

Funciones de Sensibilidad

Ignacio Díaz Blanco

Universidad de Oviedo

Ingeniería de Sistemas y Automática
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica,
de Computadores y Sistemas

Gijón, noviembre de 2003

Índice general

4. Funciones de Sensibilidad	5
4.1. Introducción	5
4.2. Sensibilidad	8
4.2.1. Definición de sensibilidad	8
4.2.2. Papel de la sensibilidad en el diseño	8
4.3. Funciones de sensibilidad	10
4.4. Rechazo a perturbaciones	13
4.5. Seguimiento de referencias	16
4.6. Acción de control	18
4.7. Análisis de las acciones P, PI, PD.	20
4.8. Robustez	23
4.8.1. Incertidumbre en el modelo	23
4.8.2. Estabilidad en términos de sensibilidad	24
4.8.3. Estabilidad ante variaciones en el proceso.	27
4.9. Limitaciones en el Control: Integral de Bode	33
4.10. Comentarios a la bibliografía	38

Funciones de Sensibilidad

4.1. Introducción

El procedimiento de diseño de sistemas de control puede verse en sí mismo como un sistema realimentado. En él puede hablarse de una *consigna*, que son los objetivos del control, un *proceso*, que es el propio problema de control y un *controlador*, que es el ingeniero de control (ver fig. 4.1). Durante el diseño, el ingeniero de control *actúa* sobre el problema de control utilizando técnicas de síntesis y lo *mide o evalúa* empleando técnicas de análisis. Parece, por tanto, claro que el éxito en el procedimiento de diseño no dependerá sólo de técnicas de síntesis de sistemas de control, por muy sofisticadas que éstas sean, sino también de un buen análisis del problema.

En efecto, las técnicas de análisis son los *ojos* del diseñador y quienes, en última instancia, le informan del desempeño del sistema a controlar, así como del grado de adecuación a los objetivos planteados. Las técnicas de análisis, por tanto, deben aportar información sobre *todos* los objetivos a los que aspira un sistema de control ya que, de lo contrario, el problema del diseño se convierte en un problema no observable, comparable a resolver un problema sin datos o a conducir a ciegas.

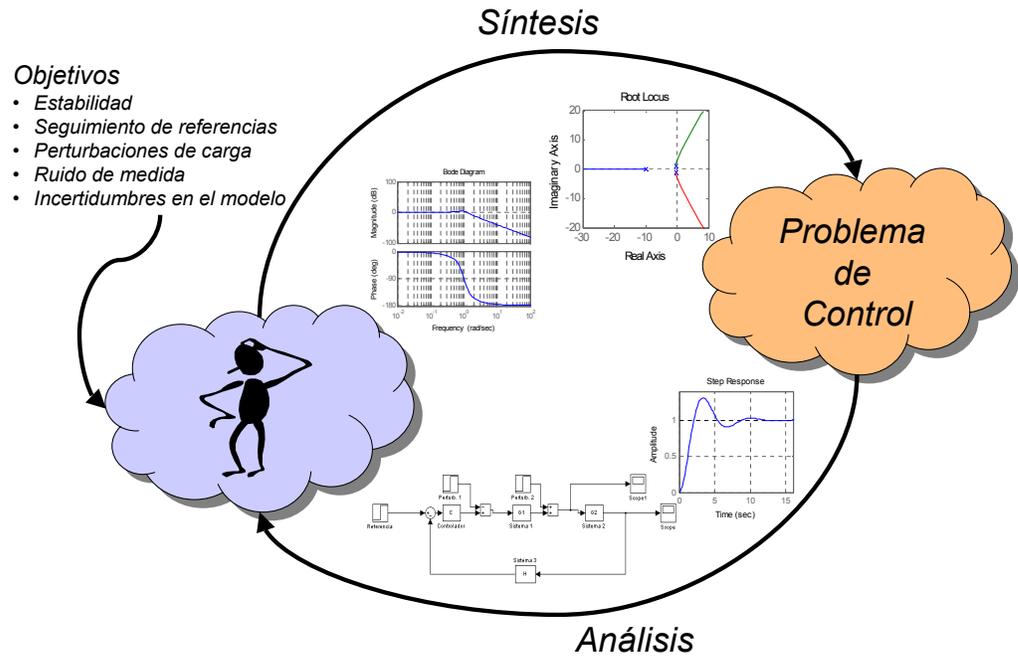


Figura 4.1: Proceso de diseño de un sistema de control.

Como se vio en los temas T2 y T3, entre los principales objetivos del control figuran la estabilidad del sistema, el seguimiento de referencias y la robustez del mismo ante perturbaciones, ruido de medida e incertidumbres en el modelo del proceso. Estas características se ven reflejadas en un conjunto de cuatro funciones de transferencia (seis, en arquitecturas de control de dos grados de libertad) denominadas *funciones de sensibilidad*. Las funciones de sensibilidad, analizadas en su conjunto, permiten evaluar un sistema de control en múltiples aspectos –no sólo en cuanto al seguimiento de referencias– y, por tanto, resultan indispensables en la fase de diseño.

Organización del tema El tema está organizado como sigue. En la sección 4.2, se define el concepto de *sensibilidad*, describiendo esquemáticamente su papel en el diseño de sistemas de control. A continuación, en 4.3 se definen las

cuatro funciones de sensibilidad, destacando su relación con las variables del sistema de control. En la sección 4.4 se muestra cómo la función de sensibilidad $S(s)$ describe la capacidad de un sistema de permanecer inalterado ante perturbaciones, mostrando también su interpretación en frecuencia. En la sección 4.5 se describe en términos de las funciones de sensibilidad la capacidad de un sistema para seguir de referencias; particularizando para frecuencia $\omega = 0$ en sistemas con realimentación unitaria se llega a la definición clásica de error en régimen permanente. La acción de control es estudiada en la sección 4.6, también desde el enfoque de la sensibilidad; se intuye aquí cómo mejoras espectaculares en la respuesta dinámica del sistema se traducen en acciones de control que pueden resultar inadmisibles. En la sección 4.7 se expone un pequeño caso de estudio en el que se ilustran los conceptos anteriores para analizar el impacto en los distintos objetivos de control de las tres acciones de control básicas: proporcional, integral y diferencial. En la sección 4.8 se describe la susceptibilidad del sistema realimentado ante cambios en el proceso. Esta sección comienza con el apartado 4.8.1 en el que se parte de la definición de sensibilidad para describir el efecto de la variación en el proceso sobre la respuesta en bucle cerrado. A continuación, se describe la estrecha relación existente entre las funciones de sensibilidad y la estabilidad; se establece un vínculo geométrico entre la sensibilidad máxima y la proximidad de la curva de Nyquist al punto -1 que conduce a definiciones robustas los márgenes de estabilidad clásicos; seguidamente se analiza, también en términos de la sensibilidad, la relación entre las variaciones del proceso y la estabilidad, llegándose sin dificultad a una cota que permite evaluar de forma gráfica y conservadora el impacto de estas variaciones sobre la estabilidad del sistema. La sección 4.9 concluye el tema, exponiendo –sin demostrar– la integral de Bode y esbozando las principales limitaciones que de ella se derivan en cuanto a lo que puede realizarse mediante el control. Finalmente, en la sección 4.10 se comentan las principales referencias para el estudio de este tema.

4.2. Sensibilidad

4.2.1. Definición de sensibilidad

Según el diccionario de la Real Academia Española, sensibilidad significa, en su quinta acepción:

5. *Capacidad de respuesta a muy pequeñas excitaciones, estímulos o causas.*

Esta definición se ajusta bastante bien a los sistemas de control, en los que interesa el estudio de su capacidad de respuesta ante variaciones en la referencia, perturbaciones, ruido de medida y variaciones en los parámetros del proceso, entre otros factores. De una manera más formal, la sensibilidad se define como la variación relativa de la función de transferencia de un sistema $\Delta G(s)/G(s)$ frente a variaciones relativas de uno o más parámetros $\Delta q/q$

$$S_q^G = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta G(s)}{G(s)}}{\frac{\Delta q}{q}} = \frac{\partial G}{\partial q} \frac{q}{G} \quad (4.1)$$

Como se verá enseguida, el cálculo de esta sensibilidad para describir múltiples aspectos del bucle de control se reduce a cuatro funciones de transferencia (seis, si hay prealimentación) que condensan la información sobre la sensibilidad del sistema, de ahí su nombre: *funciones de sensibilidad*.

4.2.2. Papel de la sensibilidad en el diseño

Uno de los principales objetivos de un sistema de control es la capacidad para seguir referencias con precisión y la capacidad de anular perturbaciones en régimen permanente. Los *errores en régimen permanente* constituyen un importante parámetro de diseño en sistemas de control vinculado a la capacidad de respuesta o *sensibilidad* del sistema ante estímulos dominados por las bajas frecuencias. Por tanto, un diseño orientado a la consecución de errores aceptables en régimen permanente puede ser establecido en términos del estudio de la sensibilidad del sistema a bajas frecuencias.

