A paralelogramma-tételről

Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
szalkai@almos.uni-pannon.hu

21.12.22.

Haladvány Kiadvány, 2021.12.22.
http://www.math.bme.hu/~hujter/211222.pdf

Bevezető

Nem ismeretlen a **paralelogramma-tétel** ([5]-[8]):

"*Az oldalak négyzetösszege megegyezik az átlók négyzetösszegével.*" (*)

([4]-ben csak általánosítása vektorokra található).

Egyedül [5] említi meg, hogy a tétel **megfordítása** is igaz: (*) *csak* paralelogrammákra igaz, de ennek bizonyítását nem találtam [3]-[10] -ben.

Jelen cikkben a (*) tétel megfordítását bizonyítjuk. Mivel [2] szerint a *koszinusztétel* kimondásához és bizonyításához mindössze csak a $\cos(\alpha)$ függvény elemi definíciója ($0^o < \alpha < 90^o$) szükséges, ezért alábbi felhasználása is eleminek tekinthető.

[7] -ben (*) -ot csak a Pitagorasz tétel felhasználásával bizonyítják, az érdeklődő Olvasóknak ajánluk még az érdekes [1] cikket is.

Megemlítjük még, hogy [5], [6] -ban a (*) összefüggés következő általánosítása található, bizonyítás nélkül:

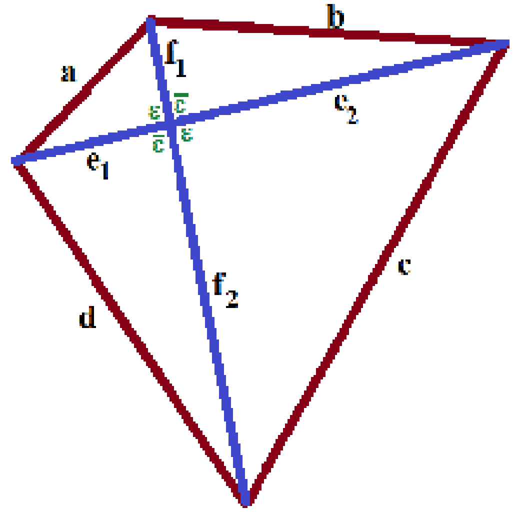
"*Tetszőleges négyszögben az oldalak négyzetösszege* $=$ *az átlók négyzetösszege* $+\ 4x^2$, *ahol* x *az átlók felezőpontjait összekötő szakasz hossza.*" (**)

Ennek bizonyítását következő cikkünkben tervezzük közzétenni.

Megemlítjük még **Ptolemaiosz tételét** és **egyenlőtlenségét** ([9]-[11]), mint (*) egy másik általánosítását.

Egy elemi bizonyítás

Jelölje ε az átlók szögét, $\bar{\varepsilon} := 180^o - \varepsilon \quad (0^o < \varepsilon \leq 90^o \leq \bar{\varepsilon} < 180^o)$, az átlók pedig osszák fel egymást e_1 , e_2 illetve f_1 , f_2 szakaszokra.



A (*) tétel megfordítását bizonyítjuk, tehát az

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 \tag{1}$$

vagyis az

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (e_1 + e_2)^2 + (f_1 + f_2)^2 \tag{2}$$

feltételből kell igazolnunk, hogy a négyszög paralelogramma.

A koszinusztétel [2] szerint

$$\begin{aligned} a^2 &= e_1^2 + f_1^2 - 2e_1 f_1 \cos(\varepsilon) \ , \\ b^2 &= f_1^2 + e_2^2 + 2e_2 f_1 \cos(\varepsilon) \ , \\ c^2 &= e_2^2 + f_2^2 - 2e_2 f_2 \cos(\varepsilon) \ , \\ d^2 &= f_2^2 + e_1^2 + 2e_1 f_2 \cos(\varepsilon) \ , \end{aligned}$$

összeadva:

