada si se revisa el teorema de muestreo, el cual establece: una señal limitada en banda sin componentes por arriba de  $f_m$  hertz puede ser determinada únicamente por valores uniformemente muestreados a intervalos de  $T_s$  segundos donde

$$T_s \leq \frac{1}{2f_m} \quad (2.1)$$

Lo anterior es conocido como teorema del muestreo uniforme. La tasa de muestreo se define como:

$$f_s = \frac{1}{T_s} \quad (2.2)$$

Otra forma de ver lo anterior en términos de la tasa de muestreo  $f_s$ , es conocido como criterio de Nyquist lo cual se establece como

$$f_s \geq 2f_m \quad (2.3)$$

La tasa de muestreo  $f_s = 2f_m$  es llamada tasa de muestreo de Nyquist. El criterio de Nyquist teóricamente es una condición suficiente para permitir que una señal analógica desde un conjunto de muestras de tiempo discreto uniformemente muestreadas.

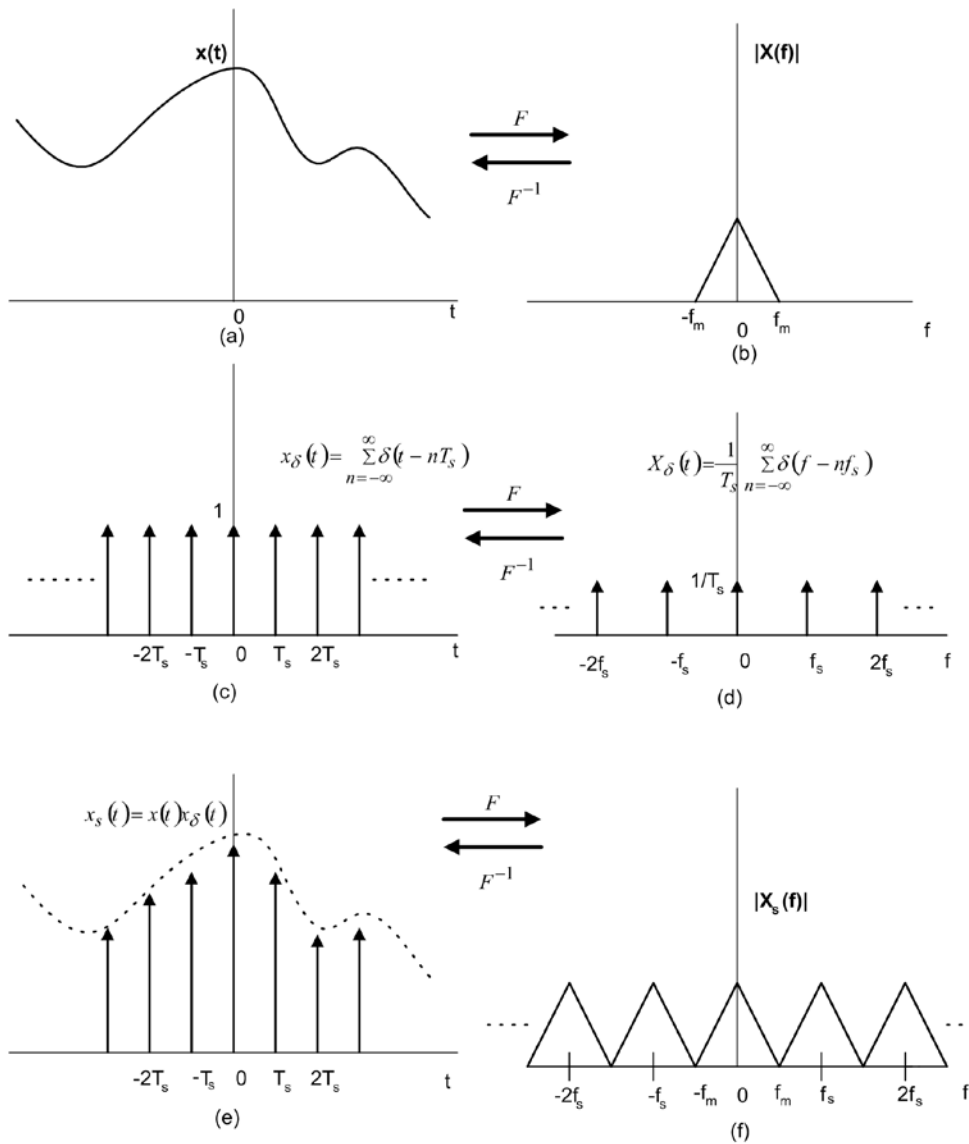
### 2.2.1 Muestreo por impulsos.

Para demostrar la validez del teorema de muestreo se usará la propiedad de convolución de la transformada de Fourier. Para esto se usará “el muestreo ideal” usando para ello una secuencia de funciones impulso unitario. Para esto la señal analógica  $x(t)$  (figura 2.6) tiene como transformada de Fourier  $X(f)$  la cual es cero fuera del intervalo  $(-f_m < f < f_m)$  (figura ). El muestreo de  $x(t)$  puede ser visto como el producto de  $x(t)$  con un tren periódico de funciones impulso unitario  $x_\delta(t)$  tal como se muestra en la figura (2.6) el cual es descrito por:

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (2.4)$$



donde  $T_s$  es el periodo unitario  $\delta(t)$  es la función impulso unitario ó función delta de Dirac.



**Figura 2.6 Ilustraciones los dominios del tiempo y la frecuencia del muestreo ideal (ó por impulsos): (a) señal  $x(t)$ ; (b) espectro de  $x(t)$ ; (c) tren de impulsos periódicos unitarios; (d) espectro de la función tren de impulsos unitarios; (e) señal muestreada; (f) espectro de la señal muestreada**

Con el fin de comprender los límites del teorema de muestreo se selecciona  $T_s = 1/2f_m$  de forma que cumple con el criterio de Nyquist.

Usando la propiedad de “muestreo” de la función impulso unitario, esto es

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0) \quad (2.5)$$

Usando la anterior propiedad podemos ver que  $x_s(t)$ , la cual es la versión muestreada de  $x(t)$  (figura 2.6e) es dada por

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x(t)x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Usando la propiedad de convolución de la transformada de Fourier, el producto  $x(t)x_\delta(t)$  de la ecuación anterior se convierte en la convolución de sus transformada de Fourier.  $X(f)*X_\delta(f)$  donde  $X_\delta(f)$  es la transformada de Fourier del tren de impulso unitario  $x_\delta(t)$

$$X_\delta(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s) \quad (2.7)$$

Nótese que la transformada de Fourier de un tren de impulsos es otro tren de impulsos en el cual el valor de los periodos de los dos trenes de impulsos son recíprocos. Las figuras 2.6c y 2.6d ilustran el tren de impulsos  $x_{\delta}(t)$  y sus transformada de Fourier respectivamente.

La convolución de una función con el impulso unitario simplemente desplaza la función original:

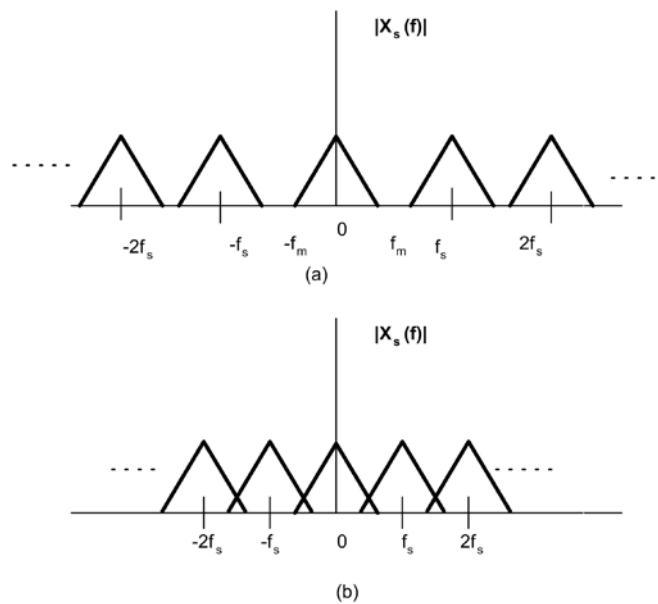
$$X(f) * \delta(f - nf_s) = X(f - nf_s) \quad (2.8)$$

La solución de la transformada de Fourier  $X_s(f)$  es:

$$\begin{aligned} X_s(f) &= X(f) * X_{\delta}(f) = X(f) * \left[ \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s) \right] \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \end{aligned} \quad (2.9)$$

de la ecuación anterior se observa que el espectro de la señal muestreada  $X_s(f)$  es igual al espectro de la señal original  $X(f)$  más la repetición periódica del mismo en ubicaciones de frecuencia  $nf_s$ . Si la señal muestreada con espectro  $X_s(f)$  se limita al ancho de banda de la señal original, (por medio de un filtro, por ejemplo), el espectro será idéntico al de la señal original. La propiedad de translación de una función permite una rápida visualización cuando se convoluciona un tren de impulsos con otra función. Esto es conocido como propiedad de muestreo del tren de impulsos

Cuando la frecuencia de muestreo es el doble de la máxima frecuencia contenida en el espectro de la señal al que se aplica el muestreo, esto es  $f_s=2f_m$ , cada réplica del espectro es separada entre sí por una banda de  $f_s$  y la señal original  $x(t)$ , puede ser recobrada a partir de sus muestras (teóricamente) por medio de un filtro pasabajos. Usando  $f_s>2f_m$ , se tiene un efecto separar las frecuencias de forma que el filtro puede operar mejor con la señal. Cuando la frecuencia de muestreo es reducida de forma que  $f_s<2f_m$ , las réplicas del espectro se superponen lo que hace que cierta cantidad de información sea perdida. A este fenómeno se le conoce como repliegue (alias). Para prevenir lo anterior, un sistema de muestreo deberá cumplir con el criterio de Nyquist (figura 2.7)



**Figura. Espectro para diferentes valores de frecuencia de muestreo ( $f_s$ ): (a)  $f_s \geq 2f_m$ ; (b)  $f_s < 2f_m$**

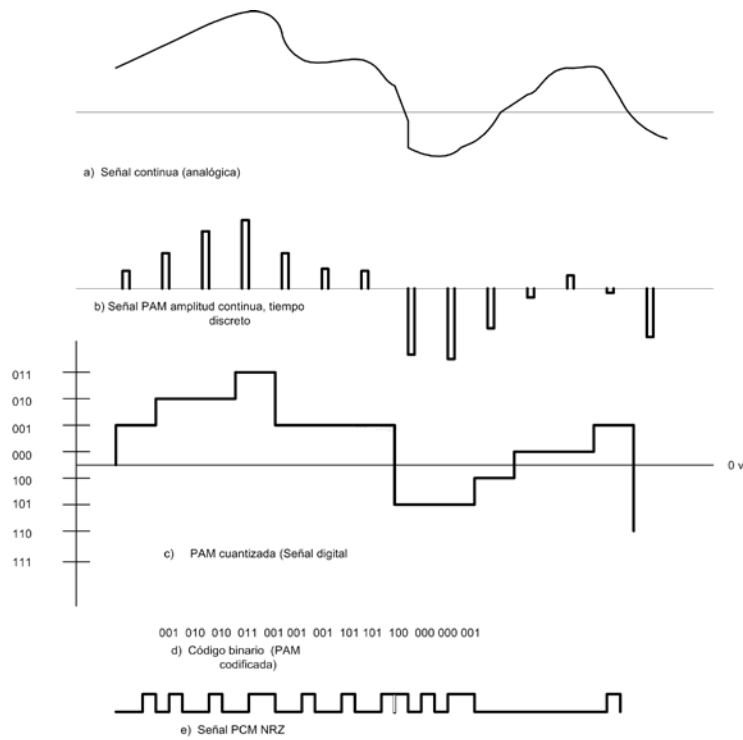
### 2.3 Modulación de pulso codificados. (PCM)

. Después de la cuantización de una señal PAM, lo más común (y en muchos casos práctico) es la transmisión del número que representa la altura (amplitud) del pulso más que el pulso en sí. Normalmente esta altura del pulso es transmitida como un número binario. Por ejemplo, si el número de niveles de cuantización fuera ocho, la altura de los pulsos puede ser representada por los números binarios que van del (000) al (111). En la figura 2.8 se ilustra lo anterior. La principal ventaja de PCM (de las siglas en inglés de "Pulse Coded Modulation") es su diferencia de voltajes entre niveles adyacentes (solo hay dos niveles) que para los de una señal PAM (tiene varios niveles). Lo anterior significa que para un nivel de ruido dado de ruido en el receptor, es menos probable que el nivel de voltaje enviado (señal) sea interpretado como otro nivel de voltaje diferente al enviado. En resumen PCM es más tolerante que una señal PAM cuantizada.

#### Razón señal a ruido de cuantización (S/N<sub>q</sub>)

Sin bien es cierto que las señales PCM son más insensibles al ruido que las señales PAM cuantizadas, también es cierto que ambas sufren la misma degradación debido al ruido de cuantización. Para un dado número de niveles de cuantización M, el número requerido de dígitos binarios requerido para el código PCM es  $n = \log_2 M$ . La razón señal a ruido de cuantización (pico), S/N<sub>q</sub> es:

$$\left( \frac{S}{N_q} \right)_{pico} = 3M^2 = 3(2^n)^2 \quad (2.10)$$



**Figura 2.8 Señal de información (a), señal PAM (b) y señal PCM (c)**

Si la relación entre la potencia pico y la potencia media de una señal  $\alpha$  es:

$$\alpha = \frac{v^2_{pico}}{v^2} \quad (2.11)$$

usando la expresión anterior obtenemos la razón señal a ruido de cuantización promedio:

$$\left( \frac{S}{N_q} \right)_{promedio} = 3 \left( 2^{2n} \right) \left( \frac{1}{\alpha} \right) \quad (2.12)$$

Para voz  $\alpha = 10$ . Un valor aproximada del S/Nq para sistemas de voz puede ser obtenida para PCM por medio de la expresión  $6(n-1)$  dB, donde n es el número de bits de la palabra PCM

### Razón señal a ruido para PCM.

Las señales PCM pueden decodificadas sin error si son recibidas con una razón señal a ruido (S/N) igual a la razón señal a ruido de codificación (S/Nq). En presencia de otros disturbios tales como la presencia de ruido de canal y/ó ruido del receptor, es posible que uno ó más de los símbolos sean modificados en su amplitud de forma tal que sea decodificado erróneamente. En otras términos, que un "1" binario sean tomado por un "0" binario y viceversa. El efecto de tal error depende de cual símbolo es detectado con error. Si el error ocurre en el símbolo correspondiente al bit menos significativo producirá un error igual a un nivel de cuantización. Si el más significativo bit producirá un error de varios niveles de cuantización.

La razón señal a ruido de un sistema PCM en presencia de ruido se puede obtener de:

$$\frac{S}{N} = \frac{M^2 - 1}{1 + 4(M^2 - 1)P_e} \quad (2.13)$$

en donde M es el número de niveles de cuantización.

La ecuación anterior permite calcular S/N promedio de la señal PCM decodificada incluyendo tanto el ruido de cuantización y el ruido de decodificación que se derivan de la corrupción de bits debido al ruido del canal ó del receptor. Definiendo a  $(S/N)_{CH}$  como a la razón S/N del canal y a  $(S/N)_D$  como la S/N de la señal PCM decodificada para señales binarias polares no – retorno a cero (NRZ) usando decisiones de *punto central* se tiene:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{M^2 - 1}{1 + 4(M^2 - 1)^{1/2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \left[\frac{S}{N}\right]_{CH}\right)^{1/2}} \quad (2.14)$$

en donde **erfc** es una de las definiciones de la función de error complementario. En la figura 2.9 se ilustra la ecuación anterior para varios valores de  $n = \log_2 M$ . El eje de las abscisas corresponde a la razón señal a ruido de la señal PCM recibida y el eje de la ordenadas corresponde a su vez a la razón señal a ruido decodificada  $(S/N)_D$ . En la figura se puede ver con claridad la inmunidad al ruido de PCM. Si el  $(S/N)$  de la señal recibida es muy grande, el ruido es debido principalmente al proceso de cuantización y la razón señal a ruido de salida  $(S/N)_D$  es limitado por  $(S/N)_q$ . En los sistemas PCM prácticos operan a valores bajos de  $(S/N)_{CH}$ . El  $(S/N)_D$  (de salida) es entonces mayor que el de entrada  $(S/N)_{CH}$ . A valores de  $(S/N)_{CH}$ , el ruido es de magnitud comparable con la amplitud de los pulsos PCM y la correcta interpretación de los códigos se dificulta.

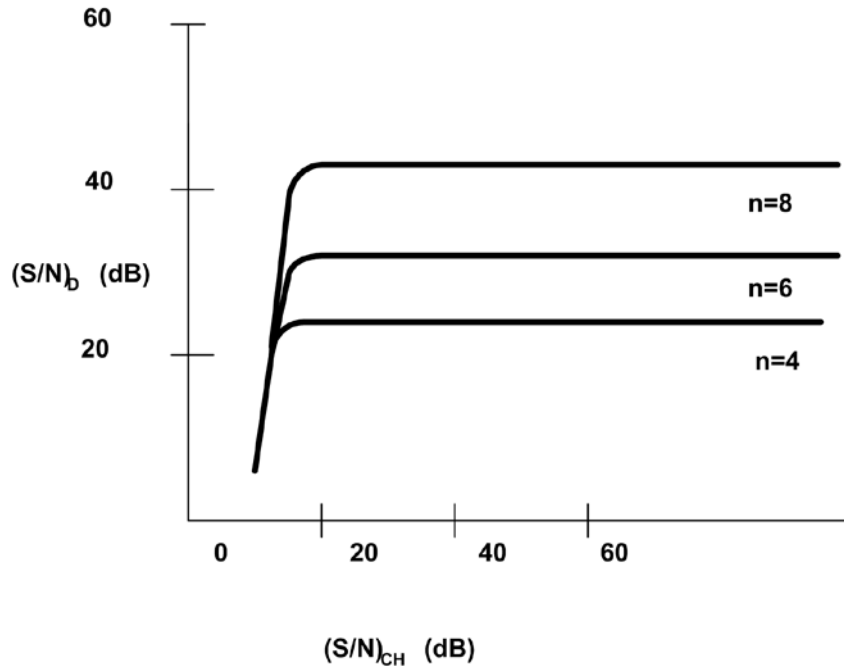
#### Ejemplo

Encuentre la razón señal a ruido total para un sistema PCM (salida analógica) si la tasa de errores promedio es de uno por cada  $10^6$  bits PCM y la razón señal a ruido de cuantización es de 54.8 dB

#### Solución

Se tiene 
$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = M^2 - 1$$





**Figura 2.9 Razón señal a ruido de PCM decodificada como función de la razón señal a ruido del canal para diversos valores de la longitud de la palabra PCM**

Sustituyendo en (2.3)

$$\frac{S}{N} = \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_q}{1 + 4\left(\frac{S}{N}\right)_q P_e}$$

y  $(S/N)_q = 54.8 \text{ dB} = 10^{5.48} = 3.020 \times 10^5$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \left(\frac{S}{N}\right)_{salida} = \frac{3.020 \times 10^5}{1 + 4(3.020 \times 10^5)(1 \times 10^{-6})}$$

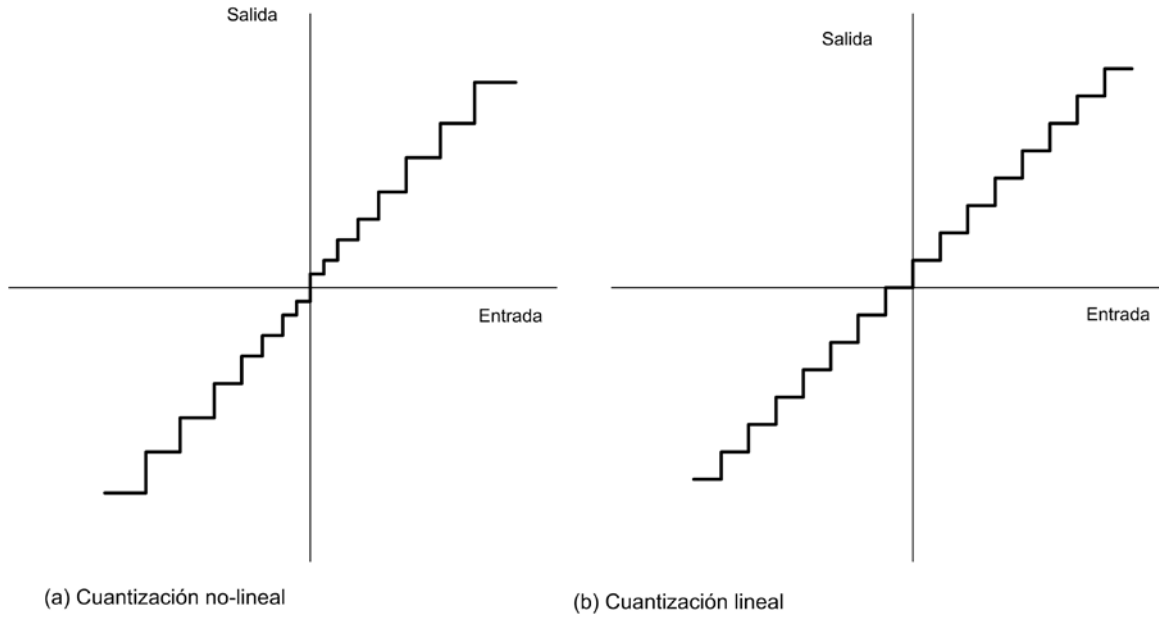
$$= 1.368 \times 10^5 = 51.4 \text{ dB}$$

La razón señal a ruido disponible para sistemas PCM se incrementa con el cuadrado del número de niveles de cuantización mientras que la tasa de baudios y por consiguiente el ancho de banda se incrementa con el logaritmo del número de niveles de cuantización.

Como las señales PCM no llevan información en su amplitud, éstas pueden ser regeneradas usando procesamiento no lineal en cada repetidor en un sistema de larga distancia. Este tipo de sistema permite remover el ruido acumulado y una señal libre de ruido puede ser transmitida al siguiente repetidor del enlace. Sin embargo la probabilidad de error se acumula de un tramo a otro del enlace.

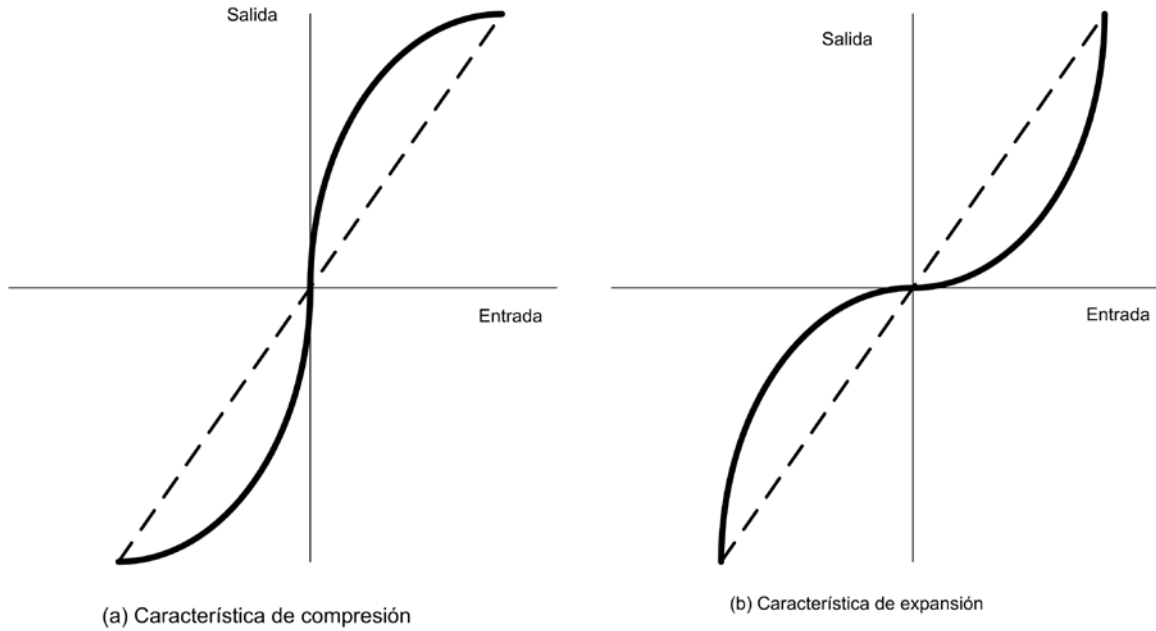
### **Compresión – expansión de PCM**

Las expresiones desarrolladas anteriormente para  $(S/N)_q$  asumen que la señal de información tiene una densidad de probabilidad uniforme, es decir, que todos los niveles de cuantización son usados equitativamente (con la misma probabilidad). Lo anterior no es válido en muchos de los tipos de señal. Si la función densidad de probabilidad (fdp) de la señal de información no es uniforme pero tiene una f.d.p. conocida y es constante en el tiempo, se hace obvio que para optimizar  $(S/N)_q$  los niveles de cuantización más usados por esta señal deberán introducir menos ruido de cuantización. Una forma de lograr lo anterior es usar un esquema de cuantización no lineal (p.ej. la compansión) Esta cuantización no lineal se ilustra en la figura 2.10a.



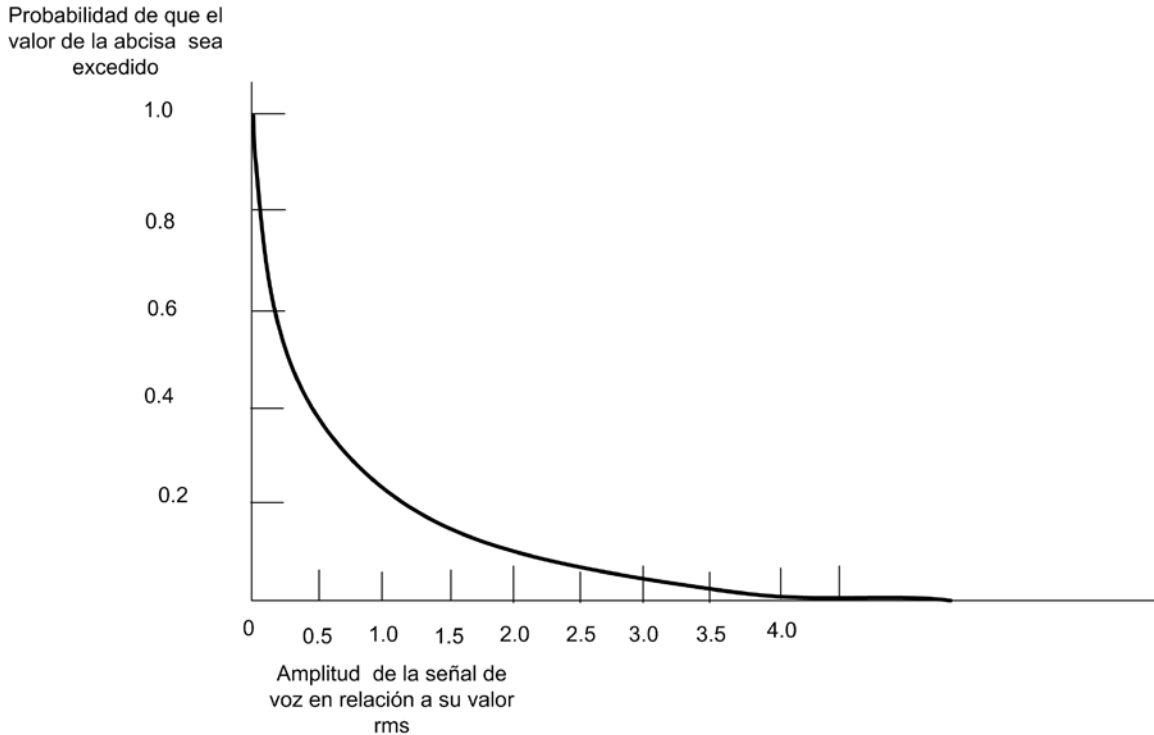
**Figura 2.10. Características de cuantización**

Si la f.d.p. de la señal de información tiene pequeñas amplitudes para una gran fracción del tiempo y amplitudes grandes para una pequeña fracción del tiempo (como es usualmente el caso), el tamaño del paso para niveles de cuantización adyacentes es reducido para niveles de amplitud pequeños y grandes para niveles de altos de señal. La **compansión** (compresión – expansión) logra el mismo resultado al comprimir la señal de información usando la característica de amplitud no lineal (figura 2.11) antes de de la cuantización no lineal y expandiendo la señal de información reconstruida usando la característica inversa (en el receptor).



**Figura. Características típicas de compresión y expansión (“compansión”)**

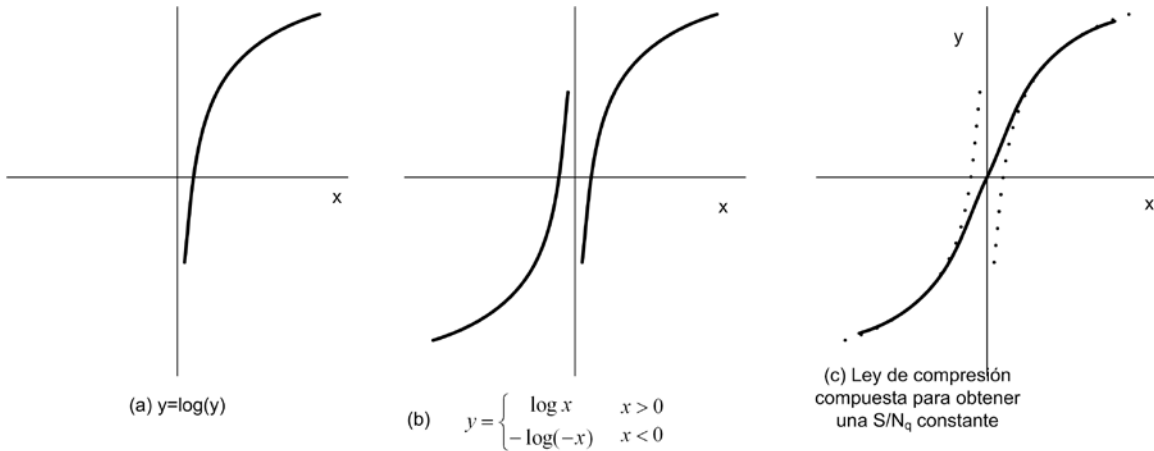
El “compandeo” deberá producir una señal que tenga una f.d.p. uniforme. En el caso de señales de voz, la f.d.p. de una persona es normalmente constante y la forma de las f.d.p. de la voz de diferentes personas será normalmente similar. La curva típica de voz se muestra en la figura 2.12.



**Figura 2.13 Distribución estadística de la amplitud de la voz de una persona**

Sin embargo puede variar, especialmente en cuanto a género de la persona, ya que un hombre normalmente habla con nivel de voz más alto y las mujeres de manera más suave. En estos casos la estrategia de “compandeo” es la de mantener tanto como sea posible una  $(S/N)_q$  constante para todos los niveles. La potencia de ruido de cuantización es proporcional a  $q^2$ , por tanto el voltaje de ruido de cuantización RMS es proporcional a  $q$ . Si la razón  $(S/N)_q$  es constante para todos los niveles por lo tanto  $q$  es proporcional al nivel de la señal, es decir  $v/q$  deberá ser constante. Si una cuantización uniforme es usada, entonces deberá ser comprimida tal que al incrementarse el nivel de la señal por un factor dado, se incrementa la señal de salida por una correspondiente constante adicional. Entonces los incrementos iguales de cuantización en la señal de salida corresponden a incrementos de cuantización en la señal de entrada los cuales son iguales a fracciones de la señal de entrada. La función la cual convierte factores multiplicativos en constantes que se suman es el logaritmo y las características de

compresión de  $(S/N)_q$  constante es por lo tanto de la forma  $y=\log_e(x)$ . Debido a que la señal puede tomar tanto valores positivos como negativos la característica de compresión logarítmica deberá ser una función con simetría impar.



**Figura 2.13. Desarrollo de una característica de  $S/N_q$  constante**

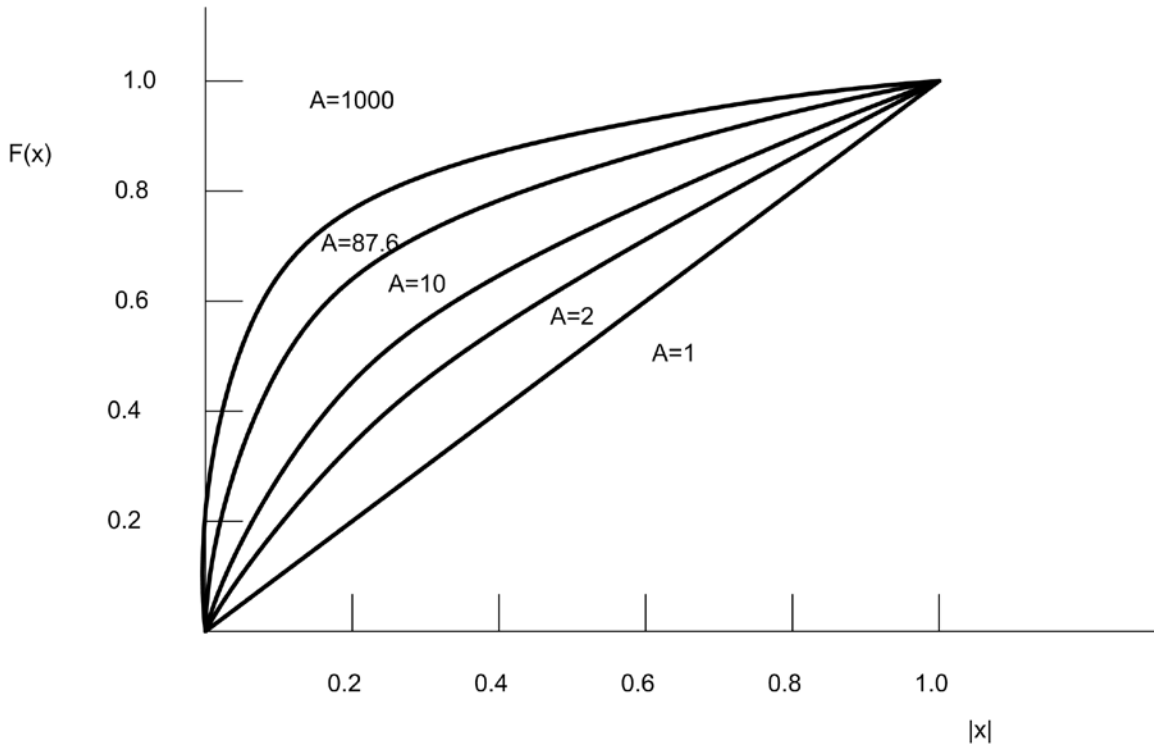
La característica de compresión utilizadas por sistemas de voz PCM europeos es conocida como la ley A:

$$F(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) \frac{1 + \ln A|x|}{1 + \ln A} & \frac{1}{A} < |x| < 1 \\ \operatorname{sgn}(x) \frac{A|x|}{1 + \ln A} & 0 < |x| < \frac{1}{A} \end{cases} \quad (2.15)$$

en donde

$$|x| = \left| \frac{v}{v_{pico}} \right|$$

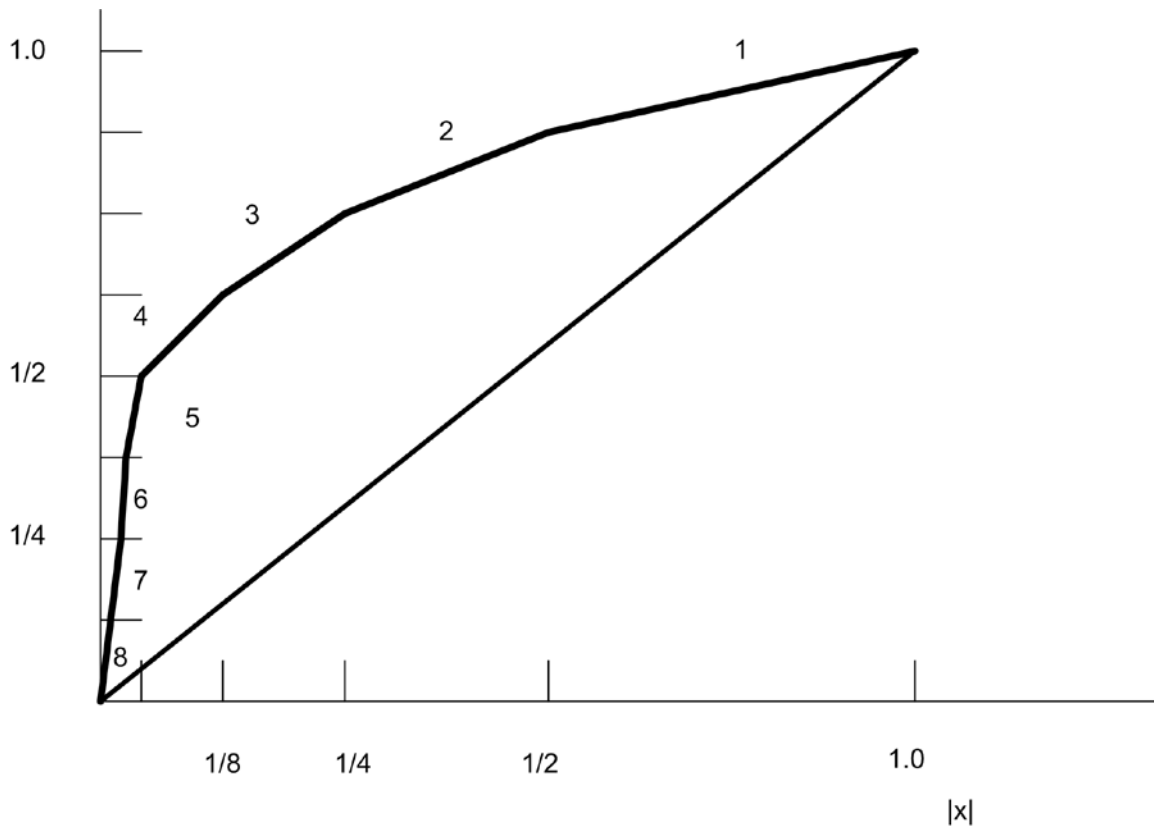
es la señal de entrada normalizada del compresor,  $F(x)$  es la salida de la señal normalizada del compresor y  $\text{sgn}(x)$  es la función signo la cual es +1 para  $x > 0$  y -1 para  $x < 0$ .



**Figura 2.14 Ley de compresión A (característica) para diversos valores de A**

El parámetro  $A$  define la curvatura de la característica de compresión en donde con  $A=1$ , se tiene una ley lineal. Un valor común de  $A$  es el de 87.6 el cual proporciona una mejora de 24 dB en la razón  $(S/N)_q$  con respecto a PCM en señales pequeñas ( $|x| < 1/A$ ) y de 38 dB para señales grandes ( $|x| > 1/A$ ). El rango dinámico de la región logarítmica de la característica de compresión es de  $20\log[1/(1/A)] \approx 39$  dB. El efecto resultante permite que PCM lineal de 11 bits (2048 niveles), lo cual se requeriría para una calidad de voz adecuada, sea reducido a 8 bits (256 niveles) de PCM

**“compandida”**. Un canal de voz de 4kHz muestreado a la tasa de Nyquist (8 kHz) da como resultado una tasa de transmisión de bit PCM **compandida** de 64kb/s. La característica de ley A es normalmente implementada como una aproximación lineal de 13 segmentos.



