Hoja de problemas VII. Algebra II. 2005-2006

Ejercicio 1. *Probar que* Σ_4 *es resoluble.*

Ejercicio 2. *Probar que si* G *es un grupo resoluble y* H *es un subgrupo de* G*, entonces* H *es resoluble.*

Ejercicio 3. *Probar que si* G *es un grupo resoluble y* N *es un subgrupo normal de* G*, entonces* G/N *es resoluble.*

Ejercicio 4. *Probar que si* N *es un subgrupo normal de* G*, entonces* G *es resoluble si y sólo si* N *y* G/N *lo son.*

Ejercicio 5. *Sea* K *un cuerpo. Probar que si* n *es entero positivo entonces existe una extensión* E/K *que contiene una raíz* n*-ésima primitiva de la unidad.*

Ejercicio 6. *Sea* E/K *una extensión y sea* ω *una raíz* n*-ésima primitiva de la unidad. Entonces* $K(\omega)/K$ *es de Galois con grupo de Galois abeliano.*

Ejercicio 7. *Demostrar que el polinomio* x^5-6x+3 *no es resoluble por radicales.*

Ejercicio 8. *Sea* x^4+ax^2+b *irreducible sobre* K*. Sea* G *su grupo de Galois, entonces probar que:*

a) Si b *es el cuadrado de un elemento de* K*, entonces* $G \equiv C_2 \times C_2$*.*

b) Si b *no es el cuadrado de ningún elemento de* K *pero* $b(a^2-4b)$ *sílo es, entonces* G *es cíclico de orden* 4*.*

c) Si no estamos en ninguno de los casos anteriores, entonces G *tiene orden* 8*.*

Ejercicio 9. *Supongamos que tenemos un conjunto* S *de puntos del plano* $\mathbb{R}^2$ *y consideremos un punto* p *construído según una de las siguientes reglas:*

(i) p *es la intersección de dos líneas, cada una de ellas contiene dos puntos de* S*;*

(ii) p *es la intersección de una línea que contiene dos puntos de* S *y una circunferencia con el centro de* S *y que contiene un punto de* S*;*

(iii) p *es la intersección de dos circunferencias, cada una de ellas tiene su centro en* S *y contiene un punto de* S*.*

Un punto p *construído usando las reglas anteriores se llama* **construíble en un paso de** S*. Un punto* p *es* **construíble de** S *si existe una secuencia finita de puntos de* $\mathbb{R}^2$

$$p_1, \cdots, p_n = p,$$

tales que para cada $i = 1, \cdots, n$ *el punto* p_i *es construíble en un paso del conjunto*

$$S \cup \{p_1, \cdots, p_{i-1}\}.$$

1. Sea P un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que contiene a $(0,0)$ y $(1,0)$. Si K es un subcuerpo de $\mathbb{R}$ generado por las coordenadas de los puntos de P y α y β están en una extensión normal L de K tal que $L \subseteq \mathbb{R}$ y $|L:K| = 2^r$ para algún entero r, entonces (α, β) es construíble de P.

2. Demostrar que si el problema de la duplicación del cubo tiene una solución positiva, entonces el punto $(0, \sqrt[3]{2})$ es construíble de $(0,0), (1,0)$.

3. Deducir del apartado anterior que el problema de la duplicación del cubo no tiene solución.

Ejercicio 10. *Digamos que n es construíble si podemos construir un polígono regular de n lados.*

1. Demostrar que si n es construíble y m divide n entonces m es construíble.

2. Demostrar que si m y n son coprimos y construíbles, entonces mn es construíble.

3. Demostrar que para cualquier entero r, 2^r es construíble.

4. Sea p un primo. Demostrar que si p^2 es construíble, entonces $p = 2$.

5. Sea p un primo distinto de 2. Demostrar que p es construíble si y sólo si $p = 2^{2^r} + 1$ para algún r entero.

6. Describir todos los enteros naturales construíbles.

Ejercicio 11. *Diremos que una función racional $f \in K(x_1, \cdots, x_n)$ es simétrica si para cualquier $\sigma \in \Sigma_n$, $f(x_1, \cdots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$. Definimos los polinomios simétricos elementales de la siguiente manera :*

$$\begin{aligned} s_1(x_1, \cdots, x_n) &= x_1 + \cdots + x_n, \\ s_2(x_1, \cdots, x_n) &= \prod_{1 \le i < j \le n} x_i x_j, \\ s_3(x_1, \cdots, x_n) &= \prod_{1 \le i < j < k \le n} x_i x_j x_k, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ s_n(x_1, \cdots, x_n) &= x_1 \cdots x_n. \end{aligned}$$

Sea E el cuerpo de las funciones simétricas racionales sobre K en $x_1, \cdots, x_n$ y $s_1, \cdots, s_n$ los polinomios simétricos elementales en $x_1, \cdots, x_n$. Demostrar que $E = K(s_1, \cdots, s_n)$.

Ejercicio 12. *Sea $F = K(x_1, \cdots, x_n)$ y $E = K(s_1, \cdots, s_n)$, donde s_i son los polinomios simétricos elementales. Identificamos el grupo de Galois de la extensión F/E con Σ_n. Demostrar que el subcuerpo fijo de A_n es $E(g)$, donde $g = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$. ¿Cuál es el polinomio mínimo de g sobre E?*

Ejercicio 13. *(Kummer)* ✠

Sea K un cuerpo de característica cero y sea E/K una extensión de cuerpos. Supongamos que K contiene una raíz n-ésima primitiva de la unidad. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) E/K es Galois y $\mathrm{Gal}(E/K)$ es cíclico de orden un divisor de n.

(b) $E = K(a)$ para cierto elemento $a \in E$ con $a^n \in K$.

Ejercicio 14. ✠

Sea K un cuerpo de característica cero y $f \in K[x]$.

1. Sea L/K una extensión. Supongamos que $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_m = L$ son subcuerpos, donde K_{i+1}/K_i es Galois con grupo de Galois $\mathrm{Gal}(K_{i+1}/K_i)$ abeliano para $i = 0, \ldots, m-1$. Supongamos que $K \subseteq E \subseteq L$ es un subcuerpo con E/K Galois. Demostrar que $\mathrm{Gal}(E/K)$ es resoluble.

2. Sea E un cuerpo de descomposición de $f \in K[x]$ sobre K. Supongamos que $\mathrm{Gal}(f) = \mathrm{Gal}(E/K)$ es resoluble y sea $n = |\mathrm{Gal}(E/K)|$. Sea ξ una raíz n-ésima primitiva de la unidad en una extensión de E. Sean $\hat{E} = E(\xi)$. Probar que $\hat{E}/K$ es radical y por tanto, f es resoluble por radicales. (Una extensión E/K es radical si existe una torre de cuerpos $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_r = E$ tal que $K_j = K_{j-1}(u_j)$, $j = 1, \cdots, r$ y $u_j^{n_j} \in K_{j-1}$ para algún $n_j \in \mathbb{N}$.)

3. Supongamos ahora que f es resoluble por radicales. Sea R/K una extensión radical tal que $E \subseteq R$. Probar que $\mathrm{Gal}(E/K)$ es resoluble.

NOTA. Los problemas marcados con ✠ tienen una dificultad superior al resto. Estos problemas pueden entregarse, voluntariamente, una vez resueltos. Ms informacin est en la pgina Web de la asignatura:

http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ajaikin/alg2.html