

Unidad 4

Ondas electromagnéticas

18 de mayo de 2018

En esta unidad estudiaremos las soluciones de las ecuaciones de Maxwell cuando los campos y las fuentes que los producen dependen del tiempo. A diferencia de lo que sucede en una situación estática, en la cual los campos eléctrico y magnético están desacoplados, demostraremos que en este caso el acoplamiento entre ambos permite la propagación de ondas electromagnéticas.

1. Ondas electromagnéticas en el espacio vacío

1.1. Ecuaciones de onda

En esta sección mostraremos cómo deducir la existencia de ondas electromagnéticas en el vacío. Partimos de las ecuaciones diferenciales de Maxwell para el espacio vacío las cuales reproducimos aquí por comodidad

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_v \quad (\text{Ley de Gauss para el campo eléctrico}) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Ley de Gauss para el campo magnético}) \quad (2)$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J} + \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} \quad (\text{Ley de Ampère}) \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Ley de Faraday}). \quad (4)$$

Debido a que las leyes de Ampère y Faraday establecen un acoplamiento entre los campos eléctrico y magnético, es posible combinarlas para obtener ecuaciones diferenciales para cada uno de ellos por separado. Tomando el rotacional en ambos lados de la ecuación (4) obtenemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t}. \quad (5)$$

Luego, usando la ley de Ampère (3), podemos reescribir el lado derecho de la ecuación anterior como función del campo eléctrico y la densidad de corriente. Reordenar los términos obtenemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \quad (6)$$

la cual se conoce como la **ecuación de onda inhomogénea**. Una relación equivalente para el campo magnético \mathbf{B} se puede determinar siguiendo un procedimiento similar. Si tomamos el

rotacional en ambos miembros de la ecuación (3) y luego eliminamos el campo \mathbf{E} usando la ley de Faraday (4), obtenemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J}. \quad (7)$$

Si en la región del espacio considerada no hay cargas libres ($\rho_v = 0$), entonces $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. En este caso ambos campos no tendrán divergencia (recordemos que siempre se tiene que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$). Luego, considerando este resultado y tomando en cuenta la identidad (131) de la unidad 1, $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$, podemos reescribir las ecuaciones (6) y (7) como

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (8)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J}. \quad (9)$$

Finalmente, si el espacio está completamente vacío y ni siquiera hay densidades de corrientes, entonces las dos expresiones anteriores se pueden escribir como **ecuaciones de onda homogéneas**

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0}, \quad (10)$$

y

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0}. \quad (11)$$

Como veremos enseguida, ambas relaciones predicen la propagación de ondas electromagnéticas en el vacío, incluso cuando no hay un entorno material que sirva de medio para transmitir una perturbación. Este resultado es muy importante, pues en mecánica las ondas sólo pueden propagarse si hay un medio que las sostenga (por ejemplo el sonido se puede escuchar si entre la fuente y el observador hay aire, agua u otro medio material).

Deduciremos ahora la solución general para del sistema de ecuaciones (10) y (11). Para hacer esto, consideramos primero la relación

$$\frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (12)$$

la cual es una **ecuación de onda escalar unidimensional** que está asociada a muchos fenómenos físicos (por ejemplo, a la propagación del sonido). Notemos que tiene una estructura similar a cada una de las ecuaciones (10) y (11). En (12) la cantidad v es una constante y la función $f(z, t)$, la cual depende de una variable espacial z y el tiempo t , podría representar diferentes observables, como el desplazamiento transversal de un elemento de longitud de una cuerda elástica que se ha tensado a lo largo del eje z entre dos puntos fijos. Es fácil demostrar que una solución posible tiene la forma

$$f(z, t) = g(z - vt), \quad (13)$$

donde $g(u)$ es una función arbitraria que es diferenciable al menos dos veces, pero cuyo argumento es igual a $u = (z - vt)$. Para comprobarlo calculamos las primeras derivadas de (13) respecto a z y t ,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{dg}{du} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{dg}{du} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{dg}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{dg}{du}, \quad (14)$$

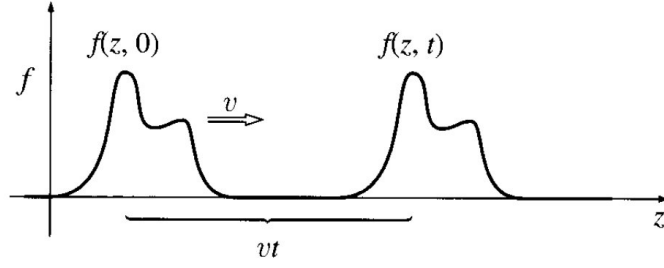


Figura 1: Forma en que se propaga una perturbación descrita por la solución (13).

y luego las segundas derivadas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dg}{du} \right) = \frac{d^2g}{du^2} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{d^2g}{du^2} \quad (15)$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dg}{du} \right) = -v \frac{d^2g}{du^2} \frac{\partial u}{\partial t} = v^2 \frac{d^2g}{du^2}. \quad (16)$$

A partir de las dos expresiones anteriores vemos que

$$\frac{d^2g}{du^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad (17)$$

lo que demuestra que (13) es solución de la ecuación de onda unidimensional (12).

Por otro lado, la constante v es igual a la velocidad con que se propagan las ondas descritas por la ecuación (13). Para probar esta afirmación consideremos la figura 1, la cual muestra cómo luce una perturbación a dos tiempos distintos, 0 y t . Una forma de determinar la velocidad de propagación consiste en calcular, para una dada variación de tiempo, cuánto se desplaza un punto característico de la perturbación (por ejemplo su máximo). Para este punto característico tenemos que $u = (z - vt) = \text{constante}$, expresión a partir de la cual se deduce que

$$\frac{dz}{dt} = v. \quad (18)$$

Decimos entonces que la ecuación (13) representa la propagación de una onda en el sentido positivo de z . Una expresión similar, $f(z, t) = h(z + vt)$, representa el movimiento de otra onda en el sentido contrario, siendo $h(u)$ otra función arbitraria que es diferenciable al menos dos veces. Por lo tanto la solución general de la ecuación de onda unidimensional (12) será

$$f(z, t) = g(z - vt) + h(z + vt). \quad (19)$$

En forma análoga, es posible demostrar que las soluciones generales del sistema de ecuaciones (10) y (11), que son equivalentes a (19), pueden escribirse como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) \quad (20)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct), \quad (21)$$

donde tanto $\mathbf{E}_0(u)$ como $\mathbf{B}_0(u)$ son funciones vectoriales arbitrarias de una variable escalar $u = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)$, y ambas son diferenciables al menos dos veces. Aquí \mathbf{n} es un vector unitario que apunta en la dirección de propagación de la onda y c es su velocidad, la cual está dada por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (22)$$

La expresión anterior puede deducirse fácilmente reemplazando alguna las soluciones (20) o (21) en la ecuación de onda correspondiente. Usando los valores conocidos de μ_0 y ϵ_0 se obtiene que $c \approx 3 \times 10^8$ [m/seg], la velocidad de la luz en el vacío. En el pasado, este último resultado fue decisivo para terminar de demostrar que la luz visible es una onda electromagnética.

Si en lugar de vacío consideramos un medio isótropo no conductor ($\sigma = 0$) que tenga una permitividad real ϵ y una permeabilidad μ , entonces los razonamientos anteriores continúan siendo válidos siempre y cuando en las ecuaciones de onda (10) y (11) se haga la sustitución $(\mu_0\epsilon_0) \rightarrow (\mu\epsilon)$. Como en general para un medio material $\epsilon \geq \epsilon_0$ y $\mu \geq \mu_0$, entonces la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \leq c, \quad (23)$$

será menor o igual que c .

Finalmente, tengamos en cuenta que debido a la linealidad de las ecuaciones de onda, cualquier combinación lineal de funciones del tipo (20) y (21) también es una solución del sistema (cada una de ellas con un \mathbf{n} , \mathbf{E}_0 y \mathbf{B}_0 particulares).

1.2. Solución general para ondas planas

Una solución particular del sistema de ecuaciones (10) y (11) que tiene un interés especial es aquella que describe la propagación de **ondas planas**. Por razones didácticas, deduciremos nuevamente las ecuaciones de onda a partir de las leyes de Faraday y Ampère para una geometría muy simple y obtendremos la soluciones correspondientes en término de ondas planas. Posteriormente veremos cómo se describen este tipo de ondas en una situación más general.

Comenzamos suponiendo que, en coordenadas cartesianas, la dirección de propagación de las ondas es paralela al eje z . Buscamos soluciones tipo ondas planas: asumimos que cada una de las componentes de los campos son funciones únicamente de z y por lo tanto sus derivadas respecto a x e y son cero [los frentes de onda están sobre el plano (x, y)]. La ley de Faraday (4) en su forma armónica compleja se puede escribir como

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hat{E}_x & \hat{E}_y & \hat{E}_z \end{vmatrix} = -j\omega(\mathbf{a}_x\hat{B}_x + \mathbf{a}_y\hat{B}_y + \mathbf{a}_z\hat{B}_z). \quad (24)$$

Debido a que los campos sólo depende de z obtenemos las siguientes relaciones

$$-\frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} = -j\omega\hat{B}_x \quad (25)$$

$$\frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} = -j\omega\hat{B}_y \quad (26)$$

$$0 = \hat{B}_z. \quad (27)$$

Haciendo lo mismo con la ley de Ampère (3) (y en ausencia de corrientes de cargas libres) obtenemos

$$\nabla \times \frac{\hat{\mathbf{B}}}{\mu_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\hat{B}_x}{\mu_0} & \frac{\hat{B}_y}{\mu_0} & \frac{\hat{B}_z}{\mu_0} \end{vmatrix} = j\omega\epsilon_0(\mathbf{a}_x\hat{E}_x + \mathbf{a}_y\hat{E}_y + \mathbf{a}_z\hat{E}_z) \quad (28)$$

y

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\hat{B}_y}{\mu_0} \right) = j\omega\epsilon_0 \hat{E}_x \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\hat{B}_x}{\mu_0} \right) = j\omega\epsilon_0 \hat{E}_y \quad (30)$$

$$0 = \hat{E}_z. \quad (31)$$

Las expresiones anteriores muestran que:

- Las componentes de los campos en la dirección de propagación z son cero. Este tipo de ondas son denominadas **transversales electromagnéticas** (TEM).
- La componente x de cada campo, está acoplada a la variación espacial de la componente y del otro campo, y viceversa. De acuerdo a esto, surgen dos pares independientes de componentes, (\hat{E}_x, \hat{B}_y) y (\hat{E}_y, \hat{B}_x) .