**Figura Ley de compresión A de 13 segmentos**

Para PCM de 8bits, un bit da la polaridad, 3 bits indica en cual segmento cae la muestra y los cuatro bits proporciona la ubicación en el segmento. En los Estados Unidos y Japón utilizan la ley logarítmica de compresión es usada:

$$F(x) = \text{sgn}(x) \frac{\ln(1 + \mu|x|)}{\ln(1 + \mu)} \quad 0 \leq |x| \leq 1 \quad (2.16)$$

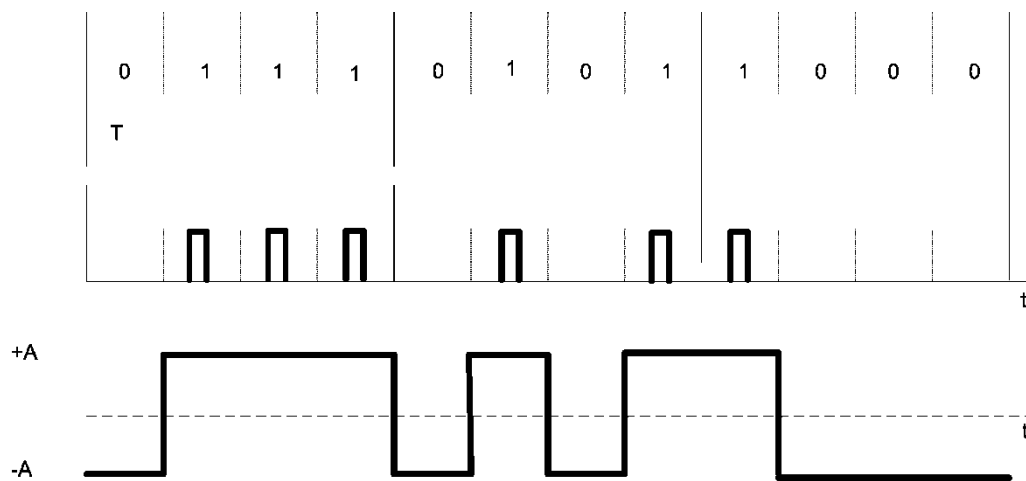


La ley  $\mu$  (con  $\mu=255$ ) da una leve mejora de  $(S/N)_q$  para señales de voz comparada contra la ley A pero con un rango dinámico más pequeño. La ley  $\mu$  utiliza 15 segmentos, una tasa de muestreo de 8kHz y 8 bits por muestra.

La medida de calidad subjetiva de voz, (MOS, del inglés Mean opinion score) ó puntuación promedio de opinión de la calidad de voz, PCM G.711 (ley A ó ley  $\mu$  de 8 bits por muestra y 8 kHz de tasa de muestreo) tiene una calidad **MOS** de 4.3 de una escala de 0 a 5. Un MOS de 3 significa una degradación que puede ser ligeramente molesta, 2 presenta una mayor degradación que implica una audición molesta y 1 significa una calidad de voz sintética.

#### **2.4 Transmisión de señales digitales en banda.**

Es necesario representas los dígitos binarios PCM en forma de pulsos eléctricos para poder transmitirlos a través de un canal de banda base. Una representación de lo anterior se muestra en la figura1. Las ranuras de tiempo de los códigos PCM se muestran en la figura 2.16a , en el cual las por medio de palabras de 4 bits se representan los valores cuantizados de una cada muestra. Cada digito binario “1” se representa por un pulso y cada “0” por la ausencia de éstos (figura1b). Una secuencias de pulsos eléctricos como los mostrados en la anterior puede ser utilizados para enviar la información de la secuencia de bits PCM, y en consecuencia la información de las muestras cuantizadas de un mensaje. El receptor deberá determinar de estos pulsos las señales PCM enviadas. La correcta decisión por parte del receptor es función de la energía del pulso, entre más energía (ó área del pulso) mayor la probabilidad de que el receptor decida en forma correcta si se envió “1” ó un “0” (si hay ó no pulso en una respectiva ranura de tiempo. Una manera de mejorar la probabilidad de una correcta detección es incrementar la anchura de los pulsos (Figura 2.16)



**Figura 2.16 Ejemplos de señales eléctricas para transmisión PCM**

Tipos de formas de onda (señales eléctricas) PCM. Existen varios tipos de formas de onda para el envío de señales PCM. Estas se pueden clasificar en:

1. No retorno a cero (NRZ)
2. Retorno a cero (RZ)
3. Fase codificada
4. binaria multinivel

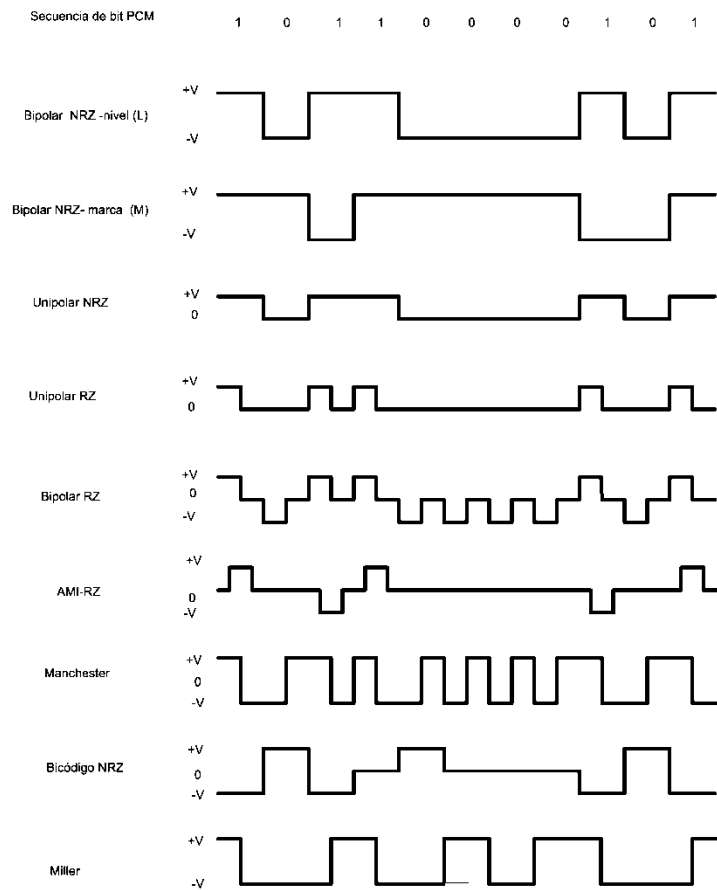
Las señales NRZ son las comunes para la transmisión PCM. Entre ellas podemos citar a: NRZ –L (por nivel), NRZ-M (por marca) y NRZ –S (espacio). NRZ-L se usa extensamente en los circuitos digitales. En este tipo un “1” binario es representado por un nivel y un “0” es representado por otro nivel. Con NRZ-M, un “1” (marca) es

representado por un cambio de nivel y un "0" (espacio) es representado por la ausencia de cambio. También es conocido como codificación diferencial. Se utiliza en grabación magnética. NRZ-S es el complemento de NRZ-M.

Las señales RZ consisten en RZ – unipolar, RZ-bipolar y RZ- AMI. Se utilizan en transmisión de datos en banda base y grabado de información en dispositivos magnéticos. En RZ – unipolar, un "1" es representado por un pulso de anchura de medio tiempo de bit y un "0" es representado por la ausencia de pulso. En RZ-bipolar los unos y ceros son representados por niveles opuestos con unos pulsos de una duración de medio periodo de bit. En RZ-AMI (Alternative mark inversion) los unos son representados por pulsos alternados de igual amplitud y los ceros son representados por la ausencia de pulsos.

Las señales de fase codificada bifase nivel (*BFM*) son mejor conocida como codificación Manchester, bifase marca (*BFM*) y fase codificada bifase espacio, (*BFE*) y codificación Millar (también conocida como modulación de retardo, DM). Estas codificaciones se emplean en las comunicaciones ópticas. En *BFM*, un uno es representado por un pulso de una duración de medio bit posicionado en el primer intervalo de bit y un cero por un pulso posicionado en el segundo intervalo de bit. En *BFM*, una transición ocurre en la primera mitad del intervalo del bit. Un uno es representado por una segunda transición del segundo intervalo del bit, mientras que un cero es representado por la ausencia de transición en este segundo intervalo. En *BFE*, una transición ocurre en la primera mitad de la duración de bit; un uno es representado por la ausencia de la segunda transición y un cero es representado por una segunda transición. En modulación de retardo, un uno es representado por una transición a la mitad del intervalo. Un cero es representado por la ausencia de transición a menos que este le siga otro cero. En este caso una transición es colocada al final del intervalo de bit del primer cero.

Muchas formas de onda binaria usan tres niveles en lugar de dos para codificar los dígitos binarios. Ejemplos de lo anterior es RZ-bipolar y RZ-AMI. Otros formatos de este tipo son los bicódigos y duobinarios. Con NRZ-bicódigo transiciones de uno a cero y de cero a uno son codificados como cambios de polaridad del pulso y cuando no hay transiciones de datos un nivel cero es enviado. Con bicódigo RZ transiciones de uno a cero y de cero a uno producen cambios de polaridad de media duración de bit, sino hay transiciones un nivel cero es enviado.



**Figura 2.17 Formas de onda PCM (códigos de línea)**

La selección de un esquema en particular de formatos PCM depende de la aplicación particular. Algunos de los parámetros que determinan esta selección son:

- a) Componente de CD. (Eliminación). Permite que el sistema use acoplo de CA.
- b) Señal de reloj. Sincronización de símbolo o de bit es requerida en cualquier sistema de comunicación digital. Algunos sistemas PCM presentan una sincronización inherente ó características que permiten la recuperación de reloj.
- c) Detección de error. Algunos esquemas proporcionan medios para detectar errores de datos sin la introducción de bits adicionales.
- d) Compresión del ancho de banda. Los códigos multinivel permiten un incremento en la utilización eficiente del ancho de banda, permitiendo una reducción del ancho de banda para una tasa de bit (velocidad de bit bit/s) dada. Más información puede ser transmitida por unidad de ancho de banda.
- e) Codificación diferencial. Estas técnicas permiten la inversión de polaridad de formas de onda codificadas diferencialmente. En sistemas de comunicaciones lo anterior es una gran ventaja.
- f) Inmunidad al ruido. Varios formatos PCM pueden ser caracterizados por su probabilidad de error en función de su razón señal a ruido (S/N)

En la tabla 2.1 se presenta una comparación en relación al desempeño de algunos tipos de códigos de línea.

Tabla 2.1 Comparación del desempeño de diferentes tipos de códigos de línea

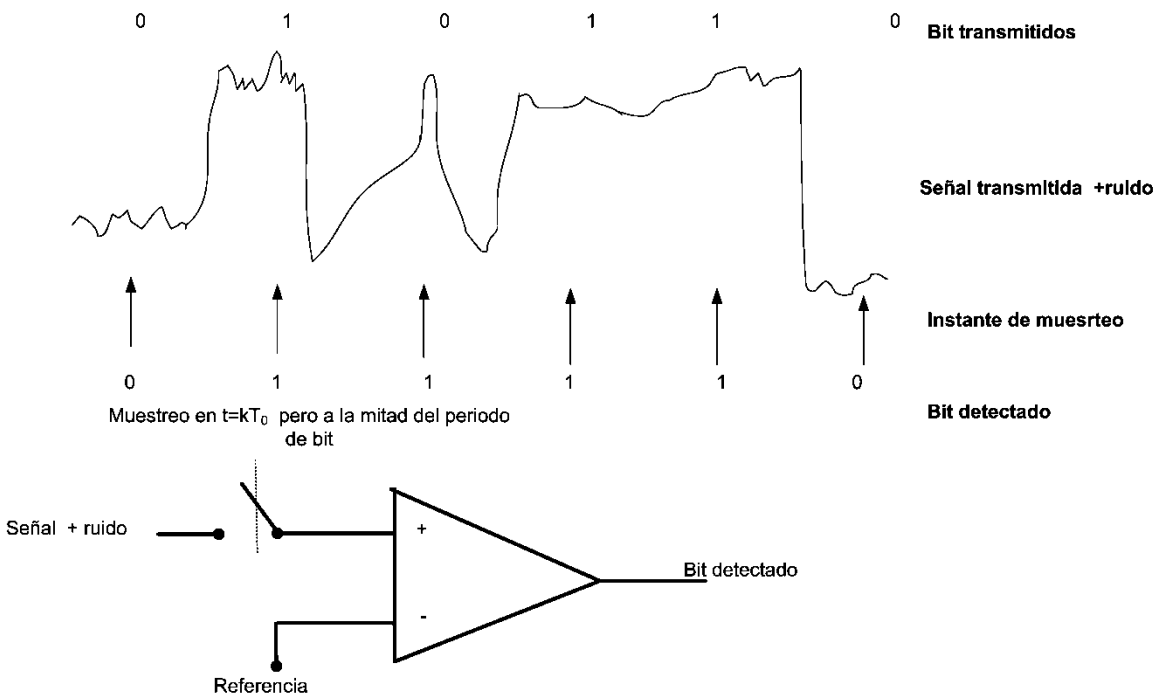
	Extracción de la señal de temporización	Detección de error	Ancho de banda (Primer nulo)	Acoplamiento de C.A
Unipolar NRZ	Difícil	No	1/T	No
Unipolar RZ	Sencillo	No	2/T	No
Bipolar NRZ	Difícil	No	1/T	No
Bipolar RZ	Rectificación	No	2/T	No
AMI-RZ	Rectificación	No	1/T	Si
Manchester	Difícil	No	2/T	Si

## 2.5 Detección de banda base

El análisis del proceso de detección es de suma importancia ya que nos permite medir una de los indicadores de calidad de los sistemas de comunicaciones, la probabilidad de error de bit. Una selección adecuada de las señales, permiten minimizar la probabilidad de error. La detección de las señales digitales involucran dos procesos: reducción del pulso de voltaje recibido ó símbolo a un número y la comparación de este valor contra un valor de referencia.

Suponiendo que el "1" y el "0" son representados por dos niveles de voltaje (ó corriente) una forma simple de lograr lo indicado en el primer paso, es el uso de un circuito comparador que realice el muestreo de la señal, la que normalmente va acompañada de

ruido (señal más ruido). En este caso, se podría comparar los niveles de voltaje que representan los dos posibles valores contra el valor intermedio entre ellos, es decir, contra un voltaje de referencia. Una técnica común consiste en tomar las muestras en alrededor del punto intermedio del periodo de símbolo (figura 2.18). El ruido presenta durante la detección se considera que es gaussiano, ya que normalmente se considera que el ruido dominante es el ruido térmico. La función densidad de probabilidad gaussiana se emplea en muchos campos de la ingeniería y la ciencia y es matemáticamente manejable por lo normalmente en la ingeniería de las telecomunicaciones se modela el ruido como gaussiano.

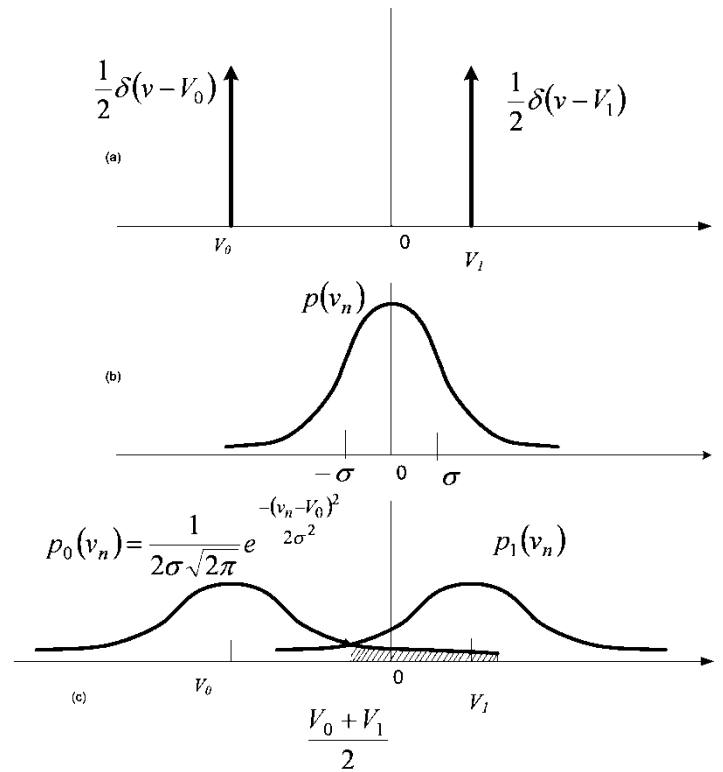


**Figura 2.18 Detector de punto central**

## 2.6 Probabilidad de error de señales de error binarias en ruido gaussiano

Considere una señal de información la cual puede únicamente tomar dos valores de voltaje,  $V_0$  y  $V_1$ . Consideraremos que el proceso de ruido  $v_n(t)$  es gaussiano con media cero y varianza  $\sigma$  voltios. Todo lo anterior se representa en la figura 2.19. En la figura 2.19(c) se muestra la función densidad de probabilidad resultante del voltaje señal y el ruido. Para símbolos con la misma probabilidad de ocurrencia el nivel de decisión es puesto en el valor promedio de  $V_0$  y  $V_1$  ( $(V_0+V_1)/2$ ). En el caso de símbolos con diferente probabilidad de ocurrencia lo anterior no es válido. Suponiendo que el dígito binario "0" es transmitido, es decir un nivel de voltaje  $V_0$ , la probabilidad de que el receptor (el cual utiliza un detector de muestreo en el "centro" del bit), exista en el momento de muestreo un voltaje por encima del umbral ( $(V_0+V_1)/2$ ). Lo anterior es la probabilidad de que ocurra un error, ó simplemente la probabilidad de error para el caso de haber transmitido un símbolo "0" (voltaje  $V_0$ ) y haber obtenido un símbolo "1" (nivel de voltaje  $V_1$ ). Lo anterior lo denotaremos por  $P_{e1}$ . La probabilidad  $P_{e1}$  es el área sombreada que se muestra en la figura 2.19(c):





**Figura 2.19** Funciones densidad de probabilidad de un símbolo binario (a), f.d.p. del ruido (b) y f. p. d. de señal más ruido

$$P_{e1} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\left(\frac{V_0+V_1}{2}\right)}^{\infty} e^{-\frac{(v_n-V_0)^2}{2\sigma^2}} dv_n \quad (2.17)$$

Por medio de un cambio de variable:

$$x = \frac{(v_n - V_0)}{\sqrt{2}\sigma}$$

se convierte en:

$$P_{e1} = \frac{1}{\pi} \int_{(V_1-V_0)/2\sqrt{2}\sigma}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (2.18)$$

Es conocido que la integral anterior no puede ser reducida a una expresión más sencilla pero puede ser evaluada usando la función de error complementaria  $erfc(x)$  definida por:

$$erfc(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (2.19)$$

Usando la definición de la ecuación de error complementaria:

$$P_{e1} = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{V_1 - V_0}{2\sigma\sqrt{2}}\right) \quad (2.20)$$

La función de error complementario puede ser evaluada numéricamente y generalmente esta disponible en forma tablas y muchas veces viene como función en el software de uso científico.

Si un dígito binario “1” ( $V_1$ ) es transmitido, la probabilidad de que el voltaje resultante de la señal más ruido transmitida esté por debajo del umbral en el instante del muestreo, es decir la probabilidad de error (es decir de interpretar al “1” transmitido como un cero)  $P_{e0}$ :

$$P_{e0} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\left(\frac{V_0+V_1}{2}\right)} e^{-\frac{(v_n-V_1)^2}{2\sigma^2}} dv_n \quad (2.19)$$

en particular para este problema,  $P_{e0}$  es igual  $P_{e1}$ . Se puede observar que la probabilidad de error depende de la diferencia de voltajes correspondientes a cada símbolo y no del valor absoluto de los niveles de los voltajes.  $P_{e0}$  y  $P_{e1}$  son probabilidades condicionales, las cuales, usando la notación las cuales usualmente se expresan como:

$$P_{e1} = P(e|V_0) = P(H_1|V_0) = \int_{-\infty}^{\gamma_u} p(v|V_0) dz \quad (2.22)$$

donde  $H_1$  es la hipótesis ( voltaje obtenido en el instante de muestreo) que este caso es obtener un voltaje por encima del umbral

de forma similar

$$P_{e0} = P(e|V_1) = P(H_0|V_1) = \int_{\gamma_u}^{\infty} p(v|V_1) dz \quad (2.23)$$

de tal forma que para la probabilidad de error total  $P_e$ , es la suma de las probabilidades de todas las formas que pueda ocurrir un error. Para el caso que se esta analizando (caso binario) la probabilidad de error:

$$P_e = P_{e1} P_1 + P_{e0} P_0 \quad (2.24)$$

Para el caso de que las probabilidades de transmitir un cero ó un uno sean iguales

$$P_e = \frac{1}{2} P_{e1} + \frac{1}{2} P_{e0} \quad (2.25)$$

Por simetría de las funciones densidad de probabilidad

$$P_e = P_{e1} = P_{e2} \quad (2.26)$$

la probabilidad de error de bit  $P_e$ :

$$Pe = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{V_1 - V_0}{2\sigma\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\Delta V}{2\sigma\sqrt{2}} \right) \quad (2.27)$$

La ecuación obtenida es válida para señales unipolares (el “0” y el “1” son representados por nivel de 0 voltios y un nivel de voltaje de determinada polaridad) y bipolares (el “0” y el “1” son representados por voltajes de diferente polaridad)

Para una señalización de no retorno a cero (NRZ por sus siglas en inglés), unipolar la potencia pico normalizada es:

$$S_p = (V_0 - V_1)^2 = \Delta V^2 \quad (2.28)$$

la potencia promedio de la señal es  $\Delta S = \Delta V^2 / 2$ . La potencia del ruido gaussiano normalizada  $N = \sigma^2$ . La razón señal a ruido S/N es:

$$\frac{S}{N} = \frac{\Delta V^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{S}{N} \right)_{pico} \quad (2.29)$$

De la relación anterior:

$$\frac{\Delta V}{2\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{S}{N} \right)_{pico}^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{S}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.30)$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación de  $P_e$  se tiene:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{S}{N} \right)_{\text{pico}}^{\frac{1}{2}} \right) \quad (2.31)$$

en función de S/N promedio:

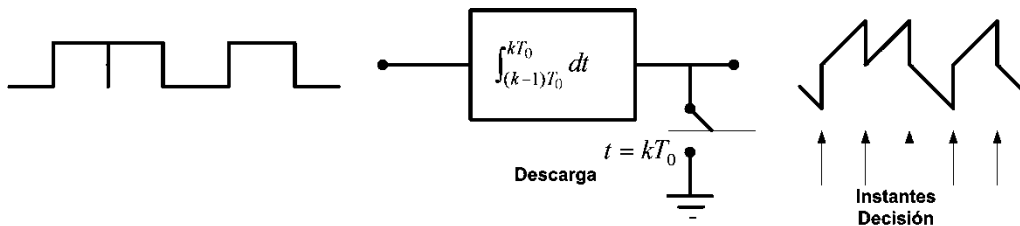
$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{S}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (2.32)$$

### 2.6.1 Recepción óptima

Las expresiones obtenidas en la sección anterior para calcular la probabilidad de error de bit  $P_B$  fueron derivadas considerando a los símbolos de bandabase como señales rectangulares con la misma probabilidad y utilizando un proceso de decisión de punto central para la detección y estos símbolos eran afectados por ruido blanco gaussiano aditivo. Sin embargo analizando este tipo de detección en detalle, podremos inferir que si se toman varias muestras de la señal recibida (que va afectada por el ruido gaussiano) durante un periodo de símbolo una mejor decisión y por lo tanto una menor probabilidad de error de bit  $P_B$  puede ser obtenida. Además tomando mayor número de muestras de la señal recibida se tendrá una mayor certeza en la decisión. Lo anterior se sería aún mejor si se suman las “n” muestras y se comparan contra un valor de umbral igual a “n” veces el valor del umbral para una sola muestra. Llevando lo anterior al límite (es decir tomando un número infinito de muestras ó  $n \rightarrow \infty$ ), la suma se aproxima a una integración de la señal recibida (señal transmitida más ruido). En base a lo anterior el umbral de integración es ahora:

$$\gamma_u = \frac{1}{2} \int_0^T v_o dt + \frac{1}{2} \int_0^T v_1 dt \quad (2.33)$$

en la ecuación anterior  $v_o$  y  $v_1$  son los voltajes que representan el “0” y el “1” binarios respectivamente. Al finalizar el periodo de símbolo, el integrador debe de reinicializarse con el fin de que comience en cero la integración del siguiente símbolo. A esta técnica se le llama detección por integración y descarga. En la figura 2.20 se ilustra el diagrama de esta técnica así como las formas de onda asociadas. Esta técnica representa una importante mejora en relación a la detección por muestreo en el centro del periodo de bit.



**Figura 2.20. Circuito de integración y descarga**

### 2.6.2 Filtro acoplado

Un filtro acoplado es un filtro antecede al circuito de decisión (en un sistema receptor de comunicaciones) y se dice que está acoplado a una forma de onda (pulso) determinado y maximiza la razón señal a ruido de salida en el instante de muestreo. Considerando la señal más ruido (gaussiano)  $s_i(t)+n(t)$  es la entrada a un filtro lineal invariante en el tiempo, y la salida de este va conectada a un elemento de muestreo, tal como se ve en la figura 2.21. En el instante de muestreo  $t=T$  la salida del muestreador  $z(T)$  consiste

en la componente de la señal  $s_i(t)$  más el componente de ruido  $n_0$ . La varianza del ruido de salida, es decir la potencia promedio del ruido es  $\sigma_0$ , por lo que la razón señal a ruido de salida en el preciso instante de muestreo  $(S/N)_T$  a la salida del muestreador viene dada por

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{s_i}{\sigma_0} \quad (2.34)$$

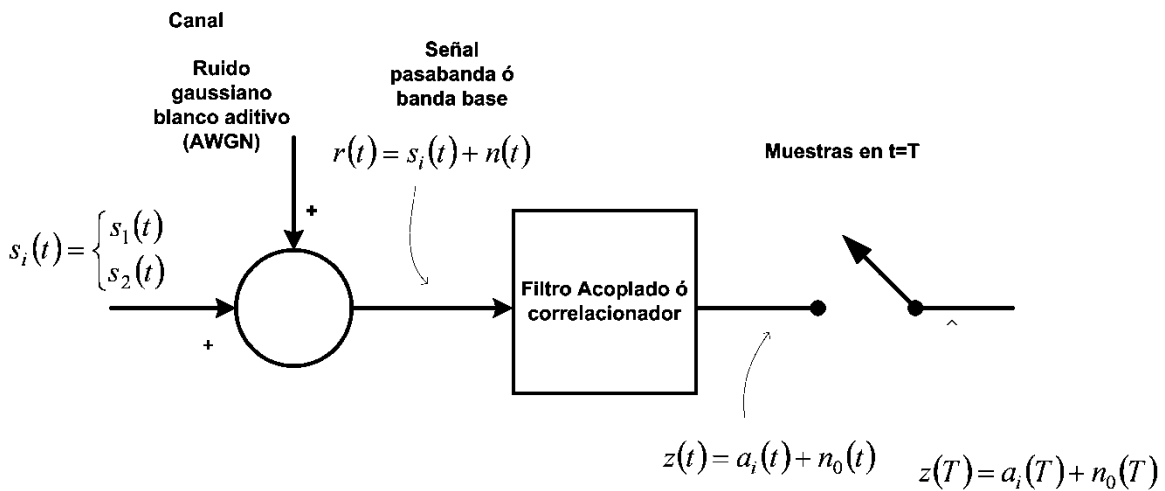


Figura 2.21

Para encontrar la función de transferencia  $H_0(f)$  que maximice  $(S/N)_T$  se expresará  $s_i(t)$  en términos de la función de transferencia del filtro  $H(f)$  y de la transformada de Fourier de la entrada  $S(f)$  :

$$s_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft} df \quad (2.35)$$



La densidad espectral de potencia (espectro de potencia) de doble lado del ruido de entrada es  $N_0/2$  [W/Hz]:

$$\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \quad (2.36)$$

para obtener  $(S/N)_T$  combinamos las dos ecuaciones anteriores

$$\left( \frac{S}{N} \right)_T = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \quad (2.37)$$

El problema es encontrar la función de transferencia del filtro  $H(f)$  que haga máxima la razón señal a ruido  $H_o(f)$  en el instante de muestreo  $t=T$ . Para determinar a  $H_o(f)$  se puede utilizar la desigualdad de Swarz:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\phi(x)dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx \quad (2.38)$$

La igualdad puede ser obtenida para el caso de que  $\psi(x)=k\phi^*(x)$  para cualquier valor de la constante  $k$ . El símbolo  $*$  indica el complejo conjugado. Usando la identidad anterior:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi fT} df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \quad (2.39)$$

Sustituyendo (2.39) en la ecuación 2.37 se obtiene el valor máximo:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{2E}{N_0} \quad (2.40)$$

en donde E es la energía de la señal de entrada s(t):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \quad (2.41)$$

La ecuación 2.40 corresponde al valor máximo obtenible de la razón señal a ruido en el instante de muestreo  $t=T$  de acuerdo a la desigualdad de Swarz.

La igualdad de la ecuación 2.40 es cierta si es utilizada la función de transferencia del filtro óptimo dada por:

$$H_o(f) = kS^*(f)e^{-j2\pi fT} \quad (2.42)$$

La transformada de Fourier inversa de 2.42 :

$$h(t) = ks(T - t) \quad (2.43)$$

Para que 2.43 sea realizable, el filtro especificado por esta ecuación debe ser causal, por lo tanto:

$$h(t) = \begin{cases} ks(T - t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{cualquier otro valor} \end{cases} \quad (2.44)$$

### **Filtro acoplado y la operación de la correlación.**

La ecuación (2.44) nos indica que la respuesta al impulso de un filtro acoplado es la versión invertida en el tiempo del pulso al cual el filtro acoplado está “acoplado”, atrasada un tiempo igual a la duración del impulso. La salida del filtro acoplado, debido a su linealidad puede expresarse como la convolución de la señal de entrada y la respuesta al impulso del filtro:

$$z(t) = r(t) * h(t) = \int_0^t r(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2.45)$$

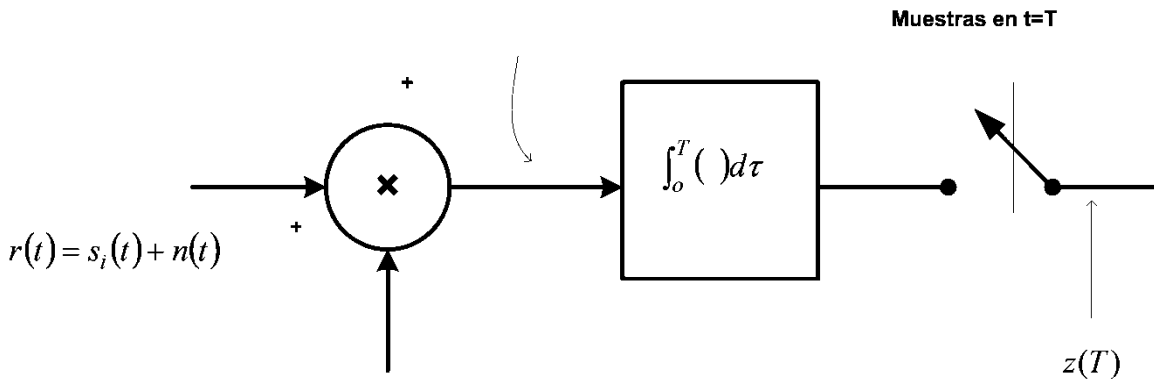
En donde  $r(t)$  es la señal recibida más ruido, y sustituyendo 2.44 en la ecuación 2.45:

$$z(t) = \int_0^t r(\tau)s(T - t + \tau)d\tau \quad (2.46)$$

En el instante de muestro, la ecuación 2.46:

$$z(T) = \int_0^T r(\tau)s(\tau)d\tau \quad (2.47)$$

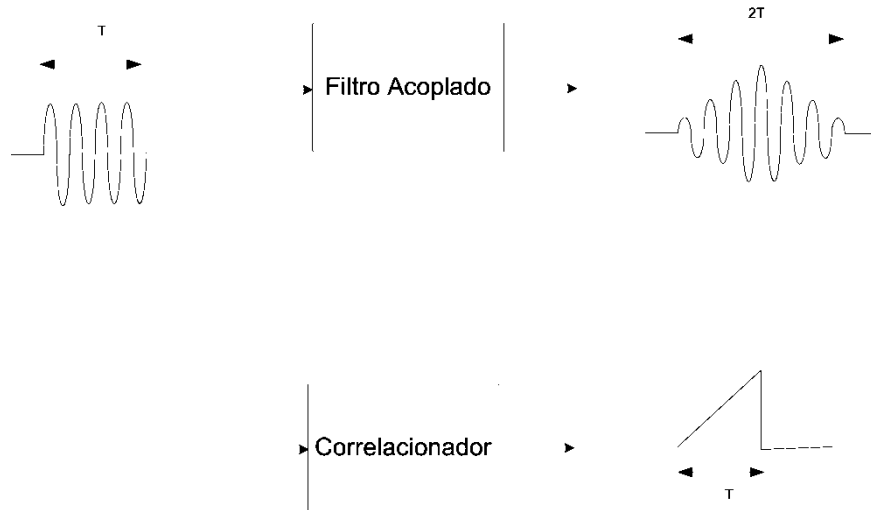
Del desarrollo anterior, puede verse que la operación del filtro acoplado es equivalente a la integración de  $r(t)$  y  $s(t)$ . La ecuación 2.47 es conocida como la función de correlación de  $r(t)$  y  $s(t)$ . Al dispositivo que realiza la operación descrita por 2.47 es llamado correlacionador o integrador de producto (figura 2.22). El filtro acoplado y el correlacionador dando la misma salida solo en el instante  $t=T$ .



**Figura 2.22 Correlacionador de un receptor digital.**

Aunque los filtros acoplados y los detectores de correlación dan idénticas salidas en los instantes de decisión, por lo que su desempeño en términos de probabilidad de error de bit es el mismo, sus salidas no necesariamente son idénticas. Esto es debido a que en el correlacionador (figura 2.22) el pulso recibido y el pulso de referencia están alineados en tiempo durante el lapso que dura el pulso mientras que en el caso del filtro óptimo, el

pulso recibido es “movido” a través de la señal de referencia dando la función de autocorrelación (figura 2.23)



**Figura 2.23 Salidas del filtro acoplado y correlacionador para un pulso de radiofrecuencia rectangular.**

## 2.7 Probabilidad de error de bit de receptores basados en filtros óptimos de señales binarias en ruido.

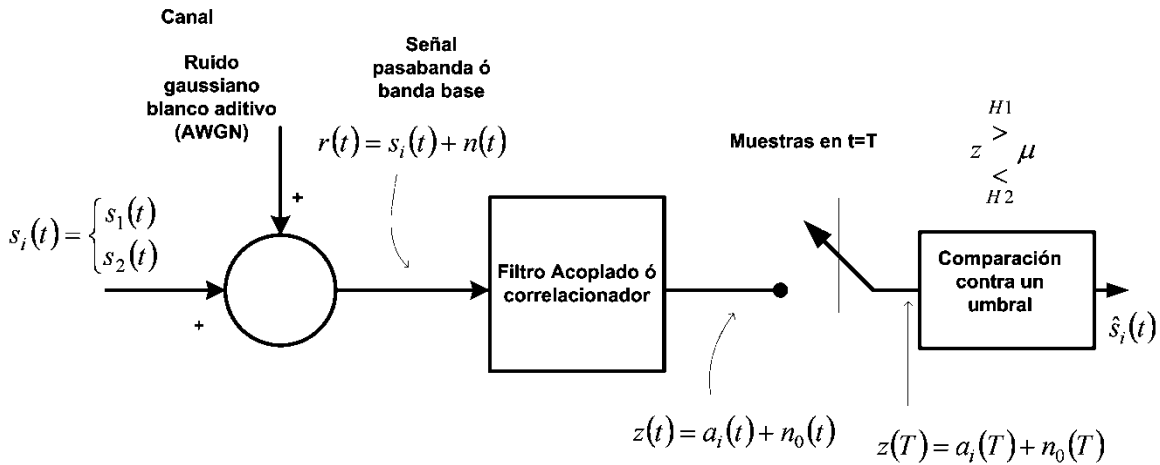
Suponiendo que los símbolos digitales enviados por el canal durante un intervalo de señalización  $T$  para un sistema binario puede transmitir una de las dos formas de onda ( $s_1(t)$  o  $s_2(t)$ ):

$$S_i(t) = \begin{cases} S_1(t) & 0 \leq t \leq T \text{ para un dígito "1" (binario)} \\ S_2(t) & 0 \leq t \leq T \text{ para un dígito "0" (binario)} \end{cases}$$

La señal en el receptor  $r(t)$  se compone de la señal enviada más ruido del canal

$$r(t) = s_i(t) + n_0(t) \quad (2.48)$$

Para  $i=1,2; 0 \leq t \leq T$ , donde  $n(t)$  es un proceso de ruido gaussiano.



