1. Výroky a výroková logika

1.1. Výrok a jeho negace

Výrokem se rozumí sdělení, u něhož má smysl otázka, zda je, či není pravdivé.

Příklady výroků:

- v_1: Úhlopříčky čtverce jsou navzájem kolmé.
- v_2: Číslo 8 je liché.
- v_3: Paříž je hlavní město Španělska.
- v_4: Pro všechna reálná čísla a, b platí: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- v_5: Ve vesmíru existují inteligentní bytosti i mimo sluneční soustavu.

Výroky v_1 a v_4 jsou pravdivé, výroky v_2 a v_3 jsou nepravdivé. O pravdivosti výroku v_5 dosud rozhodnout neumíme, přesto však jde o výrok – na otázku o jeho pravdivosti existuje jednoznačná odpověď.

Příklady výpovědí, které nejsou výroky:

- Kolik je hodin?
- Jdi domů!
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Výroky tedy nejsou otázky, příkazy, nesmysly apod. Je zajímavé, že v_4 je výrok, ale vynecháním „Pro všechna reálná čísla a, b platí:“ již výrokem výraz není. Nevíme totiž, co znamenají proměnné a, b. Otázka po její pravdivosti tedy nemá smysl.

Negace výroku v je výrok „Není pravda, že v“; Negaci výroku v budeme značit $\neg v$. Zřejmě platí:

Je-li výrok v pravdivý, pak je výrok $\neg v$ nepravdivý.

Je-li výrok v nepravdivý, pak je výrok $\neg v$ pravdivý.

Poznámka: Pokud znegujeme negaci výroku, dostaneme původní výrok. Platí tedy $\neg(\neg v) = v$.

Příklad č. 1 – Doplňte do pravého sloupce tabulky negaci výroku z levého sloupce bez použití záporu.

v	$\neg v$
Daný trojúhelník ABC je ostroúhlý.	
Daný trojúhelník KLM nemá všechny vnitřní úhly shodné.	
Přímka t je tečnou dané kružnice k.	
$\sqrt{2} + \sqrt{3} \geq \sqrt{5}$	
Kořen rovnice $2x - 1 = 5$ je kladné číslo.	

Řešení příkladu č. 1

v	$\neg v$
Daný trojúhelník ABC je ostroúhlý.	Daný trojúhelník ABC je tupoúhlý nebo pravoúhlý.
Daný trojúhelník KLM nemá všechny vnitřní úhly shodné.	Daný trojúhelník KLM je rovnostranný.
Přímka t je tečnou dané kružnice k.	Přímka t je sečnou dané kružnice k nebo nemá s danou kružnicí žádný společný bod.
$\sqrt{2}+\sqrt{3}\geq\sqrt{5}$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{5}$
Kořen rovnice $2x-1=5$ je kladné číslo.	Kořen rovnice $2x-1=5$ je záporné číslo nebo nula.

Je užitečné také umět negovat výroky, ve kterých je číselný údaj vyjádřen slovy **aspoň**, resp. **nejvýše**.

Řekneme-li, že nějaká množina má **aspoň k prvků**, znamená to, že počet jejích prvků je **větší nebo roven číslu k**.

Řekneme-li, že nějaká množina má **nejvýše k prvků**, znamená to, že počet jejích prvků je **menší nebo roven číslu k**.

Odtud vyplývá důležitá negace výroků:

v	$\neg v$
Množina M má aspoň k prvků.	Množina M má nejvýše $k-1$ prvků.
Množina M má nejvýše k prvků.	Množina M má aspoň $k+1$ prvků.

Předpokládejme, že $k=5$. Pak tedy:

- **Množina M má aspoň k prvků** – Množina M může mít 5, 6, 7, … prvků.
- **Množina M má nejvýše $k-1$ prvků** – Množina M může mít 1, 2, 3, ale maximálně 4 prvky.

- **Množina M má nejvýše k prvků** – Množina M může mít 1, 2, 3, 4, ale maximálně 5 prvků.
- **Množina M má aspoň $k+1$ prvků** – Množina M má alespoň 6 prvků, může mít ale 7, 8, …

Povšimněme si záměny slov aspoň a nejvýše!!!

