

Utilización de la Transformada de Fourier en el muestreo de señales.

Mauro Tomas Tronelli

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
mauro.tronelli@gmail.com
Junio 2014

Resumen: En el presente informe se tratará el tema del muestreo de señales. Es decir la conversión de señales en tiempo continuo a señales en tiempo discreto. La base de la representación discreta de una señal continua en banda limitada es el teorema de muestreo. Este es útil en la digitalización de señales (para telecomunicaciones) y en la codificación del sonido en formato digital.

Palabras clave: tiempo discreto, tiempo continuo, muestreo, señal.

I. INTRODUCCIÓN

Bajo ciertas restricciones, una señal continua en el tiempo pueda ser representada solamente por algunos de sus valores, correspondientes a determinados instantes (discretos) de tiempo, y también que pueda ser recuperada a partir de ellos. Esta propiedad sorprendente es consecuencia de un resultado básico que se conoce como Teorema de Muestreo.

La importancia del teorema del muestreo radica en que establece un puente entre las señales de tiempo continuo y las de tiempo discreto.

En muchos contextos, el procesamiento de las señales discretas permite mayor flexibilidad y a menudo es preferible al tratamiento de señales continuas, en parte debido a la existencia de poderosos hardwares programables y de bajo costos. Estas tecnologías ofrecen la posibilidad de explotar el concepto de muestreo para convertir una señal continua en una discreta, y luego de procesarla utilizando un sistema discreto, volver a convertirla para tener nuevamente una señal de tiempo continuo. En otras palabras el procesamiento de señales continuas puede implementarse como un conjunto de tres sistemas: un Muestreador, un Sistema Discreto, y un reconstructor que permite obtener una señal continua a partir de las muestras. Esta forma de trabajo es habitual en los sistemas actuales de comunicaciones, entretenimientos, etc.

II. MUESTREO PERIÓDICO

La manera más habitual de tener una representación discreta en el tiempo de una señal continua es tomando muestras cada determinado período de tiempo T . Es decir una señal discreta $x[n]$ se obtiene al tomar muestras cada T segundos de una señal continua $x_c(t)$, de acuerdo a la relación:

$$x[n] = x_c(t) |_{t=nT}, \quad -\infty < n < \infty$$

Donde T es el período de muestreo, y su recíproca $f_s = 1/T$ es la frecuencia de muestreo, que se mide en muestras por segundo.

El sistema que implementa la operación indicada en la ecuación (anterior) es un conversor continuo a discreto ideal (C/D).

En la práctica la operación de muestreo se lleva a cabo por un conversor analógico digital (A/D), este puede pensarse como una aproximación al C/D ideal pero teniendo en cuenta muchas consideraciones que la hacen más precisa en el campo práctico.

En general la operación de muestreo no es invertible: dada la salida $x[n]$ del muestreador no es posible reconstruir la señal continua original $x_c(t)$, ya que muchas funciones continuas en tiempo pueden producir la misma sucesión de muestras.

La ambigüedad ligada al proceso de muestreo es una característica fundamental en el procesamiento de señales.

Para estudiar el proceso de muestreo es conveniente adoptar la representación matemática que se muestra en la figura (2) que está compuesta por dos etapas:

- Una multiplicación por un tren de impulsos periódicos;
- La conversión del tren de impulsos a una sucesión de números.

En la Fig.1 (b) se muestra una señal continua $x_c(t)$, y el resultado de multiplicarla por dos trenes de impulsos periódicos de distinto período. Las respectivas sucesiones de salida se muestran en la figura 1 (c). La principal diferencia entre $x_s(t)$ y $x[n]$ es que la primera es una función “continua” (específicamente, un tren de impulsos modulado por $x_c(t)$) que se anula para todo t que no sea múltiplo de T . Por otro lado, la sucesión $x[n]$ está indizada* (proceso de describir o representar el contenido temático de un recurso de información) por la variable entera n : la sucesión $x[n]$ no contiene información explícita sobre el período de muestreo T . Además, las muestras de $x_c(t)$ están representadas por los números finitos que componen a $x[n]$ y no por las áreas de los impulsos, como ocurre con $x_s(t)$. Los diagramas de la parte superior son representaciones que permiten derivar de manera más sencilla un resultado fundamental, y facilitar la obtención de resultados que serían mucho más complicados utilizando un planteo más formal con manipulaciones de la Transformada de Fourier.