**Figura 2.24. Proceso básico de la detección digital**

La salida del primer bloque muestreado en  $t=T$ , se tiene:

$$z(t) = a_i(t) + n_0(t) \quad (2.49)$$

La cual se compone de la salida del filtro debido a la señal de entrada  $a_i(t)$  y  $n_0(t)$  es la componente debido al ruido de entrada. Suponiendo que la componente debido al ruido sigue una estadística gaussiana, su función densidad de probabilidad es

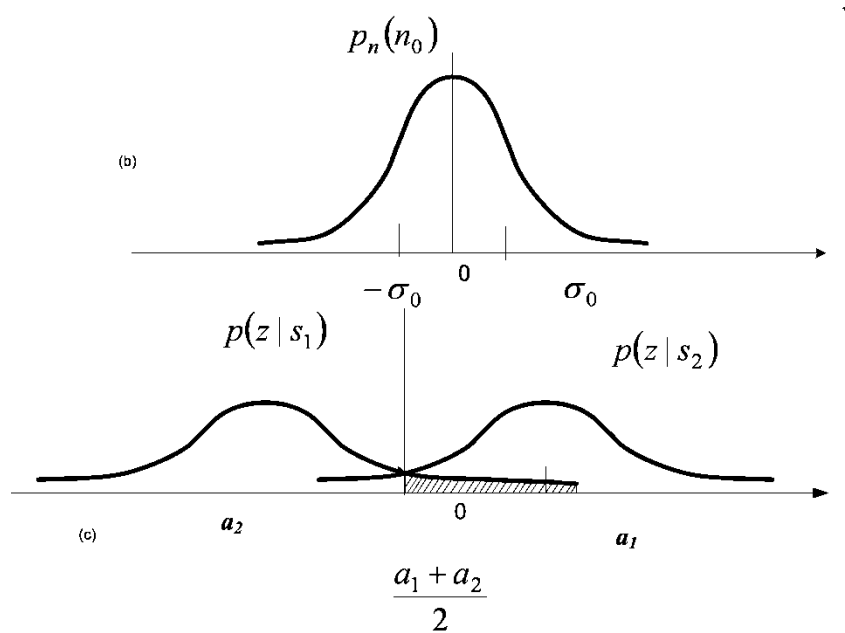
$$p(n_0) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{n_0}{\sigma_0} \right)^2 \right] \quad (2.50)$$

La varianza del ruido es  $\sigma_0^2$ . Las funciones densidad de probabilidad condicionales  $p(z/s_1)$  y  $p(z/s_2)$ :

$$p\left(\frac{z}{s_1}\right) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_1}{\sigma_0}\right)^2\right] \quad (2.51)$$

$$p\left(\frac{z}{s_2}\right) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_2}{\sigma_0}\right)^2\right] \quad (2.52)$$

$p(z/s_1)$  determina la probabilidad de la salida del detector  $z(T)$ , dado que  $s_1$  se transmitió y  $p(z/s_2)$  es la probabilidad de la salida dada que  $s_2$  ha sido enviado



**Figura 2.25 Funciones densidad de probabilidad condicionales**

Una vez recibida  $r(t)$ , esta es transformada en  $z(T)$ , el valor en el instante T y deja de importar la forma de onda. Lo importante es la energía de la señal. Definiendo a  $H_1$  y

$H_2$  como las dos probables hipótesis, es decir salidas binarias posibles, esto es se selecciona  $H_1$  si se envió  $s_1(t)$  y  $H_2$  para  $s_2$ . El umbral del receptor que minimiza el error es

$$\gamma_0 = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (2.53)$$

y

$$z(T) \begin{matrix} H1 \\ > \\ < \\ H2 \end{matrix} \gamma_0 \quad (2.54)$$

En donde  $a_1$  es la componente de la señal de  $z(T)$  considerando que se envió  $s_1(t)$ . y  $a_2$  es la componente de la señal de  $z(T)$  dado que  $s_2(t)$  ha sido transmitida. El valor  $\gamma_0$  es el umbral óptimo que minimiza la probabilidad de realizar una decisión incorrecta. Un error en la detección ocurrirá cuando el detector selecciona a  $H_1$  dado que se envió a  $s_1(t)$  y viceversa. El detector seleccionará la señal con máxima verosimilitud, es decir la señal con la máxima función densidad de probabilidad es seleccionada. El detector seleccionará a  $s_1(t)$  si se cumple  $p(z | s_1) > p(z | s_2)$  de otra forma selecciona a  $s_2(t)$ , detector que minimiza la probabilidad de error. Se envía  $s_1(t)$ , pero el ruido del canal resulta en una señal  $z(T)$  menor que  $\gamma_0$  la probabilidad de tal ocurrencia:

$$P\left(\frac{e}{s_1}\right) = P\left(\frac{H_2}{s_1}\right) = \int_{-\infty}^{\gamma_0} P\left(\frac{Z}{s_1}\right) dz \quad (2.55)$$

El error corresponde a el área de la f.d.p.  $p(z|s_2)$  ubicada a la izquierda de  $\gamma_0$  de acuerdo a la gráfica 2.25.

De forma similar:

$$P\left(\frac{e}{s_2}\right) = P\left(\frac{H_2}{s_1}\right) = \int_{-\infty}^{\gamma_0} P\left(\frac{Z}{s_1}\right) dz \quad (2.56)$$

La probabilidad de un error es la suma de las probabilidades de todas las formas en que puede ocurrir un error. La probabilidad de error de bit,  $P_B$  para el caso binario.

$$P_B = \sum_{i=1}^2 P\left(e | s_i\right) P\left(s_i\right) = P\left(e | s_1\right) P\left(s_1\right) + P\left(e | s_2\right) P\left(s_2\right) \quad (2.57)$$

Considerando igual probabilidad de transmisión para ambos símbolo y de acuerdo a uno de los axiomas de la probabilidad:

$$P\left(s_1\right) = P\left(s_2\right) = \frac{1}{2} \quad (2.58)$$

Por simetría de las funciones densidad de probabilidad:

$$P\left(H_2 | s_1\right) = P\left(H_1 | s_2\right) \quad (2.59)$$

La probabilidad de error de bit, de acuerdo a la teoría de la probabilidad es la integral bajo la curva de  $p(z|s_1)$  ó  $p(z|s_2)$  de la porción de la función densidad de probabilidad que aparece en el lado opuesto del umbral. En la figura 2.25 el área sombreada es la probabilidad de error dado que  $s_2$  ha sido enviado ( $p(z|s_2)$ ). Con las anteriores consideraciones, la probabilidad de error de bit:



$$P_B = \int_{\gamma_0 = \left(\frac{a_0 + a_1}{2}\right)}^{\infty} P\left(\frac{Z}{S_2}\right) dz \quad (2.60)$$

Remplazado la máxima similitud de  $p(z/s_2)$  con su equivalente gaussiano.

$$P_B = \int_{\gamma_0}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{Z - a^2}{\sigma^0}\right)^2\right] dz \quad (2.61)$$

$\sigma_0^2$  = varianza del ruido a la salida del correlacionador. Reemplazando  $u=(z-a_2)/\gamma_0$  y  $\sigma_0 du=dz$  en la ecuación anterior

$$P_B = \int_{u=(a_1-a_2)/2\sigma_0}^{u=\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}\right) \quad (2.62)$$

En donde  $Q(x)$  es la función de error complementario definida como:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \quad (2.63)$$

$Q(x)$  se evalúa generalmente en forma numérica, pero puede aproximarse para valores de  $x > 3$  por la siguiente expresión:

$$Q(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (2.64)$$

## **2.8 Técnicas de reducción de ancho de banda**

El ancho de banda es un recurso limitado y por tanto valioso. Lo anterior es debido a que las líneas de transmisión tienen características que las hacen adecuada sólo para una banda de frecuencias finita. En el caso del espectro de radio, es aún más crítico. Las líneas de transmisión tales como el par trenzado, cable coaxial fibra óptica, etc., representan un recurso espectral infinito, y la necesidad de agregar más recursos físicos en caso de requerir una mayor capacidad (mayor ancho de banda), por lo que se consigue un gran ahorro si se la instalación en forma eficiente. Lo anterior es la motivación para el desarrollo de técnicas de codificación de señales de voz espectralmente eficientes.

### **2.81 Delta PCM**

Esta técnica reduce el ancho de banda señales PCM al transmitir información sobre los cambios entre muestras en lugar de enviar los valores de las muestras. La diferencia entre muestras adyacentes es en general, mucho menor que el valor de la muestra, lo que da como resultado que la diferencia entre muestras codificada use menor bits por palabra que PCM convencional y el requerimiento de un menor ancho de banda (figura 2.28). El transmisor delta PCM realiza una diferencia entre muestras consecutivas y posteriormente utiliza un codificador PCM para codificar el resultado de la diferencia. El demodulador se compone de un decodificador PCM y posteriormente se suman las palabras adyacentes.

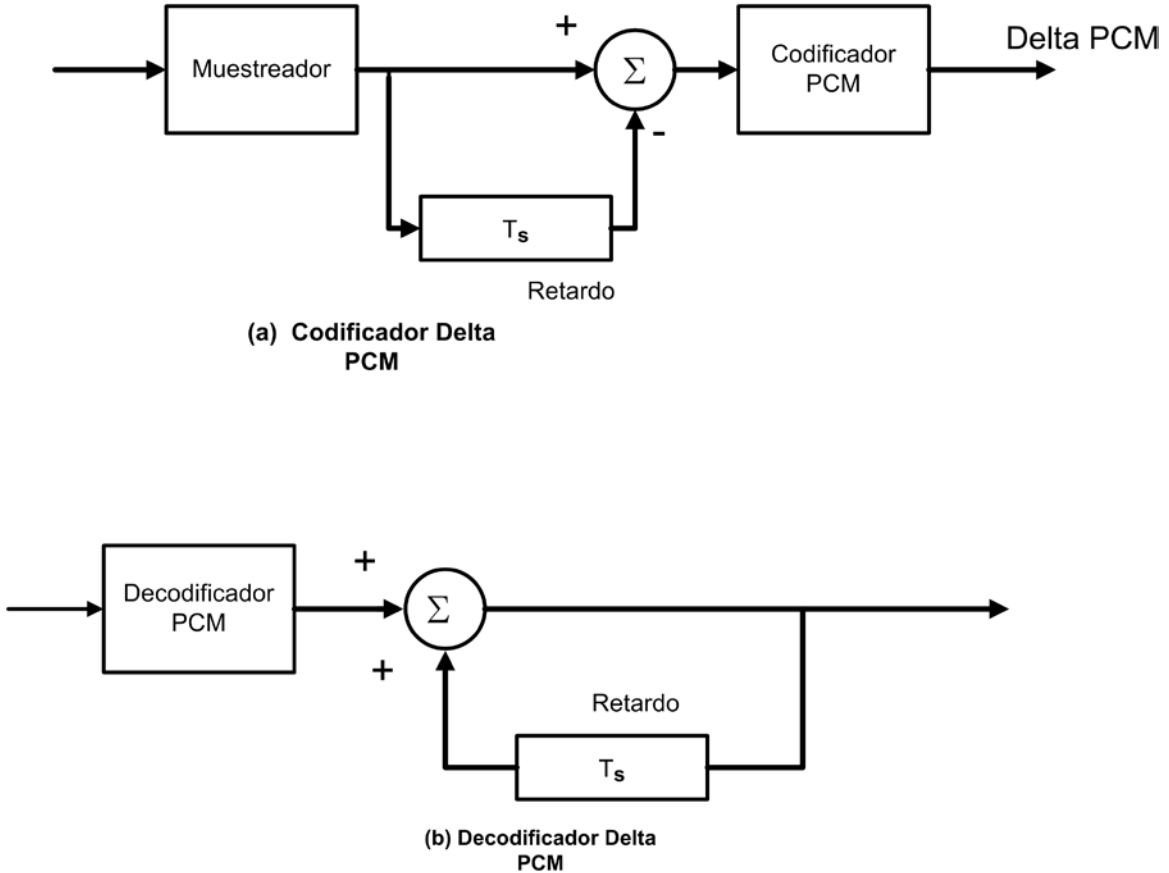


Figura 2.28. Codificador delta PCM (a); decodificador (b)

### 2.82 PCM diferencial

La correlación entre muestras contiguas de las señales de información se originan de fuentes naturales como la voz ó video, puede ser aprovechada para el uso en técnicas de reducción del ancho de banda. Una alternativa forma de expresar este fenómeno es decir que las señales contienen información redundante, es decir, hay información similar entre muestras adyacentes. Una consecuencia de la redundancia en una señal es que los valores futuros pueden ser predichos de valores pasados (dentro de ciertos límites). PCM diferencial (DPCM) usa algoritmos que predicen el valor futuro de la señal de información. Entonces el codificador espera hasta que el valor actual es disponible para su observación y subsecuentemente transmite una señal que

representa una corrección del valor predicho. La señal de corrección representa la información no predecible de la señal. DPCM reduce la redundancia de la señal permitiendo que la información contenida sea transmitida usando pocos símbolos, menos ancho de banda y más baja potencia de señal. La señal  $g(t)$  es la señal de información analógica y  $g(kT_s)$  es su versión muestreada.  $E(kT_s)$  es el error entre  $g(kT_s)$ , el valor actual y  $\hat{g}(kT_s)$  el valor predicho a partir de las muestras previas. El error cuantizado  $E_q(kT_s)$  es codificado para dar la señal DPCM la cual es transmitida.  $\check{g}(kT_s) = \hat{g}(kT_s) + E_q(kT_s)$  es un estimado de  $g(kT_s)$  y es el valor predicho corregido por la suma del error cuantizado. El transmisor y el receptor se muestran en la figura 2.29. La señal reconstruida en el receptor es el estimado  $\check{g}(t)$  de la señal original  $g(t)$ . El predictor en sistemas DPCM es a menudo un sumador ponderado linear de las muestras previas (filtro transversal) implementado utilizando registros de corrimiento

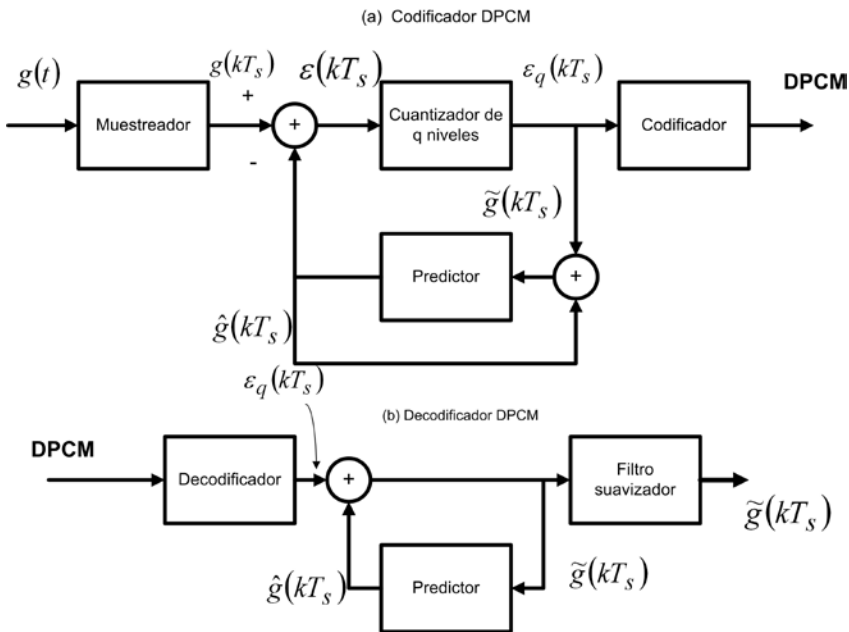


Figura 2.29. Transmisor y receptor DPCM

## **CAPITULO III**

# **MODULACIÓN DIGITAL BINARIA**

## **PASABANDA**

### III. MODULACIÓN DIGITAL BINARIA PASABANDA

#### 3.1 Modulación digital.

La modulación es el proceso en el cual los símbolos digitales son transformados en señales compatibles con el canal de comunicación. En el caso de modulación banda base, las señales o formas de onda transmitidos son pulsos. En el caso de modulación pasabanda la información modula una senoidal llamada *portadora (carrier)*.

Las principales razones para emplear modulaciones pasabanda es transformar las señales de información (normalmente generadas en banda base en señales pasabanda con características espectrales más convenientes tal que:

1. Las señales pasabanda generadas se acoplen mejor a las características de las líneas de transmisión ó canales.
2. Permitan que diferentes señales moduladas (pasabanda) puedan ser combinadas usando una multicanalización por división de frecuencia y por lo tanto puedan ser transmitidas por un solo medio físico de transmisión.
3. Permitan la construcción de antenas eficientes de un tamaño físico práctico cuando se trata de sistemas de radiocomunicación.
4. El espectro radioeléctrico sea asignado y compartido de forma que la interferencia entre sistemas se mantenga en niveles razonables.

### 3.2 Técnicas de Modulación Digital pasabanda

La modulación pasabanda, es el proceso por el cual la señal de información es convertida a señales senoidales. Es el proceso en el cual la amplitud, frecuencia o fase de una portadora de radiofrecuencia o una combinación de ellas cambia de acuerdo a la información de transmitida (señal moduladora). La senoide solo tiene tres características que pueden ser usadas para distinguirla de otra sinusoidal, amplitud, frecuencia y fase.

La modulación pasa banda puede ser definida como el proceso donde la amplitud, frecuencia o fase de la portadora de RF (Radiofrecuencia) o una combinación de ellas es variada en concordancia con la información ha transmitir. En el caso de la modulación digital. una senoide de duración de "T" segundos es llamada símbolo digital. La forma de la portadora  $s(t)$  transmitida es:

$$s(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \phi(t)] \quad (3.1)$$

y

$$\theta(t) = \omega_0 t + \phi(t) \quad (3.2)$$

- donde  $A(t)$  es la amplitud que varía de acuerdo al tiempo  $t$
- $\omega_0$  es la frecuencia de la onda portadora en radianes.
- $\phi(t)$  es el ángulo de fase función del tiempo.
- La frecuencia  $f$  en Hertz se relaciona con  $\omega$  por:  $\omega = 2\pi f$

Cuando el receptor utiliza el conocimiento de la fase de la portadora se dice que éste emplea detección coherente, y es un sistema de detección no coherente cuando no utiliza la información de la referencia de fase. En la tabla 3.1 se enumeran los diferentes tipos de modulación digital pasabanda. Cuando el receptor utiliza el conocimiento de la fase de la portadora para detectar las señales se dice que el proceso de detección es coherente; cuando no se utiliza esta la fase de referencia se le llama detección no-coherente.

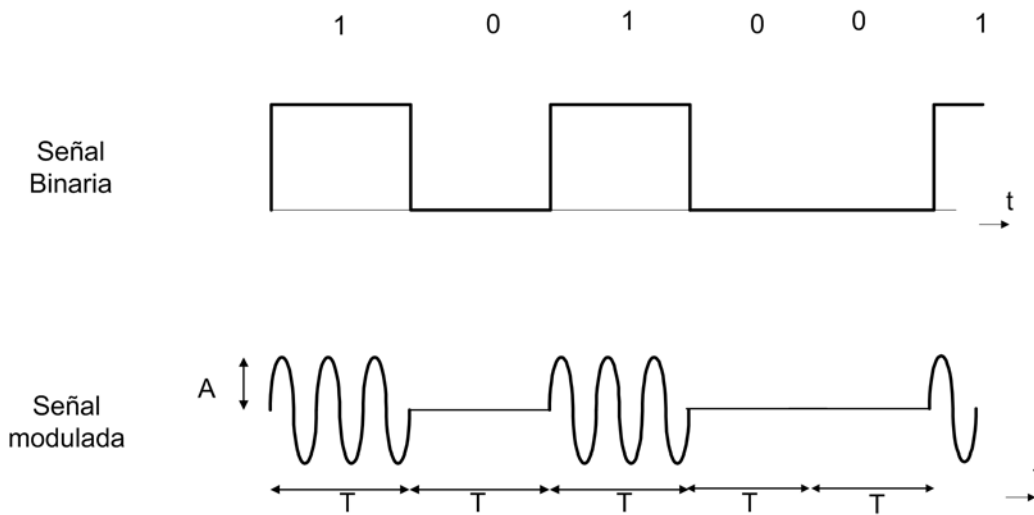
Tipo de Modulación	Detección coherente	Detección no-coherente
Modulación por conmutación de amplitud (ASK)	Si	Si
Modulación por conmutación de Frecuencia (FSK)	Si	Si
Modulación por conmutación de Fase (PSK)	Si	No
Modulación por conmutación de Fase diferencial (DPSK)	No	Si
Modulación de fase continua	Si	Si

**Tabla 3.1.**



### 3.2.1 Modulación por conmutación de Amplitud (Amplitude Shift Keying o ASK)

Cuando la característica de la portadora que cambia es la amplitud, se dice que la señal es presenta una modulación ASK. Si la información es binaria y el valor de la amplitud oscila entre cero (apagado) y algún nivel predeterminado de amplitud (estado de encendido), entonces a tal sistema se le denomina OOK (del inglés On – Off Keying o conmutación de apagado - encendido). La condición de encendido (on) podría corresponder a un código 1 y la apagado (off) a un código 0. ASK es una de primeras técnicas de modulación digital de banda base que se utilizó.



**Figura 3.1 Forma de onda de la señal binaria de entrada y señal OOK correspondiente**

Matemáticamente, ASK se puede describir por:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}} \cos(\omega_0 t + \phi) \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.3)$$

$$i = 1, \dots, M$$

en el cual T es el periodo de símbolo (ó periodo de bit en el caso binario) y  $E_i(t)$  es la energía de la señal en un intervalo T. . En ASK binaria  $M=2$  y el término de amplitud  $\sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}}$  puede tomar dos valores discretos.

El coeficiente de la amplitud se relaciona con la potencia y la energía de acuerdo a lo siguiente:

$$s(t) = A \cos(\omega_c t) \quad (3.4)$$

donde A es el valor pico.

Expresando la ecuación anterior en términos del valor eficaz (rms) de A:

$$s(t) = \sqrt{2} A_{rms} \cos(\omega_c t) = \sqrt{2 A_{rms}^2} \cos(\omega_c t) \quad (3.5)$$

en comunicaciones  $R=1$  ohm por lo tanto la potencia promedio se relaciona con el valor eficaz (r.m.s.) por

$$P = A_{rms}^2 \quad (3.6)$$

la señal  $\mathbf{s(t)}$  en términos de la potencia promedio

$$s(t) = \sqrt{2P} \cos(\omega_c t) \quad (3.7)$$

la potencia se relaciona con la energía por:

$$P = \frac{E}{T} \left[ \frac{\text{joules}}{\text{segundos}} \right] \quad (3.8)$$

sustituyendo (3.7) en (3.8)

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_c t) \quad (3.9)$$

### 3.2.1.1 Diagrama a bloques del sistema

En las siguientes figuras (3.2 y 3.3) se ilustran los diagramas de bloques de un sistema que emplea modulación ASK para los casos de detección no-coherente y detección coherente respectivamente. En el caso del receptor ASK con detección no-coherente (3.2) la señal de entrada se maximiza en un filtro acoplado y posteriormente pasa a un detector de envolvente. La salida del detector es filtrada para eliminar las componentes de alta frecuencia para su posterior procesamiento por parte del elemento de muestreo y a un elemento de decisión.

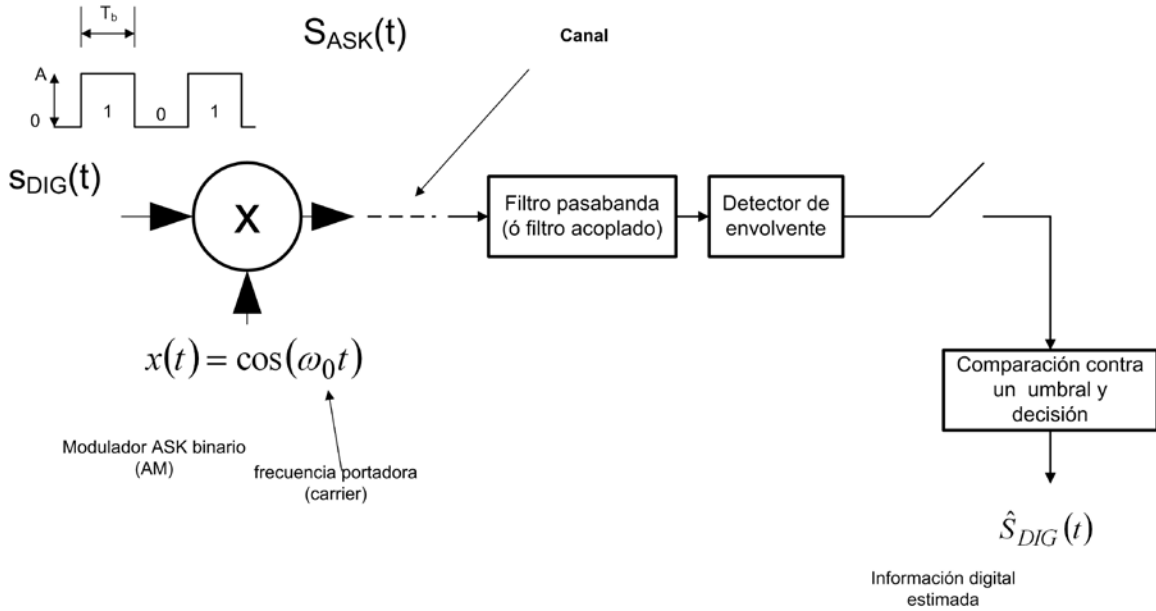


Figura 3.2. Diagrama a bloques de un sistema de comunicaciones digitales ASK con detección coherente

En el caso del receptor coherente, llega la señal ASK,  $(S_{ASK}(t))$  más ruido y entra aun filtro acoplado. La magnitud de su componente de salida debida a la señal será lo mayor posible en el instante de muestreo. En el caso de recepción coherente, un filtro pasabajos y un detector de producto forman el detector síncrono. El filtro deberá tener un ancho de banda mayor que  $2\pi/T_b$  y deberá ser pequeño con respecto a  $\omega_c$ . A la salida del filtro pasabajos se toma una muestra de la señal y esta se compara contra un nivel de voltaje (umbral). Si la muestra es mayor que el umbral, se asume que un código "1" ha sido enviado. Si es mas pequeña, un código "0" se asume que ha sido enviado. La operación final es la reconstrucción del mensaje original  $S_{DIG}(t)$  la cual es igual a

$S_{DIG}(t)$  mas los errores debido al ruido. Hay otras configuraciones del receptor que también pueden ser utilizadas.

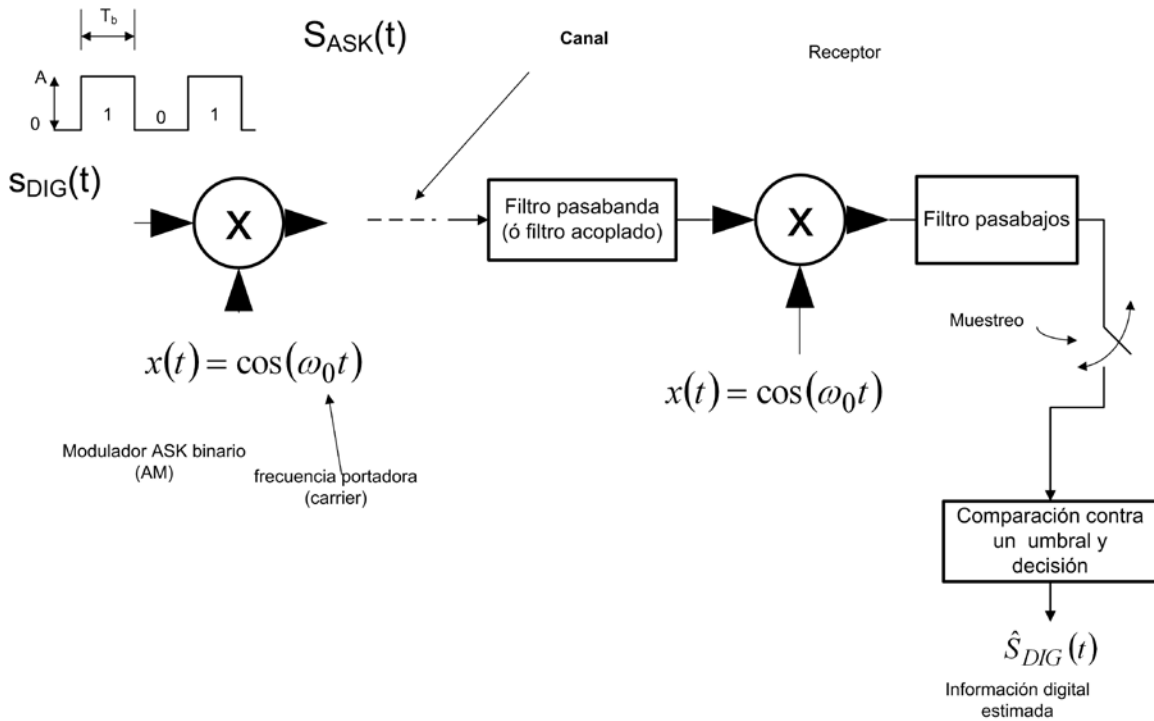


Figura3.2. Diagrama a bloques de un sistema de comunicaciones digitales ASK con detección coherente

Una gran desventaja de utilizar receptor coherente es la necesidad de generar localmente la portadora. El receptor no-coherente no requiere de la generación local de la portadora y puede ser implementado reemplazando el detector de producto de la figura 3.2 por un detector de envolvente. El receptor coherente tiene como ventaja su simplicidad. Sin embargo el receptor coherente tiene aproximadamente 1 dB de

diferencia sobre el no coherente para condiciones de potencia de la señal y de ruido similares (sensitividad).

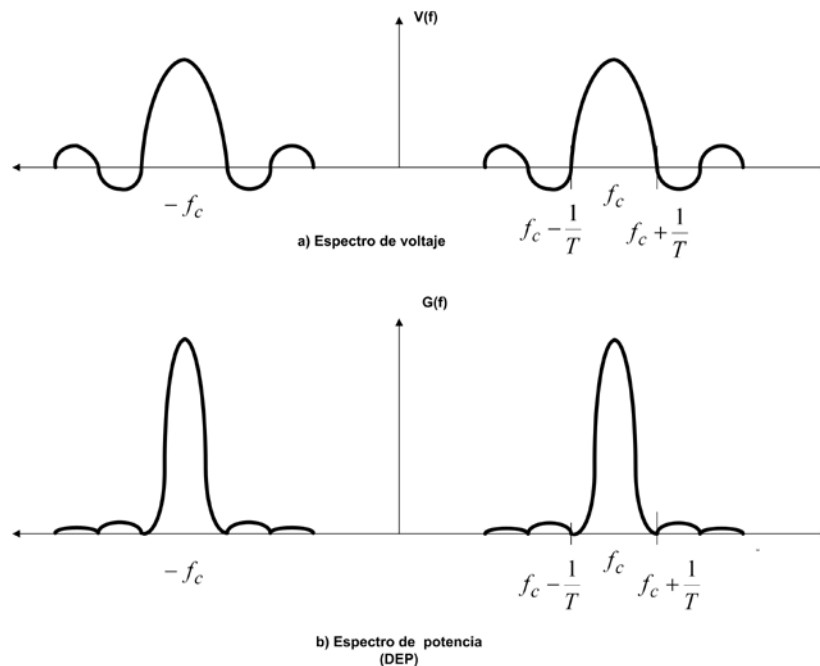
La necesidad de generar una señal portadora local es la principal desventaja del sistema coherente.

### ESPECTRO DE SEÑALES ASK

Considerando el caso de especial de ASK en el que la señal moduladora el dígito “1” es un pulso de amplitud “A” y el dígito “0” es cero volts, el espectro tiene la forma:

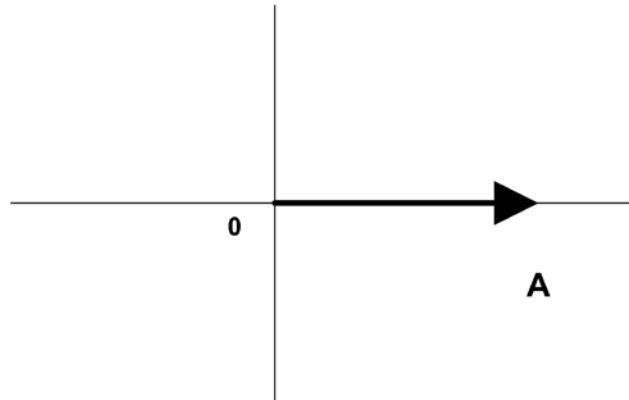
$$G_s(f) = \frac{A^2 T^2}{4} \left\{ \left[ \frac{\text{sen}\left(2\pi\left[f - f_c\right]\frac{T}{2}\right)}{\left(f - f_c\right)\frac{T}{2}} \right]^2 + \left[ \frac{\text{sen}\left(2\pi\left[f + f_c\right]\frac{T}{2}\right)}{\left(f + f_c\right)\frac{T}{2}} \right]^2 \right\} \quad 3.10)$$

A grosso modo, el espectro de ASK es el espectro del tren de pulsos pero centrado a la frecuencia de la portadora  $f_c$ . El espectro de frecuencias (envolvente) del voltaje y el de potencia (densidad espectral de potencias) se muestra en la figura 3.3



**Figura 3.3. Espectros de ASK**

En el caso de OOK, la portadora es conmutada entre dos estados, este tipo de modulación tiene un diagrama fasorial de dos estados; 0 y A. (Figura 3.4)



**Figura 3.4. Diagrama fasorial de ASK (OOK)**

De la figura 3.3 se puede observar que el ancho de banda entre nulos para ASK es de  $2R=2/T$ . La probabilidad de error de bit para ASK detectado en forma no coherente es

$$P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{A^2 T}{16N_0}\right) \quad (3.11)$$

La correspondiente probabilidad de error para ASK detectado coherentemente es:

$$P_e = Q\left(\frac{A^2 T}{4N_0}\right) = Q\left(\frac{E_b}{2N_0}\right) \quad (3.12)$$

En donde:

$$Q(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \quad (3.13)$$

A es la amplitud de la señal recibida, T es el periodo de bit,  $N_0$  es la altura de la densidad espectral de potencia de ruido  $Q$  y  $\operatorname{erfc}$  son dos definiciones de la función de error complementaria.

### 3.2.2 Modulación por desplazamiento de frecuencia, FSK

En la técnica de modulación FSK binario, la información se envía en por cambio de frecuencia de la señal portadora, es decir, si se envía un dígito binario "1" se transmite una señal de frecuencia determinada ( $f_1$ , por darle un nombre ) y si se transmite un dígito cero "0" una frecuencia  $f_2$ .

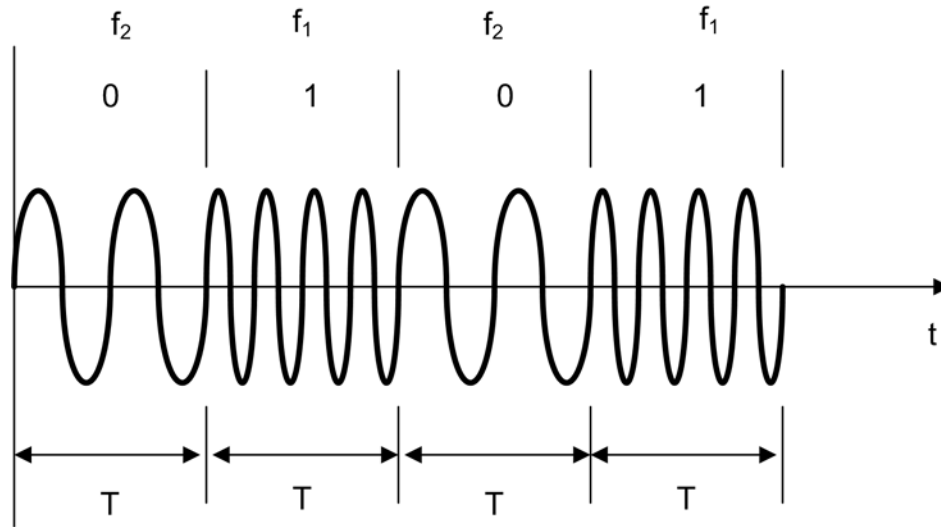
La expresión general para describir tal modulación es:

$$S_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t + \phi) \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.14)$$

$$i = 1, \dots, M$$

en donde  $\omega_i$  tiene M valores discretos. Para el caso binario  $M=2$ . En la expresión anterior, término de fase,  $\phi$  es una constante arbitraria. La forma de onda se muestra en la figura 3.5, en donde puede observar que la amplitud no cambia pero cada valor de binario posible le corresponde un cambio de frecuencia. Para el caso binario, la duración de una senoide ó duración de símbolo es igual a la duración de un bit



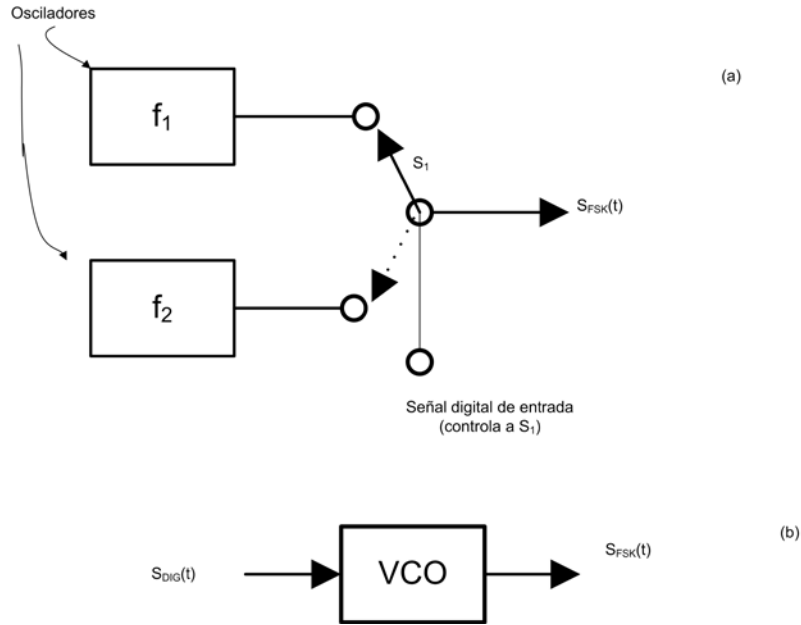


**Figura 3.5. Forma de onda FSK**

Cada frecuencia empleada es ortogonal (es decir, no se interfieren).

### 3.2.2.1 Modulador FSK

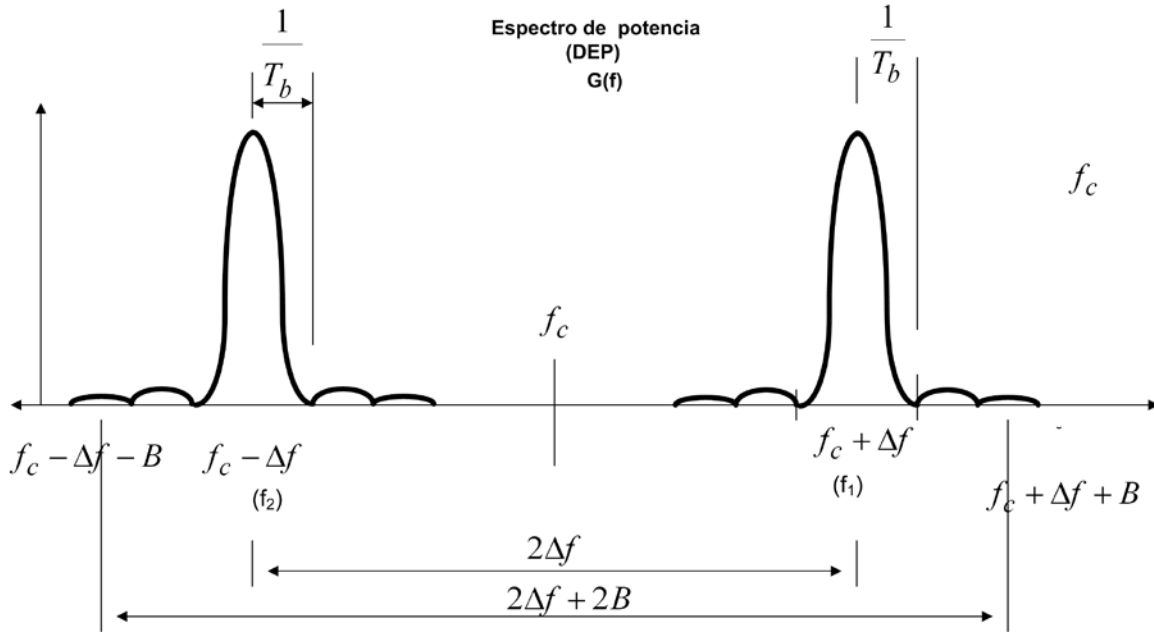
Las señales FSK pueden ser obtenidas por el modulador mostrado en la figura 3.6 (a), el cual consiste en dos osciladores que generan tonos ó señales de frecuencias constantes de  $f_1$  y  $f_2$  respectivamente. Dependiendo del valor del dígito binario entrante, el conmutador (switch) seleccionará a la frecuencia  $f_1$  ó  $f_2$ . Este esquema sirve para ilustrar el concepto, pero una forma más práctica es la de usar un oscilador controlado por voltaje (VCO, de sus siglas en inglés) el cual es un circuito electrónico en el que la salida cambia de frecuencia de acuerdo al voltaje de entrada.