Esta última propiedad indica que los campos son perpendiculares entre sí. De hecho, si el campo eléctrico sólo tiene una componente en la dirección de x , entonces $\hat{E}_y = 0$ y a partir de (25) se puede ver que $\hat{B}_x = 0$. Por lo tanto el campo magnético sólo tendrá una componente en la dirección de y .

A continuación determinaremos las soluciones para el par de componentes (\hat{E}_x, \hat{B}_y) . Combinando las ecuaciones (26) y (29) para eliminar \hat{B}_y , podemos escribir la siguiente ecuación diferencial para \hat{E}_x

$$\frac{\partial^2 \hat{E}_x}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \hat{E}_x = 0. \quad (32)$$

Esta es la expresión armónica compleja de la ecuación de onda (10) en el caso unidimensional (compruebe esta afirmación). Es fácil ver que su solución es simplemente

$$\boxed{\hat{E}_x(z) = \hat{E}_m^+ e^{-j\beta_0 z} + \hat{E}_m^- e^{j\beta_0 z}}, \quad (33)$$

donde \hat{E}_m^+ y \hat{E}_m^- son constantes (amplitudes) complejas arbitrarias y

$$\boxed{\beta_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad (34)$$

es conocida como la **constante de fase**, el **factor de fase** o el **número de onda**. Por otro lado, combinando las ecuaciones (26) y (29) para eliminar \hat{E}_x , obtenemos la ecuación de onda correspondiente para el campo magnético

$$\frac{\partial^2 \hat{B}_y}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \hat{B}_y = 0, \quad (35)$$

la cual tiene una solución con una estructura similar a (33)

$$\hat{B}_y(z) = \hat{B}_m^+ e^{-j\beta_0 z} + \hat{B}_m^- e^{j\beta_0 z}. \quad (36)$$

Como el par de campos (\hat{E}_x, \hat{B}_y) están acoplados por las leyes de Faraday y Ampère, podemos encontrar relaciones entre sus amplitudes complejas. De hecho, teniendo en cuenta (33) y la ecuación (26), podemos reescribir la solución para el campo magnético como

$$\boxed{\hat{B}_y(z) = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \hat{E}_m^+ e^{-j\beta_0 z} - \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \hat{E}_m^- e^{j\beta_0 z}}. \quad (37)$$

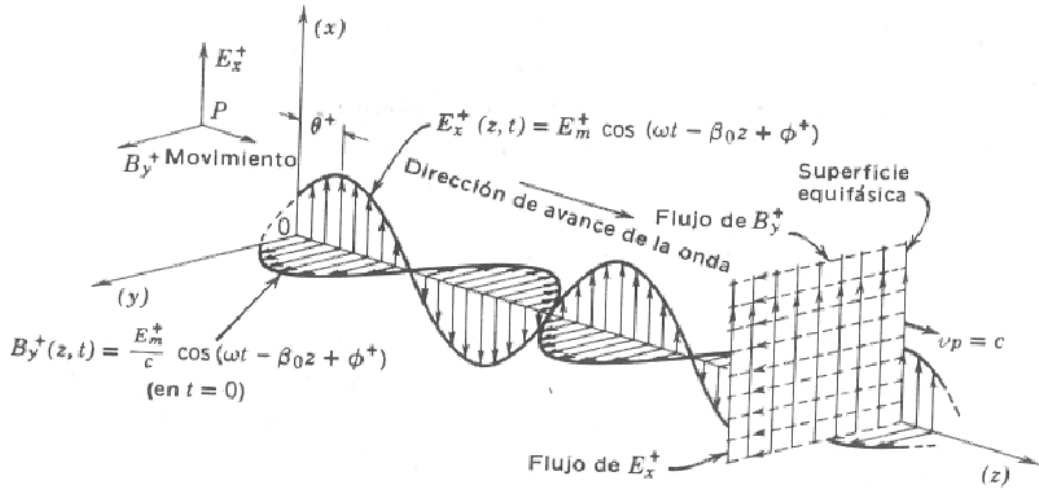


Figura 2: Esquema que muestra para un tiempo fijo, los campos eléctrico y magnético de una onda plana que se propaga en el sentido positivo del eje z .

La figura 2 muestra los campos eléctrico y magnético de la onda plana propagándose a lo largo del eje z .

Cada uno de los términos de la solución (33) representan ondas senoidales que se propagan en ambas direcciones del eje z . Para ver esto, expresemos las amplitudes en forma polar

$$\hat{E}_m^+ = E_m^+ e^{j\phi^+} \quad \text{y} \quad \hat{E}_m^- = E_m^- e^{j\phi^-}, \quad (38)$$

donde ϕ^+ y ϕ^- son los ángulos de fase. Usando estas ecuaciones en la solución para el campo eléctrico (33), multiplicando por el factor $e^{j\omega t}$ y tomando la parte real obtenemos

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= \text{Re} \left[\hat{E}_x(z) e^{j\omega t} \right] \\ E_x(z, t) &= \text{Re} \left[\left(E_m^+ e^{j\phi^+} e^{-j\beta_0 z} + E_m^- e^{j\phi^-} e^{j\beta_0 z} \right) e^{j\omega t} \right] \\ E_x(z, t) &= E_m^+ \cos(\omega t - \beta_0 z + \phi^+) + E_m^- \cos(\omega t + \beta_0 z + \phi^-). \end{aligned} \quad (39)$$

De igual manera la solución para el campo magnético es

$$B_y(z, t) = \left[\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} E_m^+ \right] \cos(\omega t - \beta_0 z + \phi^+) - \left[\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} E_m^- \right] \cos(\omega t + \beta_0 z + \phi^-). \quad (40)$$

Ahora es fácil ver que la solución tipo $\cos(\omega t - \beta_0 z + \phi^+)$ representa una onda que viaja en el sentido positivo de z . Razonemos como sigue. Si al transcurrir un tiempo t queremos seguir un punto determinado de la onda (por ejemplo su máximo), entonces tenemos que movernos en z manteniendo el argumento $(\omega t - \beta_0 z + \phi^+)$ constante. En otras palabras, las variaciones espacial y temporal están relacionados como $\omega \Delta t = \beta_0 \Delta z$. Esta última expresión muestra claramente que un incremento positivo en el tiempo implica un incremento positivo en el espacio, lo cual es equivalente a un movimiento en el sentido positivo de z . De igual manera se puede ver que los términos tipo $\cos(\omega t + \beta_0 z + \phi^-)$ representan ondas que viajan en el sentido negativo de z .

Uno de los parámetros que caracteriza a una onda armónica es su **longitud de onda** λ . Para un dado t fijo, λ se define como la distancia que un observador debería desplazarse a lo largo de la dirección de propagación para observar un ciclo completo de la onda. A partir de

cualquiera de las soluciones unidimensionales (33) y (37) es fácil probar que $\beta_0\lambda = 2\pi$ y

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta_0} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{c}{f}, \quad (41)$$

donde $f = \omega/2\pi$ es la frecuencia (la cual se mide en Hertz).

Por otro lado, la **impedancia intrínseca de onda** es otro de los parámetro importantes que debemos considerar. Para definirla, consideremos nuevamente la solución para el campo eléctrico (33) la cual reescribimos como

$$\begin{aligned} \hat{E}_x(z) &= \hat{E}_m^+ e^{-j\beta_0 z} + \hat{E}_m^- e^{j\beta_0 z} \\ \hat{E}_x(z) &= \hat{E}_x^+(z) + \hat{E}_x^-(z). \end{aligned} \quad (42)$$

Si ahora consideramos que en el espacio vacío $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$, a partir de la solución para el campo magnético (37) y la ecuación (22), podemos deducir una expresión similar para \hat{H}_y

$$\begin{aligned} \hat{H}_y(z) &= \frac{\hat{E}_m^+}{\mu_0 c} e^{-j\beta_0 z} - \frac{\hat{E}_m^-}{\mu_0 c} e^{j\beta_0 z} \\ \hat{H}_y(z) &= \hat{H}_y^+(z) + \hat{H}_y^-(z). \end{aligned} \quad (43)$$

Observemos entonces que las siguientes relaciones son válidas en cualquier punto del espacio

$$\frac{\hat{E}_x^+(z)}{\hat{H}_y^+(z)} = -\frac{\hat{E}_x^-(z)}{\hat{H}_y^-(z)} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta_0. \quad (44)$$

A la constante $\eta_0 \approx 120\pi$ [Ω] se la denomina **impedancia intrínseca de onda para el espacio vacío**. El hecho de que sea real muestra que ambos campos están en fase.

Los resultados anteriores continúan siendo válidos en una situación más general. De hecho, las soluciones de ondas planas para las ecuaciones de onda homogéneas (10) y (11) se pueden escribir como

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n}_E \hat{E}_0 e^{j(\boldsymbol{\beta}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (45)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n}_B \hat{B}_0 e^{j(\boldsymbol{\beta}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (46)$$

donde los campos eléctrico y magnético reales quedan determinados a partir de

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (47)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (48)$$

Las expresiones (45) y (46) representan ondas armónicas complejas de frecuencia angular ω , que se propagan en el vacío en la dirección dada por el vector $\boldsymbol{\beta}_0$ cuyo módulo es igual a la constante de fase. Además, \mathbf{n}_E y \mathbf{n}_B son vectores unitarios que apuntan en la dirección de cada campo y, \hat{E}_0 y \hat{B}_0 son amplitudes complejas constantes. Reemplazando las soluciones (45) y (46) en las ecuaciones (10) y (11) se puede demostrar nuevamente que

$$|\boldsymbol{\beta}_0| \equiv \beta_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}. \quad (49)$$

Notemos además que aunque el argumento en las soluciones generales (20) y (21) es $u = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)$, multiplicandolo por la contante de fase obtenemos el mismo argumento usado en las expresiones (45) y (46), es decir, $\beta_0 u = (\beta_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \beta_0 ct) = (\boldsymbol{\beta}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)$.