A. Representación frecuencial del muestreo

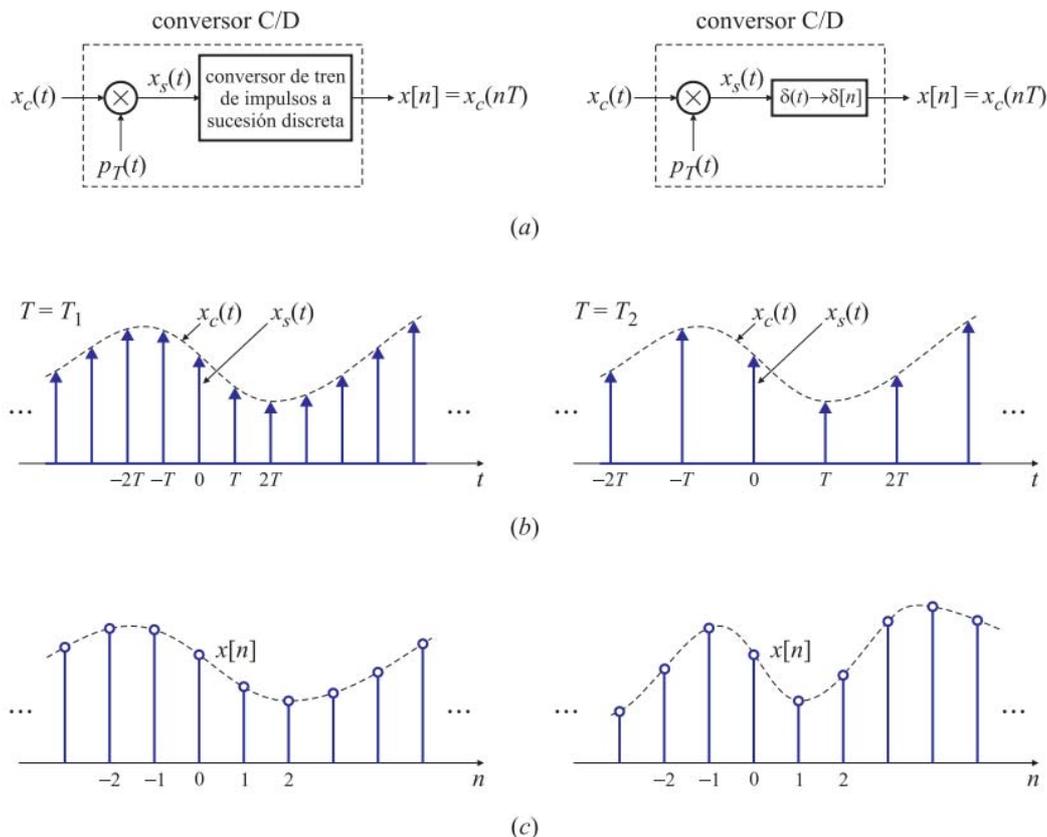


Fig. 1 Muestreo con un tren de impulsos periódico seguido por una conversión a una sucesión discreta. Modelo matemático (a); la señal $x_s(t)$ para dos períodos de muestreo $T = T_1$ y $T = T_2$ (b); sucesión de salida para dos períodos de muestreo distintos (c).