**Figura 3.6. Modulador FSK binario (a) esquema básico; (b) utilizando VCO**

### 3.2.2.2. Espectro de frecuencia de señales FSK.

Una forma aproximada de obtener el espectro de FSK es la de suponer una señal con modulación FSK se forma de la superposición de dos señales ASK (OOK para ser exactos). De lo anterior podemos visualizar el espectro de FSK formado por los espectros de dos señales ASK centrados a  $f_1$  y a  $f_2$ . FSK es la versión de FM, y al igual que esta modulación demanda mayor ancho de banda (pasabanda) que una señal ASK para una misma tasa de bit ( $R_b$ ). FSK fue utilizado en forma extensiva en el periodo de 1970 hasta a mediados de la década correspondiente a 1980 en los módem telefónicos, hasta el advenimiento de esquemas de modulación más eficientes en el empleo del ancho de banda del canal. La principal ventaja de FSK es el uso de señales ortogonales.



**Figura 3.7. Espectro FSK (Sólo parte positiva)**

Otra forma de ver lo anterior es considerando a  $f_1 = f_c - \Delta f$  y a  $f_2 = f_c + \Delta f$  donde  $f_c$  es la frecuencia central sobre la cual se desvían  $f_1$  y  $f_2$  una cantidad  $\Delta f$ . El ancho de banda de FSK es  $2\Delta f + 2B$ , donde  $B$  es el ancho de banda base necesario. El espectro está dibujado para el caso particular de que el periodo de símbolo ó de señalización ( $T$ ) sea igual a la duración de bit ( $T_b$ ). Como ejemplo, si consideramos que  $B = 1/T$  el ancho de banda requerido será  $2\Delta f + 2/T$ . Como puede observarse el ancho de banda puede ser reducido si  $\Delta f$ , es decir la distancia entre los máximos los centros de las “funciones sinc”, es reducido. La pregunta de que tan pequeño puede ser depende del tipo de detección utilizado (no coherente ó coherente)

### 3.2.2.3 Detección no coherente de FSK

Una de las posibles configuraciones para implementar un sistema de detección no coherente FSK es el que consiste en el uso de filtros pasabanda centrados a

frecuencias  $f_i$  (ó  $\omega_i$ ) con anchos de banda  $1/T$  seguidos con un detector de envolvente. En el caso binario  $i=1, 2$ . Como se recordará el detector de envolvente consiste en un rectificador seguido de un filtro pasabajos. La decisión de cuando un “1” ó un “0” ha sido transmitido es hecha en función de cual de las señales de salida de los detectores envolvente tiene mayor amplitud en el momento de la recepción.

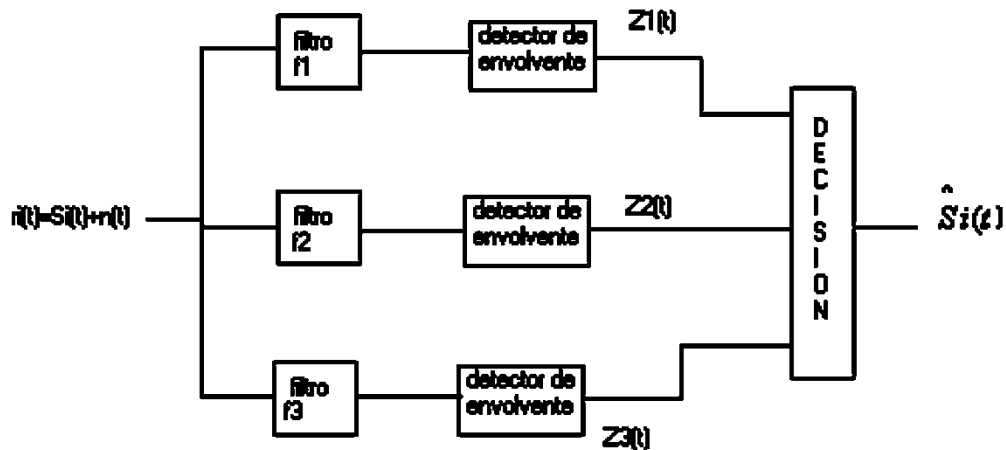
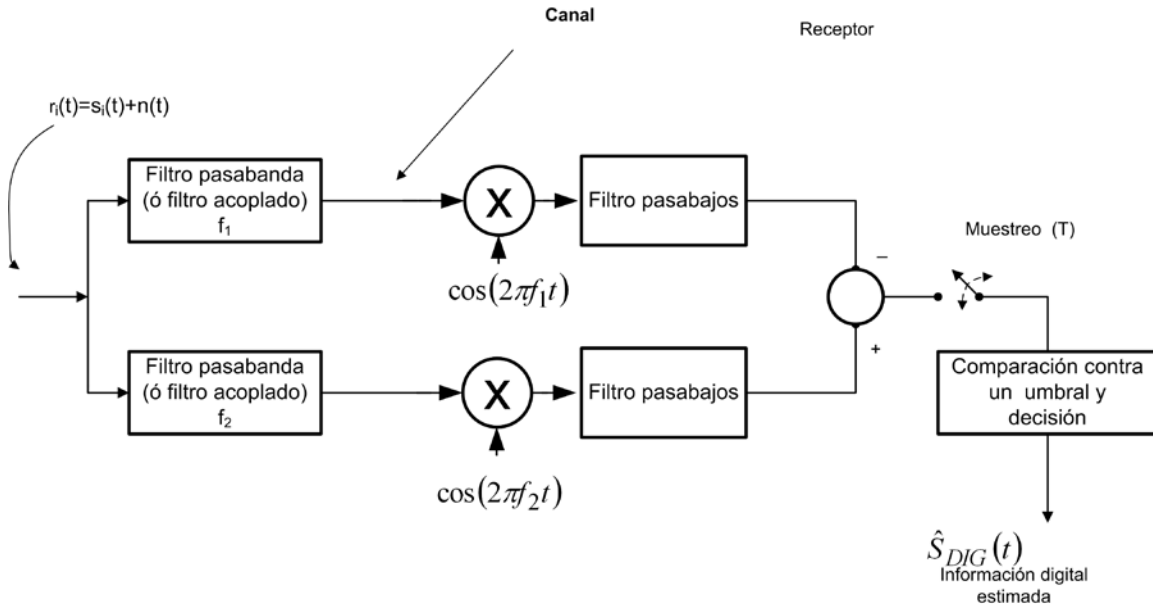


Figura3.8. Detección no coherente MFSK usando detectores de envolvente. En el caso de FSK binario  $M=2$  y sólo se requieren dos filtros.

### 3.2.2.4 Detección coherente de FSK

Existen diversas estructuras para la detección coherente de señales FSK. En la figura 3.9 se muestra el esquema de uno de ellos.



**Figura 3.9. Detección coherente FSK**

Como el caso de ASK coherente, el receptor requiere de multiplicar la señal que llega, previamente limitada en banda por la frecuencia por filtros pasabanda, por una señal a frecuencia de la portadora generada localmente por un oscilador. A diferencia de ASK, el detector FSK requiere la recuperación de dos portadoras ( $f_1$  y  $f_2$ ).

### 3.2.2.5 Relación entre el ancho de banda y el espaciamiento entre tonos

En líneas anteriores se mostró que el ancho de banda de FSK podía ser reducido si en espaciamiento entre las dos frecuencias fuera lo más reducido posible sin que lleguen a la condición de interferencia (pérdida de ortogonalidad). Un tono  $f_i$  que es conmutada cada periodo de símbolo con duración de  $T$  segundos y posteriormente apagado es descrito matemáticamente por:

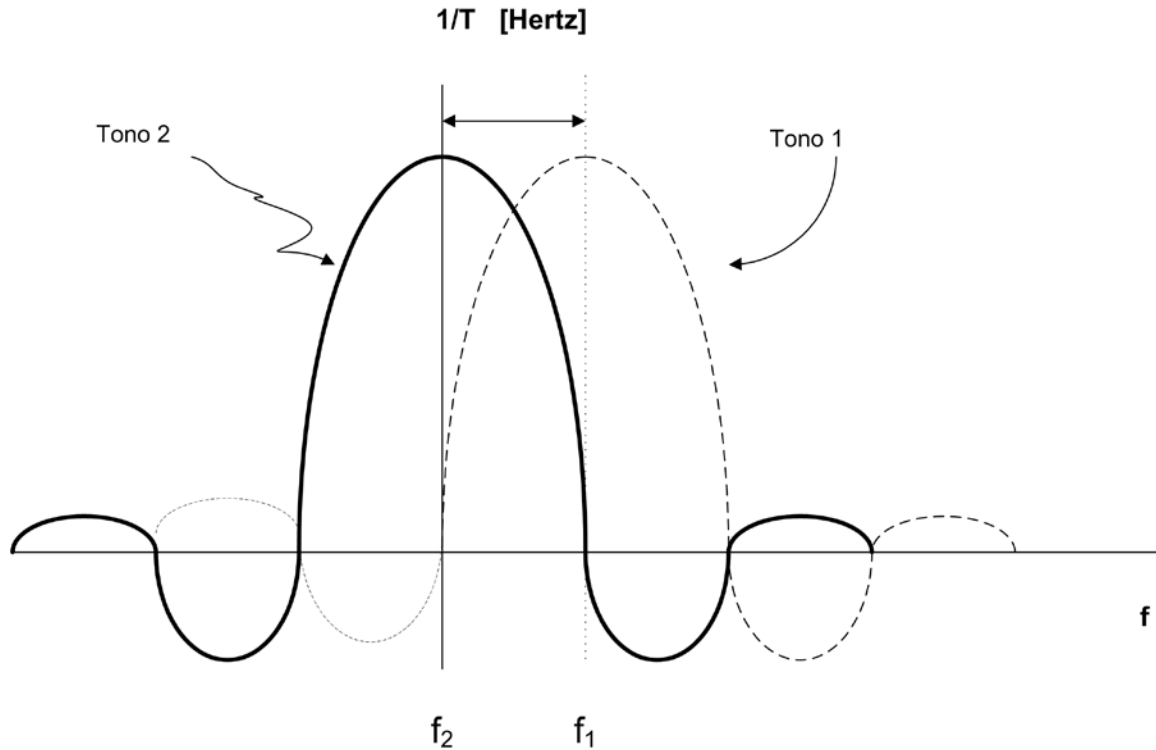
$$s_i(t) = \cos(2\pi f_i t) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (3.15)$$

donde  $i = 1, 2$  y  $\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$  es un pulso de magnitud **1** y que va de **-T/2 a T/2** y **0** otro

valor. La transformada de Fourier de (3.15) es:

$$F\{s_i(t)\} = T \text{sinc}[(f - f_i)T] \quad (3.16)$$

El dibujo del espectro de los tonos se muestra en la figura 3.10. Para que cualquier par de tonos de FSK sea ortogonal, la separación entre estos debe ser tal que el máximo de uno de ellos coincida con el cero (cualquiera) del otro, es decir deben estar separados a distancias a múltiplos de  $1/T$ . Por lo tanto la mínima separación será  $1/T$  Hertz, como se ilustra en la figura.



**Figura 3.10** Mínimo espaciamiento entre tonos en FSK con detección no coherente para mantener la ortogonalidad.

en el caso de FSK detectada coherentemente la mínima separación requerida es  $1/2T$ . Por lo tanto, para la misma tasa de símbolos, FSK coherente detectada ocupa menos ancho de banda y aun retiene la condición de ortogonalidad.

### 3.2.2.6. Probabilidad de error para FSK no-coherente

La probabilidad de error para FSK no coherente puede ser obtenida usando la siguiente expresión:

$$P_B = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{A^2 T}{4N_0}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right) \quad (3.17)$$

en donde  $E_b=A^2T$  es la energía de bit en joules y  $N_0$  es la densidad espectral de potencia unilateral en watts/ Hertz

### 3.2.2.7. Probabilidad de error para FSK con detección coherente

Para señales binarias coherentes, la probabilidad de error de bit puede se expresa por:

$$P_B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{(1-\rho)E_b/N_0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \quad (3.18)$$

donde  $\rho$  es el coeficiente de correlación cruzada entre  $s_1(t)$  y  $s_2(t)$  en el cual  $\theta$  es el ángulo entre los vectores  $s_1$  y  $s_2$ , tal como aparece en la figura 3.11.

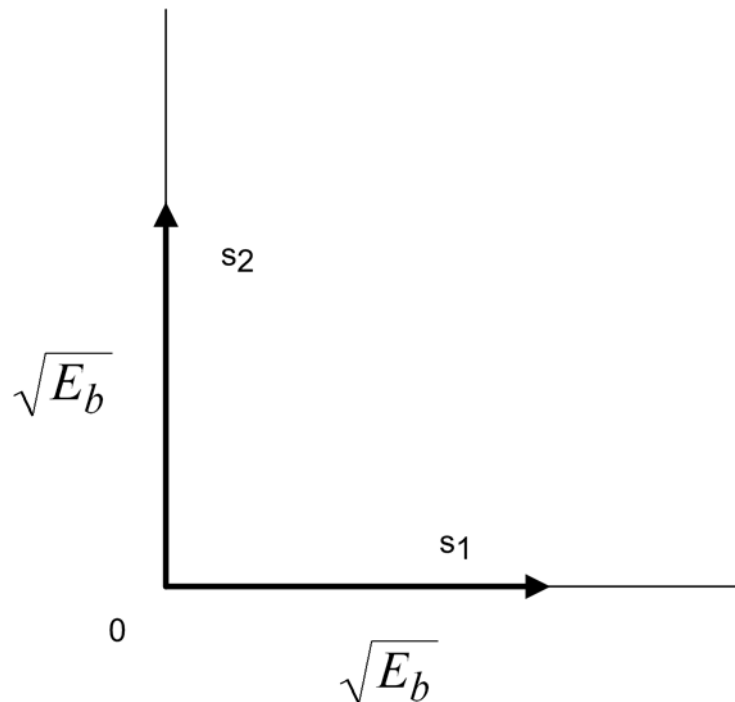


Figura 3.11. Diagrama vectorial de señales ortogonales (FSK)



De la figura el ángulo  $\theta = \pi/2$  por lo que  $\rho = 0$  ya que  $s_1$  y  $s_2$  son vectores perpendiculares. Sustituyendo este resultado en la ecuación anterior se tiene:

$$\begin{aligned}
 P_B &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{E_b/N_0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{u}{2}\right) du \\
 &= Q\left(\sqrt{E_b/N_0}\right)
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

en donde  $Q(x)$  es la función de error complementario, la cual usualmente se evalúa numéricamente.

### 3.2.3 Modulación por desplazamiento de fase (PSK)

En este tipo de modulación, la información digital va en la fase de la portadora. En el caso binario, conocida como BPSK, cuando se envía un dígito “1” la señal enviada lleva una fase con respecto a la portadora y en el caso de un “0” se envía la señal con otra fase con respecto a la portadora por ejemplo:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A \cos(\omega_0 t) && \text{si se envía un dígito "1"} \\ s_2(t) &= -A \cos(\omega_0 t) && \text{si se envía un dígito "0"} \end{aligned} \quad (3.20)$$

es decir hay un cambio de fase de 180 grados ó  $\pi$  radianes con respecto a la portadora de referencia según el dígito binario enviado, tal como de ve en la figura 3.12. En ésta puede observarse que cada vez que el digito cambia de valor hay un cambio de fase. Como en todos los sistemas de comunicaciones digitales, el bit tiene una duración  $T_b$  y la duración de la señal pasabanda producto de la modulación de este bit tiene una duración  $T$ , que es igual a  $T_b$  en el caso de sistemas de modulación con  $M=2$ , donde  $M$  es el alfabeto posible de símbolos o señales eléctricas. En la figura se muestra el diagrama fasorial de las señales BPSK en donde se puede ver que la distancia entre fasores es de  $\sqrt{E_b}$

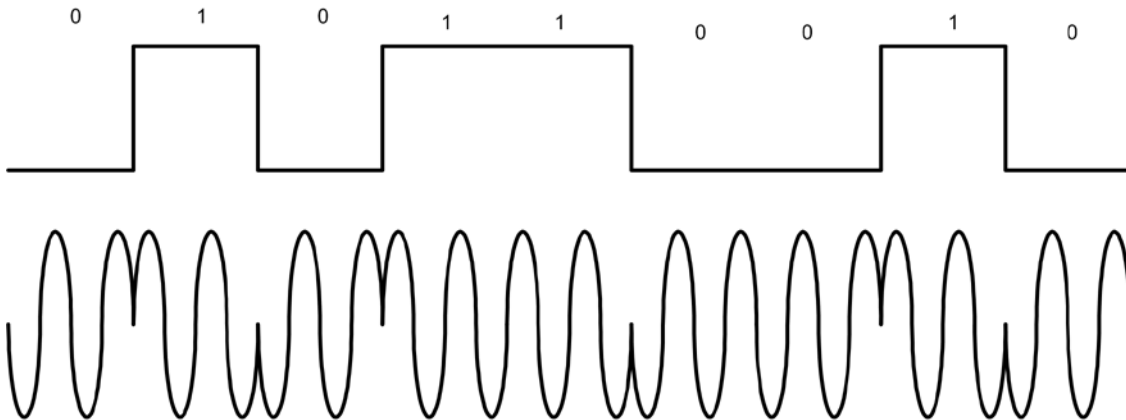
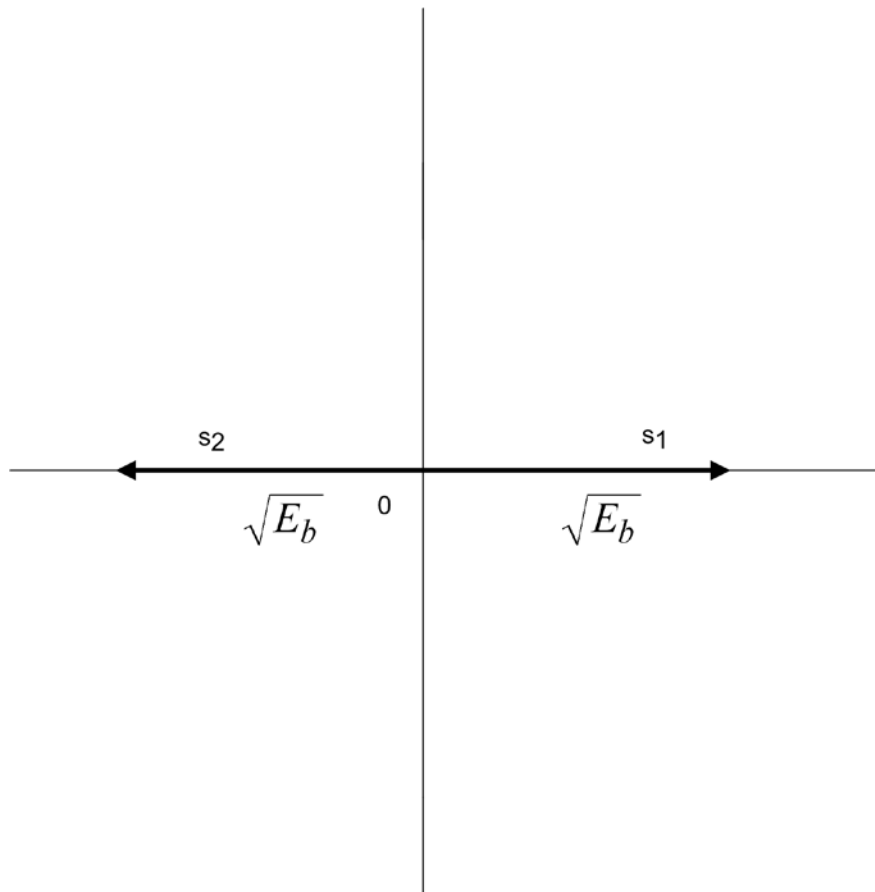


Figura 3.12. Señal pasabanda ó de información (arriba) y forma de onda BPSK (abajo)



**Figura 3.13. Diagrama fasorial BPSK**

### **3.2.3.1 Modulador BPSK**

El modulador BPSK en su forma básico se puede implementar usando un bloque multiplicador donde se mezclen la señal de información digital, la cual debe utilizar un formato bipolar y la portadora (Figura 3.14).

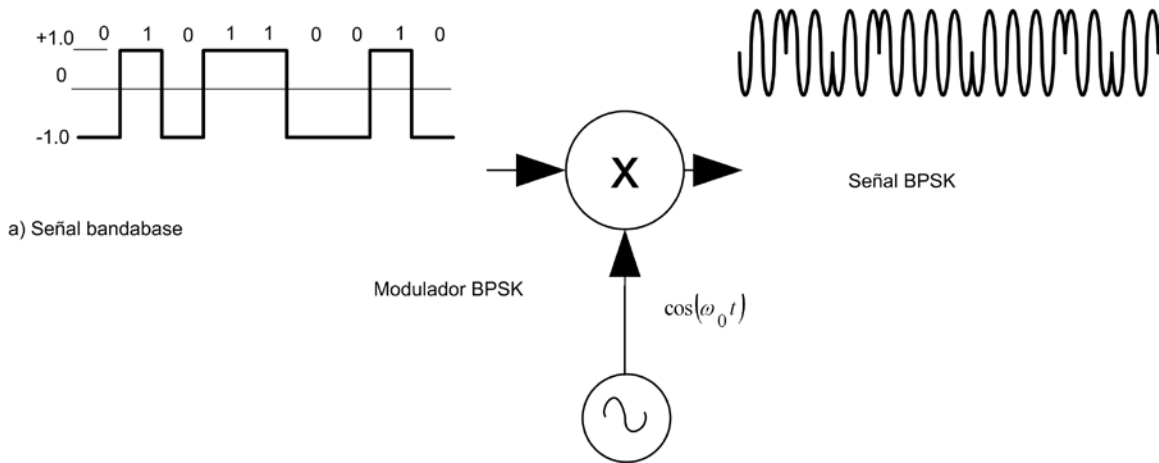


Figura 3.14. Modulador BPSK

De forma analítica, suponiendo que los bits de información sean representados por **+A** voltios si se envía un “1” lógico y un  $-A$  voltios si se envía “0” lógico, la señal de salida del modulador será  **$A\cos(\omega_0 t)$**  y  **$-A\cos(\omega_0 t)$**  tomando como referencia la portadora

### 3.2.3.2 Demodulador BPSK

El demodulador BPSK, consiste en multiplicador, donde se hace el producto de la señal recibida con la portadora, coherente (es decir en fase con la portadora de la señal recibida) la cual proviene de un sistema de recuperación. La señal de salida del multiplicador es filtrada por un filtro pasabajos, obteniendo un pulso positivo si correspondiente a un dígito “1” ó un pulso negativo correspondiente a un dígito “0”.

Analíticamente

$$salida\_del\_multiplicador = A \cos(\omega_0 t) \times \cos(\omega_0 t) \quad (3.21)$$

usando la identidad

$$\cos(x)^2 = \frac{1}{2} [1 + \cos(2x)] \quad (3.22)$$

se tiene

$$salida\_del\_multiplicador = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} \cos(2\omega_0 t) \quad (3.23)$$

la cual se compone de un término de baja frecuencia y otro con una frecuencia del doble de valor de la frecuencia portadora. Eliminando el término de alta frecuencia debido al filtraje de la ecuación anterior queda  $A/2$ . De forma similar para el caso de que se envíe un cero:

$$\begin{aligned} salida\_del\_multiplicador &= -A \cos(\omega_0 t) \times \cos(\omega_0 t) \\ &= -\frac{A}{2} - \frac{A}{2} \cos(2\omega_0 t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

nos queda un nivel de  $-A/2$  con una duración mínima de  $T$  segundos, el cual se interpreta como un "0" lógico por el receptor, ya que se elimina por filtraje el término de alta frecuencia. ( $\cos(\omega_0 t)$ ).

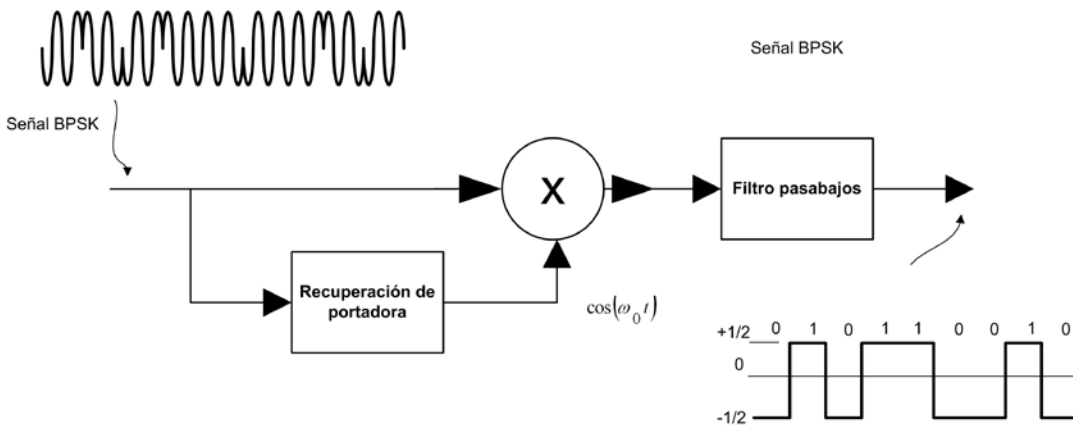


Figura3.15. Demodulador BSPK

### 3.2.3.3. Espectro y ancho de banda mínimo de Nyquist de BPSK

El espectro de las señales digitales pasabanda debido a la naturaleza digital de la señal de información (señal moduladora) tienen como característica la forma de funciones sinc (como es potencia sería la magnitud de la transformada de Fourier al cuadrado), como se muestra en la figura 3.16, donde se aprecia que el primero cero ocurre a una frecuencia igual a la tasa de transmisión de bit  $R_b$  en Hertz.

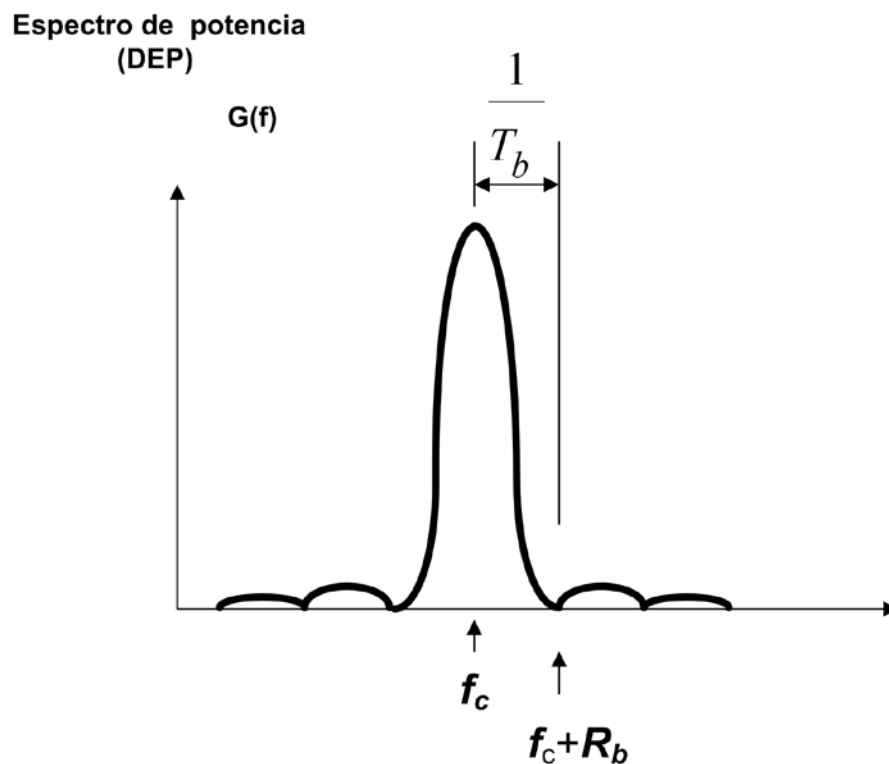


Figura 3.16. Espectro de BPSK

El ancho de banda mínimo de Nyquist, es decir el ancho mínimo requerido para transmitir y todavía se pueda recuperar con exactitud la información de la señal. Para esto se supondrá que los receptores digitales pueden fácilmente reconstruir una señal digital a partir de una versión distorsionada (hasta cierto punto) debido a la falta de

armónicos. En otros términos, no se tienen que enviar todos los armónicos de una señal de información (bandabase) sino sólo versiones que contengan la frecuencia fundamental de la misma. Sea  $f_a$  la frecuencia fundamental correspondiente al cambio más rápido de bit (es decir de un "0" a un "1" ó viceversa) tal como ve en la figura 3.17

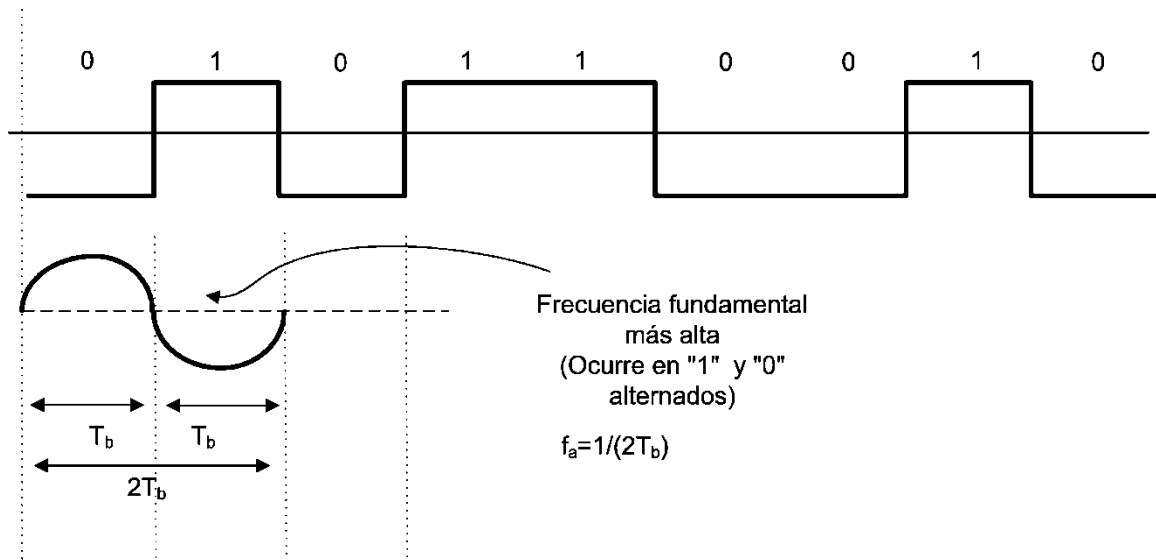


Figura 3.17. Relación entre  $f_a$  y  $T_b$

Se puede ver que  $f_a = 1/2 f_b$

Al entrar al multiplicador las señales  $\cos(\omega_a t)$  y  $\cos(\omega_o t)$  usando la identidad trigonométrica:

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)] \quad (3.25)$$

se obtiene:

$$\cos(\omega_0 t) \cos(\omega_a t) = \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t + \omega_a t) + \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t - \omega_a t) \quad (3.26)$$

donde  $\omega_a = 2\pi f_a t$

En la expresión anterior se puede observar que no existe una componente a una frecuencia  $\omega_c$  (ó  $f_c$ ), decir BPSK es una técnica de modulación de portadora suprimida, lo cual le da eficiencia en términos de potencia, ya que no hay “desperdicio” de ésta en la transmisión de la señal. Si bien existen técnicas para la recuperación de portadora en modulaciones BPSK, en algunas aplicaciones puede ser dedeseable generar en la transmisión una portadora residual. Lo anterior se logra haciendo que los cambios sean ligeramente menores a 180 grados entre los dos diferentes señal BPSK. En la figura 3.18 se muestra el diagrama fasorial de las señales BPSK con portadora residual.

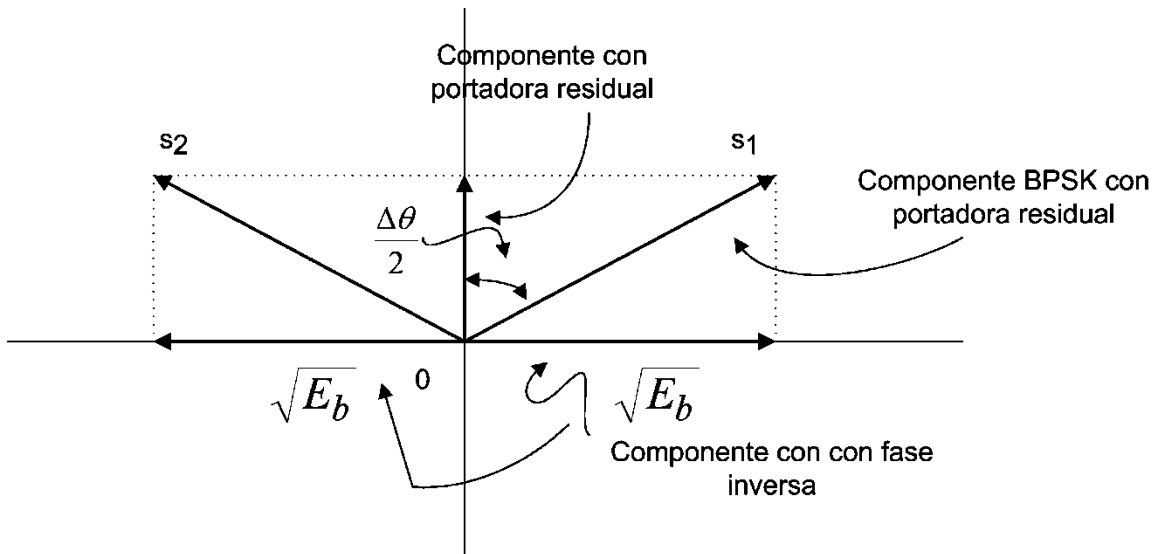


Figura 3.18. Favor BSPK con portadora residual



Usando la transformada de Fourier de la expresión anterior se tiene la representación en el dominio de la frecuencia:

$$W_{Ny} = \frac{1}{4} [\delta(f - f_0 - f_a)] + [\delta(f + f_0 + f_a)] + \frac{1}{4} [\delta(f - f_0 + f_a) + \delta(f + f_0 - f_a)]$$

(3.27)

tomando las frecuencias positivas se puede ubicar estas dos bandas.

el ancho de banda de Nyquist es la diferencia entre la ubicación en el dominio de frecuencia, esto es:

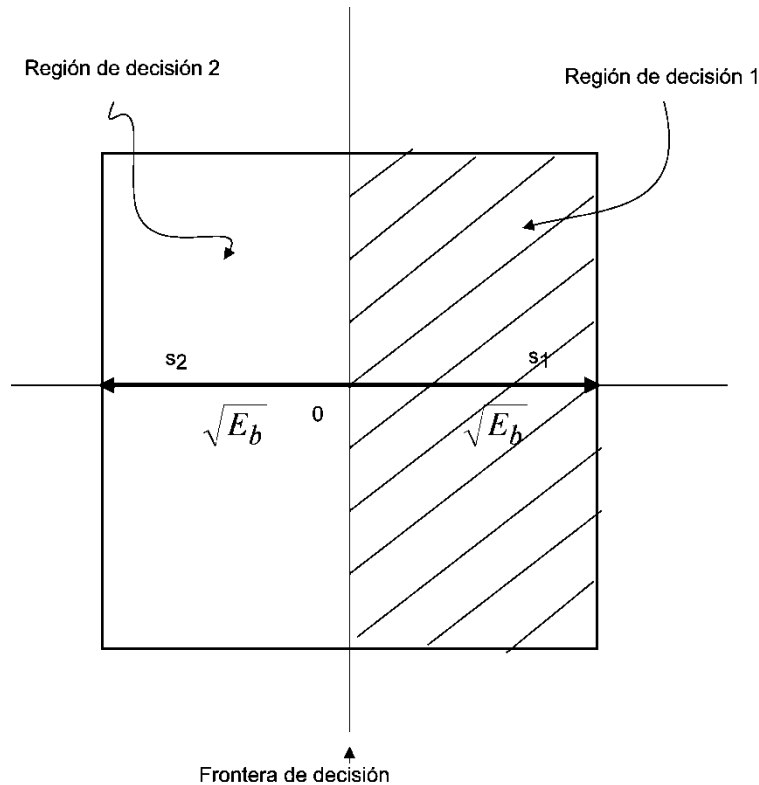
$$W_{Nyquist} = f_c + f_a - f_c + f_a = 2f_a = f_b \quad (3.28)$$

esto sería el ancho de banda mínimo posible para transmitir la señal BPSK (de otra forma las variaciones rápidas no serían transmitidos). Si bien la información digital se repite en cada periodo de la "sinc" (dominio de la frecuencia), en la práctica un mayor ancho de banda incrementa la energía de la señal mejorando las características de ésta. En la siguiente figura se puede ver el espectro de la señal BPSK. Se puede notar que el ancho de banda entre nulos es de dos veces la tasa de transmisión, la cual es otra definición de ancho de banda.

#### 3.2.3.4. Probabilidad de error de BPSK

Observando el diagrama fasorial de la señales con modulación BPSK, se puede observar que los dos posibles fasores están a 180 grados, es decir es una señal

antipodal. La señal en caso de experimentar distorsiones de fase y/o amplitud, la región de decisión para cada símbolo es de dos cuadrantes. Una sistema de modulación es más resistente al ruido (ú otro fenómenos no deseados ) si la distancia entre mayor sea la distancia entre fasores contiguos. En el caso de BPSK es el doble de la un fasor.



**Figura3.19. Diagrama fasorial de BPSK (Región de decisión)**

De la figura 3.19 se puede observar que un señal BPSK podría sufrir alteraciones en la fase por algún fenómeno (lo más usual es el ruido) y el fasor podría alterarse la fase dentro de una rango limitado por  $-\pi/ 2$  y  $\pi/2$  y aún podría ser detectado correctamente el bit transmitido. Estos límites establecen las regiones de decisión. Suponiendo que  $s_1$  corresponda a la transmisión de un dígito "1", si la señal que llega al receptor  $s'_1$  es un fasor con una fase dentro de la región 1, el receptor interpretará correctamente la señal.