Příklad č. 2 – Doplňte do pravého sloupce tabulky negaci výroku z levého sloupce bez použití záporu.

v	$\neg v$
Rovnice $x^8+1=0$ má aspoň dva reálné kořeny.	
Mezi všemi jednocifernými čísly jsou nejvýše tři prvočísla.	
Pravidelný dvanáctistěn má aspoň 20 vrcholů.	
Číslo 30 je dělitelné aspoň třemi prvočísly.	
V této přihrádce je nejvýše $n+1$ předmětů.	
Daná množina má právě $n+1$ prvků.	

Řešení příkladu č. 2

$\boldsymbol{v}$	$\neg\boldsymbol{v}$
Rovnice $x^8 + 1 = 0$ má aspoň dva reálné kořeny.	Rovnice $x^8 + 1 = 0$ má nejvýše jeden reálný kořen.
Mezi všemi jednocifernými čísly jsou nejvýše tři prvočísla.	Mezi všemi jednocifernými čísly jsou aspoň čtyři prvočísla.
Pravidelný dvanáctistěn má aspoň 20 vrcholů.	Pravidelný dvanáctistěn má nejvýše 19 vrcholů.
Číslo 30 je dělitelné aspoň třemi prvočísly.	Číslo 30 je dělitelné nejvýše dvěma prvočísly.
V této přihrádce je nejvýše $n + 1$ předmětů.	V této přihrádce je aspoň $n + 2$ předmětů.
Daná množina má právě $n + 1$ prvků.	Daná množina nejvýše n prvků nebo aspoň $n + 2$ prvků

Příklady k procvičení:

1 Posuďte pravdivost následujících výroků a utvořte jejich negace:
u_1: Číslo 5 je nezáporné.
u_2: $\sqrt{5} > 2$
u_3: Číslo $6 - 9$ není kladné.
u_4: $5 - 8 \geqq 4 - 6$
u_5: $\sqrt{49} \neq 7$

2 Negujte výroky:
v_1: Česká republika má více než 10 milionů obyvatel.
v_2: Praha má méně než 1,5 milionu obyvatel.
v_3: Poloměr Země není menší než 6 000 km.
v_4: Vzdálenost Měsíce od Země není větší než 400 000 km.
v_5: Rychlost světla ve vakuu je 300 000 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

3 Negujte výroky:
w_1: Na Petřínskou rozhlednu vede aspoň 300 schodů.
w_2: Tato učebnice má nejvýše 200 stránek.
w_3: Pravidelný dvacetiúhelník má aspoň 100 úhlopříček.
w_4: Prvočísel menších než sto je nejvýše 25.
w_5: Dvojciferných čísel je 90.

4 Určete, který z následujících výroků je pravdivý:
u_1: Rovnici $2(3x - 1) = 6x - 2$ vyhovuje každé přirozené číslo.
u_2: Absolutní hodnota každého čísla je číslo kladné.
u_3: Vzdálenost libovolných dvou bodů je číslo nezáporné.
u_4: Pro každé přirozené číslo x je číslo $x + 1$ kladné.
u_5: Pro každé celé číslo x je číslo $x + 1$ kladné.

Výsledky:

4.1 Pravdivé jsou u_1, u_2, u_3, zbývající jsou nepravdivé. Jejich negace jsou: Číslo 5 je záporné. $\sqrt{5} \leqq 2$. Číslo $6 - 9$ je kladné. $5 - 8 < 4 - 6$. $\sqrt{49} = 7$. **4.2** Negace jsou výroky: Česká republika má nejvýše 10 milionů obyvatel. Praha má aspoň 1,5 milionů obyvatel. Poloměr Země je menší než 6 000 km. Vzdálenost Měsíce od Země je větší než 400 000 km. Rychlost světla ve vakuu není 300 000 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. **4.3** Negace jsou výroky: Na Petřínskou rozhlednu vede nejvýše 299 schodů. Tato učebnice má aspoň 201 stránek. Pravidelný dvacetiúhelník má nejvýše 99 úhlopříček. Prvočísel menších než 100 je aspoň 26. Dvojciferných čísel není 90. **4.4** Pravdivé jsou u_1, u_3, u_4, zbývající jsou nepravdivé. **4.5** Žádný.

