Ha az előző gyakorlatból maradtak ki példák, akkor most csináljuk meg azokat!
(A ***-gal jelölteket ne erőltessük!)

1. Két nevezetes határérték:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1, \qquad p > 0} \qquad \boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

Néhány példa ezek gyakorlására:

1. Feladat: Keresse meg a következő sorozatok hatáérértékét!

$a)\ a_n = \sqrt[2n]{2n}\,, \qquad b)\ b_n = \sqrt[n]{2n}\,, \qquad c)\ c_n = \sqrt[2n]{n}$

Megoldás.
a) $a_n \to 1$, mert az $\sqrt[n]{n}$ sorozat részsorozata.
b) $b_n = \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} \to 1 \cdot 1 = 1$
c) $c_n = \sqrt[2n]{\dfrac{2n}{2}} = \dfrac{\sqrt[2n]{2n}}{\sqrt[2n]{2}} \to \dfrac{1}{1} = 1$, mert a számláló és a nevező is két részsorozat.

Vagy egyszerűbben:

$$\sqrt[2n]{n} = \sqrt{\sqrt[n]{n}} \to \sqrt{1} = 1$$

2. Feladat: Vizsgálja meg konvergencia szempontjából a következő sorozatot!

$$a_n = \sqrt[n]{n+1}$$

Megoldás.
A rendőrelvvel dolgozunk:

$$\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \le b_n = \sqrt[n]{n+1} \le \sqrt[n]{n+n} = \underbrace{\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}}_{\substack{\downarrow \\ 1 \cdot 1}}$$

$$\Longrightarrow \quad b_n \to 1\,.$$

Természetesen $1 < b_n$ alsó becslés is jó.

3. Feladat:

$$a_n = \sqrt[n]{2n^3+3} \qquad\qquad b_n = \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{4n^2+n}}$$

Megoldás. Tudatosítsuk a hallgatókban, hogy ezek a példák csak rendőrelvvel oldhatók meg!!!! (Nem tudják megkerülni.)

$$\underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \leq a_n = \sqrt[n]{2n^3+3} \leq \sqrt[n]{2n^3+3\,n^3} = \underbrace{\sqrt[n]{5}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}_{\substack{\downarrow \\ 1\cdot 1^3=1}}$$

$$\Longrightarrow \quad a_n \to 1\,.$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{2}{5}}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} = \sqrt[n]{\frac{2n^2}{4n^2+n^2}} \leq b_n = \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{4n^2+n}} \leq \sqrt[n]{\frac{2n^2+3n^2}{4n^2}} = \underbrace{\sqrt[n]{\frac{5}{4}}}_{\substack{\downarrow \\ 1}}$$

$$\Longrightarrow \quad b_n \to 1\,.$$

Másik megoldás: $\qquad b_n := \sqrt[n]{\beta_n}$

Megmutatjuk, hogy $\beta_n \to \frac{1}{2}$ $\qquad \dots$

Ezért

$$0.4 < \beta_n < 0.6\,, \quad \text{ha } n > N_0 \quad (\exists\, N_0)$$

Ekkor $\qquad \underbrace{\sqrt[n]{0.4}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} < b_n = \sqrt[n]{\beta_n} < \underbrace{\sqrt[n]{0.6}}_{\substack{\downarrow \\ 1}}, \quad \text{ha } n > N_0$

$$\Longrightarrow \quad b_n \to 1 \quad \text{(Most is a rendőrelvet használtuk fel.)}$$

4. Feladat:

$$a_n = \sqrt[n^2]{n}$$

Megoldás.

$a_n = \sqrt[n]{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}}$ $\quad$ és $\sqrt[n]{1} \to 1$ $\quad$ ÍGY NEM!!!!

Ez így "letakarás". Nem tanultunk olyan tételt, amely szerint így csinálhatnánk. Csak a sejtéshez használható a "letakarás". (Beszéljünk erről!)
Egy helyes megoldás:

$$\sqrt[n]{n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad 0.9 < \sqrt[n]{n} < 1.1\,, \quad \text{ha } n > N_0 \quad (\exists\, N_0)$$

Ekkor $\qquad \underbrace{\sqrt[n]{0.9}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} < a_n < \underbrace{\sqrt[n]{1.1}}_{\substack{\downarrow \\ 1}}$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt[n^2]{n} \to 1 \quad \text{(A rendőrelvet használtuk fel.)}$$

Most lehet egy kicsit egyszerűbben is becsülni a rendőrelvhez:

$$1 \le \sqrt[n^2]{n} \le \sqrt[n^2]{n^2} \quad \cdots$$

2. Rekurzíve megadott sorozatok

Félő, hogy előadáson még el sem hangzott a téma, vagy csak nagyon kevés szó esett róla. Azért a hallgatókkal, vagy az előadóval konzultálva döntsék el, hogy mennyit beszélnek róla. Az elégséges tételt a konvergenciára mindenképpen írják fel a táblára, mielőtt hozzáfognak a példákhoz!

1. Feladat: Legyen

$$a_1 = 4, \qquad\qquad a_{n+1} = 7 - \frac{10}{a_n}$$

rekurzíve adott sorozat!

$$(a_n) = (4\,,\ 4.5\,,\ 4.778\,,\ \cdots)$$

a) Mutassa meg, hogy $2 \le a_n \le 5$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re!

b) Indokolja meg, hogy (a_n) konvergens!
Határozza meg az (a_n) határértékét!

Megoldás.

a) Teljes indukcióval dolgozunk:

1) $2 \le a_n \le 5\,,$ ha $n = 1, 2, 3$

2) Tegyük fel, hogy $2 \le a_n \le 5$

3) Igaz-e, hogy $2 \le a_{n+1} = 7 - \dfrac{10}{a_n} \le 5$?