Considerando ahora que $\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0$ y $\nabla \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0$, se puede ver que

$$\mathbf{n}_E \cdot \boldsymbol{\beta}_0 = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{n}_B \cdot \boldsymbol{\beta}_0 = 0, \quad (50)$$

lo que indica que los campos eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de propagación. La ley de Faraday, por otro lado, añade restricciones adicionales. En notación compleja tenemos que, para los campos (45) y (46), esta ley se escribe como

$$j \left[(\boldsymbol{\beta}_0 \times \mathbf{n}_E) \hat{E}_0 - \omega \mathbf{n}_B \hat{B}_0 \right] e^{j(\boldsymbol{\beta}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = 0, \quad (51)$$

cuyas soluciones para todo t son

$$\mathbf{n}_B = \frac{\boldsymbol{\beta}_0}{\beta_0} \times \mathbf{n}_E \quad (52)$$

y

$$\hat{E}_0 = \frac{\omega}{\beta_0} \hat{B}_0 = c \hat{B}_0. \quad (53)$$

La ecuación (52) muestra que los campos, además de ser perpendiculares a la dirección de propagación, son ortogonales entre sí. Es decir, vemos nuevamente que las ondas planas son TEM. Por otro lado, la segunda expresión (53) prueba que ambos están en fase.

Finalmente, analicemos que sucede si \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son dos vectores de posición correspondientes a puntos pertenecientes a un plano perpendicular al factor de fase $\boldsymbol{\beta}_0$. En este caso podemos escribir que

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \boldsymbol{\beta}_0 = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_0 = \mathbf{r}_2 \cdot \boldsymbol{\beta}_0. \quad (54)$$

Teniendo en cuenta las soluciones (45) y (46), vemos que la ecuación anterior implica que, para un mismo tiempo, los campos serán los mismos en ambos puntos, es decir, $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1, t) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_2, t)$ y $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}_1, t) = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}_2, t)$. Este resultado justifica por qué a las expresiones (45) y (46) se las denominó ondas planas: son soluciones que describen la propagación, en una dirección fija dada por $\boldsymbol{\beta}_0$, de frentes de ondas planas sobre los cuales los campos no varían.

2. Teorema de Poynting

Estableceremos ahora la forma que adquiere la conservación de la energía para el campo electromagnético, la cual recibe el nombre de **teorema de Poynting** [4].

Como sabemos, el trabajo que realiza una fuerza \mathbf{F} sobre un sistema que experimenta un desplazamiento diferencial $d\mathbf{l}$ es $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$. De esta forma, la potencia aplicada (trabajo por unidad de tiempo) será

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \quad (55)$$

donde $\mathbf{v} = d\mathbf{l}/dt$ es la velocidad del sistema. Si la fuerza considerada es la fuerza de Lorentz sobre una carga q , entonces podemos escribir la potencia como

$$\frac{dW}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}. \quad (56)$$

Notemos que, debido a que la fuerza de origen magnético es perpendicular al movimiento, esta no realiza trabajo sobre el sistema. Sólo el campo eléctrico es capaz de cambiar la energía cinética de la carga.

Consideremos ahora una densidad de corriente $\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}$, la cual está contenida totalmente dentro de un volumen V . Integrando la ecuación (56) es posible calcular la potencia total

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \, dv. \quad (57)$$

Para escribir la expresión anterior, hemos supuesto que en cada punto del espacio hay una carga diferencial $dq = \rho_v dv$ y que $\mathbf{v} dq = \mathbf{v} \rho_v dv = \mathbf{J} dv$. Usando la ley de Ampère (3) podemos escribir esta integral como

$$\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv = \int_V \left[\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] dv. \quad (58)$$

Luego, considerando la identidad (124) de la unidad 1, $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$, y la ley de Faraday (4), podemos escribir

$$\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv = - \int_V \left[\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] dv. \quad (59)$$

Hagamos ahora dos suposiciones. La primera es que el medio es lineal, por lo que podemos escribir que $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. En segundo lugar, supongamos que las expresiones de la energía potencial eléctrica y magnética en función de los campos, las cuales fueron obtenidas en la unidad 3 para el caso estático, continúan siendo válidas. Estas son

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{\epsilon}{2} \int_V |\mathbf{E}|^2 dv = \int_V u_e dv \quad (60)$$

y

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv = \frac{1}{2\mu} \int_V |\mathbf{B}|^2 dv = \int_V u_m dv, \quad (61)$$

donde

$$u_e = \frac{\epsilon}{2} |\mathbf{E}|^2 \quad \text{y} \quad u_m = \frac{1}{2\mu} |\mathbf{B}|^2, \quad (62)$$

son las densidades de energía correspondientes y $u = u_e + u_m$ es la densidad de energía total. A partir de las expresiones anteriores podemos reescribir (59) como

$$\int_V \left[\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathcal{P} + \frac{\partial u}{\partial t} \right] dv = 0, \quad (63)$$

donde al vector

$$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (64)$$

se lo conoce como **vector de Poynting**. Observemos que este vector es perpendicular a los campos eléctrico y magnético. Para una onda plana, \mathcal{P} apuntará en la dirección de propagación. Para campos armónicos complejos, se puede demostrar que en general su valor promedio en el tiempo estará dado por [1]

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^* \right], \quad (65)$$

donde el asterisco indica el complejo conjugado del vector.

Para interpretar el significado físico de la expresión (63), usemos el teorema de la divergencia para transformar la integral de volumen de $\nabla \cdot \mathcal{P}$. Reordenando términos obtenemos

$$\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V u dv - \oint_S \mathcal{P} \cdot d\mathbf{s}. \quad (66)$$

Como hemos visto antes, el término del lado izquierdo es igual a la potencia que el campo electromagnético entrega a las cargas que están contenidas dentro de V . Esta es una energía

que el campo está perdiendo, a expensas de aumentar la energía cinética de las partículas. Por este motivo, el primer término del lado derecho es igual a la rapidez con la que cambia la energía almacenada en el campo, pero con signo negativo. Suponiendo que la energía se conserva, la integral en el segundo término del lado derecho debería interpretarse como la potencia neta que fluye a través de la superficie S . De esta forma el vector de Poynting \mathcal{P} representa el flujo de energía por unidad de área y unidad de tiempo asociado al campo electromagnético. Además, como la integral (63) es válida para un volumen arbitrario, entonces

$$\boxed{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathcal{P} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0}. \quad (67)$$

Esta es una expresión diferencial que representa la conservación de la energía.

Veamos un ejemplo. La figura 3 muestra una sección de longitud l , de un conductor infinito de radio a que conduce una densidad de corriente estacionaria \mathbf{J} . Determinaremos el vector de Poynting en la superficie del conductor. Si σ es la conductividad, entonces de acuerdo a la ley de Ohm el campo eléctrico en coordenadas circulares cilíndricas es

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_z \frac{J}{\sigma} = \mathbf{a}_z \frac{I}{\pi a^2 \sigma} = \mathbf{a}_z \frac{IR}{l}, \quad (68)$$

donde I es la corriente total, $R = l/(\pi a^2 \sigma)$ es la resistencia de esta sección de conductor y hemos supuesto que la corriente apunta en el sentido positivo del eje z . Por otro lado, ya hemos calculado antes el campo magnético debido a un conductor lineal infinito. Si el espacio que rodea al conductor está vacío, entonces en su superficie

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi a}. \quad (69)$$

Notemos que el campo magnético es tangente a la superficie y se orienta en forma perpendicular al campo eléctrico. De esta forma el vector de Poynting (64) apuntará hacia adentro y estará dado por

$$\mathcal{P} = -\mathbf{a}_\rho \frac{I^2 R}{2\pi a l}. \quad (70)$$

Si ahora integramos este vector en la superficie, vemos que la potencia total que “entra” al conductor es

$$\frac{dW}{dt} = - \oint_S \mathcal{P} \cdot d\mathbf{s} = |\mathcal{P}|(2\pi a l) = I^2 R. \quad (71)$$

¿Qué significado tiene este último resultado?. La ecuación anterior indica que para mantener una corriente estacionaria en el conductor, es necesario que el campo electromagnético (generado por una fuente de tensión continua) suministre una energía por unidad de tiempo igual $I^2 R$. Como la energía acumulada en los campos y la energía cinética de los electrones no está cambiando, toda esta potencia que entra al sistema está siendo disipada por **efecto Joule**.

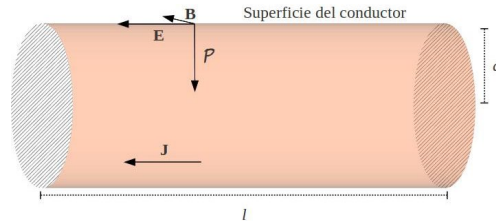


Figura 3: Sección de longitud l de un conductor infinito de radio a que conduce una densidad de corriente \mathbf{J} . En el esquema se muestran las orientaciones de los campos eléctrico, magnético y el vector de Poynting.

3. Polarización de una onda

Las ondas planas estudiadas al comienzo de la sección 1.2, son un tipo particular de soluciones de las ecuaciones de onda en las que el campo eléctrico siempre está paralelo al eje x . Se dice que este tipo de ondas están **polarizadas linealmente** en la dirección de x . Otras ondas planas, que también representan una propagación a lo largo del eje z pero tienen el vector de campo eléctrico polarizado en otra dirección, también son soluciones posibles de las ecuaciones de onda (10) y (11). Como estas ecuaciones diferenciales son lineales, cualquier combinación lineal de ondas planas con distintas amplitudes, polarizaciones y fases también será una solución válida. Esto da origen a diferentes casos de polarización.