1.2. Složené výroky – konjunkce a disjunkce

Složené výroky jsou výroky, které jsou tvořeny dvěma nebo více jednoduššími výroky. Omezíme se na nejdůležitější typy složených výroků, kterými jsou **konjunkce, disjunkce, implikace** a **ekvivalence**.

Konjunkce libovolných výroků a, b je výrok, který vznikne jejich spojením spojkou $\boldsymbol{a}$. Konjunkci výroků a, b zapisujeme $a \wedge b$ a tento zápis čteme „a a b“ nebo také „a a zároveň b“.

Příklady konjunkce vytvořené z výroků a, b, c, d.

- a: Číslo 5 je prvočíslo.
- b: Číslo 5 je sudé.
- c: Číslo 5 je liché.
- d: Číslo 5 je záporné.

$a \wedge d$: Číslo 5 je prvočíslo a zároveň je liché.

$a \wedge c$: Číslo 5 je prvočíslo a zároveň je liché.

$b \wedge c$: Číslo 5 je sudé a zároveň je liché.

$b \wedge d$: Číslo 5 je sudé a zároveň záporné.

Na těchto příkladech si můžeme povšimnout, že pravdivá je konjunkce je pouze ta, která je složena z pravdivých výroků. Můžeme ty říci, že:

Konjunkce libovolných výroků a, b je **pravdivá** pouze tehdy, když jsou pravdivé oba výroky a, b. Konjunkce je nepravdivá právě tehdy, je-li nepravdivý alespoň jeden z výroků a, b.

Disjunkce libovolných výroků a, b je výrok, který vznikne jejich spojením spojkou $\boldsymbol{nebo}$. Disjunkci výroků a, b zapisujeme $a \vee b$ a tento zápis čteme „a nebo b“.

Příklady disjunkce vytvořené z výroků a, b, c, d.

- a: Číslo 5 je prvočíslo.
- b: Číslo 5 je sudé.
- c: Číslo 5 je liché.
- d: Číslo 5 je záporné.

$a \vee d$: Číslo 5 je prvočíslo nebo je záporné.

$a \vee c$: Číslo 5 je prvočíslo nebo je liché.

$b \vee c$: Číslo 5 je sudé nebo liché.

$b \vee d$: Číslo 5 je sudé nebo záporné.

Vidíme, že první tři příklady jsou pravdivé, ale poslední disjunkce už ne. Můžeme si povšimnout, že disjunkce je pravdivá, pokud je složena alespoň z jednoho pravdivého výroku. Nepravdivá je právě tehdy, pokud každý z dílčích výroků je nepravdivý.

Disjunkce libovolných výroků a, b je **pravdivá** pouze tehdy, je-li pravdivý aspoň jeden z výroků a, b.

Tabulka pravdivostních hodnot

Pravdivost složeného výroku v závislosti na pravdivostech výroků, ze kterých je složen, ukazuje **tabulka pravdivostních hodnot**. V této tabulce se pravdivost označuje jedničkou (1) a nepravdivost nulou (0). Pravdivostní tabulky pro konjunkci, disjunkci a negaci vypadá následovně.

a	$\neg a$
1	0
0	1

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

V tabulce jsou vypsány veškeré možnosti, které mohou nastat.

Vzorový příklad:

Vyšetřete pravdivost výroku $(\neg a \vee b) \wedge a$

a	b	$\neg a$	$\neg a \vee b$	$(\neg a \vee b) \wedge a$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

Vidíme, že výrok $(\neg a \vee b) \wedge a$ je pravdivý pouze v případě, že jsou pravdivé oba výroky a, b.

Příklady k procvičení

7 Zdůvodněte, proč výrok „Praha a Tokio jsou evropská města" je nepravdivý a proč výrok „Praha nebo Tokio jsou evropská města" je pravdivý.

8 Je dán pravdivý výrok a, nepravdivý výrok b a pravdivý výrok c. Určete, který z výroků

$$(a \vee b) \wedge c, \quad (a \wedge b) \vee c, \quad (a \wedge c) \vee b, \quad (a \vee c) \wedge b$$

je pravdivý a který nepravdivý.