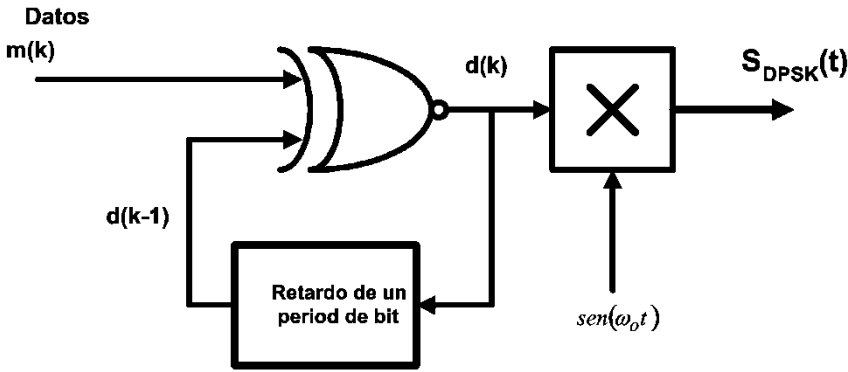
Lo mismo ocurriría para  $s_2$ . La probabilidad de error de bit de BPSK se puede obtener de:

$$P_B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2E_b/N_0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{u}{2}\right) du \quad (3.29)$$

$$= Q\left(\sqrt{2E_b/N_0}\right)$$

#### 3.2.4. Modulación PSK diferencial (DPSK)

La modulación DPSK no requiere un esquema de detección coherente como es el caso de BPSK ya que no requiere referencia de la fase de la portadora. DPSK utiliza como referencia la fase previa por lo que no requiere tener un sistema de recuperación de portadora. Para enviar generar un símbolo ó señal DPSK, se requiere que el bit que se quiere enviar se sume módulo 2 con el bit previo por medio de una compuerta XNOR (Figura 3.20). Al igual que BPSK, la señal digital debe ser bipolar, esto es positiva para el "1" lógico y negativa para el "0" lógico (por ejemplo +1v y -1v respectivamente) En el caso de la demodulación, éste realiza el producto de el símbolo entrante con el símbolo previo (el cual es usado como fase de referencia), tal como se muestra en la Figura.3.20



<b>Mensaje m(k)</b>	-	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
<b>Salida de la compuerta d(k)</b>	1*	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
<b>Fase de S<sub>DPSK</sub>(t)</b>	$\pi$	$\pi$	$\pi$	0	0	$\pi$	$\pi$	$\pi$	0	$\pi$	$\pi$

\* bit arbitrario, puede ser "1" ó "0"

**Figura 3.20 Modulador DPSK**

El demodulador DPSK de la figura 3.20 consiste básicamente en un integrador de producto, seguido por un bloque de decisión. Como en el caso de BPSK, el receptor se encarga de correlacionar la señal de entrada DPSK con la referencia, con la diferencia de que en este esquema de demodulación, la señal de referencia es una versión retrasada de la señal recibida, es decir, durante cada periodo de símbolo, se compara el símbolo recibido con el símbolo anterior para ver si hay correlación o autocorrelación (defasamiento de 180 grados). Usando la secuencia que aparece en la figura 3.20. La señal correspondiente al primer bit del mensaje, el cual es un "1" lógico y con una fase de  $\pi$ , se compara con el bit anterior, el cual es el bit de referencia arbitrario (éste puede ser 1 ó 0) el cual la fase es también  $\pi$ , da como resultado que el dato estimado es un

“1” lógico. Esto puede entenderse si consideramos como una multiplicación de la señal  $\text{sen}\omega_0 t$  (primer bit de mensaje con fase  $\pi$ ) con la señal  $\text{sen}\omega_0 t$  (bit de referencia con fase de  $\pi$ ). Usando la identidad trigonométrica adecuada nos da como resultado:

$$(\text{sen}\omega_0 t)(\text{sen}\omega_0 t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\omega_0 t)$$

en donde el término del doble de frecuencia será eliminado por el ancho de banda limitado del circuito (filtraje). Como en otros esquemas, un voltaje positivo es considerado como un “1” lógico y uno negativo como un “0” cero lógico, lo que da como resultado un dígito “1” a la salida del demodulador. En forma idéntica cuando los dos señales tienen fase cero (diferencia de fase 0). Cuando hay diferencia de fase, el bit estimado es igual a “0”.

La probabilidad de error de bit para DPSK:

$$P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{N_0}\right) \quad (3.30)$$

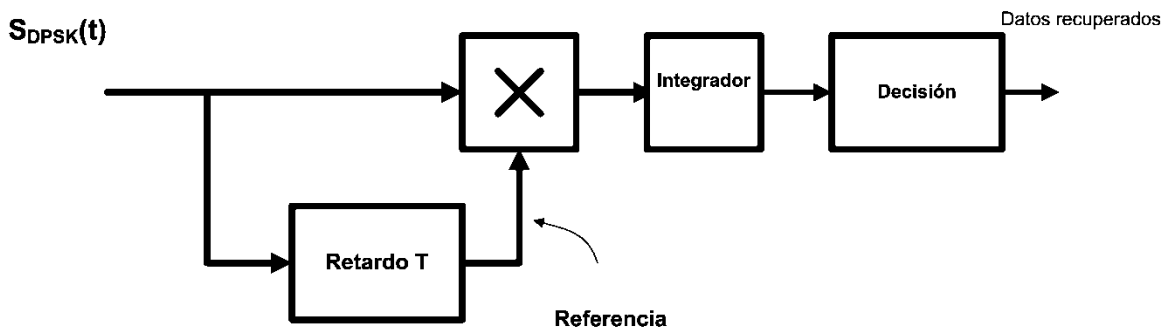


Figura 3.21 Demodulador DPSK

### **3.2.5. Eficiencia espectral.**

Una forma de comparar los esquemas de modulación es la eficiencia espectral. La eficiencia espectral es la medida de tasa de transmisión por Hertz de ancho de banda utilizado. Un objetivo de los ingenieros de comunicaciones es transmitir la máxima cantidad de información en un mínimo de ancho de banda posible. Lo anterior es muy importante en las radiocomunicaciones en el cual el espectro radioeléctrico es un recurso limitado. Las unidades de la eficiencia espectral son bit/s/Hz.

### **3.2.6 Niveles de sincronización en las comunicaciones digitales**

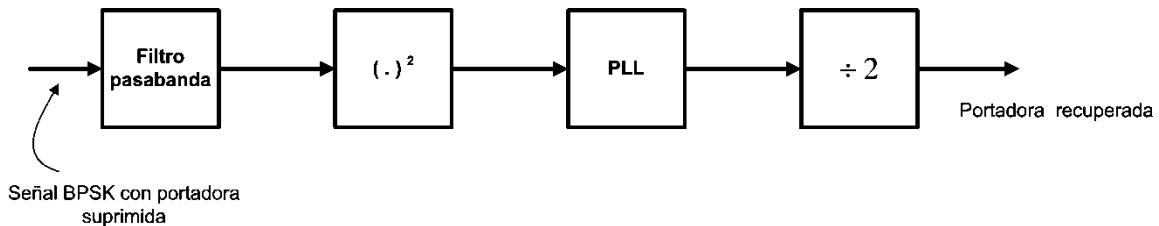
En un sistema de comunicaciones digitales se distinguen niveles de básicos de sincronización: sincronización de portadora, de símbolo y de marco. La sincronización de fase (también llamada recuperación de portadora) es la tarea de reproducir en el receptor una réplica de la portadora coherente en fase. En el caso de sincronización de símbolo la réplica es un pulso a la tasa de transición. El receptor debe producir un pulso en el que las transiciones van a cero en forma simultánea con el cambio de símbolo de la señal recibida. En algunos sistemas se requiere un nivel más alto de sincronización, conocido como sincronización de marco. Esta sincronización se requiere cuando la información va organizada en bloques o mensajes con una longitud predeterminada de símbolos. En sistemas de comunicaciones con detección coherente normalmente se requieren estos tres niveles de sincronización. En sistemas de comunicaciones con detección no coherente, sincronización de portadora no es requerida.

### 3.2.7. Circuito de recuperación de portadora

En técnicas de modulación donde exista una fase residual, la extracción de portadora puede ser realizada por circuitos relativamente sencillos. El problema surge en sistemas tales como BPSK en cual existe supresión de portadora. En este y otros casos la manera de obtener la portadora coherente en fase, los efectos de la modulación deben ser eliminados. Una forma de eliminarla la modulación es elevar al cuadrado la señal modulada recibida  $r(t)$ , la cual, en el caso de BPSK puede ser  $\cos(\omega_0 t)$  y  $-\cos(\omega_0 t)$

$$r^2(t) = \cos^2(\omega_0 t + \theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t) \quad (3.31)$$

se puede observar que en el segundo término de la ecuación, se relaciona con el doble de la frecuencia de la portadora y es no es afectada por la fase enviada, la cual puede ser rastreada y adquirida por un PLL. En la figura x se muestra tal arreglo. Finalmente se divide la frecuencia de la salida del PLL entre 2, obteniendo la portadora con la frecuencia correcta y coherente en fase.



**Figura 3.22. Circuito cuadrador para recuperación de portadora.**

### **3.2.8. Diferencias entre probabilidad de error de bit y tasa de error de bit**

A menudo se utilizan éstos términos como sinónimos cuando en realidad son cosas ligeramente distintas, aunque se expresan en las mismas unidades. La probabilidad de error de bit es la cantidad de errores esperado para un sistema de comunicaciones y es obtenido del análisis de los parámetros del sistema. Por otro lado la tasa de error de bit (BER, del inglés: Bit Error Rate) es la estadística de la cantidad de errores en un tiempo determinado. Es una cantidad que se obtiene en base a mediciones.



# **CAPÍTULO IV**

## **MODULACIÓN M-ARIA PASABANDA**

## IV. MODULACIÓN M-ARIA PASABANDA

### 4.1 Introducción

La eficiencia espectral definida en el capítulo anterior depende de la tasa de transmisión  $R_b$  y el ancho de banda ocupado  $W$ . En los esquemas de modulación que se han mostrado, la máxima eficiencia espectral obtenida es de 1 bit/s/Hz. Sin embargo las metas de diseño de la ingeniería de las telecomunicaciones son a) maximizar la tasa de transmisión (bit/s), b) minimizar la potencia requerida, c) minimizar el ancho de banda requerido y d) minimizar la probabilidad de error de bit. La primera y la segunda se oponen a las metas c y d lo que genera compromisos en el diseño de sistemas de comunicaciones dependientes del tipo de sistemas.

### 4.2 Teorema de capacidad de canal de Shannon - Hartley

El teorema de la capacidad de canal de Shannon – Hartley establece que la máxima tasa de transmisión información  $C$  sobre un canal de ancho de banda  $W$  y una señal con razón señal a ruido  $S/N$  está dado por:

$$C = W \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right) \text{ bit/s} \quad (4.1)$$

Entonces cuando  $W$  se incrementa,  $S/N$  puede ser reducido para compensar. Por ejemplo un canal de audio de 3.2 KHz. con SNR de 1000 (30 dB) la máxima tasa de transmisión es de aproximadamente 30 kbit/s

### **4.3 Modulaciones eficientes en ancho de banda**

El objetivo primordial de las técnicas de modulación eficientes en el uso del espectro es maximizar la eficiencia del ancho de banda, el cual se definió en el capítulo anterior. El continuo crecimiento en la demanda de canales de comunicaciones digitales motiva la investigación de técnicas de modulación eficientes.

#### **4.3.1 Modulación M -aria**

Para la transmisión digital, los bits se combinan en grupos de “k”, los cuales forman nuevos “dígitos” ó símbolos los cuales forman parte de un conjunto finito ó alfabeto de símbolos. El número de símbolos posibles M de un alfabeto se relaciona con los k bits por medio de  $M=2^k$ . En el caso de modulación pasabanda, M formas de onda representan los M símbolos. Por ejemplo para la Modulación BPSK los bits de entrada se combinan en grupos de un bit (k=1), de por lo tanto se tienen  $M=2^1 = 2$  símbolos de salida (correspondientes a las formas de onda  $A\cos(\omega_0t)$  y  $-A\cos(\omega_0t)$ ). Lo anterior se aplica también para cualquier sistema binario ó con M=2. (ASK, FSK, PSK, etc.)

#### **4.3.2 Baudio ó tasa de transmisión de símbolo**

A la máxima tasa de transmisión de símbolos (ó cambio de forma de onda) a la salida de un modulador se le llama Baudio de salida (ó baudaje). Es igual al ancho de banda mínimo de Nyquist.

### **4.4 Modulación MPSK**

Las técnicas de modulación de M fases (MPSK) implica el incremento de formas de onda ó símbolos de salida posibles. En el caso de BPSK, con  $M=2$ , se tienen dos

fasores posibles con una amplitud constante con fases diferentes (0 y 180 grados). En sistemas con mayor número de fases (por ejemplo  $M=4$ ), se tendrían un conjunto de 4 posibles formas de salida (cuatro fases diferentes).

#### 4.4.1 Conmutación por cambios de fase en cuadratura. (QPSK Quadrature Phase Shift Keying).

QPSK puede ser considerada como 4-PSK (PSK cuaternario) ó como dos señales BPSK en cuadratura. El transmisor y el receptor efectivamente son dos transmisores y receptores BPSK arreglados en cuadratura de fase. Los canales I (del inglés Inphase) y el canal Q (del inglés quadrature) operan a la mitad de la tasa de bit ( $R_b$ ) de entrada. El esquema del modulador QPSK se muestra en la figura 4.1 y en la del demodulador en la figura 4.2.

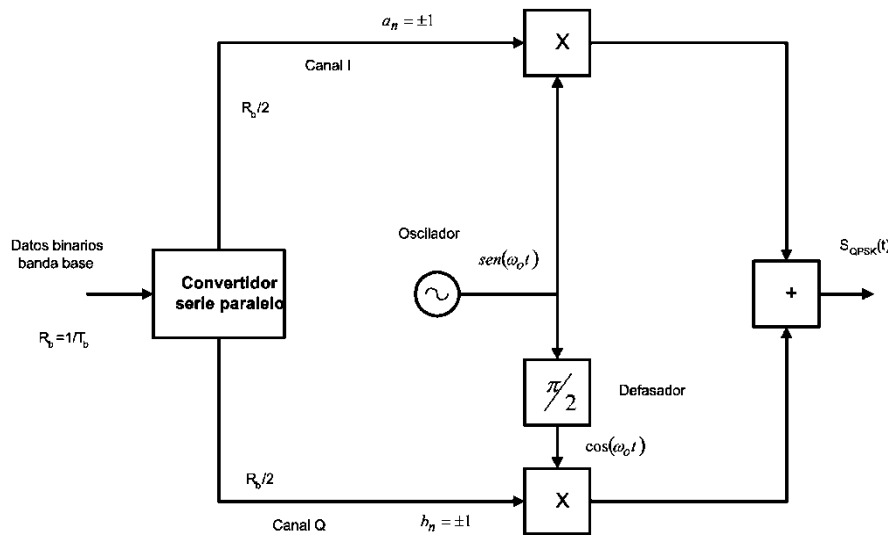


Figura 4.1 . Modulador QPSK

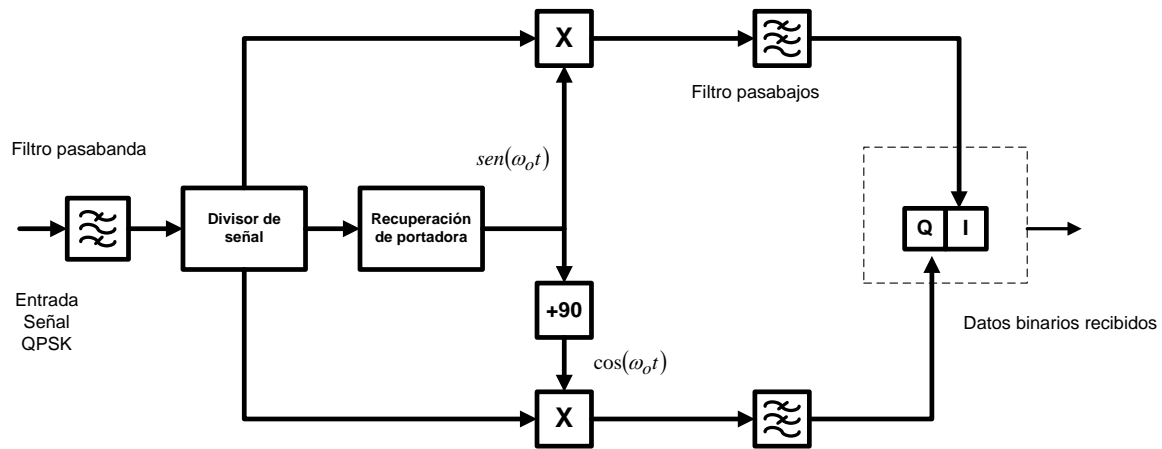


Figura 4.2 Demodulador QPSK

#### 4.4.1.1 Funcionamiento de QPSK

En la figura 4.1 se puede ver que los bits son enviados a dos canales por el convertidor serie paralelo, es decir el primer bit que entra al convertidor es enviado al canal I y el siguiente bit al canal Q. Suponiendo en un “1” lógico le corresponda un voltaje de +1 v y un “0” lógico sea -1v. Los valores de +1 y -1v son arbitrarios, pero deben ser opuestos. Estos voltajes se multiplican por  $\text{sen}(\omega_0 t)$  (en el canal I) y por  $\text{cos}(\omega_0 t)$  (en el canal Q). Por ejemplo suponiendo que llegue una secuencia tal que el canal I=0 (-1 v) y el canal sea Q=0 (-1v), se tendrá a la salida del multiplicador: del canal I

$$= -1\text{sen}(\omega_0 t)$$

y a la salida del multiplicador del canal Q:

$$= -1\text{cos}(\omega_0 t)$$

estas señales se suman, lo que nos da como salida del modulador QPSK:

$$\begin{aligned}
 S_{QPSK} &= -\text{sen}(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t) \\
 &= \sqrt{2} \text{sen}(\omega_0 t - 135^\circ)
 \end{aligned}$$

Todas las posibles combinaciones se muestran en la tabla 4.1

Entrada binario		Fase de salida	Señal QPSK
Q	I		
0	0	$-135^\circ$	$\sqrt{2} \text{sen}(\omega_0 t - 135)$
0	1	$-45^\circ$	$\sqrt{2} \text{sen}(\omega_0 t - 45)$
1	0	$+135^\circ$	$\sqrt{2} \text{sen}(\omega_0 t + 135)$
1	1	$+45^\circ$	$\sqrt{2} \text{sen}(\omega_0 t + 45)$

**Tabla 4.1**

El diagrama fasorial se muestra en la figura 4.3a) y el correspondiente diagrama de constelación (Las puntas de los fasores) se muestran en la figura 4.3b). Se puede notar que la magnitud del fador (amplitud) es constante, sólo cambia la fase. También se La separación entre se puede notar entre fasores adyacentes es de  $90^\circ$  . En la figura 4.4 se muestra la forma de una señal QPSK.

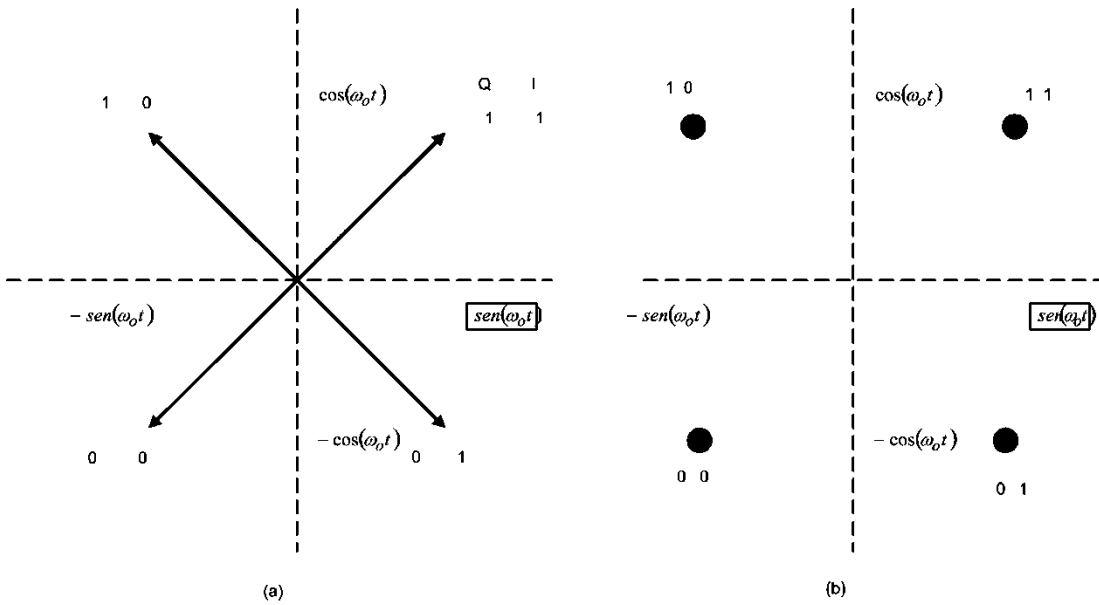


Figura 4.3 Diagrama fasorial (a) y diagrama de constelación de QPSK

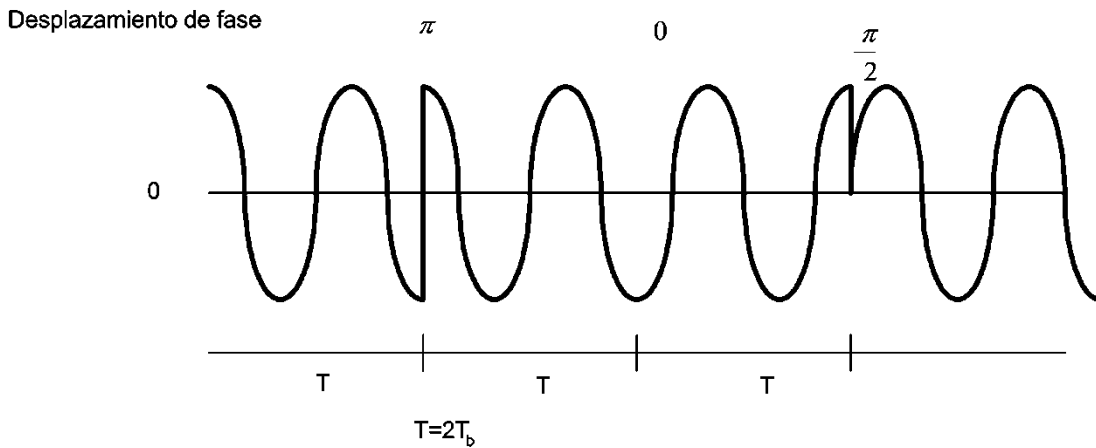


Figura 4.4 Señal QPSK

#### 4.4.1.2 Receptor QPSK (demodulador)

El diagrama del receptor QPSK se muestra en la figura 4.2. Como ya se ha mencionado, una señal QPSK puede ser visto como la combinación de dos señales BPSK ortogonales (en cuadratura), y por lo tanto no se interfieren. Para ilustrar el

funcionamiento del demodulador QPSK se utilizará la señal QPSK correspondiente a  $Q=1$  e  $I=0$ , es decir la señal de entrada al receptor es:

$$S_{QPSK} = -\text{sen}(\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t)$$

Analizando el canal I del receptor QPSK, a la salida del multiplicador, el cual hace el producto de la señal recibida por la señal portadora esto es:

$$\begin{aligned} \text{Salida\_del\_multiplicador\_canalI} &= (-\text{sen}\omega_0 t + \cos\omega_0 t)(\text{sen}\omega_0 t) \\ &= (-\text{sen}\omega_0 t)(\text{sen}\omega_0 t) + (\cos\omega_0 t)(\text{sen}\omega_0 t) \\ &= -\text{sen}^2\omega_0 t + \frac{1}{2}\text{sen}(\omega_0 t + \omega_0 t) + \frac{1}{2}\text{sen}(\omega_0 t - \omega_0 t) \\ &= -\frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega_0 t) + \frac{1}{2}\text{sen}2\omega_0 t + \frac{1}{2}\text{sen}(0) \end{aligned}$$

en esta última ecuación los términos con frecuencias al doble de la frecuencia portadora se eliminan debido al filtraje y el último es igual a cero quedando solamente:

$$= -\frac{1}{2}\text{voltios}$$

lo que corresponde a un pulso de magnitud  $-\frac{1}{2}$  correspondiente a un "0" lógico

de forma similar para el canal Q se tiene

$$\begin{aligned} \text{Salida\_del\_multiplicador\_canalI} &= (-\text{sen}\omega_0 t + \cos\omega_0 t)(\cos\omega_0 t) \\ &= -\frac{1}{2}\text{sen}2\omega_0 t + \frac{1}{2}\text{sen}(0) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2}\text{voltios} \end{aligned}$$



lo que corresponde a un "1" lógico con lo cual se comprueba la operación de demodulador.

#### 4.4.1.3 Ancho de banda de QPSK

Volviendo a el diagrama del modulador QPSK (figura 4.1), la tasa de transmisión de bit en cada canal (I y Q) es igual a la mitad de la tasa de transmisión de los datos de entrada. De acuerdo a la ecuación  $M=2^k$  para QPSK  $M=2$  ya que  $k=2$ , por cada símbolo de salida (forma de onda con cambio de fase) se requieren que "entren" dos bits al modulador QPSK, por lo que el baudio de salida es la mitad (la mayor tasa de cambio de símbolo) de la tasa de transmisión de los datos de entrada.

Para encontrar los requerimientos mínimos de ancho de banda (ancho de banda de Nyquist), se analiza la condición en el que se tenga una alternancia de unos y ceros en uno de los canales del modulador (Q ó I), la cual nos da el peor de los casos en cuanto a requerimientos de ancho de banda. En la figura 4.5 se muestra el escenario descrito. En la figura antes mencionada se puede observar que la frecuencia fundamental en el canal I (ó en canal Q) es  $f_a=1/4T_b=f_b/4$ . Al multiplicar los datos (las formas de onda) del canal I por  $\sin \omega_0 t$  se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Salida del multiplicador canal I} &= (\sin 2\pi f_a t)(\sin 2\pi f_c t) \\ &= -\frac{1}{2} \cos(2\pi(f_c + f_a)t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi(f_c - f_a)t) \end{aligned}$$

El espectro ocupado es la diferencia en la ubicación en el dominio de la frecuencia de las señales cosenoidales que componen la salida del modulador QPSK la cual es:

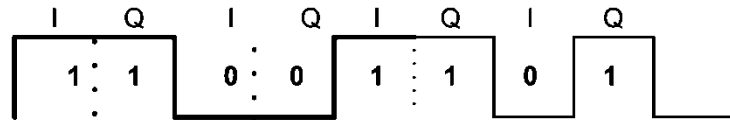
$$\text{ancho de banda de Nyquist} = fc + fa - fc + fa = 2fa \quad (4.2)$$

sustituyendo  $fa = fb/4$  se tiene:

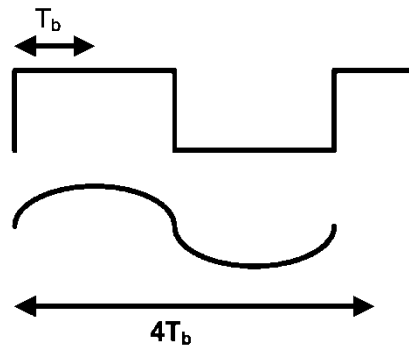
$$\text{ancho de banda mínimo de Nyquist} = 2fa = 2\left(\frac{fb}{4}\right) = \frac{fb}{2} \quad (4.3)$$

El ancho de banda mínimo de Nyquist es la mitad de la tasa de bit y si se compara con BPSK ( $AB_{\text{mínimo}} = fb$ ) es la mitad de éste

**Datos de entrada ( $R_b = fb$ )**



**Datos canal ( $fb/2$ )**

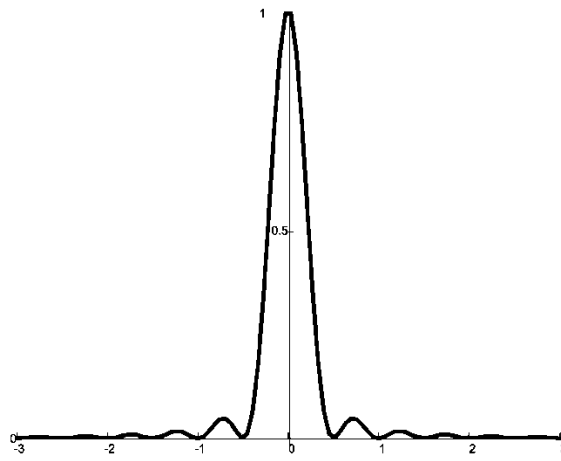


**Figura 4.5. Consideraciones para la obtención del ancho de banda mínimo de QPSK**

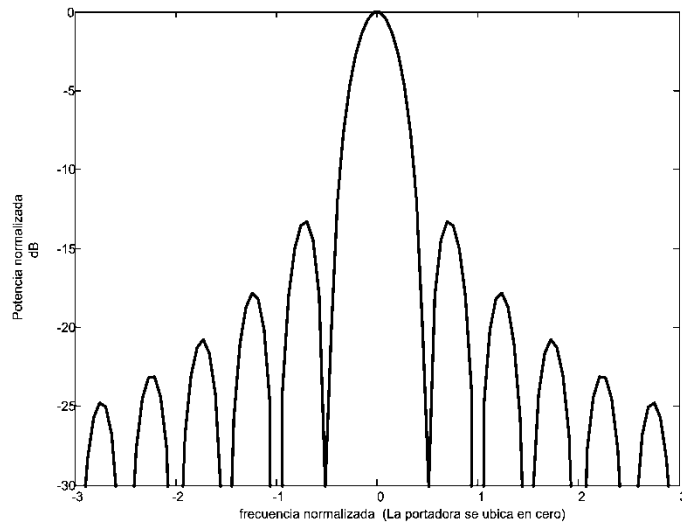
El espectro de QPSK,  $G(f)$  (densidad de espectral de potencia) es dado por:

$$G(f) = 2PT \left( \frac{\sin 2\pi fT}{2\pi fT} \right)^2$$

en donde  $P$  es la potencia de la señal modulada (figura 4.6).



(a)



(b)

**Figura 4.6. a) Densidad espectral de potencia de QPSK; b) Densidad espectral de potencia de QPSK (dB)**

#### **4.4.1.4 Probabilidad de error de bit de QPSK.**

En los párrafos iniciales se ha hecho mención de que QPSK puede ser visto como dos versiones ortogonales ó en cuadratura de BPSK. Esto se puede ver tanto en el transmisor y receptor QPSK como en el diagrama fasorial del mismo. Por ser señales ortogonales, no hay interferencia entre ellas, por lo que la probabilidad de error de bit de QPSK es idéntica a la de BPSK

#### **4.4.2 Técnica de modulación OQPSK**

Los esquemas de modulación digital clásicos como BPSK y QPSK poseen características satisfactorias, tales como una relación  $E_b/N_0$  adecuada dada una probabilidad de error y en el caso de QPSK se tiene además una buena eficiencia del ancho de banda. Los espectros de frecuencia de estas señales poseen lóbulos laterales que causan interferencia intersímbolos e intercanal. Las causas de estos lóbulos laterales son las transiciones abruptas debidas a los cambios de símbolo y el borde de los pulsos de la señal digital de entrada al modulador. Estos cambios de fase son de  $0^\circ$ ,  $\pm 90^\circ$  o  $\pm 180^\circ$ . Una mejora a lo anterior es la utilización de QPSK de compensación, (offset QPSK) el cual resulta en un modalidad de QPSK donde las transiciones de bit resultan en cambios de fase de  $0^\circ$  o  $\pm 90^\circ$ , excluyendo los cambios de fase de  $\pm 180^\circ$  de QPSK típico. El defasamiento (o retardo) de los bits no modifica ni cambia la densidad espectral de potencia de OQPSK, la cual es igual a la de QPSK. En la figura 4.7 se muestra la generación de una señal OQPSK.

### 4.4.3 Modulación 8-PSK.

En los párrafos anteriores se mostró la relación entre los datos de entrada (tasa de transmisión de bit) y la tasa de símbolo de salida, los cuales se relacionan con la capacidad del modulador M-PSK de producir un cambio en la fase de salida por cierta cantidad fija de bits que entran al modulador, esto es matemáticamente  $M=2^k$  es el número de bits a la entrada que se requieren para producir un posible cambio a la salida y M es el número de fases posibles, Por ejemplo en QPSK  $k=2$  por lo que  $M=4$ . Para 8-PSK, en el cual  $M=8$ ,  $k=\log_2(M)=\log_2(8)=3$

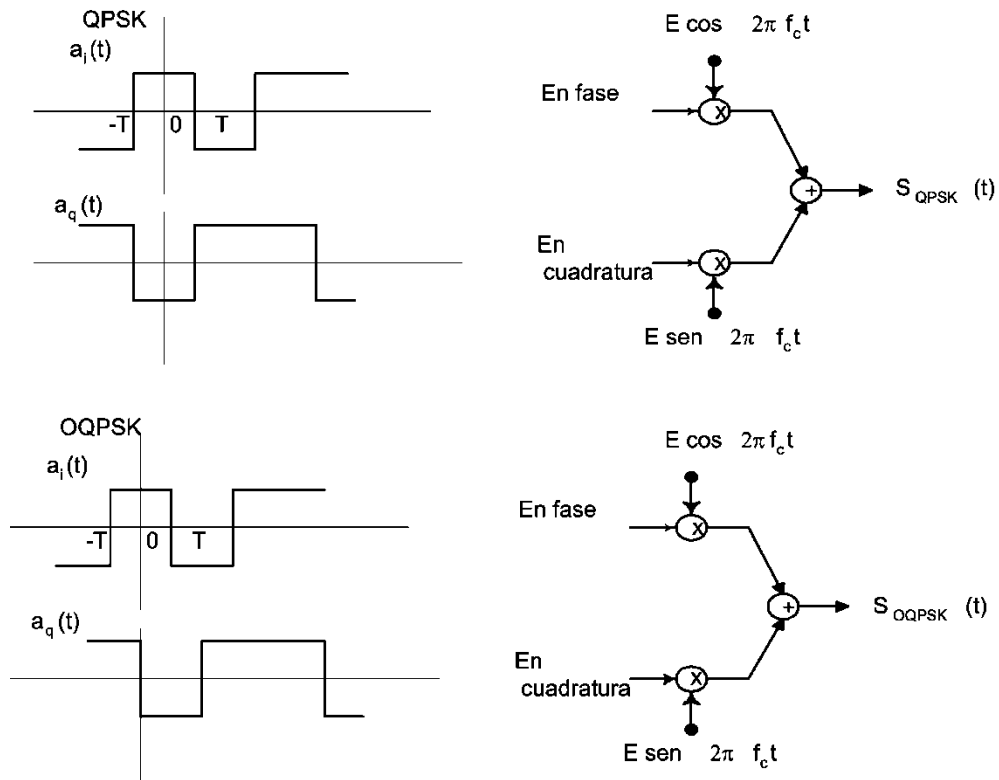


Figura 4.7 Modulador QPSK y OQPSK y formas de onda en los canales I y

Q

Si se compara BPSK y QPSK, se puede observar que el ancho de banda mínimo es la mitad requerido por QPSK es la mitad del empleado por BPSK. ( $f_b$  y  $f_b/2$ , respectivamente). En aplicaciones donde lo más importante restricción sea el ancho de banda QPSK ofrece mayores ventajas que BPSK, aunque el sistema sea más complejo. Sin embargo con sistemas con modulaciones eficientes en ancho de banda pueden ser logradas si se utilizan esquemas de modulación con mayores valores de  $k$  y por lo tanto de  $M$ . Haciendo un análisis similar al realizado para BPSK y QPSK se encontrará que el ancho de banda mínimo de Nyquist es de  $f_b/3$ , reduciendo con esto el ancho de banda utilizado por 8PSK dado una tasa de transmisión de bit (bit rate). La eficiencia espectral para un sistema M-PSK en general sería  $f_b/k$  En la siguiente tabla se muestra un ejemplo para ilustrar el concepto de la eficiencia espectral de diferentes técnicas de modulación M-PSK usando la definición de ancho de banda eficiente. Para el ejemplo  $R_b=f_b= 1\text{Mbit/s}$ . Se puede observar que a mayor valor de  $M$  se

Modulación	Tasa de transmisión [bit/s]	Ancho de banda mínimo de Nyquist de doble lado (MHz)	Eficiencia del ancho de banda (ó espectral)
BPSK(2-PSK)	1 Mb/s	1 MHz	$= \frac{1\text{Mb/s}}{1\text{MHz}} = 1\text{b/s/Hz}$
QPSK	1 Mb/s	500 KHz	$= \frac{1\text{Mb/s}}{0.5\text{MHz}} = 2\text{b/s/Hz}$
8-PSK	1 Mb/s	333kHz	$= \frac{1\text{Mb/s}}{0.333\text{MHz}} = 3\text{b/s/Hz}$

Tabla 4.2.