Para obtener la relación entre la entrada y la salida de un conversor continuo/discreto (C/D) ideal en el dominio frecuencial, es conveniente considerar primero la conversión de la señal continua $x_c(t)$ en un tren de impulsos continuos $x_s(t)$, como se muestra en la figura 1 (a). Esto se puede conseguir modulando el tren de impulsos

$$p_T(t) = \sum_n \delta(t - nT),$$

Donde δ es el delta de Dirac.

Escribiendo $x_s(t)$ en función de esta relación y de $x_c(t)$ obtengo:

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x_c(t)p_T(t) \\ x_s(t) &= x_c(t) \sum_n \delta(t - nT). \end{aligned} \quad (1)$$

Aplicando la propiedad de colador de impulsos, $x_s(t)$ se puede expresar como

$$x_s(t) = \sum_n x_c(nT)\delta(t - nT). \quad (2)$$

Esta se halla representada en la figura 1 (b). La transformada de Fourier de $x_s(t)$ puede calcularse fácilmente aplicando propiedades. La señal $x_s(t)$ es el producto de la señal continua $x_c(t)$ y del tren de impulso $p_T(t)$; por lo tanto, la transformada de Fourier $X_s(f)$ de $x_s(t)$ es la convolución entre las transformadas de Fourier $X_c(f)$ de $x_c(t)$ y $P_T(f)$ de $p_T(t)$:

$$X_s(f) = X_c(f) * P_T(f),$$

Donde “*” indica la convolución lineal,

$$X_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X_c(v)P_T(f - v) dv.$$

Sabiendo que el tren de impulsos satisface el par transformado

$$p_T(t) = \sum_n \delta(t - nT) \leftrightarrow P_T(f) = \frac{1}{T} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

se tiene que

$$X_s(f) = X_c(f) * \frac{1}{T} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (3)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_k X_c\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_k X_c(f - kF_s) \quad (4)$$

Para el pasaje de la ecuación (1) a la ecuación (2) se utiliza la propiedad de multiplicación de una función continua por un impulso

$$x_c(t)\delta(t - nT) = x_c(nT)\delta(t - nT)$$

Esta relación expresa que multiplicar una función continua por un impulso es lo mismo que escalar el impulso por el valor de la función continua en el lugar donde está aplicado el impulso. Por otro lado en la ecuación (3) se aplica la propiedad de convolución de una función continua por un impulso

$$X_c(f) * \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = X_c\left(f - \frac{k}{T}\right),$$

Cuyo resultado es el de desplazar la función continua al lugar donde está aplicado el impulso. La ecuación (4) establece la relación entre los espectros de la señal continua $X_c(f)$ y la salida $X_s(f)$ del modulador del tren de impulsos de la figura 5.3 (a). Esta ecuación muestra que la transformada de Fourier $x_s(t)$ está formada por replicas repetidas cada $F_s = 1/T$ de la transformada de Fourier de la señal continua $x_c(t)$ escaladas por un factor $1/T$. Las copias $X_c(f)$ están desplazadas en múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo $F_s = 1/T$, y se superponen para producir la transformada de Fourier periódica correspondiente a un tren de impulsos. En la Figura 2 se ilustra la representación frecuencial de muestreo por un tren de impulsos.

La transformada de Fourier $X_c(f)$ de una señal $x_c(t)$ limitada en banda cuya máxima componente frecuencial no nula es f_N se muestra en la figura 2 (a), y la transformada de Fourier $P_T(f)$ del tren de impulsos periódicos $p_T(t)$ se representa en la figura 2 (b). La convolución de estas dos transformadas, expresada en las ecuaciones (3) y (4) es el espectro de $X_s(f)$, graficado en la figura 2 (c), que está formada por réplicas de $F_s = 1/T$ de $X_c(f)$.

