Normált algebrák elemei (BMETE92MM10)

Andai Attila

Miért fontos a normált algebrák elmélete? ,,*A matematika egy*" elve alapján ugyan bárhol lehet folytatni a matematika tanulását, most mégis vázolok néhány olyan gondolatmenetet, mely rámutat a normált algebrák elméletének a fontosságára.

1. A klasszikus valószínűségszámítás alapobjektuma az $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ hármas, ahol X tetszőleges halmaz, $\mathcal{B}(X)$ az X részhalmazainak σ-algebrája és μ egy valószínűségi mérték a $\mathcal{B}(X)$ σ-algebrán. A $\mathcal{B}(X)$ σ-algebra *Boole-háló.* A kvantummechanikában azonban olyan fizikai rendszerekkel találkozunk melyek viselkedésének valószínűségi leírása nem fér bele a *Boole-hálók* nyújtotta matematikai keretbe. Vagyis általánosabb hálókra kell cserélni a $\mathcal{B}(X)$ σ-algebrát. Egy ilyen jól használható háló például a Hilbert-terek projekcióinak a hálója (*Hilbert-hálók*). A félév folyamán megismerkedünk a normált algebrák olyan osztályával melyekben a projekciók szintén hálót alkotnak, részelméletként tartalmazzák a *Boole*-, *Hilbert*- és *Neumann-hálók* elméletét, de még nem túl általánosak ahhoz, hogy kezelhetetlenné váljanak. Ezen algebrák alkotják a *nemkommutatív valószínűségszámítás* és a *szabad valószínűségszámítás* alapobjektumait. Megismerkedünk a CAR (*Canonical Anticommutation Relations*) és CCR (*Canonical Commutation Relations*) algebrákkal is, melyek feles- illetve egész spinű részecskék kvantummechanikai leírásának alapobjektumai.

2. A lokálisan kompakt topologikus terek- és a kommutatív C^**-algebrák* elméletét kapcsolja össze az első Gelfand–Najmark tétel. Melynek elvi jelentősége az, hogy a matematika két (függetlennek tűnő) területéről mutatja meg, hogy igazából egy struktúra kétféle leírásáról van szó, mint ahogy ez az alábbi (nem teljes) ,,szótárból" kiderül.

Topologikus terek:	**Normált algebrák:**
lokálisan kompakt Hausdorff-tér	kommutatív C^*-algebra
kompakt tér	egységelemes kommutatív C^*-algebra
egypontú kompaktifikáció	egységelem hozzávétel
folytonos valódi leképzés	$*$-homomorfizmus
homeomorfizmus	$*$-izomorfizmus
zárt halmaz	zárt ideál
egypontú zárt halmaz	maximális ideál
nyílt halmaz	hányados algebra
véges bázis	szeparábilis
mérték	pozitív funkcionál

A félév folyamán bebizonyítjuk az első Gelfand–Najmark tételt, és megnézzük néhány triviális következményét. (Melyek persze messze nem nyilvánvaló állítások a tétel ismerete nélkül.) Ennek igazolására álljon itt egy feladat, melynek megoldása triviális a normált algebrák elemi ismerete után.

Feladat: Jelölje $C^{\mathrm{b}}([0,1])$ (illetve $C^{\mathrm{b}}(]0,1[)$) a $[0,1]$ (illetve a $]0,1[$) intervallumon értelmezett folytonos, korlátos függvények halmazát. Tekintsük az alábbi funkcionálokat.

$$\forall x \in [0,1] \qquad \phi_x : C^{\mathrm{b}}([0,1]) \to \mathbb{C} \qquad f \mapsto f(x)$$

$$\forall x \in]0,1[\qquad \psi_x : C^{\mathrm{b}}(]0,1[) \to \mathbb{C} \qquad f \mapsto f(x)$$

Azaz $\phi_x(f) = f(x)$ és $\psi_x(f) = f(x)$. Ezen funkcionálok nemcsak lineárisak, hanem szorzástartóak is, ugyanis

$$\phi_x(fg) = f(x)g(x) = \phi_x(f)\phi_x(g) \quad \text{és} \quad \psi_x(fg) = f(x)g(x) = \psi_x(f)\psi_x(g)$$

teljesül. *Léteznek-e egyéb szorzástartó lineáris funkcionálok a* $C^b([0,1])$ *és* $C^b(]0,1[)$ *függvénytereken? (Vagyis az algebramorfizmusok azonosíthatók-e az alaptérrel?)*

3. Mivel a klasszikus geometriában megszokott konstrukciókat, tételeket le lehet fordítani a kommutatív C^*-*algebrák* nyelvére, ezért elképzelhető, hogy a nem kommutatív C^**-algebrák* is valamilyen absztrakt geometriai tartalommal bírnak. Az így kapott absztrakt terekkel foglalkozik a *nemkommutatív geometriák elmélete.* A nemkommutatív geometriában szereplő objektumokhoz nem lehet klasszikus ,,alapteret" hozzárendelni, azonban meglepően sok klasszikus topologiai és analízisbeli konstrukció terjeszthető ki ezen terekre. E rendkívül dinamikusan fejlődő elmélet megértéséhez elengedhetetlen speciális normált algebrák (különösen a C^**-algebrák* és *Neumann-algebrák*) alapjainak ismerete. Az AQFT (*Algebraic Quantum Field Theory*) alapvető építőkövei is C^*- illetve Neumann-algebrák.

4. A lokálisan kompakt csoportok (mint például a megszámlálható csoportok, az $n \times n$-es invertálható mátrixok részcsoportjai, a Lie-csoportok) folytonos unitér ábrázolásainak az elmélete visszavezethető bizonyos normált algebrák (*approximatív egységelemes Banach-*-algebrák*) ábrázolásának az elméletére. A félév folyamán megismerkedünk a Gelfand–Najmark–Segal konstrukcióval, mely a *Banach-*-algebrák* ciklikus ábrázolásait adja meg, valamint megvizsgáljuk, hogy egy adott ábrázolást, hogyan lehet irreducibilis ábrázolásokra bontani.

A felmerülő kérdéseket az *andaia@math.bme.hu* címre lehet megírni.