Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2017
Práctica 2: Grupos — Segunda parte

Productos directos y semidirectos

1. Sea G un grupo y sean H y K dos subgrupos de G. Probar que son equivalentes:

(a) Todo elemento de G se escribe de manera única como un producto hk con $h \in H$ y $k \in K$.

(b) $G = HK$ y $H \cap K = 1$.

2. Sean G y H dos grupos. Determinar $\mathsf{Z}(G \times H)$.

3. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ coprimos y sea G un grupo de orden mn. Probar que si G posee exactamente un subgrupo N de orden n y exactamente un subgrupo M de orden m, entonces G es isomorfo al producto directo de N y M.

4. Probar que:

(a) $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ si m y n son coprimos (Teorema chino del resto);

(b) $\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}_{>0} \times S^1$;

(c) $D_6 \cong S_3 \times \mathbb{Z}_2$.

5. Sean $f : H \to H'$ y $g : K \to K'$ dos morfismos de grupos. Probar que la función $f \times g : H \times K \to H' \times K'$ definida por $(h, k) \mapsto (f(h), g(k))$ es un morfismo de grupos.

6. Sean H y K dos grupos y sean $S \trianglelefteq H$ y $T \trianglelefteq K$. Probar que $S \times T \trianglelefteq H \times K$ y que

$$\frac{H \times K}{S \times T} \cong (H/S) \times (K/T).$$

Sugerencia. Sean $\pi_S : H \to H/S$ y $\pi_T : K \to K/T$ las proyecciones. Considerar $\pi_S \times \pi_T$ y usar el 1^{er} teorema de isomorfismo.

7. *Producto semidirecto.* Sean H y K grupos y sea $\theta : K \to \mathsf{Aut}(H)$ un morfismo de grupos.

(a) Sea $G = H \times K$ como conjunto, y consideremos el producto en G dado por

$$(h, k) \cdot (h', k') = (h\theta(k)(h'), kk'), \qquad \forall (h, k), (h', k') \in G.$$

Mostrar que, con respecto a este producto, G es un grupo. Llamamos a este grupo el *producto semidirecto externo de H por K con respecto a θ* y lo notamos $H \rtimes_\theta K$.

(b) Sean $\widetilde{H} = \{(h, 1) \in H \rtimes_\theta K \mid h \in H\}$ y $\widetilde{K} = \{(1, k) \in H \rtimes_\theta K \mid k \in K\}$. Probar que $\widetilde{H}$ y $\widetilde{K}$ son subgrupos de $H \rtimes_\theta K$ tales que $\widetilde{H} \trianglelefteq H \rtimes_\theta K$, $\widetilde{H} \cap \widetilde{K} = 1$ y $\widetilde{H}\widetilde{K} = H \rtimes_\theta K$.

(c) Mostrar que si $\theta = 1$ es el morfismo trivial, $H \rtimes_\theta K = H \times K$ es simplemente el producto directo.

Definición. *Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G. Decimos que G es el* producto semidirecto interno de H por K *si $H \trianglelefteq G$, $H \cap K = 1$ y $HK = G$.*

8. Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G tales que G es el producto semidirecto interno de H por K.

(a) Probar que la fórmula $\theta(k)(h) = khk^{-1}$ define un morfismo de grupos $\theta : K \to \mathsf{Aut}(H)$.

(b) Probar que la fórmula $(h, k) \mapsto hk$ define un isomorfismo de grupos $H \rtimes_\theta K \xrightarrow{\cong} G$.

9. Mostrar que S_n es el producto semidirecto de A_n por $\langle (1\,2) \rangle$.

10. Probar que $\mathsf{GL}_n(k)$ es un producto semidirecto de $\mathsf{SL}_n(k)$ por $k^\times$.

11. Mostrar que $\mathbb{H}$ no puede ser escrito como un producto semidirecto de forma no trivial.

12. Sean G y N dos grupos y sean $\theta, \tau : G \to \mathsf{Aut}(N)$ morfismos. Probar que si existe $\varphi \in \mathsf{Aut}(G)$ tal que $\theta = \tau \circ \varphi$, entonces $N \rtimes_\theta G \cong N \rtimes_\tau G$.