Otros factores que a menudo conciernen en el diseño de sistemas de control son la dinámica de las perturbaciones y el *efecto del ruido*, que a menudo se halla dominado por energías en altas frecuencias. Un elemento especialmente sensible al ruido es el sensor; este elemento, en general, maneja señales

y magnitudes físicas de muy baja potencia, y tiene constantes de tiempo rápidas, siendo especialmente sensible a ruidos (de medida, interferencias, etc.) que pasan a formar parte de la cadena de control, pudiendo afectar a la salida o generar acciones de control inadmisibles. El estudio de estos efectos, por tanto, debe tener en cuenta la sensibilidad del sistema a altas frecuencias.

La *estabilidad* del sistema está estrechamente relacionada con la ganancia del sistema en determinados rangos de frecuencias, concretamente en aquéllos en los que la fase del argumento de la función de transferencia en bucle abierto, $L(j\omega)$, tiene valores próximos a 180° . En ocasiones, algunos sistemas se comportan de forma distinta al modelo que se tiene de ellos, denominado *modelo nominal*, pudiendo, por ejemplo exhibir mayores ganancias en estas frecuencias, lo que puede derivar en inestabilidad o en un deterioro en la respuesta dinámica. Un diseño adecuado requiere, por tanto, un estudio de la respuesta del bucle en frecuencias en las que se sospecha que pueden existir estos factores.

Todos estos aspectos se hacen patentes gráficamente a través del estudio de las funciones de sensibilidad que se verán a continuación.

4.3. Funciones de sensibilidad

Considérese el sistema de control de realimentación unitaria¹ mostrado en la figura 4.2.

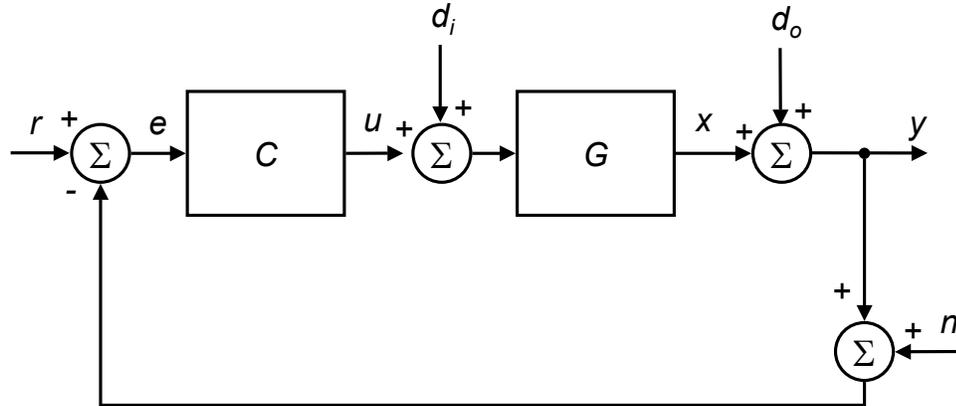


Figura 4.2: Sistema de control con realimentación unitaria.

El sistema se compone de dos bloques: el proceso, G , y el controlador, C . La variable r es la *referencia* o consigna, e representa la *señal de error*, en base a la cual actúa el controlador, u es la *acción de control*, con la que el controlador actúa sobre el proceso, e y es la *salida* del proceso. Asimismo, existen tres perturbaciones en el sistema, la *perturbación de entrada o de carga*, d_i , que representa las perturbaciones que actúan a la entrada del proceso, la *perturbación de salida*, d_o , y el *ruido de medida*, n , que representa las diferencias entre el valor real de la salida, y , y el valor proporcionado por el sensor. Este esquema, aunque simple, captura la esencia y puede ser fácilmente modificado si se conoce con precisión cómo las perturbaciones afectan al sistema.

Aplicando el principio de superposición y algo de álgebra de bloques en la figura 4.2 es posible extraer las siguientes relaciones:

¹El sistema mostrado en la figura 4.2 representa una arquitectura de control *con un grado de libertad* para la que se definen cuatro funciones de sensibilidad. En algunos textos, como (Aström, 2003), se realiza el análisis para arquitecturas *con dos grados de libertad*, dotadas de un bloque de prealimentación, F , que dan lugar a otras dos funciones de sensibilidad. Por simplicidad, y dado que las cuatro primeras condensan la esencia del sistema, veremos aquí solamente la arquitectura de 1 grado de libertad. Las arquitecturas de dos grados de libertad se describirán, no obstante, en el tema T9.

$$Y = \frac{GC}{1+GC}R + \frac{G}{1+GC}D_i + \frac{1}{1+GC}D_o - \frac{GC}{1+GC}N \quad (4.2)$$

$$U = \frac{C}{1+GC}R - \frac{GC}{1+GC}D_i - \frac{C}{1+GC}D_o - \frac{C}{1+GC}N \quad (4.3)$$

Donde se ha eliminado la variable s de Laplace por simplicidad. Observando estas expresiones, cabe hacer algunas observaciones. En primer lugar, varias de las funciones de transferencia se repiten, por lo que todas las relaciones pueden expresarse empleando sólo cuatro funciones de transferencia, que por su importancia –especialmente las dos primeras– tienen sus propios nombres:

$$\begin{aligned} S(s) &= \frac{1}{1+G(s)C(s)} && \leftarrow \text{función de } \textit{sensibilidad} \\ T(s) &= \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} && \leftarrow \text{función de } \textit{sensibilidad complementaria} \\ S_i(s) &= \frac{G(s)}{1+G(s)C(s)} && \leftarrow \text{función de } \textit{sensibilidad de perturbación} \\ S_u(s) &= \frac{C(s)}{1+G(s)C(s)} && \leftarrow \text{función de } \textit{sensibilidad de control} \end{aligned}$$

Las funciones de sensibilidad condensan la información esencial sobre el desempeño del sistema, incluyendo seguimiento de referencias, efecto de las perturbaciones en cualquier punto y dinámica la acción de control, todo ello tanto desde el punto de vista estático (bajas frecuencias) como desde el punto de vista dinámico (altas frecuencias).

Interesa notar que estas funciones están algebraicamente relacionadas

$$\begin{aligned} S(s) + T(s) &= 1 \\ S_i(s) &= G(s)S(s) = \frac{T(s)}{C(s)} \\ S_u(s) &= C(s)S(s) = \frac{T(s)}{G(s)} \end{aligned}$$

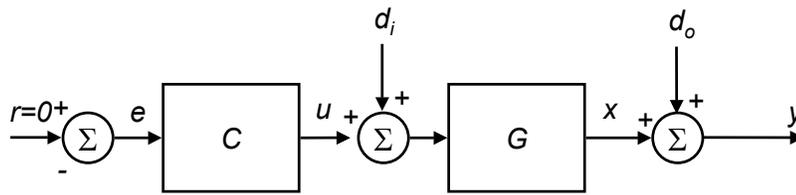
es decir, éstas no pueden ser moldeadas de forma arbitraria mediante la elección de un controlador $C(s)$, lo que demuestra que el diseño de sistemas de

control tiene sus limitaciones, requiriendo a menudo soluciones de compromiso entre distintos objetivos, en los que el diseñador debe ponderar los más importantes en función del contexto.

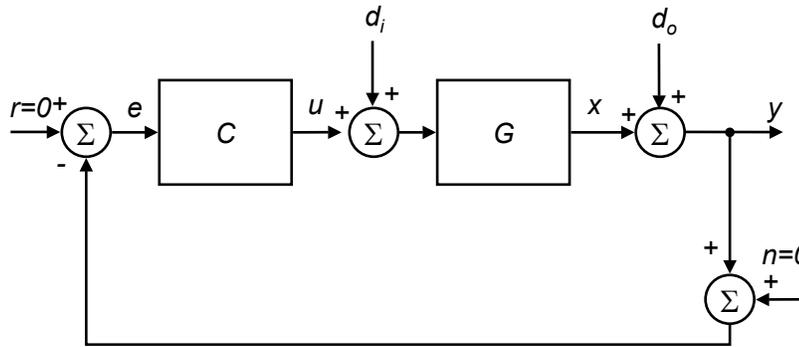
A continuación se verá cómo las funciones de sensibilidad se relacionan con los principales objetivos del control, permitiendo al ingeniero evaluar un sistema desde una perspectiva global.