9 Posuďte pravdivost výroků

$$a \vee a, \ a \wedge a, \ \neg a \wedge a, \ \neg a \vee a, \ \neg a \wedge \neg a, \ \neg a \vee \neg a$$

v závislosti na pravdivosti výroku a.

10 Určete, jak závisí pravdivost výroků

$$(\neg a \wedge b) \vee a, \quad (\neg a \wedge b) \vee b, \quad (\neg a \vee b) \vee b$$

na pravdivostech výroků a, b.

Výsledky

7 Jde o konjunkci a disjunkci pravdivého a nepravdivého výroku.

8 Pravdivé jsou $(a\vee b)\wedge c$, $(a\wedge b)\vee c$, $(a\wedge c)\vee b$, zbývající je nepravdivý.

9

a	$\neg a$	$a \vee a$	$a \wedge a$	$\neg a \wedge a$	$\neg a \vee a$	$\neg a \wedge \neg a$	$\neg a \vee \neg a$
1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1

10

a	b	$\neg a$	$\neg a \wedge b$	$\neg a \vee b$	$(\neg a \wedge b) \vee a$	$(\neg a \wedge b) \vee b$	$(\neg a \vee b) \vee b$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1

1.3. Složené výroky – implikace a ekvivalence

Matematické věty mají obvykle tvar implikace a ekvivalence, takže je užitečné rozumět těmto složeným výrokům.

Implikace výroků a, b je výrok, který vznikne jejich spojením slovním obratem **jestliže, pak**. Takto vzniklý výrok „jestliže a, pak b“ zapisujeme $a \Rightarrow b$.

Zápis $a \Longrightarrow b$ čteme „ z a plyne b“ nebo „a implikuje b“. Výrok a je v implikaci předpoklad, výrok b je v implikaci závěr. Pravdivost je definovaná dle následující pravdivostní tabulky.

a	b	$a \Rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Odtud vidíme, že implikace $a \Longrightarrow b$, kde a, b jsou libovolné výroky, je pravdivá pouze tehdy, když jsou pravdivé oba výroky a, b nebo když je výrok a nepravdivý a výrok b jakýkoli.

Příklad

- a: Číslo 5 je prvočíslo.
- b: Číslo 5 je sudé.
- c: Číslo 5 je liché.
- d: Číslo 5 je záporné.

$a \Longrightarrow d$: Je-li číslo 5 prvočíslo, pak je záporné. (z pravdy plyne lež – nepravdivá implikace)

$a \Longrightarrow c$: Je-li číslo 5 prvočíslo, pak je liché. (z pravdy plyne pravda – pravdivá implikace)

$b \Longrightarrow c$: Je-li číslo 5 sudé, pak je liché. (z nepravdy plyne pravda – pravdivá implikace)

$b \Longrightarrow d$: Je-li číslo 5 sudé, pak je záporné. (z nepravdy plyne nepravda – pravdivá implikace)

POZOR!!! Z implikace $a \Rightarrow b$ nevyplývá pravdivost implikace obrácené implikace $b \Longrightarrow a$.

Příklad: Je-li trojúhelník rovnostranný, pak je rovnoramenný. Toto je pravdivá implikace. Je-li trojúhelník rovnoramenný, pak je rovnostranný. Tato implikace je nepravdivá.

Příklad č. 1: Vyšetřete pravdivost implikací $a \Longrightarrow (a \vee b), (a \vee b) \Longrightarrow a, (a \vee b) \Longrightarrow (a \wedge b)$, kde a, b jsou libovolné výroky.

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \Longrightarrow (a \vee b)$	$(a \vee b) \Longrightarrow a$	$(a \vee b) \Longrightarrow (a \wedge b)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1

Implikace $a \Longrightarrow (a \vee b)$ je pravdivá nezávislá na hodnotě proměnných a, b. Takovýto výrok se nazývá **TAUTOLOGIE**.