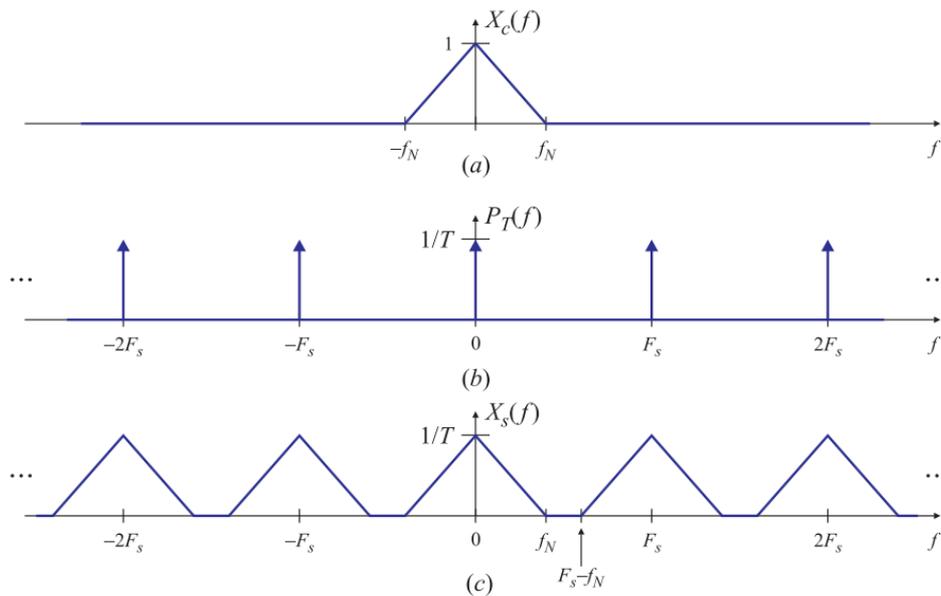


Fig. 2 . Efectos en el dominio frecuencia del muestreo en el dominio tiempo. Espectro de la señal original (a); espectro del tren de impulsos (b); espectro de la señal muestreada con $F_s > 2f_N$ (sin *aliasing*) (c).

Esta última imagen permite apreciar que si la frecuencia de muestreo F_s y la máxima componente frecuencial f_N de la señal satisfacen la relación

$$f_N < F_s - f_N, \quad \text{o} \quad F_s > 2f_N$$

Las réplicas de $X_c(f)$ desplazadas en múltiplos de F_s no se superponen cuando se suman según expresa la ecuación (5). Es decir, en cada múltiplo entero de F_s se obtiene una copia fiel del espectro original. Si las desigualdades anteriores no se cumplen, es decir si $F_s \leq 2f_N$ las réplicas desplazadas de $X_c(f)$ se superponen como se muestra en la siguiente figura 3.

En el gráfico 3(a) de esta figura se muestra nuevamente la T.F. de una señal de banda limitada con máxima componente frecuencial f_N que para este caso es mayor a $F_s/2$. En el gráfico (b) se representa la T.F. del tren de impulsos periódicos, que son impulsos separados F_s entre sí.

Si comparo estos dos gráficos se puede observar que $F_s > 2f_N$. La convolución de estas dos señales resulta en la señal $x_s(t)$ cuyo espectro $X_s(f)$ es el el que se muestra en el gráfico (c).

En líneas de trazo se grafican las réplicas cada F_s del espectro $X_c(f)$. La suma de estas réplicas da como resultado el espectro representado por un trazo continuo grueso. En este caso, en cada múltiplo de F_s no queda centrada una copia fiel del espectro original $X_c(f)$, sino que aparece un espectro distorsionado.

Esta es la base de del teorema de muestreo de Nyquist. Este teorema fue formulado en forma de conjetura por primera vez por Harry Nyquist en 1928 y fue demostrado formalmente por Claude E. Shannon en 1949.

Teorema 1 Teorema del muestreo

Sea $x_c(t)$ una señal de banda limitada, cuya T.F. satisface

$$X_c(f) = 0 \text{ para } |f| > f_N.$$

Entonces $x_c(t)$ puede determinarse de manera única a partir de sus muestras

$$x[n] = x_c(nT), \quad n \in \mathbb{N} \text{ si } F_s = 1/T > 2f_N$$

La frecuencia f_N se conoce como frecuencia de Nyquist, y la frecuencia $2f_N$ que debe ser menor que la frecuencia de muestreo F_s , se denomina tasa de Nyquist.