4.4. Rechazo a perturbaciones

Una de las propiedades esenciales de la realimentación es la capacidad de responder ante perturbaciones en el sistema, atenuando su efecto en la variable de salida. Para analizar el efecto con claridad, puede compararse el desempeño de los sistemas en bucle abierto y en bucle cerrado ante una perturbación para una referencia nula², tal y como se ilustra en la figura 4.3:



(a) Perturbación en bucle abierto



(b) Perturbación en bucle cerrado

Figura 4.3:

La salida en el sistema en bucle abierto será

$$Y_{ba} = G(s)D_i(s) + D_o(s) \quad (4.4)$$

En el sistema en bucle cerrado será

²Recuérdese que el *principio de superposición* nos permite separar el efecto de la perturbación del efecto de la referencia

$$y_{\text{pert}}^r = y_{\text{pert}}^{r=0} + y_{\text{pert}=0}^r$$

$$Y_{bc} = \frac{G(s)D_i(s) + D_o(s)}{1 + G(s)C(s)} = S(s) [G(s)D_i(s) + D_o(s)] \quad (4.5)$$

siendo $S(s)$ una de las cuatro funciones denominada *función de sensibilidad*. Comparando las expresiones (4.4) y (4.5) se obtiene la siguiente relación entre las respuestas ante perturbaciones en bucle abierto y en bucle cerrado:

$$Y_{bc} = S(s)Y_{ba}, \quad (\text{para } r = 0) \quad (4.6)$$

La función de sensibilidad $S(s)$ describe, por tanto, la atenuación del impacto de las perturbaciones que se obtiene mediante la realimentación. Es evidente, entonces, a partir de las ecuaciones (4.4), (4.5) y (4.6), que para un mayor rechazo a perturbaciones será deseable un valor bajo de la función de sensibilidad.

Visualización de la función de sensibilidad. La representación frecuencial de la función de sensibilidad nos permite evaluar de un vistazo la mejora en el rechazo de perturbaciones que se obtiene mediante la realimentación. En la figura 4.4 se muestra el diagrama de Bode de la función de sensibilidad para un sistema de control dado por el proceso

$$G(s) = \frac{4}{(s+1)^2(s+2)}$$

y el controlador de tipo PI

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} \quad k_p = 1, k_i = 0,3$$

con realimentación unitaria. La frecuencia más baja a la que la función de sensibilidad tiene una magnitud mayor que 1 se denomina *frecuencia de cruce de sensibilidad*, y en este caso es $\omega_{cs} = 0,86$ rads/s (denotada por “□”). La realimentación produce, por tanto, una atenuación significativa por debajo de estas frecuencias, llegando a anularlas en régimen permanente ($\omega \approx 0$). A partir de esa frecuencia las perturbaciones son amplificadas hasta un máximo dado por la sensibilidad máxima, $M_s = 1,85$ (5,35dB), que se produce a una frecuencia $\omega_{ms} = 1,36$ rads/s (denotada en la figura por “o”).

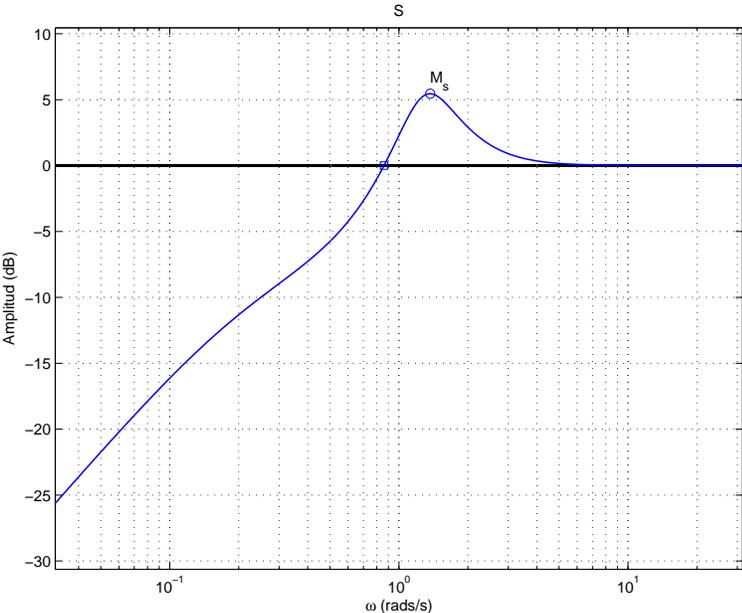


Figura 4.4: Curva de módulos, de la función de sensibilidad para un control de tipo PI.

4.5. Seguimiento de referencias

Dinámica. En ausencia de perturbaciones, la dinámica de la respuesta del sistema ante una referencia $R(s)$ viene dada por la denominada *función de sensibilidad complementaria*,

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Esta función describe la respuesta del sistema entre la referencia, $r(t)$, y la salida, $y(t)$, conociéndose también como la *función de transferencia en bucle cerrado*. Puede comprobarse fácilmente que

$$T(s) + S(s) = 1$$

Esta relación constituye una de las limitaciones que se plantean en control, que refleja la imposibilidad de moldear arbitraria e independientemente la dinámica del sistema y su capacidad de respuesta ante perturbaciones.

Error de seguimiento. Las funciones de sensibilidad permiten también determinar el error en el seguimiento de referencias. En efecto, expresando el error³ en términos de las funciones de sensibilidad se obtiene,

$$\begin{aligned} \varepsilon(s) &= R(s) - Y(s) = \\ &= R - \left(\frac{GC}{1 + GC}R + \frac{G}{1 + GC}D_i + \frac{1}{1 + GC}D_o - \frac{GC}{1 + GC}N \right) \\ &= \left(1 - \frac{GC}{1 + GC} \right) R - \frac{G}{1 + GC}D_i - \frac{1}{1 + GC}D_o + \frac{GC}{1 + GC}N \\ &= S(s)R - S_i(s)D_i - S(s)D_o + T(s)N \end{aligned}$$

quedando,

$$\varepsilon(s) = S(s)R(s) - S_i(s)D_i(s) - S(s)D_o(s) + T(s)N(s) \quad (4.7)$$

De nuevo, esta expresión muestra cómo la *función de sensibilidad*, $S(s)$ juega un papel esencial en el efecto de las perturbaciones de salida así como

³Por simplicidad, se ha considerado aquí realimentación unitaria, definiendo el error como la diferencia entre la referencia y el valor de la salida $\varepsilon(t) = r(t) - y(t)$. Por supuesto, este error puede definirse de otras formas. En caso de realimentación no unitaria, por ejemplo, resulta más adecuado $\varepsilon(t) = \frac{1}{H(0)}r(t) - y(t)$, dando lugar a formulaciones ligeramente diferentes pero análogas en la esencia y que conducen a conclusiones similares.

de la propia referencia sobre error, mientras que la función de *sensibilidad de perturbación*, $S_i(s)$, describe el efecto de las perturbaciones de carga. El efecto en el bucle del ruido en el sensor, por el contrario, depende de la función de *sensibilidad complementaria*, $T(s)$.

El error de posición en régimen permanente para un sistema con realimentación unitaria puede derivarse como un caso particular de la expresión (4.7). En efecto, en ausencia de perturbaciones, dicha expresión se reduce a

$$E(s) = S(s)R(s) \quad (4.8)$$

Particularizando para el régimen permanente ante una referencia de tipo escalón unitario se llega a la expresión clásica del *error de posición* para sistemas con realimentación unitaria:

$$e_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} S(s) = \frac{1}{1 + C(0)G(0)} = \frac{1}{1 + K_p} = S(0) \quad (4.9)$$

4.6. Acción de control

La acción de control, dada por la expresión (4.3), puede ser expresada en términos de las funciones de sensibilidad,

$$U = S_u(s) [R(s) - D_o(s) - N(s)] - T(s)D_i(s) \quad (4.10)$$

De esta expresión se comprueba que la *función de sensibilidad de control*, $S_u(s)$, describe el comportamiento de la acción de control en función de la referencia, $r(t)$, la perturbación de salida, $d_o(t)$ y el ruido en el sensor, $n(t)$, e, indirectamente, en términos de la perturbación de carga, $d_i(t)$, ya que $T(s) = G(s)S_u(s)$. La función de sensibilidad de control se relaciona con las demás sensibilidades como:

$$S_u(s) = \frac{T(s)}{G(s)} = C(s)S(s) \quad (4.11)$$

de aquí se desprenden diversas consecuencias:

- La visualización de $|S_u(j\omega)|$ nos permite determinar la intensidad de la acción de control para perturbaciones o referencias a distintas frecuencias.
- El incremento en ganancia de un sistema obtenido a través de la realimentación lo es a costa de la acción de control. Típicamente, por ejemplo, incrementar el ancho de banda de un sistema mediante realimentación trae aparejada una acción de control elevada en el rango de frecuencias amplificadas, al verse incrementada la magnitud

$$|S_u(j\omega)| = \left| \frac{T(j\omega)}{G(j\omega)} \right| \quad (4.12)$$

Ejemplo. Supóngase el el siguiente sistema y controlador PID

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}, \quad C(s) = 100 \cdot \frac{s+2}{s+10} \cdot \frac{s+1}{s} \quad (4.13)$$

En la figura 4.5 se muestran, en su parte superior, las funciones de transferencia en bucle cerrado del sistema original y del sistema compensado y en

la parte inferior, la curva de módulos de la función de sensibilidad de control $S_u(j\omega)$.