Para analizar los diferentes casos, primero consideremos que el campo eléctrico de una onda plana de frecuencia ω que se propaga en la dirección positiva de z , puede escribirse en general como la combinación lineal de dos ondas planas con polarizaciones x e y ,

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{a}_x \hat{E}_x e^{j(\omega t - \beta_0 z)} + \mathbf{a}_y \hat{E}_y e^{j(\omega t - \beta_0 z)} \quad (72)$$

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{a}_x E_1 e^{j\phi_1} e^{j(\omega t - \beta_0 z)} + \mathbf{a}_y E_2 e^{j\phi_2} e^{j(\omega t - \beta_0 z)}, \quad (73)$$

donde en el último renglón hemos escrito las amplitudes complejas en forma polar. El campo eléctrico real será igual a $\mathbf{E} = \text{Re}[\hat{\mathbf{E}}] = \mathbf{a}_x E_x + \mathbf{a}_y E_y$, donde

$$E_x = E_1 \cos(\omega t - \beta_0 z + \phi_1) \quad (74)$$

$$E_y = E_2 \cos(\omega t - \beta_0 z + \phi_2). \quad (75)$$

Vemos entonces que las componentes E_x y E_y estarán siempre encerradas en un rectángulo con los límites $-E_1 \leq E_x \leq E_1$ y $-E_2 \leq E_y \leq E_2$. Tomando en cuenta la identidad $\cos(\theta + \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi)$, encontramos que

$$\frac{E_x}{E_1} = \cos(\omega t - \beta_0 z) \cos(\phi_1) - \sin(\omega t - \beta_0 z) \sin(\phi_1) \quad (76)$$

$$\frac{E_y}{E_2} = \cos(\omega t - \beta_0 z) \cos(\phi_2) - \sin(\omega t - \beta_0 z) \sin(\phi_2). \quad (77)$$

Necesitamos encontrar ahora una ecuación en la cual no aparezca el argumento $(\omega t - \beta_0 z)$. A partir de las expresiones anteriores podemos ver que

$$\frac{E_x}{E_1} \sin(\phi_2) - \frac{E_y}{E_2} \sin(\phi_1) = -\cos(\omega t - \beta_0 z) \sin(\phi_1 - \phi_2) \quad (78)$$

$$\frac{E_x}{E_1} \cos(\phi_2) - \frac{E_y}{E_2} \cos(\phi_1) = -\sin(\omega t - \beta_0 z) \sin(\phi_1 - \phi_2), \quad (79)$$

donde hemos usado la identidad $\sin(\theta + \phi) = \cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\theta)\cos(\phi)$. Sumando ambas expresiones elevadas al cuadrado obtenemos

$$\boxed{\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_1}\frac{E_y}{E_2}\cos(\phi_1 - \phi_2) + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 = \sin^2(\phi_1 - \phi_2)}. \quad (80)$$

Esta es la ecuación de un elipse, la cual describe la curva completa que el vector de campo eléctrico traza en un plano $z = \text{cte.}$ a medida que transcurre el tiempo t , o para un $t = \text{cte.}$ cuando avanzamos a lo largo del eje z . En la figura 4 (a) se muestra un caso general. Si definimos la diferencia de fase entre ambas componentes como $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$, estando situados en una posición fija en el espacio, al transcurrir el tiempo es fácil ver que cuando $\Delta\phi > 0$

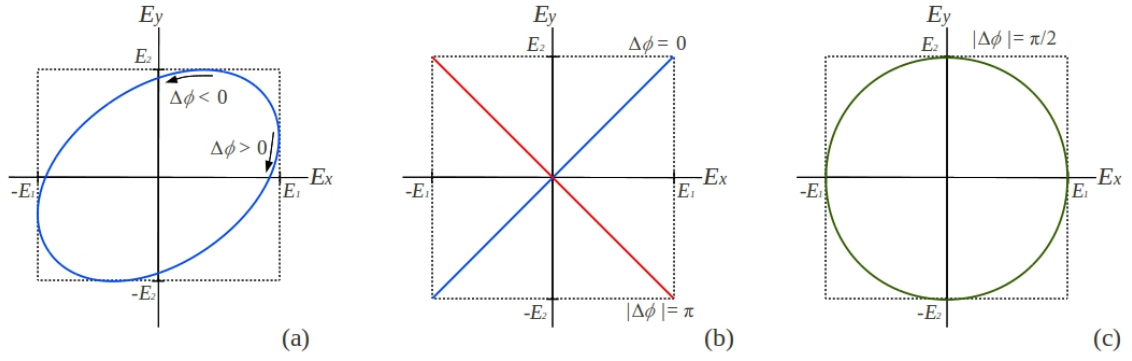


Figura 4: (a) Caso general de polarización, (b) polarización lineal y (c) polarización circular.

el punto que describe al vector de campo eléctrico rota en el sentido horario, mientras que si $\Delta\phi < 0$ la rotación se realiza en el sentido antihorario. Compruebe este resultado usando (74) y (75).

Hay casos particulares de polarización que debemos considerar. Si $\Delta\phi = 0$ (componentes en fase) entonces la relación (80) queda

$$\left(\frac{E_x}{E_1} - \frac{E_y}{E_2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_x}{E_1} = \frac{E_y}{E_2}, \quad (81)$$

la cual es la ecuación de una recta. En este caso simplemente decimos que la onda tienen **polarización lineal**. Algo similar sucede si $|\Delta\phi| = \pi$ (componentes en contrafase), pues encontramos que

$$\left(\frac{E_x}{E_1} + \frac{E_y}{E_2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_x}{E_1} = -\frac{E_y}{E_2}, \quad (82)$$

que es la ecuación de otra recta pero de pendiente negativa. La figura 4 (b) muestra estos dos casos. Por otro lado, si $|\Delta\phi| = \pi/2$ obtenemos

$$\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 = 1, \quad (83)$$

que representa una elipse cuyos ejes mayor y menor están alineados con los ejes coordenados. Cuando $E_1 = E_2 = E_0$ obtenemos la ecuación de un círculo de radio E_0 . Decimos que la onda está **polarizada circularmente**, ver figura 4 (c). Finalmente, para otros valores diferentes de $|\Delta\phi|$, tendremos casos intermedios como el mostrado en la figura 4 (a) para el cual diremos que el campo tiene una **polarización elíptica**.

Debido a diferentes fenómenos físicos, cuando una onda electromagnética interactúa con un material sólido puede cambiar su estado de polarización. En la próxima unidad veremos como la reflexión oblicua permite polarizar linealmente a una onda originalmente no polarizada. Por el momento consideraremos el siguiente ejemplo. Existen materiales anisotrópicos como la **calcita**, que poseen la propiedad de que la velocidad de propagación de una onda de luz visible dentro de ellos, depende de cómo está orientado el campo eléctrico respecto al denominado **eje óptico**. Supongamos ahora que tenemos una onda polarizada linealmente como en la figura 4 (b), que incide sobre una láminas delgadas de calcita. Si se eligen adecuadamente la orientación del eje óptico y el espesor del material, al atravesar la calcita las dos componentes E_x y E_y se desfazarán y la onda quedará polarizada en forma elíptica.

4. Ondas electromagnéticas en regiones con pérdidas

4.1. Medios conductores

En esta sección consideraremos la propagación de ondas electromagnéticas en un medio conductor isótropo y lineal, caracterizado tanto por los parámetros ϵ y μ , como por la conductividad σ . Por simplicidad sólo estudiaremos ondas planas que se propagan a lo largo del eje z . Como antes, esto implica que los campos no dependerán ni de x ni de y , por lo que sus derivadas respecto a estas variables serán cero.

Comenzamos realizando dos suposiciones:

- En la región en la cual se propagan las ondas la densidad de carga neta es cero (la densidad de electrones compensa a la de protones). Por lo tanto $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.
- Por otro lado, como el material es conductor, supondremos que hay corrientes y se cumple la ley de Ohm $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ (la corriente se debe a la movilidad de los electrones de conducción).

En este contexto, la ecuación de onda inhomogénea (8) para el campo eléctrico se puede escribir como

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (84)$$

En el caso del campo magnético, para el cual vale que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, la ecuación (9) quedará como

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (85)$$

donde en el término del lado derecho luego de usar la ley de Ohm para reemplazar a la densidad de corriente por el campo eléctrico, hemos empleado la ley de Faraday (4). Notemos que ambas ecuaciones diferenciales de onda tienen la misma forma.

En lugar de solucionar directamente las ecuaciones de onda (84) y (85), vamos a proceder de otra forma. Consideremos las ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo para este medio conductor, las cuales escribimos imponiendo las suposiciones realizadas anteriormente

$$\nabla \cdot (\epsilon \hat{\mathbf{E}}) = 0 \quad (86)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0 \quad (87)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{J}} + j\omega \hat{\mathbf{D}} = \sigma \hat{\mathbf{E}} + j\omega\epsilon \hat{\mathbf{E}} \quad (88)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = -j\omega \hat{\mathbf{B}} = -j\omega\mu \hat{\mathbf{H}}. \quad (89)$$

Todas estas relaciones, salvo la ley de Ampère, tienen la misma forma que las ecuaciones de Maxwell para el vacío. No obstante, podemos reescribir esta ley como

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = \sigma \hat{\mathbf{E}} + j\omega\epsilon \hat{\mathbf{E}} = j\omega \left(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \right) \hat{\mathbf{E}} = j\omega \hat{\epsilon} \hat{\mathbf{E}}, \quad (90)$$

donde $\hat{\epsilon}$ es la permitividad compleja, la cual ya definimos en la unidad 2 al estudiar las condiciones de frontera entre dos medios con conductividad finita. Ahora podemos apreciar que, si hacemos el reemplazo

$$\mu \rightarrow \mu_0 \quad \text{y} \quad \hat{\epsilon} \rightarrow \epsilon_0, \quad (91)$$

todas las ecuaciones de Maxwell para un medio conductor lucen iguales a las del vacío. Sin embargo, como veremos a continuación, debido a que la nueva permitividad no es un número real sino complejo, las soluciones en términos de ondas planas para las ecuaciones (84) y (85) presentan algunas características diferentes a las obtenidas en la sección 1.2.

Ya que se ha establecido una analogía entre las ecuaciones de Maxwell para el vacío y para un medio conductor, es fácil ver que siguiendo el mismo procedimiento usado al comienzo de la sección 1.2, la ecuación de onda para la componente x del campo eléctrico será

$$\frac{\partial^2 \hat{E}_x}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \hat{\epsilon} \hat{E}_x = 0. \quad (92)$$

La solución de esta ecuación diferencial de segundo orden es

$$\hat{E}_x(z) = \hat{E}_m^+ e^{-j[\omega\sqrt{\mu\hat{\epsilon}}]z} + \hat{E}_m^- e^{j[\omega\sqrt{\mu\hat{\epsilon}}]z}. \quad (93)$$

Definimos ahora la **constante de propagación** por unidad de longitud como

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\hat{\epsilon}} = j\omega\sqrt{\mu\left(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)}, \quad (94)$$

la cual se puede separar en sus partes real e imaginaria $\gamma = \alpha + j\beta$, donde α es conocida como la **constante de atenuación** y β como la **constante de fase** del conductor. Estas constantes pueden escribirse en función de los parámetros que caracterizan al medio y la frecuencia angular de la onda

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]^{1/2} \quad (95)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]^{1/2}. \quad (96)$$

De esta forma la solución para el campo eléctrico (93) puede escribirse como

$$\hat{E}_x(z) = \hat{E}_m^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \hat{E}_m^- e^{\alpha z} e^{j\beta z}, \quad (97)$$

o en forma más compacta como

$$\boxed{\hat{E}_x(z) = \hat{E}_m^+ e^{-\gamma z} + \hat{E}_m^- e^{\gamma z}}. \quad (98)$$

Notemos los factores reales $e^{\pm\alpha z}$ que aparecen en la solución (97). Estos indican que las ondas planas, las cuales están dadas por las exponenciales con exponente imaginario puro $e^{\pm j\beta z}$, se atenuarán en la dirección de propagación. Para ver mejor este fenómeno, reemplacemos en (97) las amplitudes complejas por sus formas polares

$$\hat{E}_x(z) = \left(E_m^+ e^{j\phi^+}\right) e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \left(E_m^- e^{j\phi^-}\right) e^{\alpha z} e^{j\beta z}. \quad (99)$$

Multiplicando a la expresión anterior por $e^{j\omega t}$ y luego tomando la parte real encontramos que

$$E_x(z, t) = E_m^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi^+) + E_m^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \phi^-). \quad (100)$$

La ecuación anterior representa dos ondas viajeras que se propagan en ambos sentidos del eje z , pero que tienen amplitudes que se atenúan en forma exponencial. Observemos que si tomamos los parámetros del vacío μ_0 y ϵ_0 , y además consideramos que la conductividad es nula, $\sigma = 0$, las ecuaciones (95) y (96) dan $\alpha = 0$ y $\beta = \beta_0$. Es decir, bajo estas condiciones, la ecuación (97) representará ondas que se propagan a la velocidad de la luz en el vacío sin atenuarse.