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = 2\,(e_1^2 + f_1^2 + e_2^2 + f_2^2) + 2\cos(\varepsilon)\cdot(e_1 f_2 + e_2 f_1 - e_1 f_1 - e_2 f_2) =$$

$$= 2\left(e_1^2 + f_1^2 + e_2^2 + f_2^2\right) + 2\cos(\varepsilon)\cdot(e_1 - e_2)(f_2 - f_1)\ ,$$

a (2) feltétellel összevetve (hiszen $e = e_1 + e_2$ és $f = f_1 + f_2$) :

$$(e_1 + e_2)^2 + (f_1 + f_2)^2 = 2\left(e_1^2 + f_1^2 + e_2^2 + f_2^2\right) + 2\cos(\varepsilon)\cdot(e_1 - e_2)(f_2 - f_1)$$

kapjuk:

$$2e_1e_2 + 2f_1f_2 = e_1^2 + f_1^2 + e_2^2 + f_2^2 + 2\cos(\varepsilon)\cdot(e_1 - e_2)(f_2 - f_1)\ ,$$

átrendezve:

$$0 = (e_1 - e_2)^2 + (f_2 - f_1)^2 + 2\cos(\varepsilon)\cdot(e_1 - e_2)(f_2 - f_1)\ .$$

Amennyiben $(e_1 - e_2)$ vagy $(f_2 - f_1)$ valamelyike nulla, akkor a másik is nulla kell, hogy legyen, vagyis az átlók felezik egymást, a négyszög valóban paralelogramma.

Ha $e_1 \neq e_2$ **és** $f_1 \neq f_2$, akkor vezessük be az $u := e_1 - e_2$ és $v =: f_2 - f_1$ jelöléseket (vigyázat, u és v negatív is lehet!) :

$$0 = u^2 + v^2 + 2\cos(\varepsilon)\cdot uv \qquad / \ : \ uv$$

azaz:

$$0 = \frac{u}{v} + \frac{v}{u} + 2\cos(\varepsilon)\ .$$

Tudjuk, hogy $\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \leq -2$ vagy $\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geq 2$, tehát a fenti egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $|u| = |v|$ (azaz $|e_1 - e_2| = |f_2 - f_1|$) és $\cos(\varepsilon) = \pm 1$.

Feltettünk, hogy $\varepsilon \leq 90^o$, tehát csak $\varepsilon = 0^o$ lehet, vagyis a négyszög *elfajuló.* Ez esetben $v = -u$, azaz $v = f_2 - f_1 = e_2 - e_1$, vagyis $f_2 = f_1 + v$ és $e_2 = e_1 + v$. "Csukjuk össze" az ábrát az átlók metszéspontja körül, ekkor $a = f_1 - e_1 = f_2 - e_2 = c$, $b = f_1 + e_2 = f_1 + v + e_1 = d$, vagyis a négyszög most elfajuló paralelogramma.

Hivatkozások

[1] **Hujter Mihály:** *A Pitagorasz-tétel meglepő variánsai történeti érdekességek*, Haladvány Kiadvány 2021, https://math.bme.hu/~hujter/halad.htm , http://math.bme.hu/~hujter/211109.pdf

[2] **Szalkai István:** *A koszinusztétel trigonometria nélkül*, Haladvány Kiadvány 2021, https://math.bme.hu/~hujter/halad.htm , http://math.bme.hu/~hujter/211223.pdf

[3] **Wikipédia:** *Paralelogramma*, https://hu.wikipedia.org/wiki/Paralelogramma

[4] **Wikipédia:** *Paralelogramma-azonosság*, https://hu.wikipedia.org/wiki/Paralelogramma-azonosság

[5] **Wikipedia:** *Parallelogram*, https://en.wikipedia.org/wiki/Parallelogram

[6] **Wikipedia:** *Parallelogram_law*, https://en.wikipedia.org/wiki/Parallelogram_law

[7] **Wikipedia:** *Parallelogrammgleichung*, https://de.wikipedia.org/wiki/Parallelogrammgleichung,

[8] **Wikipedia:** *Règle_du_parallélogramme*, https://fr.wikipedia.org/wiki/Régle_du_parallélogramme

[9] **Wikipedia:** *Ptolemy's_inequality*, https://en.wikipedia.org/wiki/Ptolemy's_inequality

[10] **Wikipedia:** *Ptolemy's_theorem*, https://en.wikipedia.org/wiki/Ptolemy's_theorem

[11] **Wikipédia:** *Ptolemaiosz-tétel*, https://hu.wikipedia.org/wiki/Ptolemaiosz-tétel