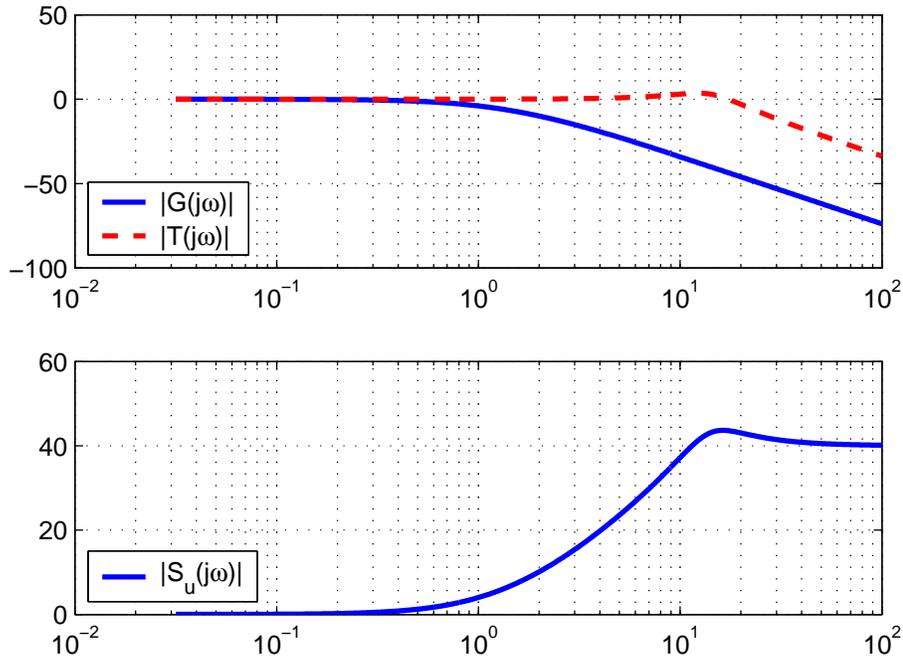


Figura 4.5:

En la parte superior, contrastando $|G(j\omega)|$ con $|T(j\omega)|$, puede apreciarse claramente cómo el controlador produce un incremento de algo más de una década en el ancho de banda, que pasa desde 1 rad/s hasta unos 15 rads/s. En la parte inferior, observando $|S_u(j\omega)|$ se comprueba cómo el controlador debe generar acciones de control muy elevadas a partir de 1 rad/s para producir el incremento en el ancho de banda.

4.7. Análisis de las acciones P, PI, PD.

En el siguiente ejemplo se analizan las tres acciones típicas de control (P, PI, PD) mediante las funciones de sensibilidad. Supóngase el siguiente sistema de control consistente en un proceso, $G(s)$, un controlador $C(s)$ y realimentación unitaria:

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}, \quad C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

Para este sistema de control se analizarán los siguientes controladores:

Tipo de control	Parámetros $\{k_p, k_i, k_d\}$
proporcional (P):	$\{1, 0, 0\}$
proporcional-integral (PI):	$\{1, 1, 5, 0\}$
proporcional-diferencial (PD):	$\{1, 0, 1\}$

En las figuras 4.6 y 4.7 se muestran las 4 funciones de sensibilidad, $S(s)$, $T(s)$, $S_u(s)$, $S_i(s)$ representadas en frecuencia y en el tiempo (respuesta al escalón), respectivamente, para los tres tipos de control. De ellas se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Observando la función de sensibilidad, $S(s)$, la acción PI es la que proporciona una mejor atenuación de perturbaciones dominadas por las bajas frecuencias, anulando completamente las permanentes ($\omega = 0$). Las acciones P y PD proporcionan también una cierta atenuación a bajas frecuencias, que llega a ser de unos -6dB (0,5) en régimen permanente. Esta atenuación tiene lugar a lo largo de un rango de frecuencias mayor en el PD, lo que refleja un mejor comportamiento de ésta para perturbaciones rápidas.
- Respecto a las perturbaciones de carga (las producidas a la entrada del proceso), la función $S_i(s)$ muestra también un mejor comportamiento del regulador PI a bajas frecuencias y del PD a altas frecuencias.
- En cuanto al seguimiento de referencias, la función $T(s)$ muestra claramente los anchos de banda de los tres sistemas. La acción PD, de carácter anticipativo, proporciona el mayor ancho de banda y, por tanto, el mejor seguimiento dinámico de las perturbaciones. La acción PI tiene el ancho de banda más pequeño y, por tanto, será la más lenta.

- La acción de control puede apreciarse a través de $S_u(s)$. En el rango de bajas frecuencias (desde 0 hasta 1 rad/s aprox.) el regulador PI da lugar a la mayor acción de control, necesaria para conseguir errores bajos en dicho rango ⁴. Por el contrario, la el regulador PD da lugar a las mayores acciones de control para frecuencias altas, también como contrapartida al mayor ancho de banda proporcionado

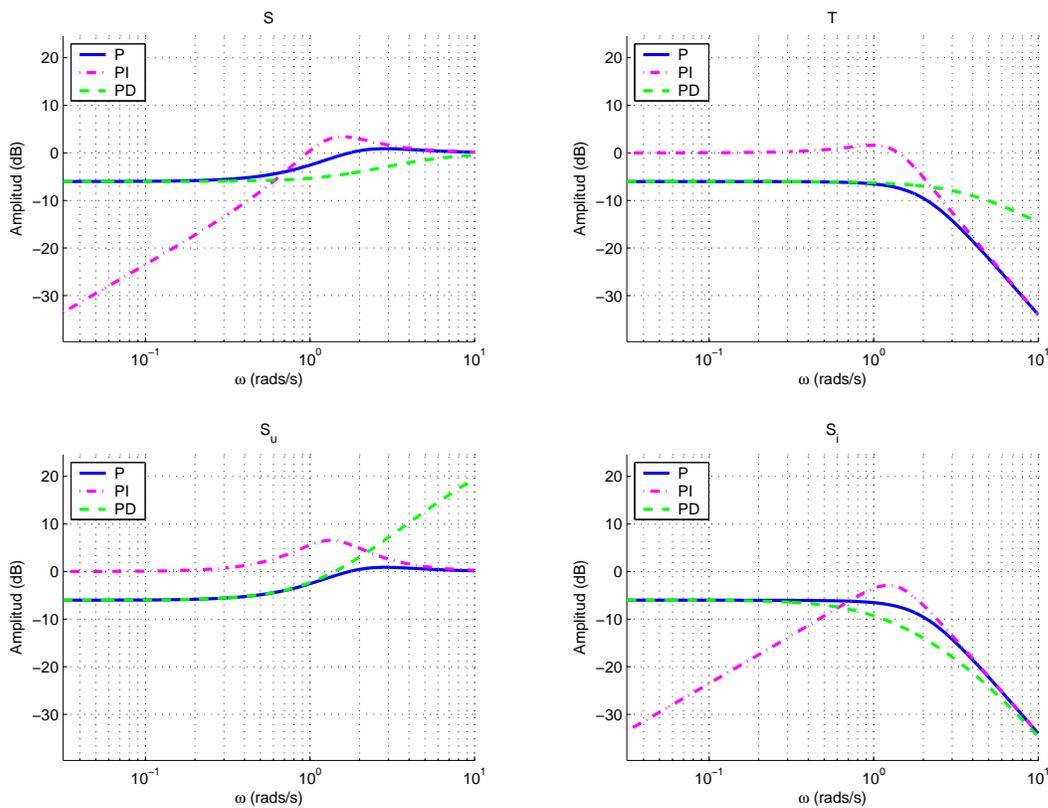


Figura 4.6: Funciones de sensibilidad para acciones P, PI y PD Representación frecuencial (Bode).

Finalmente, en la figura 4.7 se muestra una representación alternativa de las funciones de sensibilidad, mediante su respuesta al escalón unitario, que

⁴Puede apreciarse también que el regulador PI proporciona una acción de control máxima en el rango de frecuencias en torno a $\omega \approx 1$ rad/s, consecuencia de su pobre estabilidad relativa. Este aspecto se estudiará con más detalle para este mismo ejemplo a continuación.

aporta conclusiones similares desde el punto de vista temporal.