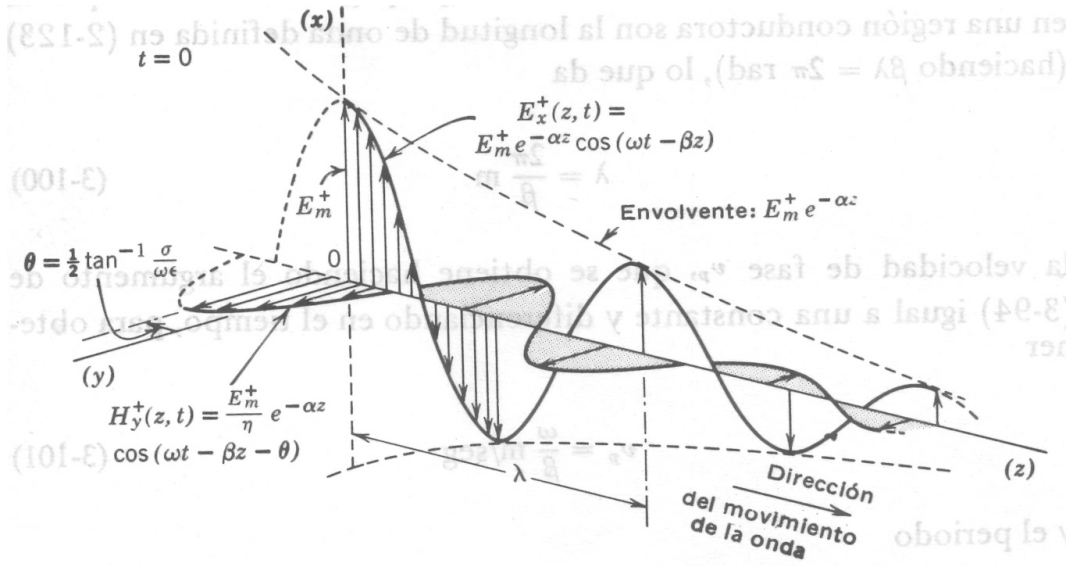


Figura 5: Esquema que muestra para un tiempo fijo, los campos eléctrico y magnético de una onda plana que se propaga en el sentido positivo del eje z en un medio conductor.

La solución para el campo magnético se puede obtener sustituyendo la expresión del campo eléctrico (97) en la ley de Faraday. No obstante, también se puede determinar haciendo el reemplazo $\mu_0 \rightarrow \mu$ y $\epsilon_0 \rightarrow \hat{\epsilon}$ en las expresiones para el espacio vacío. Por ejemplo, la impedancia intrínseca de onda (44) quedará igual a

$$\frac{\hat{E}_x^+(z)}{\hat{H}_y^+(z)} = -\frac{\hat{E}_x^-(z)}{\hat{H}_y^-(z)} = \sqrt{\frac{\mu}{\hat{\epsilon}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \hat{\eta}, \quad (101)$$

la cual ahora es una cantidad compleja. Usando la expresión anterior podemos escribir que

$$\hat{H}_y(z) = \frac{\hat{E}_m^+}{\hat{\eta}} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} - \frac{\hat{E}_m^-}{\hat{\eta}} e^{\alpha z} e^{j\beta z}, \quad (102)$$

o en una forma más compacta,

$$\hat{H}_y(z) = \frac{\hat{E}_m^+}{\hat{\eta}} e^{-\gamma z} - \frac{\hat{E}_m^-}{\hat{\eta}} e^{\gamma z}. \quad (103)$$

La figura 5 muestra un esquema de los campos de una onda plana dentro de un material conductor.

Como la impedancia intrínseca de onda (101) es compleja, entonces los campos eléctrico y magnético en un conductor no estarán en fase. Esta cantidad se puede escribir en forma polar como

$$\hat{\eta} = \eta e^{j\theta}, \quad (104)$$

donde

$$\eta = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{1/4}} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right). \quad (105)$$

Notemos que al hacer $\sigma = 0$, la impedancia es real e igual $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, el valor que se espera para un medio dieléctrico perfecto. Por otro lado, para una conductividad finita tendremos que θ

es positivo, lo que significa que para un dado instante de tiempo el campo magnético \hat{H}_y^+ se atrasa espacialmente respecto a \hat{E}_x^+ . Este efecto se puede ver en la figura 5.

Como observamos anteriormente, una onda plana que se propaga en un medio conductor tiende a atenuarse exponencialmente con la distancia. Consideremos entonces la siguiente situación. Supongamos que una onda plana que viaja en el vacío en el sentido positivo del eje z , incide sobre un conductor cuya superficie también plana se encuentra en $z = 0$. El campo eléctrico dentro del material estará dado por

$$E_x^+(z, t) = E_m^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi^+). \quad (106)$$

Se puede comprobar que la amplitud de este campo decaerá apreciablemente (un factor de e^{-1}) en una distancia del orden $z = 1/\alpha$. Para cuantificar esta atenuación, se define la **longitud de penetración** como

$$\delta = \frac{1}{\alpha}. \quad (107)$$

De acuerdo a (95), esta cantidad depende tanto de los parámetros del material como de la frecuencia. Por otro lado, ley de Ohm nos dice que este campo eléctrico tiene asociada una densidad de corriente dada por

$$J_x^+(z, t) = \sigma E_m^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi^+), \quad (108)$$

la cual está en fase con el campo. La existencia de esta corriente explica el motivo por el cual la onda comienza a atenuarse: el campo electromagnético pierde su energía porque se la transfiere a los electrones del material. Luego estos disipan su energía cinética por efecto Joule. Notar que en el límite de un conductor perfecto ($\sigma \rightarrow \infty$) la longitud de penetración tiende a cero y la corriente anterior se transforma en una corriente superficial.

Adicionalmente, vemos que la longitud de onda dentro de un conductor será

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}, \quad (109)$$

y la velocidad de propagación

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}. \quad (110)$$

Estas ecuaciones dependen, a través de β , de los parámetros que caracterizan al medio. En general, el efecto de la conductividad del material sobre estas cantidades, será la de disminuir sus valores respecto a los que tendría una onda plana que se propaga en un medio dieléctrico con $\sigma = 0$. Este resultado puede ser deducido directamente de las ecuaciones anteriores y la expresión (96).

4.2. Medios dieléctricos con pérdidas

En las secciones anteriores hemos visto que la propagación de una onda electromagnética dentro de un medio material, está gobernada por la permitividad ϵ , la permeabilidad μ y la conductividad σ del sistema. Estos parámetros fueron tomados como constantes independientes de la frecuencia de oscilación. Esta suposición no es suficiente para explicar, por ejemplo, que en muchos materiales dieléctricos la velocidad de una onda depende de su frecuencia (este fenómeno, conocido como dispersión, será tratado más adelante). Para abordar este tipo de fenómenos, en esta sección consideraremos un modelo unidimensional que permite describir el comportamiento en frecuencia de la polarización de materiales dieléctricos aislantes (una discusión más detallada del modelo puede consultarse en la referencia [6], página 399).

En los materiales aislantes (materiales no conductores) todos los electrones se encuentran ligados a los núcleos atómicos. Aunque la **fuerza de ligadura** que experimenta uno de ellos puede ser muy complicada de describir, para pequeños desplazamientos respecto a la posición de equilibrio, x , es posible aproximarla como

$$F_{\text{ligadura}} = -kx = -m\omega_0^2 x, \quad (111)$$

donde k es una constante y m la masa del electrón. El parámetro ω_0 definido como $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, es la **frecuencia natural de resonancia** que tendría el sistema si sólo estuviera actuando esta fuerza de ligadura. Por otro lado, en presencia de un campo electromagnético de frecuencia ω que está polarizado en la dirección x , el electrón estará sujeto a una **fuerza externa** dada por

$$F_{\text{externa}} = qE_x = qE_m \cos(\omega t), \quad (112)$$

donde q es la carga del electrón y E_m la amplitud del campo eléctrico. Debido a que la carga estará acelerada habrá una pérdida de energía por radiación (este tema se tratará con algún detalle en la unidad 9). Como el movimiento del sistema será armónico, la **fuerza de amortiguamiento** asociada a este fenómeno será proporcional a la velocidad de la carga y se opondrá al movimiento de esta ([6], página 468)

$$F_{\text{amortiguamiento}} = -m\kappa \frac{dx}{dt}. \quad (113)$$

Por razones de simplicidad, en la ecuación anterior la constante de proporcionalidad ha sido elegida igual a $m\kappa$. Sumando estas tres fuerzas (111), (112) y (113), la segunda ley de Newton que describe el movimiento de un electrón ligado a un átomo es

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{\text{ligadura}} + F_{\text{amortiguamiento}} + F_{\text{externa}} \quad (114)$$

o

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \kappa \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m} E_m \cos(\omega t)}. \quad (115)$$

La expresión armónica compleja de la ecuación de movimiento anterior es

$$\frac{d^2 \hat{x}}{dt^2} + \kappa \frac{d\hat{x}}{dt} + \omega_0^2 \hat{x} = \frac{q}{m} \hat{E}_m e^{-j\omega t}. \quad (116)$$

Si consideramos que el sistema en el estado estacionario oscilará a la misma frecuencia que el campo, entonces el desplazamiento del electrón estará dado por