Ekvivalence $a \Longleftrightarrow b$, kde a, b jsou libovolné výroky, je pravdivá pouze tehdy, když výroky a, b jsou oba pravdivé nebo oba nepravdivé. Jedná se o tzv. oboustrannou implikaci.

a	b	$a \Longrightarrow b$	$b \Longrightarrow a$	$(a \Longrightarrow b) \wedge (b \Longrightarrow a)$ neboli $a \Longleftrightarrow b$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Příklad č. 2: Rozhodněte, zda výroky $a \Longrightarrow b$, $\neg b \Longrightarrow \neg a$, kde a, b jsou libovolné výroky, jsou ekvivalentní.

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \Longrightarrow b$	$\neg b \Longrightarrow \neg a$	$(a \Longrightarrow b) \Longleftrightarrow (\neg b \Longrightarrow \neg a)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Zjistili jsme, že implikace $a \Longrightarrow b$ a obměněná implikace $\neg b \Longrightarrow \neg a$ jsou ekvivalentní.

Příklady:

11 Vašek, který není náčelníkem Siouxů, prohlásil: „Je-li druhá odmocnina z deseti menší než tři, pak jsem náčelník Siouxů.“ Posuďte pravdivost této implikace, implikace obrácené a obměněné.

12 Jsou dány výroky
a: Úhel ACB je pravý.
b: Bod C leží na kružnici o průměru AB.
Posuďte pravdivost výroků: $a \Rightarrow b$, $b \Rightarrow a$, $a \Leftrightarrow b$, $\neg a \Leftrightarrow \neg b$.

13 Určete, které z následujících výroků jsou tautologie:

$$(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b), \quad (a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \Leftrightarrow \neg b),$$
$$(a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg a \Rightarrow \neg b).$$

14 Určete, jak závisí pravdivost výroků

$$a \Rightarrow (a \wedge b), \quad (a \wedge b) \Rightarrow b, \quad (a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$$

na pravdivostech výroků a, b.

15 Vyšetřete pravdivost výroků

$$a \Leftrightarrow (a \wedge b), \quad a \Leftrightarrow (a \vee b), \quad (a \vee b) \Leftrightarrow (a \wedge b)$$

v závislosti na pravdivostech výroků a, b.

Výsledky:

4.11 Všechny tři implikace jsou pravdivé. **4.12** Pravdivý je pouze výrok $a \Rightarrow b$. **4.13** Tautologie je pouze druhá ekvivalence.

4.14

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \Rightarrow (a \wedge b)$	$(a \wedge b) \Rightarrow b$	$(a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1

4.15

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \iff (a \wedge b)$	$a \iff (a \vee b)$	$(a \vee b) \iff (a \wedge b)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1

1.4. Negace složených výroků

Pro libovolné výroky a, b platí $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$

Pro libovolné výroky a, b platí $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$

Pro libovolné výroky a, b platí $\neg(a \Longrightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge \neg b)$

Pro libovolné výroky a, b platí $\neg(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge b)$

Pro libovolné výroky a, b platí $\neg(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow \neg b)$

Úkol: Dokažte následující tvrzení, že jsou pravdivá.

1.5. Kvantifikované výroky a jejich negace

Kvantifikátory vymezují počet prvků ve výrazu a jsou základním stavebním kamenem většiny matematických vět. V matematice se obvykle využívá kvantifikátor obecný a kvantifikátor existenční.

Obecný kvantifikátor (tzv. velký) říká, že daná vlastnost platí pro všechny prvky nebo také pro každý libovolný prvek. Označuju se tímto symbolem: ∀.

Existenční kvantifikátor (tzv. malý) říká, že existuje alespoň jeden prvek dané vlastnosti nebo že daná vlastnost platí aspoň pro jeden prvek. Označuje se tímto symbolem: ∃. Pokud existuje právě jeden prvek, pak symbol označujeme tímto symbolem: ∃!

Příklad:

Pro všechna reálná čísla a, b platí $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Existuje aspoň jedno přirozené číslo, které je kladné.

$$\exists n \in \mathbb{N}: n > 0$$

Existuje právě jedno reálné číslo takové, pro které platí, že jeho druhá odmocnina je rovna 5.

$$\exists!\, n \in \mathbb{R}: \sqrt{n} = 5$$

Existuje reálné číslo a a reálné číslo b, pro které platí $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$\exists a, b \in \mathbb{R}: (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$