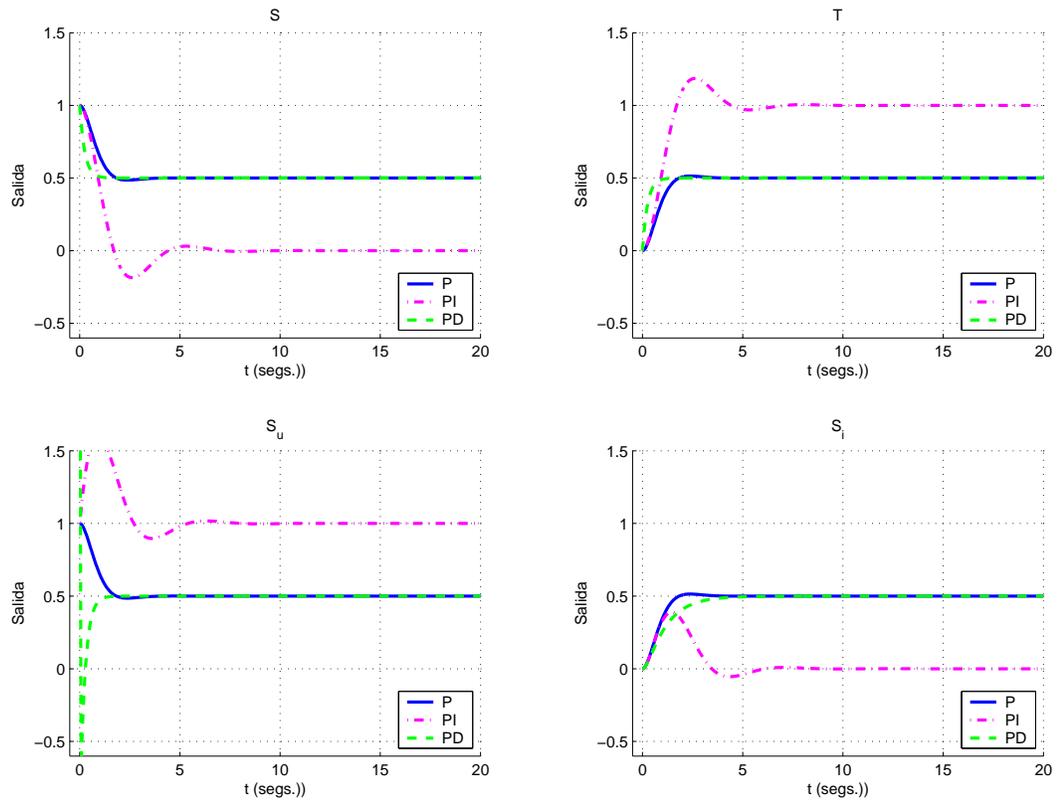


Figura 4.7: Funciones de sensibilidad para acciones P, PI y PD. Representación temporal (respuesta al escalón).

4.8. Robustez

Hasta este punto se ha visto cómo las llamadas *funciones de sensibilidad* permiten describir al sistema en cuanto al rechazo a perturbaciones, la acción de control y el seguimiento de referencias. La definición de sensibilidad dada en la sección 4.2 hacía referencia al efecto de las variaciones del proceso sobre el sistema de control. Como su nombre indica, estas funciones también describen el efecto de las variaciones o incertidumbres en el modelo del proceso sobre la dinámica y estabilidad del sistema de control.

4.8.1. Incertidumbre en el modelo

Una de las propiedades fundamentales de la realimentación es la de dotar de robustez al sistema ante variaciones en la dinámica proceso. El efecto de estas variaciones también puede ser expresado en términos de las funciones de sensibilidad. En efecto, en ausencia de perturbaciones,

$$\frac{Y}{R} = \frac{GC}{1 + GC} = T \quad (4.14)$$

Ahora bien, el proceso G puede sufrir variaciones en su dinámica debidas a efectos externos o bien debidas a errores en el modelado. El impacto relativo en la respuesta debido a una pequeña variación dG en el proceso puede evaluarse, de acuerdo con la definición de sensibilidad dada en (4.1), según

$$S_G^T = \frac{\frac{dT}{T}}{\frac{dG}{G}} = \frac{dT}{dG} \frac{G}{T} \quad (4.15)$$

derivando se tiene

$$\frac{dT}{dG} = \frac{C}{(1 + GC)^2} = \frac{GC}{(1 + GC)(1 + GC)G} = S \frac{T}{G}$$

con lo cual

$$S_G^T = \frac{d \log T}{d \log G} = \frac{dT}{dG} \frac{G}{T} = S \quad (4.16)$$

La ecuación (4.16) es la razón por la que $S(s)$ recibe el nombre de *función de sensibilidad*, e indica que la alteración relativa en la respuesta en bucle cerrado será pequeña para aquellas frecuencias en las que la función de sensibilidad es pequeña y viceversa.

4.8.2. Estabilidad en términos de sensibilidad

Aunque las principales herramientas para el análisis de la estabilidad en bucle cerrado (ej. criterio de Nyquist) se basan en la función de transferencia en bucle abierto, $L(s) = C(s)G(s)$, la estabilidad puede ser también interpretada en términos de las funciones de sensibilidad, pudiendo derivarse una serie de conclusiones que aportan enfoques alternativos de gran utilidad para el diseño. En la figura 4.8 se muestra la curva de Nyquist

$$L(j\omega) = G(j\omega)C(j\omega)$$

de un sistema de control. En ella puede comprobarse que el vector que une el punto -1 con el punto $L(j\omega)$ es la inversa de la sensibilidad,

$$1 + L(j\omega) = \frac{1}{S(j\omega)}$$

La función de sensibilidad, por tanto, aporta una útil interpretación sobre la estabilidad del sistema realimentado. A partir de la figura 4.8 puede comprobarse que la distancia mínima de la curva de Nyquist al punto -1 se corresponde con la inversa de la sensibilidad máxima, definiéndose la sensibilidad máxima, M_s , y su inversa α como

$$M_s = \max_{\omega} |S(j\omega)|, \quad \alpha = \frac{1}{M_s} \quad (4.17)$$

El enfoque de la sensibilidad máxima, aporta una definición más precisa de la estabilidad que la del margen de ganancia y el margen de fase, permitiendo establecer versiones más conservadoras de los márgenes de ganancia y fase. En efecto, denotando α_1 y α_2 , respectivamente, las distancias desde el punto -1 hasta los puntos de frecuencias ω_{cf} y ω_{cg} en la curva de Nyquist pueden calcularse, por geometría, a partir de la figura 4.8 los márgenes de ganancia y fase como

$$\text{MG} = \frac{1}{1 - \alpha_1}, \quad \text{MF} = 2 \arcsin \frac{\alpha_2}{2} \quad (4.18)$$

Dado que α es siempre menor que α_1 y que α_2 , dicho valor puede ser utilizado para definir versiones conservadoras o robustas de los márgenes

$$\text{MG}^* = \frac{1}{1 - \alpha} \leq \text{MG}, \quad \text{MF}^* = 2 \arcsin \frac{\alpha}{2} \leq \text{MF} \quad (4.19)$$

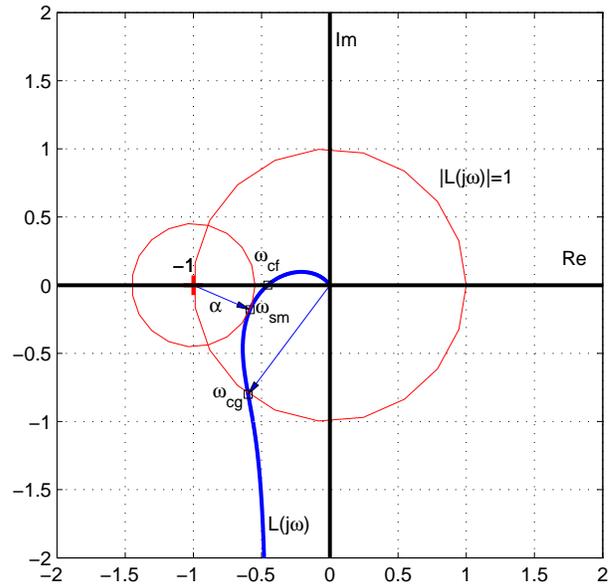
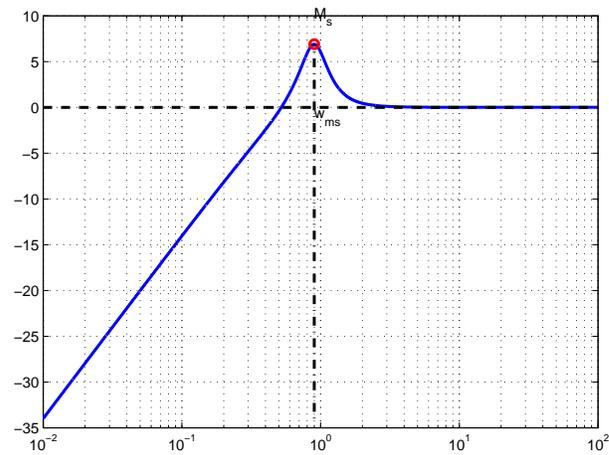
(a) Curva de Nyquist, $L(j\omega)$ (b) Función de sensibilidad, $S(j\omega)$

Figura 4.8: Interpretación de la estabilidad a partir de la curva de Nyquist en términos de la sensibilidad.