En la figura 4.8 se muestra diagrama de bloques del modulador 8-PSK. Los bits de entrada, a una tasa  $R_b=f_b$  bits/s se dividen en forma en tres ramas C, I y Q del modulador por el convertidor serie paralelo. Cada de estos canales tiene un tercio de la velocidad de transmisión de los datos de entrada. Los bits I y C entran a uno de los convertidores de 2 a 4 niveles (convertidor digital – analógico) al igual que los bits Q y C' (el valor negado de C) los cuales tienen cuatro posibles valores de voltaje posibles. En estos convertidores, los valores de I y Q determinan la polaridad del voltaje de salida del convertidor de 2-4 niveles y C y C' determinan la magnitud. Estas magnitudes podría ser 0.9238 para el caso de ser C ó C' un "1" lógico y 0.3826 para el caso de un "0" lógico. La salida de los convertidores es una señal en forma de escalera en la cual la magnitud es dada por las convenciones antes establecidas. La tabla de verdad de los convertidores se muestra en la tabla 4.3

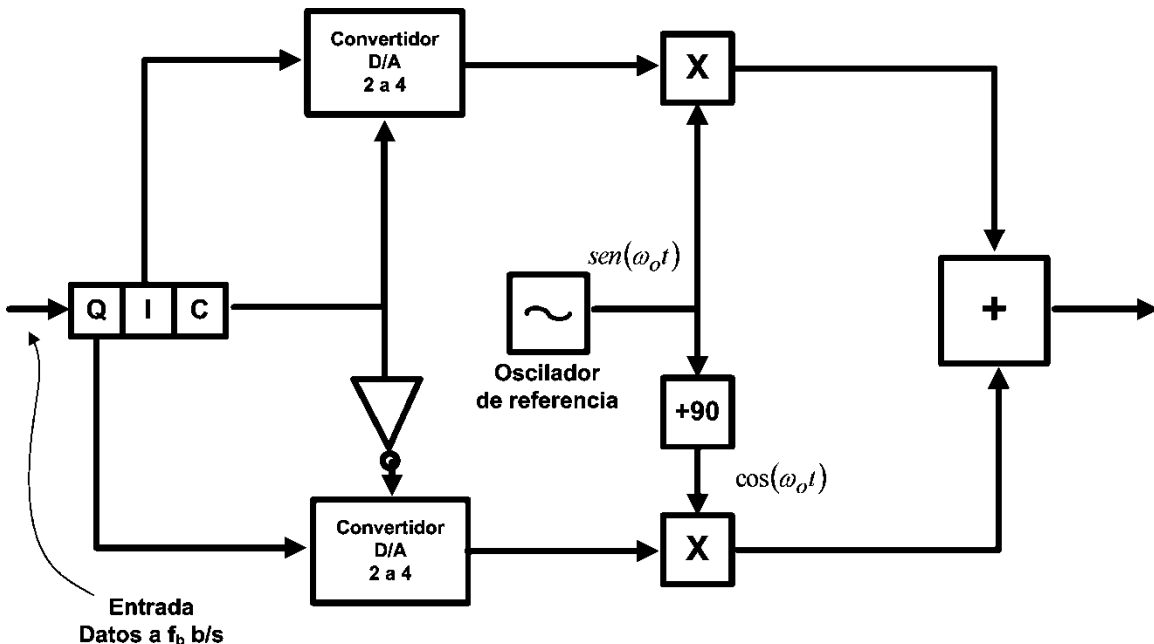


Figura 4.8 Modulador 8PSK

I/Q	C/C'	Salida del convertidor
0	0	-3826
0	1	-0.9238
1	0	+0.3826
1	1	+0.9238

**Tabla 4.3 Tabla de verdad de los convertidores digital – analógico.**

La salida de los convertidores de ambas ramas se multiplican por  $\sin\omega_0t$  y  $\cos\omega_0t$  (la rama superior e inferior del modulador) las cuales se suman obteniéndose la señal 8-PSK. Suponiendo que se tenga  $Q=0$ ,  $I=1$  y  $C=1$  se tendrá como señal resultante:

$$\begin{aligned}
 S_{8PSK} &= 0.9238\sin\omega_0t - 0.3826\cos\omega_0t \\
 &= \sin(\omega_0t - 22.5^\circ)
 \end{aligned}$$

Realizando el mismo procedimiento se tiene el diagrama de fasorial y el de constelación mostrado en la figura 4.9 y la tabla de verdad de 8PSK (T 4.4)



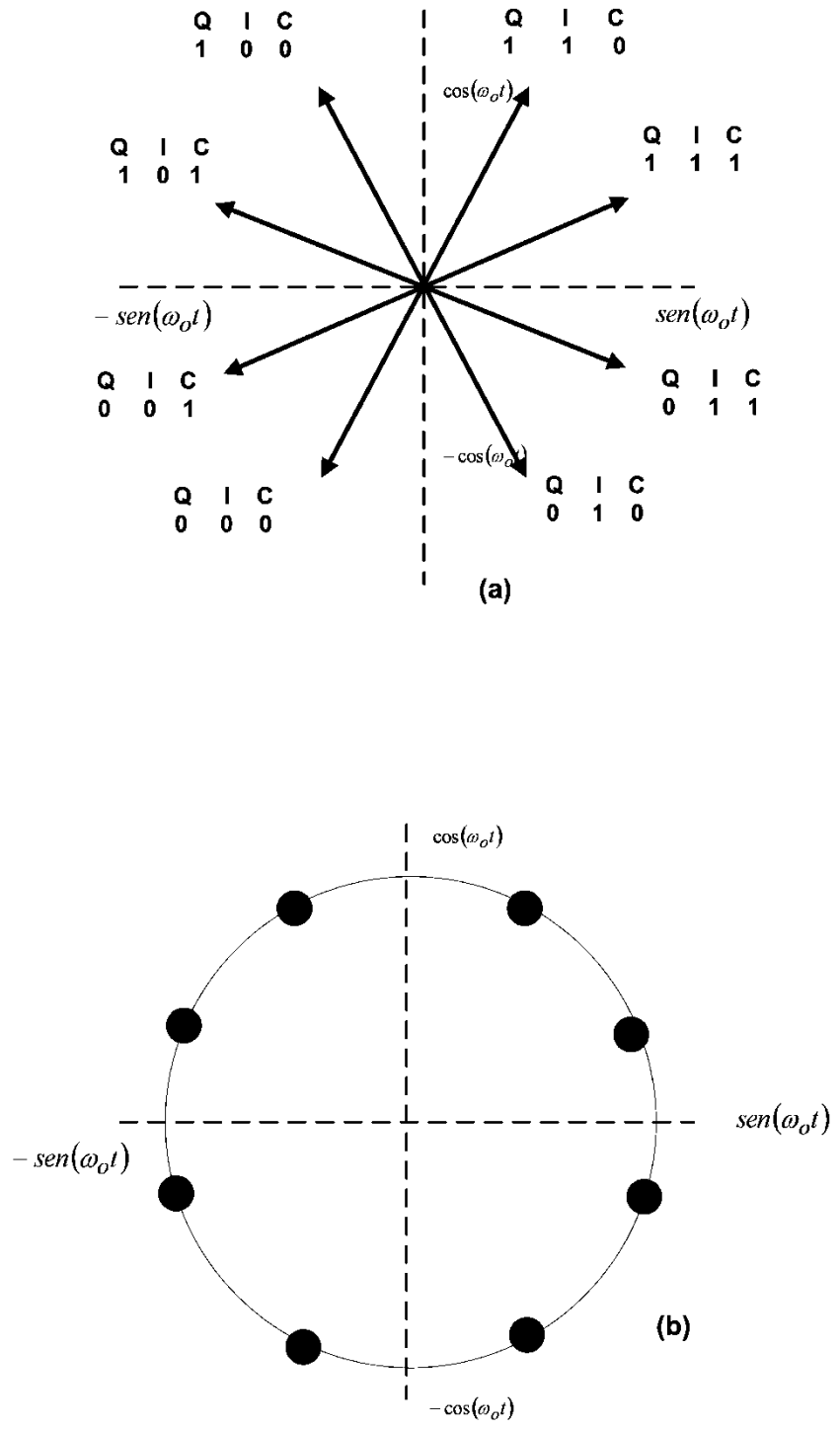
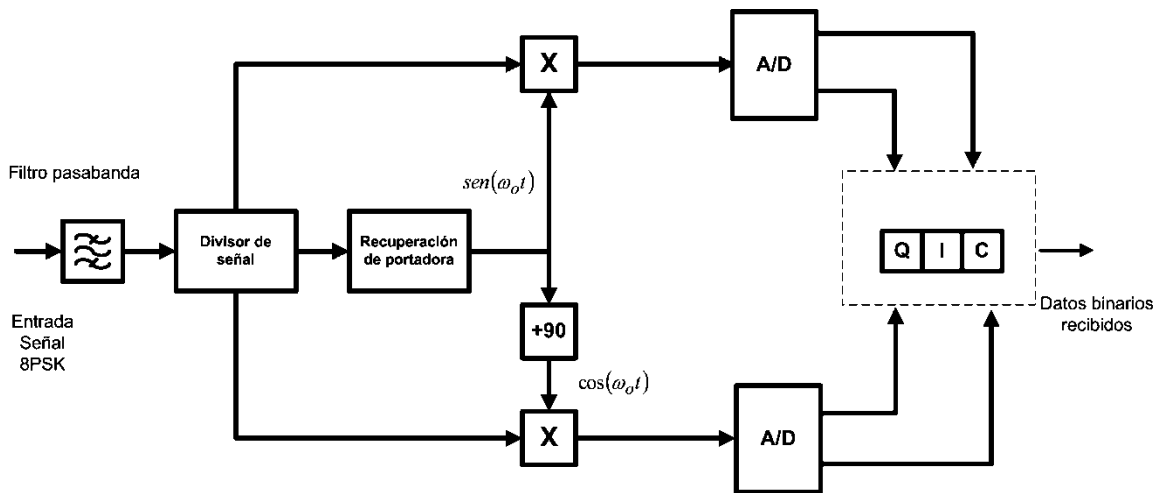


Figura 4.9. a) Diagrama fasorial de 8PSK; b) Diagrama de constelación correspondiente

Entrada binaria			Fases de Salida 8PSK
Q	I	C	
0	0	0	-112.5°
0	0	1	-157.5°
0	1	0	-67.5°
0	1	1	-22.5°
1	0	0	+112.5°
1	0	1	+157.5°
1	1	0	+67.5°
1	1	1	+22.5°

Tabla 4.4. Tabla de verdad de 8PSK

El diagrama de bloques del demodulador 8PSK se muestra en la figura 4.10



**Figura 4.10 Demodulador 8PSK****4.4.3.1 Probabilidad de error de símbolo y probabilidad de error de bit para M-PSK**

La probabilidad de error de símbolo, en el caso de MPSK es el hecho de que el receptor “confunda” obtenga una señal con un valor de fase determinada cuando el transmisor envió otra fase. Par un sistema MPSK la probabilidad de error de símbolo es  $P_s(M)$ :

$$P_s(M) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin\frac{\pi}{M}\right) \quad (4.5)$$

donde  $E_s$  es la energía por símbolo

$$E_s = E_b(\log_2 M) \quad (4.6)$$

La probabilidad de error de bit para símbolos que únicamente difieren de un bit entre fases adyacentes (ver figura 4.8a). Códigos como el Gray proporcionan tal característica.

La probabilidad de error de bit se relaciona con la probabilidad de error de símbolo por es dada por:

$$P_B = \frac{P_S}{k} \quad \text{para } P_e \ll 1 \quad (4.7)$$

#### 4.4.4 Modulación QAM

La modulación QAM (del inglés Quadrature Amplitude Modulation Modulación de amplitudes en cuadratura), es una forma de modulación digital pasabanda en la cual la información va tanto en la amplitud como en la fase de la portadora. QAM consiste en dos portadoras moduladas en amplitud en cuadratura. Cada bloque de bloque de  $n$  bits es dividido a su vez los cuales entran entran dos convertidores digital analógico para proporcionar los voltaje requeridos por las portadoras. Los valores de  $k$  comienzan con 3, considerando a QAM como idéntico a QPSK. Así para  $k=3$ , de acuerdo con la ecuación  $M=2^k =8$ , se tiene 8QAM. Las señales 8QAM a diferencia de 8PSK no tienen amplitudes constantes. El modulador 8QAM se muestra en la figura 4.11. En la tabla 4.5 se muestra la tabla de verdad de los convertidores D/A, y en la 4.6 se muestran la relación entre entradas (bits) y salidas posibles (fases). En la figura 4.12 se muestra el diagrama fasorial, y el de constelación para 8QAM.

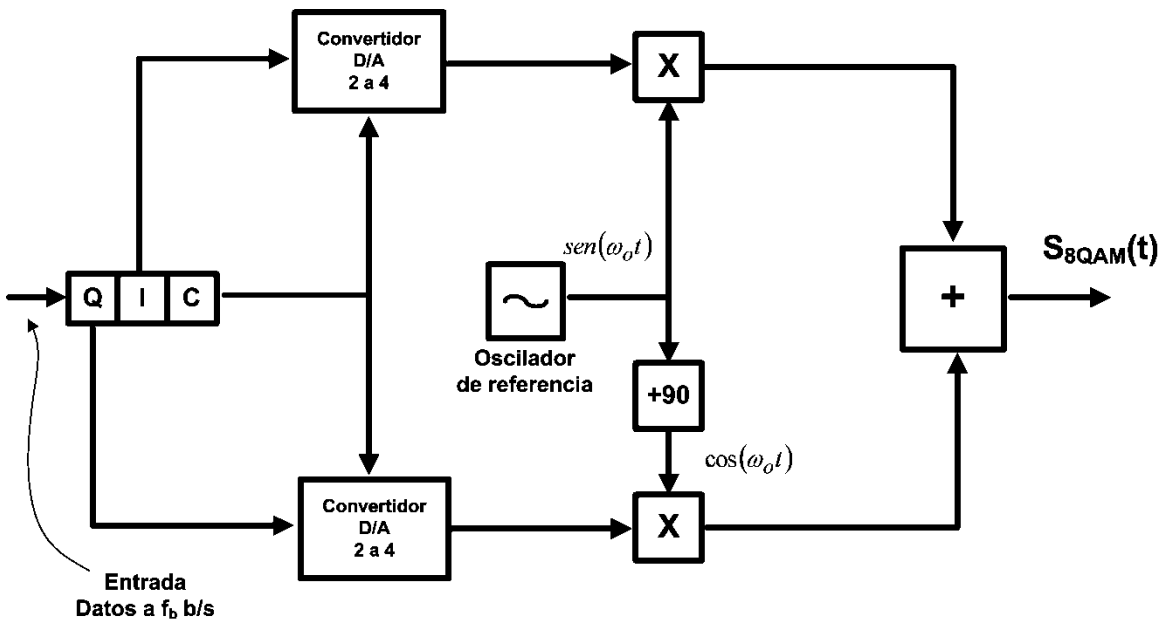


Figura 4.11 Modulador 8QAM

I/Q	C	Salida del convertidor
0	0	-0.541
0	1	-1.307
1	0	+0.541
1	1	+1.307

**Tabla 4.3** Tabla de verdad de los convertidores digital – analógico.

Entrada binaria			Amplitud	Fase
Q	I	C		
0	0	0	0.765 v	-135
0	0	1	1.848 v	-135
0	1	0	0.765 v	-45
0	1	1	1.848 v	-45
1	0	0	0.765 v	+135
1	0	1	1.848 v	+135
1	1	0	0.765 v	+45
1	1	1	1.848 v	+45

**Tabla 4.6.** Tabla de verdad de 8QAM

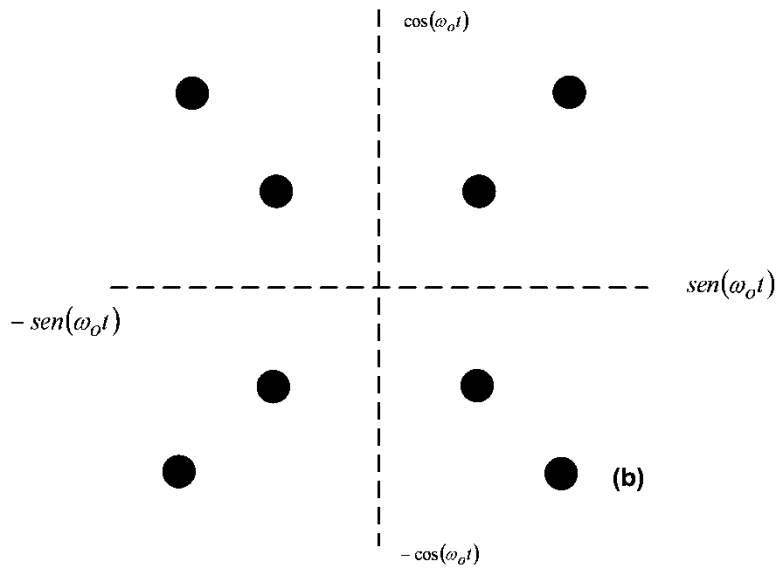
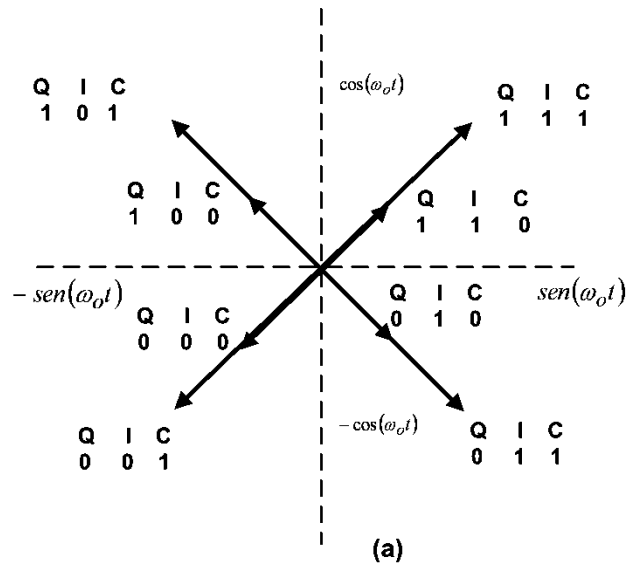


Figura 4.12. Diagrama Fasorial y diagrama de constelación de 8QAM

#### 4.4.5 Modulación por mínimo desplazamiento de frecuencia (MSK)

Mínimo desplazamiento de frecuencia MSK (de las siglas del inglés de: *Minimum Shift Keying*) es de un esquema utilizado en las comunicaciones digitales. Se clasifica dentro de las técnicas de modulación de fase continua (CPM por sus siglas en inglés).

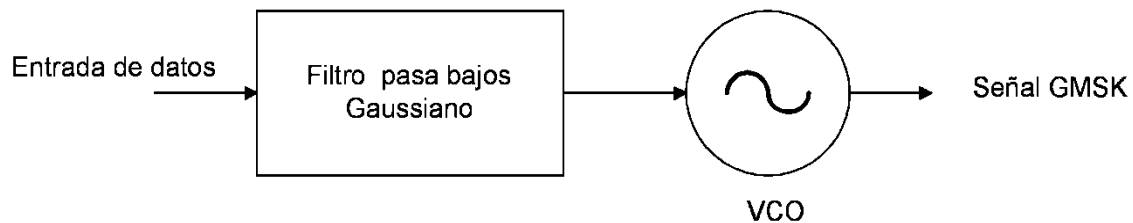
Esta es una señal FM digital (FSK) con un índice de modulación  $h= 0.5$  (Aunque también puede tomar otros valores) Esto es:

$$\frac{\Delta f}{R_b} = \frac{1}{2} \quad (4.8)$$

Donde

$\Delta f$  es máxima desviación de frecuencia  $=f_1-f_2$

$R_b$ = Tasa de transmisión de bits= $1/T$

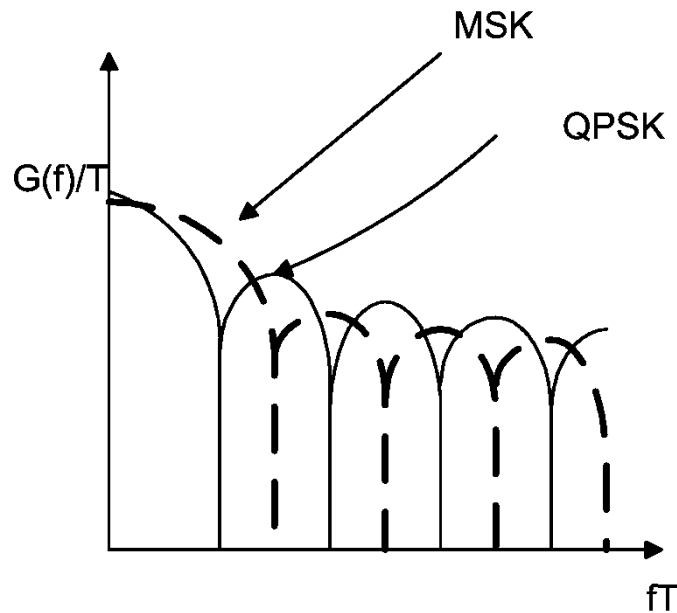


**Figura 4.13. Modulador GMSK.**

Como ya se mencionó, MSK es un caso especial de FSK donde el desplazamiento de frecuencia debe ser exactamente la mitad de la tasa de transmisión de bits o una separación de frecuencia de  $\frac{1}{2}T$ . Sin embargo este esquema tiene suficiente espectro fuera de banda de forma tal que deteriora el desempeño. El espectro se puede controlar por medio de un filtro pasabajos, tal como se ve en la figura 15. Con

la adición del filtro gaussiano a esta modulación se le denomina MSK gaussiana (GMSK)

Este filtro tiene una característica pasabanda gaussiana. El ancho de banda normalizado del filtro pasabajos gaussiano  $BT$  es uno de los parámetros de interés del modulador GMSK, pues incrementando  $BT$ , se reducen los lóbulos laterales incrementando la eficiencia espectral.



**Figura 4.14. Espectro de QPSK y MSK.**

La figura 4.14 se muestra el espectro QPSK y MSK con un valor de  $BT$  igual a infinito. Las modulaciones GMSK y OQPSK son ejemplos de sistema de modulación de alta eficiencia espectral debido a la transición suave de la portadora entre cada transición de símbolo.



# **CAPÍTULO V**

## **SISTEMAS DE ESPECTRO ESPARCIDOY**

### **CODIFICACION DE CANAL**

## **V. SISTEMAS DE ESPECTRO ESPARCIDO**

### **5.1 Introducción**

Las técnicas de espectro esparcido inicialmente se desarrollaron para aplicaciones militares, debido su resistencia a interferencia provocada por el enemigo y en el caso de las comunicaciones, a la dificultad de ser interceptada. A manera de definición se dice que una técnica es de espectro esparcido cuando el ancho de banda empleado en la transmisión es mucho mas grande que el ancho de banda mínimo requerido para transmitirla. En forma más precisa una técnica de espectro esparcido cumple con lo siguiente:

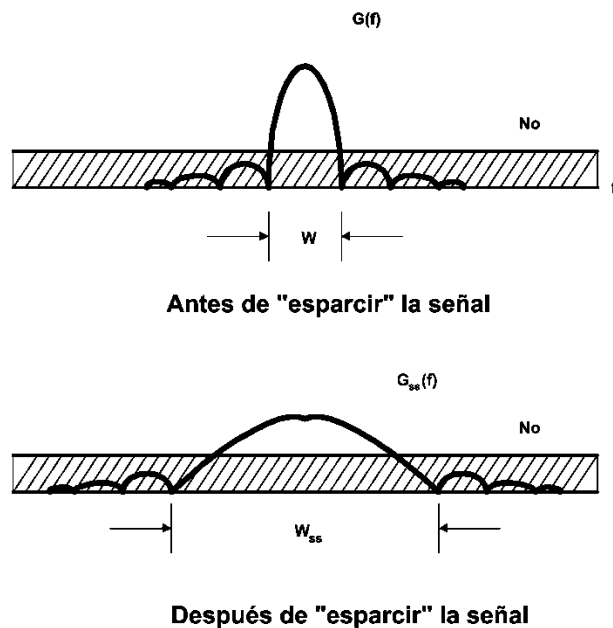
1. La señal ocupa un ancho de banda mucho mayor que el mínimo necesario.
2. El esparcimiento de la señal es logrado codificando los datos (la señal ) original en una señal código, la cual es independiente de los datos.
3. La operación de desesparcimiento realizada en el receptor se logra mediante la correlación de la señal recibida (esparcida) con una réplica sincronizada de la señal utilizada para el esparcimiento de la información.

### **5.2 Características de espectro esparcido (ventajas)**

En cualquier sistema limitado en banda (en el cual caen todos los sistemas de comunicaciones práctico), sólo el ruido de en el ancho de banda de la señal puede degradar la operación. El espectro esparcido tiene como uno de sus principales beneficios la supresión de interferencia, más que el de la reducción de ruido, como se mostrarán en los siguientes párrafos.

### 5.2.1 Espectro esparcido en presencia de ruido

El comportamiento de espectro esparcido en presencia de ruido se puede explicar con ayuda de la figura 5.1. Sea el espectro (densidad espectral de potencia) de la señal antes sin esparcimiento  $G(f)$ , y la señal  $G_{ss}(f)$  el espectro de la misma señal pero esparcida. Se puede notar en ambos casos que la densidad espectral de potencia del ruido blanco  $N_0$  es la misma en cada caso. La potencia de ruido es la integral del espectro del mismo, por lo que se puede ver que no hay mejora en el desempeño del sistema, sino incluso se incrementa la potencia de ruido.



**Figura 5.1 Espectro esparcido ante ruido**

### 5.2.2 Espectro esparcido en presencia de interferencia

En la figura 5.2 se muestra el comportamiento de espectro esparcido ante interferencia. Se supondrá que alguien busca interferir las comunicaciones (como en el caso de aplicaciones militares) En este caso existe una señal de interferencia con una potencia fija  $J$  y una densidad espectral de potencia  $J_0' = J/W$  en el cual  $W$  es el ancho de banda de la señal sin esparcir. Al esparcir el ancho de banda de la señal, el espectro de la señal que busca interferir a  $G(f)$  se puede comportar de dos maneras: 1) incrementar el ancho de banda para tratar de interferir con la señal, lo que provoca una reducción de la densidad espectral de potencia de la señal de interferencia de forma que  $J_0$  por un factor  $W/W_s$  en el espectro esparcido, resultando en un espectro  $J_0 = J/W_s$  conocido como espectro de interferencia de banda ancha.; 2) el espectro de la interferencia no ocupa todo el espectro esparcido sino solo una porción pero con una mayor densidad de potencia  $J_0/\rho$  en donde  $0 < \rho \leq 1$  en donde  $\rho$  es la porción de la banda del espectro esparcido que ha elegido el interferente. Si la elección no es adecuada, el efecto promedio del interferente será peor que si éste realiza una buena selección. La interferencia no solamente es provocada sino que puede ser causada por fenómenos naturales o de otros sistemas de comunicaciones, ó aún por la misma señal debido a trayectorias múltiples de la misma.

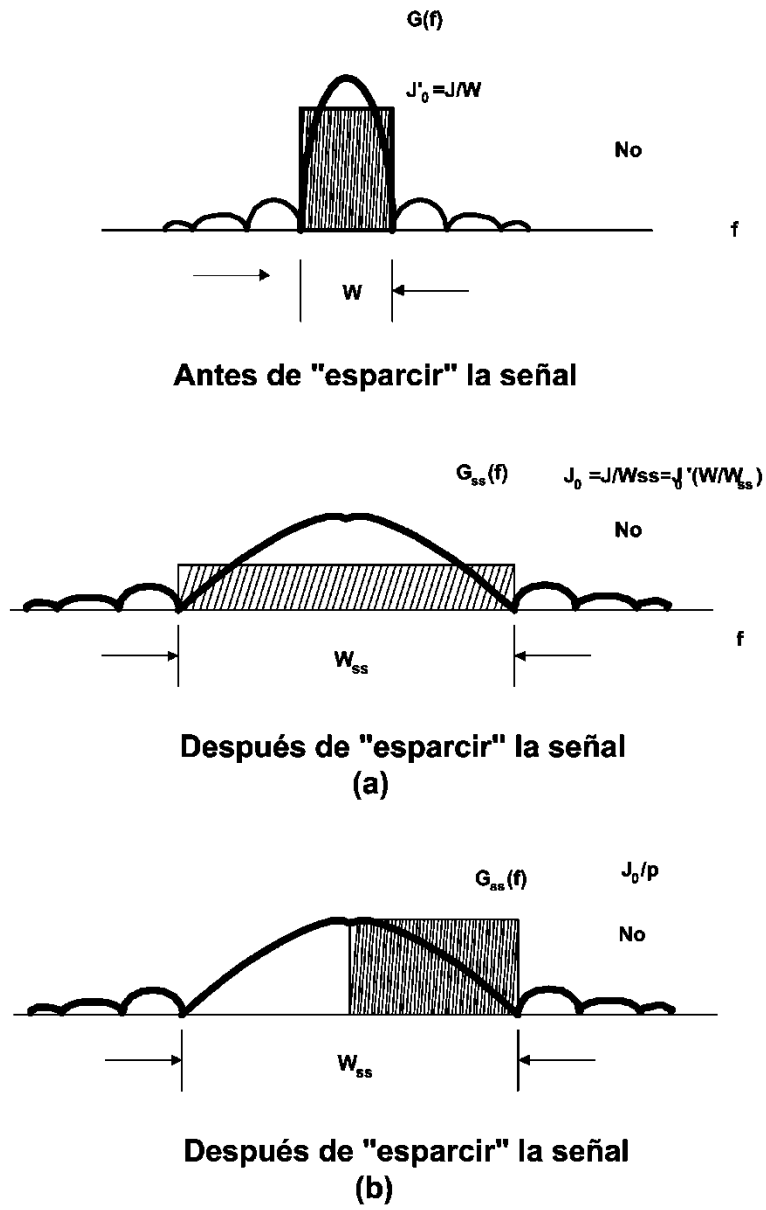
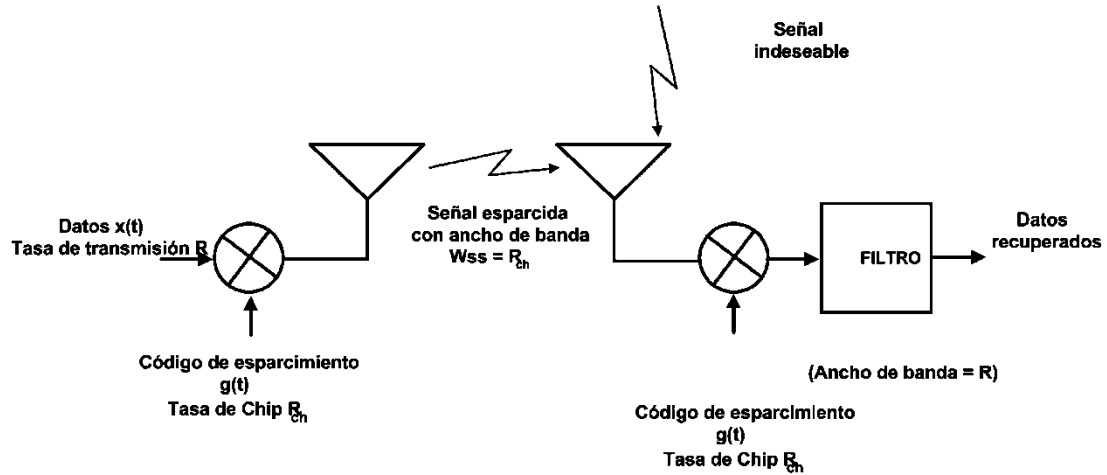


Figura 5.2 Espectro esparcido ante interferencia

### 5.3 Modelo del sistema de espectro esparcido (SS)

En la figura 5.3 se muestra el diagrama del modelo básico de la técnica de espectro esparcido. Los datos entran al modulador  $x(t)$  a una tasa de transmisión  $R$  (bits/s), el cual se multiplica por  $g(t)$  (código de esparciamiento), a una tasa de símbolo del código ó tasa de chip ( $R_{ch}$ ) chips/s, en donde  $R \ll R_{ch}$ . La multiplicación en el dominio del tiempo corresponde a una convolución en el dominio de la frecuencia. De acuerdo a lo anterior el ancho de banda de la señal esparcida es aproximadamente el de la señal expansora.

En el demodulador la señal es multiplicada por una réplica sincronizada de la señal esparcedora. Un filtro con ancho de banda  $R$  es usada para remover los componentes parásitos de alta frecuencia. Si existe una señal indeseable en el receptor, ésta será multiplicada por  $g(t)$ , esparciendo la señal indeseable. Considerando el ejemplo de la señal de interferencia que ocupa un ancho de banda relativamente angosto (Figura 5.2), dentro del ancho de banda se la señal esparcida. La señal de interferencia es esparcido al ancho de banda de la señal esparcida (señal de información deseada), la cual será removida por el filtro de ancho de banda  $R$  en el receptor.



### Sistema de espectro espacido básico

Figura 5.3. Sistema de espectro espacido básico

#### 5.4 Técnicas de espectro espacido

Existen diversas técnicas de espacio espacido para los sistemas de comunicaciones, entre otras están:

- Secuencia directa (SD)
- Salto en frecuencia (SF)
- Salto en el tiempo (ST)
- Combinación de las técnicas anteriores

De las técnicas anteriores las más utilizadas son las de secuencia directa y el de saltos en frecuencia

### **5.4.1 Secuencia pseudoaleatoria**

Los sistemas de espectro esparcido actuales usan la técnica conocida como referencia almacenada en el cual el código que esparce la señal es generado en forma independientemente tanto en el transmisor como en el receptor. La principal ventaja de un sistema bien diseñado de este tipo es la imposibilidad de que pueda ser predicho por medio del monitoreo de la señal. Este tipo de código no es realmente aleatorio, sino determinístico, ya que deberá ser generado independientemente en dos ó mas lugares, aunque para un receptor no autorizado deberá tener la apariencia aleatoria. Estas señales determinísticas de apariencia aleatoria son llamadas señales pseudoaleatorias ó pseudoruido.

### **Propiedades de una secuencia pseudoaleatoria**

- Las propiedades para que una señal pseudoaleatoria semeje a una señal aleatoria son:
  - Balance
  - Distribución de repeticiones
  - Autocorrelación

### **Balance**



Un buen balance requiere que en cada periodo de la secuencia, el número de dígitos binarios “1” del número de dígitos binarios “0” por más de un dígito.

### **Propiedad de corridas**

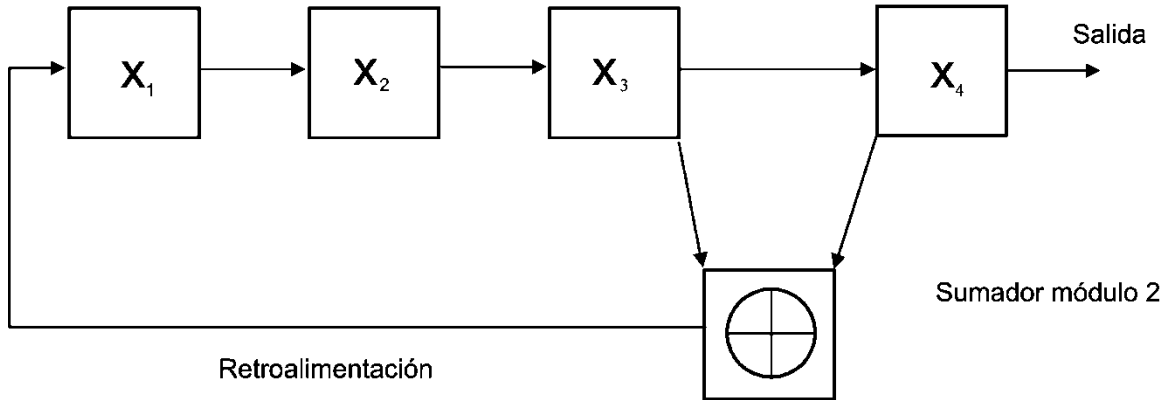
Una corrida (Run) es una secuencia de un solo tipo de dígito binario. La presencia de dígitos alternados establece una nueva repetición. En cada periodo es deseable que las secuencias de “unos” y “ceros” con la siguiente distribución: la mitad de las secuencias sea de longitud uno, la cuarta parte de longitud 2, la octava parte de longitud 3 y así sucesivamente.

### **Propiedad de Correlación.**

Si un periodo de la secuencia es comparado término por término con cualquier corrimiento cíclico de si mismo, es mejor sí el número de coincidencias difiere del número de diferencias por no más que uno.

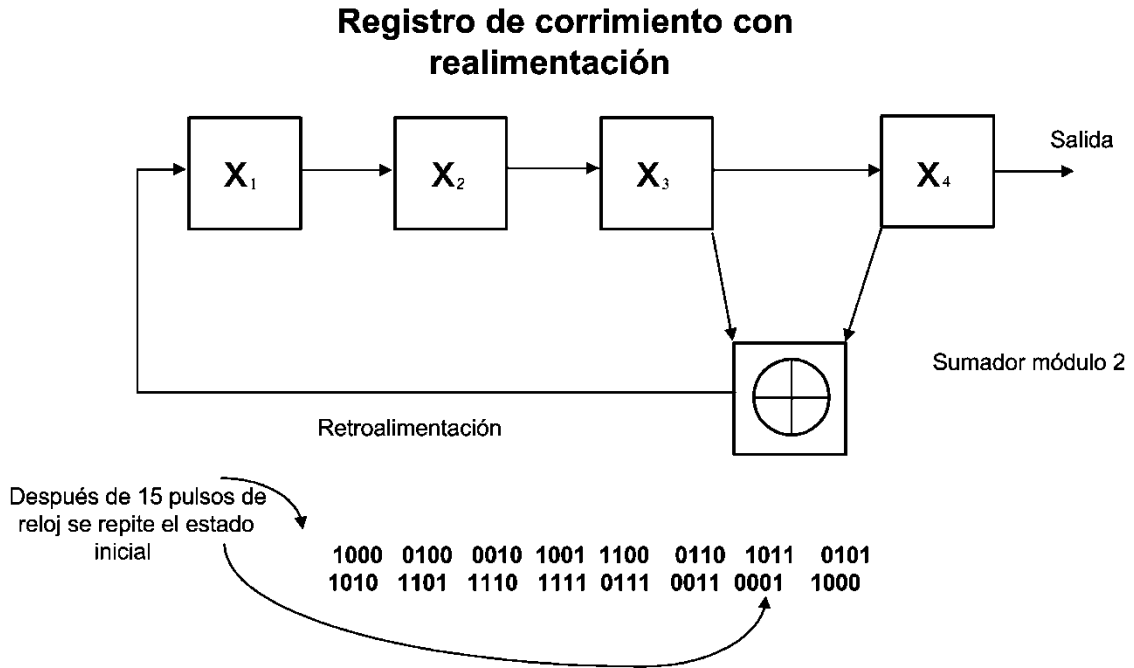
### **Generación de Secuencias de registros de corrimiento.**

Para aclarar el significado de las propiedades descritas en la sección anterior, considere el registro de corrimiento cíclico que se muestra en la figura 5.4. Éste se compone de cuatro registros de almacenaje y corrimientos, un sumador en módulo 2 (ver). El circuito es controlado por una señal de reloj (la cual se omite para clarificar el dibujo)

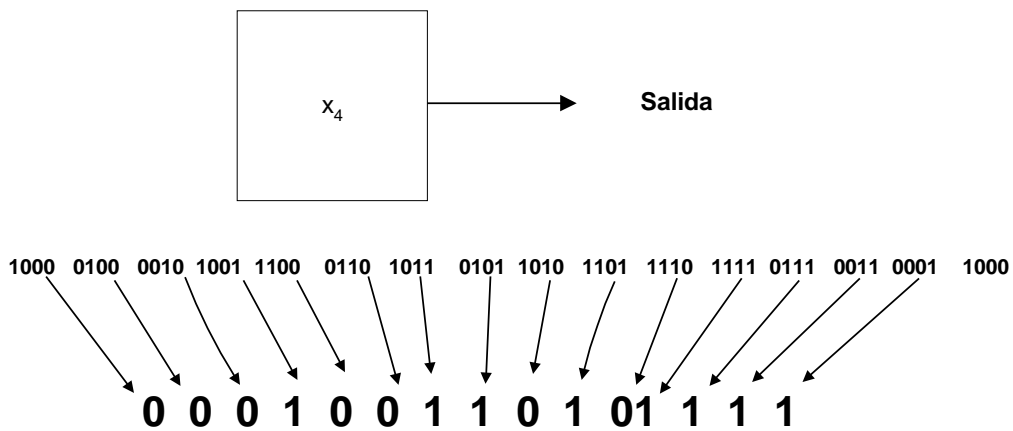


**Figura 5.4. Registro de corrimiento con realimentación**

En cada pulso de reloj, el contenido de los registros  $X_3$  y  $X_4$  son sumados en suma módulo 2 y el resultado alimenta al registro  $X_1$ . La secuencia de salida es tomada de la salida del registro  $X_4$ . Suponiendo que el registro  $X_1$  inicialmente se almacene un "1" y los registros restantes con cero, teniendo como estado inicial del registro a la combinación 1000. Después de 15 pulsos de reloj se restablece el estado inicial (Figura 5.5). En la figura 5.5 se muestran todos los estados de los registros con la secuencia 1000. La secuencia de salida ( $X_4$ ) obtenida (15 pulsos de reloj) se muestra en la figura 5.6, en el cual el bit ubicado más a la izquierda es el primer bit de salida.



**Figura 5.5** Funcionamiento del registro de corrimiento



**Figura 5.6** Salida del registro de corrimiento

De la figura 5.6 se puede analizar las propiedades de aleatoriedad del código. En cuanto a la propiedad de balance, si se observa hay siete ceros y ocho unos en la secuencia de la figura 5.6, cumpliendo la condición de balance. En cuanto a la

propiedad de “corridas”, si consideramos las corridas de ceros, se tiene que una mitad son de longitud 1, y una cuarta parte son de longitud 2. Sucede lo mismo para los “unos”. Lo relacionado a la correlación se trata en la sección función de autocorrelación. Las salidas de los registros de corrimiento dependen en el número de estados, las trayectorias de retroalimentación y las condiciones iniciales. Las secuencias de salida pueden ser de longitud máxima o de longitud no-máxima. Para secuencias de longitud máxima el periodo de repetición de las secuencias en pulsos de reloj  $p$  es:  $p=2n-1$  donde  $n$  es el número de estados del registro de corrimiento retroalimentado.