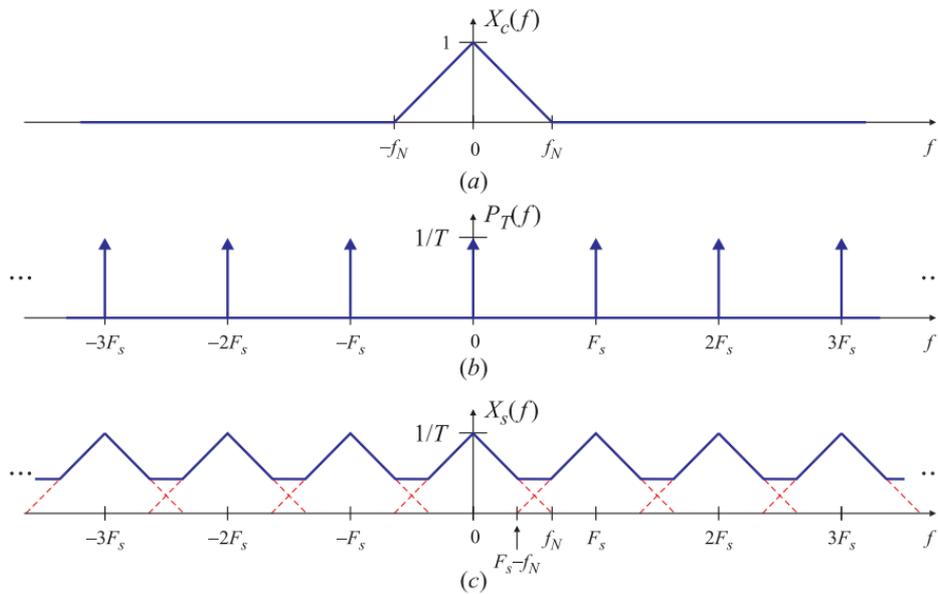


Fig. 3 Efectos en el dominio frecuencia del muestreo en el dominio tiempo. Espectro de la señal original (a); espectro del tren de impulsos (b); espectro de la señal muestreada con $F_s < 2f_N$ (con *aliasing*) (c).

Si la señal muestreada satisface las hipótesis del teorema del muestreo, como ocurre con el espectro de la Fig. 1, es posible recuperar el espectro original filtrando la señal $x_s(t)$ con un filtro pasabajos de ancho de banda adecuado. En el caso representado en la Fig. 3 no es posible recuperar el espectro $X_c(f)$ de la señal original filtrando el espectro $X_s(f)$ de $x_s(t)$ con cualquier tipo de filtro. Se dice en este caso que el espectro está alterado por las réplicas o que sufre distorsión por aliasing (réplica en inglés). En el primer caso, la señal continua $x_c(t)$ puede recuperarse a partir de $x_s(t)$ utilizando un filtro pasabajos ideal, conocido como filtro reconstructor.

III. CONCLUSIÓN

El análisis del muestreo de señales es un tema muy extenso, con este informe lo que se pretende es dar un pantallazo acerca de que tan importantes son los temas de matemática avanzada como la Transformada de Fourier para una resolución más rápida y eficaz de estos análisis.

REFERENCIAS

- [1] Apuntes Procesamiento Digital de Señales, disponibles en <http://www.ingelec.uns.edu.ar>
- [2] W. Kaplan, "Cálculo Avanzado" (517 K14-2).
- [3] Brigham E. O., "The fast Fourier transform"(A-6.678. Inst. Mat.).
- [4] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002.
- [5] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en <http://en.wikipedia.org/wiki>.
- [6] Calandrini, Guía de definiciones y teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja. 2014.