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_0 e^{-j\omega t} \quad (117)$$

y la ecuación de movimiento se transformará en la siguiente expresión algebraica

$$-\omega^2 \hat{x}_0 e^{-j\omega t} - j\omega\kappa \hat{x}_0 e^{-j\omega t} + \omega_0^2 \hat{x}_0 e^{-j\omega t} = \frac{q}{m} E_m e^{-j\omega t}. \quad (118)$$

La solución de esta ecuación es simplemente

$$\boxed{\hat{x}_0 = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega\kappa} \hat{E}_m}, \quad (119)$$

la cual muestra que habrá un desfase entre el campo aplicado y el desplazamiento del electrón. El momento dipolar inducido dependerá del tiempo y estará dado por

$$\hat{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{a}_x q \hat{x}(t) = \mathbf{a}_x \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega\kappa} \hat{E}_m e^{-j\omega t}. \quad (120)$$

Supongamos ahora que el material dieléctrico tiene n moléculas por unidad de volumen, y en cada una de ellas existen grupos constituidos por f_i electrones, los cuales experimentan las mismas fuerzas de ligadura y amortiguamiento. De esta forma, cada grupo estará caracterizado por un par de valores de ω_{0i} y κ_i . La polarización de este sistema será

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{nq^2}{m} \left(\sum_i \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 - j\omega\kappa_i} \right) \hat{\mathbf{E}}. \quad (121)$$

Vemos entonces que para este modelo la polarización sigue siendo proporcional al campo, pero ahora la susceptibilidad es compleja y depende de la frecuencia

$$\hat{\mathbf{P}}(\omega, t) = \hat{\chi}(\omega) \epsilon_0 \hat{\mathbf{E}}(\omega, t), \quad (122)$$

con

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{nq^2}{m\epsilon_0} \left(\sum_i \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 - j\omega\kappa_i} \right). \quad (123)$$

De esta forma se obtiene una relación que vincula el desplazamiento con el campo eléctrico

$$\hat{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{P}} = (1 + \hat{\chi}) \epsilon_0 \hat{\mathbf{E}} = \hat{\epsilon} \hat{\mathbf{E}}, \quad (124)$$

donde la nueva permitividad compleja puede ser descompuesta en sus partes real e imaginaria

$$\hat{\epsilon} = \epsilon' - j\epsilon''. \quad (125)$$

Notemos que una permitividad compleja apareció antes en el contexto de la propagación de ondas en medios conductores, dando origen a un término de pérdida. Considerando (124), la ley de Ampère para el modelo de dieléctrico descrito anteriormente se puede escribir como

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = j\omega \hat{\epsilon} \hat{\mathbf{E}}. \quad (126)$$

donde hemos tomado $\mathbf{J} = 0$ ya que el medio es aislante. Si no hay acumuladas densidades de cargas libres en el sistema, entonces el resto de las ecuaciones de Maxwell no cambiarán. Esta es una situación análoga al caso de la propagación de ondas en un material conductor, donde sólo la ley de Ampère fue modificada por el medio. La diferencia estriba en que antes la ley de Ohm fue la que originó una permitividad compleja y ahora, incluso en ausencia de densidades de corrientes, es el modelo de dieléctrico el que introduce esta propiedad. Por lo tanto, las mismas ecuaciones que describen la propagación de ondas planas en un conductor, también pueden usarse en este medio dieléctrico haciendo la sustitución

$$\epsilon \rightarrow \epsilon' \quad \text{y} \quad \frac{\sigma}{\omega} \rightarrow \epsilon''. \quad (127)$$

Como consecuencia, un material dieléctrico podrá ser opaco o transparente dependiendo de la frecuencia de la onda incidente. En especial, a las frecuencias de resonancia de la susceptibilidad (123), el material presentará una gran opacidad (para los materiales dieléctricos típicos, la frecuencia de resonancia más baja cae en el rango de microondas o por encima de él).

Sea cual sea el origen físico de las pérdidas, estas se caracterizan de igual manera. Consideremos la forma polar de la permitividad compleja

$$\hat{\epsilon} = |\hat{\epsilon}| e^{j\delta_d}. \quad (128)$$

A δ_d se lo conoce como **ángulo de disipación**, el cual es cero para una región sin pérdidas ($\sigma = 0$ o $\epsilon'' = 0$). Por otro lado, a la expresión

$$\boxed{\tan |\delta_d| = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}}, \quad (129)$$

se la conoce como **tangente de pérdida o factor de disipación** del material. Notemos que esta cantidad ha sido expresada tanto en función de los parámetros de un conductor, como de un dieléctrico con pérdidas. La importancia de la definición (129) radica en que este cociente aparece en las expresiones para la constante de atenuación (95), la constante de fase (96) y la impedancia intrínseca de onda (104).

En general un material conductor o dieléctrico caerá en una de estas tres categorías:

- a) Será un **buen conductor** si la tangente de pérdida es mucho mayor que la unidad, es decir, si $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$. En este caso las ecuaciones (95), (96) y (104) se reducen a

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad (130)$$

$$\beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad (131)$$

$$\hat{\eta} \approx (1 + j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}. \quad (132)$$

- b) Por otro lado, será un **buen aislante** si la tangente de pérdida es mucho menor que la unidad, es decir, si $\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \ll 1$. En este caso tendremos que

$$\alpha \approx \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon'}}{2} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right) \quad (133)$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon'} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right] \quad (134)$$

$$\hat{\eta} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2 + j\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)\right]. \quad (135)$$

- c) Si la tangente de pérdida es del orden de la unidad, será un semiconductor.

Finalmente, notemos que para un buen conductor la profundidad de penetración depende de la frecuencia como

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}. \quad (136)$$

Por ejemplo, para un material de cobre que tiene una conductividad de $\sigma = 5,8 \times 10^7$ [S/m] y permeabilidad $\mu \approx \mu_0$, a $f = 1$ [kHz] tendremos una penetración de $\delta \approx 2$ [mm], mientras que a una frecuencia mayor de $f = 1$ [GHz] esta longitud será de tan sólo $\delta \approx 2$ [μm].

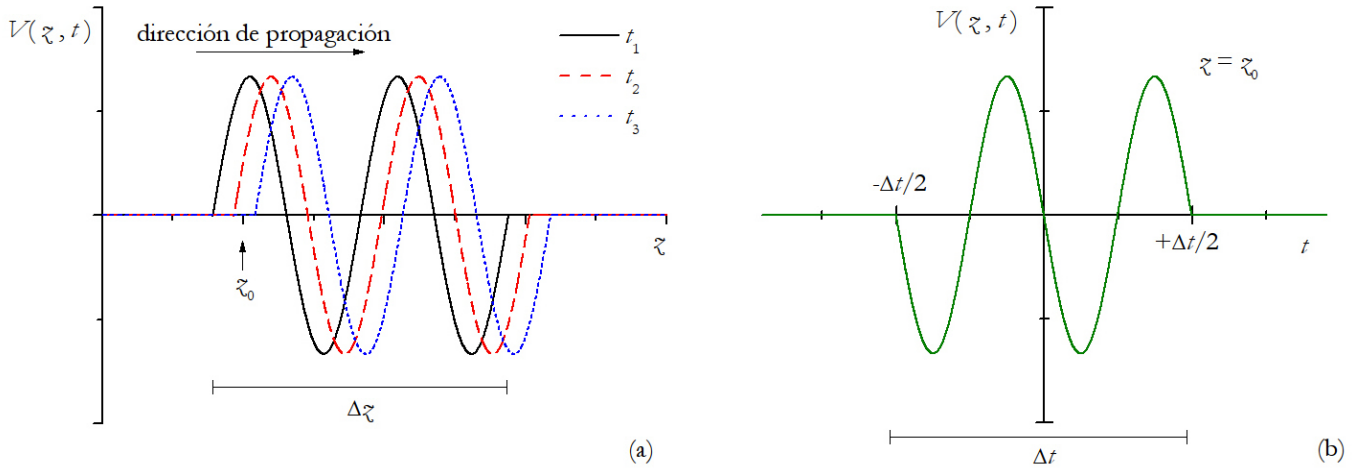


Figura 6: (a) Un tren de ondas finito mostrado a tres tiempos diferentes. (b) La variación temporal del campo en un punto fijo del espacio z_0 .

5. Conceptos generales

5.1. Ondas monocromáticas y cuasimonocromáticas

Hasta ahora hemos estudiado sólo ondas planas **monocromáticas**, las cuales se caracterizan por tener una amplitud y una frecuencia constantes. También pueden considerarse como una única componente de Fourier. Cuando se dice que una onda es plana o esférica, por ejemplo, se está haciendo referencia a la dependencia espacial de la misma. En cambio, cuando se habla de cromaticidad de una onda, se hace alusión a su dependencia temporal.

En general las ondas producidas por fuentes reales no son monocromáticas sino **poli-cromáticas**. Un ejemplo es la luz del sol, la cual tiene un espectro muy amplio de frecuencias en el rango visible. Aunque se generara una onda con una frecuencia bien definida, ésta no tendría una extensión infinita y por lo tanto no sería equivalente a una onda monocromática. Para entender mejor este fenómeno, supongamos que generamos un tren de ondas unidimensional $V(z, t)$ de longitud Δz , frecuencia ω_0 , amplitud a , que se propaga en el sentido positivo del eje z y cuya duración es Δt . La figura 6 (a) muestra esta perturbación para tres tiempos diferentes. Por otro lado, en la figura 6 (b) podemos observar la variación temporal sobre un punto fijo del espacio z_0 (por simplicidad, el origen del eje temporal se ha elegido en el medio del intervalo). Esta dependencia en el tiempo puede expresarse como

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} a e^{j\omega_0 t} & \text{para } -\frac{\Delta t}{2} \leq t \leq \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & \text{para } t < -\frac{\Delta t}{2} \text{ y } \frac{\Delta t}{2} < t \end{cases}$$

donde $V(z_0, t) \equiv \text{Re}[\hat{f}(t)]$ y hemos supuesto una amplitud real a . La transformada de Fourier de esta función es

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{-j\omega t} dt = a \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt \quad (137)$$

$$\hat{F}(\omega) = a \frac{e^{j(\omega_0 - \omega)\frac{\Delta t}{2}} - e^{-j(\omega_0 - \omega)\frac{\Delta t}{2}}}{j(\omega_0 - \omega)} = 2a \frac{\text{sen} \left[(\omega_0 - \omega) \frac{\Delta t}{2} \right]}{(\omega_0 - \omega)}. \quad (138)$$