Acciones de grupos

En todos los ejercicios las acciones son a izquierda.

13. Sean G un grupo, $r \in \mathbb{N}$ y X el conjunto de todos los subgrupos de G de orden r. Probar que la siguiente fórmula define una acción de G en X: $g \cdot H = gHg^{-1}$.

14. Sean G un grupo, $H \leq G$ y $X = G/H$. Probar que la siguiente fórmula define una acción de G en X: $g \cdot xH = (gx)H$.

15. Sea G un grupo finito y sean H y K subgrupos de G. Sea $X = HK$.

(*a*) Probar que la siguiente fórmula define una acción de $H \times K$ en X: $(h,k) \cdot x = hxk^{-1}$.

(*b*) Probar que $\mathcal{O}(1) = X$ y probar que el estabilizador del 1 es isomorfo a $H \cap K$.

(*c*) Deducir de lo anterior que $|H||K| = |HK||H \cap K|$.

16. *Subgrupos grandes.* El objetivo de este ejercicio es probar el siguiente resultado.

> **Proposición.** *Sea G un grupo finito, sea p el menor número primo que divide a $|G|$, y sea H un subgrupo de G de índice p. Entonces H es normal en G.*

(*a*) Sea $X = G/H = \{gH : g \in G\}$ el conjunto de coclases a izquierda de H en G; notar que $|X| = p$. Consideramos en X la acción usual de G por multiplicación a izquierda,

$$\alpha : G \times X \to X, \quad (g', gH) \mapsto g'gH.$$

Sea $\widetilde{\alpha} : G \to S_X$ el morfismo de grupos correspondiente y sea $K = \mathsf{ker}(\widetilde{\alpha})$. Mostrar que $H \supseteq K$ y deducir que $|G : K|$ divide a $p!$.

(*b*) Mostrar que $|G : K| = |G : H|$. Concluir que $H = K$ y por lo tanto H es normal.

Sugerencia. Para hacerlo, observar primero que $p = |G : H| \leq |G : K|$, de manera que $|G : K| \neq 1$. Si q es un primo que divide a $|G : K|$, lo hecho en la parte anterior implica que $q \leq p$; esto junto con la elección de p implica que $|G : K| = p^r$ para algún $r \geq 1$. Para terminar, mostrar que $r = 1$.

p-Grupos

En toda esta sección $p \in \mathbb{N}$ es un número primo.

Definición. *Sea G un grupo. Un elemento de G se dice* p-primario *si su orden es una potencia de p. Un* p-grupo *es un grupo tal que todo elemento es p-primario.*

17. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Si G es un p-grupo y H es un subgrupo de G, entonces H es un p-grupo.

(*b*) Si G es un p-grupo y $f : G \to H$ es un morfismo sobreyectivo, entonces H es un p-grupo.

(*c*) Si G es un grupo, H un subgrupo normal de G y tanto H como G/H son p-grupos, entonces G es un p-grupo.

18. Un grupo finito G es un p-grupo sii $|G| = p^r$ para algún $r \geq 1$.

19. Sea G un p-grupo finito. Probar que G tiene centro no trivial.

Teoremas de Sylow

20. Hallar todos los subgrupos de Sylow de D_n.

21. Mostrar que no hay grupos simples de orden 28 ó 312.

22. Mostrar que un grupo de orden 12 ó 56 no es simple.

23. Probar que todo grupo de orden 5.7.17 es cíclico.

24. Probar que si p y q son primos distintos entonces un grupo de orden pq no es simple.

25. Sea G un grupo de orden $p^r m$, con $r \geq 1$ y $p > m$. Probar que G no es simple.

26. Sea G un grupo de orden $p^2 q$ con p y q primos distintos. Probar que G no es simple.

27. Probar que si todos los subgrupos de Sylow de un grupo finito G son normales, entonces $G \cong \prod_{p \text{ primo}} S_p$ donde S_p el (único) p-subgrupo de Sylow de G. En particular, un grupo abeliano finito es producto de sus subgrupos de Sylow.