Ejemplo. Para el mismo sistema controladores del ejemplo de la sección 4.7 resulta ilustrativo comparar las funciones de sensibilidad para las tres acciones de control, P, PI, PD:

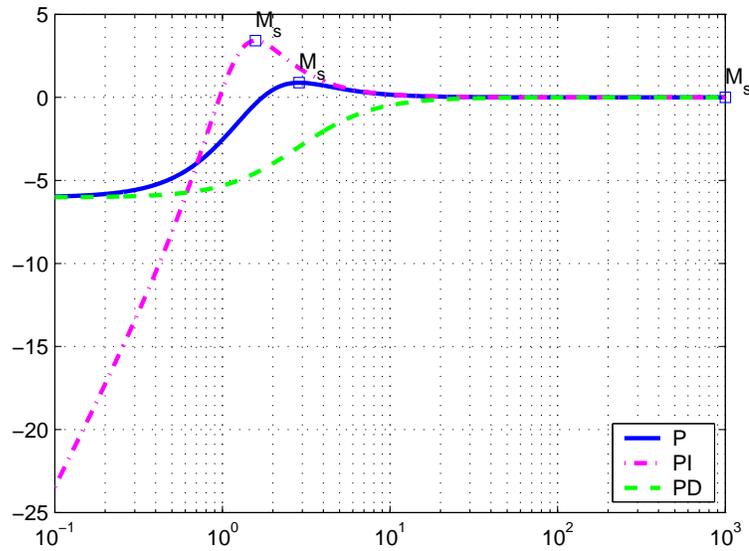


Figura 4.9:

Inspeccionando las figuras, pueden apreciarse de un vistazo los valores de las sensibilidades máximas, M_s . El mayor valor de M_s se produce para el regulador PI, que resulta ser el más oscilatorio, mientras que el valor más pequeño de M_s , que asegura una mayor estabilidad, se da para el regulador PD. En términos de márgenes de estabilidad, en la tabla adjunta se muestran los márgenes de ganancia y fase clásicos, MG y MF, junto con sus versiones robustas, MG* y MF*, evaluados según la redefinición (4.19), así como con los valores de M_s y α :

Controlador	MG	MF	MG*	MF*	M_s (dB)	M_s	α
P	∞ dB	$180,0^\circ$	20,23 dB	$53,6^\circ$	0.89	1.11	0.90
PI	∞ dB	$49,8^\circ$	9,75 dB	$39,4^\circ$	3.42	1.48	0.67
PD	∞ dB	$180,0^\circ$	∞ dB	$60,0^\circ$	0.00	1.00	1.00

donde se puede comprobar que los márgenes robustos MG* y MF* permiten distinguir cualitativamente entre los tres reguladores, mientras que los

márgenes clásicos no aportan información que permita diferenciar las acciones P y PD.

4.8.3. Estabilidad ante variaciones en el proceso.

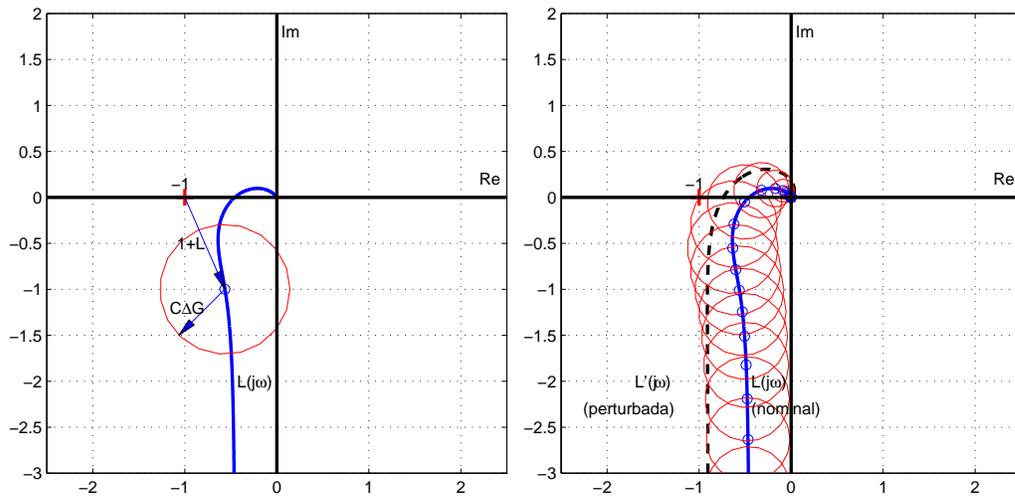
Las funciones de sensibilidad también dan información acerca de las variaciones permisibles en la dinámica de un proceso. Supóngase la siguiente variación en el proceso

$$G' = G + \Delta G = G(1 + \delta G)$$

donde a la magnitud ΔG se la conoce como *incertidumbre aditiva*, y a la magnitud $\delta G = \Delta G/G$ se la conoce como *incertidumbre multiplicativa*. Tras esta variación, la nueva función de transferencia de bucle será

$$L' = CG' = C(G + \Delta G) = L + C\Delta G$$

Esto significa que la nueva curva de Nyquist, $L'(j\omega)$ será igual a la curva original $L(j\omega)$ más una variación igual a $C\Delta G$, que puede producirse en cualquier dirección. Esta idea se muestra en la figura 4.10:



(a) Noción geométrica de la estabilidad ante variaciones en el proceso.

(b) Curvas $L(j\omega)$ y $L'(j\omega)$. Esta última siempre cae dentro de la envolvente descrita por los círculos de radio $|C\Delta G|$.

Figura 4.10:

Cuando G es perturbado hacia G' , la curva de Nyquist, $L'(j\omega)$, se mueve dentro de la envolvente descrita por los círculos de radio $C\Delta G$. Para que el sistema sea estable, por tanto, ninguna de las nuevas ubicaciones de $L'(j\omega)$ debe rodear el punto -1 , debiendo cumplirse $\forall\omega$

$$|C\Delta G| < |1 + L|$$

Dividiendo por $|CG|$ en ambos miembros se llega fácilmente a,

$$\frac{|\Delta G|}{|G|} < \frac{1}{|T|}$$

Finalmente, expresándolo en términos del error multiplicativo queda

$$|\delta G| < \frac{1}{|T|}, \quad \text{o bien,} \quad |\delta G||T| < 1 \quad (4.20)$$

La inversa de la función de sensibilidad complementaria, por tanto, *define una medida de la robustez* del sistema ante errores de modelado o variaciones en el proceso. Siempre que la incertidumbre multiplicativa del modelo, δG , permanezca por debajo de $1/|T|$ el sistema tiene garantizada su estabilidad. La expresión (4.20) forma parte del llamado *teorema de estabilidad robusta*, cuya formulación precisa puede consultarse en una de las referencias propuestas para este tema (Goodwin *et al.*, 2001).

A partir de (4.20) puede verse que las variaciones en el proceso pueden ser grandes para aquellas frecuencias en las que T es pequeña, mientras que para frecuencias en las que T es grande las variaciones admisibles son menores. Una cota conservadora de las máximas variaciones permisibles en el proceso viene dada por

$$\frac{\Delta G}{G} = |\delta G| < \frac{1}{M_t} \quad (4.21)$$

donde

$$M_t = \max_{\omega} |T(j\omega)| = \max_{\omega} \frac{C(j\omega)G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \quad (4.22)$$

El valor de M_t viene dado por el diseño del controlador. Por ejemplo, si $M_t = 2$, son admisibles variaciones puras del 50 % en la ganancia o variaciones puras en la fase de 30°.

Ejemplo. Supóngase un proceso

$$G(s) = \frac{2}{(s + 0,2)(s + 1)(s + 3)}$$

realimentado unitariamente con un controlador PI

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}, \quad \text{donde } k_p = 0,5, \quad k_i = 0,25$$

El sistema en bucle cerrado resultante da lugar a $M_s = 1,93$ a una frecuencia $\omega_{ms} = 0,51$ rads/s y $M_t = 1,69$ a una frecuencia $\omega_{mt} = 0,41$ rads/s

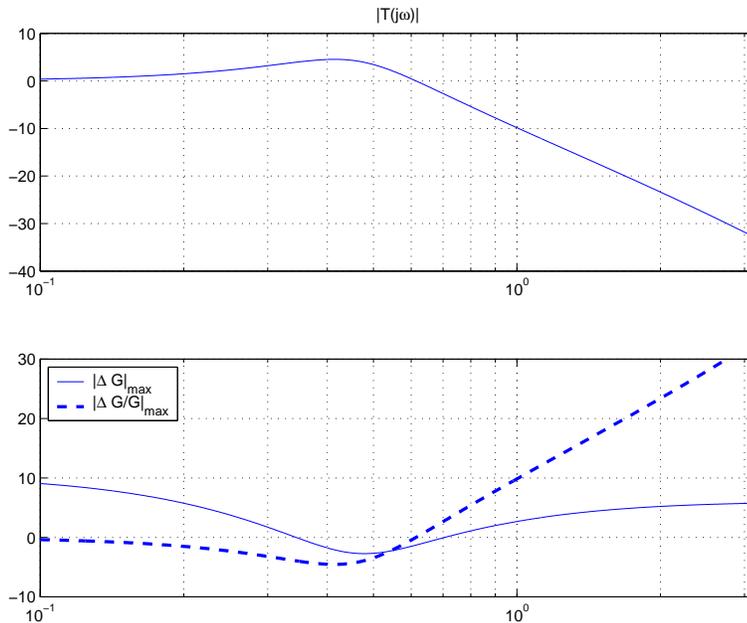


Figura 4.11: Arriba, la función de sensibilidad complementaria. Abajo, valores máximos admisibles de las incertidumbres aditiva y multiplicativa.

