2. Normált terek alapjai

I. Legyen V vektortér, valamint legyen $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|'$ norma a V téren. Mutassuk meg, hogy $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|'$ normák pontosan akkor ekvivalensek, ha léteznek olyan $K, K' \in \mathbb{R}^+$ számok, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \leq K' \|x\|'$ és $\|x\|' \leq K \|x\|$ teljesül.

II. Legyen $n \in \mathbb{N}'$ és $p, q \in [1, \infty[$. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^n$ téren

1. minden $p \in [1, \infty[$ esetén a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek;
2. bármely $p, q \in [1, \infty[$ szám esetén a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_q$ normák ekvivalensek.

III. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Pontosan akkor létezik a V vektortéren olyan skaláris szorzás mellyel V prehilbert-tér, ha minden $x, y \in V$ vektorra

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

teljesül.

IV. Mutassuk meg, hogy normált térben minden nyílt és zárt gömb konvex halmaz. (Vagyis minden $a \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\forall x, y \in B_r(a) \forall t \in [0, 1]: \ tx + (1 - t)y \in B_r(a)$$
$$\forall x, y \in \overline{B_r(a)} \forall t \in [0, 1]: \ tx + (1 - t)y \in \overline{B_r(a)}$$

teljesül.)

V. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $X \subseteq V$ konvex halmaz. Azt mondjuk, hogy az $a \in X$ pont az X *halmaz extremális pontja*, ha

$$\forall x, y \in X \forall t \in [0, 1]: \ tx + (1 - t)y = a \longrightarrow t \in \{0, 1\}.$$

1. Minden $p \in [1, \infty[$ esetén adjuk meg a $\overline{B_1(0)}$ halmaz extremális pontjait az $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ térben.
2. Adjuk meg a $\overline{B_1(0)}$ halmaz extremális pontjait az $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ térben.

3^*. Mutassuk meg, hogy a $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ térben a $\overline{B_1(0)}$ gömbnek nincsen extremális pontja.

VI. Legyen (M, d) metrikus tér és legyen $x \in M$.

1. Mutassuk meg, hogy az $\{x\}$ halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha x nem izolált pontja az M térnek.
2. Mutassuk meg, hogy ha M nem üres, teljes metrikus tér, melynek nincs izolált pontja, akkor az M halmaz nem megszámlálhatóan végtelen.

VII. Legyen T tetszőleges nem üres halmaz és legyen

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \in \mathcal{P}(T) \mid T \setminus U \text{ véges halmaz}\}.$$

1. Mutassuk meg, hogy $(T, \mathfrak{T})$ topologikus tér.
2. Mutassuk meg, hogy a $(T, \mathfrak{T})$ tér T_1.
3. Mutassuk meg, hogy, ha T végtelen halmaz, akkor $(T, \mathfrak{T})$ tér nem T_2.

4. Mutassuk meg, hogy $(T, \mathfrak{T})$ kompakt tér.

VIII. Minden $n \in \mathbb{N}'$ esetén a $(\mathbb{K}^n, d_\infty)$ tér megszámlálható bázisú.

IX. Példák lokális kompakt és nem lokálisan kompakt terekre.

1. Legyen $M = \mathbb{Q}$ és minden $p, q \in \mathbb{Q}$ esetén legyen $d(p,q) = |p-q|$. Mutassuk meg, hogy az (M, d) tér nem lokálisan kompakt.
2. Legyen $n \in \mathbb{N}'$. Mutassuk meg, hogy az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ tér lokálisan kompakt minden $p \in [1, \infty[$ esetén.
3. Legyen $M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 0 \ \wedge y = 0) \ \vee \ (x > 0)\big\}$ és legyen d az euklideszi metrika megszorítása az M halmazra. Mutassuk meg, hogy az (M, d) tér nem lokálisan kompakt.
4. Legyen $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 0 \ \wedge y = 0) \ \vee \ \left(x > 0 \ \wedge \ y = \sin\dfrac{1}{x}\right)\right\}$ és legyen d az euklideszi metrika megszorítása az M halmazra. Mutassuk meg, hogy az (M, d) tér nem lokálisan kompakt.