2. Operátorok normált tereken

1. Mutassuk meg, hogy ha $f, g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$, akkor $fg \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$.

2. Jelölje $\mathcal{P}$ a $[0,1]$ intervallumon értelmezett polinomok terét a maximum normával. Definiáljuk az alábbi operátorokat $\mathcal{P}$-n:

$$\begin{aligned} P &: \mathcal{P} \to \mathcal{P} \qquad p(x) \mapsto \frac{dp}{dx}, \\ Q &: \mathcal{P} \to \mathcal{P} \qquad p(x) \mapsto xp(x). \end{aligned}$$

Folytonosak-e ezek az operátorok?

3. Definiáljuk a sorozatok vektorterének egy alterét

$$K^{(\mathbb{N})} := \{a : \mathbb{N} \to K \mid \text{a sorozat véges sok helyen nem nulla}\},$$

ahol $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Vegyül a $(K^{(\mathbb{N})}, \|\cdot\|_\infty)$ normált teret, és tekintsük a

$$\phi : K^{(\mathbb{N})} \to K \qquad a \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} a(k)$$

leképezést. Igazoljuk, hogy ϕ lineáris, de nem folytonos funkcionál, a $\|\cdot\|_1$ norma szerint azonban ϕ folytonos.

4. Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és u egy lineáris funkcionál E felett. Igazoljuk, hogy a következő állítások ekvivalensek:

1. az u folytonos,
2. $\ker u$ zárt lineáris altér,
3. létezik a 0-nak olyan V környezete, hogy $u(V)$ korlátos.

5. Legyen $C_0(\mathbb{R})$ az $\mathbb{R}$-en értelmezett folytonos, kompakt tartójú függvények tere a maximum normával ellátva. Mi lesz a $C_0(\mathbb{R})$ tér lezártja?