Az indukciós feltétel $0 < 2 \le a_n \le 5$ miatt:

$$\frac{1}{2} \ge \frac{1}{a_n} \ge \frac{1}{5} \qquad | \cdot (-10)$$

(A reciprokvételnél megfordultak a reláció jelek.)

$$-5 \le -\frac{10}{a_n} \le -2 \qquad | + 7$$

$$2 \le 7 - \frac{10}{a_n} = a_{n+1} \le 5$$

Tehát igaz.

b) Sejtés: (a_n) monoton nő

Bizonyítás:

I. módszer:

Bizonyítás: teljes indukcióval.

1. $a_1 \le a_2 \le a_3$ teljesül
2. Tfh. $a_{n-1} \le a_n$

3. Igaz-e $\quad a_n \leq a_{n+1}$?

Azaz $\quad a_n = 7 - \dfrac{10}{a_{n-1}} \overset{?}{\leq} 7 - \dfrac{10}{a_n} = a_{n+1}$

2. miatt $\quad 0 < 2 \leq a_{n-1} \leq a_n \quad$ miatt

$$\frac{1}{a_{n-1}} \geq \frac{1}{a_n} \qquad | \cdot (-10)$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{10}{a_{n-1}} \leq -\frac{10}{a_n} \qquad | + 7$$

$$\Longrightarrow \quad a_n = 7 - \frac{10}{a_{n-1}} \leq 7 - \frac{10}{a_n} = a_{n+1}$$

Tehát a számsorozat valóban monoton nő.

II. módszer:

$a_{n+1} = 7 - \dfrac{10}{a_n} \overset{?}{\geq} a_n\,, \quad (a_n > 0) \quad \Longrightarrow \quad a_n^2 - 7\,a_n + 10 = (a_n - 2)\,(a_n - 5) \overset{?}{\leq} 0$

Mivel a)-ban beláttuk, hogy $\quad 2 \leq a_n \leq 5$, ezért az előző teljesül és így (a_n) monoton nő.

Megmutattuk, hogy a számsorozat monoton és korlátos

$$\Longrightarrow \quad (a_n) \text{ konvergens, és fennáll:}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(7 - \frac{10}{a_n}\right)$$

$$A = 7 - \frac{10}{A} \quad \Longrightarrow \quad A = 5 \text{ vagy } A = 2.$$

$A = 2$ nem lehet, mivel $a_n \geq a_1 = 4$, ezért a_n nem esik a 2 szám pl. 1 sugarú környezetébe. Így $\quad A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5\,.$

2. Feladat: Vizsgálja az alábbi sorozatok konvergenciáját!

$$a_n = \sqrt{2\,a_{n-1} + 3}$$

a) $a_1 = 1$: $\qquad (a_n) = (1\,,\ 2.236\,,\ 2.73\,,\ \cdots)$

b) $a_1 = 5$: $\qquad (a_n) = (5\,,\ 3.605\,,\ 3.195\,,\ \cdots)$

Megoldás.

$A = \sqrt{2A + 3} \quad \Longrightarrow \quad A^2 - 2A - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = -1$ vagy $A = 3\,.$

Most csak $A = 3$ jöhet szóba, hiszen $a_n > 0$. Ha tehát a számsorozat konvergens, akkor $A = 3$. Ezért dolgozunk majd a korlátosságnál is a 3-mal. A megoldás vázlata:

a) Megmutatható teljes indukcióval, hogy (a_n) monoton nő és szintén teljes indukcióval, hogy $a_n < 3$. Tehát a sorozat konvergens és az előzőek miatt $A = 3$.

(A Segédletben van hasonló példa kidolgozva.)

b) Most teljes indukcióval megmutatható, hogy (a_n) monoton csökken és $a_n > 3$. Tehát a sorozat konvergens és az előzőek miatt $A = 3$ most is.

Megjegyzés:
A b) változatot nem kell részletesen végig megcsinálni. A lényeg, hogy a hallgatók vegyék észre, hogy a sorozat viselkedése függhet a kezdő értéktől.

3. $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ határértékkel kapcsolatos feladatok

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$ felhasználható.

Ha nem volt még lőadáson (hétfői és esetleg szerdai gyakorlatok), akkor részletesebben beszéljenek róla!!!

Állapítsuk meg a következő sorozatok határértékét!

1. Feladat:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{6n^2}\right)^{6n^2+2}$$

Megoldás.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{6n^2}\right)^{6n^2} \left(1 + \frac{1}{6n^2}\right)^2 \to \mathrm{e} \cdot 1^2 = \mathrm{e}$$

(e_n részsorozatáról van szó.)

2. Feladat:

$$a_n = \left(\frac{n+5}{n-4}\right)^{n+3}$$

Megoldás.

$$a_n = \frac{\left(1 + \frac{5}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{-4}{n}\right)^n} \cdot \frac{\left(1 + \frac{5}{n}\right)^3}{\left(1 + \frac{-4}{n}\right)^3} \to \frac{\mathrm{e}^5}{\mathrm{e}^{-4}} \cdot \frac{1^3}{1^3} = \mathrm{e}^9$$

Más átalakítással:

$$a_n = \left(\frac{n-4+9}{n-4}\right)^{n-4+7} = \left(1 + \frac{9}{n-4}\right)^{n-4} \cdot \left(1 + \frac{9}{n-4}\right)^7 \to \mathrm{e}^9 \cdot 1^7 = \mathrm{e}^9$$

Ez a fajta átalakítás bizonyos példáknál sokkal hosszabb, ezért én nem szeretem. Én az első módszert használom, de persze ez nem kötelező.