### 5.5 Función autocorrelación de las secuencias PN

La función autocorrelación  $R_x(\tau)$  de una señal periódica  $x(t)$  con periodo  $T_0$  está dada por la siguiente ecuación:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{K} \left( \frac{1}{T_0} \right) \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x(t+\tau)dt \quad \text{para } -\infty < \tau < \infty \quad (5.1)$$

$$K = \left( \frac{1}{T_0} \right) \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t)dt \quad (5.2)$$

Donde

$\mathbf{x}(t)$  es un pulso periódico que representa un código PN, cada pulso fundamental es llamado símbolo código PN o *chip*. Para una secuencia de duración de chip unitaria y con un periodo de  $p$  chips la autocorrelación puede ser obtenida por:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{p} \left( \begin{array}{l} \text{número de bits que coinciden menos} \\ \text{número de los que no coinciden en una} \\ \text{comparación de un periodo de la secuencia} \\ \text{con una posición de corrimiento cíclica } \tau \text{ de la secuencia} \end{array} \right) \quad (5.3)$$

La función de autocorrelación normalizada para una secuencia de longitud máxima  $R_x(\tau)$ , se muestra en la figura 5.7. Para  $\tau = 0$ , que es cuando  $x(t)$  coincide perfectamente con su réplica se tiene la máxima autocorrelación  $R_x(0) = 1$ . Para cualquier cíclico entre  $\mathbf{x}(t)$  y  $\mathbf{x}(t+\tau)$  con  $1 \leq \tau < p$  la función de autocorrelación  $-1/p$ .

### 5.5.1 Autocorrelación para una secuencia PN (ejemplo)

- Para  $R_x(t=0)$   $x(t)$  y su réplica coinciden, es decir  $R_x(t)=1$ .
- Para cualquier corrimiento cíclico entre  $x(t)$  y  $x(t+t)$  con valores de  $t$  entre 1 y  $p$  ( $1 < t < p$ ) la función de autocorrelación toma el valor de  $-1/p$

Ejemplo (Autocorrelación) En este se muestra la secuencia de salida dada anteriormente con la misma secuencia corrida un pulso de reloj

000100110101111

100010011010111

-----

daaddadadddaaaa

d = desacuerdo

a = acuerdo (coinciden)

$$R(\tau = 1) = \frac{1}{15}(7 - 8) = -\frac{1}{15}$$

Con lo anterior se ilustra la propiedad de correlación de aleatoriedad del pseudocódigo.

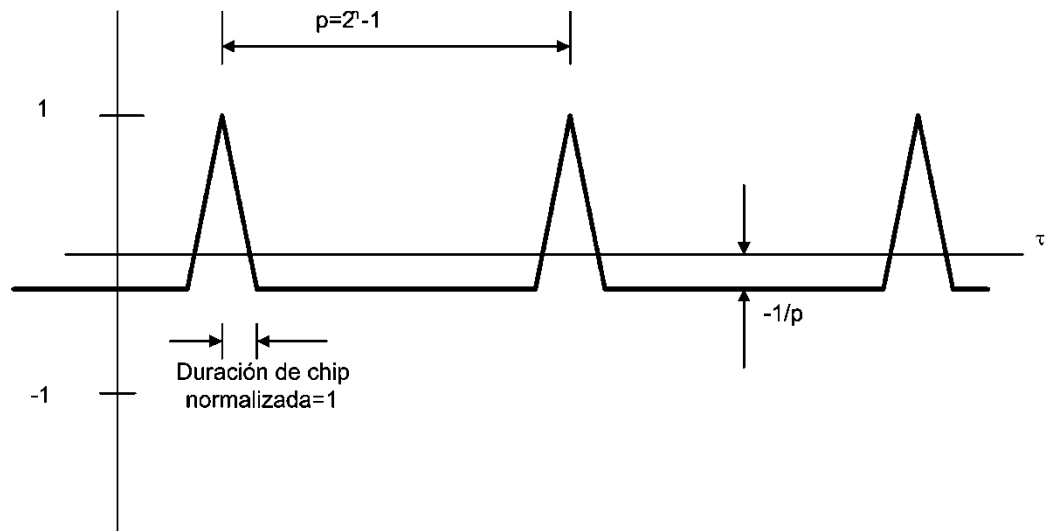


Figura 5.7. Función autocorrelación (secuencia PN)

### 5.6 Sistemas de espectro esparcido en secuencia directa.

En la figura 5.8 se muestra el diagrama a bloques de un modulador de secuencia directa. Secuencia directa es la técnica de espectro esparcido en la cual una señal portadora es primero es modulada con las señales de datos  $x(t)$ , y posteriormente es por una señal de alta velocidad (ó de banda ancha), la señal de esparcimiento

$g(t)$ . Considerando una portadora modulada por datos de envolvente constante, teniendo una potencia  $P$ , frecuencia  $\omega_0$ , y la modulación de la fase por los datos  $\theta_x(t)$ , dada por:

$$s_x(t) = \sqrt{2P} \cos(\omega_0 t + \theta_x(t)) \quad (5.4)$$

ó bien

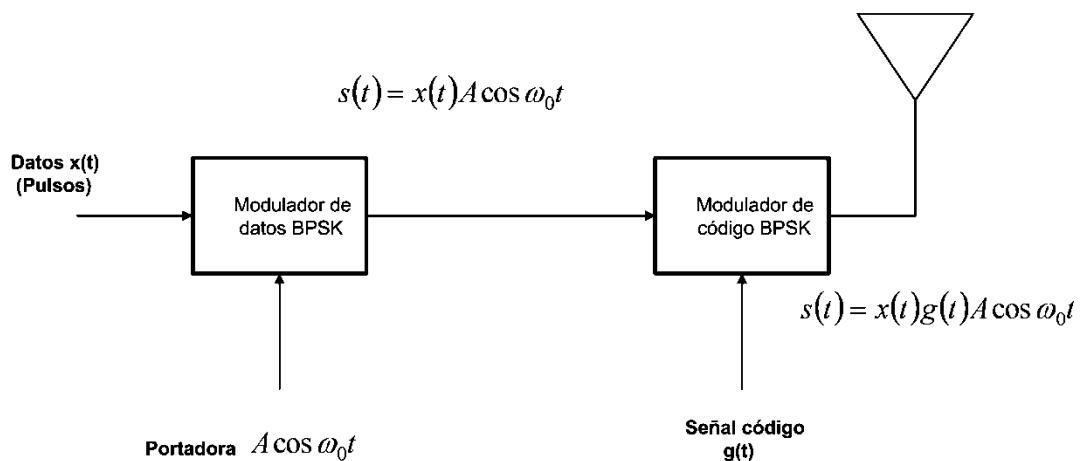
$$s_x(t) = \sqrt{2P} x(t) \cos(\omega_0 t) \quad (5.5)$$

en donde  $x(t)$  puede valer +1 y -1

La modulación de esta señal por la señal de espacimient  $g(t)$ , se obtiene la señal transmitida:

$$s_x(t) = \sqrt{2P} \cos(\omega_0 t + \theta_x(t) + \theta_g(t)) \quad (5.6)$$

La ecuación anterior también se puede representar (en el caso de modulación BPSK) como:



**Figura 5.8 Sistema de espectro esparcido (transmisor) con modulación BPSK.**

$$s_x(t) = \sqrt{2P}x(t)g(t)\cos(\omega_0 t) \quad (5.7)$$

en donde  $g(t)$  puede valer  $+1$  ó  $-1$ . De la ecuación anterior se desprende otra forma de implementar transmisor de espectro esparcido, en el cual se multiplica los datos por la secuencia de esparcimiento. En el dominio digital esta multiplicación se puede hacer con la suma en módulo 2 de las dos secuencias.

La demodulación de BPSK/SD se puede realizar correlacionando ó remodulando la señal recibida con una réplica sincronizada de la señal de esparcimiento  $g(t - T_d)$ . en donde  $T_d$  es el retardo estimado de la propagación de la señal desde el receptor al transmisor. Sin considerar el ruido la salida del correlacionador puede es:

$$s_{corr}(t) = A\sqrt{2P}x(t - T_d)g(t - T_d)g(t - \hat{T}_d)\cos(\omega_0[t - T_d] + \phi) \quad (5.8)$$

en donde  $A$  la ganancia del sistema y  $\phi$  es el ángulo de fase aleatorio en el rango de  $0$  a  $2\pi$ . Como  $g(t)=\pm 1$ , el producto  $g(t-T_d)g(t-\hat{T}_d)$  será unitario si  $\hat{T}_d = T_d$ , es decir la señal código generada en el receptor está sincronizada con el receptor. En condiciones de sincronización, la salida del correlacionador es la señal de modulada por datos sin dispersar la cual entra a un demodulador BPSK convencional para la recuperación de la información original.



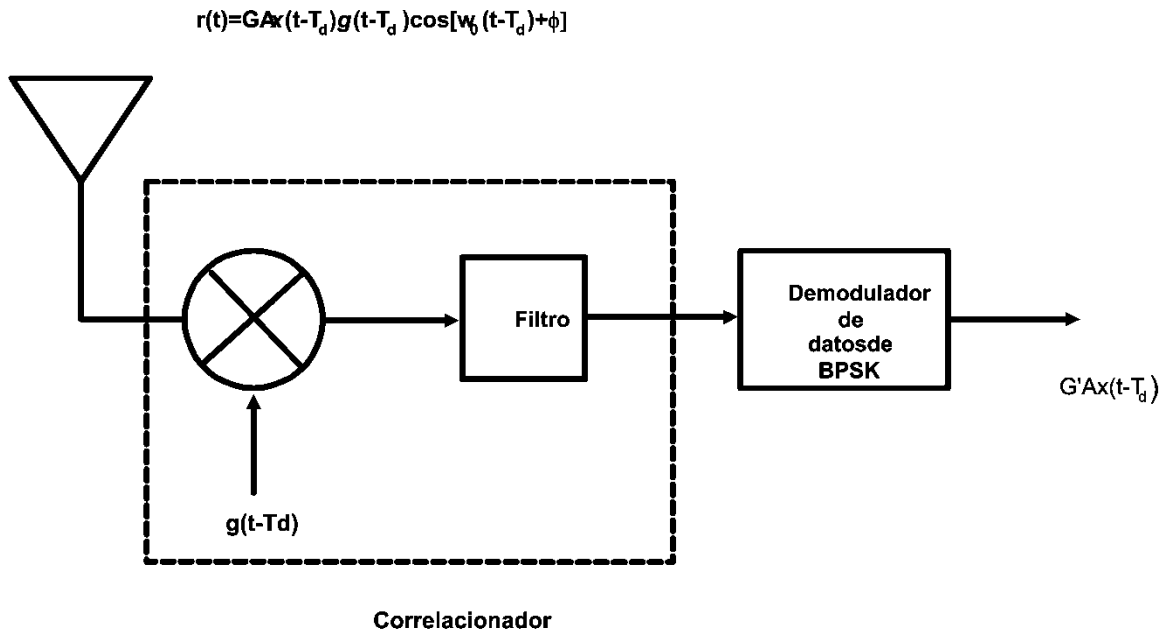


Figura 5.10 Receptor de espectro esparcido de secuencia directa

### 5.6.1 Operación de espectro esparcido en secuencia directa

En la figura 5.11 se muestra las señales los cuales se explican a continuación

1. Datos binarios transmitidos  $x(t)$
2. Secuencia código de esparcido  $g(t)$
3. Secuencia transmitida  $x(t)g(t)$
4. Fase de la portadora transmitida  $(\theta_x(t) + \theta_g(t))$
5. Corrimiento de fase producida por el código de desesparcido en el receptor  $\hat{\theta}_g(t)$
6. Fase de la portadora después del corrimiento de fase (desesparcimiento) producida por el código del receptor. (Suma de la fase de (5) más (6))
7. Datos remodulados  $\hat{x}(t)$ .

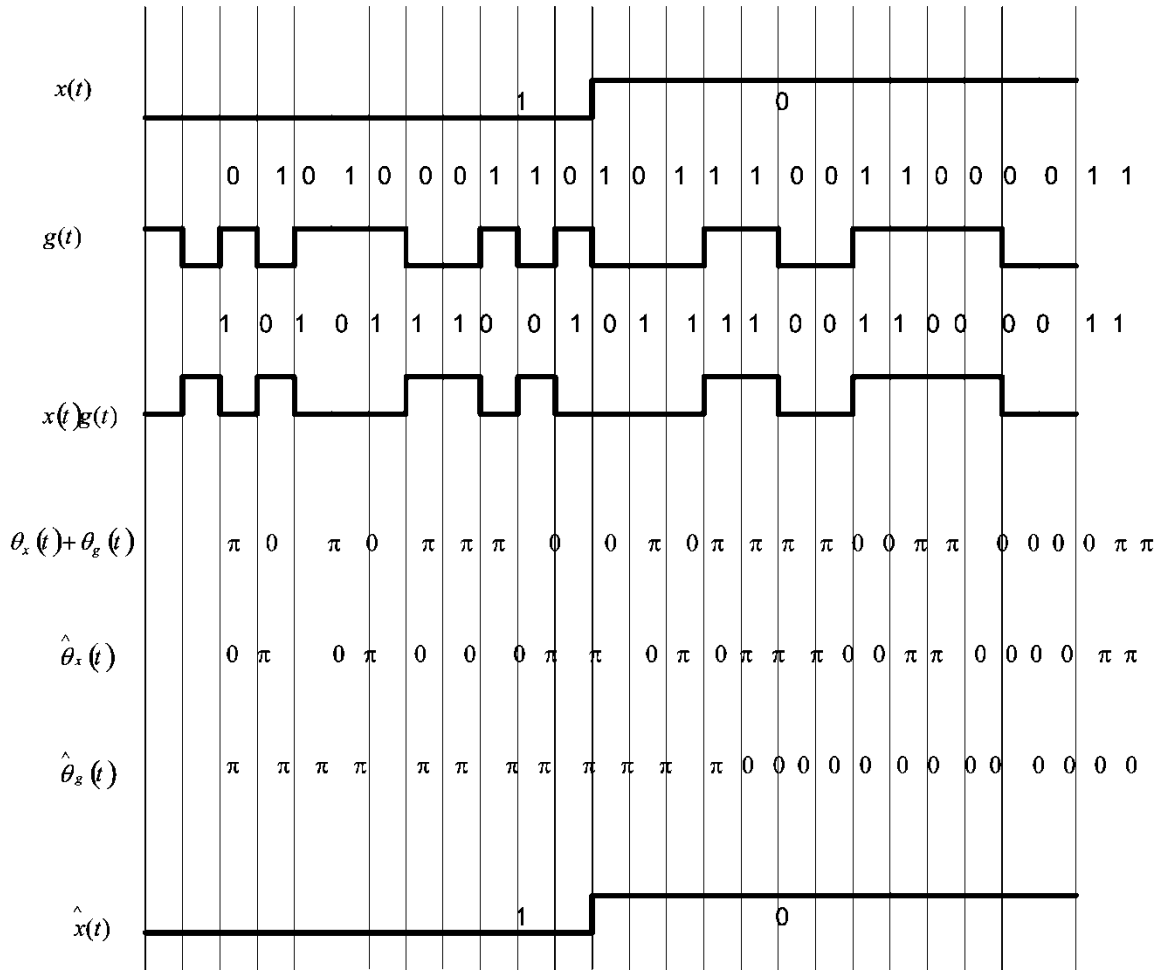


Figura 5.11. Señales de espectro esparcido en secuencia directa (ejemplo)

### 5.6.2 Ganancia de procesamiento

Una de las características de espectro es su capacidad de proteger a las señales de comunicaciones de interferencia. Uno de las maneras de medir que tanto una señal de espectro esparcido es de resistente a la interferencia es la razón entre señal a interferencia SJR (SJR, del inglés: signal to jammer ratio). Matemáticamente:

$$SJR = \frac{E_s N}{E_w D} \quad (5.9)$$

en donde  $E_s$  es la energía promedio de la señal,  $N$  es el espacio de dimensión  $N$ ,  $E_w$  es la energía de la señal de interferencia y  $D$  es el número posibles de señales ortogonales

Un parámetro más práctico para medir la “calidad” de un sistema de espectro esparcido es la ganancia de procesamiento  $G_p$ :

$$G_p = \frac{W_{ss}}{R} = \frac{N}{D} \quad (5.10)$$

$G_p$ =Ganancia de procesamiento

$W_{ss}$ =ancho de banda del espectro esparcido

$R$ =tasa de bit

$$G_p = \frac{R_{ch}}{R} \quad (5.11)$$

$R_{ch}$ =tasa de chip

Chip=es la más corta ininterrumpida forma de onda

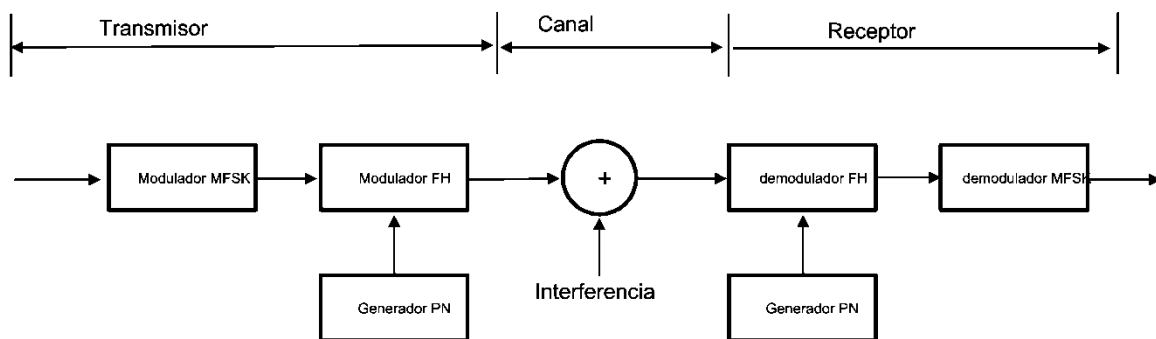
A manera de clarificar el concepto de Ganancia de procesamiento:

- Por ejemplo si un símbolo binario se compone de 1000 BPSK códigos chips la ganancia de procesamiento es de 1000.
- Es una medida de la resistencia de la señal (o robustez)
- Hay que tomar mil decisiones para saber si es un código válido

Los sistemas de espectro esparcido en secuencia directa generalmente utilizan modulaciones BPSK o QPSK

### 5.7 Sistemas de espectro esparcido con salto en frecuencia

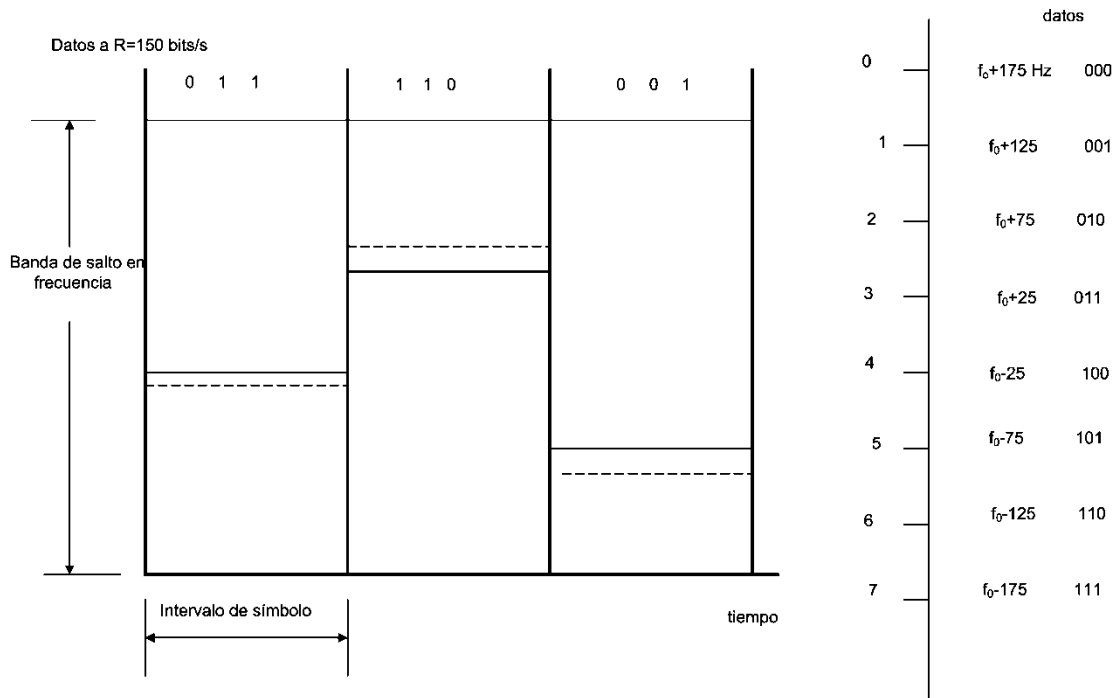
La técnica de espectro esparcido por salto de frecuencia ó FH (FH, del inglés Frequency Hopping) se utiliza en conjunto con las técnicas de modulación MFSK. En la figura 5.12 se muestra el diagrama básico de los sistemas MFSK. En los sistemas MFSK convencionales los datos modulan una portadora de frecuencia fija. En un sistema FH/MFSK los datos modulan una portadora en la cual la frecuencia es determinada en forma pseudoaleatoria. En la figura 5.12 se muestra el transmisor FH/MFSK. Como primer paso se modula los datos a la portadora como cualquier proceso MFSK convencional, y en el siguiente paso se realiza el salto de frecuencia. Una señal FH/MFSK puede ser visto como un conjunto de M frecuencia, las cuales son conmutadas en forma pseudoaleatoria, es decir “saltando” dentro de un ancho de banda  $W_{ss}$ .



### Sistema FH/MFSK

Figura 5.12. Sistema FH/MFSK

Cada vez que ocurre un salto de frecuencia, un generador de ruido pseudoaleatorio alimenta al sintetizador de frecuencia una palabra la cual dicta uno de los  $2_L$  posiciones. El ancho de banda del salto en frecuencia es denotado por  $W_{ss}$  y el mínimo espaciamiento entre posiciones de frecuencia consecutivas  $\Delta f$ , dictan el mínimo número de chips necesarios para la palabra que dicta la frecuencia al modulador FH



**Figura 5.13. Salto de frecuencia con 8-PSK (ejemplo de operación)**

**Explicación de la operación de sistemas de salto de frecuencia.**La explicación de la operación de un sistema con salto en frecuencia se puede observar en la figura 5.13.

Para un sistema de este tipo se tienen 8 frecuencias posibles de salida (símbolos). Si se supone que  $R= 150$  bit/s, la velocidad de símbolo (ó baudio) es de  $R/k = 150/3$

símbolos/s, donde  $k=\log_2 M$ . La duración de símbolo para este sistema  $T=1/50=20\text{ms}$ .

En la figura 5.13 se muestran la secuencia de tres símbolos que provocan tres saltos de frecuencia, en donde cada símbolo (ó cada salto) corresponden a palabras de tres bits (datos de entrada)

### **5.8 Sincronización**

Los sistemas de espectro esparcido, el receptor debe utilizar una réplica sincronizada del código dispersor para poder la demodular con éxito la señal recibida. El proceso de sincronización consiste básicamente en dos pasos. El primero es llamado adquisición y consiste en llevar las señales esparcidas a un alineamiento entre ellas. El segundo paso es llamado rastreo y consiste en mantener continuamente las formas de onda alineadas por medio de un lazo de retroalimentación.

### **5.9 Aplicaciones**

Entre las aplicaciones de espectro esparcido se pueden citar:

- Sistemas celulares (Estándar IS-95)
- Redes de área local inalámbricas (WLAN IEEE 802.11)
- Sistema de posicionamiento global (GPS)

## **5.10 Codificación de canal**

### **Introducción.**

La finalidad de la codificación de canal es la detección y corrección de errores producidos en el canal de comunicación o en medios de grabación, como consecuencia del ruido y distorsión introducidos, tanto por el medio de propagación, como por las no linealidades en el propio sistema de transmisión. El tema es muy amplio y su tratamiento a fondo queda fuera del contexto de esta obra, por lo que aquí, se tratarán únicamente los principales aspectos relacionados con la transmisión digital de señales de televisión y en la bibliografía al final del capítulo, se dan algunas referencias para consulta de quienes deseen profundizar en estos temas.

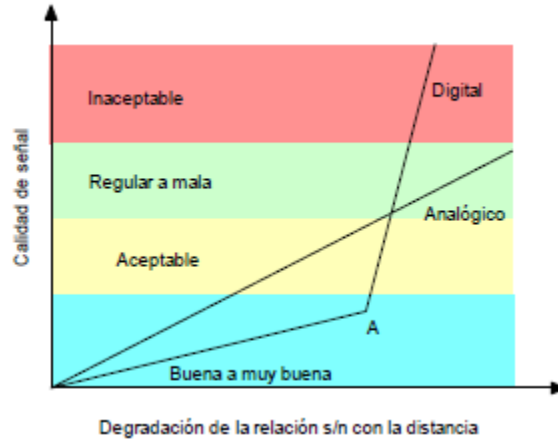
### **Generalidades.**

En los sistemas digitales de comunicaciones hay dos causas principales que influyen en el deterioro de la señal recibida. La primera es el ruido introducido por el propio canal de comunicaciones, en que los mecanismos de propagación juegan un papel muy importante. La segunda es el ruido de cuantificación, consecuencia del proceso de codificación, que se introduce inevitablemente en el transmisor y que se transporta por todo el sistema hasta la salida del receptor. El ruido del canal produce errores de transmisión, que hacen que la señal reconstruida por el receptor no sea la misma que la señal transmitida. La fidelidad de la transmisión de información se mide en términos de la tasa de errores o probabilidad de error es decir, la probabilidad de que el símbolo a la salida del receptor o reproductor sea diferente al símbolo transmitido o grabado. Tanto los sistemas de transmisión como de grabación y reproducción están sujetos a errores. En la transmisión y grabación de señales digitales de audio, vídeo o datos en general, igual que en cualquier sistema digital de comunicaciones, el caudal binario recibido o reproducido debe ser, en la medida posible, igual que el transmitido o

grabado, por lo que la información debe protegerse al máximo contra las degradaciones que inevitablemente introduce el medio de transmisión o los circuitos de procesado de la señal. Los sistemas de comunicaciones por cable y satélite son menos hostiles que los de radiodifusión terrestre, ya que los primeros utilizan un medio de transmisión muy estable: cable o fibra óptica, en que el principal problema es la atenuación, fácilmente predecible y cuyos efectos pueden compensarse con relativa facilidad. En el caso de comunicaciones por satélite también el comportamiento del medio de propagación, aunque sujeto a variaciones por meteoros atmosféricos en ciertas bandas, es bastante predecible y por consecuencia, sus efectos también pueden compensarse.

Por el contrario, los sistemas de radiodifusión terrestre presentan los problemas más complejos a causa de los diversos mecanismos que intervienen en la propagación y que contribuyen considerablemente a la degradación de la señal. En los sistemas terrestres los efectos multi-camino desempeñan un papel importante en la atenuación y retardo de la señal recibida y los desvanecimientos de la señal causados por la variabilidad del entorno de propagación producen tanto atenuación variable, como dispersión temporal y frecuencial de la señal, que se traduce en destrucción de la información transmitida o en interferencia entre símbolos con el consecuente aumento en la tasa de errores. Conviene señalar que la codificación de canal no tiene que ver con la codificación de fuente. El codificador de canal tiene como entrada una señal digital procedente del codificador de fuente, en este caso, el codificador MPEG. El codificador de canal no "sabe" si la señal es de audio, vídeo o de otro tipo, para él se trata únicamente de una secuencia de bits cuya integridad debe proteger de alguna manera para que pueda ser reproducida fielmente en el receptor.





### 5.11 Codificación de la forma de onda - Introducción a la modulación digital.

La codificación de canal puede enfocarse de dos formas<sup>1</sup>: codificación de la forma de onda, o bien codificación mediante secuencias estructuradas o de redundancia estructurada. La primera tiene por objeto transformar la forma de onda de la señal a fin de que el proceso de detección sea más inmune a los errores de transmisión. La segunda, transforma las secuencias de datos en "secuencias mejores" agregando redundancia, es decir más bits a la información de entrada para que el receptor pueda detectar y corregir errores en la información transmitida. La detección de errores, por sí sola, no es suficiente para proporcionar la protección necesaria y es necesario implementar algún medio para que, una vez detectado el error pueda estimarse y reconstruirse la información perdida. Así, en tanto que la codificación de fuente tiene por función reducir al máximo el caudal binario preservando el contenido de información, la codificación de canal tiene que agregar información al código de fuente para hacer posible la detección y corrección de errores.

La codificación de forma de onda tiene por objeto transformar un conjunto de pulsos en otro conjunto mejorado, de modo que cada una de las formas de onda así codificadas sea lo menos

parecida posible a cualquier otra del conjunto. En otras palabras, se busca que los coeficientes de correlación cruzada entre todos los pares de señales del conjunto sea el menor posible. De hecho, la codificación de forma de onda se asocia directamente con la modulación digital.

A diferencia de la transmisión en banda base, para transmitir una señal digital en un canal en banda e paso es necesario modular una portadora, generalmente senoidal, con los datos de entrada. Dichos datos pueden representar prácticamente cualquier cosa, desde la información producida por una computadora hasta una señal de vídeo o audio. El medio de transmisión puede ser una línea física, tal como un cable telefónico, una línea coaxial o una fibra óptica, o bien el aire o en general, el espacio. Las características del medio pueden ser constantes o variables como en el caso de comunicaciones móviles y, en cualquier caso, el proceso de modulación conlleva la variación de la amplitud, frecuencia o fase de una portadora de acuerdo a los datos de entrada. En el caso de comunicaciones digitales esto da lugar a tres tipos de modulación: variación de amplitud (ASK o Amplitude Shift Keying), de frecuencia (FSK o Frequency Shift Keying) y de fase (PSK o Phase Shift Keying), que constituyen casos especiales de modulación de amplitud, frecuencia y fase2 donde en comunicaciones digitales, la señal moduladora consiste de un tren de pulsos o bien de una versión de éstos, codificada en niveles múltiples. Si la modulación se realiza sobre una portadora senoidal, la codificación multinivel se aprovechan por el modulador para producir cambios discretos en la amplitud (ASK), frecuencia (FSK) o fase de la portadora (PSK). Quizá lo anterior resulte más claro si se piensa que una secuencia de bits puede codificarse en grupos de dos bits. Sea, por ejemplo, la secuencia:

101100100111

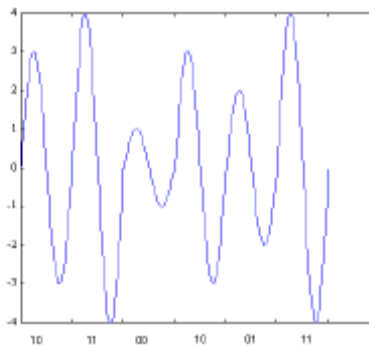
que puede codificarse en la forma:

10 11 00 10 01 11

Supóngase ahora que se utiliza modulación de amplitud y que a cada posible grupo de dos bits se asigna una amplitud de voltaje a una señal senoidal, por ejemplo:

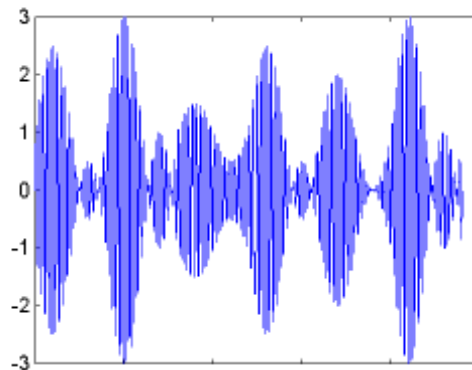
00 1 V  
 01 2 V  
 10 3 V  
 11 4 V

La señal senoidal resultante variará su amplitud en la forma mostrada en la figura 3.2. En este ejemplo, el voltaje de la portadora puede tener hasta cuatro diferentes niveles, que dependen de la combinación de bits a la entrada del modulador. Si la secuencia binaria se agrupara en símbolos de tres bits, se tendrían ocho niveles de amplitud y así sucesivamente. En este ejemplo se ha ilustrado en términos muy simples la modulación ASK multinivel. Algo semejante ocurre si la modulación es en frecuencia (MFSK) o en fase (MPSK), en que M indica el número de frecuencias o fases diferentes producidas por cada combinación de símbolos. El conjunto de bits que, en el ejemplo anterior producen un determinado nivel de la señal senoidal, se designa como símbolo. Para este caso, cada símbolo está formado por dos bits.



De la discusión anterior se pueden extraer algunas conclusiones. La codificación de forma de onda da lugar al agrupamiento de varios bits consecutivos de una secuencia, en un solo símbolo. El símbolo resultante puede modular a una portadora senoidal ya

sea en amplitud frecuencia o fase variando cada uno de ellos en forma discreta. Esta característica permite reducir el ancho de banda respecto al que sería necesario si no se hubiera codificado la forma de onda es decir, si solamente se transmitiera un bit por símbolo. La *eficiencia espectral* en este último caso sería de un bit por cada ciclo de la portadora (1 bit/Hz), en tanto que en el caso del ejemplo, la eficiencia es de 2bits/Hz. Este aspecto es de gran importancia en canales limitados en banda en los que es necesario aprovechar al máximo el ancho de banda disponible. Así, si el caudal binario original es, por ejemplo, de 10 Mbit/s cuya transmisión requiere un ancho de banda del orden de 10 MHz, utilizando codificación de forma de onda de dos niveles, el ancho de banda requerido se reduce, teóricamente, a la mitad. Es importante tener en cuenta que la señal ASK anterior, no es la que se transmite por el canal de radiofrecuencia, de modo que la *modulación de canal* no debe confundirse con la *modulación de RF*. Por ejemplo, si la señal anterior modula a una portadora de RF en AM completa, con un índice de modulación de 0.5 y para 1 V de amplitud de la portadora, la señal resultante sería como la que se ilustra en la figura.



### 5.12 Detección de errores

Una ventaja importante de los sistemas digitales sobre los analógicos, es su capacidad, aunque limitada, para reconocer y corregir errores causados por ruido u otras

interferencias en el sistema. Si el número de errores excede los límites de capacidad de corrección, se emplea otra técnica designada como *ocultación* (concealment) de errores y que se aplica para reducir sus efectos visibles. Esta técnica es de particular importancia en las reproductoras de vídeo y en los sistemas de transmisión. Los primeros sistemas de cómputo electrónico emplearon métodos relativamente simples de detección de errores; el principal, basado en el cómputo de *paridad* de los símbolos de información, que consiste en agregar uno o más bits a cada símbolo o palabra de código de forma tal que el número total de bits de un símbolo sea par o impar. Supóngase por ejemplo, un código octal en que cada símbolo se representa mediante tres bits en la forma siguiente:

```
0 000
1 001
2 010
3 011
4 100
5 101
6 110
7 111
```

Supóngase ahora que en el transmisor se agrega un bit adicional (paridad) a cada símbolo, de modo que el número total de bits en cada símbolo sea siempre par. El código transmitido será ahora:

```
0 0000
1 0011
2 0101
3 0110
4 1001
5 1010
6 1100
7 1111
```

El bit de paridad se indica en la posición menos significativa (a la derecha) en la tabla anterior. En el receptor los bits de información, los tres más significativos en este ejemplo, se separan del bit de paridad y con los bits de información el receptor vuelve a calcular la paridad que corresponde a cada símbolo recibido. La paridad así calculada se compara con el bit de paridad correspondiente al símbolo recibido, y si los bits de paridad recibidos y los generados en el receptor no coinciden, será indicación de que ha habido un error en la transmisión. Sin embargo, en estas condiciones, el receptor no puede saber si el error está en los bits de información recibidos o en el bit de paridad recibido y tampoco tiene posibilidad alguna de estimar cuál debió ser el símbolo correcto ni de corregirlo. Tampoco tiene posibilidad de saber si el error alcanza sólo a un bit o a más en un mismo símbolo.

En general, en el transmisor, por cada símbolo de  $n$  bits de longitud, se computan  $k$  bits de paridad y se transmiten como un símbolo de longitud  $n+k$  bits. En el receptor, se recibe un símbolo  $n'+k'$ , de la misma longitud que el transmitido. Es decir  $n'$  representa ahora un símbolo de la misma longitud que  $n$ , pero cuyos bits pueden haber sido corrompidos durante la transmisión. Lo mismo ocurre con los bits de la paridad recibida,  $k'$ . La primera acción del receptor, una vez que se ha demodulado la señal, es separar los  $n'$  bits de información de los  $k'$  bits de paridad. Con los  $n'$  bits de información, el receptor calcula la paridad que correspondería a ese símbolo recibido,  $k''$ , y la compara con los bits de paridad recibidos,  $k'$ . Si  $k'=k''$ , el receptor asume que  $n'=n$  y da por válido el símbolo recibido. En caso contrario genera una señal de error que será utilizada para tomar las acciones necesarias, por ejemplo solicitar la retransmisión del símbolo o intentar corregirlo en el propio receptor.

Como puede apreciarse, este método de detección de errores es muy simple y considerablemente limitado, ya que no permite identificar si el error está en los bits de información o de la propia paridad y, por otra parte, no permite inferir la naturaleza del error ni corregirlo. Aún así, su propia simplicidad hace que continúe siendo un método atractivo, fácil de implementar y de bajo costo, suficiente en muchas aplicaciones, pero no en transmisión de información de televisión. El ejemplo anterior proporciona una idea básica del principio empleado en la detección de errores y el concepto de paridad se suele emplear extensamente para este fin, si bien con procedimientos más complejos en que se utiliza tanto la *paridad transversal* del ejemplo como la *paridad longitudinal* en que se calcula tanto la paridad por símbolo como la paridad de los bits en la misma posición relativa de una secuencia de símbolos, a fin de dar mayor fiabilidad a la detección de errores. En los sistemas que emplean paridad, la detección por sí sola no suele permitir identificar el bit en error en un símbolo, por lo que la corrección de errores puede hacerse considerando los bloques de datos como matrices bidimensionales (longitud del bloque  $\times$  longitud de un byte o de un símbolo). Por ejemplo un bloque de 8 bytes de longitud, puede considerarse como una matriz de  $8 \times 8$  bits. Asignando un bit de paridad a cada fila y a cada columna de la matriz, pueden localizarse errores de un bit en la intersección de la fila y columna en que se detecta el error y el bit dañado puede corregirse invirtiendo su valor. Esta forma de corrección de errores se designa como código cruzado (crossword) o de producto. El esquema anterior de corrección es adecuado únicamente para errores de un solo bit por bloque y se han desarrollado sistemas más sofisticados que pueden corregir más errores. Dos de los códigos más utilizados en televisión digital son el código de Hamming y el de Reed-Solomon.