En la figura 4.11 se muestra la curva de módulos de la función de sensibilidad complementaria, $|T(j\omega)|$ y las curvas de módulos $|G(j\omega)|/|T(j\omega)|$ y $1/|T(j\omega)|$, correspondientes a los valores máximos de las incertidumbres aditiva, ΔG , y multiplicativa, $\delta G = \Delta G/G$ respectivamente. La figura muestra que:

- Se permiten grandes incertidumbres o variaciones en el modelo del proceso para frecuencias bajas, en las que $T(0) = 1$.

- El error relativo más pequeño $\Delta G/G$ permisible ocurre a $\omega_{mt} = 0,41$ rads/s.
- Para $\omega = 1$, se tiene $|T(j\omega)| = 0,32$ lo que significa que para que el sistema sea estable las variaciones admisibles en el proceso son

$$|\Delta G| < 2,72\text{dB} = 1,36 \quad (4.23)$$

$$|\Delta G/G| < 10\text{dB} = 3,16 \quad (4.24)$$

- Para $\omega = 2$, se tiene $|T(j\omega)| = -23,51\text{dB} = 0,07$ lo que significa que para que el sistema sea estable las variaciones admisibles en el proceso son

$$|\Delta G| < 5,515\text{dB} = 1,8 \quad (4.25)$$

$$|\Delta G/G| < 23,5\text{dB} = 15 \quad (4.26)$$

Esta situación (Aström, 2003) es típica en muchos procesos. En las inmediaciones de la frecuencia de cruce de ganancia sólo se permiten incertidumbres moderadas, mientras que a frecuencias superiores e inferiores se permiten variaciones mayores en el proceso sin alterar significativamente su estabilidad y dinámica.

Esta idea, por ejemplo, tiene interés a la hora de elegir un captador para un diseño basado inicialmente en realimentación ideal. La dinámica del captador debe ser suficientemente rápida como para que las variaciones de fase y módulo que éste introduce en el sistema se produzcan en zonas de poca sensibilidad a las incertidumbres del proceso.

Otra consecuencia de esto es aplicable a la hora de modelar un sistema. Un modelo sencillo, que describa adecuadamente la dinámica del proceso en torno a la frecuencia de cruce de ganancia es, a menudo, suficiente para el diseño. Una excepción a esto, no obstante se produce en sistema en los que existen resonancias que pueden producir variaciones que inestabilicen el sistema.

Ejemplo. Supóngase⁵ un proceso de función de transferencia nominal $G_o(s)$ para el cual se ha diseñado un controlador $C(s)$ tal que

$$G_o(s)C(s) = \frac{0,5}{s(s+1)^2}, \quad T_o(s) = \frac{G_o(s)C(s)}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{0,5}{s^3 + 2s^2 + s + 0,5}$$

⁵Ejemplo adaptado de (Goodwin *et al.*, 2001), pp. 147 y ss. En el ejemplo original se analiza un retardo puro empleando el mismo procedimiento, que el alumno puede consultar para contrastar.

Para su implementación se desea conocer el efecto que introduce en la estabilidad del sistema realimentado la dinámica de un captador de ganancia unitaria y constante de tiempo τ

$$H_\tau(s) = \frac{1}{(1 + \tau s)}$$

De acuerdo con el teorema (4.20) se tiene

$$|\delta G| < \frac{1}{|T|}$$

o bien,

$$|\delta G||T| < 1$$

Con vistas al estudio de la estabilidad, la dinámica del captador puede acoplarse a la del sistema considerándolo como una variación multiplicativa de su dinámica.

$$G'(s) = G(s)H(s) = G(s)[1 + \overbrace{H(s) - 1}^{\delta G}]$$

siendo, por tanto, en este caso

$$\delta G(s) = \frac{1}{1 + \tau s} - 1 = \frac{-\tau s}{1 + \tau s}$$

Evaluando $|\delta G(j\omega)||T(j\omega)|$ para $\tau = \{0,5, 1, \dots, 3\}$ y representando esta magnitud en frecuencia se obtiene la figura 4.12, de la que se deduce claramente que captadores con constantes de tiempo $\tau > 2,2$ segundos pueden causar inestabilidad. Nótese, no obstante, que la limitación obtenida tiene un carácter conservador, dejando algo de margen a la estabilidad, ya que la ecuación 4.20 define una condición suficiente. Los valores de los márgenes de fase clásicos para los valores de τ son

τ	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
MF	32,9°	24,5°	18,7°	14,7°	11,9°	9,8°
MG (dB)	7,04	5,00	3,88	3,17	2,68	2,32

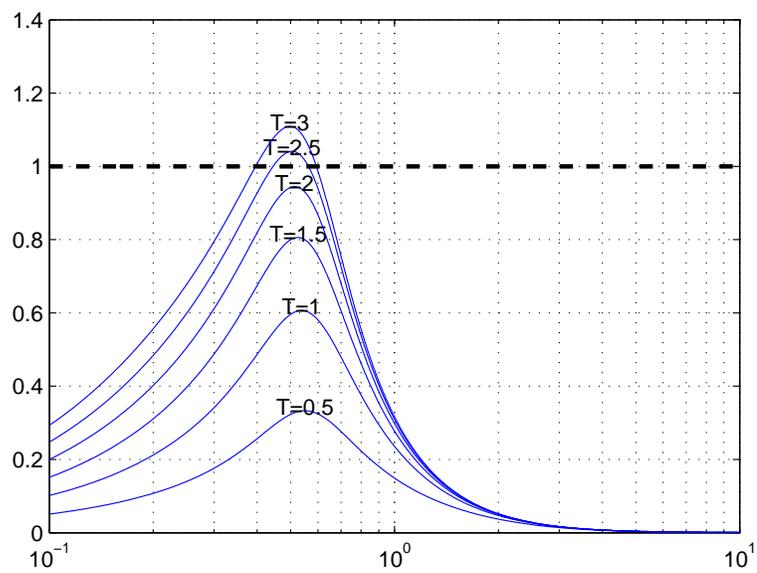


Figura 4.12: Representación frecuencial de $|\delta G(j\omega)| |T(j\omega)|$ para diversos valores de la constante de tiempo, τ , del captador.

4.9. Limitaciones en el Control: Integral de Bode

Parece lógico, a la vista de lo expuesto hasta aquí, que los procedimientos de diseño de sistemas de control estarán orientados a *moldear* las funciones de sensibilidad de forma que el sistema diseñado cumpla los requisitos exigidos en cuanto a estabilidad, rechazo a perturbaciones, etc.

En la realidad, sin embargo, nos encontramos con limitaciones tecnológicas que pueden hacer inviable el control. Uno de los ejemplos más típicos se encuentra cuando intentamos situar en equilibrio vertical una vara. En este ejercicio de control nos encontramos con diversas limitaciones tales como el tiempo de reacción humano (tiempo muerto de varias decenas de milisegundos) y el ancho de banda disponible del actuador (la velocidad a la que nuestra mano puede moverse). Si la vara es muy corta, el sistema se vuelve literalmente imposible de controlar, y la razón para ello no está necesariamente en el regulador (nuestro cerebro), sino en una imposibilidad manifiesta (matemática) de controlar motivada por las restricciones anteriores.

Una cuantificación en el dominio de la frecuencia de esta dificultad del control viene dada por las integrales de Bode⁶, válidas asumiendo tan sólo que tanto el controlador como la planta tienen anchos de banda limitados:

Para sistemas estables:

$$\int_0^{\infty} \log |S(j\omega)| d\omega = 0 \quad (4.27)$$

Para sistemas inestables (con polos p_i en el semiplano derecho):

$$\int_0^{\infty} \log |S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_{p_i \in \mathbb{C}^+} \operatorname{Re}(p_i) \quad (4.28)$$

Estas integrales indican, simplemente, que el área del logaritmo de la función de sensibilidad es constante: cero, si el sistema es estable, y un valor positivo si el sistema tiene polos inestables. Esto supone una seria limitación en el control, puesto que indica que la función de sensibilidad no puede ser moldeada de forma arbitraria.

En efecto, en control interesa habitualmente mantener la sensibilidad $|S(j\omega)|$ en valores bajos, lo que supone, como se ha visto hasta aquí, mayor robustez, insensibilidad ante perturbaciones y estabilidad relativa.