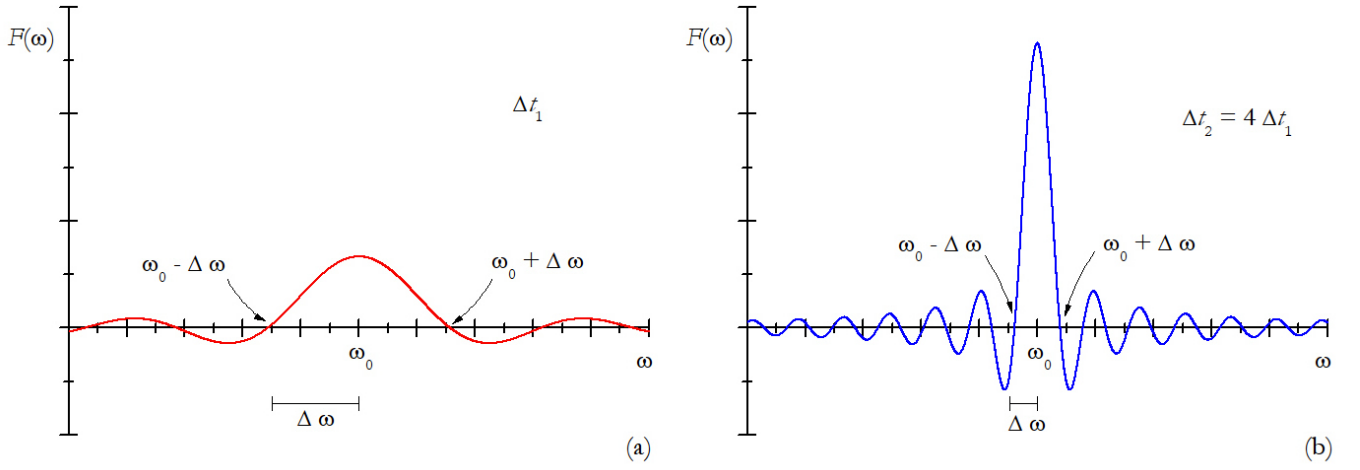


Figura 7: (a) Transformadas de Fourier de la función $\hat{f}(t)$, correspondientes a dos trenes de ondas de duración (a) Δt_1 y (b) $\Delta t_2 = 4\Delta t_1$.

Antitransformando podemos reconstruir la función original

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (139)$$

Como vemos, la expresión anterior no representa una oscilación pura de frecuencia ω_0 sino una superposición infinita de oscilaciones. La amplitud dada por (138) es mostrada en la figura 7 (a) para un caso particular de un tren de ondas de duración Δt_1 . Debido a que el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x = 1$, entonces podemos ver que $\hat{F}(\omega_0) = 2a$. Además, los ceros de esta función se encuentran en

$$\frac{(\omega_0 - \omega)\Delta t}{2} = \pm m\pi, \quad (140)$$

donde m es un número entero. Si definimos $\Delta\omega$ como la diferencia en valor absoluto entre ω_0 y el primer cero de \hat{F} (a izquierda o derecha de la frecuencia central), entonces observando la figura 7 (a) podemos constatar que sólo las frecuencias comprendidas entre $\omega_0 - \Delta\omega$ y $\omega_0 + \Delta\omega$ tendrán una contribución importante a la integral (139). De acuerdo a (140) podemos escribir la expresión

$$\Delta\omega\Delta t = 2\pi \quad (141)$$

o, teniendo en cuenta que la frecuencia angular es $\omega = 2\pi\nu$ donde ν es la frecuencia, escribir esta otra relación

$$\boxed{\Delta\nu\Delta t = 1}. \quad (142)$$

La ecuación anterior relaciona la duración del tren de ondas, con el ancho de banda necesario para representarlo (aunque en realidad el ancho de banda es $2\Delta\nu$, una medida de este puede ser caracterizada sólo por $\Delta\nu$). En la figura 7 (b), podemos apreciar que para un tren de ondas de mayor duración, $\Delta t_2 = 4\Delta t_1$, el ancho de banda disminuirá apreciablemente. En el límite con $\Delta t \rightarrow \infty$, la transformada de Fourier $\hat{F}(\omega) \rightarrow \delta(\omega_0 - \omega)$ y entonces la función $\hat{f}(t) \rightarrow e^{j\omega_0 t}$, es decir, estará representada por un único armónico de frecuencia ω_0 . Ondas para las que $\Delta\nu/\nu_0 \ll 1$ son denominadas **cuasimonocromáticas**.

5.2. Coherencia

Supongamos que tenemos una onda plana que se propaga en la dirección positiva de z y está dada por

$$\hat{V}(z, t) = \hat{V}_m e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (143)$$

(esta función podría representar por ejemplo el módulo del campo eléctrico en la dirección x). Para un tiempo arbitrario t_0 y dos puntos del espacio z_1 y z_2 , definimos la siguiente función

$$\Delta\phi_z(z_1, z_2) = -j \ln \left[\frac{\hat{V}(z_1, t_0)}{\hat{V}(z_2, t_0)} \right] = -\beta(z_1 - z_2), \quad (144)$$

la cual representa la diferencia de fase que hay entre estos dos puntos. Esta función no depende específicamente del valor de z_1 y z_2 sino de la distancia que los separa, es decir $\Delta\phi_z(z_1, z_2) = \Delta\phi_z(\Delta l)$, donde $\Delta l = z_1 - z_2$. Si, para un tiempo fijo, el promedio de la diferencia de fase $\overline{\Delta\phi_z}$ calculado sobre todos los pares de puntos separados por una distancia Δl es diferente de cero, entonces decimos que dicha onda es coherente dentro de esa longitud. Al valor máximo para el cual se verifica esta propiedad se lo denomina **longitud de coherencia** Δl_c . De hecho, para $\Delta l > \Delta l_c$ tendremos que $\overline{\Delta\phi_z} \rightarrow 0$. Una onda infinita tendrá una Δl_c infinita, mientras que aquella producida por una fuente que emite trenes de ondas como el mostrado en la figura 6 (a), tendrá una longitud de coherencia finita (en esta figura sería $\Delta l_c \approx \Delta z$).

Por otro lado, a partir de (143), también es posible definir la diferencia de fase que hay entre dos tiempos t_1 y t_2 , para un punto fijo del espacio z_0 ,

$$\Delta\phi_t(t_1, t_2) = -j \ln \left[\frac{\hat{V}(z_0, t_1)}{\hat{V}(z_0, t_2)} \right] = \omega(t_1 - t_2), \quad (145)$$

la cual como antes sólo depende de la diferencia entre ambos tiempos, $\Delta\phi_t(t_1, t_2) = \Delta\phi_t(\Delta t)$, donde $\Delta t = t_1 - t_2$. De esta forma, si para un punto fijo del espacio el promedio de la diferencia de fase entre todos los pares de tiempos separados por una distancia temporal Δt es diferente de cero, $\overline{\Delta\phi_t} \neq 0$, entonces decimos que dicha onda tiene una coherencia temporal para este Δt . Nuevamente, al valor máximo para el cual se verifica esta propiedad se lo denomina **tiempo de coherencia** Δt_c y, si $\Delta t > \Delta t_c$, entonces tendremos que $\overline{\Delta\phi_t} \rightarrow 0$. Por otro lado, si la onda se propaga a la velocidad v , podremos escribir que $\Delta l_c = v\Delta t_c$. Una onda infinita tendrá un tiempo de coherencia infinito y una que emita trenes de onda como los mostrados en la figura 6 (a), tendrá un valor de Δt_c finito (en esta figura sería $\Delta t_c \approx \Delta t$).

Como ejemplos, consideremos la luz visible proveniente del sol (luz blanca) y la producida por un láser de helio-neón típico. La primera está comprendida en un ancho de banda de $\Delta\nu = 7 \times 10^{14} - 4 \times 10^{14} = 3 \times 10^{14}$ [Hz] el cual, de acuerdo a la expresión (142), corresponde a un tiempo de coherencia $\Delta t_c \approx 3 \times 10^{-15}$ [seg] y a una longitud de coherencia de $\Delta l_c \approx 1$ [μm]. La segunda tiene un ancho de banda de unas decenas de Hertz que corresponden a $\Delta t_c \sim 10^{-2}$ [seg] y una longitud de coherencia de miles de kilómetros. Es por este motivo que para realizar experimentos de interferencia o difracción en un laboratorio se necesita usar en lugar de luz blanca un láser, pues de otra forma no se podría establecer un patrón de bandas que se mantuviera estable en el tiempo (de tal forma que se pueda ver a simple vista), en distancias típicas del orden del metro.

5.3. Velocidades de fase y de grupo

A la velocidad de propagación de una onda monocromática se la denomina **velocidad de fase**. Si en cambio tenemos una señal formada por un tren de ondas que se propaga en un medio

dispersivo, entonces cada una de las componentes de Fourier que lo componen tendrá una velocidad diferente. Esto ocasionará que el paquete de ondas se distorsione con el paso del tiempo.

Sumado a este fenómeno de dispersión que tiende a distorsionar a un tren de ondas, está el hecho de que la rapidez con la cual se transporta la energía electromagnética no corresponde a la velocidad de ninguna de sus componentes de Fourier, sino a la denominada **velocidad de grupo**. Para entender este fenómeno, consideremos una onda plana que se propaga en el sentido positivo del eje z y que está formada por dos armónicos de la misma amplitud con frecuencias $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$ y $\omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega$, donde $\Delta\omega \ll \omega_0$. Los números de onda serán $\beta_1 = \beta_0 + \Delta\beta$ y $\beta_2 = \beta_0 - \Delta\beta$, y la onda podrá escribirse como

$$\hat{V}(z, t) = \hat{V}_m [e^{j(\omega_1 t - \beta_1 z)} + e^{j(\omega_2 t - \beta_2 z)}] = 2\hat{V}_m \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)}, \quad (146)$$

donde su parte real será

$$V(z, t) = \text{Re} [\hat{V}(z, t)] = 2V_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) \cos(\omega_0 t - \beta_0 z). \quad (147)$$

Esta expresión tiene la forma de una onda de frecuencia ω_0 que se propaga a una velocidad de fase de

$$v_p = \frac{\omega_0}{\beta_0}, \quad (148)$$

que está modulada por una onda de frecuencia menor $\Delta\omega$ cuya velocidad es

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}. \quad (149)$$

Se puede demostrar que la velocidad con la cual se propaga la energía está dada por la ecuación anterior, la cual es la velocidad de grupo. En general, si para un tren de ondas el ancho de banda $\Delta\omega \ll \omega_0$, entonces

$$\boxed{v_g = \frac{\partial\omega}{\partial\beta} = \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)^{-1}}. \quad (150)$$

Si el medio no es dispersivo, entonces se encuentra que $v_g = v_p$ y un tren de ondas no se deformará al propagarse. Sin embargo, en un medio dispersivo se encuentra siempre que $v_g < v_p$.