### **Código de Hamming de protección contra errores**

Este código fue inventado por Richard Hamming en 1949 y es un código binario capaz de corregir errores de un bit por símbolo y de detectar hasta dos errores de bit por símbolo, pero no de corregirlos. Es un código que se ha utilizado extensamente en las memorias RAM de computadoras y resulta una buena elección cuando los errores son aleatorios. Si los errores ocurren en ráfagas, como suele ocurrir en la transmisión terrestre de televisión digital, es necesario utilizar otros códigos más complejos como los códigos no binarios de bloque, o los códigos convolucionales. El código de Hamming utiliza bits adicionales de paridad para la detección, y si es posible, corrección de errores. El número de bits de paridad, o verificación de errores está dado por la reglade Hamming y es función del número de bits de información transmitidos. Esta regla se expresa mediante la desigualdad siguiente:

$$d + p + 1 \leq 2^p$$

donde  $d$  es el número de bits de información o datos y  $p$  el número de bits de paridad. Los bits de paridad se agregan a los de información, constituyendo así una palabra o símbolo de Hamming. El tamaño,  $c$ , de esta palabra es, simplemente,  $d + p$  y el código se designa como  $(c, d)$ . El ejemplo dela sección 3.3, constituye un caso particular en que  $p = 1$  y, aunque se emplea en algunos casos debido a su simplicidad, aquí resulta de utilidad únicamente para ilustrar el concepto de paridad. En el código de Hamming, por lo general se emplean tres o más bits de paridad, como se ilustra con el ejemplo a continuación para un código  $(7,4)$ , es decir, con siete bits en total, de los cuales cuatro son de información y los tres restantes de paridad. El código del ejemplo es de paridad par. Un código que cumple la regla anterior de Hamming se designa como código perfecto del que el código  $(7,4)$  es un ejemplo de matriz generadora  $G$ , en aritmética de



módulo 2 y los símbolos resultantes constituyen vectores de código ( $c_1, c_2, \dots, c_n$ ), que consisten de los bits de información originales y de los bits de paridad calculados. La matriz generadora utilizada en la construcción de los códigos de Hamming consiste de una matriz de identidad ( $I$ ) y una matriz generadora de paridad ( $A$ ), de modo que:

$$G = [I : A]$$

por ejemplo:

Escriba aquí la ecuación.

G=

$$G = \left( \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \right)$$

Supóngase que el símbolo a transmitir, compuesto por cuatro bits sin paridad es [1 0 0 1]. La multiplicación del vector de 4 bits ( $d_1, d_2, d_3, d_4$ ) por  $G$ , da como resultado un vector de símbolos de 7 bits de la forma ( $d_1, d_2, d_3, d_4, p_1, p_2, p_3$ ):  $c = [1 0 0 1 0 0 1]$

Es evidente que la partición  $A$  de  $G$  es la responsable de la generación de los bits de paridad. Cada columna de  $A$  representa un cálculo de paridad computado sobre un subconjunto de  $d$ . La regla de Hamming requiere que  $p = 3$  para un código (7,4), por consiguiente,  $A$  debe contener tres columnas que produzcan tres bits de paridad. Si las columnas de  $A$  se eligen de forma que cada columna sea única, ( $p_1, p_2, p_3$ ) representa la paridad calculada de tres subconjuntos distintos de  $d$ . La validación del símbolo o palabra de código recibida,  $r$ , se realiza multiplicando esta palabra por una matriz de verificación de paridad de la forma

$$H = [A^T | I]$$

Es evidente que la partición  $A$  de  $G$  es la responsable de la generación de los bits de paridad. Cada columna de  $A$  representa un cálculo de paridad computado sobre un

subconjunto de  $d$ . La regla de Hamming requiere que  $p = 3$  para un código (7,4), por consiguiente,  $A$  debe contener tres columnas que produzcan tres bits de paridad. Si las columnas de  $A$  se eligen de forma que cada columna sea única,  $(p_1, p_2, p_3)$  representa la paridad calculada de tres subconjuntos distintos de  $d$ . La validación del símbolo o palabra de código recibida,  $r$ , se realiza multiplicando esta palabra por una matriz de verificación de paridad de la forma

$$H = [AT \mid I]$$

erróneo puede determinarse analizando que comprobaciones de paridad fallaron, siempre y cuando sólo haya un bit erróneo. Por ejemplo, si  $r = [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]$ ,  $s = [1 \ 0 \ 1]$  y este síndrome es igual a la tercera columna de  $H$ , lo que corresponde al tercer bit de  $r$ , el bit erróneo. Los bits de datos de un bloque se transmiten sin alteración y van seguidos de un número específico de bits de paridad. Esto se conoce como *código sistemático* y, en el código Hamming, la matriz para la generación de los bits de paridad se diseña de manera que el patrón de los bits de paridad en error o sin él, proporciona la dirección de memoria de los bits de datos erróneos. En la práctica, Los códigos de Hamming son fáciles de implementar en hardware y pueden detectar y corregir con facilidad, errores de un bit por bloque. Eventualmente pueden detectarse errores adicionales, pero no pueden corregirse. El ejemplo anterior ilustra de forma simple el funcionamiento del código Hamming, si bien se emplean también códigos no sistemáticos en que los bits de paridad se intercalan entre los de información. Una forma especial del código Hamming es el código de verificación de redundancia cíclica(CRC) y se utiliza con frecuencia en transmisión de datos. En televisión, para la transmisión digital de audio y vídeo se utiliza el código Reed-Solomon (R-S), mucho más potente que el de Hamming y, en algunos casos, como en radiodifusión terrestre, se utiliza el código R-S concatenado a otro código convolucional.

### **Tipos de control de errores**

Puesto que los bits sólo tienen dos estados, la detección de un error de bit puede corregirse fácilmente, simplemente invirtiendo el valor del bit. La ocultación de errores, que se aplica principalmente en reproductores de vídeo, es lo que podría designarse como un procedimiento de último recurso cuando no es posible corregir el error, por ejemplo, cuando el error afecta a un número considerable de bits. El principio en que se basa la ocultación de errores es la interpolación, tanto espacial como temporal, de bits adyacentes. Sin embargo, la aplicación adecuada de la ocultación de errores requiere del conocimiento de la existencia del error, por lo que siempre es necesario un medio para poder detectarlo redundante la información y hay dos formas básicas de aplicar la redundancia en el control de errores. La primera consiste en detectar los errores y retransmitir los símbolos erróneos. Así, en el ejemplo anterior, al detectarse un error en el receptor se ignora la información recibida sin intentar corregirla y se solicita al transmisor el reenvío de la información hasta lograr una recepción sin errores. Tal es la práctica común por ejemplo, en transacciones bancarias. Es claro que en estas condiciones se requiere comunicación bidireccional continua (*full-dúplex*) entre transmisor y receptor. El segundo tipo de control de errores es el que se designa como *corrección de errores hacia adelante* o FEC (*forward error correction*), en el que la comunicación es unidireccional del transmisor al receptor. En este caso, los bits de paridad agregados a la información en el transmisor, se configuran de forma tal que no sólo permiten la detección de errores, sino su corrección sin necesidad de requerir retransmisión. Tal capacidad de corrección es limitada y, en general, no es posible corregir todos los errores y recuperar la información original transmitida. Cuando no es posible corregir el error, el receptor emplea alguna técnica para enmascararlo, por ejemplo interpolando valores entre la información anterior y la posterior al error. Estas

técnicas de enmascaramiento u ocultación de errores no sólo se emplean en la transmisión digital; desde hace bastantes años se aplican en las máquinas reproductoras de vídeo para enmascarar la información perdida como consecuencia de deficiencias microscópicas en el material ferromagnético de las cintas de vídeo<sup>8</sup>. La detección y control o corrección de errores requiere, por tanto, de métodos de codificación en el transmisor para la verificación de paridad, designadas como *secuencias estructuradas* porque constituyen métodos de inserción de redundancia estructurada en los datos de la fuente de forma tal que pueda detectarse la ocurrencia de errores y, en algunos casos, corregirlos. La codificación de secuencias estructuradas se subdivide en dos categorías: *codificación de bloques* y *codificación convolucional*. Ante de iniciar la discusión de estos métodos, conviene hacer notar que la entrada al codificador de canal son símbolos de un *alfabeto*<sup>9</sup> de ciertas características, que representa la señal de salida del codificador de fuente y cuya salida son símbolos de otro alfabeto, en el que se ha incluido la redundancia necesaria para el manejo de los errores. Es claro que la salida del codificador de canal tendrá, en general, más bits por símbolo que su entrada, por lo que el ancho de banda requerido o la velocidad de transmisión, será mayor. Este tipo de codificación se designa como *codificación de bloques* y es importante notar que, en las condiciones anteriores el codificador de canal no expande

el alfabeto, únicamente le agrega redundancia, es decir, utiliza más bits de los estrictamente necesarios para codificar cada símbolo. La redundancia permite la detección y corrección de errores y el precio que se paga es un caudal binario mayor y, por consecuencia, mayor ancho de banda que el requerido para la transmisión del alfabeto original. Por otra parte, es posible expandir el alfabeto mediante un tipo de codificación designado como *codificación convolucional*, sin aumentar el ancho de banda, con lo que también es posible corregir errores empleando técnicas distintas a las

de la codificación de bloques. Los sistemas de transmisión de televisión utilizan ambos tipos de codificación, de bloques y convolucional combinadas o concatenadas, con lo que aumenta la eficiencia de codificación y se consigue mayor robustez contra errores.

### **Decodificaciones dura y suave.**

Asumiendo que la entrada al receptor es una señal en alguna banda de RF, ya sea que se trate de transmisión radioeléctrica o por cable, las primeras etapas del receptor corresponden, en términos generales, a las de un receptor convencional, es decir, amplificador frontal, mezclador, filtros y amplificadores de frecuencia intermedia y, finalmente, el detector o demodulador. La salida del detector, que debe suministrarse al decodificador, es la que es de interés en esta discusión y da lugar a dos tipos de decodificación, designados como *dura* o *firme (hard)* y *suave (soft)*. La primera se asocia usualmente a los códigos de bloque y la segunda a convolucionales. En términos muy simples, puede decirse que la decodificación dura se da cuando el demodulador entrega a decodificador de canal la información tal como la detecta sin intentar efectuar ninguna corrección, dejando esa tarea al decodificador de fuente. En la decodificación suave, por el contrario, el demodulador de canal detecta el error y hace una estimación del símbolo más probable, pasándolo luego al decodificador de fuente.

### **Códigos de bloque**

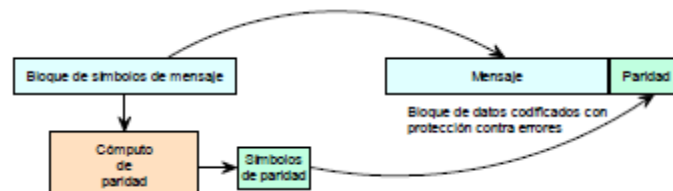
Los códigos de bloque son códigos de longitud fija en que cada bloque está constituido por un número fijo de símbolos de información a los que se agrega una cantidad fija de símbolos de paridad, mediante los cuales es posible detectar errores y, eventualmente corregirlos. Por ejemplo un código de bloque especificado como (208,188) indica que hay 188 símbolos de información y 20 de paridad. Los bits de paridad agregan redundancia a la información con el fin de detectar y corregir errores y dan como resultado un aumento en el ancho de banda y, por consecuencia, reducción en la

eficiencia de transmisión. Este es el precio que hay que pagar a cambio de disminuir la tasa de errores. Entre los códigos de bloque bien conocidos están los de Hamming, Golay, BCH y, en particular para el caso de televisión, el código Reed-Solomon, que aunque no es el más eficiente, es para el que se han desarrollado algoritmos más rápidos. El tratamiento detallado de la teoría de los códigos de bloque es extensa y excede también el alcance de esta obra. En el Apéndice a este capítulo, se presenta brevemente la teoría de generación de los códigos de bloque, así como de la detección de errores.

### **Códigos Reed-Solomon**

La codificación Reed-Solomon se utiliza no sólo en transmisión digital de televisión. se emplea también en CD de audio, CD-ROM y grabadoras digitales de televisión. Es un esquema de codificación de bloque que puede corregir ráfagas de errores hasta un cierto límite determinado por la cantidad de redundancia<sup>15</sup> con que se diseñe el código. Aunque el procesado computacional de estos códigos es sumamente complejo, ha sido implementado en circuitos integrados en gran escala(VLSI) y en la actualidad se incluye en el hardware de sistemas a un costo relativamente bajo. Los códigos Reed-Solomon (R-S) se hicieron públicos en la literatura técnica en 1960 y desde entonces han sido utilizados en numerosas aplicaciones, que van desde las comunicaciones interplanetarias, hasta los reproductores de CD, telefonía móvil y televisión digital. Estos códigos pertenecen a la familia de códigos de bloque, en que el codificador procesa un bloque de símbolos sin codificar, a los que agrega redundancia para producir otro bloque, de mayor longitud, de símbolos codificados, a diferencia de la *codificación convolucional*, en que el codificador no trabaja sobre bloques de símbolos de longitud fija, sino sobre el flujo continuo de estos. La codificación convolucional puede interpretarse como la convolución de los símbolos del mensaje con la respuesta

impulsiva del codificador. Los códigos R-S son códigos no binarios, sistemáticos, cíclicos y lineales que operan sobre símbolos consistentes de varios bits y tienen buenas propiedades para la corrección de errores engrupo o ráfaga ya que la corrección se realiza a nivel de símbolo, no de bit . Una longitud común de símbolo para los códigos no binarios es 8 bits (un byte), pero de hecho, pueden tenerse símbolos de cualquier longitud. Trabajando con símbolos en la decodificación se posibilita la corrección de símbolos con ráfagas de ocho bits erróneos tan fácilmente como de símbolos con un solo bit erróneo. Se dice que un código es sistemático cuando las palabras codificadas contienen los símbolos del mensaje sin alteración. En el codificador se aplica una función matemática reversible para generar los símbolos de redundancia o paridad y la palabra de código se forma agregando los símbolos de paridad a los del mensaje. La implementación del código se simplifica cuando éste es sistemático, es decir, los símbolos del mensaje se mantienen en su forma original y los de paridad se añaden al final de la secuencia de aquellos, como se ilustra en la figura.



Los códigos R-S son cíclicos. Esto significa que si se desplaza circularmente una palabra válida del código, se produce otra palabra válida. Este tipo de códigos es popular ya que hay técnicas de decodificación muy eficientes para ellos. Finalmente, los códigos R-S también son lineales, lo que palabra válida. Si  $n$  es el número total de símbolos y  $k$  el número de símbolos del mensaje original, el número de símbolos de paridad agregados es de  $n - k$ . A la relación entre el número total de símbolos y los símbolos del mensaje original se designa como *relación de código* o *relación* o *tasa de codificación*<sup>16</sup> y se designa como  $R = n/k$ . Cada paquete en el sistema de transporte

tiene una carga de información de 188 bytes, entre los que se encuentra no sólo la información de vídeo o audio comprimida por el codificador de fuente, sino también los encabezados de enlace y adaptación. La codificación de bloque agrega a estos paquetes 16 bytes de paridad para su transmisión, de modo que el código puede describirse como R-S(204,188).

### **Código R-S como un código cruzado o de producto**

Si se define un macro bloque de datos que contiene un cierto número de bloques R-S se consigue una capacidad de corrección de errores mucho más poderosa que con la simple implementación RS bloque a bloque. Esto se utiliza frecuentemente con los datos de un cuadro de imagen completo o con los datos de una pista de cinta magnética en una reproductora de vídeo. La codificación R-S se aplica a los datos de entrada y luego, todo el macro bloque de datos se almacena en memoria en forma de matriz bidimensional. Los datos se extraen de la memoria leyendo la matriz de forma perpendicular a la forma en que se almacenó y se aplica un segundo proceso de codificación R-S. Por ejemplo, los datos pudieron almacenarse en la matriz fila a fila y luego extraerse columna a columna. La primera codificación R-S, es decir, sobre los datos de entrada, se designa como externa<sup>17</sup> y la segunda codificación, como interna. En el receptor, la decodificación interna se realiza primero, se efectúa luego la transformación de la matriz y se realiza la decodificación externa para recuperar los datos originales. Este esquema permite la corrección de ráfagas grandes de errores, tales como las que ocurren a causa de las manchas (dropouts<sup>18</sup>) en las cintas magnéticas. En la codificación R-S, un bloque de datos está compuesto por símbolos que pueden ser bytes (8bits) y, a partir de los datos se calculan un cierto número de símbolos de protección contra errores. Estos símbolos se transmiten junto con los datos para ser utilizados en el decodificador R-S del receptor. Cuanto mayor sea el número de



símbolos de protección, respecto al tamaño del bloque de datos, más potente será la corrección. Los bloques se especifican mediante dos números, por ejemplo (208,192), que significan que hay 192 símbolos de datos por bloque, con 16 símbolos de protección contra errores, de modo que la longitud total del bloque es de 208 símbolos. Aunque la codificación R-S ofrece una protección muy robusta contra errores y puede manejar errores múltiples en cada bloque de datos, en algunos medios de transmisión, como en el caso de transmisión terrestre en que se tienen efectos multi-camino severos, pueden ocurrir ráfagas de errores superiores a los que es capaz de manejar el código R-S. Este problema puede mitigarse alterando el orden de la secuencia de datos entre bloques (interleaving), de modo que los datos de cada bloque, incluyendo los símbolos de protección, no se transmiten en su secuencia original, sino que son “barajados” después de ser codificados, de modo que los errores se dispersan en varios símbolos. El receptor conoce la secuencia de alteración y recupera el orden original antes de la decodificación R-S. Lo anterior da lugar a que, en caso de ocurrir un error que afecte a varios símbolos consecutivos, al volver a reordenarse ese error se habrá dispersado en varios símbolos, afectando sólo a unos pocos bits de cada símbolo recuperado, lo que hace posible la corrección de errores de este tipo. El proceso de intercalado correlaciona los errores de ráfaga. Mediante la alteración del orden de una secuencia de código de longitud determinada, el código puede corregir una cantidad de errores que de otra forma, requeriría de un código de mucho mayor longitud que sin intercalado. El codificador opera sobre los símbolos de los bloques del mensaje a codificar, que pueden considerarse como un vector fila, formado por una secuencia de un número fijo de bits, mediante una matriz generadora del código. La salida del codificador es una matriz que contiene los símbolos del mensaje original y los símbolos de paridad. La matriz generadora también es conocida por el decodificador. Para una matriz generadora dada existe una matriz de dimensiones tales que sus filas son

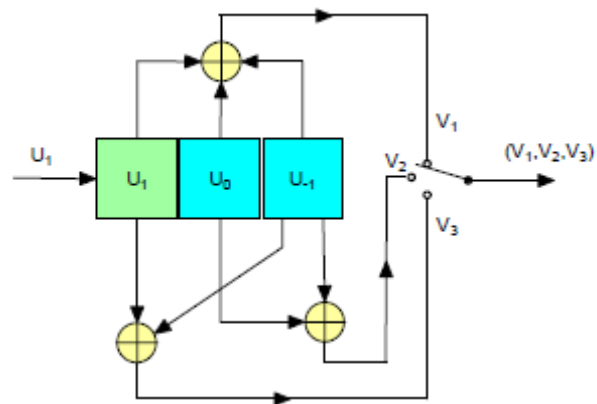
ortogonales a las de la primera y el producto de la matriz generadora por la matriz transpuesta de la segunda es cero. Esta segunda matriz recibe el nombre de matriz de verificación de paridad. En el apéndice a este capítulo se presenta un tratamiento algo más amplio de este proceso. En el decodificador se realiza la verificación de paridad sobre los datos del mensaje recibido mediante la operación descrita antes, es decir multiplicando la matriz del mensaje por la matriz de verificación de paridad. El resultado de esta multiplicación se designa como síndrome (véase sección 3.4). Si el síndrome es cero, el mensaje recibido es válido. Si es diferente de cero, la matriz de síndrome permite localizar la posición de los símbolos erróneos y corregirlos utilizando una tabla de búsqueda residente en el decodificador. Entre las operaciones requeridas en el proceso de corrección de errores se emplean el algoritmo de Euclides y el algoritmo de búsqueda de Chien-Forney, que no se tratan aquí. El hecho de alterar la secuencia de datos tanto a la entrada como a la salida del codificador, hace que esta codificación sea sumamente robusta frente a errores. Para dar una idea aproximada de la potencia de este tipo de codificación, supóngase por ejemplo que la tasa de errores de un caudal binario sin codificación contra errores es, digamos de  $10^{-3}$ , es decir, un bit en error por cada 1000 bits. Con codificación de errores la tasa de errores puede reducirse a menos de  $10^{-6}$ , menos de un error por cada millón de bits.. Estas cifras son únicamente indicativas y, en la práctica, utilizando codificación concatenada, se consiguen tasas de error del orden de  $10^{-9}$  o menores.

### **Codificación convolucional**

En el entorno relativamente hostil de la radiodifusión terrestre de televisión, en que los efectos multicamino pueden causar deterioros frecuentes a la información digital, el empleo de sólo una etapa de codificación de bloque como protección contra errores no es suficiente, ya que aún a pesar de la considerable reducción de la tasa de errores, la enorme cantidad de información transmitida daría lugar a que los errores no corregidos en la recepción fueran suficientes como para ser perceptibles en la imagen con relativa frecuencia, por ejemplo con intervalos de varios segundos entre sí, de modo que los artefactos en la imagen serían suficientes como para hacer la visualización molesta o desagradable al espectador. Aunque en algunos sistemas, como los de cable, bajo ciertas condiciones puede ser necesaria sólo una codificación modesta contra errores, los sistemas de radiodifusión terrestre de televisión constituyen lo que podría designarse como un caso límite que requiere una extraordinaria robustez que difícilmente se encuentra en otros sistemas de comunicaciones. Para aumentar aún más la protección que brinda la codificación de bloques podría agregarse una segunda etapa, similar a la primera y a continuación de ésta. Sin embargo, esto traería como consecuencia mayor complejidad al sistema y un aumento del ancho de banda de transmisión que no es deseable. En televisión digital se ha optado por agregar una segunda etapa de codificación contra errores, que opera sobre la información ya codificada bajo Reed Solomon y a la que se designa como *código interno*. Este segundo nivel de codificación de canal no se basa en codificación de bloques, sino que emplea un principio diferente, designado como codificación convolucional. Las dos etapas de codificación actúan de forma concatenada como se muestra en la figura 3.5. La primera o externa es la codificación de bloques R-S, la segunda es convolucional. En la codificación de bloque se expande el alfabeto al agregar redundancia y, por tanto,

aumenta el ancho de banda. Una propiedad importante de la codificación convolucional es que expande el alfabeto, pero no aumenta el ancho de banda. La codificación de bloque opera sobre bloques completos de información y es, por tanto, discreta. La convolucional opera bit a bit, o sobre bloques pequeños y puede considerarse continua. En las secciones anteriores se trataron los códigos de bloque como herramientas para la detección y corrección de errores. Los códigos lineales de bloque se describen mediante dos números enteros,  $(n,k)$  y un polinomio o matriz generadora del código;  $n$  es el número total de bits del mensaje codificado y  $k$ , el número de bits del mensaje original, antes de la codificación. Cada palabra codificada está determinada de forma única por la palabra del mensaje original a la entrada del codificador. La detección de errores se basa en la redundancia añadida a la información del mensaje original ( $n - k$  bits) y la relación  $k/n$ , designada como tasa de código, es la información por bit codificado y da una medida de la redundancia añadida. La codificación convolucional, que también permite la detección y codificación de errores, se basa en principios muy diferentes a los de los códigos de bloque. En éstos, el proceso de detección y corrección de errores se realiza sobre bloques de datos de longitud fija, en tanto que la codificación convolucional opera de forma continua sobre la secuencia de datos de entrada al codificador, a nivel de bit, o de bloques pequeños de datos. Una característica adicional que distingue a la codificación convolucional de la de bloque, es que ésta opera únicamente sobre la información presente a la entrada del codificador, es decir, no tiene en cuenta la información pasada y, por tanto, no tiene memoria, en tanto que la codificación convolucional opera tanto sobre la información actual, presente a la entrada del codificador, como sobre la información pasada y se trata, por consecuencia, de un proceso con memoria. En la codificación de bloque, cada bloque es independiente de los demás bloques que forman la secuencia de datos, en la codificación convolucional, los símbolos a la salida del codificador son

interdependientes. Los códigos convolucionales se especifican mediante tres parámetros,  $(n, k, m)$  donde  $n$  es el número de bits a la salida del codificador,  $k$  el número de bits de información a la entrada de éste y  $m$ , el número de registros de memoria. La relación  $k/n$  es la relación o tasa de código, tiene el mismo significado que para los códigos de bloque y proporciona una medida de la eficiencia de decodificación. En la práctica,  $k$  y  $n$  suelen variar de 1 a 8,  $m$  de 2 a 10 y  $k/n$  de  $1/8$  a  $7/8$ . En algunas aplicaciones de comunicaciones con vehículos espaciales a distancias muy grandes de la tierra se han utilizado tasas de código muy bajas, del orden de  $1/100$  o menores. Es común que los fabricantes de circuitos integrados especifiquen los parámetros del código convolucional como  $(n, k, L)$  en que  $L$  se designa como longitud de constricción y está dada por  $L = k(m - 1)$ .  $L$  representa el número de bits en la memoria del codificador, previos al bit actual de entrada, que afectan a la generación del código. Los elementos básicos de un codificador convolucional son un registro de desplazamiento, constituido por  $m$  elementos de memoria (flip-flops) y  $n$  generadores de señal que, en este caso, no son otra cosa que sumadores en módulo 2 (puertas OR exclusivas). En la figura 3.8 se ilustra un decodificador convolucional simple.



desplazamiento con tres elementos de memoria y tres sumadores en módulo 2 o generadores de función, en los que se combinan los bits contenidos en las memorias

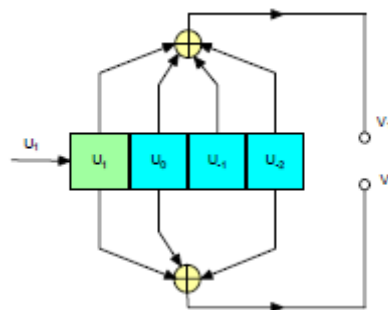
(flip-flops). El código de salida se obtiene conmutando secuencialmente las salidas de los generadores de función durante el período de cada bit de entrada, es decir, por cada bit de entrada se producen, en este caso 3 bits de salida. El primer flip-flop contiene al bit de entrada  $u_1$  y los dos siguientes, almacenan los bits anteriores  $u_0$  y  $u_{-1}$ . La selección de cuáles bits se suman para producir cada uno de los bits de salida, se designa como *polinomio generador* del código y, para el ejemplo:

$$v_1 = (u_1 + u_0 + u_{-1}) \bmod 2$$

$$v_2 = (u_0 + u_{-1}) \bmod 2$$

$$v_3 = (u_1 + u_{-1})$$

El código anterior se designa como (3,1,3) ya que  $n = 3$ ,  $k = 1$  y  $m = 3$ . La relación de código es, por consecuencia 1/3. Es decir, por cada bit de entrada se generan tres bits de salida. Los polinomios generadores dan al código la calidad de la protección y ocurre que dos códigos de igual designación, por ejemplo (3,1,3), pueden tener propiedades completamente diferentes dependiendo de los polinomios generadores elegidos para cada uno. Así, para un código de orden  $m$  hay múltiples polinomios posibles y no todos producen secuencias “buenas” desde el punto de vista de protección contra errores. La salida del codificador es una secuencia que depende del bit de entrada y del contenido de los flip-flops, es decir, de los bits de entrada previos. Por ejemplo el codificador (2,1,4) de la figura 3.9, genera dos bits de salida por cada bit de entrada y utiliza cuatro flip-flops o registros.



La longitud de constricción es  $L = 3$ . lo que significa que hay tres bits anteriores al actual ( $u_1$ ) almacenados en el registro de desplazamiento ( $u_0, u_{-1}, u_{-2}$ ) de modo que hay ocho posibles combinaciones diferentes de estos tres bits que determinan la secuencia codificada de salida ( $v_1, v_2$ ). El número de combinaciones de los bits previos al actual se designa como *estados del código* y están dados por:

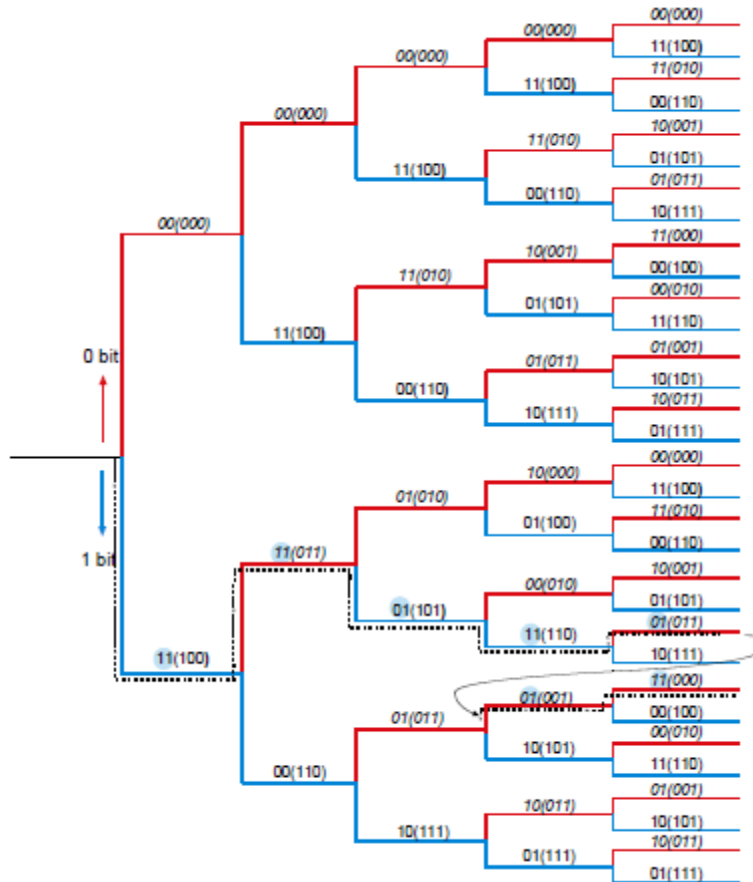
$$\text{Número de estados} = 2L$$

La tasa de código es, evidentemente,  $\frac{1}{2}$ . Para el caso particular de  $k = 1$ , las relaciones de código  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$  y  $\frac{1}{7}$ , se designan con frecuencia como *códigos madre* y se pueden combinar varios de éstos para formar códigos que se designan como *perforados*<sup>22</sup> con lo que se obtienen relaciones de código distintas a  $1/n$ . Así, dos códigos de relación  $\frac{1}{2}$  se pueden implementar como un código de relación  $\frac{2}{3}$ , en que se tienen dos bits de entrada y tres de salida. La eficiencia de este código es mayor que la del código  $\frac{1}{2}$ , pero sus propiedades de corrección de errores se reducen algo.

### **Diagrama de árbol.**

Partiendo de un estado inicial del registro de desplazamiento, por ejemplo (0,0,0,0), la salida es (0,0) y es posible obtener el código de salida para cada nuevo bit de entrada. Por ejemplo si el bit de entrada es cero, se ve que la salida sigue manteniéndose en (0,0). Si el bit de entrada es un 1, el estado del registro será (1,0,0,0) y la salida será ahora (1,1). Si el siguiente bit de entrada es un 0, el contenido del registro es (0,1,0,0) y la salida (1,1). Si por el contrario, el bit de entrada es un 1, el registro contendrá ahora (1,1,0,0) y la salida será (0,0). El análisis continuado en esta forma da lugar a un

diagrama de árbol en que el número de ramas aumenta cada vez que entra un nuevo bit al registro. Para el caso del codificador (2,1,4) de la figura 3.9, el diagrama de árbol tiene la forma mostrada en la figura siguiente.



En el diagrama se avanza una rama hacia la derecha cada vez que entra un nuevo bit al registro de desplazamiento. Si el bit es 0, se avanza hacia arriba, si es un 1, hacia abajo. En cada una de las ramas se indican los valores del código de salida y, entre paréntesis, el estado de los tres bits previos al bit de entrada.

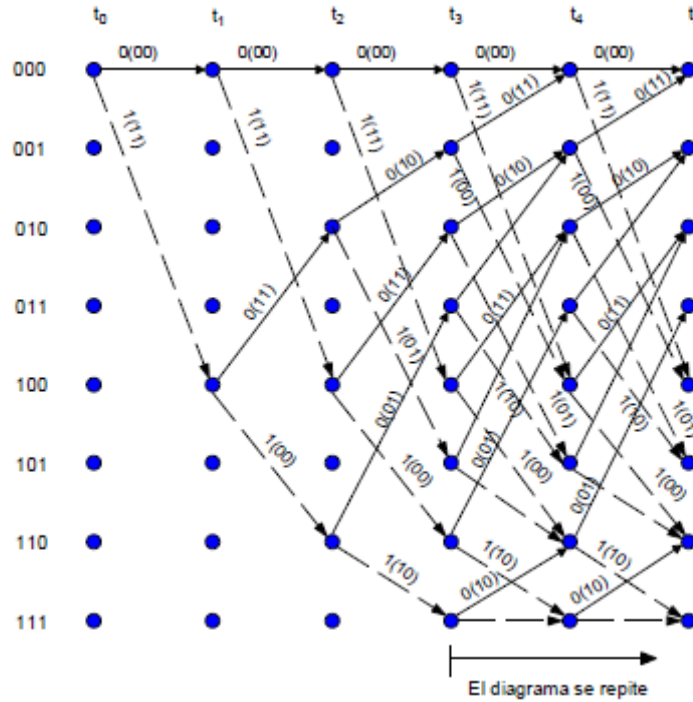
### Diagrama trellis

Aunque la operación de codificación puede describirse adecuadamente mediante el diagrama de árbol, resulta poco práctico para analizar secuencias aún relativamente



cortas, ya que el número de ramas crece como función de  $2L$ , donde  $L$  es la longitud de constricción. Si se observa la figura anterior, se aprecia que, para el ejemplo mostrado, la estructura se repite a partir del cuarto intervalo detiempo ( $t_4$ ), es decir, después de la tercera ramificación, la estructura se repite después de  $L$  ramificaciones, donde  $L$  es la longitud de constricción. Haciendo uso de esta propiedad, es posible una representación más adecuada que el diagrama de árbol. Esta representación se designa como *diagrama trellis*, de ahí que a veces la codificación convolucional se designa también como *codificación trellis*. En la representación gráfica de la codificación convolucional suele preferirse el diagrama trellis, en cierta forma similar al de árbol, pero más sencillo y fácil de interpretar que éste. Este diagrama se muestra en la figura 3.11 y, en la dirección horizontal se tienen los instantes de tiempo discreto o de reloj, en tanto que en el eje vertical se representan todos los posible estados de los bits del registre de desplazamiento sin incluir el bit actual o de entrada. Partiendo de un estado determinado hay dos posibles salidas según el bit de entrada sea 0 o 1. En el diagrama estos posibles estados se indican mediante líneas continuas o punteadas, las primeras si el bit de entrada es cero y las segundas si es

1.



En el diagrama trellis anterior, se tienen a la izquierda los estados correspondientes a los bits  $u_0$ ,  $u_1$  y  $u_2$  del registro de desplazamiento de la figura 3.9 y, en la parte superior, los instantes en que ocurren las transiciones al haber un bit presente a la entrada. Los cambios de estado se indican, con líneas continuas, cuando el bit a la entrada es un cero y, con líneas punteadas cuando el bit de entrada es un uno. En cada una de estas ramas se indica el bit de entrada y, entre paréntesis, el código resultante de salida. De este diagrama pueden obtenerse algunas propiedades de importancia para la corrección de errores en la decodificación. Así, si por ejemplo, en el instante  $t_0$  el código de salida fue 00, en el instante  $t_1$  el código de salida será 00, si el bit a la entrada es un 0, o bien 11 si el bit a la entrada es un 1, pero no podrá ser 01 ni 10. Es decir, de un estado 00, el codificador sólo puede pasar al estado 00 o 01. Si en el proceso de decodificación después de un estado 00 se tiene un estado 01 o 10, será indicación de que ha habido un error en la transmisión y será necesario corregirlo. El

decodificador no puede “saber” si el símbolo correcto deber ser 00 o 01, por lo que tendrá que hacer una decisión con respecto al bit de entrada. Si el decodificador realiza una decisión binaria, es decir, asigna un valor de 0 o de 1 al bit de entrada en que se ha producido el error, tal decisión se designa como dura. Si, por el contrario, el decodificador en lugar de hacer una decisión binaria, realiza una estimación más precisa de la probabilidad de que el bit correcto de entrada sea 1 o 0, utilizando mayor número de niveles de acuerdo a la probabilidad de ocurrencia de uno u otro bit, se dice entonces que el decodificador ha realizado una decisión suave. Para ello, en la decodificación se utiliza el algoritmo de Viterbi<sup>25</sup>, que fue inventado por Viterbi en 1967 y que, esencialmente, realiza una decodificación designada como de máxima similitud. La base de la decodificación de Viterbi radica en que, si dos trayectorias cualesquiera en el diagrama trellis dan lugar a un mismo estado de salida, siempre puede eliminarse una de ellas en la búsqueda de la trayectoria óptima. La trayectoria que se mantiene se designa como trayectoria superviviente y equivale a elegir el símbolo con la métrica de máxima similitud o la mínima distancia métrica. El tratamiento detallado de este algoritmo queda fuera del contexto de este texto y, en la bibliografía, se ofrecen algunas referencias que puede consultar aquél interesado en conocer más a fondo este tema.

### **Modulación con codificación trellis**

Los códigos de bloque, según se mencionó, consiguen la detección y corrección de errores agregando redundancia a la información original, es decir, expandiendo el alfabeto, lo que da lugar a expansión del ancho de banda necesario para transmisión.

En el caso de canales limitados en banda, no es posible expandir el ancho de banda y, por ello la codificación para control de errores no resultó muy popular para este tipo de canales, por ejemplo, los canales telefónicos. Sin embargo, en las últimas décadas se han desarrollado sistemas que combinan modulación y codificación contra errores, con los que es posible obtener ganancia de codificación sin aumentar el ancho de banda. Tal es el caso de la modulación con codificación trellis<sup>26</sup>. En principio parecería que al utilizar la codificación contra errores, en que necesariamente se expande el alfabeto, se viola el principio de relación entre potencia, ancho de banda y probabilidad de error. Esto no ocurre, ya que se juega aquí con otro compromiso de realización, en que se consigue la ganancia de codificación, sin aumentar el ancho de banda, a expensas de la complejidad del decodificador. La modulación con codificación trellis combina un conjunto de señales con niveles múltiples de amplitud y fase y un esquema de codificación trellis. Este esquema de amplitudes y fases multinivel es lo que permite agregar redundancia, o en otras palabras, expandir el alfabeto, sin aumentar el ancho de banda.

## Bibliografía

Proakis, John G. *Digital Communications*. McGraw Hill, Cuarta edición. 2001.  
Singapur.

Sklar, Bernard. *Digital Communications, Fundamentals and Applications*. Prentice Hall.  
1988. New Jersey, EUA.

Tomasi, W. *Sistemas de Comunicaciones Electrónicas*. Prentice Hall, segunda edición.  
1996. México.

Feher, K. *Telecommunications Measurements, Analysis, and Instrumentation*. Prentice  
Hall. 1987. New Jersey, EUA.

Schwartz, M. *Transmisión de Información, Modulación y Ruido*. McGraw Hill. Tercera  
edición. 1983. México.

Winch. R.G. *Telecommunication Transmission Systems. Microwave, Fiber Optic, Mobile  
Celular radio, Data, and Digital Multiplexing*. Mc. Graw Hill. 1993. USA

Stremmer. Ferrel G. *Sistemas de Comunicación*. Fondo Educativo Interamericano.  
1985. México.

