2. Normált terek alapjai

I[Gy] . Legyen (M, d) metrikus tér és legyen $x \in M$.

1. Mutassuk meg, hogy az $\{x\}$ halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha x nem izolált pontja az M térnek.
2. Mutassuk meg, hogy ha M nem üres, teljes metrikus tér, melynek nincs izolált pontja, akkor az M halmaz nem megszámlálhatóan végtelen.

II[A] . Mutassuk meg, hogy az irracionális számok halmaza nem állítható elő megszámlálhatóan sok zárt halmaz uniójként.

III[H] . Igazoljuk, hogy nincsen olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, mely csak a racionális pontokban folytonos.

Útmutatás: Legyen (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrikus tér és $f : M_1 \to M_2$. Definiáljuk f *ingadozás függvényét* a

$$\omega_f : M_1 \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \inf_{r \in \mathbb{R}^+} \operatorname{diam} f\left(B_r(x)\right)$$

képlettel, ahol adott $X \subseteq M_2$ halmaz esetén

$$\operatorname{diam}(X) = \begin{cases} \sup\left\{d(x,y) \mid x, y \in X\right\} & \text{ha} \quad X \neq \emptyset \\ 0 & \text{ha} \quad X = \emptyset. \end{cases}$$

az X halmaz *átmérője*.

1. Mutassuk meg, hogy az f függvény pontosan akkor folytonos az $a \in M_1$ pontban, ha $\omega_f(a) = 0$ teljesül.
2. Mutassuk meg, hogy minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $\overset{-1}{\omega}\left(]-\infty, c[\right)$ nyílt halmaz. (Vagyis minden $c \in \mathbb{R}$ számra az
$$\{a \in M_1 |\ \omega_f(a) < c\}$$
halmaz nyílt, amit azt jelenti, hogy az ω_f függvény *felülről félig folytonos*.)
3. Mutassuk meg, hogy a $\overset{-1}{\omega_f}(0)$ halmaz előáll megszámlálhatóan sok nyílt halmaz metszeteként. (Melyet úgy fejezünk ki, hogy $\overset{-1}{\omega_f}(0)$ G_δ *halmaz*.)
4. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}$ nem G_δ halmaz.

IV. Példák lokális kompakt és nem lokálisan kompakt terekre.

1[A] . Legyen $M = \mathbb{Q}$ és minden $p, q \in \mathbb{Q}$ esetén legyen $d(p, q) = |p - q|$. Mutassuk meg, hogy az (M, d) tér nem lokálisan kompakt.

2[Gy] . Legyen $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 0 \ \wedge y = 0) \ \vee \ (x > 0)\right\}$ és legyen d az euklideszi metrika megszorítása az M halmazra. Mutassuk meg, hogy az (M, d) tér nem lokálisan kompakt.

3[H] . Legyen $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 0 \ \wedge y = 0) \ \vee \ \left(x > 0 \ \wedge \ y = \sin\dfrac{1}{x}\right)\right\}$ és legyen d az euklideszi metrika megszorítása az M halmazra. Mutassuk meg, hogy az (M, d) tér nem lokálisan kompakt.

[Gy] : Gyakorló feladat; [A] : Alapfeladat; [H] : Haladó feladat.

V^{A} . Tekintsük az $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ térben haladó $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^3$ sorozatokat, ahol minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_n = \left(\frac{1}{n+1}, \sqrt[n]{n^2+1}, (\sqrt{2}-1)^n\right) \qquad \text{és} \qquad b_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}, \cos(n\pi), \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n\right).$$

Határozzuk meg a $\lim a$ és a $\lim b$ határértéket, ha létezik.

$\mathrm{VI}^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk, hogy egy $(V, \|\cdot\|)$ normált tér minden $x, y \in V$ elemére

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

teljesül.

$\mathrm{VII}^{\mathrm{Gy}}$. Legyen V vektortér, valamint legyen $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|'$ norma a V téren. Mutassuk meg, hogy $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|'$ normák pontosan akkor ekvivalensek, ha léteznek olyan $K, K' \in \mathbb{R}^+$ számok, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \leq K' \|x\|'$ és $\|x\|' \leq K \|x\|$ teljesül.

$\mathrm{VIII}^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Norma-e a $C^1([a,b], \mathbb{R})$ vektortéren a

1. $\|f\|_1 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$;
2. $\|f\|_2 = \sup\limits_{x\in[a,b]} (|f(x)| + |f'(x)|)$;
3. $\|f\|_3 = |f(a)| + \int_a^b |f|$;

leképezések valamelyike?

IX^{H} . Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Pontosan akkor létezik a V vektortéren olyan skaláris szorzás mellyel V prehilbert-tér, ha minden $x, y \in V$ vektorra

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

teljesül.

X^{Gy} . Mutassuk meg, hogy normált térben minden nyílt és zárt gömb konvex halmaz. (Vagyis minden $a \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\forall x, y \in B_r(a) \forall t \in [0,1] : \; tx + (1-t)y \in B_r(a)$$
$$\forall x, y \in \overline{B_r(a)} \forall t \in [0,1] : \; tx + (1-t)y \in \overline{B_r(a)}$$

teljesül.)

XI^{H} . Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $X \subseteq V$ konvex halmaz. Azt mondjuk, hogy az $a \in X$ pont az X *halmaz extremális pontja*, ha

$$\forall x, y \in X \forall t \in [0,1] : \; tx + (1-t)y = a \quad \Longrightarrow \quad t \in \{0, 1\}.$$

1. Minden $p \in [1, \infty[$ esetén adjuk meg a $\overline{B_1(0)}$ halmaz extremális pontjait az $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ térben.
2. Adjuk meg a $\overline{B_1(0)}$ halmaz extremális pontjait az $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ térben.

3**. Mutassuk meg, hogy a $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ térben a $\overline{B_1(0)}$ gömbnek nincsen extremális pontja.

2. Analízis 2, matematikusoknak, 2013.02.22., Andai Attila