5.4. Espectro de las Ondas Electromagnéticas

Se denomina **espectro electromagnético** a la distribución en frecuencias, longitudes de onda o energías, del conjunto de las ondas electromagnéticas. La tabla 8 muestra un esquema simplificado del espectro electromagnético, el cual se extiende desde la radiación de menor longitud de onda, como son los rayos gamma y los rayos X, pasando por la luz ultravioleta, la luz visible (espectro visible) y los rayos infrarrojos, hasta las ondas electromagnéticas de mayor longitud de onda, como son las microondas, las ondas de radio FM, AM, RF y de televisión.

Como hemos visto a lo largo de esta unidad, en el electromagnetismo clásico la propagación de energía se describe como un fenómeno ondulatorio. Desde el punto de vista de la física moderna, aunque esta descripción matemática es correcta, su significado es diferente. La **mecánica cuántica** identifica a estas ondas electromagnéticas como **ondas piloto** que gobiernan el movimiento de partículas sin masa ni carga que son denominadas **fotones**. Un fotón perteneciente a una onda monocromática de frecuencia ν y longitud de onda λ , portar una cantidad de energía \mathcal{E} y un momento lineal \mathcal{Q} dados por

$$\boxed{\mathcal{E} = h\nu \quad \text{y} \quad \mathcal{Q} = h/\lambda}, \quad (151)$$

The Electromagnetic Spectrum		
Frequency (Hz)	Type	Wavelength (m)
10^{22}		10^{-13}
10^{21}	gamma rays	10^{-12}
10^{20}		10^{-11}
10^{19}		10^{-10}
10^{18}	x rays	10^{-9}
10^{17}		10^{-8}
10^{16}	ultraviolet	10^{-7}
10^{15}	visible	10^{-6}
10^{14}	infrared	10^{-5}
10^{13}		10^{-4}
10^{12}		10^{-3}
10^{11}		10^{-2}
10^{10}	microwave	10^{-1}
10^9		1
10^8	TV, FM	10
10^7		10^2
10^6	AM	10^3
10^5		10^4
10^4	RF	10^5
10^3		10^6

The Visible Range		
Frequency (Hz)	Color	Wavelength (m)
1.0×10^{15}	near ultraviolet	3.0×10^{-7}
7.5×10^{14}	shortest visible blue	4.0×10^{-7}
6.5×10^{14}	blue	4.6×10^{-7}
5.6×10^{14}	green	5.4×10^{-7}
5.1×10^{14}	yellow	5.9×10^{-7}
4.9×10^{14}	orange	6.1×10^{-7}
3.9×10^{14}	longest visible red	7.6×10^{-7}
3.0×10^{14}	near infrared	1.0×10^{-6}

Figura 8: Espectro electromagnético.

donde $h = 6,626 \times 10^{-34}$ [J seg] es la **constante de Planck**. A las ecuaciones anteriores se las conoce como **relaciones de de Broglie**. Ya que un electronvolt (o electronvoltio) es equivalente a $1 \text{ [eV]} = 1,602176462 \times 10^{-19}$ [J] (la energía cinética ganada por un electrón sometido a una diferencia de potencial de 1 [V]), entonces $h = 4,136 \times 10^{-15}$ [eV seg]. Un fenómeno donde se pone en evidencia el carácter corpuscular de la radiación electromagnética es el **efecto fotoeléctrico** (ver [9] página 1019).

Referencias

- [1] Carl T. A. Johnk, **Teoría electromagnética. Campos y ondas**. Limusa (1999).
- [2] Leonard Eyges, **The classical electromagnetic field**. Dover (1972).

- [3] John R. Reitz, Frederick J. Milford y Robert W. Christy, **Fundamentos de la teoría electromagnética**. Addison-Wesley (1984).
- [4] John D. Jackson, **Classical Electrodynamics**. John Wiley and Sons (1999).
- [5] Neil W. Ashcroft and N. David Mermin, **Solid State Physics**. Cornell University (1976).
- [6] David J. Griffiths, **Introduction to Electrodynamics**. Prentice Hall (1999).
- [7] M. I. Prieto and M. Quintillán, *Am. J. Phys.* **57**, 277 (1989).
- [8] J. L. Volakis, A. Chatterjee and L. C. Kempel, **Finite Element Method for Electromagnetics**. IEEE Press (1998).
- [9] R. Resnick, D. Halliday and K. Krane, **Física Vol. 2**. John Wiley (2007).

Problemas

1. Calcular la velocidad de una onda plana que se propaga en los siguientes medios aislantes:
 - a) Aceite mineral $\epsilon = 19,5$ [pF/m].
 - b) PVC $\epsilon = 38,3$ [pF/m].
 - c) Agua destilada $\epsilon = 708$ [pF/m].
 - d) Madera $\epsilon = 17$ [pF/m].

Considere que $\mu = \mu_0$ para todos los materiales.

2. Una onda plana $\hat{\mathbf{E}} = (4\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y) e^{-j\beta z}$ de frecuencia de 100 Mhz, se propaga en un medio dieléctrico sin perdida que tiene una permitividad $\epsilon = 4\epsilon_0$. Calcular:
 - a) La constante de fase β .
 - b) La longitud de onda λ .
 - c) El campo magnético $\hat{\mathbf{H}}$.
3. Encontrar las formas complejas $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ y $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t)$ de una onda plana que se propaga en el vacío a lo largo del eje x , la cual posee un campo magnético de magnitud $B = B_0$ que tiene una sola componente a lo largo del eje y .
4. Por un cable infinito de sección transversal circular de diámetro D , circula una corriente uniforme I . Como muestra la figura 9, a este conductor se le ha quitado una rebanada de espesor a ($a \ll D$) en la cual sólo queda aire. Dentro de esta región que ha sido rebanada, encontrar:
 - a) Los campos (reales) eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Considere que a $t = 0$ la carga acumulada en las superficies de los conductores es $q = 0$.
 - b) La densidad total de energía u y el vector de Poynting \mathcal{P} .
 - c) La energía total almacenada como función del tiempo.

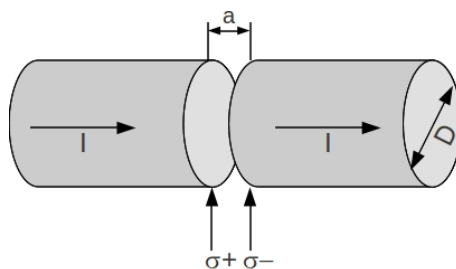


Figura 9: Problema 4

5. Calcular la magnitud (*rms*) del campo eléctrico producido por una microonda plana cuya potencia promedio por unidad de superficie es de $0,01$ [mW/m²] y que se propaga en el vacío.

6. Calcular la magnitud (*rms*) del campo eléctrico producida por la radiación solar cuya potencia promedio por unidad de superficie es de $1,3 \times 10^3 \text{ [W/m}^2\text{]}$. Asuma que la radiación solar llega a la superficie terrestre en forma de una onda plana monocromática.
7. Considere una onda plana que se propaga en el vacío cuyo campo eléctrico esta dado por la siguiente expresión: $\hat{\mathbf{E}}(z) = (20 e^{-j\beta_0 z} + 10 e^{j\beta_0 z}) \mathbf{a}_x + (60 e^{-j\beta_0 z} + 8 e^{j\beta_0 z}) \mathbf{a}_y$. Encontrar:
 - a) Las ondas que se propagan en el sentido positivo y negativo del eje z .
 - b) El estado de polarización de las ondas del punto a).
 - c) El campo \mathbf{H} de las ondas del punto a).
8. Escribir en general, la expresión compleja del campo eléctrico de una onda plana que se propaga en el sentido positivo de z y que, vista por un observador que la recibe de frente, está polarizada circularmente en forma horaria.
9. El agua de mar posee una conductividad eléctrica $\sigma = 4 \text{ [S/m]}$ y una permitividad eléctrica de $\epsilon = 81\epsilon_0$. Calcular la constante de atenuación (β) y la constante de fase (α) para una onda que se propaga en ese medio. Graficar α y β en el rango de frecuencias $\omega = [10^6, 10^{12}] \text{ [rad/seg]}$.
10. Cuando una onda plana se propaga en un cierto tipo de material desconocido a una frecuencia de 300 [MHz] , se sabe que la longitud de onda es de $0,472 \text{ [m]}$ y la constante de atenuación es igual a 1 [Np/m] . Calcular μ_r , ϵ_r y σ para este material.
11. Una onda plana de frecuencia $\nu = 10 \text{ [kHz]}$ que se propaga en la dirección del eje z , incide desde el vacío sobre un material de cobre cuya superficie también plana se encuentra situada en $z = 0$. La densidad de corriente máxima inducida en esta superficie es de $10 \text{ [kA/m}^2\text{]}$. Encontrar los campos \mathbf{E} , \mathbf{H} y la densidad de corriente \mathbf{J} para todo el espacio. Suponga que el campo eléctrico está polarizado linealmente a lo largo del eje x .
12. Un lámina infinita de espesor d , está construida con un material conductor de parámetros $\epsilon = \epsilon_0$ y $\mu = \mu_0$, cuya conductividad eléctrica es $\sigma = 6 \times 10^7 \text{ [S/m]}$. Suponiendo que una onda plana de 2 [kHz] incide y penetra el material en forma normal, determinar el espesor mínimo que debería tener dicha lámina para que la onda se atenúe considerablemente y no traspase el material.
13. Una onda monocromática plana de frecuencia de 100 [MHz] logra penetrar dentro de un conductor sólo una distancia de 3 milímetros . Suponiendo que el material es un buen conductor, determinar la longitud de onda y la conductividad de este medio (considere que la permeabilidad es igual a la del vacío).
14. Una onda plana de frecuencia $f = 100 \text{ [MHz]}$ que viaja en el vacío, penetra en un medio dieléctrico con pérdidas de permitividad $\hat{\epsilon} = (2 - j0,01)\epsilon_0$ y permeabilidad igual a la del vacío. Suponiendo que el dieléctrico se comporta como un buen aislante, determinar cuál es la longitud de penetración en el material.
15. Dada la siguiente ecuación característica de onda, $\beta = \omega^2 - \omega$, determinar la velocidad de grupo de las ondas y la frecuencia para la cuál la velocidad de grupo es máxima.