⁶Puede consultarse la demostración de estas integrales, basada en la teoría de residuos, en (Aström, 2003)

Las integrales 4.27 y 4.28 indican, precisamente, que si disminuimos la sensibilidad en una zona de frecuencias, *necesariamente ha de aumentar a otras frecuencias* para mantener el área constante, lo que trae como consecuencia vulnerabilidad del sistema ante otros tipos de perturbaciones así como deterioro de la inestabilidad relativa y, en general, pérdida de robustez ante incertidumbres en el modelo. Este fenómeno se conoce como el *efecto cama de agua* y supone una de las fundamentales limitaciones del control.

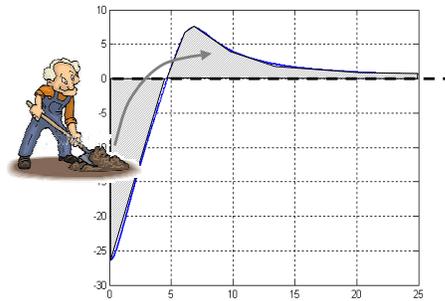


Figura 4.13: Problemática del efecto *cama de agua* en el diseño de sistemas de control.

Finalmente, si existe algún tipo de restricción específico en cuanto al ancho de banda del controlador, del actuador o del sistema por ejemplo, si asumimos

$$|C(j\omega)| \approx 0 \quad \text{para } \omega > \omega_{max}$$

el problema se agrava dado que

$$S(j\omega) = \frac{1}{1+0} = 1 \quad \text{para } \omega > \omega_{max}$$

con lo que no se podrá utilizar más que un limitado rango de frecuencias para “depositar” el área sobrante, con el consiguiente incremento de la sensibilidad máxima obtenida.

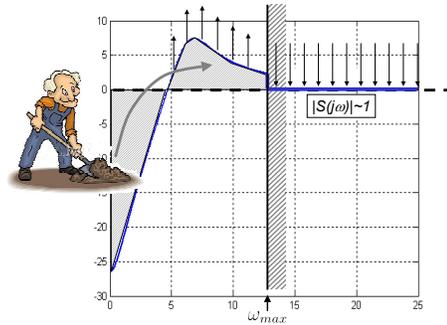


Figura 4.14: Efecto de la limitación del ancho de banda sobre el resultado del diseño.

Ejemplo. Supóngase el sistema dado por

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

y los controladores

$$\begin{aligned} C_1(s) &= 10 \\ C_2(s) &= 20 \\ C_3(s) &= 4 \cdot \frac{(s+2)}{s} \end{aligned}$$

Las funciones de sensibilidad $S_k = \frac{1}{1+G(s)C_k(s)}$ para $k = \{1, 2, 3\}$ se muestran en la figura adjunta

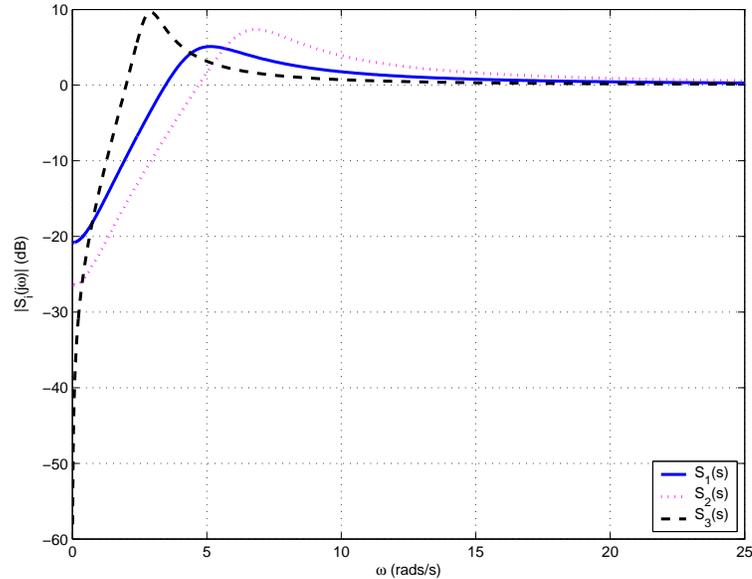


Figura 4.15: Funciones de sensibilidad $S_1(s)$, $S_2(s)$, $S_3(s)$, para los controladores $C_1(s)$, $C_2(s)$, $C_3(s)$

Las funciones de sensibilidad muestran cómo en los reguladores proporcionales, $C_2(s)$, con mayor ganancia que $C_1(s)$, permite una sensibilidad más baja en continua y a frecuencias bajas, dando lugar a un menor error en régimen permanente. Dado que el sistema $G(s)$ es estable (no tiene polos en el semiplano positivo) la integral de Bode (4.27) indica que el área por debajo de 0 ha de igualar al área que está por encima, lo que ejerce una presión al alza de las sensibilidades en frecuencias más altas trayendo como contrapartida mayor inestabilidad y sensibilidad a frecuencias más altas para $C_2(s)$. En el caso del regulador con acción integral, $C_3(s)$, que consigue incluso anular el error en régimen permanente ($S_3(0) = 0$) el problema se agrava, debiendo ubicar mayor área encima de la línea de 0dB, dando lugar a una mayor inestabilidad.

Los valores de máxima sensibilidad y los márgenes (clásicos y robustos) obtenidos son:

	C_1	C_2	C_3
S_{max}	5,11 dB	7,38 dB	9,65 dB
MG (dB)	∞ dB	∞ dB	∞ dB
MG* (dB)	7,03 dB	4,84 dB	3,46 dB
MF ($^\circ$)	38,9 $^\circ$	27,4 $^\circ$	20,0 $^\circ$
MF* ($^\circ$)	32,2 $^\circ$	24,7 $^\circ$	18,9 $^\circ$

Lo que hace patente el precio a pagar por la mejora obtenida en el comportamiento a bajas frecuencias.

4.10. Comentarios a la bibliografía

Principales referencias. Los conceptos tratados en este tema vienen excelentemente tratados en (Franklin *et al.*, 2002), (Aström, 2003) y (Goodwin *et al.*, 2001):

- En (Franklin *et al.*, 2002) se dedica parte de un capítulo a su estudio, incluyendo en la misma línea que el resto del libro explicaciones muy conceptuales e intuitivas.
- En (Aström, 2003) se expone el tema como parte de los fundamentos del control, abordando todos los aspectos aquí comentados. Además, hace uso de las funciones de sensibilidad a lo largo de toda la obra integrándolas en el proceso de diseño y utilizándolas para extraer conclusiones.
- En (Goodwin *et al.*, 2001) también se dedica un importante apartado a estas funciones, utilizándolas para explicar aspectos tecnológicos del control como por ejemplo el impacto de los tiempos muertos en la cadena de control.

Otras referencias. El alumno puede encontrar una excelente referencia sobre la integral de Bode y las limitaciones del control que se derivan de ella en (Stein, 2003), un magistral artículo publicado en *IEEE Control Systems Magazine* escrito de forma muy didáctica y con un nivel muy adecuado. En (Ogata, 2003), el alumno puede encontrar un capítulo dedicado al control robusto, donde surgen muchas de las ideas expuestas aquí. Finalmente, otros textos, como (Kuo and Golnaraghi, 2002), (Blasco Ferragud *et al.*, 2000) y (Lewis and Yang, 1999) también incluyen referencias a la sensibilidad, aunque omiten parte de los aspectos aquí tratados.

Referencias electrónicas.

- El alumno puede encontrar una magnífica página con simulaciones en tiempo real, basadas en java, en

<http://www.jhu.edu/~signals/>

En esta página existen dos simulaciones directamente relacionadas con este tema: una dedicada al concepto de sensibilidad y otra dedicada al concepto de estabilidad robusta descrito en la sección 4.8.

- En <http://csd.newcastle.edu.au/control/>, página web de (Goodwin *et al.*, 2001), existen abundantes recursos que incluyen el tema de la sensibilidad.

Bibliografía

- Aström, Karl J. (2003). *Control System Design. Lecture notes for ME 155A*. Department of Mechanical and Environmental Engineering. University of California Santa Barbara.
- Blasco Ferragud, Xavier, Miguel A. Martínez Iranzo, Juan S. Senent Español and Javier Sanchis Sáez (2000). *Sistemas Automáticos*. Universidad Politécnica de Valencia. Servicio de publicaciones.
- Franklin, Gene F., J. David Powell and Abbas Emami-Naeini (2002). *Feedback Control of Dynamic Systems (4ª Edición)*. Prentice Hall.
- Goodwin, Graham C., Stefan F. Graebe and Mario E. Salgado (2001). *Control System Design*. Prentice Hall.
- Kuo, Benjamin C. and Farid Golnaraghi (2002). *Automatic Control Systems*. 8 ed.. John Wiley & Sons; 8th edition (September 2002).
- Lewis, P.H. and C. Yang (1999). *Sistemas de Control en Ingeniería*. Prentice Hall.
- Ogata, Katsuhiko (2003). *Ingeniería de Control Moderna (4ª Edición)*. Prentice Hall.
- Stein, Gunter (2003). Respect the unstable. *IEEE Control Systems Magazine* **23**(4), 12–25.